第四章　高阶球函数直接算法及其重要应用

第一节　研究高阶次球函数直接算法的迫切性

作者们在《高阶球函数直接算法与区域位场定量解释》的代前言中提出了 5 个问题。第一个问题就是，对于经纬度跨度大于 6.2 度的重磁测区，以测区中心点为圆心、3.1 度为半径的球缺范围之外的地壳质量，高程为 8900 米的大山的重力场方向全部指向地心，而不是平面测区所认为的全部指向上方。此时，再不可以把那样的测区当作平面测区。而事实上，国内大区域重磁异常解释仍沿用平面测区重磁异常解释方法，这是错误的，必须研究球坐标系内的解释方法。按此要求，就必须采用高阶球函数。笔者在“球壳型磁性层磁异常正反演方法”（包含如莫霍面与局里面等磁性单界面方法）研究中[32][36]，只给出采用低阶次球函数模型验证结果，因而方法只具有理论意义，没有实用价值。

笔者在《成像》[44]著作中，严格研创成功三度体线性化球谐级数正反演理论和实用化方法。但是，该理论和方法采用的是低阶次球谐函数，只适合局部重磁异常解释，而不能用于大经纬度跨度区域 甚或 整个地球 重磁场转换处理和正反演。

笔者在《成像(续)》[54]附录二中，认真研究过施密特型球函数有限项正弦或余弦展开式（见本概述下节（4.45）式）系数(其值绝对值≤ 1)计算方法。开始,由该函数定义式出发，采用积化和差公式把该函数展开，发现，其≤ 1的系数值，要由“包括三重求和的很多巨大整数之和” 除以 “一个巨大整数与另一巨大整数开方值的乘积”来实现（见（2.44）式），如果用浮点数计算显然不可能。然后，采用经典递推算法计算其系数，发现 ≥ 78 阶的系数值很快超出 ± 1 的范围，超过 100 阶时，其系数值达到$\pm 10^{N}$（N 值很大），此路也不通。由此两种结果推断，由原定义式出发、采用浮点数，进行高阶次施密特型球函数值计算，要取得高精度也是及其困难、甚至是不可能的。

在《高阶球函数直接算法与区域位场定量解释》[70]附录一中，国内外专家按美国 **IEEE** 计算标准（双精度浮点数有效值可显示 $n*10^{-18}$ 量级），采用“各自改进的递推算法”和“群体值精度评价方法[70]”，计算高阶次“完全规格化球函数”（其值等于$\sqrt{2n+1}$倍“施密特球函数值”）的最高精度也只能达 $n*10^{-14}$ 量级。

至于国内外专家计算“完全规格化球函数”的重要积分和各阶导数值的递推算法公式本身（见参考文献[33]和[70]的代前言中的 0.5 问），随函数阶次增大，其计算的不稳定性越来越大，故其对于精度的评价只在低阶次范围内做出。

笔者认为，上述情况不能再继续下去，必须研究“高速度高精度巨大整数算法”，计算高阶次球函数、其重要积分和各阶导数值。笔者称该算法为“直接算法”。

高阶球函数等高精度直接算法，能为彻底解决地球低纬度地区或全球面磁场化向地磁极问题提供算法基础；同时有望给出“高精度高速度球谐分析与球谐合成算法”，进而推动实现地球全球面或部分球面“球壳型磁性层磁异常正反演”。

第二节　4.2　施密特型球函数“直接算法”公式

为了研究高阶次施密特型球函数“直接算法”，笔者翻阅了参考文献[06]和[27]的有关“勒让德函数”部分。先是，在参考文献[06]309 页找到习题 3；后是，在参考文献[27]238-242 页找到该习题 3 的解法；再后是，在[27]269 页找到“连带勒让德函数”母函数关系式（4.87)。笔者正是从该母函数出发，严格推导出“施密特型连带勒让德函数”新

的展开式的，该式只有双重求和，而且关于 i = 0 → n 求和，只有半数计算量。

“施密特型连带勒让德函数”新的展开式如下 ：

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{C_n^m C_{n+m}^m/(2-\delta_{0m})}} \frac{1}{C_{2m}^m \cdot 2^{2n}} \sum_{j=0}^{[m/2]} (-1)^{[m/2]+j} c_j\, C_m^j \sum_{i=0}^{n} C_{n-i}^m C_{m+i}^m C_{2(n-i)}^{(n-i)} C_{2(m+i)}^{(m+i)}$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{ll} \cos\left(n-2(i+j)\right)\theta + \cos\left(2(m+i-j)-n\right)\theta, & m = m_{ou} \\ \sin\left(n-2(i+j)\right)\theta + \sin\left(2(m+i-j)-n\right)\theta, & m = m_{ji} \end{array} \right\} \quad (4.44)$$

其中，δ_{0m} 是 δ 函数，$m=0$ 时，$\delta_{00}=1$，$m\neq 0$ 时，$\delta_{0m}=0$；$(2-\delta_{0m})$ 代替了（4.43）式中的二值常数 C_m。该式第一行是 几位整数 到 数千位巨大整数的连乘、加、减、开方和相除。(4.44)式是最基本的“施密特型球函数 $P_n^m(\cos\theta)$”的直接算法公式。

对（4.44）式采用整数计算法可以获得极高精度：该式的第一行就是用于计算下面（4.45）式系数的表达式。可以看到，该行“分子是一个带有正负号的巨大整数”，分母是巨大整数 $C_{2m}^m \cdot 2^{2n}$ 乘以巨大整数开方值 $\sqrt{C_n^m C_{n+m}^m/(2-\delta_{0m})}$。整数计算是没有误差的。（4.45）式系数计算误差中，分母值的误差只取决于开方值误差 乘以 $C_{2m}^m \cdot 2^{2n}$，该值写成双精度巨大浮点数，仍为双精度浮点数，精度没有损失；而作为巨大整数的分子写成双精度浮点数，自然满足双精度要求；然后，两个均满足双精度要求的浮点数相除，其商值必定满足双精度浮点数要求。上述论证对于任意阶 n 次 m 的（4.45）式系数均成立。因为施密特型球函数系数绝对值≤ 1 （只前 3 个系数等于 1），所以分母大于分子的绝对值，对于分子的舍入误差有缩小作用，故此，其系数计算精度极高。进一步，由（4.45）式可知，由绝对值≤ 1 的双精度系数，分别乘以双精度绝对值≤ 1 的正弦或余弦值，再求和，则施密特型球函数值必定达到双精度。

专著《70》已经严格证明，(4.44）式能够 进一步简化为如下有限项傅里叶级数展开式

$$P_n^m(\cos\theta) = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots} A_{nm_{ou}k} \cos k\theta \\ \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots} A_{nm_{ji}k} \sin k\theta \end{array} \right. \quad (4.45)$$

其中，$A_{nm_{ou}k}$ 和 $A_{nm_{ji}k}$ 分别是与 $\cos k\theta$ & $\sin k\theta$ 项对应的“施密特型球函数 $P_n^m(\cos\theta)$”的展开式系数。

$A_{nm_{ou}k}$、$A_{nm_{ji}k}$ 如（4.51)、(4.52）两式所示

$$A_{nm_{ou}k} = 2\cdot\sum\left\{ W_{nm_{ou}}(i,j)_{k=|n-2(i+j)|} \right\}^{(m^*+1)\times(n-m_{ou}+1)} \quad (4.51)$$

$$A_{nm_{ji}k} = 2\cdot\sum\left\{ F\left(n-2(i+j)\right)\cdot W_{nm_{ji}}(i,j)_{k=|n-2(i+j)|} \right\}^{(m^*+1)\times(n-m_{ji}+1)} \quad (4.52)$$

（4.51）和（4.52）两式分别称为系数 $A_{nm_{ou}k}$ 和 $A_{nm_{ji}k}$ 的“矩阵元素条件求和表达式”。对二式说明如下：以 $j=0,1,\cdots,m^*$ 为行号，共 (m^*+1) 行，$i=0,1,\cdots,(n-m)$ 为列号，共 $(n-m+1)$ 列；$\{W_{nm_{ou}}(i,j)\}$ 和 $\{F(n-2(i+j))W_{nm_{ji}}(i,j)\}$ 为对应于第 j 行第 i 列的元素

(i,j)的计算值（即系数值），其下脚标$k=|n-2(i+j)|$对应于元素(i,j)；把所有元素计算值（即系数值）排列成 两个$\{m^*+1\}$行$\times\{(n-m)+1\}$列的长方形矩阵，即矩阵$\left\{W_{nm_{ou}}(i,j)\right\}^{(m^*+1)\times(n-m_{ou}+1)}$ 和 矩阵$\left\{F(n-2(i+j))*W_{nm_{ji}}(i,j)\right\}^{(m^*+1)\times(n-m_{ji}+1)}$；二矩阵中，有许多不同的$(i,j)$元素对应同一个$k$值；（4.51）和（4.52）二式就是对二矩阵中所有具相同k值的系数求和，故下脚标 $k=|n-2(i+j)|$ 称为矩阵元素求和条件，该二式称为 系数$A_{nm_{...}k}$和$A_{nm_{ii}k}$的“矩阵元素条件求和表达式”；$k=n,n-2,n-4,\cdots,3/2,1/0$是$k$的所有取值，其中，3 和 1 对应$n=n_{ii}$，2 和 0 对应$n=n_{ou}$。

笔者们找不到“开源的巨大整数四则运算的 Fortran 程序”，只好自主研创“亿进制整数加减乘子程序”，用以实现施密特型球函数系数高精度高速度直接计算。笔者采用 2 台多线程惠普工作站，加上多线程笔记本电脑，日夜不停运算达约 300 天，计算出了 0--3600 阶次“双倍精度”和 0--3000 阶次“四倍精度”的施密特型球函数系数值。

第三节　5.5　高阶球函数直接算法计算精度评价

（一）系数 $A_{nm_{ou}k}$ & $A_{nm_{ji}k}$ 值计算精度评价表

请看（4.44）式第一行。首先，记下该行双重求和结束后得到的、作为第k系数$A_{nm_{ou}k}$ $or\ A_{nm_{ii}k}$ 分子的巨大整数的符号S_{nmk}，$k=n,n-2,n-4,\cdots,1/0$。然后，该行改为

$$S_{\mathrm{nmk}}\bullet\sqrt{\left|\left(2*\sum_{j=0}^{[m/2]}\sum_{i=0}^{n-m}\cdots\right)_{k=|n-2(j+i)|}\right|^{2}\Big/\left\{\left[C_{n}^{m}C_{n+m}^{m}/(2-\delta_{0m})\right]\left(C_{2m}^{m}*2^{2n}\right)^{2}\right\}}\qquad(5.11)$$

（5.11）式表示：第k系数的分子平方除以分母平方（ 两个无误差巨大整数相除 ），其商再开方，最后得系数值。为了验证系数值计算精度， 我们自主研制了 ① 两个巨大整数“万进制算数除法子程序”，所得商输出为“80 位整数”和对应的“指数值”；② “80 位整数”的“万进制算数开平方子程序”，输出为无误差的“40 位有效数字”和对应的“指数值”。

下面是以 采用带“万进制算数除法程子序”和“百进制算数开平方子程序”的“万进制系数计算程序”计算出的无误差系数值 为标准，对“亿进制系数计算程序”计算精度评价见下面 20 行“小号文字 + 数字”给出的信息和结论。可见，系数值计算精度极高，达到或高于双精度要求，其误差主要是由 4 舍 5 入所引起。

$P_{500}^{249}(\cos\theta)$和$P_{500}^{250}(\cos\theta)$ 共 501 个系数值$A_{500,249,k}$和$A_{500,250,k}$。“亿进制程序”计算精度评价：40 个数字的数是由“带 万进制除法 和 开平方 程序”计算的；最右列数字是误差（$n\cdot10^{-15}$）,即小数点后第 15 位数字 减去 40 位数 4 舍 5 入成 16 位数之差值。

500	249	156	8.392735591213886E-004	- 3
500	249	156	8.392735591213888660863280419468912070250	
500	249	219	6.426991870041318E-003	3
500	249	219	6.426991870041315205422228492631953029248	
500	250	50	8.323060607379388E-004	4
500	250	50	8.323060607379383893602230920959765723310	
500	250	65	9.344345886016730E-004	5
500	250	65	9.344345886016724866736815797752463502800	
500	250	207	8.684394547223617E-003	6
500	250	207	8.684394547223611183623311084217119295107	

-3　(5)；-2　(8)；　-1 (66)；　0 (183)；　1 (160)；　（ 括号外数为差值 ）
2　(52)；　3 (19)；　4　(6)；　5　(1)；　6　(1)。　（ 括号内数为个数 ）

有效数字算数平均误差：249/501=5.2 E-15 ；有效数字绝对平均误差：453/501=9.0 E-15。
双精度数有效数字 第 16 位数字 的 最大误差是 6（1 个）； 183 个数的第 16 位数字没误差；

409 个数的第 16 位数字的误差绝对值≤1；461 个数的第 16 位数字的误差绝对值≤2。

如果再考虑上面双精度值的指数位数值，即 E-003 ⟶ E-004，可知，系数值的计算精度极高，

即 算数平均 和 绝对平均 误差达到 10^{-18} 量级 !!

（二） $P_n^m(\cos\theta)$函数值计算精度评价表

为了评价 $P_n^m(\cos\theta)$双精度函数值的计算精度，首先，我们不得不把“双精度系数值亿进制整数算法程序”和“双精度函数值直接算法程序”略加修改，变为“四倍精度系数值亿进制整数算法程序”和“四倍精度函数值直接算法程序”。其次，再设计 $P_n^m(\cos\theta)$的“四倍精度函数值递推算法程序”，用以辅助证明“四倍精度函数值直接算法程序”的正确性（即只要两种算法有相当数量函数值几乎相同，就证明直接算法程序正确无误）。然后，通过把“双精度函数值计算结果数组”与四倍精度常量“LING = 0.00000000000000000000000000000001”相加，得到与四倍精度函数值有效数字位数相同的双精度函数值新数组。在此基础上，求取“具有相同指数的 四倍精度函数值数组元素 与 双精度函数值新数组元素”的误差，进行统计分析，得到如下 16 行“小号文字 + 数字”给出的 精度评价，即

-2.8463003655346564861514514578 79075E-0004	四倍精度函数值
-2.846300365534557008651006526533864E-0004	双倍精度函数值
9.947750044493134521072350567866415E-0018	“双—四”差值
1.614920370113672006709238546310162E-0008	四倍精度函数值
1.614920368712121968967788447122471E-0008	双倍精度函数值
-1.401550037741450099187691155522487E-0017	“双—四”差值
3.138855577557697399938017186347117E-0011	四倍精度函数值
3.138853924040587723724428489584393E-0011	双倍精度函数值
-1.653517109676213588696762724107628E-0017	“双—四”差值
2.563388110509723915379309956877898E-0015	四倍精度函数值
2.565189755593603071723315478854029E-0015	双倍精度函数值
1.801645083879156344005521976130583E-0018	“双—四”差值

JJ =	20150	统计数值个数
AV1 =	-1.703662593233894098161602265790449E-0018	代数平均误差
AV2 =	5.856144888786499543374565062019798E-0017	绝对平均误差
CHAmax =	1.391308717335566E-015	误差 最大值

由该示意表可见，函数值计算精度很高，达到或高于双精度要求：绝对平均误差小于 $5.857*10^{-17}$ 级次。取得如此高的计算精度，主要是系数值的计算精度极高所致 !!

作为直接算法数值计算成果，我们已经建立起了“施密特型球函数 $P_n^m(\cos\theta)$”两个系数值数据库：⑴ 0-3600 阶次“双倍精度”系数值数据库；⑵ 0-3000 阶次“四倍精度”系数值数据库。

第四节 5.6 施密特型球函数重要积分与导数的直接算法

由（5.02）式，经过严格推导，得到下面关于 $P_n^m(\cos\theta)$重要积分的直接计算公式

$$I_{nm}=\int_{\theta_1}^{\theta_2} P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left\{\sum_{k=n,n-2,\cdots}\begin{pmatrix} A_{nm_{ou}k}*\cos k\theta \\ A_{nm_{ji}k}*\sin k\theta \end{pmatrix}\right\}\sin\theta\, d\theta=\sum_{k=n,n-2,\cdots}\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} A_{nm_{ou}k}*\left(\dfrac{\cos(k-1)\theta}{k-1}-\dfrac{\cos(k+1)\theta}{k+1}\right) \\ A_{nm_{ji}k}*\left(\dfrac{\sin(k-1)\theta}{k-1}-\dfrac{\sin(k+1)\theta}{k+1}\right) \end{matrix}\right\}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.12a)$$

（5.12a）式中，$k=1$ 时，按下式求积分，即

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\begin{Bmatrix} A_{nm_{ou}1} * \cos\theta \sin\theta d\theta \\ A_{nm_{ji}1} * \sin\theta \sin\theta \, d\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{nm_{ou}1} * [-\cos 2\theta]/4 \\ A_{nm_{ji}1} * [2\theta - \sin 2\theta]/4 \end{Bmatrix}_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.12b)$$

由（5.2）式，很容易推导出 $P_n^m(\cos\theta)$ 关于 θ 的一次导数、二次导数 和 三次导数直接计算公式 ：

$$P_{nm}^{(1)}(\cos\theta) = \frac{\mathrm{d}\, P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\,\theta} = \begin{cases} \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots} (-k) * A_{nm_{ou}k} * \sin k\theta \\ \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots} (+k) * A_{nm_{ji}k} * \cos k\theta \end{cases} \quad (5.13)$$

$$P_{nm}^{(2)}(\cos\theta) = \frac{\mathrm{d}^2 P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\,\theta^2} = \begin{cases} \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots} (-k^2) * A_{nm_{ou}k} * \cos k\theta \\ \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots} (-k^2) * A_{nm_{ji}k} * \sin k\theta \end{cases} \quad (5.14)$$

$$P_{nm}^{(3)}(\cos\theta) = \frac{\mathrm{d}^3 P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\,\theta^3} = \begin{cases} \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots} (+k^3) * A_{nm_{ou}k} * \sin k\theta \\ \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots} (-k^3) * A_{nm_{ji}k} * \cos k\theta \end{cases} \quad (5.15)$$

可以断定，上述积分和导数的直接算法计算精度也是很高的。

例如：$k \neq 1$ 的（5.12a）式中，可以认为是，带有正号或负号的系数，除以（$k-1$）或（$k+1$）后，再除以 2，所得数的绝对值，小于（或大大小于）系数本身绝对值，而正弦和余弦值也是有正有负、绝对值 ≤ 1.0。参照前面关于计算精度的阐述，可知，整个积分计算过程极其稳定，计算结果必定达到双精度数值要求，即相对误差不大于 10^{-16} 级次。

理论上，导数计算不稳定，并可粗略地由其计算公式看出，其中 k、k^2、k^3 是误差放大因子。但它们是导数理论值计算所必需，并且自身没有误差，它们与浮点数表示的高精度系数的乘积值，再写成浮点数时（即整数 1 位和小数 15 位），指数值变大，但有效数字的舍入误差很小。例如：令 $k^3 = 3000^3$，

1.614920368712122 E-002 ＊ 3000^3 = 1.614920368712122 E-002 ＊ 27000000000

=（1.614920368712122 ＊ 27）E+007 = 43.602849955227294 E+007

=（4.360284995522729 + 0.0000000000000004）E+008 = 4.360284995522729 E+008

可见，乘积的有效数字的舍入误差为“4.0 E-016”，故乘积值是准确的双精度浮点数。另外，当 n、m 和 k 均较大时，小于 1.0 的系数 $A_{nm_{ou}k}$ & $A_{nm_{ji}k}$ 值衰减加快。此时，系数竟成了 理想低通滤波因子，又可进一步提高导数值计算精度。再者，直接算法不存在递推算法的大量传递误差。由此可知，导数值计算结果必达双精度要求，即相对误差不大于 10^{-16} 级次。

至此，我们严格地论证了，在双倍精度计算条件下，无论阶 n 次 m 多么大，施密特型球函数、其重要积分和 1-3 阶导数等“直接算法”都能够取得满足双倍精度要求的计算结果（即得到它们的“真值”）。这是施密特型球函数算法上的“突破性”进展。这一突破为球坐标系内区域重磁位场高精度转换处理和定量解释提供了重要的算法支撑。

第五节 施密特型球函数直接算法的重要应用（一）摘要

6.1 三类球函数值高精度高速度直接算法

6.1.1 直接算法公式[01,2009]

[01] Fantino E, Casotto S (2009) Methods of harmonic synthesis for global geopotential Models and their first-, second- and third-order gradients. J Geod 83:595 - 619.

原定义型球函数（LF）表达式是

$$P_n^{(m)}(\cos\theta)=\left[\frac{\sin^m\theta}{2^{2n}\ n!}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}(\cos\theta)^{n+m}}\left(\cos^2\theta-1\right)^n\right] \tag{6.01}$$

“完全规格化型球函数（ALF）”是国内外大地测量专家共同采用的重要函数。它的定义式是

$$\bar{P}_n^m(\cos\theta)=\sqrt{(2-\delta_{0m})(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}*P_n^{(m)}(\cos\theta) \tag{6.02}$$

“施密特型球函数(SLF)”定义式（见 4.18 式）是

$$P_n^m(\cos\theta)=\sqrt{(2-\delta_{0m})\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}*P_n^{(m)}(\cos\theta) \tag{6.03}$$

对比（6.01)、(6.02) 和（6.03）等式，分别得“原定义型球函数（LF)”和“完全规格化型球函数（ALF)”与“施密特型球函数（ALF)”之间的关系式，即 ：

$$P_n^{(m)}(\cos\theta)=\sqrt{\frac{1}{(2-\delta_{0m})}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}}*P_n^m(\cos\theta) \tag{6.04}$$

$$\bar{P}_n^m(\cos\theta)=\sqrt{2n+1}*P_n^m(\cos\theta) \tag{6.05}$$

把（6.01）式代入式（6.04)，经化简得到“原定义型球函数直接算法”公式

$$P_n^{(m)}(\cos\theta)=\frac{m!}{C_{2m}^m}\frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=0}^{[m/2]}(-1)^{[m/2]+j}c_j\,C_m^j\sum_{i=0}^{n}C_{n-i}^mC_{m+i}^mC_{2(n-i)}^{(n-i)}C_{2(m+i)}^{(m+i)}$$

$$\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\left(n-2(i+j)\right)\theta+\cos\left(2(m+i-j)-n\right)\theta, & m=m_{ou}\\ \sin\left(n-2(i+j)\right)\theta+\sin\left(2(m+i-j)-n\right)\theta, & m=m_{ji}\end{matrix}\right\} \tag{6.06}$$

该式除 $m!$ 外，各数值元素与（5.01）式的对应元素相同，可见式(6.06)最为简短。

6.3 完全规格化型球函数 10 个重要积分的直接算法[10, 2009]

[10] 吴　星，卫星重力梯度数据处理理论与方法，《解放军信息工程大学》2009 年，博士学位论文。

$$\bar{I}_{nm}^i=\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta,\ m\geq 0,\quad \bar{I}_{nm}^{\hat{k}}=\int_0^{\pi}\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos\hat{k}\theta, & m=m_{ou}\\ \sin\hat{k}\theta, & m=m_{ji}\end{pmatrix}\sin\theta\,d\theta,\ m\geq 0;$$

$$\bar{J}_{nm}^i=\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\bar{P}_{nm}^{(1)}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta,\ m\geq 0,\quad \bar{J}_{nm}^{\hat{k}}=\int_0^{\pi}\bar{P}_{nm}^{(1)}(\cos\theta)\begin{pmatrix}\sin\hat{k}\theta, & m=m_{ou}\\ \cos\hat{k}\theta, & m=m_{ji}\end{pmatrix}\sin\theta\,d\theta;$$

$$\bar{K}_{nm}^i=\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\frac{m\cdot\bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin\theta\,d\theta,\ m>0,\quad \bar{K}_{nm}^{\hat{k}}=\int_0^{\pi}\frac{m\cdot\bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\sin\theta}\begin{pmatrix}\sin\hat{k}\theta, & m=m_{ou}\\ \cos\hat{k}\theta, & m=m_{ji}\end{pmatrix}\sin\theta\,d\theta,\ m>0;$$

$$\overline{L}_{nm}^{i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left[2\,\overline{P}_{nm}^{(2)}(\cos\theta) + n(n+1)\overline{P}_{nm}(\cos\theta) \right] \sin\theta\, d\theta, \quad m \ge 0 ,$$

$$\overline{L}_{nm}^{\hat{k}} = \int_{0}^{\pi} \left[2\overline{P}_{nm}^{(2)}(\cos\theta) + n(n+1)\overline{P}_{nm}(\cos\theta) \right] \begin{pmatrix} \cos\hat{k}\theta, & m = m_{ou} \\ \sin\hat{k}\theta, & m = m_{ji} \end{pmatrix} \sin\theta\, d\theta ; \quad m \ge 0 ;$$

$$\overline{M}_{nm}^{i} = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{m \cdot \overline{P}_{nm}(\cos\theta)}{\sin\theta} \right) \sin\theta\, d\theta, \quad m > 0 ,$$

$$\overline{M}_{nm}^{\hat{k}} = \int_{0}^{\pi} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{m \cdot \overline{P}_{nm}(\cos\theta)}{\sin\theta} \right) \begin{pmatrix} \cos\hat{k}\theta, & m = m_{ou} \\ \sin\hat{k}\theta, & m = m_{ji} \end{pmatrix} \sin\theta d\theta , \quad m > 0 。$$

（6.16）

上面 10 个有关“完全规格化球函数”的重要积分，来自于解放军信息工程大学吴兴博士的博士学位论文。在《高阶球函数直接算法与区域位场定量解释》[70] 的 6.3 节，采用“直接算法”严格推导出了该 10 个重要积分的显式表达式，并分析了它们的计算精度，结论是，采用美国 IEEE 标准浮点数双精度计算，各式计算结果均可达到“双精度浮点数要求”。

第六节　施密特型球函数直接算法的重要应用（二）摘要

7.1　地磁场三分量球谐表达式

[01] 管志宁编著，《地磁场与磁力勘探》，北京：地质出版社，2005 年 9 月。

众所周知，球谐合成 和 球谐分析 的双重求和一般表示为 $\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\{\cdots\}$。下面表 7.1 中，$n$ 由上到下增加，m 由左到右增加；表中每个小格内是 (n,m) 值。由该表可见：上面的双重球和中，n 固定，m 由 0 →12 求和，属于先沿水平方向顺序求和。如果改换求和顺序，变为 $\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\{\cdots\}$，即 m 固定，n 由 0→12 求和，属于先沿上到下方向顺序求和。数一数立即可知：$\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\{\cdots\} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\{\cdots\}$。为了便于理解，后文，我们经常采用后面的求和方式。

表 7.1　验证两种顺序求和值相等 （即 $\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\{\cdots\}=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\{\cdots\}$）的数据表

Table.7.1 the numeral table to validate that

the value of sum $\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\{\cdots\}$ equal to the value of sum $\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\{\cdots\}$

N↓							
0	0,0						
1	1,0	1,1					
2	2,0	2,1	2,2				
3	3,0	3,1	3,2	3,3			
4	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4		
5	5,0	5.1	5,2	5,3	5,4	5,5	
6	6,0	6.1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

7	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7					
8	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8				
9	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9			
10	10,0	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	10,10		
11	11,0	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	11,10	11,11	
12	12,0	12,1	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	12,10	12,11	12,12
M→	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

地磁场径向分量、东向分量和北向分量球谐表达式为 [01,2005]：

$$Z(\lambda,\theta)=-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\left[a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right](n+1)P_n^m(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\{\cdots\},n\geq 1$$

$$Y(\lambda,\theta)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\left[a_n^m\sin m\lambda-b_n^m\cos m\lambda\right]\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\{\cdots\},n\geq 1$$

$$X(\lambda,\theta)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\left[a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n^m(\cos\theta)\quad=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\{\cdots\},n\geq 1$$

（7.01）

上式中：R 为地球的国际参考半径；$r>R$ 是观测点到地心的距离，在地磁场作“曲华平”处理后，$r=R_2$ 是大于 R 的大圆半径；$\left\{a_n^m,b_n^m\right\}=\left\{\mu_0R^{-(n+2)}A_n^m,\mu_0R^{-(n+2)}B_n^m\right\}$为磁位球谐系数；$P_n^m(\cos\theta)$是施密特型球函数。该函数值及其 1 阶导数值均采用“直接算法”计算，或者直接取自预先计算好的数据库内函数值。

以下三节将分别阐述，由地磁场垂向分量 $Z(\lambda,\theta)$、东向分量 $Y(\lambda,\theta)$ 和北向分量 $X(\lambda,\theta)$，求解磁位 $U(\lambda,\theta)$ 球谐系数 $\left\{a_n^m,b_n^m\right\}=\left\{\mu_0R^{-(n+2)}A_n^m,\mu_0R^{-(n+2)}B_n^m\right\}$ 的 传统 或 非传统解法。这是施密特型球函数直接算法的重要应用之二。

“传统解法”是指“分量场 * $\left\{\left(\frac{2\hat{n}+1}{4\pi}\right)\begin{pmatrix}\cos\hat{m}\lambda\\ \sin\hat{m}\lambda\end{pmatrix}P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\sin\theta\right\}$”进行的球谐分析，无论 $P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)$ 是否采用（5.02）式求和形式。而“分量场*其他形式的公式”进行的球谐分析，均称为“非传统解法”。

无论是“传统解法”，还是“非传统解法”，其球谐分析对象的表达式相同，求解对象（即磁位球谐系数）亦相同。因此，理论上，不同解法解出的“磁位球谐系数”必然相同，球谐合成的结果也必然相同。

不同解法的不同之处在于：开始作球谐分析得到的球谐分析式左端的球谐系数$\left\{\hat{a}_{\hat{n}}^{\hat{m}},\hat{b}_{\hat{n}}^{\hat{m}}\right\}$的数值彼此不同，由该球谐系数$\left\{\hat{a}_{\hat{n}}^{\hat{m}},\hat{b}_{\hat{n}}^{\hat{m}}\right\}$值求解“磁位球谐系数$\left\{a_{\hat{n}}^{\hat{m}},b_{\hat{n}}^{\hat{m}}\right\}$”的反演公式不同。

由北向分量 $X(\lambda,\theta)$ 求解“磁位球谐系数”的“非传统解法”，体现了“直接算法”独特的解题能力。而按“传统解法”由北向分量 $X(\lambda,\theta)$ 却无法求得“磁位球谐系数”值。

为了易于理解后面三节的推导过程，只需记住：球谐分析包含的关于 λ 和 θ 的积分式是彼此分开的。但是，要使总积分不为“0”，两个积分式均要满足共同条件 $m=\hat{m}$（$=\hat{m}_{ou}$ or $=\hat{m}_{ji}$）；反过来说，$m\neq\hat{m}$ 的含 θ 的积分式永远等于“0”。

7.4 由地磁场北向分量 $X(\lambda,\theta)$ 求解磁位球谐系数的直接算法

7.4.1　采用传统模式的直接算法

把 $P_{nm}^{(1)}(\cos\theta)$ 的表达式（5.15）代入地磁场北向分量球谐分析表达式（7.01）的第 3 式，得到

$$X(\lambda,\theta)=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\left[a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P_n^m(\cos\theta)$$

$$=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\left[a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right]\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}(-k)*A_{nm_{ou}k}\cdot\sin k\theta\\ \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots 1}k*A_{nm_{ji}k}\cdot\cos k\theta\end{pmatrix}\qquad(7.31)$$

上式的 $\left\{a_n^m,b_n^m\right\}=\left\{\mu_0R^{-(n+2)}A_n^m,\ \mu_0R^{-(n+2)}B_n^m\right\}$ 是磁位 $U(\lambda,\theta)$ 的球谐系数。

按照传统，（7.31）式左、右两端均乘以 $\left\{\frac{2n+1}{4\pi}\begin{pmatrix}\cos\hat{m}\lambda\\ \sin\hat{m}\lambda\end{pmatrix}P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\sin\theta\right\}$，再作积分，得 $X(\lambda,\theta)$ 的球谐系数 $\left\{\hat{a}_{\hat{n}}^{\hat{m}},\hat{b}_{\hat{n}}^{\hat{m}}\right\}$

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_{\hat{n}}^{\hat{m}}\\ \hat{b}_{\hat{n}}^{\hat{m}}\end{pmatrix}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}X(\lambda,\theta)*\left\{\frac{2\hat{n}+1}{4\pi}*\begin{pmatrix}\cos\hat{m}\lambda\\ \sin\hat{m}\lambda\end{pmatrix}*P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\sin\theta\right\}d\theta d\lambda$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\left[a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right]P_{nm}^{(1)}(\cos\theta)\right\}\left\{\begin{pmatrix}\cos\hat{m}\lambda\\ \sin\hat{m}\lambda\end{pmatrix}\frac{2\hat{n}+1}{4\pi}P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\sin\theta\right\}d\theta\, d\lambda$$

$$=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\int_0^{2\pi}\left[a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right]*\begin{pmatrix}\cos\hat{m}\lambda\\ \sin\hat{m}\lambda\end{pmatrix}d\lambda*\left(\frac{2\hat{n}+1}{4\pi}\right)\int_0^{\pi}P_{nm}^{(1)}(\cos\theta)P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$=\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\pi*\begin{Bmatrix}a_n^{\hat{m}}\\ b_n^{\hat{m}}\end{Bmatrix}*\frac{2\hat{n}+1}{4\pi}*\int_0^{\pi}P_{n\hat{m}}^{(1)}(\cos\theta)P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

（参见（7.04）式 得到!）

（7.32）

在（7.32）式中关于 θ 的积分中，二球函数具有相同次数（即：$m=\hat{m}$，这是由关于 λ 的积分决定的）；否则，该积分不存在。

根据（7.31）和（5.02）式，（7.32）式关于 θ 的积分进一步表示如下，

$$\int_0^{\pi}P_{n\hat{m}}^{(1)}(\cos\theta)P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\int_0^{\pi}\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}(-k)*A_{nm_{ou}k}*\sin k\theta\\ \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}k*A_{nm_{ji}k}*\cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,n-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ou}\hat{k}}\cos\hat{k}\theta\\ \sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,n-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ji}\hat{k}}\sin\hat{k}\theta\end{pmatrix}\sin\theta d\theta$$

$$
=\begin{cases}
(a)=\begin{cases}
\sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}(-k)*A_{nm_{ou}k}*\sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ou}\hat{k}}*\int_0^{\pi}\sin k\theta\cos\hat{k}\theta\sin\theta\, d\theta\\
+\sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}(-k)*A_{nm_{ou}k}*\sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ji}\hat{k}}*\int_0^{\pi}\sin k\theta\ \sin\hat{k}\theta\sin\theta\, d\theta
\end{cases}\\
(b)=\begin{cases}
\sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}k*A_{nm_{ji}k}*\sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ou}\hat{k}}*\int_0^{\pi}\cos k\theta\cos\hat{k}\theta\sin\theta\, d\theta\\
+\sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}k*A_{nm_{ji}k}*\sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ji}\hat{k}}*\int_0^{\pi}\cos k\theta\ \sin\hat{k}\theta\sin\theta\, d\theta
\end{cases}
\end{cases}
\quad (7.33)
$$

由（6.11）式，(7.33a)式中第 1 个积分为 0；(7.33b)式中第 2 个积分为 0。 由（6.20）和（6.21）式，(7.33a)式中第 2 个积分 和 (7.33b)式中第 1 个积分，$(k+\hat{k})$为奇数时等于 0，$(k+\hat{k})$为偶数时不等于 0。但是，该二式中 $m\neq\hat{m}$，它们事实上等于 0。

由此得出重要结论：$(7.32)=0$！这表明：采用“传统+直接解法”的球谐分析方法，不能求得地磁场北向分量的球谐系数$\left\{\hat{a}_{\hat{n}}^{\hat{m}},\hat{b}_{\hat{n}}^{\hat{m}}\right\}$，也就不能求得磁磁位球谐系数$\left\{a_{\hat{n}}^{\hat{m}},b_{\hat{n}}^{\hat{m}}\right\}$。

7.4.2 采用非传统模式的直接算法 （节录）

在（7.31）式左、右两端均乘以$\left\{\begin{pmatrix}\cos\hat{m}\lambda\\ \sin\hat{m}\lambda\end{pmatrix}P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\right\}$，再作积分，则有

$$
\begin{Bmatrix}\hat{a}_{\hat{n}}^{\hat{m}}\\ \hat{b}_{\hat{n}}^{\hat{m}}\end{Bmatrix}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}X(\lambda,\theta)\left\{\begin{pmatrix}\cos\hat{m}\lambda\\ \sin\hat{m}\lambda\end{pmatrix}*P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\right\}d\theta d\lambda
$$

$$
=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\left[a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right]P_{nm}^{(1)}(\cos\theta)\right\}\begin{pmatrix}\cos\hat{m}\lambda\\ \sin\hat{m}\lambda\end{pmatrix}P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\,d\theta\,d\lambda
$$

$$
=\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\int_0^{2\pi}\left[a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right]*\begin{pmatrix}\cos\hat{m}\lambda\\ \sin\hat{m}\lambda\end{pmatrix}d\lambda\int_0^{\pi}P_{nm}^{(1)}(\cos\theta)P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\,d\theta
$$

$$
=\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\pi*\begin{Bmatrix}a_n^{\hat{m}}\\ b_n^{\hat{m}}\end{Bmatrix}\int_0^{\pi}P_{n\hat{m}}^{(1)}(\cos\theta)P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\,d\theta
$$

（参见（7.04）式 得到!）

（7.34）

在（7.34）式中关于θ的积分中，二球函数具有相同次数（即：$m=\hat{m}$，这是由关于λ的积分决定的）；否则，该积分不存在。根据（7.31）和（5.02）式，（7.34）式关于θ的积分进一步表示如下，

$$
\int_0^{\pi}P_{n\hat{m}}^{(1)}(\cos\theta)P_{\hat{n}}^{\hat{m}}(\cos\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi}\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}(-k)*A_{n\hat{m}_{ou}k}*\sin k\theta\\ \sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}k*A_{n\hat{m}_{ji}k}*\cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ou}\hat{k}}\cos\hat{k}\theta\\ \sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ji}\hat{k}}\sin\hat{k}\theta\end{pmatrix}d\theta
$$

$$
=\begin{cases}
\sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}(-k)*A_{n\hat{m}_{ou}k}*\sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ou}\hat{k}}*\int_0^{\pi}\sin k\theta\cos\hat{k}\theta\ d\theta\\
\sum\limits_{k=n,n-2,n-4,\cdots}(+k)*A_{n\hat{m}_{ji}k}*\sum\limits_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ji}\hat{k}}*\int_0^{\pi}\cos k\theta\ \sin\hat{k}\theta\ d\theta
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=n,n-2,n-4,\cdots}(-k)*A_{n\hat{m}_{ou}k}*\sum_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ou}\hat{k}}*\frac{2k}{k^2-\hat{k}^2}, & (k-\hat{k})-\text{odd}\,, \\ \displaystyle\sum_{k=n,n-2,n-4,\cdots}(+k)*A_{n\hat{m}_{ji}k}*\sum_{\hat{k}=\hat{n},\hat{n}-2,\hat{n}-4,\cdots}A_{\hat{n}\hat{m}_{ji}\hat{k}}*\frac{2\hat{k}}{\hat{k}^2-k^2}, & (\hat{k}-k)-\text{odd}\end{cases} \tag{7.35}
$$

(7.35) 式中：上式对应于 $\hat{m}=\hat{m}_{ou}$ 和 $(k-\hat{k})-\text{odd}$；由 $(k-\hat{k})-\text{odd}$ 必要求 $(n-\hat{n})-\text{odd}$；再由 $(n-\hat{n})-\text{odd}$，若 $\hat{n}=n_{ou}$，则必须 $n=n_{ji}$，若 $\hat{n}=n_{ji}$，则必须 $n=n_{ou}$。下式对应于 $\hat{m}=\hat{m}_{ji}$ 和 $(\hat{k}-k)-\text{odd}$；由 $(\hat{k}-k)-\text{odd}$ 必要求 $(\hat{n}-n)-\text{odd}$；再由 $(\hat{n}-n)-\text{odd}$，若 $\hat{n}=n_{ou}$，则必须 $n=n_{ji}$，若 $\hat{n}=n_{ji}$，则必须 $n=n_{ou}$。由此可见，对于上式和下式，均存在两种情况，即 $(n,\hat{n})=(n_{ji},\hat{n}_{ou})$ or $(n,\hat{n})=(n_{ou},\hat{n}_{ji})$，即（7.35）式又分 4 种情况。 于是，（7.34）式也分为 4 种情况，即有

$$
\begin{pmatrix}\hat{a}_{\hat{n}_{ou}}^{\hat{m}_{ou}}\\ \hat{b}_{\hat{n}_{ou}}^{\hat{m}_{ou}}\end{pmatrix}=\pi*\sum_{n=n_{ji}=\hat{m}_{ou}+1}^{N_{ou}+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n_{ji}+2}\begin{pmatrix}a_{n_{ji}}^{\hat{m}_{ou}}\\ b_{n_{ji}}^{\hat{m}_{ou}}\end{pmatrix}\sum_{k=n_{ji},\cdots,3,1}(-k)A_{n_{ji}\hat{m}_{ou}k}*\sum_{\hat{k}=\hat{n}_{ou},\cdots,\hat{2},\hat{0}}A_{\hat{n}_{ou}\hat{m}_{ou}\hat{k}}*\frac{2k}{k^2-\hat{k}^2}
$$

$$
\begin{pmatrix}\hat{a}_{\hat{n}_{ji}}^{\hat{m}_{ou}}\\ \hat{b}_{\hat{n}_{ji}}^{\hat{m}_{ou}}\end{pmatrix}=\pi*\sum_{n=n_{ou}=\hat{m}_{ou}}^{N_{ou}}\left(\frac{R}{r}\right)^{n_{ou}+2}\begin{pmatrix}a_{n_{ou}}^{\hat{m}_{ou}}\\ b_{n_{ou}}^{\hat{m}_{ou}}\end{pmatrix}\sum_{k=n_{ou},\cdots,2,0}(-k)A_{n_{ou}\hat{m}_{ou}k}*\sum_{\hat{k}=\hat{n}_{ji},\cdots,\hat{3},\hat{1}}A_{\hat{n}_{ji}\hat{m}_{ou}\hat{k}}*\frac{2k}{k^2-\hat{k}^2}
$$

$$
\begin{pmatrix}\hat{a}_{\hat{n}_{ou}}^{\hat{m}_{ji}}\\ \hat{b}_{\hat{n}_{ou}}^{\hat{m}_{ji}}\end{pmatrix}=\pi*\sum_{n=n_{ji}=\hat{m}_{ji}}^{N_{ji}}\left(\frac{R}{r}\right)^{n_{ji}+2}\begin{pmatrix}a_{n_{ji}}^{\hat{m}_{ji}}\\ b_{n_{ji}}^{\hat{m}_{ji}}\end{pmatrix}\sum_{k=n_{ji},\cdots,3,1}(+k)*A_{n_{ji}\hat{m}_{ji}k}*\sum_{\hat{k}=\hat{n}_{ou},\cdots,\hat{2},\hat{0}}A_{\hat{n}_{ou}\hat{m}_{ji}\hat{k}}*\frac{2\hat{k}}{\hat{k}^2-k^2}
$$

$$
\begin{pmatrix}\hat{a}_{\hat{n}_{ji}}^{\hat{m}_{ji}}\\ \hat{b}_{\hat{n}_{ji}}^{\hat{m}_{ji}}\end{pmatrix}=\pi*\sum_{n=n_{ou}=\hat{m}_{ji}+1}^{N_{ji}+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n_{ou}+2}\begin{pmatrix}a_{n_{ou}}^{\hat{m}_{ji}}\\ b_{n_{ou}}^{\hat{m}_{ji}}\end{pmatrix}\sum_{k=n_{ou},\cdots,2,0}(+k)*A_{n_{ou}\hat{m}_{ji}k}*\sum_{\hat{k}=\hat{n}_{ji},\cdots,\hat{3},\hat{1}}A_{\hat{n}_{ji}\hat{m}_{ji}\hat{k}}*\frac{2\hat{k}}{\hat{k}^2-k^2}
$$

（7.36）

由上面推导可见，采用非传统的直接算法，有可能由 $\left\{\hat{a}_{\hat{n}}^{\hat{m}},\hat{b}_{\hat{n}}^{\hat{m}}\right\}$ 求解出磁位球谐系数 $\left\{a_{\hat{n}}^{\hat{m}},b_{\hat{n}}^{\hat{m}}\right\}$，进而实现磁场之间的转换处理。这凸显了直接算法的独特的解题能力。

7.4.3　理论实例证实非传统直接算法的可行性　（略）

第七节　10.2　确定位场高阶次球谐分析截断阶数 N 的方法

10.2.1　根据任意球面函数的傅里叶分析

施密特型球函数可以写成如下三角函数展开式

$$P_n^m(\theta)=\begin{cases}\sum\limits_{k=n,n-2,\ldots} A_{nm_{ou}k}\cos k\theta \\ \sum\limits_{k=n,n-2,\ldots} A_{nm_{ji}k}\ \sin k\theta\end{cases}=\begin{cases}\sum\limits_{k=n,n-2,\ldots} C_{nm_{ou}k}\cos k\theta \\ \sum\limits_{k=n,n-2,\ldots} S_{nm_{ji}k}\sin k\theta\end{cases} \qquad (10.15)$$

式中：$C_{nm_{ou}k}=A_{nm_{ou}k}$ 和 $S_{nm_{ji}k}=A_{nm_{ji}k}$ 称为 $P_n^m(\cos\theta)$ 的展开式系数。

由上式可见，施密特型球函数 $P_n^m(\cos\theta)$ 是有限项傅里叶展开式，其中，阶数 n 等于展开式中三角函数幅角系数 k 的最高值。而 k 值，在频率域是频率，在波数域是波数。重磁异常是稳定场，没有随时间变化的频率，只有随尺度变化的波数。因此，k 值在重磁勘探中称为波数。

一个平方可积的球面函数 $f(\lambda,\theta)$ 的“球谐合成（SHA）”与“球谐分析(SHS)”对为

$$f(\lambda,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda\right)P_n^m(\cos\theta) \qquad (10.16)$$

$$\begin{Bmatrix}a_n^m\\ b_n^m\end{Bmatrix}=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\lambda,\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{Bmatrix}P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\lambda\,d\theta \qquad (10.17)$$

式（10.16）和（10.17）可以严格地改写为

$$f(\lambda,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}(C_{nm}\cos m\lambda+S_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta) \qquad (10.18)$$

$$\begin{Bmatrix}C_{nm}\\ S_{nm}\end{Bmatrix}=\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{2\pi}f(\lambda,\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{Bmatrix}d\lambda\right\}P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta \qquad (10.19)$$

其中，$$\{C_{nm}\ or\ S_{nm}\}=\left\{\left(4\pi/(2n+1)\right)\cdot a_n^m\ \ or\ \ \left(4\pi/(2n+1)\right)\cdot b_n^m\right\} \qquad (10.20)$$

“球谐分析”式（10.20）能够采用如下两个步骤加以实现 [04, 1996]

$$\left.\begin{matrix}A_m(\theta)\\ B_m(\theta)\end{matrix}\right\}=\int_0^{2\pi}f(\theta,\lambda)\begin{Bmatrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{Bmatrix}d\lambda \qquad (10.21a)$$

$$\left.\begin{matrix}C_{nm}\\ S_{nm}\end{matrix}\right\}=\int_0^{\pi}\begin{Bmatrix}A_m(\theta)\\ B_m(\theta)\end{Bmatrix}P_{nm}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta \qquad (10.21b)$$

还是采用两个步骤，“球谐合成”反过来给出 $f(\theta,\lambda)$：

$$\left.\begin{matrix}A_m(\theta)\\ B_m(\theta)\end{matrix}\right\}=\sum_{n=m}^{\infty}P_{nm}(\cos\theta)\begin{Bmatrix}C_{nm}\\ S_{nm}\end{Bmatrix} \qquad (10.22a)$$

$$f(\theta,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\{A_m(\theta)\cos m\lambda+B_m(\theta)\sin m\lambda\} \qquad (10.22b)$$

公式（10.21a）和（10.22b）是沿纬度圈（即在经度方向）的一维傅里叶变换。如果傅里叶方法也用于纬度方向，则施密特型勒让德函数 $P_{nm}(\cos\theta)$ 必须写成正弦-余弦级数

$$P_{nm}(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{n}a_{nmk}\begin{cases}\cos k\theta, & m\ even\\ \sin k\theta, & m\ odd\end{cases} \tag{10.23}$$

其中，当$n-k$为奇数时，a_{nmk}为 0 值。因此，（10.23）式与（10.15）式完全相同。把（10.23）代入（10.22a）得到

$$A_m(\theta)=\sum_{n=m}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{nmk}C_{nm}\begin{Bmatrix}\cos k\theta\\ \sin k\theta\end{Bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}D_{mk}\begin{cases}\cos k\theta, & m\ \ even\\ \sin k\theta, & m\ \ odd\end{cases} \tag{10.24a}$$

$$B_m(\theta)=\sum_{n=m}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{nmk}S_{nm}\begin{Bmatrix}\cos k\theta\\ \sin k\theta\end{Bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}E_{mk}\begin{cases}\cos k\theta, & m\ \ even\\ \sin k\theta, & m\ \ odd\end{cases} \tag{10.24b}$$

其中：
$$\left.\begin{matrix}D_{mk}\\ E_{mk}\end{matrix}\right\}=\sum_{n=\max(m,k)}^{\infty}a_{nmk}\begin{cases}C_{nm}\\ S_{nm}\end{cases} \tag{10.25}$$

显然，D_{mk}和E_{mk}是二维傅里叶系数，这一结论，在把（10.24a）和（10.24b）代入（10.22b）后，会变得清清楚楚，代入结果是

$$f(\theta,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\{D_{mk}\cos m\lambda+E_{mk}\sin m\lambda\}\begin{cases}\cos k\theta, & m\ even\\ \sin k\theta, & m\ odd\end{cases} \tag{10.26}$$

中间结果（10.25）表示从球谐系数到二维傅里叶系数的变换。忽略掉由混叠现象引起的问题，则在快速傅里叶变换（即 FFT）算法中，最大阶数为N的截断方案（10.25）变为

$$\left.\begin{matrix}D_{mk}\\ E_{mk}\end{matrix}\right\}=\sum_{n=\max(m,k)}^{N}a_{nmk}\begin{cases}C_{nm}\\ S_{nm}\end{cases} \tag{10.27}$$

因为施密特型球函数$P_n^m(\cos\theta)$的次数m和系数a_{nmk}的序号k，与阶数n之间有关系式$m,k=0,1,2,\ldots,n$，所以$f(\lambda,\theta)$的二维傅里叶变换式（10.26）关于m和k的截断也是$N=n_{\max}$，则式（10.26）变为

$$f(\theta,\lambda)=\sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}\{D_{mk}\cos m\lambda+E_{mk}\sin m\lambda\}\begin{cases}\cos k\theta, & m\ even\\ \sin k\theta, & m\ odd\end{cases} \tag{10.28}$$

众所周知，在截断后的二维快速傅里叶变换中，包含的最短波长就是$(2*\Delta\lambda)$或$(2*\Delta\theta)$，其中，$\Delta\lambda$和$\Delta\theta$分别是沿纬度圈（λ方向）和沿经度圈（θ方向）的观测点的角度间隔。因为（10.26）式关于m和k的截断也是$N=n_{\max}$，就是说，在地球重磁总场或重磁异常的球谐分析和球谐合成中，应取等角网格$\Delta\lambda=\Delta\theta$，则最高截断阶数$N=n_{\max}$与观测点角度间隔$\Delta\theta$有关系式

$$N=\pi/(2*\Delta\theta) \tag{10.29}$$

换算成距离单位，设Δ和R分别为θ方向点距和观测球面半径，则有普遍关系式：

$$N=\pi\cdot R/(2\Delta\theta\cdot R)={}^{\pi R}\!/_{2\Delta} \tag{10.30}$$

由（10.31）式可得如下数值规律：① N与Δ成反比，即R为常量，Δ越小，N越大，Δ越大，N越小。② N与R成正比，即Δ为常量，R越大，N越大；R越小，N越小。

例如：目前中国地质调查局部署的重力 1:20 万面积测量工作，点距$\Delta=2km$。如果球坐标系原点选在地球中心，地球半圈长约 20000km，则$N\cong 20000km/4km=5000$。

然而，青藏高原 1:20 万重力资料处理表明，重力异常等值线图中，① 含有大量高密度或低密度三度岩体引起的局部重力异常，它们一般是由波长小于 40 km 的波数成分合成得到的。② 滤除局部重力异常后的区域重力异常，它们对应地由波长大于 40 km 的波数成分合成，一般认为是由分布面积大的连续重力密度分界面所引起。

为了定量反演三度岩体的质量中心、总质量、1630 个边界点向径长度，我们采用的是“三维局部重力异常源全方位成像”方法（见参考文献[31,1997]）。该方法的球坐标系原点选在三度体质量中心（该质心由“直接反演+迭代修改方法”准确得到），此时，其边界径向长度一般小于 10 km，故此，取 $N=5$，共有 $(N+1)^2=36$ 个非 0 球谐系数，符合“ R 越小，N 越小”的数值规律。

为了反演区域性的密度分界面深度，必须选球坐标系原点位于地球中心，并选 $\Delta=20km$（最小波长 40 km），于是，得到 $N\cong 500$。当然，也可以选 $\Delta=10km$（最小波长 20 km），于是，得到 $N\cong 1000$。这符合“ R 越大，N 越大”和“ Δ 越小，N 越大”的数值规律。

10.2.2 根据位场球谐分析需满足的条件

以磁矩中心或质量中心为球坐标系原点；$p(r,\lambda,\theta)$、$q(r',\lambda',\theta')$ 和 r_{pq} 分别表示观测点、场源点和它们之间的距离；M_q、ρ_q 和 G 分别表示场源总磁化方向、点 q 处的磁化强度模、密度和万有引力常数。则三度体引力位、“拟引力位”表达式分别为

$$V(p)=\iiint_V \frac{G\rho_q}{r_{pq}}\,dv\,，\ \widetilde{V}(p)=\iiint_V \frac{M_q}{r_{pq}}\,dv \tag{10.31}$$

r_{pq} 的空间域表达式如下

$$r_{pq}=\sqrt{r^2+r'^2-2r\cdot r'\cos\psi}=r\sqrt{1-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\psi+\left(\frac{r'}{r}\right)^2} \tag{10.32}$$

当满足条件 “ $(r'/r)<1$ ” 时，r_{pq}^{-1} 可以展开为 r 的无穷负幂级数

$$\begin{gathered}\frac{1}{r_{pq}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi)\\ \begin{cases}P_n(\cos\psi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m(\lambda-\lambda')\\ \cos m(\lambda-\lambda')=\cos m\lambda\ \cos m\lambda'+\sin m\lambda\ \sin m\lambda'\end{cases}\end{gathered} \tag{10.33}$$

把（10.33）式代入（10.31）式，得到“引力位”和“拟引力位”关于 r 的负幂级数为

$$\left\{V(p),\widetilde{V}(p)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta) \tag{10.34}$$

式中：$P_n^m(\cos\theta)$ 为 n 阶 m 次施密特型球函数；a_n^m、b_n^m 为它们的球谐系数，表达式为

$$\begin{Bmatrix}a_n^m\\ b_n^m\end{Bmatrix}=\iiint_V\left\{G\rho_q\ 或\ M_q\right\}r'^{(n+2)}\begin{Bmatrix}\cos m\lambda'\\ \sin m\lambda'\end{Bmatrix}P_n^m(\cos\theta')\sin\theta'\,dr'\,d\lambda'\,d\theta' \tag{10.35}$$

式（10.35）和 式（10.34）式分别是“引力位”和“拟引力位”的“球谐分析”和“球

谐合成”表达式。

设：$(r'/r)<1.0$，$r'=R_0$，$r=R=c\cdot R_0$，$c>1.0$，则有下式

$$\left\{V(p),\widetilde{V}(p)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda}{(c\cdot R_0)^{(n+1)}}P_n^m(\cos\theta)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c^{-(n+1)}\sum_{m=0}^{n}\frac{a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda}{(R_0)^{(n+1)}}P_n^m(\cos\theta) \tag{10.36}$$

式（10.36）中，$c^{-(n+1)}=1/c^{(n+1)}$，因为 $c>1.0$，它相当于一个低通滤波因子，对公式右端关于 m 的求和进行压制。设 ε 是“双倍精度”或“四倍精度”的最小有意义数绝对值。当下式成立时

$$c^{-(n+1)}\cdot\sum^{n}\frac{a_n^m\cos m\lambda+b_n^m\sin m\lambda}{(R_0)^{(n+1)}}P_n^m(\cos\theta)<c^{-(n+1)}\cdot\sum^{n}\frac{\left(\left|a_n^m\right|+\left|b_n^m\right|\right)}{(R_0)^{(n+1)}}<\varepsilon \tag{10.37}$$

即当
$$\sum^{n}\left(\left|a_n^m\right|+\left|b_n^m\right|\right)<\varepsilon\cdot(c\cdot R_0)^{(n+1)} \tag{10.38}$$

时，有
$$N=n_{\min}>\left(\left\{\log\left(\sum^{n}\left(\left|a_n^m\right|+\left|b_n^m\right|\right)\right)-\log\varepsilon\right\}\Big/\log\left(c\cdot R_0\right)\right)-1 \tag{10.39}$$

则 N 就是对应于 $r=R=c\cdot R_0$ 和 $c>1.0$ 的截断阶数，而且 c 越大，N 越小。

如果在半径为 R_0 的球面上，沿经度圈（θ 增加方向）点距 $\Delta=2km$，如前所述，$N=5000$，但在半径 $r=R=c\cdot R_0$ 和 $c>1.0$ 的球面上进行“球谐分析”和“球谐合成”，只要场源仍位于半径为 R_0 的球面以内 和 $\Delta\theta$ 相同，必定有 $N_{\min}<5000$。

第八节 10.3 球壳型磁性层磁异常正反演方法在球面有限区域内的应用[05][06]

（一） 问题的提出和假设条件

在平面上建立的波数域正、反演理论和方法，是采用傅立叶变换在整个平面上导出的，但实际应用时，往往限于有限区域。为此，要作某些假设。如假设计算区边界磁异常为 0，若不为 0，通过数据扩充，使在扩充边界上磁异常为 0。另外，忽略计算区外磁性体对计算区内的异常数据的影响，等等。球壳型磁性层正、反演方法是借助于球谐分析理论在整个球面上建立起来的，若能在一定假设条件下应用于范围有限区域，无疑，将有实际意义。

为了推广应用于有限区域，设该区域为 D。我们假定：① Z_P 在 D 内直至边界连续，且在边界上为 0；而在 D 外（称为 $\overline{D}$）恒为 0。② $\Delta J_{\lambda'\theta'}$、$\Delta h_{\lambda'\theta'}$ 和 $\Delta H_{\lambda'\theta'}$ 与 Z_P 具有同样分布特征。在此假定下，图 9.1 中，磁性层断面在 $\overline{D}$ 内为同心圆环，且磁化强度为常数 J，其与 D 内同心圆环部分共同产生的 Z_P 在环外处处为 0。

（二）有限区域内球面函数的球谐分析

由文献[07]45 页定理和 273 页“$Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 的完备性”论述，可知：任何一个在球面上连续的函数 $f(\lambda,\theta)$，可用球谐分析方法，展开为一个平均收敛的级数。这就是说，能进行球谐分析的函数包括有限区域内分布的连续球面函数。我们前面对 Z_P、$\Delta J_{\lambda'\theta'}$、$\Delta h_{\lambda'\theta'}$ 和 $\Delta H_{\lambda'\theta'}$ 等函数所作的假设符合连续函数要求，尽管它们是“有限球面区域分布”，仍能作球

谐分析。

设 $f(\lambda,\theta)$ 代表前述局部函数。由（9.21）式，其球谐系数 $\left\{G_n^m, H_n^m\right\}$ 为

$$\begin{Bmatrix} G_n^m \\ H_n^m \end{Bmatrix} = \frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda,\theta)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \sin\theta\, d\lambda\, d\theta$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \left\{ \iint_D [\cdots\cdots] d\lambda\, d\theta + \iint_{\overline{D}} [\cdots\cdots] d\lambda\, d\theta \right\} = \frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \iint_D f(\lambda,\theta)\, P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \sin\theta\, d\lambda\, d\theta$$

（10.40）

上式第二个积分为 0 值，是因为 $f(\lambda,\theta)$ 在 $\overline{D}$ 内为 0 值，而其他函数是有界连续的。（10.40）式说明：函数 $f(\lambda,\theta)$ 在 D 内的积分所得球谐系数，严格等于它在整个球面积分所得的球谐系数。既然 $\left\{G_n^m, H_n^m\right\}$ 是 $f(\lambda,\theta)$ 的严格的球谐系数，把它代入（9.20）式所得的函数值，理论上必定是 $f(\lambda,\theta)$，它在 $\overline{D}$ 为 0 值。

计算证实了上述结论，见文献[05]中图 2 或 [06]中图 5.8。

该图中，局部函数 $f(\lambda,\theta)$ 分布区域 D 为 $\left[\,75^0 \le \lambda \le 105^0, 75^0 \le \theta \le 105^0\,\right]$。其值以 $\left[\,90^0, 90^0\,\right]$ 为中心呈园对称，即任一过该中心的剖面上的函数值均如该图曲线所示。在区域 D 内，把此函数按（10.40）积分，求得它的球谐系数 $\left\{G_n^m, H_n^m\right\}$，其 $n=70$。该球谐系数代入（9.20）式，所得值在 D 内最大误差为 3nT（磁场峰值为 180nT）。采用该球谐系数 $\left\{G_n^m, H_n^m\right\}$ 和（9.20）式，在较大区域 $\left[\,65^0 \le \lambda \le 115^0, 65^0 \le \theta \le 115^0\,\right]$，求 $f(\lambda,\theta)$ 值。其结果是：在 $\overline{D}$ 内，$f(\lambda,\theta)$ 以 1 为幅值绕 0 值摆动。可以断定，在球面其他区域，$f(\lambda,\theta)$ 必接近 0 值。

因为分布在有限区域内的连续函数需要较高阶次的球面谐函数线性组合来逼近。本理论验证实例，采取的截断阶次较低，这是产生了 3nT 的误差和 1nT 的绕轴波动偏差的主要原因。又因为本例中，磁场球谐分析是采用国内外多数专家均采用的矩形近似积分法实现的，这也是误差的来源。该误差绝不是某些专家所说的观测值非连续（即离散化产生混叠效应）所致。

（三）球壳型磁性层正反演公式的正确性

为了论证磁性层正反演公式在有限区域内应用的正确性，只需指出（9.14）或（9.16）给出的球谐系数 $\left\{a_n^m, b_n^m\right\}$ 的严格性。

因为 $\Delta h_{\lambda'\theta'}$ & $\Delta H_{\lambda'\theta'}$ 在 $\overline{D}$ 内为 0，故函数 $\left(J_{\lambda'\theta'}\,\Delta h_{\lambda'\theta'}^k\right)$ & $\left(J_{\lambda'\theta'}\,\Delta H_{\lambda'\theta'}^k\right)$，$k=1,2,3,\cdots,(n+2)$，在 $\overline{D}$ 内为 0。于是，因为 $\Delta J_{\lambda'\theta'}$ 也为 0，则在 $\overline{D}$ 内，（9.14）式右端大括号内的函数值为 0。这样，积分

$$\begin{Bmatrix} a_n^m \\ b_n^m \end{Bmatrix} = \frac{n}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \{\cdots\cdots\} \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} P_n^m(\cos\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\lambda'$$

$$= \frac{n}{4\pi} \iint_D \{\cdots\cdots\} \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad (10.41)$$

给出的必是严格的球谐系数。再从（9.16）分析，既然按（10.41）式确定的 $\Delta\tilde{g}_n^m$、$\Delta\tilde{h}_n^m$、g_{nm}^{1k}、h_{nm}^{1k}、g_{nm}^{2k}、h_{nm}^{2k}，$k=1,2,3,\cdots,(n+2)$，是严格的球谐系数，则由（9.16）式右端给出的必然是严格的球谐系数 $\left\{a_n^m, b_n^m\right\}$。

由 $\left\{a_n^m, b_n^m\right\}$ 的严格性，推导出由（9.17）式确定的 $\left\{g_n^m, h_n^m\right\}$ 严格性。把它们代入（9.20）式，必得一有限区域内分布的函数，符合对 Z_p 的假定。进而推出所有反演公式的严格性。

由此得出结论，在对 Z_p、$\Delta J_{\lambda'\theta'}$、$\Delta h_{\lambda'\theta'}$ 和 $\Delta H_{\lambda'\theta'}$ 等函数所作的假设条件下，磁性层正反演公式在有限区域内是正确的。

（四）为何不采用重磁场球冠谐分析方法[08] ？

重磁场球冠谐分析方法[08，1985]，是建立有限区域内重磁场模型的严谨的球谐分析与球谐合成的理论和方法。在该方法实施过程中，需要把测区的中心位置变换成北极点或南极点，其周围测点坐标，则相应变换为以新的极点为中心的新的坐标，构成一个球冠形区域。

然而，作者认为，球冠谐分析对建立地面重磁资料转换处理和定量解释方法来说，有许多不便之处：① 球冠谐分析理论中，重磁位场包含的实数阶球函数，该球函数加权正交公式和位的北向、东向和径向导数（即北向、东向和径向场分量）等公式很复杂。② 需要根据边界条件求解实数阶 $n_k(m)$ 值。③ 非以南北极轴为对称的似矩形重磁测区内测点，需要借助球面坐标变换，变成以假设的极轴为对称的球冠形区域内对应测点；此时，磁场观测值能否直接转移到球冠区对应侧点上，是需要研究清楚的问题，特别是需要进行磁场化极计算时。④ 球冠区是以球冠中心点对称的圆形球壳区，其等角结点网格为扇形球壳，越靠近球冠中心，扇形壳面积越小，沿经度线越狭长。1:20 万似矩形重磁测点网格变换到球冠区内，越靠近球冠中心，网格形态与球冠网格形态差距越大，大量网格点上没有场值分布。相反，在离球冠中心越远，扇形球壳网格内观测值的数量越大，会有大量观测值被舍弃。在这种情况下，球冠谐分析，很难采用类似于传统的球谐分析方法，只能采用“最小二乘法”求解重磁位场球谐系数。⑤ 作者研创的“施密特型球函数、其重要积分和各阶导数的直接算法”和 参考文献[7,8,9]建立的“球壳型磁性层正反演方法”与“地球坐标系内磁异常转换方法”等，不能直接引进到球冠谐分析算法中来。⑥ 还有更值得关注的是，球冠中心区为球冠谐分析的重点区，但该区恰恰可以看成平面区域。此时，没有必要采用复杂的球冠谐分析方法。

最后强调一点：本节的原则也适用于其他有限区域磁测资料的转换处理和反演方法。

本 节 参 考 文 献

[05] 安玉林、管志宁，球壳型磁性层磁异常正反演方法，现代地质，第 4 卷第 2 期，116-129，1990 年 6 月。

[06] 管志宁、安玉林著，《区域磁异常定量解释》，北京：地质出版社，1991 年 12 月北京第一版。

[07] 王竹溪、郭敦仁著，《特殊函数概论》，北京：科学出版社，1965 年第一版，1979 年第二次印刷。

[08] G. V. HAINES，（1985）， Spherical Cap Harmonic Analysis，JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH，VOL. 90，NO. B3，PAGES 2583-2591，FEBRUARY 28.

第九节 “直接算法”在研制“高精度高速度球谐分析与球谐合成”程序中的作用

在著作《70》第十章，作为“高阶球函数直接算法”的重要应用，笔者初步设计两种“球谐分析与球谐合成”高速算法。但是，那还是纸上谈兵，离实现还有相当距离，不像本章第二节到第八节那样比较确定。故此，笔者不拟在这里阐述。笔者只想指出，采用“高阶球函数直接算法”一定能设计出“高精度高速度球谐分析与球谐合成”程序。研创该程序并推广应用，将是对我国科学技术的重要贡献。

第五章　尚待完成的核心技术

著作《高阶球函数直接算法与区域位场定量解释》中较可靠完成的章节内容 ：

第 1 章 至 第 3 章 全部 ；第 4 章 和 第 5 章 全部，包括“双倍精度”0-3600 阶次和“四倍精度”0-3000 阶次的施密特型球函数系数计算成果；第 6 章 各节理论部分 ；第 7 章 各节理论部分 ；第 8 章 各节理论部分 ；第 9 章 各节理论部分 ；第 10 章 各节的初步理论成果。

尚待继续完成的章节内容 ：

第 6 章 6.1.2 节程序研制 ； 6.3.3 节 -- 6.3.5 节 程序研制 与 理论模型验证 ；第 7 章 程序研制 和 理论模型验证；第 8 章 8.2 节 和 8.3 节 程序设计 和 理论模型验证 ；第 9 章 高阶次的 程序设计 和 理论模型验证 ；第 10 章 10.1 节、10.3 节 和 10.4 节 的程序设计 与 理论模型验证。

由上述两方面可见，本书是一本尚待完成的著作。但是，作者认为，虽然著作没有圆满完成，却给年轻的科技人员，特别是有志于方法技术研究者，提供了诸多后续研究选题。作者希望推动“具有中国特色”的“起伏球面上区域重磁异常定量解释”理论方法研究，填补我国有关方面的空白。

继续研究的重要选题 ：

为使本著作得以完善，作为继续研究选题，上面所述各个章节所需的、由低阶次到达 3000 以下阶次的计算机程序设计工作，均是选题之一，而且每个程序设计工作都具有相当难度。下面，列举几个重要的续研究选题，以便重点解决本书尚待完成的核心技术。

选题一 ：按照 6.1 节，修改施密特型球函数已有四倍精度系数值计算程序，用于计算与（6.06）式对应的系数值，通过计算，建立起“原定义型球函数”四倍精度系数数据库。完成此项研究，为解决该三类球函数“真值计算难题”提供了重要方法。

选题二 ：按照 6 . 2 节 和《附录二》论述，采用“施密特型球函数 二 或 四 倍精度 a_{lmk} 一系数值数据库”和 该译文（17）（18）式，计算出定积分 I_{lmk} – 积分值，最终按（12）式，实现超高阶次球谐分析与球谐合成的二维离散傅里叶变换算法。该选题研究难度同样较大，研究成功具有很大实用价值。

选题三 ：按照 6.3.4、6.3.5 节，采用本著作提出的定积分 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{ctg}\theta * P_{nm}(\cos\theta) d\theta$ 求

积法 和 已有“施密特型球函数四倍精度系数数据库”，研创定积分 $\overline{M}_{nm}^{i}$ 和 $\overline{M}_{nm}^{k}$ 直接算法程序，计算并建立“该二积分的四倍精度积分值数据库”。该选题难度相当大，具有较高的学术价值。

选图四 ：按照 7.4 节 的 7.4.2 和 7.4.3 段,采用“非传统模式的直接算法”，由地磁场北向分量 $X(\lambda,\theta)$ 求解磁位球谐系数。这是一种独特的解法，具有较大的理论意义。

选题五 ：按照 8.3 节 各个公式 和 10.5 节 的改进措施，研创达 2000 阶次的区域磁异常化向地磁极方法（包括磁化强度模值反演方法）。该法具有重要的理论意义和实用价值，可为简化球面上区域磁异常定量解释奠定坚实基础。

选题六 ：按照 第 9 章 各节 和 10.3 与 10.4 节 阐述的理论和方法，研创 1000-2000 阶次的“球壳形磁性层磁异常正反演方法”。给出理论严密、高速度与高精度的区域磁异常定量解释结果。并以此为例，充分展示直接算法的标准化及其实用价值。然后，再根据该方法严格给出“球壳形密度层重力异常正反演方法”。

根据笔者最近的思考，还可增加**“选题七”** ：在直角坐标系内，从二度体和似二度体度体磁异常频谱正演表达式出发，研究频谱直接反演方法。此选题虽然不是当前研究热点，但可培养硕士研究生科研能力。

选题八 ：根据笔者最近的思考，还可以向国家自然科学基金委员会申请“科学基金项目”资助，用以完成对整个地球磁场的处理和反演研究。

从理论创新到实质性创新 ：

由“较可靠完成的章节内容”可知，第 4-7 章已经实现了球函数直接算法原创性研究，为球坐标系区域重磁位场高精度、高速度、高阶次定量解释奠定了算法基础。第 8-10 章阐述了定量解释的理论基础和实现三高计算的技术方案。这是本著述的理论创新，无疑是很重要的。而由“待继续完成的章节内容”和“继续研究的重要选题”可知，对于球坐标系区域重磁位场三高定量解释来说，实质性创新还在后续研究中，否则，前述三高计算技术方案只是纸上谈兵，实际用于定量解释软件依旧为“0”。

此外，后续研究属于实质性创新，还在于如下几个方面：(1) 前述三高计算技术方案只是原则性的，后续实施过程中还会遇到一系列困难问题需要解决，例如，求解大型联立方程组问题，针对具体问题建立起用于“直接快速顺序读取的数据库”问题等；(2) 后续研究中，借助计算机，亲手编程和计算，还有可能发现原来技术方案存在的不足和错误，甚至有可能发现前述理论推导上存在的问题，进而加以纠正；(3) 解释软件研制和正确性检验过程，正是年轻学子学习学科理论和地球物理反演理论，提高编程技术和创建新的解释方法过程，其研制成功的解释软件是一种实实在在创新成果，必将填补我国重磁勘探学术领域的空白。