

第一章 绪 论

有关承受动荷载的基础的设计问题，不论这些动荷载是来自它所支承的机器，还是来自其他外部的振源，都需要根据当地土质条件和周围环境来专门解决。这些基础必须首先满足静荷载的设计准则，然后满足动力条件。

抗动荷载的设计需要回答下列四个问题：（1）什么是所选定的设计功能的“破坏”？破坏标准的界限值是多少？（2）作用荷载与破坏标准中的一些重要的量之间有什么关系？（3）怎样确认和估算这些重要的量？（4）最后，在估算了这些量之后，应在设计中采用多大的安全系数（或在估算这些量的可靠程度时给予怎样的统计评价）？

编写本书的基本目的，是提供一些新的资料以便在设计过程中有助于回答上述四个问题。这些资料可作为诸如劳希(Rausch, 1943)、洛伦茨(Lorenz, 1960)、巴尔坎(Barkan, 1962)、梅杰(Major, 1962)以及哈里斯(Harris)和克里德(Crede) (1961)等有关著作*中已有的大量有价值的资料的补充。

1-1 设 计 标 准

设计过程中最重要的步骤就是确立设计标准。它规定了正待解决的问题，也是衡量计算结果的标尺，同时，它还可能是测量原型基础性能的标尺。对于承受动荷载的基础，它们的设计标准一般是用工作状态时的加速度、速度或位移的极限值来表示的。这些标准的极限值是根据设计功能的“破坏”来确定的。第10-2节中叙述了几个对不同要求的这些设计标准的界限值。值得注意的是，举例来说，如果设计的目的是为了“防止机器的严重

* 全部参考资料名称按作者姓名的字母顺序列在书后的参考文献中。

损坏”，那么，频率在1000周/分时0.001吋的振幅值，对于位移-频率标准来说，将是一个令人满意的数字；但是，如果设计的目的是使“振动不为人所感觉”，则上述同样的频率和振幅将完全不合适了（见图10-1）。因此，在开始设计时，必须首先确定“基本规定”。

1-2 作用荷载与控制设计

标准的一些量之间的关系

作用荷载有时是很难定量计算的。由地震、风或波浪等自然力以及由爆炸、交通、建筑施工或邻近机器等人为力所产生的动荷载，通过结构体系或地基土而传给基础。在大多数情况下，必须在类似于拟定的设计条件下进行野外测量，并假定这些荷载将会在原型中遇到。因此，必需具备有关能量在土中传播和被拦截的资料（第三、四、八章）以及有关野外测定振动和振动力方法的一些知识（第九章）。某些简单机器产生的动力在第十章中讨论。

作用荷载与破坏标准之间的关系是通过分析方法建立起来的。因为动力机器基础破坏标准的振动极限值通常只有千分之几吋，破坏机理是在地基土的弹性变形范围以内。因而，按弹性支承体系来考虑所得到的解，常能提供作用荷载与基础的动态反应之间令人满意的关系。第七章讨论了一些主要是根据弹性理论得出的有关基础动态反应的解。这些弹性理论解要求确定弹性材料的泊松比和剪切模量；对动力机器基础设计来说，也意味着上述第（2）和第（3）个问题中所谓重要的量就是指土的剪切模量和泊松比。

1-3 土的性质的确定

获得精确的关于土性的代表性数据的过程或许是设计中最困

难的部分。土样必须从拟建的建筑场地中取得，并按预计能代表工作环境的条件进行试验。由于影响基础动态反应的土的性质，证实了它与土的静力性质所涉及的变形在数量上为不同的量级，主要在过去的十年里，已经发展了一套新的室内和野外试验方法。第六章包括了对于设计所需要的土动力性质的讨论以及关于试验条件对这些性质的影响的一些资料。有关试验设备的进一步讨论见第九章。

1-4 设 计 方 法

对于某一个具体的设备，有好几种方法可以满足设计标准，其中几种方法将在第十章中讨论，但重点将放在集总参数法上。对于集总参数体系的解，已经有大量的文献可资参考，但总是有一个怎样确定集总质量、弹簧和阻尼器的代表性数值的问题。对于直接支承在土上的动力基础，用弹性半空间体上基础的振动理论求解给定的地基基础体系的阻尼常数和弹簧常数，可得到满意的结果。集总质量代表基础和它所支承的设备的重量。在第十章中附有一些例题，说明根据弹性半空间理论求出阻尼常数和弹簧常数的集总参数法的应用。

把土作为弹性半无限体，更有利于将地球物理学中的解应用到土中波的传播和基础的隔振等问题上来，也就是把理论研究扩展到由于几何的不连续性而产生土中波的反射和绕射等问题上来。

本书的内容主要是针对机器基础的分析和设计的问题，同时包括波的能量在地基土中的传播。

有关这些问题的资料是从地震学、弹性理论、土动力学、仪器学和机械设计等学科领域中搜集来的。每一门学科都有它专门的一套术语和符号，本书尽可能采用。应当承认，读者要熟悉自己专业以外学科领域中的术语是会有些困难的。为了便于参考，在本书前面列出了符号表。

第二章 基本体系的振动

在许多场合下，为了预示或分析一个振动体系的反应，可以满意地把它简化为一个集总参数的理想体系。最简单的体系是典型的具有粘滞阻尼的单自由度体系，它由质量、弹簧和阻尼器所组成。因为这个体系便于用数学式来表示，它的解可在所有振动学教科书和微分方程的数学书籍中找到。此外，虽然这样一个体系似乎是任何实际体系的粗略简化，但在很多情况下，它提供了一个十分满意的作为动力分析的模型，即使这个实际体系不可能物理地来比拟一个数学模型。例如，将如第七章中所指出的一个位在弹性介质上的基础，就可以用一个与单自由度体系有关的若干元件数学地来表示，这些物理常数可由基础和弹性介质的尺寸和性质来确定。一旦一个体系被简化成为一个模型时，下一步就是分析的工作，根据问题的类型可以用解析法或图解法。有时，模型中还应该包括非线性特性以便使前者与实际体系更加接近。虽然，这些情况时常导致复杂的数学式，但用图解法通常可以容易地获得解答。

对于有些体系用一个单自由度模型不能精确地表示它的动态反应。在这种情况下，就须采取两个或多自由度模型。这样，分析就变得相当复杂，以致必须使用数字或模拟计算机。对于不能用弹簧、质量和阻尼器等几个集总部分来表示的连续体系，手算通常只能用于确定这个体系的固有频率或稳态振动的反应特性。

以下各节将介绍解析法、图解法和数值计算法，它们成为基础、主要的机械部件和结构部件的振动设计和分析所必需的基本工具。

2-1 振 动

谐和或正弦运动是振动运动中最简单的形式，并且可以用下列数学方程式来表示

$$z = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (2-1)$$

作为时间的函数它可作图如图 2-1 所示。数值 A 表示距离中间位置的位移幅度，有时叫做单振幅。距离 $2A$ 表示峰与峰之间的位移幅度，有时叫做双振幅，它是振动记录中最经常被测量的量。圆频率 ω 定义为振动的速率，它以每单位时间的弧度来表示， 2π 弧度等于振动的一个全循环（周）。以单位时间的周数来表示的振动频率可以用下式给出：

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2-2)$$

（在有些文献中，每秒周数的单位叫做赫兹，缩写为 Hz）。运动开始重复所需要的时间叫做振动周期，用下式表示

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2-3)$$

由图 2-1 可以看到，为了对谐和运动给出物理定义，必须要有两个独立的量。最常用的参数就是振幅和频率。有时，当两个具有相同频率的谐和振动，它们具有相同符号的峰值不是同时发生时，为了要表明它们之间的时间关系，就需引入第三个量——相角 φ 。在式（2-1）中，相角是时间起点的基准。然而，通常，相角是具有相同频率另一个量的基准。例如，在谐和振动体系中的某一基准点，运动可以下式表示

$$z_1 = A_1 \sin \omega t \quad (2-4)$$

而在任何另外一点，运动可表示为

$$z_i = A_i \sin(\omega t - \varphi_i) \quad (2-5)$$

这时 $\pi \geq \varphi \geq -\pi$ 。

φ 为正值时，峰值运动在 1 点发生后的半个循环以内，运动

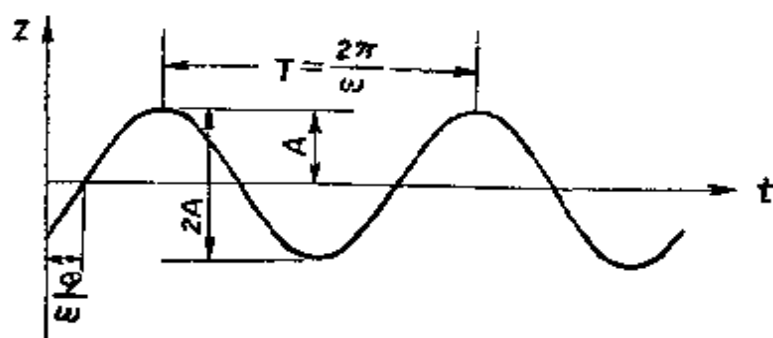


图 2-1 描述谐和运动的各种量

在 i 点达到了峰值。这个角度 φ 叫做相滞后。 φ 为负值时，运动在 i 点前的半个循环以内，峰值运动在 i 点发生，则 φ 叫做相超前。

显然，振动物体的所有运动并非都是谐和的。事实上，谐和运动一般只在被控制的试验室条件下才能得到。在图 2-2 中，表示了其他三种运动形式。周期运动（图 2-2a）是一种运动形式，它的位移—时间关系不断地自行重复；而不规则运动，它的位移—时间图形永不重复，如图 2-2b 所示。图 2-2c 表示涉及到阻尼

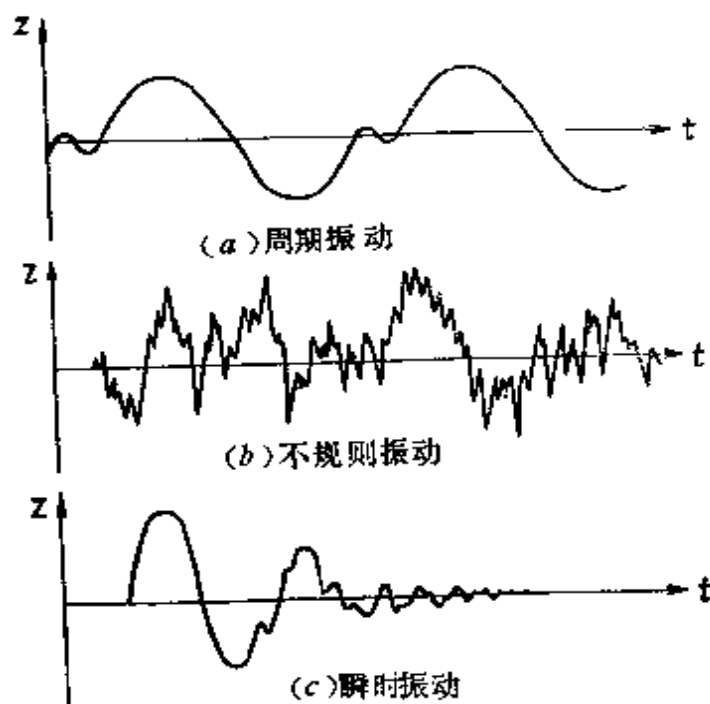


图 2-2 周期、不规则和瞬时振动

体系的瞬时运动，这时一个冲击型扰力已经在一个短时间内作用着。在脉冲以后，振动就开始衰减，一直到这体系回到静止状态为止。有关瞬时运动的问题将在后一节中讨论。

当频率略有不同的两个谐和运动相叠加时，就产生非谐和运动，如图 2-3 所示，除振幅有逐渐增大和减小外，它看来象是谐和的。对于这种情况，运动的表达式可以写成为两个谐和运动之和，即

$$z = A_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2) \quad (2-6)$$

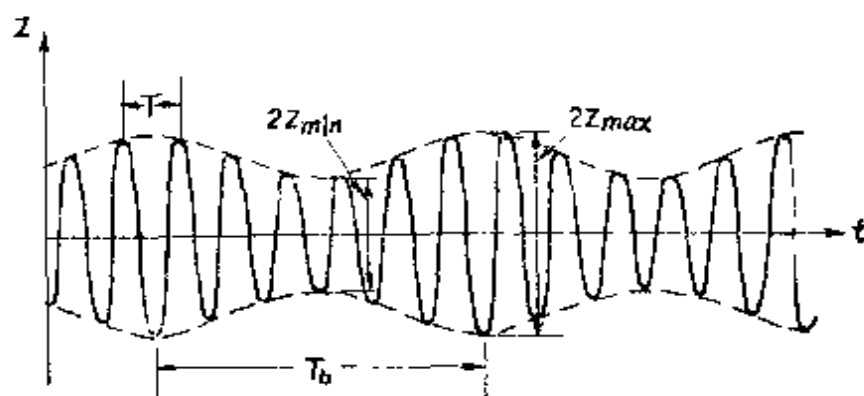


图 2-3 拍振

虚线代表振幅的包络线，它按照拍频而振动。拍频 f_b 等于两个振源频率之差：

$$f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi} \quad (2-7)$$

合成振动的频率是两个分振动频率的平均值，可用下式给出

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (2-8)$$

振动的最大和最小振幅分别等于两个振源振幅的和与差：

$$\begin{aligned} z_{max} &= A_1 + A_2 \\ z_{min} &= |A_1 - A_2| \end{aligned} \quad (2-9)$$

用式 (2-6) 表示的运动形式时常发生在开动两个设计成相同转速的机器并引起振动的时候。如果两个机器的驱动体系不同步，那么它们的运转速度将有很小的差别，并引起拍频振动。

到现在为止，只讨论了位移。而在许多问题中还必须研究位

移对时间的一阶和二阶导数，有时还有三阶导数。这些量可由式（2-1）求导而得出，如下所示：

$$\text{位移} = z = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (2-10a)$$

$$\text{速度} = \frac{dz}{dt} = \dot{z} = \omega A \cos(\omega t - \varphi) \quad (2-10b)$$

$$\text{加速度} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z} = -\omega^2 A \sin(\omega t - \varphi) \quad (2-10c)$$

$$\text{加速度率} = \frac{d^3 z}{dt^3} = -\omega^3 A \cos(\omega t - \varphi) \quad (2-10d)$$

各量上面的点表示对时间的导数。如果将所得到的各个量作一比较，可以看出，对每一个相继的导数，所得到一个量的幅值等于前

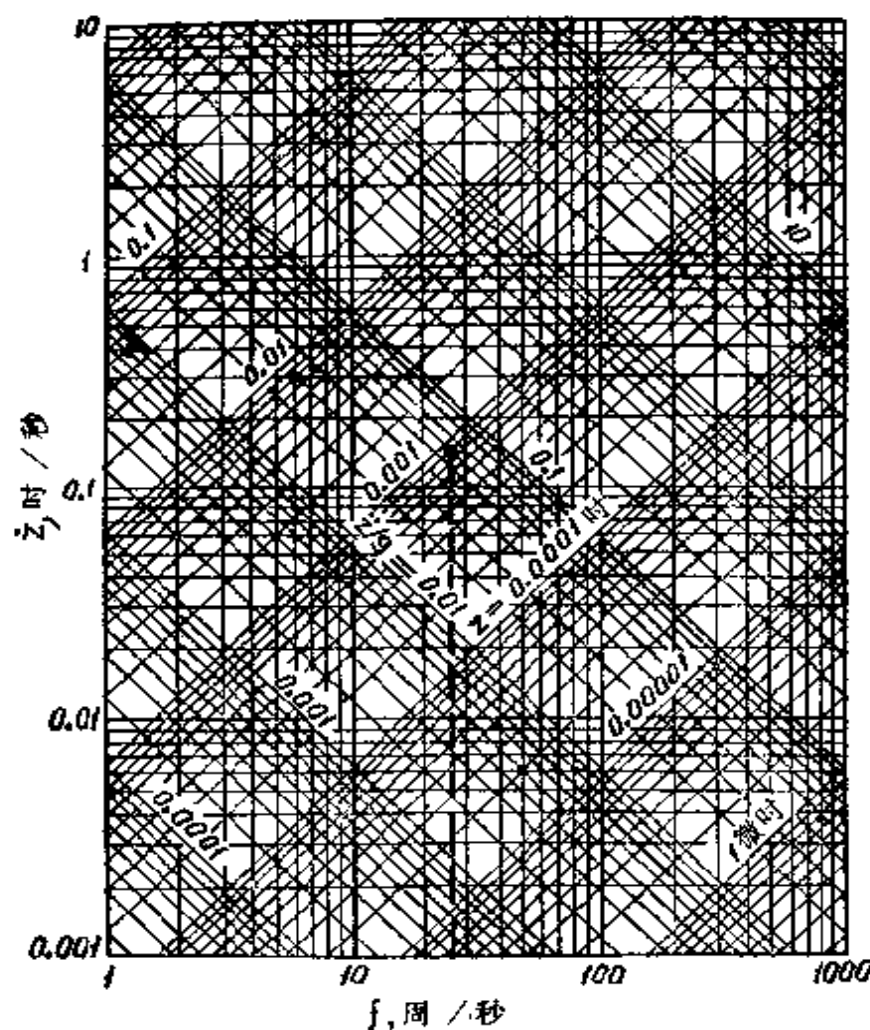


图 2-4 谐和运动的振动诺模图

一个量乘以 ω 。

因此，对谐和运动来说，位移振幅和频率是决定任何其他量的幅值所必需的全部数值。事实上，如果任何两个幅值或者一个幅值和一个频率已经确定，那么，所有其他量都可以单独确定。在许多情况下，一个振动诺模图，如图2-4所示的，提供了频率、位移振幅、速度幅和加速度幅四个量之间方便的转换关系。需要注意的是，在图2-4中，加速度是用一个乘以 g 的系数来表示的。符号 g 在本书中用以代表重力加速度，而

$$1g = 386 \text{ 吋/秒}^2 \quad (2-11)$$

在使用图2-4时，对所有的量，无论用单振幅或是双振幅都必须一致。例如，当频率为25周/秒时，峰值位移为0.001吋将产生0.16吋/秒的峰值速度和0.065 g 的峰值加速度。这个点用一个圆和从25周/秒处画的虚线标在图2-4中。

对于非谐和运动，位移、速度和加速度之间不存在简单的关系，因此，由一个量转换成另一个量时，就必须用微分或积分来求得。

2-2 谐和运动的矢量表示法

求解涉及到谐和运动的问题时，采用旋转矢量的概念就可以得到一个物理的感觉。但是，这个方法不能用以求解瞬间运动的问题，这时，只能采用图解法。

将位移作为一个基准量，并用正弦函数来改写式(2-10)，可得

$$z = A \sin \omega t \quad (2-12a)$$

$$\dot{z} = \omega A \cos \omega t = \omega A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2-12b)$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin (\omega t + \pi) \quad (2-12c)$$

由式(2-12)可以看出，速度超前位移 90° ，而加速度超前位移 180° 。如果长度为 A 的矢量绕原点作逆时针方向旋转，如图2-5

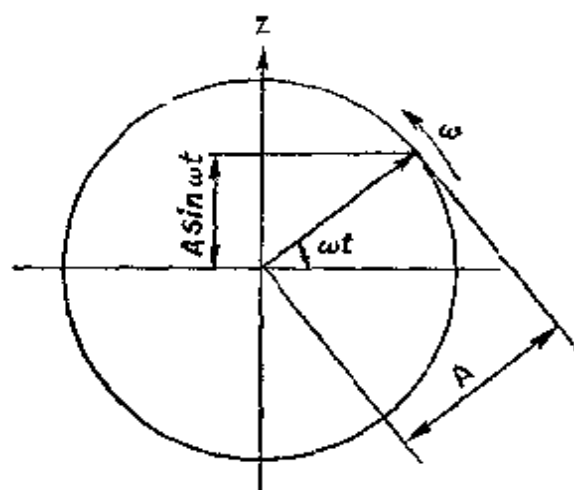


图 2-5 谐和运动的矢量表示

所示，它在竖轴上的投影将等于 $A \sin \omega t$ ，它正好是式 (2-12a) 所给定的位移表达式。可见速度可以用长度为 ωA 的矢量的竖向投影来表示，而这矢量比位移矢量超前 90° 。同样，加速度可以用较位移矢量超前 180° 、长度为 $\omega^2 A$ 的矢量来表示。上述所有的三个量都表示在图2-6上。

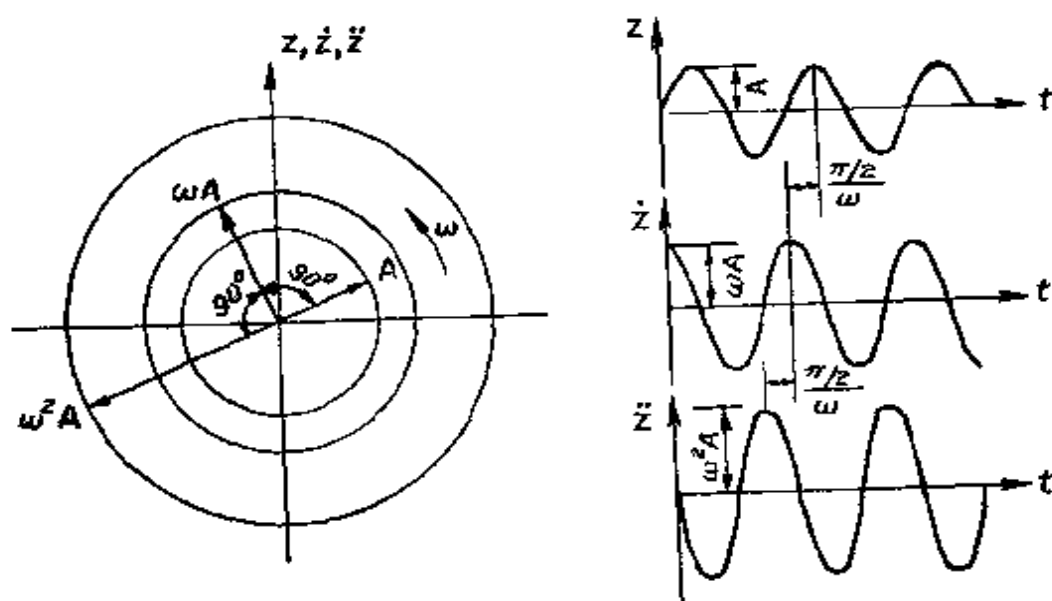


图 2-6 谐和振动的位移、速度和加速度的矢量表示

2-3 单自由度体系

下面将讨论只有一个自由度的振动体系的解。在这样一个体

系中，它所有部分的位置都能用任一瞬时的单一变量来表示。如果一个体系要求多于一个的变量来确定它的位形，那么，它就是一个多于一个自由度的体系。一般来说，一个体系自由度的数目等于任一瞬时决定这体系所有各部分位置所必需的独立变量的数目。

无阻尼的自由振动

图2-7a表示了一个由一个弹簧常数为 k 的线性弹簧和质量 $m = W/g$ 的重量 W 所组成的体系。弹簧常数 k 以弹簧单位变形所引起的力来表示。重量只能作竖向运动，并且没有转动。这一问题的解决可以用测量 z_s 位置以下的位移 z 而得以简化，而 z_s 是从弹簧力等于零那一点开始量起。 z_s 这段距离表示静位移，并由下式给出

$$z_s = \frac{W}{k} \quad (2-13)$$

运动微分方程可由牛顿第二定律得出。该定律指出，作用在恒质量体系上的净不平衡力等于这体系的质量乘以它的加速度。如果图2-7a中所示的体系从静止位置移动了一个距离 z ，弹簧中的力就等于 $(W + kz)$ ，如图2-7b所示。因此，从牛顿第二定律，得到

$$W - (W + kz) = -\frac{W}{g}\ddot{z} = m\ddot{z} \quad (2-14)$$



(a) 在静止位置 $z = 0$;

(b)

图 2-7 无阻尼的弹簧—质量体系

简化后，得

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad (2-15)$$

从任何一本微分方程的书都可找到上述方程式的解为

$$z = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (2-16)$$

式中任意常数 C_1 和 C_2 可由体系的初始条件决定。 $\sqrt{k/m}$ 项相当于这体系的无阻尼固有圆频率，并等于

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ 弧度/秒} \quad (2-17a)$$

而无阻尼固有频率为

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ 周/秒} \quad (2-17b)$$

用 W/g 代替 m ， z_s 代替 W/k ，则无阻尼固有频率可以用另一形式表示如下，即

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{z_s}} \quad (2-18)$$

表2-1给出了大多数问题实用范围内对应于 z_s 的 f_n 值。

表 2-1

z_s (吋)	f_n (周/秒)
0.001	99.0
0.01	31.3
0.1	9.90
1.0	3.13

从上述内容可以看出，对于无阻尼单自由度体系的自由振动，它的运动是谐和的，并在固有频率 f_n 时发生。运动的振幅可由初始条件来确定，其中两个初始条件必须预先给定。如果位移和速度在 $t=0$ 时为已知，并分别用 z_0 和 \dot{z}_0 来表示，则式 (2-16)

中的常数项 C_1 和 C_2 可由下式得到:

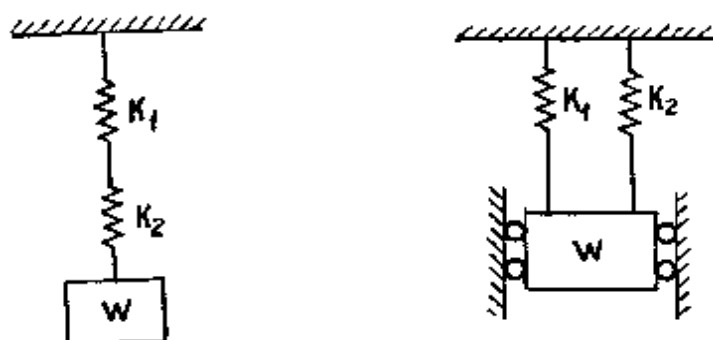
$$C_1 = \frac{\dot{z}_0}{\omega_n} \quad (2-19a)$$

$$C_2 = z_0 \quad (2-19b)$$

串联和并联的弹簧

虽然, 一个单自由度体系可以方便地用一个弹簧附在一个质量上来表示; 但在多数实际体系中, 为了保持稳定, 通常需要几个弹簧。但是, 计算时可以用等效的单一弹簧来代表这一组弹簧。图2-8中表明弹簧布置的两种一般形式。对串联布置来说, 每一个弹簧中的力相等。如图2-8a中所示, 在重量 W 的作用下, 两个弹簧常数各为 k_1 和 k_2 的两个弹簧将发生位移, 这个静位移等于

$$z_s = \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2} = W \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (2-20)$$



(a) 串联弹簧

(b) 并联弹簧

图 2-8 串联和并联弹簧体系

因此, 等效弹簧常数为

$$k_e = \frac{W}{z_s} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \quad (2-21)$$

对于一个具有 n 个串联的弹簧的体系, 它的有效弹簧常数的表达式为

$$k_e = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}} \quad (2-22)$$

图2-8b中的并联弹簧布置必须满足每个弹簧具有相同的位移这个条件，而且每个弹簧中力的总和必须等于重量 W ：

$$W = P_1 + P_2 = z_s k_1 + z_s k_2 \quad (2-23)$$

因此，对于并联的弹簧，

$$k_e = \frac{W}{z_s} = k_1 + k_2 \quad (2-24)$$

一般说来，一个有 n 个并联弹簧体系的有效弹簧常数由下式给出

$$k_e = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (2-25)$$

有阻尼的自由振动

如果有一个元件附加在上面所分析的弹簧-质量体系上以便耗散一部分能量，这样就得到一个性能更接近于实际的体系。最简单的数学元件就是粘滞阻尼器，如图2-9a所示。阻尼器中的力与速度 \dot{z} 成正比，其值可用粘滞阻尼系数 c 来计算，阻尼系数的单位为磅/吋/秒。因此，阻尼器上就作用着一个与质量的运动方向相反的力。

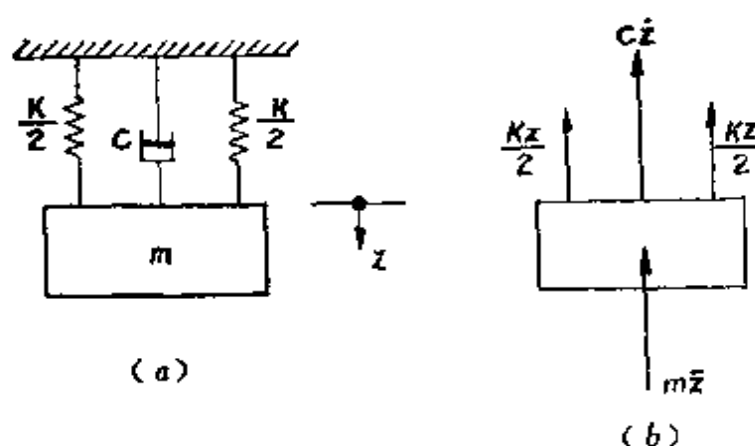


图 2-9 有粘滞阻尼的单自由度体系

对于图2-9中所示体系的自由振动，它的运动微分方程可以应用牛顿第二定律和通过测量从静止位置的位移来建立。一个正的位移将产生一个以负方向作用在质量上的弹簧力(回复力)，而

一个正的速度将产生一个作用在负方向上的阻尼力，如图2-9b所示。对于自由振动，取所有竖向力之和等于零，得到

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0 \quad (2-26)$$

如果令 $z = \exp(\beta t)$ ，则上式可改写成

$$m\beta^2 + c\beta + k = 0 \quad (2-27)$$

解上式，得

$$\beta_1 = -\frac{1}{2m}[-c + \sqrt{c^2 - 4km}] \quad (2-28a)$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2m}[-c - \sqrt{c^2 - 4km}] \quad (2-28b)$$

对上述方程有三种可能的情况需要讨论，它取决于它的根是实根、复数根还是相等的根。

情况 1 $c^2 > 4km$ ，对这种情况，式(2-27)的两个根全是实根，而且是负的，则式(2-26)的解为

$$z = C_1 \exp(\beta_1 t) + C_2 \exp(\beta_2 t) \quad (2-29)$$

因为 β_1 和 β_2 都是负值， z 将不变号地按指数递减，如图2-10a所示。这时，这体系不会产生振动，并叫做过阻尼体系。

情况 2 $c^2 = 4km$ ，这个情况只有数学上的意义，因为等式必须满足以便让式(2-27)的根相等。它的解为

$$z = (C_1 + C_2 t) \exp\left(-\frac{ct}{2m}\right) \quad (2-30)$$

这个情况除了可能改变一次 z 的符号外，与上述过阻尼情况相似，如图2-10b所示。需要满足上述条件的 c 值叫做临界阻尼系数 c_c ，而式(2-30)表示临界阻尼情况。因此，

$$c_c = 2\sqrt{km} \quad (2-31)$$

阻尼比 D 可由下式确定：

$$D = \frac{c}{c_c} \quad (2-32)$$

情况 3 $c^2 < 4km$ ，对于阻尼小于临界阻尼的体系，式(2-27)的根将是共轭复根。引入 c_c 的关系式，则 β_1 和 β_2 变为

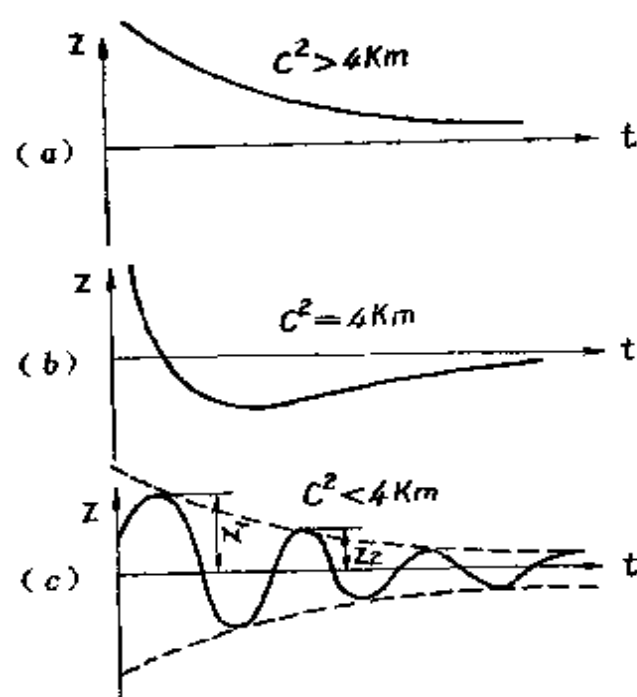


图 2-10 粘滞阻尼体系的自由振动
(a)过阻尼的; (b)临界阻尼的; (c)阻尼不足的

$$\beta_1 = \omega_n (-D + i\sqrt{1-D^2}) \quad (2-33a)$$

$$\beta_2 = \omega_n (-D - i\sqrt{1-D^2}) \quad (2-33b)$$

将式(2-33)代入式(2-29)中,并借助欧拉公式 $\exp i\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ 以转换成三角函数的形式,得到

$$z = \exp(-\omega_n Dt) (C_3 \sin \omega_n t \sqrt{1-D^2} + C_4 \cos \omega_n t \sqrt{1-D^2}) \quad (2-34)$$

式中 C_3 和 C_4 是任意常数。式(2-34)指出运动是振荡性质的,且振幅随时间的衰减与 $\exp(-\omega_n Dt)$ 成正比,如图 2-10c 中虚线所示。对式(2-34)的研究又表明:自由振动的频率小于无阻尼固有圆频率,并且,当 $D \rightarrow 1$ 时频率接近于零。有阻尼振动的固有圆频率 ω_d 用无阻尼振动的固有圆频率 ω_n 表示时,可由下式得出:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-D^2} \quad (2-35)$$

并叫做有阻尼固有圆频率。对于比临界阻尼小40%的体系,固有频率的减小不到10%。对于较强的阻尼情况,固有频率的减小则

较为明显。

参看图2-10, 振动的两个相继的峰值振幅用 z_1 和 z_2 来表示, 它们将分别发生在时间 t_1 和 t_2 。求解 t_1 和 t_2 时式 (2-34) 的 z 值, 得到

$$z_1 = \exp(-\omega_n D t_1) (C_3 \sin \omega_d t_1 + C_4 \cos \omega_d t_1) \quad (2-36a)$$

$$z_2 = \exp(-\omega_n D t_2) (C_3 \sin \omega_d t_2 + C_4 \cos \omega_d t_2) \quad (2-36b)$$

但是, $t_2 = t_1 + 2\pi/\omega_d$ 。因此, $\omega_d t_2 = \omega_d t_1 + 2\pi$,

所以 $\sin \omega_d t_2 = \sin(\omega_d t_1 + 2\pi) = \sin \omega_d t_1$

因此, 峰值振幅的比值可由下式给出

$$\frac{z_1}{z_2} = \exp \left[-\omega_n D (t_1 - t_2) \right] = \exp \left(\omega_n D \frac{2\pi}{\omega_d} \right) \quad (2-37)$$

将式 (2-35) 代入上式, 得

$$\frac{z_1}{z_2} = \exp \left(\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \right) \quad (2-38)$$

对数递减率是用振动时两个相继的振幅的自然对数来确定, 或

$$\delta = \ln \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \quad (2-39)$$

由此可以看出粘滞阻尼的一个性质就是振动的衰减是这样的以致两个相继的峰值振幅的比值为一常数。因此, 对数递减率就可从任何两个峰值振幅 z_1 和 z_{1+n} 由下列关系式求得

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{z_1}{z_{1+n}} \quad (2-40)$$

需要特别指出的, 如果阻尼如式 (2-26) 所假设的那样是粘滞阻尼型的, 而峰值振幅是在对数坐标上以及每秒周数在算术坐标上作图, 则这些点就将落在一条直线上。

无阻尼的强迫振动

下面将讨论作用有力幅为 Q_0 的谐和力 Q 的弹簧-质量体系的动态反应, 如图 2-11a 所示。应用牛顿第二定律, 运动的微分方程为

$$m\ddot{z} + kz = Q_0 \sin \omega t \quad (2-41)$$

除了满足式(2-41)右侧的解以外, 上式的解还包括自由振动式(2-16)的解。为了得到这个问题的物理感觉, 上式的特解可采用旋转矢量的方法来得到。由于作用力是谐和的, 所以可合理假定弹簧的内力和惯性力也将都是谐和的。因此, 这体系的运动将是下列形式

$$z = A \sin \omega t \quad (2-42)$$

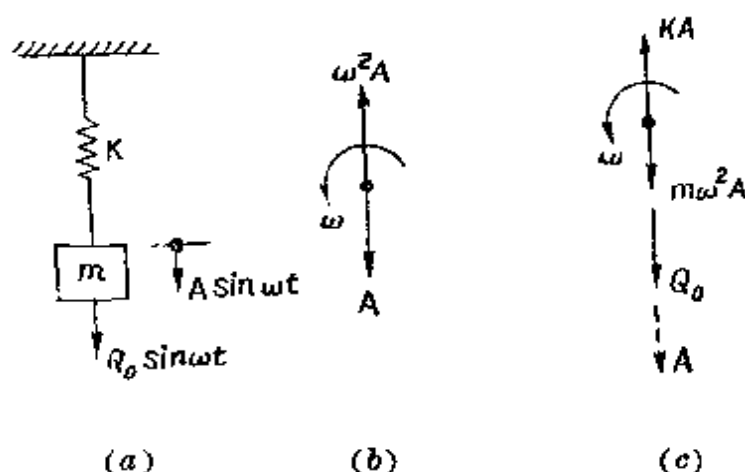


图 2-11 无阻尼单自由度体系的强迫振动
(a)体系; (b)运动矢量; (c)力矢量

并用图象表示如图 2-11b 所示。作用在质量上的力见图 2-11c。弹簧力作用的方向与位移的方向相反, 而惯性力作用的方向则与加速度的方向相反。力幅为 Q_0 的激振力的矢量画在与位移矢量的同相。因此, 由平衡的要求,

$$Q_0 + m\omega^2 A - kA = 0 \quad (2-43)$$

得出

$$A = \frac{Q_0}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{Q_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2-44)$$

从式(2-44)和式(2-16), 得到的全解为

$$z = \frac{\frac{Q_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \omega t + C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t \quad (2-45)$$

对于一个实际的体系，与式(2-45)最后两项有关的振动，由于阻尼的作用，最后终将消失，只剩下所谓稳态振动的解：

$$z = \frac{\frac{Q_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \omega t \quad (2-46)$$

对式(2-44)的研究表明，如果 $\omega < \omega_n$ ，则 A 为正；如果 $\omega > \omega_n$ ，则 A 为负。但是，注意到 $-A \sin \omega t = A \sin(\omega t - \pi)$ ，如果 $\omega > \omega_n$ ，并引入力和位移的相角等于 π ，则运动的振幅总能取为正值。如果振幅 A 除以在力幅 Q_0 作用下这体系所产生的静位移 Q_0/k ，则可得到动力放大系数 M ：

$$M = \frac{A}{\frac{Q_0}{k}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2-47)$$

它与力和位移之间相角的关系已经一道画在图2-12中。因为计算模型不包括阻尼，那么，放大系数在 $\omega = \omega_n$ 时就成为无穷大。在解中有一个重要特点必须着重指出：当 $\omega < \omega_n$ 时，激振力和位移同相，而和弹簧力相反。当 $\omega > \omega_n$ 时，则激振力和位移异相 180° ，并和惯性力相反。当 $\omega = \omega_n$ 时，惯性力和弹簧力相平衡，而激振力将使运动振幅无限制地增大。

有阻尼的强迫振动

将粘滞阻尼引入单自由度模型中，将使得这体系更接近于实际体系的特性，因为阻尼总是以这样或那样的形式存在着。虽然，采用粘滞阻尼只是为了数学上的方便，但对少数特殊情况来说，采用这样的模型就不能令人满意了。图2-13a表明正待分析的体系。利用对于无阻尼振动情况下的推论，微分方程

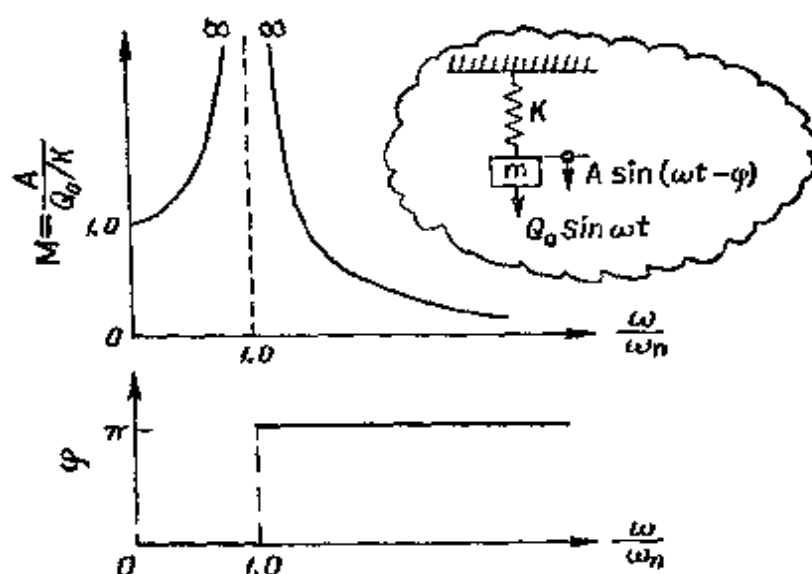


图 2-12 无阻尼单自由度体系的动力放大系数和力与位移间的相角

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = Q_0 \sin \omega t \quad (2-48)$$

的特解可以采用旋转矢量的概念而得到。位移矢量、速度矢量和加速度矢量如图2-13b所示。在这个问题中，位移假设为

$$z = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (2-49)$$

所以，当力矢量如图2-13c所示时，则激振力将超前位移矢量 φ 度。这时，很明显存在着相角，因为阻尼力 $c\omega A$ 与弹簧力和惯性力是异相 90° 。取水平和竖直方向上矢量的和等于零，得到两个方程式：

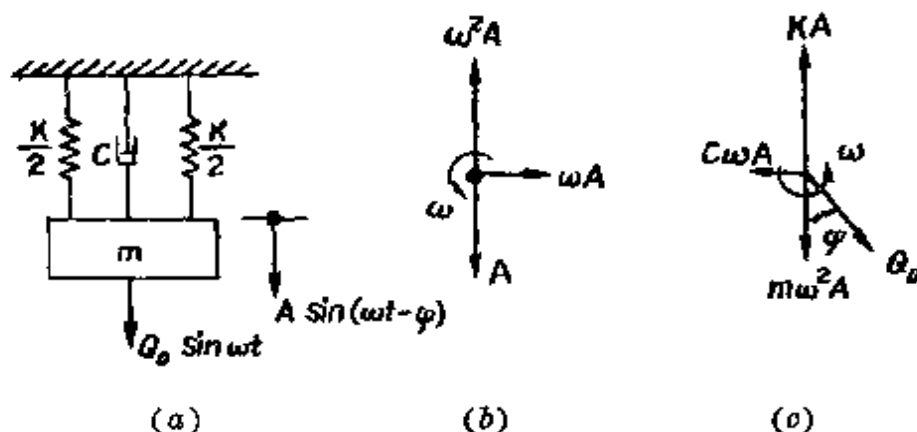


图 2-13 粘性阻尼单自由度系统的强迫振动
(a)体系；(b)运动矢量；(c)力矢量

$$kA - m\omega^2 A - Q_0 \cos\varphi = 0 \quad (2-50a)$$

$$c\omega A - Q_0 \sin\varphi = 0 \quad (2-50b)$$

式中 A 和 φ 为未知数。解 A 和 φ ，得到

$$A = \frac{Q_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \quad (2-51)$$

$$\tan\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (2-52)$$

将 D 和 ω_n 的表达式代入上两式，经过整理后可得

$$M = \frac{A}{\frac{Q_0}{k}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2D \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (2-53)$$

$$\tan\varphi = \frac{2D \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2-54)$$

M 和 φ 分别是稳态振动时的动力放大系数和力与位移之间的相

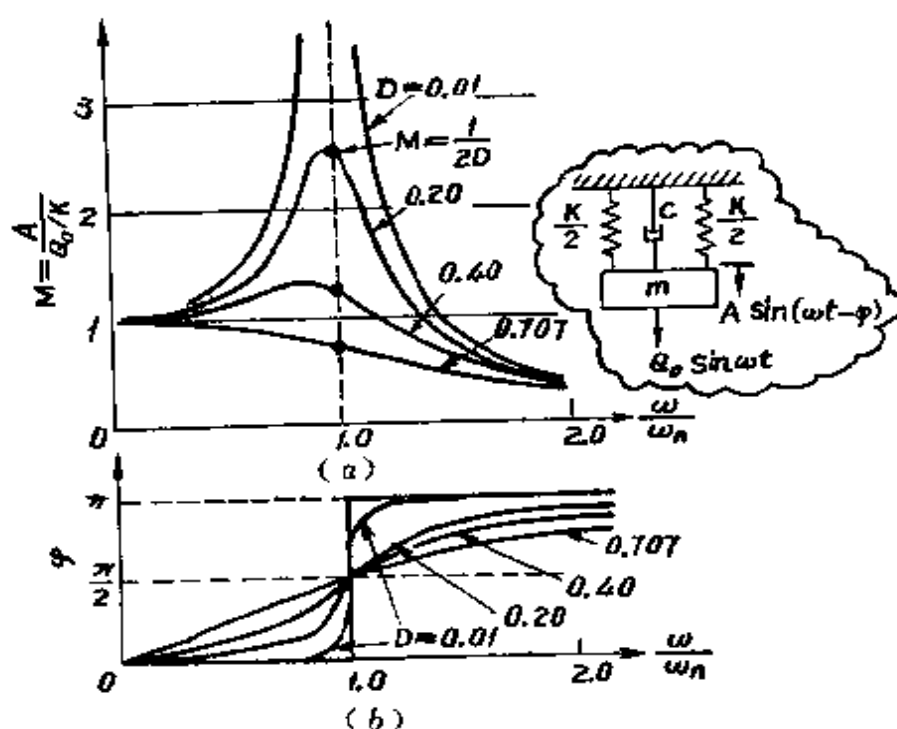


图 2-14 粘滞阻尼单自由度体系的反应曲线

角。对于各种不同的 D 值, 上式已图示在图2-14中, 并叫做恒力幅激振的反应曲线。恒力幅的涵义是 Q_0 与 ω 无关。应该指出: 产生最大振幅时的频率不是无阻尼固有圆频率 ω_n , 而是略小于 ω_n 的一个频率。相应于最大振幅时的频率 f_m 叫做恒力幅的共振频率, 并由下式得出

$$f_m = f_n \sqrt{1 - 2D^2} \quad (2-55)$$

在此频率时的 M 值由下式得出

$$M_{max} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \quad (2-56)$$

对上面各式的研究表明, 当 $D = 1/\sqrt{2}$ 时, 则 $f_m = 0$, 而且最大的反应是静态反应。表明 φ 随 ω/ω_n 而变化的曲线具有这样的特性, 就是最大斜率点发生在共振频率时, 而且所有曲线在 $\omega = \omega_n$ 时 φ 都等于 $\pi/2$ 。在附录图 A-1 中给出了图2-14a 的详图。

旋转质量型激振

许多体系的振动是由于不平衡旋转质量的力所引起的。图2-15表示一个普通形式的振动发生器, 它包括两个转向相反的偏心质量 m_1 , 偏心距为 e 。质量间的相位关系是这样的, 以致它们同时达到它们的最高位置。每一个质量产生一个等于 $m_1 e \omega^2$ 的旋转力矢量。这两个矢量相加的结果, 使得它们的水平分量互相抵消, 而竖向分量则叠加起来。因此, 振动力等于

$$Q = m_1 e \omega^2 \sin \omega t \quad (2-57)$$

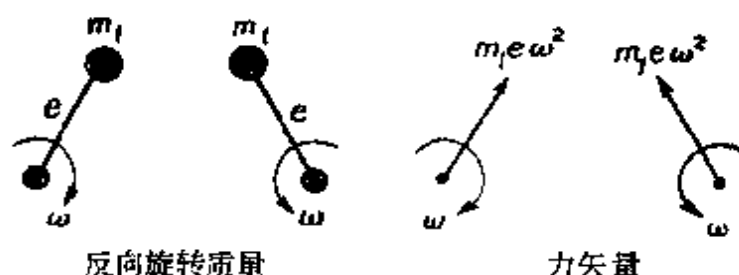


图 2-15 由两个反向旋转质量产生的力

式中 $m_e (=2m_1)$ 是总偏心质量。与以前讨论的恒力幅情况相比, 这旋转质量型力的力幅与振动频率的平方成正比。对于受到由式(2-57)所规定的振动力的作用的有阻尼单自由度体系, 它的解可以用 $m_e e \omega^2$ 来代替 Q_0 , 并代入式(2-51)中求得。要注意到

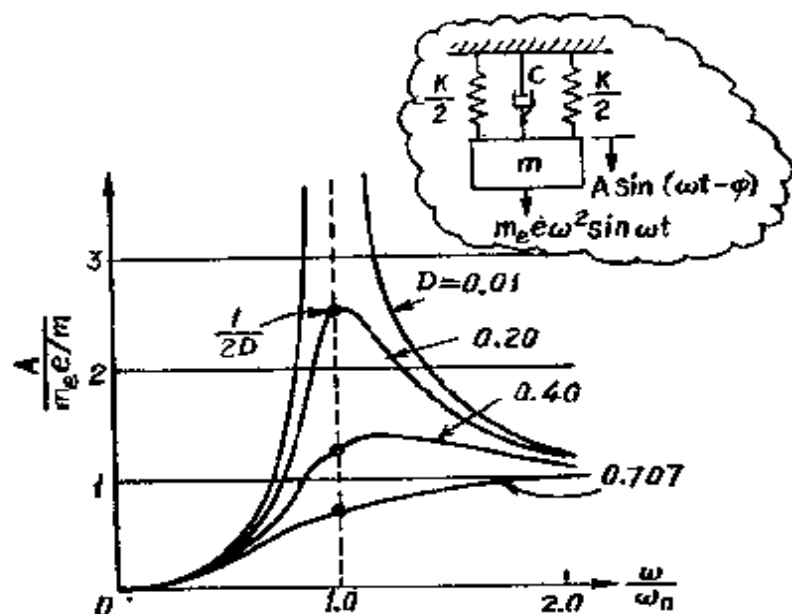


图 2-16 粘滞阻尼单自由度体系的旋转质量型激振的反应曲线

$$\frac{m_e e \omega^2}{k} = \frac{m_e}{m} \frac{m}{k} e \omega^2 = \frac{m_e e}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (2-58)$$

因此,

$$\frac{A}{\frac{m_e e}{m}} = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 M \quad (2-59)$$

式中 M 为恒力幅情况下的动力放大系数。 φ 的表达式显然和原来的相同。图2-16是式(2-59)对各种 D 值的图象。这些曲线和由恒力幅情况得到的曲线在外形上相似。主要的区别在于共振频率发生在无阻尼固有频率以上, 并由下式给出

$$f_{mr} = f_n \frac{1}{\sqrt{1-2D^2}} \quad (2-60)$$

在 f_{mr} 处的纵座标为

$$\left[\frac{\frac{A}{m_0 e}}{\frac{m_0 e}{m}} \right]_{\max} = \frac{1}{2D \sqrt{1-D^2}} \quad (2-61)$$

应该指出 m 是总振动质量，其中包括质量 m_0 。 $m_0 e/m$ 的物理意义可以用两种方法来解释。当偏心质量以频率 ω_n 旋转时，它将产生一个幅度为 $m_0 e \omega_n^2$ 的力，如果把这个力幅除以体系的弹簧常数，就得到 $m_0 e/m$ 。另一方面，从更实用的观点来看，可以看到在图2-16中，当频率增加到超过共振条件时，振幅就接近于 $m_0 e/m$ 值。这涉及到一个物理现象，就是一个旋转质量，如果不受限制的话，将围绕其重心旋转。这时，因为 $m_0 = m$ ，则振幅为 e 。但是，对于多数体系来说， m_0 只代表了导致有限振幅为 $(m_0/m)e$ 的总质量的一部分。这个现象就是向一个超过它的共振频率而在振动着的体系上附加质量以减小它的振幅的依据。

直到现在为止，有两个固有频率（无阻尼的和有阻尼的）和两个共振频率（恒力幅和旋转质量）与单自由度体系有关。为了比较，它们四种情况都已经用 D 表示在图2-17中。对于 D 小于0.2的各种数值，所有的频率都在无阻尼固有频率的5%以内。对于较高的 D 值，频率间的差别就变大了。当 $D \geq 0.707$ 时，强迫振动的曲线就没有峰值；当 $D \geq 1.0$ 时，有阻尼自由振动将不产生任何振动。

共振曲线的几何形状

如果作一个试验来确定单自由度体系动力反应曲线，有可能从这一曲线的形状推论出这体系的性质。有些重要的结论已经在前面的讨论中指出，但下面的论述也同样是有用的。显然，根据曲线是从零振幅开始这一事实，图2-18 a 是旋转质量型激振的反应曲线。如果从原点作一直线切于反应曲线，则切点的横坐标正好是这体系的无阻尼固有频率 \bullet 。此外，原点作任意直线与曲线交于两点，则存在下列关系：

$$f_1 \cdot f_2 = f_n^2 \quad (2-62)$$

● 译注：原书为“则切点与这体系的无阻尼固有频率相重合”。

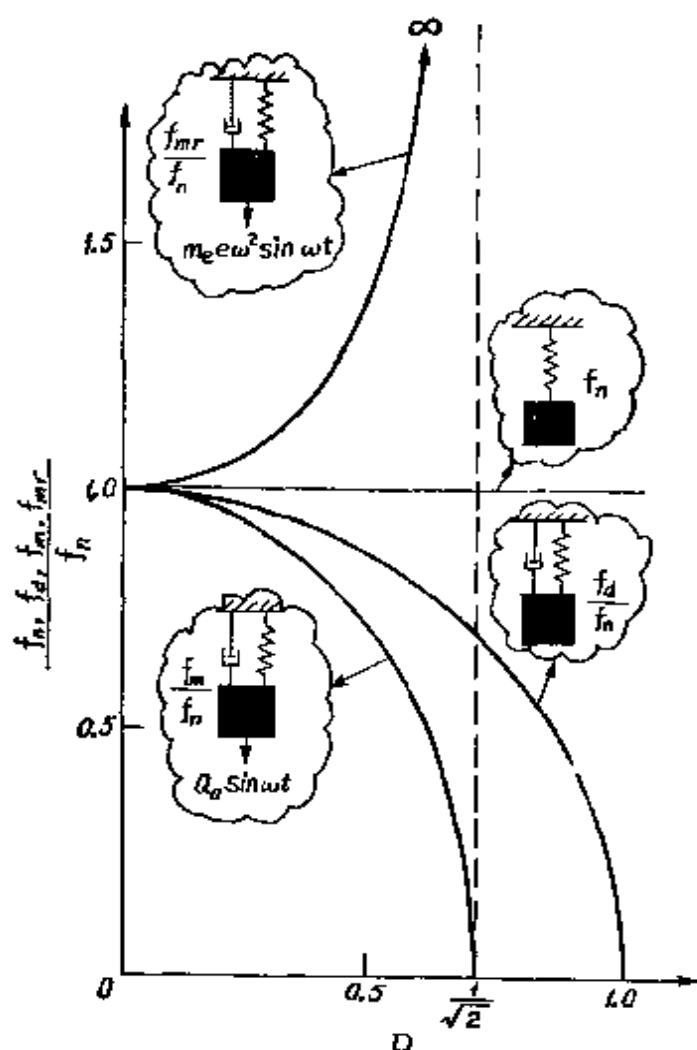


图 2-17 单自由度体系的频率

式中 f_1 和 f_2 分别为直线与曲线相交点处的频率。因此，从一个单一的试验曲线，通过一些独立的运算，用一个平均数可求得这体系的无阻尼固有频率。如果输入力是已知的话，其他性质如 m 、 c 和 k 就都可能从而算出。

图 2-18 b 为一个单自由度体系受有恒力幅作用时的反应曲线，该曲线表明，当 $f = 0$ 时， A 为有限值。测定阻尼的一个典型方法就是利用曲线的相对宽度。采用曲线上所指出的各个量，根据下式可以计算对数递减率

$$\delta = \frac{\pi}{2} \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_m^2} \sqrt{\frac{A^2}{A_{m_0}^2 - A^2}} \frac{\sqrt{1 - 2D^2}}{1 - D^2} \quad (2-63)$$

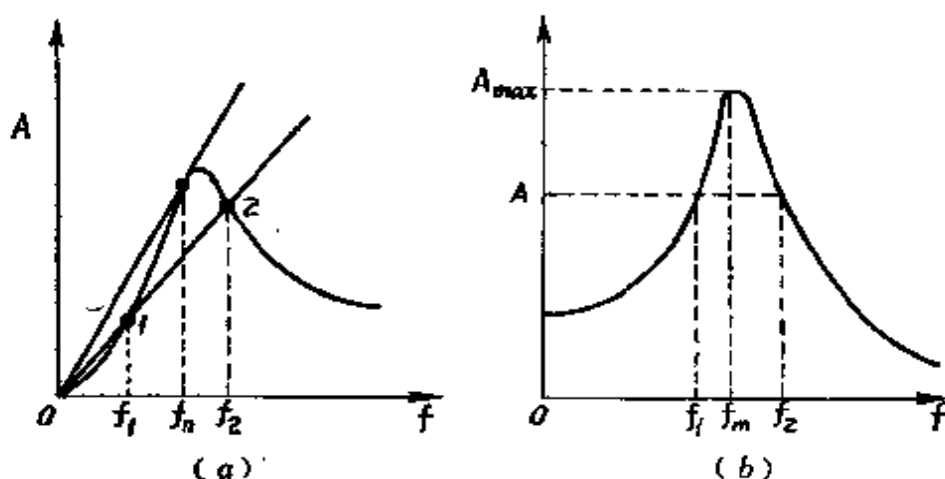


图 2-18 为确定阻尼用的反应曲线的几何形状

因为上式的右边包含了 D 项，显然，它必须通过试算法来估算。 D 值小时，最后一项可取为 1.0。如果 D 值小，并且 A 取为 $0.707 A_{max}$ ，那么，就得到一个极为简单的表达式：

$$\delta = \pi \frac{\Delta f}{f_m} \quad (2-64)$$

式中 $\Delta f = f_2 - f_1$ 。

由于支座移动的反应

在许多情况下，一个体系的振动不是由于直接作用在质量上的力而是由于基座的移动所引起。这个问题的解可同样利用运动矢量和力矢量的表示而求得。图 2-19 a 表示了需要分析的问题。基座的运动取作为 $A_1 \sin \omega t$ ，而质量 m 的反应假设为 $A \sin(\omega t - \varphi_1)$ 。运动矢量以及有关的力矢量分别如图 2-19 b 和图 2-19 c 所示。应该指出，支座的位移引起了一个作用在质量 m 上并与位移的方向相同的力。反之，对于质量的位移也将引起一个作用在支座上并与位移方向相同的力。力矢量可根据运动矢量求得，如图 2-19 c 所示。如果由于支座的运动所得出的分力合成为一个合力，就得到和图 2-13 c 相同的矢量图。因此，在式 (2-51) 中用 $A_1 \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2}$ 来代替 Q_0 ，就可得到 A 的解：

$$A = \frac{A_1 \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \quad (2-65)$$

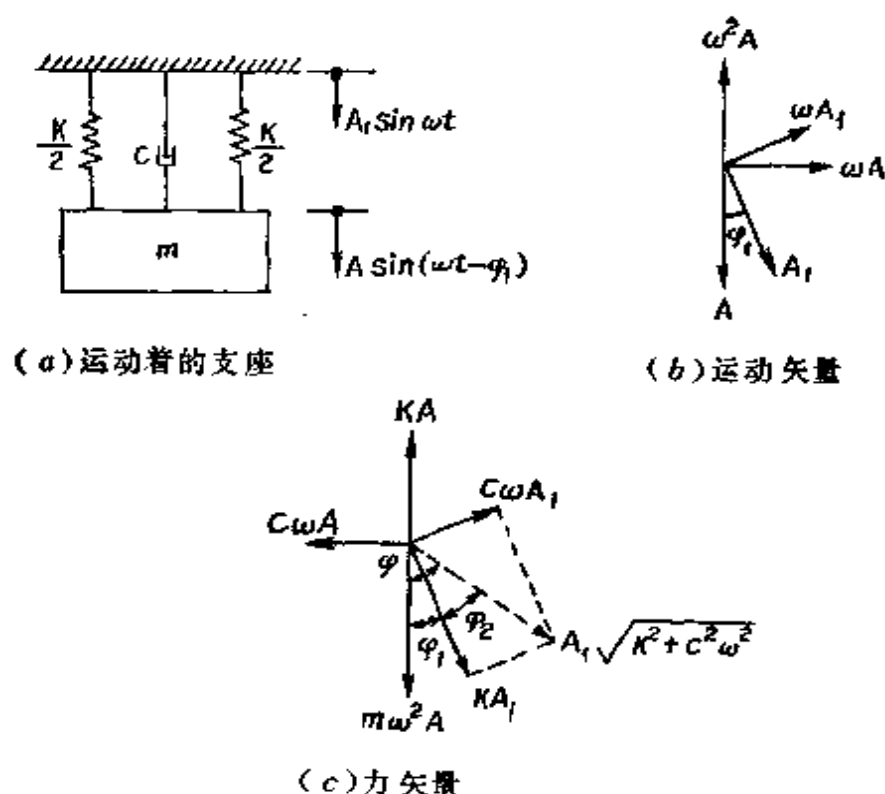


图 2-19 支座运动的运动矢量和力矢量

化简后,

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\sqrt{1 + \left(2D \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2D \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (2-66)$$

φ_1 的表达式可以从图 2-19 c 所示的关系中得到。角度 φ 是由式 (2-52) 给出, 并从矢量图得到

$$\varphi_2 = \tan^{-1} \frac{c\omega A_1}{k A_1} = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k} \quad (2-67)$$

同样, $\varphi_1 = \varphi - \varphi_2$, 根据两角之差的正切的三角表达式

$$\tan \varphi_1 = \frac{2D \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 (1 - 4D^2)} \quad (2-68)$$

对于各种 D 值, 式(2-66)和式(2-68)已图示在图2-20中。在精密设备的隔振问题中, 如果从基础的输入力为已知, 则上述的解就提供了设计支承体系的指导原则。

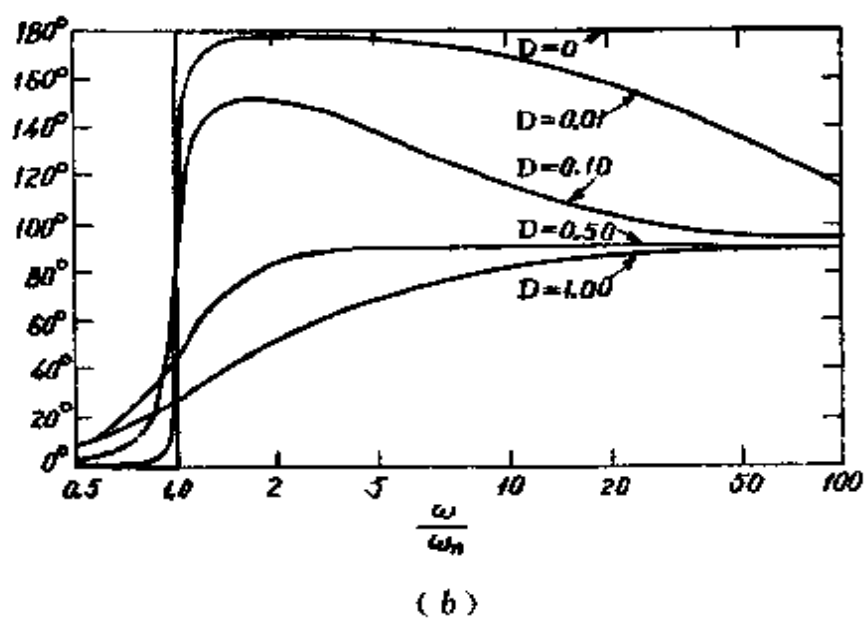
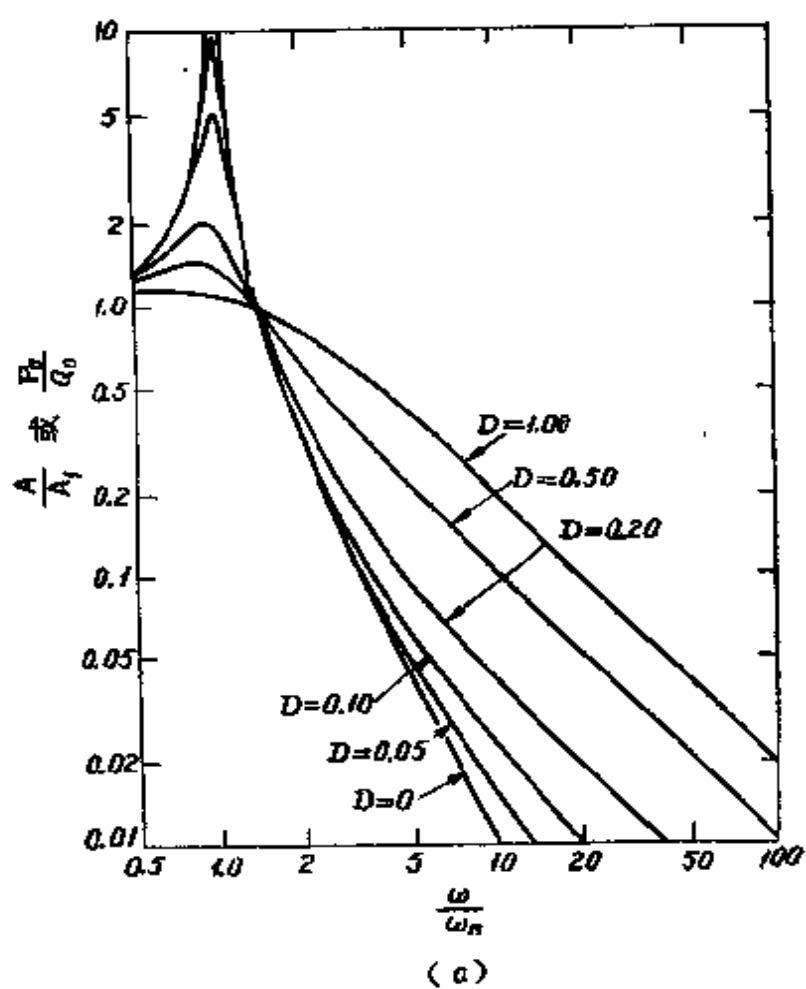


图 2-20 对于支座运动或力的传递的解

力的传递

当一个力作用在一个质量上时，有时需要研究这个力向支座传递的问题。这本来包括了弹簧力以及由于质量和支座之间的相对移动而产生的阻尼力的合力的计算。从图 2-21，这个传递力 P_0 等于

$$P_0 = \sqrt{(kA)^2 + (c\omega A)^2} = A \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2} \quad (2-69)$$

将式(2-51)代入上式并化简后，得

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2D \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2D \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (2-70)$$

它正好与当支座发生运动时而得出的 A/A_1 的关系式完全相同。

如果 P_0 的方向与作用在质量上力的方向相反， Q_0 和传递给支座的力 P_0 之间的相关系可以从图 2-21 中导出。可见

$$\tan \varphi_2 = -\frac{c\omega A}{kA} = -\frac{c\omega}{k} \quad (2-71)$$

且 $\varphi_1 = \varphi - \varphi_2$ ，将给出和式(2-68)完全相同的表达式。

有关单自由度体系在不同情况下的解的介绍中，习惯用无因次参数 $c/(2\sqrt{km})$ 和 $\omega\sqrt{m/k}$ 来表示，这些参数分开了阻尼和频率的影响。但是，在设计或分析问题中，阻尼系数或许是最少用到的。大多数情况下，体系的质量和弹簧常数能够最容易被改变或调整。在使用如图 2-14 所示的曲线时，由于 m 和 k 在横坐标和每一曲线簇间是相互有关的，要精确地确定由于 m 和 k 的变化所产生丝毫不爽的影响是一个很繁复的工作。莱斯默 (Lysmer, 1965) 分开了质量和频率的影响，并导出一组用下

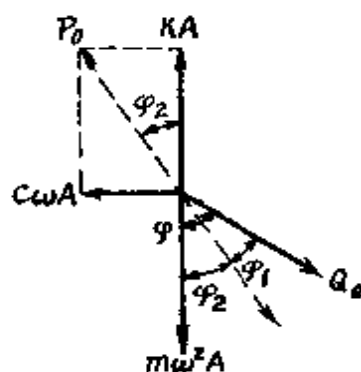


图 2-21 作用力与传递力之间的相关系

述无因次频率因素和质量因数表示的关系式（见图2-22）：

无因次频率因素

$$\bar{a}_0 = \frac{\omega C}{k} \quad (2-72)$$

和质量因数

$$\bar{B} = \frac{mk}{c^2} \quad (2-73)$$

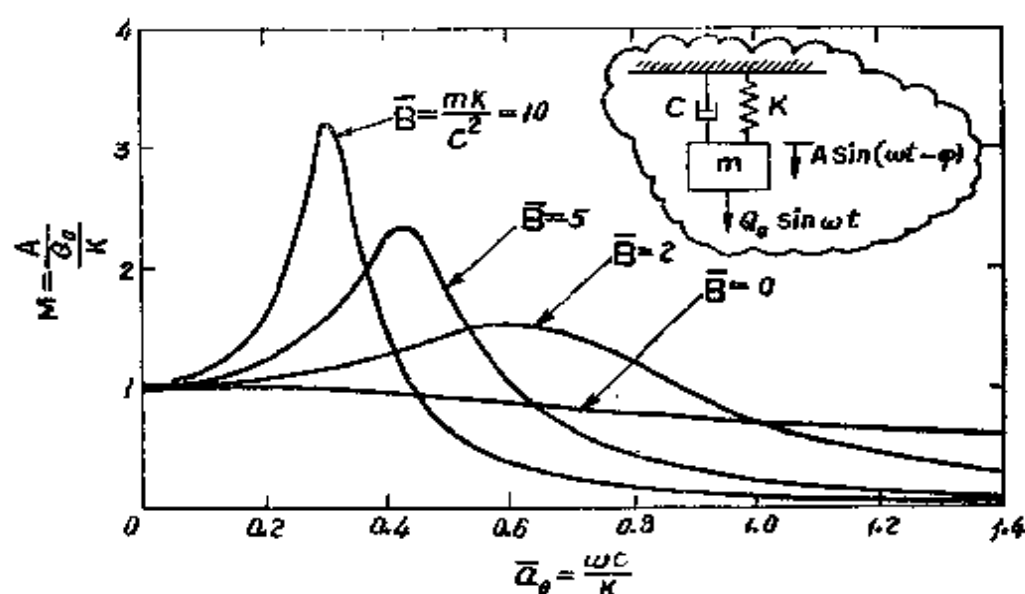


图 2-22 质量和频率的影响分开时单自由度体系的特性曲线
（根据莱斯默，1965）

对于恒力幅情况的动力放大系数、相角和其他量分列于下：

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{B}\bar{a}_0^2)^2 + \bar{a}_0^2}} \quad (2-74)$$

$$\tan \varphi = \frac{\bar{a}_0}{1 - \bar{B}\bar{a}_0^2} \quad (2-75)$$

$$M_{max} = \frac{\bar{B}}{\sqrt{\bar{B} - \frac{1}{4}}} \quad (2-76)$$

$$\bar{a}_{0m} = \frac{\sqrt{\bar{B} - \frac{1}{2}}}{\bar{B}} \quad (2-77)$$

2-4 单自由度体系的相平面分析

前一节涉及到单自由度体系各种问题的解。把这些解用公式表示中，利用了回转矢量的方法。这个概念对图解方法的形象化很有用处，并将在以后论述。当按照 z 和 \dot{z}/ω_n 来绘制一个振动体系的反应曲线时，可得到一个叫做相平面轨线的曲线。这曲线对瞬时运动的问题很有用。因为它能让工程技术人员去“观察”体系的性质怎样影响着由于冲击或瞬时荷载所引起的动态反应。这个相平面法也能应用于具有摩擦阻尼、非线性弹簧力等非线性性质和许多其他情况的体系中[见雅可布森(Jacobsen)和艾尔(Ayre)(1958)]。

弹簧-质量体系的自由振动

从式(2-16)，已经有弹簧-质量体系自由振动的解。经并项后，方程的解可写成

$$z = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\omega_n t - \varphi) \quad (2-78)$$

将上式对时间求导数，并除以 ω_n ，得

$$\frac{\dot{z}}{\omega_n} = -\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\omega_n t - \varphi) \quad (2-79)$$

将式(2-78)和式(2-79)平方并相加，得

$$z^2 + \left(\frac{\dot{z}}{\omega_n}\right)^2 = C_1^2 + C_2^2 \quad (2-80)$$

这是一个以原点为中心，半径为 $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ 的圆的方程式。常数 C_1 和 C_2 已经根据初始条件用式(2-19)来表示。把式(2-78)和式(2-79)在座标轴 z 和 \dot{z}/ω_n 上作图，如图2-23所示，可得到从 z_0 和 \dot{z}_0/ω_n 开始的一点，这点按式(2-80)所描绘的圆弧上以角速度 ω_n 作顺时针运动。因此，在任意时间 t ，沿圆弧所移动的角度为 $\omega_n t$ 。 z 或 \dot{z}/ω_n 可作为时间 t 的函数求出，并画在相平面的延长线上，如图2-23中所示。弹簧-质量体系自由振动的基本关系能直接从图2-23看出。例如，用初位移和初速度表示的

最大位移和速度都与圆的半径有关，即

$$z_{max} = \left(\frac{\dot{z}}{\omega_n} \right)_{max} = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_n} \right)^2} \quad (2-81)$$

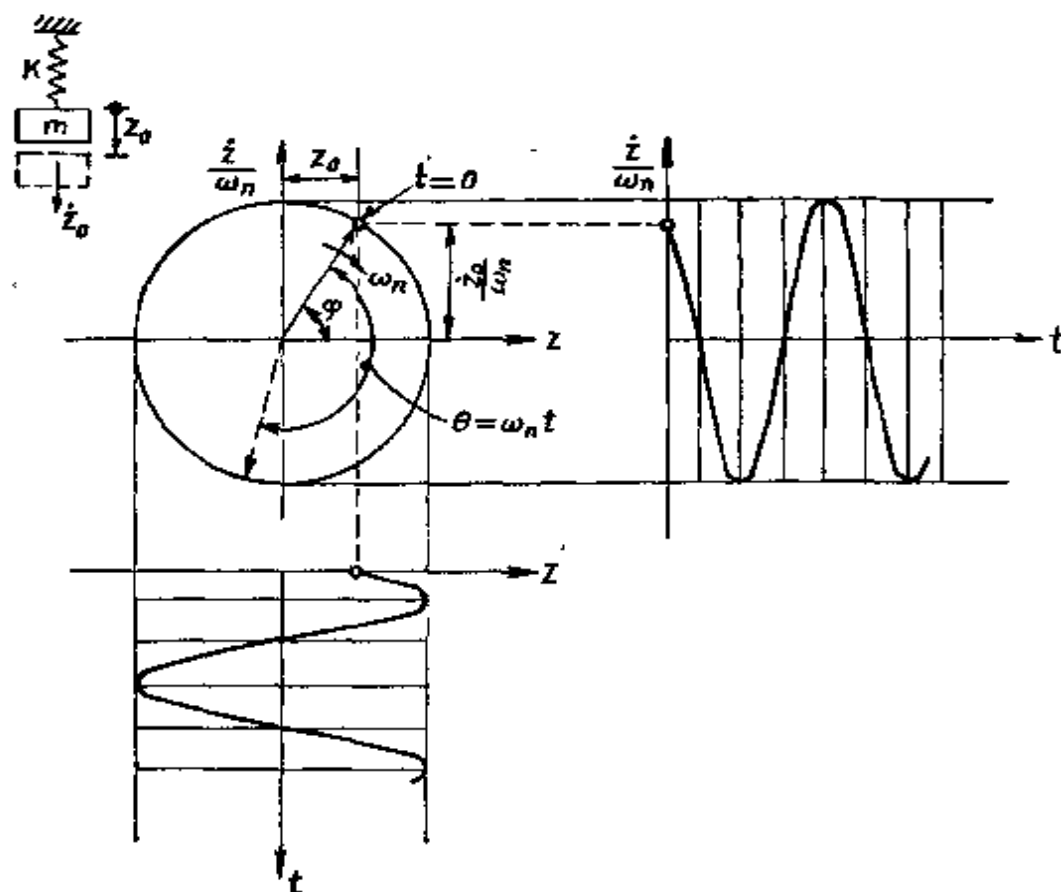


图 2-23 无阻尼单自由度体系自由振动的相平面解

阶跃函数振动

如果一个恒力 Q 瞬时地作用在一个简单的弹簧-质量体系上，则其运动方程为

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = \frac{Q}{m} \quad (2-82)$$

它能改写为

$$z - \frac{Q}{k} = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \cos(\omega_n t - \varphi) \quad (2-83)$$

速度的表达式为

$$\frac{\dot{z}}{\omega_n} = -\sqrt{C_3^2 + C_4^2} \sin(\omega_n t - \varphi) \quad (2-84)$$

由初始条件可以求出常数 C_3 和 C_4 如下:

$$C_3 = \frac{\dot{z}_0}{\omega_n}, \quad C_4 = z_0 - \frac{Q}{k} \quad (2-85)$$

将式(2-83)和式(2-84)平方并相加, 得到

$$\left(z - \frac{Q}{k}\right)^2 + \left(\frac{\dot{z}}{\omega_n}\right)^2 = C_3^2 + C_4^2 \quad (2-86)$$

上式又是圆的方程式, 但是, 这时圆心在 $z = Q/k$ 处。如果把初始条件画在相平面上, 从圆心($z = Q/k$)到($z_0, \dot{z}_0/\omega_n$)点的连线就是圆的半径, 如图2-24所示。可以看出, 这解表示一个围

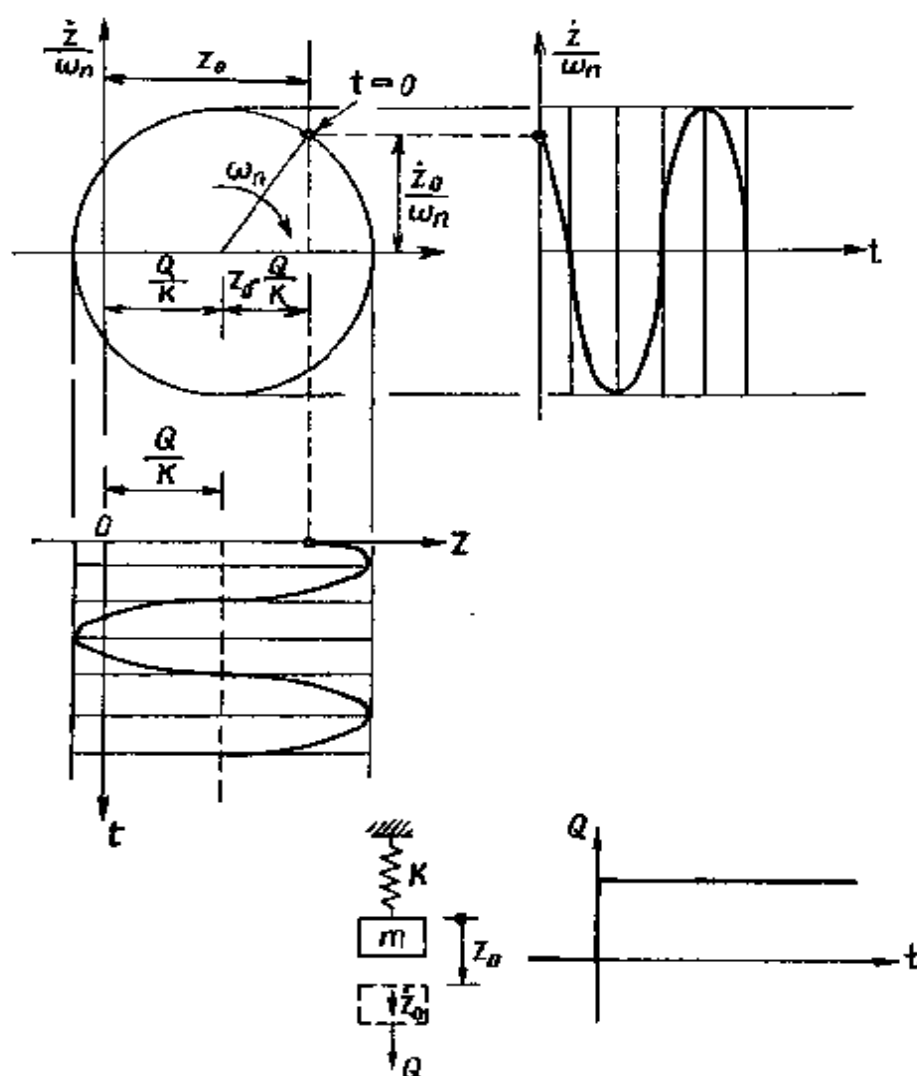


图 2-24 在静力 Q 作用下无阻尼单自由度体系的相平面解

绕平均位置 ($z=Q/k$) 的谐和振动, 它的振幅取决于位移和速度的初始值。如果在某瞬时 t_1 Q 力改变了, 圆心就移到 Q/k 的新数值处, 数值 z 和 \dot{z}/ω_n 在旋转了 $\omega_n t_1$ 弧度后, 就可以用来作为开始于 $t=t_1$ 时的初始条件。如果 Q 力随时间而改变, 则相平面轨线的作图法应分成若干个小的时间间隔, 这时 Q 力可作为每一时间间隔内的平均值。解的精确度取决于为了代表 Q 力所选定的时间间隔的数量。

例题 在图2-25中, 一个质量的重量 $W=100$ 磅, 系于弹簧上, 弹簧常数 $k=6000$ 磅/吋。体系原处于静止状态。在时间 $t=0$ 时, 瞬时施加着一个力 $Q=30$ 磅, 并在时间 $t=0.015$ 秒中其值保持不变。此后, 这力立即改变为 $Q=-25$ 磅, 并保持不变, 一直到 $t=0.020$ 秒为止。在 $t=0.020$ 秒之后, 再无任何力作用在这体系上, 并让它自由振动。

为了求解这体系的动力反应, 首先计算它的固有频率和周期。

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k g}{W}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6000 \times 386}{100}} = 24.3 \text{ 周/秒}$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = 0.0412 \text{ 秒}$$

在 $0 \leq t \leq 0.015$ 秒时, 相平面轨线的圆心由下式得出

$$z_1 = \frac{Q}{k} = \frac{30}{6000} = 0.005 \text{ 吋}$$

以这个圆心画出的圆弧所对的圆心角 θ 为

$$\theta = \frac{\Delta t}{T_n} 360^\circ = \frac{0.015}{0.0412} 360^\circ = 131^\circ$$

从①点到②点的圆弧表示从 $t=0$ 到 $t=0.015$ 秒的图象见图2-25。从 $t=0.015$ 到 $t=0.020$ 秒这一期间, 施加在这体系上的力为 -25 磅, 而相平面轨线的圆心将移到

$$z_2 = \frac{-25}{6000} = -0.00417 \text{ 吋}$$

点②表示相平面下一段弧线的初始条件, 这一段圆弧用 θ 角来绘

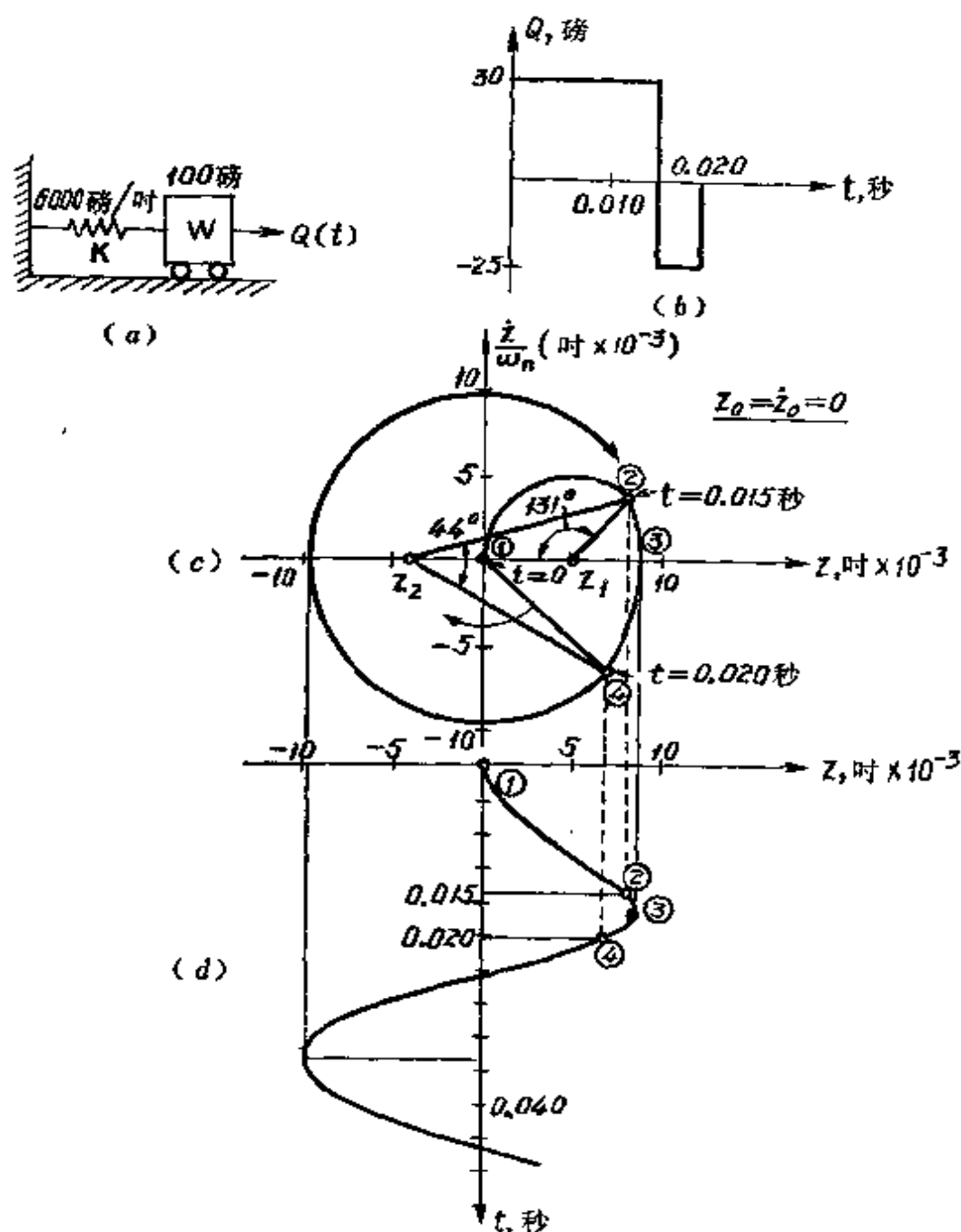


图 2-25 相平面例题

制，而

$$\theta = \frac{0.005}{0.0412} 360^\circ = 44^\circ$$

它用从点②到点④的圆弧来表示。当 $t > 0.020$ 秒时，没有外力作用在这体系上，而相平面轨线的圆心就移到原点上。点④表示图形剩下部分的初始条件。因为没有阻尼存在，振动就将以不变的振幅持续下去，该振幅等于由原点到点④的半径。在图 2-25 d

中，从相平面上的各点向 z 轴的投影绘出了位移-时间曲线。时标是从相平面上的角运动中算得的。

有摩擦阻尼的振动

这个例题将说明相平面在摩擦阻尼中的应用，如图 2-26 所示。对于这一问题，初位移和初速度已经给定，则自由振动的解即可求出。在图 2-26 a 中一个 80 磅的重量放在具有摩擦系数等于 0.5 的表面上。因此，一个 $F=40$ 磅的摩擦力将作用在这重量上，它的方向与它的瞬时速度的方向相反。如果把摩擦力当作一个激振力来处理，则这一问题的解很容易形象化。因此，当相平面的轨线是在 z 轴以上时，摩擦力作用在 z 轴的负方向上；当轨线在 z 轴以下时，则摩擦力作用在 z 轴的正方向上。它规定了 $z = \pm(40/400) = \pm 0.10$ 吋时自由振动轨线的圆心。

这体系的无阻尼固有频率和周期为

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(400)(386)}{80}} = 6.98 \text{ 周/秒}$$

$$\omega_n = 2\pi(6.98) = 43.8 \text{ 弧度/秒}$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = 0.1433 \text{ 秒}$$

初始条件为

$$z = 0.59 \text{ 吋}$$

$$\dot{z} = 14.9 \text{ 吋/秒}$$

对于相平面，需要把初速度除以 ω_n 。这样得到 $\dot{z}/\omega_n = 0.34$ 吋，并和初位移一道画在图 2-26 b 中以得出点①。因为轨线在 z 轴以上开始（正的速度），圆心将位于 $z = -0.10$ 吋处，而后作一弧到点②。在点②处，轨线越过 z 轴，而且速度变号，圆心就移到 $z = +0.10$ 吋处。这个圆心一直使用到轨线在④点处越过 z 轴，而圆心又移到 $z = -0.10$ 吋处。用这样方式作图一直到最后一个点为止，在那里轨线在两个圆心之间越过 z 轴。更进一步的作图已不可能，而这体系也已达到了静止位置。这一静止位置不一定和弹簧力等于零的位置相当。这一特殊点表明了粘滞阻尼与摩擦

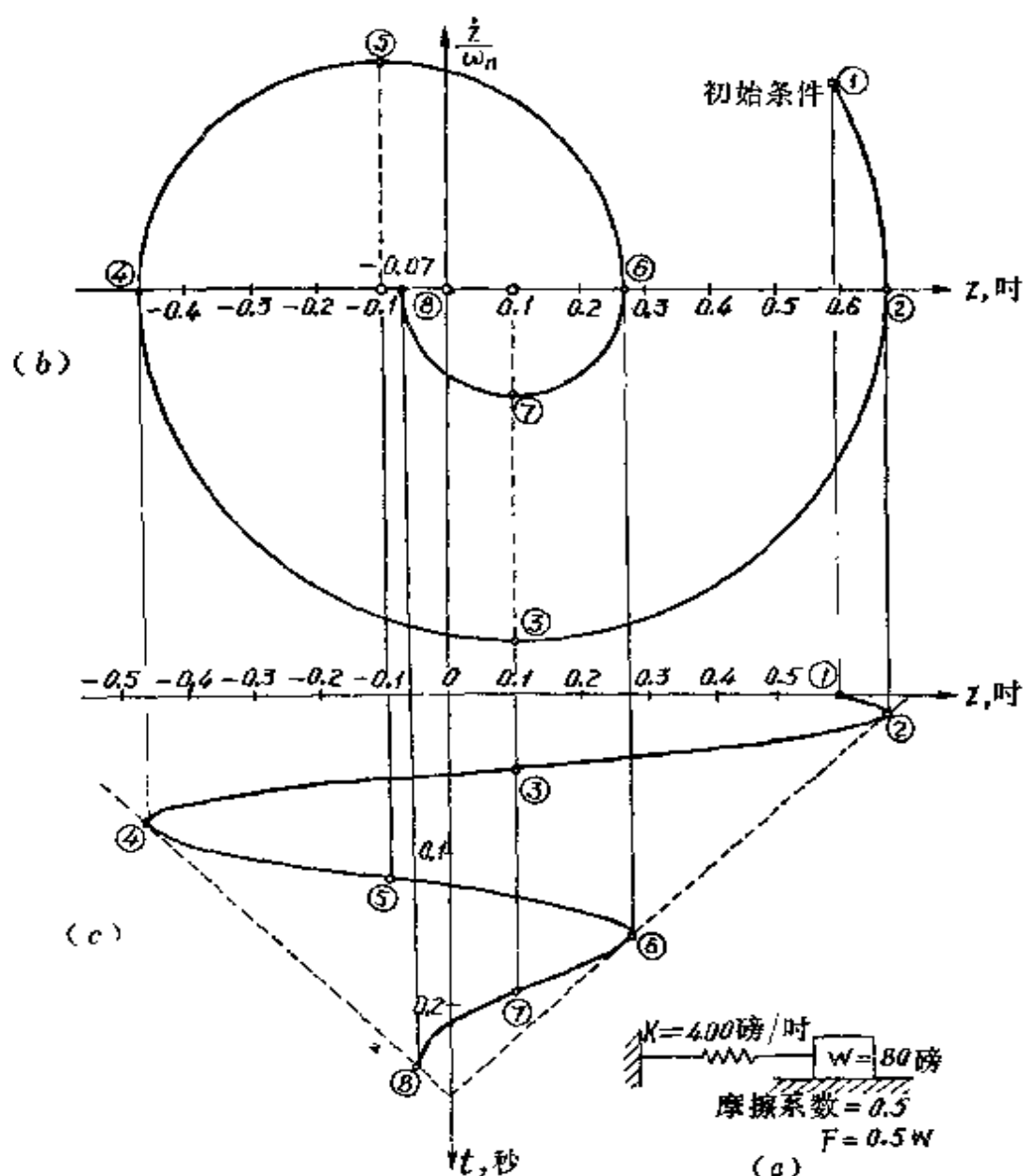


图 2-26 摩擦阻尼的相平面

阻尼之间的区别。对于摩擦阻尼，经过一些有限的时间间隔后，这体系就达到静止，而一个粘滞阻尼体系在理论上说将永不会停止运动。另一个区别可以从图2-26c中的位移-时间图中看出。和粘滞阻尼体系的指数包络线相比，曲线上各峰值点的包络线是一条直线。

有粘滞阻尼的振动

这个例题将说明一个粘滞阻尼体系自由振动的解，如图2-27a

所示。将粘滞阻尼器作为一个激振力来处理是有益的，这时激振力与质量 m 的速度成正比，但方向相反，如图2-27b所示。对于自由振动，相平面轨线的瞬时中心由下式得出

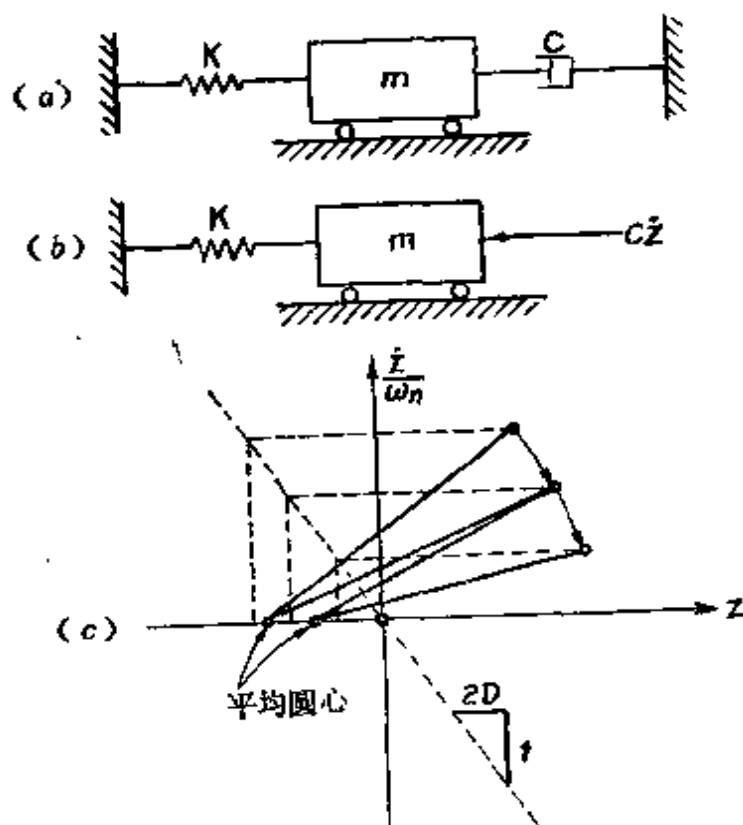


图 2-27 粘滞阻尼的相平面

$$z = -\frac{c\dot{z}}{k} = -\frac{c\omega_n}{k} \frac{\dot{z}}{\omega_n}$$

或

$$z = -2D \frac{\dot{z}}{\omega_n} \quad (2-87)$$

为了简化相平面的解，将式(2-87)所代表的直线直接画在相平面上。因为需要按恒力作用那样来处理，则采用小的速度间隔的平均中心来绘制轨线的线段。这就导致轨线在每一区间的开端和末尾产生了折点。这个解的精确度取决于这些折点尖锐度的减少，因为在这时候的精确解是一个螺线。应该指出，位移和时间的相互关系需要相平面作图中角度的增量依次相加。

由支座移动而引起的振动

上面将阻尼力当作激振力的处理方法可以推广到许多类型的

问题中去。但是,有一些特殊情况,将上述方法稍加改变就能容易得到解决。当激振是由于支座的移动而引起时,这体系的振动反应包括了两种情况。一种情况是如果支座的位移为已知,则质量的绝对运动就能确定。另一种情况是如果支座的加速度为已知,则支座与质量之间的相对运动就可求出。

支座位移 如果一个弹簧-质量体系的支座位移已给定,则运动的微分方程为

$$m\ddot{z} + k(z - z_0) = 0 \quad (2-88)$$

式中 z_0 为支座的位移。整理后,得

$$m\ddot{z} + kz = kz_0 \quad (2-89)$$

因此, kz_0 可以看作为力的函数,而圆弧的圆心为 z_0 。

如果体系包括了粘滞阻尼,则更便于记下支座的加速度并解出质量与支座之间的相对运动。

支座的加速度 如果 z_r 为质量与支座之间的相对运动,则运动的微分方程为

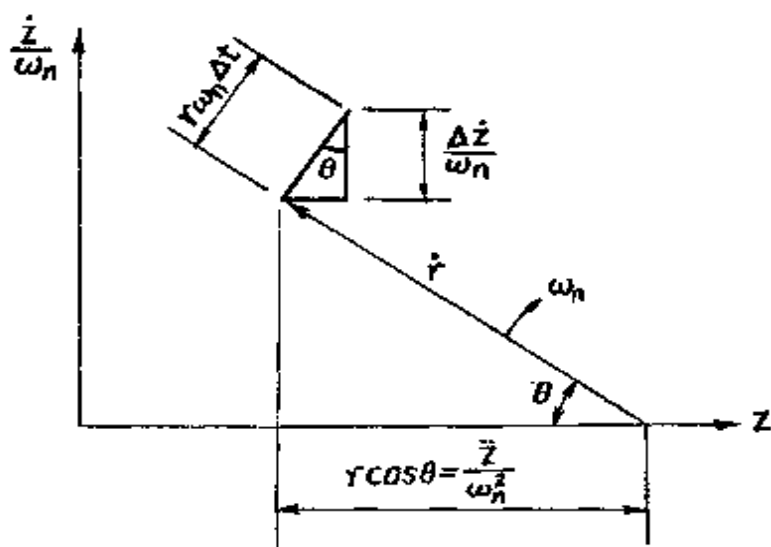


图 2-28 从相平面计算加速度

$$m(\ddot{z}_r + \ddot{z}_0) + c\dot{z}_r + kz_r = 0 \quad (2-90)$$

由此,

$$m\ddot{z}_r + kz_r = -m\ddot{z}_0 - c\dot{z}_r \quad (2-91)$$

上式的右边代表作用在这体系上的等效力,除以 k 就可得到圆

心为

$$\frac{-m\ddot{z}_b}{k} - \frac{c\dot{z}_r}{k} = -\frac{\ddot{z}_b}{\omega_n^2} - 2D\frac{\dot{z}_r}{\omega_n} \quad (2-92)$$

式(2-91)的左边用相对运动来表示, 它的数值可由相平面的解中求得。右边第一项可由支座的加速度得到, 第二项可从按图2-27所示方法所作的相平面中得到。

由相平面求加速度

位移、速度和时间都能从相平面中容易地确定下来。也可能从相平面中得出加速度。在任意时间 t , 半径的长度为 r , 且将位在一个与水平轴夹角为 θ 的位置上, 如图2-28所示。在时间间隔 Δt 内, 半径将移动一个 $\omega_n \Delta t$ 的角度, 而在半径末端的弧长将为 $r\omega_n \Delta t$ 。在这时间间隔内, 速度的改变与距离 $r\omega_n \Delta t$ 的竖向分量有关, 并在图2-28中用 $\Delta \dot{z}/\omega_n$ 来表示。从几何关系

$$\cos\theta = \frac{\Delta \dot{z}}{\omega_n} \frac{1}{r\omega_n \Delta t} \quad (2-93)$$

由此

$$\ddot{z} = \frac{\Delta \dot{z}}{\Delta t} = \omega_n^2 (r \cos\theta) \quad (2-94)$$

量 $(r \cos\theta)$ 就是半径在水平或 z 轴上的投影。这个投影乘以 ω_n^2 就得到了加速度。如果投影位于圆弧圆心的左边, 则加速度为正; 如在右边, 则加速度为负。

多线性弹簧体系

许多情况包括了非线性的回复力。这些情况通常都可用一系列线性关系来近似表示, 如图2-29所示。图中力-变形关系由 k_1 , k_2 和 k_3 来确定。对于这体系在区域 I 内的位移, 系数 k_1 控制着它的性态。如果这体系的位移在区域 II, 则 k_2 控制了它的性态。对于每一个位移区域, 一个特定线性关系控制着它的性态。

上述问题的解可把各元件相加而得到。各元件产生的力正与这体系的位移成正比, 并与位移同一方向。应用这个方法的详解已由雅可布森和艾尔(1958)给出。但是, 如果将相平面作图法加以微小的修正, 就可得到精确解, 并可大大减少求解所需的时间。

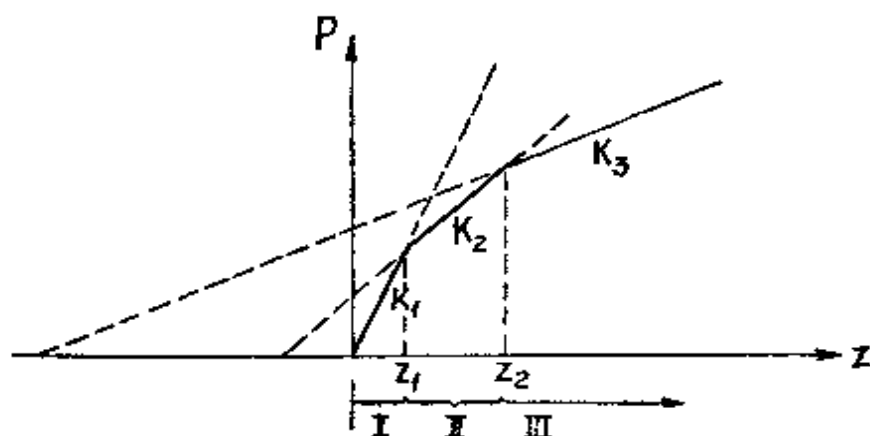


图 2-29 多线性弹簧体系的力-变形关系

所用的概念是这样的，就是当这体系的位移位在回复力具有线性关系的范围以内时，这体系表现着似乎相同的关系对所有的位移量来说都是有效的。但是将力-变形关系外插到零力时，却不能得到零位移。如图2-29中所示的例子，在区域Ⅱ的零回复力对应着一个负的位移，而且当这体系的位移位在区域Ⅱ以内时，它是自由振动的中心。如果这体系的位移进入区域Ⅰ，则圆心移到原点处。对于这一类问题可以方便地按比例画出力-变形的关系，并延长每一区域的直线部分。这样做以后，圆心可以从激振力值和与这体系的位移相适合的直线的交点而得到。

当由一个线性区域过渡到另一区域时，除了圆心的改变以外，还有由于无阻尼固有频率的改变所引起的两个变化。首先，因为半径将具有一个新的等于 ω_n 的角速度，半径的旋转与时间之间的关系就有了变化。其次，量 \ddot{z}/ω_n 也有一个瞬时的变化。因为这体系的速度必须是连续的（速度的瞬间改变需要有一个无穷大的力），纵坐标值应乘以 ω_{n1}/ω_{n2} 。

例题 图2-30a所示的体系包括一个放在两个相同弹簧之间的质量。弹簧设计成只能抵抗压缩力，以及每一个弹簧预先压缩了1.5吋。对于这样一个体系，回复力-位移曲线在位移为1.5吋处中断。当位移小于1.5吋时，两个弹簧作用的结果使弹簧常数等于400磅/吋。当位移大于1.5吋时，则只有一个弹簧起了作用，提

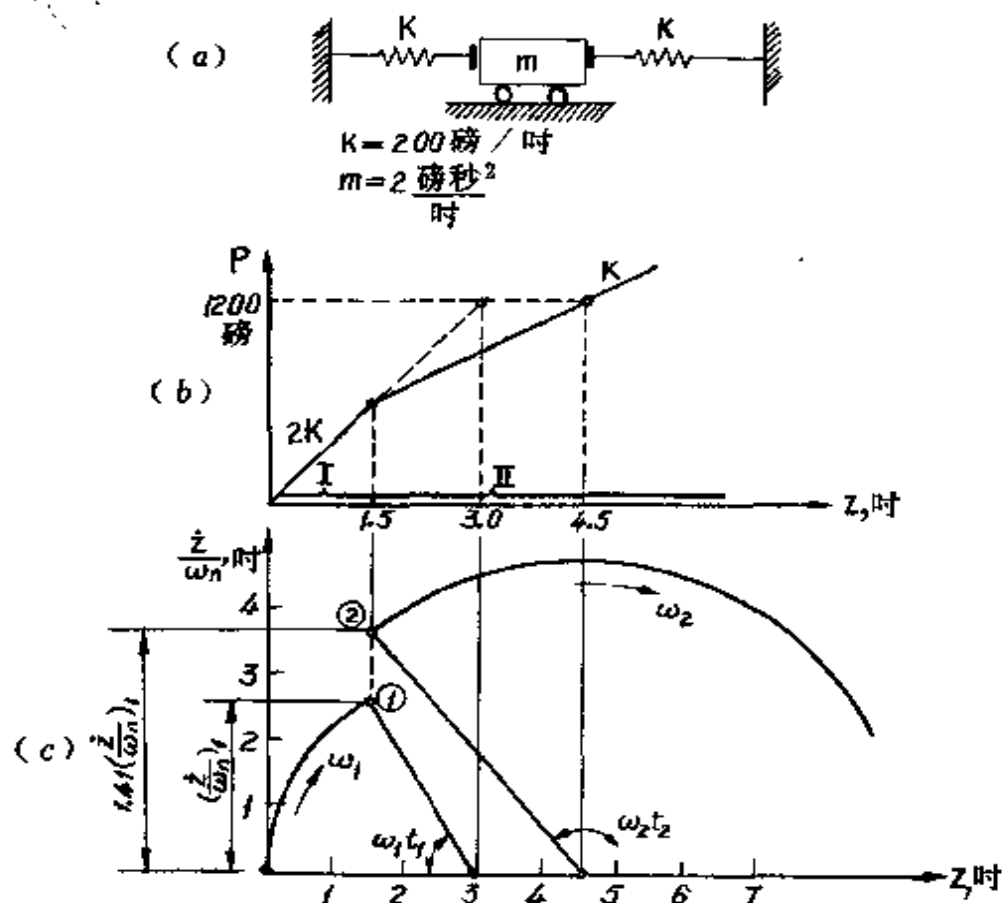


图 2-30 双线性系统的相平面解

供了弹簧常数为200磅/吋。因此，每一个位移区域的固有频率为

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{400}{2}} = 14.1 \text{ 弧度/秒}$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10.0 \text{ 弧度/秒}$$

为了说明图解的方法，设一个1200磅的力瞬时地作用在这体系上，并保留一个相当长的时间。对于区域I，其圆心位于 $z=3.0$ 吋处，它可以用1200磅除以400磅/吋求出，或者作回复力-位移图，并延长初始直线的线段而得到，如图所示。下一步，从原点画一圆弧到点①。这一点表明这一体系的弹簧常数在这里发生变化，圆心也从3.0吋移到4.5吋处。此外，相平面上的纵座标必须乘以系数 $(\omega_{n1}/\omega_{n2}=1.41)$ 以抵消这一体系固有频率的变化。采用