

## 第二章 磁场线性化反演方法

### 第一节 三维磁性层 和 球壳型磁性层上下层面深度 与层内磁化强度模值反演

#### 一、 三维磁性层上下层面深度反演

因为第一章第二节公式 (4) 中  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J G(h, H) d\xi d\eta = 0$  , 把该式加到 (5) 式中,

立即得到  $Z_{xy}$  的如下表达式

$$Z_{xy} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ J_{\xi\eta} G(h, H) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left[ (J_{\xi\eta} \Delta h_{\xi\eta}^{n+1}) K^{(n)}(h) - (J_{\xi\eta} \Delta H_{\xi\eta}^{n+1}) K^{(n)}(H) \right] \right\} d\xi d\eta \quad (7)$$

则参考与 (5) 式对应的 (6) 式, 三维磁性层  $Z_{xy}$  的频谱表达式也可表示为下式

$$Z_{uv} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 2\pi J_{uv} (e^{-2\pi f h} - e^{-2\pi f H}) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{n!} \left[ (J_{\xi\eta} \Delta h_{\xi\eta}^n)_{uv} e^{-2\pi f h} - (J_{\xi\eta} \Delta H_{\xi\eta}^n)_{uv} e^{-2\pi f H} \right] \right\} \quad (8)$$

(8) 式中,  $f = \sqrt{u^2 + v^2}$  为径向频谱, 其他的  $(\dots)_{uv}$  均为小括号内函数的频谱。(8) 式就是用于反演三维磁性层上下层面深度的出发公式。

进行层面深度反演, 需要给定“定解条件”: ① 上层面深度  $h_{\xi\eta}$  反演, 必须给定上层面平均深度  $h$ 、下层面的深度  $H_{\xi\eta}$  和 磁化强度模  $J_{\xi\eta}$ , 故此, 反演对象是  $\Delta h_{\xi\eta}$ ; ② 下层面深度  $H_{\xi\eta}$  反演, 必须给定下层面的平均深度  $H$ 、上层面的深度  $h_{\xi\eta}$  和 磁化强度模  $J_{\xi\eta}$ , 故此, 反演对象是  $\Delta H_{\xi\eta}$ 。

给定定解条件之后, 需要计算与定解条件有关的磁场频谱值  $\bar{Z}_{uv}$ : ① 上层面深度  $h_{\xi\eta}$  反演时, 令  $\bar{Z}_{uv}$  为  $\bar{Z}_{uv}^{\uparrow}$ ; ② 下层面深度  $H_{\xi\eta}$  反演时, 令  $\bar{Z}_{uv}$  为  $\bar{Z}_{uv}^{\downarrow}$ 。二者分别为

$$\bar{Z}_{uv}^{\uparrow} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 2\pi J_{uv} (e^{-2\pi f h} - e^{-2\pi f H}) - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{n!} \left[ (J_{\xi\eta} \Delta H_{\xi\eta}^n)_{uv} e^{-2\pi f H} \right] \right\} \quad (9)$$

$$\bar{Z}_{uv}^{\downarrow} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 2\pi J_{uv} (e^{-2\pi f h} - e^{-2\pi f H}) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{n!} \left[ (J_{\xi\eta} \Delta h_{\xi\eta}^n)_{uv} e^{-2\pi f h} \right] \right\} \quad (10)$$

接着, 求得对应于  $\Delta h_{\xi\eta}$  和  $\Delta H_{\xi\eta}$  的磁场频谱值  $\Delta Z_{uv}^{\uparrow}$  和  $\Delta Z_{uv}^{\downarrow}$  分别为

$$\Delta Z_{uv}^{\uparrow} = Z_{xy} - \bar{Z}_{uv}^{\uparrow} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -2\pi e^{-2\pi f h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{n!} (J_{\xi\eta} \Delta h_{\xi\eta}^n)_{uv} \right\} \quad (11)$$

$$\Delta Z_{uv}^{\downarrow} = Z_{xy} - \bar{Z}_{uv}^{\downarrow} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ +2\pi e^{-2\pi f H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{n!} (J_{\xi\eta} \Delta H_{\xi\eta}^n)_{uv} \right\} \quad (12)$$

这一过程 称为“场的提取”。

下面, 阐述三维磁性层上、下层面深度反演过程。

下层面深度  $H_{\xi\eta}$  反演：在 (12) 式中，把  $n=1$  项分离出来，且令  $M_H^{\xi\eta} = -J_{\xi\eta}\Delta H_{\xi\eta}$ ，而  $M_H^{uv}$  为其频谱，于是，可以给出反演  $M_H^{uv}$  的方程式

$$M_H^{uv} = -\frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\Delta Z_{uv}^{\downarrow}}{4\pi^2 f} e^{2\pi f H} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{(n+1)!} \left( \Delta H_{\xi\eta}^n \cdot M_H^{\xi\eta} \right)_{uv} \quad (13)$$

(13) 式可用于迭代求解  $M_H^{uv}$ 。如果只取其第一项作为  $M_H^{uv}$  反演近似解，称之为“直接反演”。求得  $M_H^{uv}$  后，经反傅里叶变换，可求得  $M_H^{\xi\eta}$ 。最后，得到

$$\Delta H_{\xi\eta} = -\frac{1}{J_{\xi\eta}} M_H^{\xi\eta}, \quad H_{\xi\eta} = H + \Delta H_{\xi\eta} \quad (14)$$

上层面深度  $H_{\xi\eta}$  反演：按照同样处理，可由 (11) 式，令  $M_h^{\xi\eta} = -J_{\xi\eta}\Delta h_{\xi\eta}$ ，可以给出反演  $M_h^{uv}$  的方程式，

$$M_h^{uv} = -\frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\Delta Z_{uv}^{\uparrow}}{4\pi^2 f} e^{2\pi f h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{(n+1)!} \left( \Delta h_{\xi\eta}^n \cdot M_h^{\xi\eta} \right)_{uv} \quad (15)$$

由 (15) 式 经 迭代反演可求得  $M_h^{uv}$ 。如果只取其第一项作为  $M_h^{uv}$  反演近似解，称之为“直接反演”。再经反傅里叶变换，可求得  $M_h^{\xi\eta}$ 。最后，得到

$$\Delta h_{\xi\eta} = -\frac{1}{J_{\xi\eta}} M_h^{\xi\eta}, \quad h_{\xi\eta} = h + \Delta h_{\xi\eta} \quad (16)$$

## 二、 三维磁性层层内磁化强度模值反演

抄录第一章第二节 三维磁性层  $Z_{xy}$  的频谱表达式 (6) 如下

$$Z_{uv} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 2\pi \Delta J_{uv} \left( e^{-2\pi f h} - e^{-2\pi f H} \right) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{n!} \left[ \left( J_{\xi\eta} \Delta h_{\xi\eta}^n \right)_{uv} e^{-2\pi f h} - \left( J_{\xi\eta} \Delta H_{\xi\eta}^n \right)_{uv} e^{-2\pi f H} \right] \right\} \quad (17)$$

由 (17) 式 出发 求解磁化强度模值  $J_{\xi\eta}$ ，必须给定的“定解条件”有：磁化强度平均值  $J$ 、上层面的深度  $h_{\xi\eta} = h + \Delta h_{\xi\eta}$  和下层面的深度  $H_{\xi\eta} = H + \Delta H_{\xi\eta}$ 。

与定解条件有关的磁场频谱值  $\bar{Z}_{uv}$  为

$$\bar{Z}_{uv} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{n!} \left[ \left( \Delta h_{\xi\eta}^n \right)_{uv} e^{-2\pi f h} - \left( \Delta H_{\xi\eta}^n \right)_{uv} e^{-2\pi f H} \right] \quad (18)$$

于是，求得  $\Delta Z_{uv} = Z_{uv} - \bar{Z}_{uv}$  是“场的提取”过程。 $\Delta Z_{uv}$  的频谱表达式为

$$\Delta Z_{uv} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 2\pi \Delta J_{uv} \left( e^{-2\pi f h} - e^{-2\pi f H} \right) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{n!} \left[ \left( \Delta J_{\xi\eta} \Delta h_{\xi\eta}^n \right)_{uv} e^{-2\pi f h} - \left( \Delta J_{\xi\eta} \Delta H_{\xi\eta}^n \right)_{uv} e^{-2\pi f H} \right] \right\} \quad (19)$$

把 (19) 式 左、右端同除  $(\mu_0 / 4\pi)$ ，再把左端移到等号右边，把右端第一项移到等号左边，两端均乘以“负号”，然后，两端同除  $\left[ 2\pi \left( e^{-2\pi f h} - e^{-2\pi f H} \right) \right]$ ，于是，得到

$$\Delta J_{uv} = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\Delta Z_{uv}}{2\pi \left( e^{-2\pi f h} - e^{-2\pi f H} \right)} - \frac{1}{2\pi \left( e^{-2\pi f h} - e^{-2\pi f H} \right)} \bullet$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi f)^n}{n!} \left[ \left( \Delta J_{\xi\eta} \Delta h_{\xi\eta}^n \right)_{uv} e^{-2\pi f h} - \left( \Delta J_{\xi\eta} \Delta H_{\xi\eta}^n \right)_{uv} e^{-2\pi f H} \right] \quad (20)$$

(20)式就是用于反演  $\Delta J_{uv}$  的频谱公式。

作为  $\Delta J_{uv}$  的近似解，可以只取 (20) 右端第一项，称其为“直接反演”。而迭代反演是提高反演结果精度的有效步骤，因此，最好采用迭代反演方法。最后对  $\Delta J_{uv}$  作反傅里叶变换，求得  $\Delta J_{\xi\eta}$ 。则三维磁性层磁化强度模值为

$$J_{\xi\eta} = J + \Delta J_{\xi\eta} \quad (21)$$

### 三、球壳型磁性层上下层面深度反演

由第一章第二节公式 (17) (18) 出发，研究球壳型磁性层上下层面反演问题。

为进行反演而需要给定的参数和连续函数称为定解条件。已知  $Z_p$  做反演：任意层情况下，若反演对象是  $\Delta h_{\lambda'\theta'}$ ，定解条件是给定  $J_{\lambda'\theta'}$ 、 $r_1$ 、 $r_{2\lambda'\theta'}$ ，若反演对象是  $\Delta H_{\lambda'\theta'}$ ，定解条件是给定  $J_{\lambda'\theta'}$ 、 $r_2$ 、 $r_{1\lambda'\theta'}$ 。

假设， $g_n^m = \bar{g}_n^m + \Delta g_n^m$ ， $h_n^m = \bar{h}_n^m + \Delta h_n^m$ ， $\{\bar{g}_n^m, \bar{h}_n^m\}$  是由定解条件确定的球谐系数； $\Delta g_n^m$ 、 $\Delta h_n^m$  是直接有待求函数有关的球谐函数，可用于反演。把从  $\{g_n^m, h_n^m\}$  中去掉  $\{\bar{g}_n^m, \bar{h}_n^m\}$ ，求得  $\{\Delta g_n^m, \Delta h_n^m\}$  的过程称为场的提取。下面，给出  $\{\bar{g}_n^m, \bar{h}_n^m\}$ 、 $\{\Delta g_n^m, \Delta h_n^m\}$  的表达式。

任意层情况下：由第一章第二节公式 (17) 和 (18) 式得

① 求  $\Delta h_{\lambda'\theta'}$  时

$$\begin{Bmatrix} \bar{g}_n^m \\ \bar{h}_n^m \end{Bmatrix} = S_{n0} \{D_{1n} - D_{2n}\} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \bar{g}_n^m \\ \Delta \bar{h}_n^m \end{Bmatrix} - \sum_{k=1}^{n+2} S_{nk} D_{2n} \cdot r_2^{-k} \cdot \begin{Bmatrix} g_{nm}^{2k} \\ h_{nm}^{2k} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta g_n^m \\ \Delta h_n^m \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{n+2} S_{nk} D_{1n} \cdot r_1^{-k} \cdot \begin{Bmatrix} g_{nm}^{1k} \\ h_{nm}^{1k} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

② 求  $\Delta H_{\lambda'\theta'}$  时

$$\begin{Bmatrix} \bar{g}_n^m \\ \bar{h}_n^m \end{Bmatrix} = S_{n0} \{D_{1n} - D_{2n}\} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \bar{g}_n^m \\ \Delta \bar{h}_n^m \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{n+2} S_{nk} D_{1n} \cdot r_1^{-k} \cdot \begin{Bmatrix} g_{nm}^{1k} \\ h_{nm}^{1k} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta g_n^m \\ \Delta h_n^m \end{Bmatrix} = - \sum_{k=1}^{n+2} S_{nk} D_{2n} \cdot r_2^{-k} \cdot \begin{Bmatrix} g_{nm}^{2k} \\ h_{nm}^{2k} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

下面阐述层面位置反演问题解法：

由上面公式 (23) (25) 分离出  $k=1$  项，可写出由  $\Delta g_n^m$ 、 $\Delta h_n^m$  反演  $g_{nm}^{11}$ 、 $h_{nm}^{11}$ 、 $g_{nm}^{21}$ 、 $h_{nm}^{21}$  的公式。此处， $\{g_{nm}^{11}, h_{nm}^{11}\}$ 、 $\{g_{nm}^{21}, h_{nm}^{21}\}$  分别是  $J_{\lambda'\theta'} \Delta h_{\lambda'\theta'}$  和  $J_{\lambda'\theta'} \Delta H_{\lambda'\theta'}$  的球谐系数。简记

$$M_1^{\lambda'\theta'} = J_{\lambda'\theta'} \Delta h_{\lambda'\theta'}, \quad M_2^{\lambda'\theta'} = J_{\lambda'\theta'} \Delta H_{\lambda'\theta'} \quad (26)$$

求得  $\{g_{nm}^{11}, h_{nm}^{11}\}$  和  $\{g_{nm}^{21}, h_{nm}^{21}\}$  后，由第一章第二节公式 (15) 式可求得  $M_1^{\lambda'\theta'}$  和  $M_2^{\lambda'\theta'}$ ，于是

$$\Delta h_{\lambda'\theta'} = M_1^{\lambda'\theta'} / J_{\lambda'\theta'}, \quad \Delta H_{\lambda'\theta'} = M_2^{\lambda'\theta'} / J_{\lambda'\theta'} \quad (27)$$

任意层情况下：

$$\textcircled{1} \text{ 反演 } \{g_{nm}^{11}, h_{nm}^{11}\}: \text{ 由 (23) 式,} \quad \begin{cases} g_{nm}^{11} \\ h_{nm}^{11} \end{cases} = \frac{r_1}{S_{n1} D_{1n}} \begin{cases} \Delta g_n^m \\ \Delta h_n^m \end{cases} - \sum_{k=2}^{n+2} \frac{S_{nk} r_1}{S_{n1} r_1^k} \begin{cases} g_{nm}^{1k} \\ h_{nm}^{1k} \end{cases} \quad (28)$$

$$\textcircled{2} \text{ 反演 } \{g_{nm}^{21}, h_{nm}^{21}\}: \text{ 由 (25) 式} \quad \begin{cases} g_{nm}^{21} \\ h_{nm}^{21} \end{cases} = \frac{r_2}{S_{n1} D_{2n}} \begin{cases} \Delta g_n^m \\ \Delta h_n^m \end{cases} + \sum_{k=2}^{n+2} \frac{S_{nk} r_2}{S_{n1} r_2^k} \begin{cases} g_{nm}^{2k} \\ h_{nm}^{2k} \end{cases} \quad (29)$$

公式 (28) (29) 均可通过迭代反演求解, 称为迭代反演。若取右端第 1 项作为近似解, 称为直接反演。

#### 四、球壳型磁性层层内磁化强度反演方法

这里仍从第一章第二节公式 (17) (18) 二式出发, 研究磁化强度反演问题。

磁化强度反演的定解条件和场的提取：

由第一章第二节公式 (14) 和 (17) 可知, 反演磁化强度时, 反演对象应该是  $\Delta J_{\lambda'\theta'}$ , 而不是  $J_{\lambda'\theta'}$ 。因而, 定解条件就是, 既要给定  $r_{1\lambda'\theta'}$ 、 $r_{2\lambda'\theta'}$ , 还要给定磁化强度平均值  $J$ 。

给定  $r_{1\lambda'\theta'}$ 、 $r_{2\lambda'\theta'}$  和  $J$  后, 若令: ①  $(J \Delta h_{\lambda'\theta'}^k)$ 、 $(J \Delta H_{\lambda'\theta'}^k)$ ,  $k=1,2,3,\dots,n+2$  的球谐系数为  $\{\bar{g}_{nm}^{1k}, \bar{h}_{nm}^{1k}\}$ 、 $\{\bar{g}_{nm}^{2k}, \bar{h}_{nm}^{2k}\}$ ,  $k=1,2,3,\dots,n+2$ ; ②  $\{J_{\lambda'\theta'} \Delta h_{\lambda'\theta'}^k\}$ 、 $\{J_{\lambda'\theta'} \Delta H_{\lambda'\theta'}^k\}$ ,  $k=1,2,3,\dots,n+2$  的球谐系数为  $\{g_{nm}^{1k}, h_{nm}^{1k}\}$ 、 $\{g_{nm}^{2k}, h_{nm}^{2k}\}$ ,  $k=1,2,3,\dots,n+2$ ; 则有

$$\begin{cases} \bar{g}_n^m \\ \bar{h}_n^m \end{cases} = \sum_{k=0}^{n+2} S_{nk} \cdot \left\{ D_{1n} r_1^{-k} \begin{pmatrix} \bar{g}_{nm}^{1k} \\ \bar{h}_{nm}^{1k} \end{pmatrix} - D_{2n} r_2^{-k} \begin{pmatrix} \bar{g}_{nm}^{2k} \\ \bar{h}_{nm}^{2k} \end{pmatrix} \right\} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \Delta g_n^m \\ \Delta h_n^m \end{cases} = S_{n0} (D_{1n} - D_{2n}) \begin{pmatrix} \Delta \bar{g}_n^m \\ \Delta \bar{h}_n^m \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n+2} S_{nk} \cdot \left\{ D_{1n} r_1^{-k} \begin{pmatrix} \Delta g_{nm}^{1k} \\ \Delta h_{nm}^{1k} \end{pmatrix} - D_{2n} r_2^{-k} \begin{pmatrix} \Delta g_{nm}^{2k} \\ \Delta h_{nm}^{2k} \end{pmatrix} \right\} \quad (31)$$

磁化强度反演问题的解法：

由 (31) 式, 可立即写出反演  $\Delta J_{\lambda'\theta'}$  的球谐系数  $\{\Delta \bar{g}_n^m, \Delta \bar{h}_n^m\}$  的公式。任意层情况下：

$$\begin{cases} \Delta \bar{g}_n^m \\ \Delta \bar{h}_n^m \end{cases} = \frac{1}{S_{n0} (D_{1n} - D_{2n})} \begin{pmatrix} \Delta g_n^m \\ \Delta h_n^m \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{S_{nk}}{S_{n0} (D_{1n} - D_{2n})} \cdot \left\{ D_{1n} r_1^{-k} \begin{pmatrix} \Delta g_{nm}^{1k} \\ \Delta h_{nm}^{1k} \end{pmatrix} - D_{2n} r_2^{-k} \begin{pmatrix} \Delta g_{nm}^{2k} \\ \Delta h_{nm}^{2k} \end{pmatrix} \right\} \quad (32)$$

采用迭代法求解 (32), 称迭代反演。直接取右端第一项作近似解, 称“直接反演”。把  $\{\Delta \bar{g}_n^m, \Delta \bar{h}_n^m\}$  代入第一章第二节公式 (15) 式, 可求得  $\Delta J_{\lambda'\theta'}$ 。最后, 得到反演结果

$$J_{\lambda'\theta'} = J + \Delta J_{\lambda'\theta'} \quad (33)$$

重要说明：本节反演方法为线性化迭代反演, 这涉及到方法的“稳定性”和“收敛性”。只有满足迭代“收敛条件”时, 反演的“稳定算法”才能取得良好效果。这里不加讨论。

## 第二节 直角坐标系内三度规则磁性体各参数的频谱反演方法

本节只原则性阐述三度规则磁性体各参数频谱反演方法。而二度规则磁性体各参数频谱反演方法更为简单，参照即可。

这里阐述“规则三度体磁场形体参数和磁参数反演”两个实例。它们的频谱正演表达式见第一章第三节第1段。

### 实例1：直立长方体

已知长方体磁场的测量方向因子  $Q_t$  和  $z=0$ ，频谱表达式  $T_l^t(u, v)$  为

$$T_l^t(u, v) = q_l q_t \tilde{M} \cdot \frac{2L_x 2L_y}{2\pi\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \cdot e^{-2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}} \left\{ 1 - e^{2\pi H_z \sqrt{u^2 + v^2}} \right\}$$

$T_l^t(u, v)$  左端除  $Q_t$  和乘以  $2\pi\sqrt{u^2 + v^2}$ ，有

$$\left( 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \frac{T_l^t(u, v)}{q_t} \right) = \left[ 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \frac{R_r T(u, v) + i R_i T(u, v)}{2\pi N \sqrt{u^2 + v^2} + i 2\pi(Lu + Mv)} \right]$$

$$= \left[ \frac{R_r T(u, v) + i R_i T(u, v)}{N + i \left[ (Lu + Mv) / \sqrt{u^2 + v^2} \right]} \right] = \left[ \frac{R_r T(u, v) + i R_i T(u, v)}{N + \left[ (Lu + Mv)^2 / (u^2 + v^2) \right]} \right]$$

$$= \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + i \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) = A + iB = \begin{pmatrix} A \\ iB \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中，

$$a = R_r T(u, v), \quad b = R_i T(u, v), \quad c = N, \quad d = (Lu + Mv)^2 / (u^2 + v^2)$$

$$A = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right), \quad B = \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \quad (2)$$

$T_l^t(u, v)$  右端也除  $Q_t$  和乘以  $2\pi\sqrt{u^2 + v^2}$ ，有

$$\begin{pmatrix} A \\ iB \end{pmatrix} = \left( i \frac{Lu + Mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \cdot 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \cdot \tilde{M} \cdot (2L_x 2L_y) \cdot \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \cdot \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y}$$

$$\cdot e^{-2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}} \left\{ 1 - e^{2\pi H_z \sqrt{u^2 + v^2}} \right\}$$

上式两端同除  $2\pi\sqrt{u^2 + v^2}$ ，得到

$$\begin{pmatrix} A / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \\ iB / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \end{pmatrix} = \left( i \frac{Lu + Mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \cdot \tilde{M} \cdot (2L_x 2L_y) \cdot \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \cdot \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y}$$

$$\cdot e^{-2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}} \left\{ 1 - e^{2\pi H_z \sqrt{u^2 + v^2}} \right\} \quad (3)$$

(3) 式两端实部等于实部、虚部等于虚部，两端实部、虚部都取对数，得到

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \ln \left( A / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \right) \\ i \ln \left( B / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \right) \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} \ln n \\ i \ln \left\{ \frac{lu + mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} \end{array} \right) + \ln \tilde{M} + \ln(2L_x 2L_y) + \\ &+ \ln \left[ \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \cdot \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \right] + \ln \left( e^{-2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}} \right) + \ln \left\{ 1 - e^{2\pi H_z \sqrt{u^2 + v^2}} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

进而有 如下任意谱点处的正反演线性表达式

$$\left\{ \begin{array}{c} DA_{1n} \\ DB_{1m} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{1n} \\ X_{1lm} \end{array} \right\} + X_2 + X_3 + X_4 + X_{5l} + X_{6m} + X_{7lm} + X_{8lm} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} DA_{1n} &= \ln \left( A / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \right), \quad DB_{1m} = \ln \left( B / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \right), \\ X_{1n} &= \ln(n), \quad X_{1lm} = \ln \left\{ \frac{lu + mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\}, \quad X_2 = \ln(\tilde{M}), \quad X_3 = \ln(2L_x), \quad X_4 = \ln(2L_y), \\ X_{5l} &= \ln \left( \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \right)_l, \quad X_{6m} = \ln \left( \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \right)_m, \\ X_{7lm} &= \ln \left[ e^{-2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}} \right], \quad X_{8lm} = \ln \left[ 1 - e^{-2\pi H_z \sqrt{u^2 + v^2}} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

其实, 公式 (5) 中, 只有  $q_l$ 、 $\tilde{M}$ 、 $2L_x$ 、 $2L_y$ 、 $h$  和  $H_z$  等 6 个未知数待求解, 它们是: 磁化方向、磁化强度模、宽度、长度、埋深 和 高度。按理, 按下述方法, 能够并容易求得它们。

方法如下: 把 (5) 式写成下面 4 个方程式,

$$\left\{ \begin{array}{c} DA_l \\ DA_m \\ DB_l \\ DB_m \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{1n} + X_2 + X_3 + X_4 + X_{5l} + X_{7l} + X_{8l} \\ X_{1n} + X_2 + X_3 + X_4 + X_{6m} + X_{7m} + X_{8m} \\ X_{1l} + X_2 + X_3 + X_4 + X_{5l} + X_{7l} + X_{8l} \\ X_{1m} + X_2 + X_3 + X_4 + X_{6m} + X_{7m} + X_{8m} \end{array} \right\} \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned} DA_l &= \ln(A / 2\pi u), \quad DA_m = \ln(A / 2\pi v), \quad DB_l = \ln(B / 2\pi u), \quad DB_m = \ln(B / 2\pi v) \\ X_{1l} &= \ln(l), \quad X_{1m} = \ln(m), \quad X_{7l} = \ln(e^{-2\pi u h}), \quad X_{8l} = \ln(1 - e^{-2\pi u H_z}), \\ X_{7m} &= \ln(e^{-2\pi v h}), \quad X_{8m} = \ln(1 - e^{-2\pi v H_z}) \quad (8) \end{aligned}$$

实际上, 第 1 个和第 3 个方程分别是沿  $0x$  轴的垂直分量频谱和水平分量频谱; 第 2 个和第 4 个方程分别是沿  $0y$  轴的垂直分量频谱和水平分量频谱。

这就是说, 通过对磁场进行傅里叶变换求得长方体磁场傅里叶系数, 就可以实现反演问题中间变量线性化, 最终解出长方体 磁参数 和 长、宽、高 和 埋深。

## 实例 2: 倾斜平行四边形体

当  $z = 0$  时, 有

$$T_l^t(u, v) = q_t \tilde{M} \frac{2L_x 2L_y}{2\pi\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \cdot q_l \left( \frac{\sin\beta}{i u \cos\beta + \sqrt{u^2 + v^2} \sin\beta} \right)$$

$$\cdot \left\{ e^{-2\pi h \sqrt{u^2+v^2}} e^{-i2\pi u h} - e^{-2\pi(h+2L \sin \beta) \sqrt{u^2+v^2}} e^{-i2\pi u(h+2L \cos \beta)} \right\}^? \quad (9)$$

首先, 令  $u = 0$ , 上式因子变为

$$\begin{aligned} q_l &= 2\pi n \sqrt{u^2 + v^2} + i 2\pi (lu + mv) = 2\pi v (n + i m) \\ &\frac{\sin \beta}{(i u \cos \beta + \sqrt{u^2 + v^2} \sin \beta)} = \frac{\sin \beta}{(v \sin \beta)} = \frac{1}{v} \\ &\left\{ e^{-2\pi h \sqrt{u^2+v^2}} e^{-i2\pi u h} - e^{-2\pi(h+2L \sin \beta) \sqrt{u^2+v^2}} e^{-i2\pi u(h+2L \cos \beta)} \right\}^? \\ &= \left\{ e^{-2\pi h v} - e^{-2\pi(h+2L \sin \beta)v} \right\} \end{aligned}$$

则 (9) 式变为

$$\begin{aligned} T_l^t(v) &= (N + i M) \tilde{M} \frac{2L_x}{2L_y} \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \bullet 2\pi (n + i m) \\ &\cdot \left\{ e^{-2\pi h v} - e^{-2\pi(h+2L \sin \beta)v} \right\}^? \quad (**) \end{aligned}$$

如此简单的公式, 像上面直立长方体频谱求解磁化参数和形体参数方法一样, 求解起来相当容易。

下面就一般情况加以阐述。

首先, 计算如下几个复数式

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad q_l &= 2\pi n \sqrt{u^2 + v^2} + i 2\pi (lu + mv) = 2\pi \sqrt{u^2 + v^2} \left( n + i \frac{lu + mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \\ \textcircled{2} \quad \left[ \frac{\sin \beta}{(i u \cos \beta + \sqrt{u^2 + v^2} \sin \beta)} \right] &= \left[ \frac{\sin \beta (\sqrt{u^2 + v^2} \sin \beta - i u \cos \beta)}{(\sqrt{u^2 + v^2} \sin \beta)^2 + (u \cos \beta)^2} \right] \\ &= \left[ \frac{\sqrt{u^2 + v^2} \sin^2 \beta}{\left\{ (\sqrt{u^2 + v^2} \sin \beta)^2 + (u \cos \beta)^2 \right\}} - i \frac{u \sin \beta \cos \beta}{\left\{ (\sqrt{u^2 + v^2} \sin \beta)^2 + (u \cos \beta)^2 \right\}} \right] \\ &= A_{lm}^\beta - i B_{lm}^\beta \\ \textcircled{3} \quad &\left\{ e^{-2\pi h \sqrt{u^2+v^2}} e^{-i2\pi u h} - e^{-2\pi(h+2L \sin \beta) \sqrt{u^2+v^2}} e^{-i2\pi u(h+2L \cos \beta)} \right\}^? \\ &= \left\{ e^{-2\pi h \sqrt{u^2+v^2}} [\cos(2\pi u h) - i \sin(2\pi u h)] - e^{-2\pi(h+2L \sin \beta) \sqrt{u^2+v^2}} \right. \\ &\quad \left. \bullet [\cos(2\pi u(h+2L \cos \beta)) - i \sin(2\pi u(h+2L \cos \beta))] \right\} \\ &= \left\{ \left[ \cos(2\pi u h) e^{-2\pi h \sqrt{u^2+v^2}} - \cos(2\pi u(h+2L \cos \beta)) e^{-2\pi(h+2L \sin \beta) \sqrt{u^2+v^2}} \right] \right. \\ &\quad \left. - i \left[ \sin(2\pi u h) e^{-2\pi h \sqrt{u^2+v^2}} - \sin(2\pi u(h+2L \cos \beta)) e^{-2\pi(h+2L \sin \beta) \sqrt{u^2+v^2}} \right] \right\} \\ &= A_{lm}^{\beta hL} - i B_{lm}^{\beta hL} \\ \textcircled{4} \quad [A_{lm}^\beta - i B_{lm}^\beta] [A_{lm}^{\beta hL} - i B_{lm}^{\beta hL}] &= [(A_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL}) - i (A_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL})] \\ \textcircled{1} \cdot \textcircled{4} &= [2\pi N \sqrt{u^2 + v^2} + i 2\pi (lu + mv)] [A_{lm}^\beta - i B_{lm}^\beta] [A_{lm}^{\beta hL} - i B_{lm}^{\beta hL}] \\ &= [2\pi N \sqrt{u^2 + v^2} + i 2\pi (lu + mv)] [(A_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL}) - i (A_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \left[ n + i \left( \frac{lu + mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \right] \left[ (A_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL}) - i (A_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL}) \right] \\
&= 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \left[ \left\{ n (A_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL}) - \left( \frac{lu + mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) (A_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL}) \right\}_\Psi \right. \\
&\quad \left. - i \left\{ n (A_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL}) - \left( \frac{lu + mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) (A_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL}) \right\}_\Omega \right] \\
&= 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \left[ \{n, l, m, \beta hL\}_\Psi - i \{n, l, m, \beta hL\}_\Omega \right]
\end{aligned}$$

类似于处理“直立长方体”情况，有

$$\begin{aligned}
\left\{ T_l^t(u, v) \frac{2\pi\sqrt{u^2 + v^2}}{q_t} \right\} &= \tilde{M} \ 2L_x \ 2L_y \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \cdot q_l \left( \frac{\sin\beta}{i u \cos\beta + \sqrt{u^2 + v^2} i n\beta} \right) \\
&\cdot \left\{ e^{-2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}} e^{-i2\pi u h} - e^{-2\pi(h+2L\sin\beta)\sqrt{u^2 + v^2}} e^{-i2\pi u(h+2L\cos\beta)} \right\}^? \quad (10)
\end{aligned}$$

对应 (1) (2) 两式，有

$$\left( \frac{2\pi\sqrt{u^2 + v^2}}{q_t} T_l^t(u, v) \right) = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + i \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) = A + iB = \begin{pmatrix} A \\ iB \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中，

$$\begin{aligned}
a &= R_r T(u, v), \quad b = R_l T(u, v), \quad c = N, \quad d = (Lu + Mv) / (u^2 + v^2) \\
A &= \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right), \quad B = \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \quad (12)
\end{aligned}$$

$T_l^t(u, v)$  右端也除  $q_t$  和乘以  $2\pi\sqrt{u^2 + v^2}$ ，有

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A \\ iB \end{pmatrix} &= \left( n + i \frac{lu + mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \cdot 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \cdot \tilde{M} \cdot (2L_x \ 2L_y) \cdot \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \cdot \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \cdot \\
&\cdot \left[ (A_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL}) - i (A_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL}) \right]
\end{aligned}$$

上式两端同除  $2\pi\sqrt{u^2 + v^2}$ ，得到

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \\ iB / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \end{pmatrix} &= \tilde{M} \cdot (2L_x \ 2L_y) \cdot \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \cdot \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \left( n + i \frac{lu + mv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \cdot \\
&\cdot \left[ (A_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL}) - i (A_{lm}^\beta B_{lm}^{\beta hL} + B_{lm}^\beta A_{lm}^{\beta hL}) \right]
\end{aligned}$$

即有

$$\begin{pmatrix} A / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \\ iB / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \{n, l, m, \beta hL\}_\Psi \\ -i \{n, l, m, \beta hL\}_\Omega \end{bmatrix} \cdot \tilde{M} \cdot (2L_x \ 2L_y) \cdot \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \cdot \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \quad (13)$$

(13) 式两端实部等于实部、虚部等于虚部，两端实部、虚部都取对数，得到



$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \ln \left( A / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \right) \\ i \ln \left( B / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \right) \end{array} \right) &= \left[ \begin{array}{c} \ln \{ n, l, m, \beta hL \}_{\Psi} \\ -i \ln \{ n, l, m, \beta hL \}_{\Omega} \end{array} \right] + \\ &+ \ln \tilde{M} + \ln (2L_x 2L_y) + \ln \left[ \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \right] + \ln \left[ \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

进而有 如下任意谱点处的正反演线性表达式

$$\begin{Bmatrix} DA_{lm} \\ DB_{lm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{\Psi} \{ n, l, m, \beta hL \} \\ X_{\Omega} \{ n, l, m, \beta hL \} \end{Bmatrix} + X_2 + X_3 + X_4 + X_{5l} + X_{6m} \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned} DA_{lm} &= \ln \left( A / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \right), \quad DB_{lm} = \ln \left( B / 2\pi\sqrt{u^2 + v^2} \right), \\ X_2 &= \ln(\tilde{M}), \quad X_3 = \ln(2L_x), \quad X_4 = \ln(2L_y), \quad X_{5l} = \ln \left( \frac{\sin(2\pi u L_x)}{2\pi u L_x} \right)_l, \\ X_{6m} &= \ln \left( \frac{\sin(2\pi v L_y)}{2\pi v L_y} \right)_m, \quad \begin{Bmatrix} X_{\Psi} \{ n, l, m, \beta hL \} \\ X_{\Omega} \{ n, l, m, \beta hL \} \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c} \ln \{ n, l, m, \beta hL \}_{\Psi} \\ -\ln \{ n, l, m, \beta hL \}_{\Omega} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

公式 (15) 中, 只有  $q_l$ 、 $\tilde{M}$ 、 $2L_x$ 、 $2L_y$ 、 $h$ 、倾角  $\beta$  和  $2l$  等 7 个未知数待求解, 它们是: 磁化方向、磁化强度模、宽度、长度、埋深、倾角 和 倾斜面长度。按理, 建立超定方程组, 能够求得它们。

现在给出重要提示如下 :

在前面的推导中, 取对数运算时, 分别对公式左端和右端复函数的实部和虚部取对数运算, 并令其分别相等。这可能是错误的, 因为复数 (包括复函数) 取对数的计算方法是

$$\ln(A + iB) = \ln|A + iB| + i \{ \text{Arg}(A + iB) + 2k_i\pi \}, \quad k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \quad (**)$$

其值域位于多页黎曼曲面上。

但不必着急, 可以按上面 (\*\*) 式取 (3) 式 和 (13) 式的左端和右端的振幅谱 (即取  $\ln|A + iB| = \ln(\sqrt{A^2 + B^2})$ ), 再令其相等。注意: 只求 (3) (13) 式左端 和 右端第一项的振幅, 其他项均是实数。此后, 令它们左端与右端的振幅相等, 继续进行反演即可。

如果万一还有问题, 就要对 (3) 式 和 (13) 式的左端和右端, 分别考虑虚部谱 (即复角) 的多值性质 (见本页 (\*\*) 式), 消除复角的不连续特征 (像参考文献[\*47\*]那样)。此情况下, 是比较困难的。

对年轻重磁勘探专家的期望 :

直到笔者退休为止, 似乎国内外专家没有发表过本节提出的反演思路。这点由参考文献 [\*60] 得到印证。笔者正是最近再次阅读该文献 147 页时, 突然产生这种反演思路的。

笔者认为, 如果上面两个反演实例成立, 则所有二度和三度磁性体形参数和磁性参数, 均可由其频谱表达式导出反演方法加以反演。

笔者希望, 年轻重磁勘探专家者能尽快实现这种反演方法。

### 第三节 二度规则磁性体及其组合体复磁场全方位任意点反演

在阅读本节之前，有可能时，先阅读《成像》32 页的引言，会大有帮助。

#### 一、引导实例：3 棱水平柱体全方位任意点反演

该二度体的反演是相当简单的。笔者用这一简单反演实例，阐述该反演方法线性化和求解的重要步骤。使读者了解“高阶复方程”系数  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  等是如何出现，而“复联立方程组”又是怎样建立起来的。

由附录一 3 棱水平柱体复磁场导数公式为

$$T'(S) = \tilde{M} \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j}{(S - \sigma_j)(S - \sigma_{j+1})}, \quad \sigma_j = x_j - iZ_j, \quad \bar{\sigma}_j = x_j + iZ_j \quad (1)$$

其中， $\tilde{M} = \frac{\mu_0}{4\pi} M_s$ ， $\sigma_{3+1} = \sigma_1$ 。采用通分，进而把上式展开，有

$$\begin{aligned} T'(S) &= \frac{\tilde{M}}{(S - \sigma_1)(S - \sigma_2)(S - \sigma_3)} \{ (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)(S - \sigma_3) + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2)(S - \sigma_1) + (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)(S - \sigma_2) \} \\ &= \tilde{M} \cdot \{ \Phi_{21} + \Phi_{32} + \Phi_{13} \} / \Phi(S), \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式中，分母经仔细乘开、合并同类项，得到下式

$$\Phi(S) = (S - \sigma_1)(S - \sigma_2)(S - \sigma_3) = S^3 - x_1 S^2 + x_2 S - x_3 \quad (3)$$

其中， $x_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ， $x_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$ ， $x_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 。(2) 式中，分子

$$\Phi_{21} = (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)(S - x_{1(12)}), \quad \Phi_{32} = (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2)(S - x_{1(23)}), \quad \Phi_{13} = (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)(S - x_{1(31)}) \quad (4)$$

其中，为便于读者理解附录一中的更复杂的递推公式，采用如下写法，

$$x_{1(12)} = x_1 - (\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_3, \quad x_{1(23)} = x_1 - (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_1, \quad x_{1(31)} = x_1 - (\sigma_3 + \sigma_1) = \sigma_2$$

令 (3) 式等于 0，则有

$$(S - \sigma_1)(S - \sigma_2)(S - \sigma_3) = S^3 - x_1 S^2 + x_2 S - x_3 = 0 \quad (5)$$

(5) 式表明，角点  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  是三阶复方程（即 (5) 式右半部）的根，且由高等代数定理，该三根是唯一的。

把  $\Phi(S)$ 、 $\Phi_{21}$ 、 $\Phi_{32}$ 、 $\Phi_{13}$  等代入 (2) 式，移项，合并，整理可得

$$S^3 - x_1 S^2 + x_2 S - x_3 = \frac{\tilde{M}}{T'(S)} \left( S \sum_{j=1}^3 (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) - \sum_{j=1}^3 (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{1(jk)} \right) \quad (6)$$

上式中， $k = j+1$ 。因为  $\sum_{j=1}^3 (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) = 0$ ，且当  $S=0$  时，有

$$\tilde{M} \cdot \sum_{j=1}^3 (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{1(jk)} = T'(0) \cdot x_3, \quad k = j+1, \quad k = 1 (j = 3) \quad (7)$$

所以有

$$S^3 - x_1 S^2 + x_2 S - x_3 = \frac{1}{T'(S)} \cdot \{ -x_3 \} - \frac{T'(0)}{T'(S)} \cdot x_3 \quad (8)$$

再经整理，得

$$S^2 x_1 - S x_2 + \left\{ 1 - \frac{T'(0)}{T'(S)} - \frac{1}{T'(S)} \right\} x_3 = S^3 \quad (9)$$

(9) 式 就是由复场导数推导出的以  $x_1, x_2, x_3$  为未知数的 3 阶复方程式。

下面，确定角点复坐标  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$

除  $S=0$  点（即复坐标原点）外，再取  $S_i$ 、 $T'(S_i)$ ， $i=1, 2, 3$ ，共 4 个点处的复场导数值，由 (9) 形成适定的 3 阶复线性方程组

$$A \bullet X = B, \quad X = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad B = (S_1^3, S_2^3, S_3^3)^T \quad (10)$$

其中， $A$  是  $3 \times 3$  个系数组成的方阵，即

$$A = \begin{bmatrix} S_1^2, S_1, \{ \}_1 \\ S_2^2, S_2, \{ \}_2 \\ S_3^2, S_3, \{ \}_3 \end{bmatrix}, \quad \{ \} = \left\{ 1 - \frac{T'(0)}{T'(S)} - \frac{1}{T'(S)} \right\} \quad (11)$$

由 (10) 解出  $X$ ，取  $x_1, x_2, x_3$ ，形成 3 阶复方程

$$S^3 - x_1 S^2 + x_2 S - x_3 = 0 \quad (12)$$

它的 3 个复根是  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ ，而且是唯一的。求解该复方程，即可得到 3 棱水平柱体角点位置。

最后，确定复磁化强度  $\tilde{M}$

在求解复磁化强度  $\tilde{M}$  前，需要对 3 个角点进行排序。当棱柱体为凸形时，按顺时针排序的方法是，(1) 求出角点的平均复坐标  $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$ （即磁矩中心），它必然位于棱柱体内部；(2) 按任意顺序求出幅角

$$\phi_k = \arctan^* \left\{ \frac{\text{Im}(\sigma_k - \sigma_0)}{\text{Re}(\sigma_k - \sigma_0)} \right\}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (13)$$

(3) 按  $\phi_k$  值的大小重新对角点进行排序。然后，由 (7) 式求出  $\tilde{M}$ ，即

$$\tilde{M} = \frac{\mu_0}{4\pi} M_S = \frac{T'(0)}{\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)}{\sigma_2 \sigma_3} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_3 \sigma_1}} \quad (14)$$

再求  $I_S$ 、 $M_S$  模：因  $M = 2M_m = -i \hat{M} e^{iI_S}$ ，故有

$$\hat{M} = |M|, \quad I_S = \arctan^* \left\{ \frac{\text{Im}(iM)}{\text{Re}(iM)} \right\}. \quad (15)$$

## 二、n 棱水平柱体与三种重要组合形体复场全方位任意点反演

### 1. n 棱水平柱体

上面阐述的是具有三个“角点”（或说是 C. B. 沙拉耶夫定义的“奇点” [08\*]）的“3 棱水平柱体”复磁场的反演问题。如果角点有 4 个，5 个，……，n 个，其推导方法与上面完全类似（见附录一 16、17 页）：① 在 (1) 式中，把“3”改为“n”；② 通分，分母  $\Phi(S)$  是 n 个因子连乘，分母是  $\Phi_{21}, \Phi_{32}, \Phi_{43}, \dots, \Phi_{n(n-1)}, \Phi_{1n}$  等 n 个之和；③ 展开，这一过程非常繁杂，需推导出附录一 12 页 (9.1) — (9.5) 和 (9.10) — (9.13) 等式；④ 把  $\Phi(S)$  和  $\Phi_{21}, \Phi_{32}, \Phi_{43}, \dots, \Phi_{n(n-1)}, \Phi_{1n}$  等代入 (12.2) 式，并经移项、合并、左端变右端分母、右端分母变左端（这几步很重要），得 (12.3) 式；⑤ 设置复方程组未知数，除复系数  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  外，还要设置  $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n-3}$  等；⑥ 然后再经左右移项，建立求解该  $2n-3$  个未知数的复联立方程组，并求解它们；⑦ 以  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  为系数，建立并求解 n 阶复方程，得到  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  等角点位置；⑧ 最后，求出

磁化强度模值  $\hat{M}$  和磁倾角  $I_S$ 。

## 2. n 个无限延伸薄板组合体

见附录一 18、19 页。n 个无限延伸薄板组合体复磁场表达式为

$$T(S) = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{M}_j}{(\sigma_j - S)} = - \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{M}_j}{(S - \sigma_j)} \quad (16)$$

其通分为 (13.2) 式。而展开式中  $\Phi(S)$  和  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_{(n-1)}, \Phi_{1n}$  等列于 (13.2) 式下面, 展开过程中要用到 (9.1) — (9.9) 式。展开式经整理得 (13.3) 式, 又借助 (13.4) 和 (13.5) 式, 变为 (13.6) 式。然后, 增设  $n - 1$  个新未知数, 并建立求解  $2n - 1$  个未知数的复联立方程组。求解该复联立方程组后, 以前面  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  系数建立  $n$  阶复方程 (13.8)。求解该  $n$  阶复方程, 就得到了  $n$  个薄板顶端位置  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 。上述过程要比“水平  $n$  棱柱体”较为简单。

但是, 求解  $n$  个薄板磁化强度模值却相对复杂些: ① 联立 (13.5) 和 (13.7) 式, 它们均含有  $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \dots, \hat{M}_n$ ; ② 建立起求解它们的联立方程组, 见 (13.11) — (13.13)。求解该联立方程组, 即可得到  $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \dots, \hat{M}_n$  值。

## 3. n 个有限延伸薄板组合体

见附录一 19 到 20 页。n 个有限延伸薄板组合体复磁场表达式为

$$T(S) = \sum_{j=1}^n \tilde{M}_j \frac{\sigma_{2j} - \sigma_{2j-1}}{(S - \sigma_{2j})(S - \sigma_{2j-1})} \quad (17)$$

把 (17) 与  $n$  棱水平柱体磁场导数式 (1) 式 (其中, “3” 改为 “ $n$ ”) 对比, 形式有类似之处, 例如, 把分子处的  $\sigma_{2j} - \sigma_{2j-1}$  换成  $\bar{\sigma}_j - \bar{\sigma}_{j-1}$ , 把分母处的  $\sigma_{2j} - \sigma_{2j-1}$  换成  $\sigma_j - \sigma_{j-1}$ , 把  $\tilde{M}_j$  换成  $\hat{M}$  并提到求和号前面。因此, 二者反演过程有类似之处, 例如, 均用到 (9.1) — (9.5) 和 (9.10) — (9.13) 等式。

但是, 不改换, (17) 比 (1) 式又复杂得多, 例如, (17) 式分子与分母的  $\sigma$  是一类 (无有共轭之分), 而且分子与分母的  $\sigma$  序号是一致的,  $\tilde{M}_j$  位于求和号内, 奇点数是 (1) 式的 2 倍, 未知数  $X$  又多了  $(2n + 1)$  个。因此, 每一步推导过程的表示形式更复杂。

但是, 只要细心阅读, 又有对前面二组合体反演过程的正确理解, 是可以明白  $n$  个有限延伸薄板组合体复场反演方法的。

## 4. n 个水平圆柱组合体

见附录一 20 到 22 页。n 个水平圆柱组合体复磁场表达式为

$$T(S) = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{M}_j}{(S - \sigma_j)^2} \quad (18)$$

如果对 (18) 式求积分, 立即得到不带负号的下延无限薄板柱体复磁场 (16) 式。故可以采用“下延无限薄板柱体复磁场”反演方法, 对  $n$  个水平圆柱组合体复磁场作反演。

但是, 若按照前面两类薄板组合体求解反演过程作推导, 即: ① 复磁场展开; ② 建立复联立方程组和确定  $n$  个水平圆柱中心复坐标  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n$ ; ③ 确定  $n$  个水平圆柱复磁参数  $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3, \dots, \tilde{M}_n$  值; ④ 给定定解条件求得磁化强度模值  $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \dots, \hat{M}_n$  等。可以看到, 其复杂程度出乎意料。

复杂的关键点在于 (18) 式分母中出现了  $(S - \sigma_j)^2$  项。尽管该推导中, 与无限薄板柱体一样, 只用到附录一 12 页 (9.1) 到 (9.9) 式, 相对简单些。但因分母  $\Phi(S)$  平方和分子  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_{(n-1)}, \Phi_n$  平方出现, 导致关于系数  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  和新增

系数系数  $X_{1(i)}$ ,  $X_{2(i)}$ , …… ,  $X_{(n-1)(i)}$  的新的关系式 (15.4) 和 (15.7) 出现, 其中的  $Y_1$ ,  $Y_2$ , …… ,  $Y_{2n}$ ,  $Y_{2n+1}$ , …… ,  $Y_{4n-2}$  成了中间变量, 出现在复方程式 (15.11) 中。

后面的反演过程, 特别是对于 (15.18) 递推公式的导出, 仍然需要认真琢磨, 甚至亲自采用 (15.17) 式验证一番, 之后, 方可明白道理。

### 三、反演难度最大的长轴倾斜圆柱体全方位任意点反演

该形体的反演过程见附录一 14 至 16 页。

先从其反演过程占用页数长度来看该形体的反演难度:  $n$  棱水平柱组合体、 $n$  个无限薄板组合体、 $n$  个有限薄板组合体 和  $n$  个水平圆柱组合体等, 反演过程分别占用约 1.20 页、1.25 页、1.35 页和 1.45 页; 而长轴倾斜圆柱体反演过程阐述却长达约 2.60 页。

再从该形体反演起始 到 结束的时间跨度来看其反演难度: 本科生贾学飞于 1992 年 10 月开始设计长轴倾斜圆柱体复磁场反演程序, 经 1993 年 3 月论文答辩, 到笔者后来多次追踪解决其反演出现的问题 (见附录一 15 页), 再到参考文献[\*47\*]1999 年发表, 前后长达 6 年之久, 可谓是攻关之路长漫漫。

在《成像》一书 37 和 38 页阐述的长轴倾斜圆柱体复场导数反演公式, 除 (3.3.4) 式内  $C_S = \left| \left\{ T'(0) / T'(S) \right\}^{\frac{2}{3}} - 1 \right|$  式 (即附录一 (11.4) 式) 的计算方法外, 其他公式和算法均正确无误。出现问题的根本原因在于, 复数或复函数开方运算时, 其计算公式应该是:

$$\left\{ \frac{T'(0)}{T'(S_i)} \right\}^{\frac{2}{3}} = \exp \left\{ \frac{2}{3} \ln \left[ \frac{T'(0)}{T'(S_i)} \right] \right\} = \exp \left\{ \frac{2}{3} \left[ \ln \left| \frac{T'(0)}{T'(S_i)} \right| + i \left\{ \text{Arg} \left( \frac{T'(0)}{T'(S_i)} \right) + 2k_i\pi \right\} \right] \right\},$$

$$k_i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (19)$$

这表明,  $\left\{ T'(0) / T'(S) \right\}^{\frac{2}{3}}$  是多值函数, 用数学语言来说, 其值处于多页黎曼曲面上。因此, 以前计算程序中取值是错误的, 故反演结果不总是正确。现在看来, 这一错误, 竟困扰笔者多年, 直到 1999 年。

究竟如何解决问题的, 见附录一 15 和 16 页。

### 四、各类形体复场反演过程关键点

第一, 笔者在探索附录一阐述的“二度规则磁性体及其组合体复磁场全方位任意点反演”过程中, 没有参考到前人任何文献, 完全是摸着石头过河, 自主努力而为。可谓是, 节节逢难点, 处处遭“煎心”, 关前疑惑无路, 破关喜悦连连, 感谢于以前阅读广泛, 提高了后来智慧毅力。

第二, 通过对  $n$  棱柱体 和  $n$  个无限薄板组合体 复磁场求和式进行通分、展开两步骤, 促使笔者获得了附录一 (9.1) 到 (9.13) 式研究结果, 为后续反演公式的推导、表达和反演程序研制奠定了坚实基础。

第三, 通过把  $\Phi(S)$  与  $T'(S)$  或  $T(S)$  式位置互换这一重要措施, 使方程式左、右两端线性化, 继而实现了形体复磁场反演问题线性化。

第四, 通过把线性化方程式中包含形体“奇点”与“磁参数”信息的中间变量  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , …… ,  $X_n$  和 新设变量  $X_{n+1}$ ,  $X_{n+2}$ , …… ,  $X_{2n-3}$  (或  $X_{2n-1}$ ) 等, 变成复方程未知数这一重要措施, 建立起了复联立方程组, 继而求得所有未知数。

第五, 通过把求得数值的  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , …… ,  $X_n$  代入复高阶复方程 (即 (9.4) 式), 解出它的  $n$  个复根, 即可求得  $n$  个“奇点”复坐标  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , …… ,  $\sigma_{n-1}$ ,  $\sigma_n$ 。

第六, 采用求得的  $X_{n+1}$ ,  $X_{n+2}$ , …… ,  $X_{2n-3}$  (或  $X_{2n-1}$ ) 等值, 直接求解磁化参数 (见附录一 (12.12) 到 (12.14) 式), 或 建立起求解  $\hat{M}_1$ ,  $\hat{M}_2$ ,  $\hat{M}_3$ , …… ,  $\hat{M}_n$  的联立方程组 (见附录一 (14.13) 到 (14.15) 式)。

第七,  $n$  个有限薄板组合体 和  $n$  个水平圆柱柱体 的反演过程, 虽然更为复杂, 主要关键步骤 与上面第二 到 第六关键步骤一致。

第八, 长轴倾斜椭圆柱体复磁场反演难度最大, 并不是反演公式和反演过程复杂, 仅仅是对复数或复函数求对数时发生错误。但是, 这一教训值得读者切记, 切记!!

第九, 其他“二角点形体”和“断层”等复磁场反演方法非常简单, 不足为虑。

#### 第四节 凸型二度体全方位成像与体内连续磁化强度模值反演

##### 凸型二度体图形示例

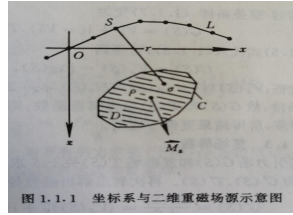


图 1.1.1 坐标系与二维磁场源示意图

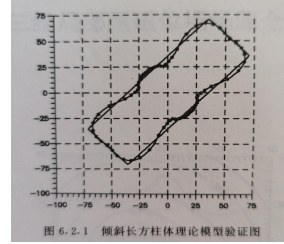


图 6.2.1 倾斜长方柱体理论模型验证图

##### 一、凸型二度体全方位成像

###### 1. 有限二度体磁矩重心、总磁矩模和磁化方向反演的方法原理

由第一章第三节复场级数表达式 (14) 系数  $C_k^T$  可见 (为了简单, 后面省去上角标  $T$ ), 当  $k=1,2$  时,  $C_1$ 、 $C_2$  分别为

$$C_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} e^{iI_s} \iint_D \hat{M}(\sigma) d\xi d\zeta, \quad C_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} e^{iI_s} \iint_D 2\hat{M}(\sigma) \sigma d\xi d\zeta \quad (1)$$

式中,  $C_1$  是二度体的总磁矩  $M_S$ ;  $C_2$  是二度体的磁矩的一阶原点矩。因此, 有限二度体的总磁矩模  $|M_S|$ 、磁矩重心  $\sigma_0$  和有效磁倾角  $I_S$  分别为

$$|M_S| = |C_1|, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1}, \quad I_S = \arctan^* \left\{ \frac{\text{Im } C_1}{\text{Re } C_1} \right\} \quad (2)$$

式中,  $\arctan^*\{\}$  表示角度取值为  $0 \sim 180^\circ$ 。若取磁矩重心为坐标原点, 即取  $\sigma_0 = 0$ , 则

$$C_2 = 0 \quad (3)$$

上式可用于作为迭代法精确确定二度体磁矩重心的标志之一。

###### 2. 近似确定凸型二度体形态和分布范围的方法原理

第一章第三节凸型二度体复磁场 (12) 模 (即总磁场模) 值表达式为

$$|T(S)| = \left| \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_D \frac{2\hat{M}(\sigma)}{(S-\sigma)^2} d\xi d\zeta \right| \quad (4)$$

它的等值线既与二度体分量场的测量方向无关, 又与二度体的磁化方向无关, 而仅与二度体的几何尺度、形态和磁化强度模值分布有关。当二度体为均磁单体时, 其复场模值等值线就仅与二度体的几何尺度和形态有关, 靠近二度体边界的等值线可较好地确定其形态和边界位置; 当二度体为均磁多体组合时, 靠近其边界的复场模值等值线也可大体确定其形态与分布范围; 当二度体为非均磁化多体时, 靠近其边界的复场模值等值线可在总体平均的意义上近似确定其分布范围。因此, 通过复场全空间延拓求得全空间复场模值等值线, 就可根据靠近

二度体边界的等值线形态及其畸变特征, 近似确定有限二度体形态、边界位置或分布范围。大量理论模型试验证实了这一结论。

### 3. 定量确定均磁凸形体边界 $R(\varphi')$ 的方法

在矿产勘探和工程物探中, 均匀磁化凸形边界有限二度体具有广泛的代表性和重要应用价值。当给定磁化强度模值时, 对这类形体, 不仅可以近似确定其形态和边界, 还可以给出其边界各点位置的定量反演方法。原理如下:

**第一章第三节** 表达式 (17) (为了简单, 后面省去  $\mu_0 / 4\pi$ ) 为

$$T(R, \varphi) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{R^{k+1}} e^{-i(k+1)\varphi} = \sum_{k=1}^N \frac{e^{-i(k+1)\varphi}}{R^{k+1}} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{2kM_S}{k+1} R^{(k+1)}(\varphi) \right\} e^{i(k-1)\varphi} d\varphi \quad (5)$$

现假定: 在以复坐标原点为中心、以  $R$  为半径的包围二度体的柱面上, 经“全空间解析延拓”给定了二度体的复场值  $T(R, \varphi)$ , 由此去求解该二度体的边界  $R(\varphi')$ 。此时, 柱面上复场可以写成

$$T(R, \varphi) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{R^{k+1}} e^{-i(k+1)\varphi} = \sum_{k=1}^N \tilde{C}_k e^{-i(k+1)\varphi}, \quad \tilde{C}_k = \frac{C_k}{R^{k+1}} \quad (6)$$

对式(6)中的前一等式两端乘以  $e^{i(k+1)\varphi} d\varphi$ , 并对  $\varphi$  由 0 到  $2\pi$  积分, 则有

$$\int_0^{2\pi} T(R, \varphi) e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^N \tilde{C}_k e^{-i(k+1)\varphi} \right\} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} \tilde{C}_k e^{i(k-k)\varphi} d\varphi = 2\pi \tilde{C}_k$$

即有表达式

$$\tilde{C}_k = \int_0^{2\pi} \frac{T(R, \varphi)}{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \quad (7)$$

而由式(6)中的后一等式和式(5)得到

$$\tilde{C}_k = \int_0^{2\pi} \frac{2kM_S}{k+1} \frac{R^{(k+1)}(\varphi)}{R^{k+1}} e^{i(k-1)\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{2kM_S}{k+1} \frac{R^{(k+1)}(\varphi)}{R^{k+1}} e^{-i2\varphi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \quad (8)$$

对比式(7)和(8), 可得

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{T(R, \varphi')}{2\pi} - \frac{2k'M_S}{k'+1} \frac{R'^{(k'+1)}(\varphi')}{R'^{k'+1}} e^{-i2\varphi'} \right\} e^{i(k'+1)\varphi'} d\varphi' = 0 \quad (9)$$

于是得到

$$\frac{T(R, \varphi')}{2\pi} = \frac{2k'M_S}{(k'+1)} \frac{R'^{(k'+1)}(\varphi')}{R'^{k'+1}} e^{-i2\varphi'}, \quad R'^{(k'+1)}(\varphi') = \frac{(k'+1)R^{(k'+1)}}{2k'M_S} \frac{T(R, \varphi')}{2\pi} e^{i2\varphi'}$$

进而有下式成立

$$\left| R'^{(k'+1)}(\varphi') \right| = \left| \frac{(k'+1)R^{(k'+1)}}{2k'|M_S|} \frac{T(R, \varphi')}{2\pi} e^{i2\varphi'} \right| = \frac{(1+1/k')R^{(k'+1)}}{4\pi|M_S|} |T(R, \varphi')| \quad (10)$$

把(10)中的  $k'$ 、 $\varphi'$  换为  $k$ 、 $\varphi$ , 且当  $k=1$  时, 得到

$$R(\varphi) = \left\{ \frac{|T(R, \varphi)|}{2\pi|M_S|} \right\}^{\frac{1}{2}} R = R_0(\varphi) \quad (11)$$

由式(11)得到

$$T(R, \varphi) = \frac{2M_s \pi R_0^2(\varphi)}{R^2} e^{-i2\varphi}, \quad |T(R, \varphi)| = \frac{2|M_s| \pi R_0^2(\varphi)}{R^2} \quad (12)$$

就是说, 式(12)实际上是水平圆柱体复场  $T(R, \varphi)$  的表达式。由此可见: 近似取值公式(12)意味着, 柱面上某一点的复场  $T(R, \varphi)$  被看成是中心在坐标原点、半径为  $R_0(\varphi)$  的柱体引起, 并把  $R_0(\varphi)$  作为待反演二度体于该点处对应的边界值。不难看出, 这种近似取值公式, 导致待反演二度体边界值大的位置的初值偏小, 而边界值小的位置的初值偏大。因此, 应该对该近似取值公式进行校正。为此, 可先求出柱面上复场的平均值  $\bar{T}(R, \varphi)$ , 然后取

$$R_0(\varphi) = \left\{ \frac{|T(R, \varphi)|}{2\pi|M_s|} \right\}^{\frac{1}{2}} R \left\{ \frac{|T(R, \varphi)|}{|\bar{T}(R, \varphi)|} \right\}^{ks} \quad (13)$$

式中,  $ks = 3, 2, 1$ , 由程序自动决定。

现对式(1.2.20)带指数  $ks$  项的合理性加以说明: ① 当二度体为水平圆柱体时, 柱面上复场  $T(R, \varphi)$  处处相同, 该项无论  $ks$  取何值均为 1, 式(1.2.20)为准确反演结果。② 当场源各方向尺度相差不大时, 位的平均值与最大值、最小值相差不大, 该项最大值与最小值也相差不大。只有当场源各方向相差较大时, 该项最大值与最小值相差才较大。③ 选取柱面半径  $R$  时, 要考虑使柱面位于非奇变区, 但又使  $R$  尽量小。此时  $ks$  取值要保证使最大边界初值小于  $R$ , 于是, 程序顺序取  $ks = 3, 2, 1$ , 直到选定某值为止。④ 增加带  $ks$  项后, 将使  $R(\varphi)$  值大的更大, 小的更小, 使其初值更接近于真值。

进一步, 为了求得准确的二度体边界值, 需要对边界  $R_0(\varphi)$  值精确化。为此, 采用迭代方法, 即: ① 把前段所取初值  $R_0(\varphi)$  代入式(1.2.13)进行正演数值计算, 求得对应于由该初值圈定的二度体的复场模  $|T_0(R, \varphi)|$ 。② 由柱面上给定的复场模  $|T(R, \varphi)|$  中减去  $|T_0(R, \varphi)|$ , 得

$$\Delta|T(R, \varphi)| = |T(R, \varphi)| - |T_0(R, \varphi)| \quad (14)$$

③ 再由  $\Delta|T(R, \varphi)|$  确定  $R(\varphi)$  的修改值  $\Delta R(\varphi)$ ,

$$|\Delta R(\varphi)| \approx \frac{1}{sk} \left\{ \frac{|\Delta|T(R, \varphi)|}{2\pi|M_s|} \right\}^{\frac{1}{2}} \{R - R_0(\varphi)\} \quad (15)$$

式中,  $sk = 10, 20, \dots$ , 由程序自动决定; 修改值的符号取决于  $\Delta|T(R, \varphi)|$  的符号。上式的含义是: 把  $\Delta|T(R, \varphi)|$  当作由位于以  $R_0(\varphi)$  为边界的二度体表面上, 且以  $(\varphi)$  为中心的许多小水平圆柱引起, 而  $(\varphi)$  处的小圆柱半径为式(15)的  $\Delta R(\varphi)$ , 并把该半径作为  $R_0(\varphi)$  的修改值。④ 把  $R_0(\varphi)$  与  $\Delta R(\varphi)$  相加, 得  $R(\varphi)$  的 1 次近似值  $R_1(\varphi)$ , 即有

$$R_1(\varphi) = R_0(\varphi) + \Delta R(\varphi) \quad (16)$$

⑤ 把  $R_1(\varphi)$  代入式(7)作正演, 求得  $T_1(R, \varphi)$  及其模。⑥ 再重复上面②~⑤步, 直到  $\max|\Delta|T(R, \varphi)||$  小于给定的一个量为止。

## 二、凸型二度体边界内连续磁化强度模值反演

现在讨论磁性体内部磁化强度分布反演问题。反演问题的定义是: 已知观测点坐标、观测场值、模型体 360 个边界向径  $R(\varphi)$  值和向径起算点相对观测点的空间位置, 求解模型体内连续磁化强度分布, 具体地说, 求解磁化强度分部函数  $M(r, \varphi)$  的系数  $c_{jl}$  值。

反演的步骤是: ① 取二度体向径值的起算点坐标为复坐标原点, 首先采用“成像程序系统”中的程序, 由模型体分量场求得其有效磁化倾角  $I_S$  并精确确定复系数  $\hat{C}_k^T = \hat{A}_k + i\hat{B}_k$ , 反演中, 采用了“奇异值分解”算法和“正则化法压制小奇异值”措施, 得到稳定解。② 采



用求得的复系数  $\hat{C}_k^T = \hat{A}_k + i\hat{B}_k$  及其线积分表达式 (3.2.6)，建立线性方程组，进一步反演系数  $c_{jl}$  值。③ 把系数  $c_{jl}$  代入磁化强度分部函数  $M(r, \varphi)$  表达式 (3.2.4)，正演出模型体内磁化强度分布。

下面是由  $\hat{C}_k^T = \hat{A}_k + i\hat{B}_k$  反演  $c_{jl}$  的方法。把第一章第三节 (21) 式改写成如下形式

$$\hat{C}_k^T = \frac{2\pi}{\mu_0} e^{-iI_s} C_k^T = \text{Re}\{\hat{C}_k^T\} + i\text{Im}\{\hat{C}_k^T\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} C_k^T &= \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{l=0}^j c_{jl} \cos^{j-l} \varphi \sin^l \varphi \left\{ \frac{k}{(k+1+j)} R^{(k+1+j)}(\varphi) \right\} e^{i(k-1)\varphi} d\varphi \\ &= \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{l=0}^j c_{jl} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{kR^{(k+1+j)}(\varphi)}{(k+1+j)} \cos^{j-l} \varphi \sin^l \varphi \right\} e^{i(k-1)\varphi} d\varphi = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{l=0}^j c_{jl} A_{jl}^k \end{aligned} \quad (18)$$

式中， $A_{jl}^k = \text{Re}\{A_{jl}^k\} + i\text{Im}\{A_{jl}^k\}$  是对应于  $k$  和  $c_{jl}$  的复系数，其中

$$\begin{aligned} A_{jl}^k &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{kR^{(k+1+j)}(\varphi)}{(k+1+j)} \cos^{j-l} \varphi \sin^l \varphi \right\} e^{i(k-1)\varphi} d\varphi \\ &\approx \frac{2\pi}{360} \sum_{m=1}^{360} \frac{kR^{(k+1+j)}(\varphi_m)}{(k+1+j)} \left\{ \cos^{j-l} \varphi_m \sin^l \varphi_m \right\} e^{i(k-1)\varphi_m} \\ &= \frac{2\pi}{360} \sum_{m=1}^{360} \frac{kR^{(k+1+j)}(\varphi_m)}{(k+1+j)} \left\{ \cos^{j-l} \varphi_m \sin^l \varphi_m \right\} (\cos(k-1)\varphi_m + i\sin(k-1)\varphi_m) \\ &= \text{Re}\{A_{jl}^k\} + i\text{Im}\{A_{jl}^k\} \end{aligned} \quad (19)$$

其中，

$$\text{Re}\{A_{jl}^k\} = \frac{2\pi}{360} \sum_{m=1}^{360} \frac{kR^{(k+1+j)}(\varphi_m)}{(k+1+j)} \left\{ \cos^{j-l} \varphi_m \sin^l \varphi_m \cos(k-1)\varphi_m \right\} \quad (20)$$

$$\text{Im}\{A_{jl}^k\} = \frac{2\pi}{360} \sum_{m=1}^{360} \frac{kR^{(k+1+j)}(\varphi_m)}{(k+1+j)} \left\{ \cos^{j-l} \varphi_m \sin^l \varphi_m \sin(k-1)\varphi_m \right\} \quad (21)$$

于是，可以建立如下求解  $c_{jl}$  的超定方程组：

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}\{\hat{C}_k^T\} &= \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{l=0}^j c_{jl} \text{Re}\{A_{jl}^k\}, \quad k = 1, 2, \dots, K \\ \text{Im}\{\hat{C}_k^T\} &= \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{l=0}^j c_{jl} \text{Im}\{A_{jl}^k\}, \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

因为高阶复系数值远远大于低阶复系数值，使得不论采用哪种方程组解法都具有很大的误差。为了获得高精度的反演结果，采取了对方程组两端进行加权的措施，做法是：用二度体边界向径  $R(\varphi)$  平均值  $R$  的  $k$  次幂  $R^k$ ，除方程组中与  $k$  对应的方程的两端，突出小  $k$  值的系数  $\hat{A}_k$  和  $\hat{B}_k$  在求解中的作用。这种措施属于恒等变换。然后，采用不压制小奇异值的“奇异值分解”算法，由经过加权的方程组求解  $c_{jl}$ 。理论模型试验表明，其效果非常明显，反演得到的所有大的  $c_{jl}$  值 ( $\geq n \times 10^{-2}$ ) 与理论值相对误差均  $< 0.0001$ 。

由于采用的是“奇异值分解”方法求解方程组，解的矩阵表达式为  $C = A^* B$ ，其中， $C$  是由未知的  $c_{jl}$  值组成的向量， $A^*$  是广义逆矩阵， $B$  是由复系数  $\hat{A}_k$  和  $\hat{B}_k$  组成的向量。假设  $B$  的分量的相对误差均为  $\eta$ ，则误差向量为  $\eta B$ ， $c_{jl}$  的误差向量  $\Delta C = A^* \eta B = \eta C$ ，故  $c_{jl}$  的相对误差也是  $\eta$ ，这表明  $c_{jl}$  的反演问题是稳定的。

## 第五节 凸型三度体全方位成像与体内连续磁化强度模值反演

这种三度体具有广泛的代表性和实用价值，教科书中的三度体（包括凸多面体）大多数属于这类形体。

### 一、凸型三度体全方位成像

第一章第四节中的（1）式是任意三度体线性化磁场球谐级数正演通式系统。（3）式中的  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  是（1）式所有场的共同的球谐系数，在凸型三度体全方位成像中有重要作用。

（9）、（13）和（17）式及其各自的附属公式，分别给出了沿  $\bar{l}$  方向磁化的磁位，沿  $\bar{l}$  方向磁化、沿  $\bar{t}$  方向测量的磁场 和 沿  $\bar{t}$  方向测量的磁场梯度。

$\bar{t}$  方向和  $\bar{r}$  方向是已知的。 $\bar{l}$  方向是未知的，应该首先反演该向量。 $\bar{l}$  方向只出现在磁位表达式（9）中，而磁位表达式，又与“附录五 13、14 页”的磁场第二球谐级数正演通式中的、沿  $\bar{l}$  方向磁化、沿  $\bar{t}$  方向测量的磁场表达式（1.3.14）形式上完全相同。（1.3.14）中的  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  见（1.3.13）式，其中  $a_1^0$ 、 $a_1^1$ 、 $b_1^1$ （见附录五 15 页）分别为三度体总磁矩  $\bar{M}_m$  沿 Z 轴、X 轴、Y 轴的投影，可用于反演总磁矩模值  $M_m$ 、磁化倾角 I 和 磁化偏角 D，从而求得磁化方向  $\bar{l}$ 。这就是说，如果把（1）式中的磁位  $U(p)$  也按“第一章第四节（2）式中第一式”展开，则（9）式就相当于磁场表达式，可用于对观测场作球谐分析，所得到的球谐系数  $a_1^0$ 、 $a_1^1$ 、 $b_1^1$  就可用于反演总磁矩模值  $M_m$ 、磁化倾角 I 和 磁化偏角 D，从而求得磁化方向  $\bar{l}$ 。磁化方向  $\bar{l}$  确定之后，代入到（1）式后面磁位、磁场和磁场梯度等 3 个表达式。此时，（1）式又成为一套可用于三度体磁场线性化“自封闭型式”反演的正反演体系：

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}(r, \lambda, \theta) \\ \tilde{F}(r, \lambda, \theta) \\ U(r, \lambda, \theta) \\ T_l^r(r, \lambda, \theta) \\ \{T_l^r(r, \lambda, \theta)\}_r \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{array}{l} A_{nm}^V(r, \lambda, \theta) \\ A_{nm}^F(r, \lambda, \theta) \\ A_{nm}^U(r, \lambda, \theta, \bar{l}) \\ A_{nm}^T(r, \lambda, \theta, \bar{l}, \bar{t}) \\ A_{nm}^{Tr}(r, \lambda, \theta, \bar{l}, \bar{t}, \bar{r}) \end{array} \right\} \cdot a_n^m + \left\{ \begin{array}{l} B_{nm}^V(r, \lambda, \theta) \\ B_{nm}^F(r, \lambda, \theta) \\ B_{nm}^U(r, \lambda, \theta, \bar{l}) \\ B_{nm}^T(r, \lambda, \theta, \bar{l}, \bar{t}) \\ B_{nm}^{Tr}(r, \lambda, \theta, \bar{l}, \bar{t}, \bar{r}) \end{array} \right\} \cdot b_n^m \quad (1)$$

式中， $A_{nm}^{(0)}$ 、 $B_{nm}^{(0)}$  是已知函数值，而  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  成了待求解的未知量。

下面，具体阐述凸型三度体全方位成像过程：

首先，确定凸型三度体的磁化方向  $\bar{l}$ 。方法是：选取三度体“磁矩中心或其附近一点”为“球坐标原点”。把磁位公式（9）当作测量方向为  $\bar{l}$  的磁场公式，由实际在观测曲面上测量得到的磁场值，建立求解  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  的联立方程组， $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ， $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ， $N$  是截断值，对于凸型三度体来说， $7 \leq N \leq 10$ 。待求  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  的个数均为 36、45、55、66。一般情况下，应建立超定方程组来求解。所得到的  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  中， $a_0^0 = b_0^0 = b_1^0 = 0$ ，而

$$a_1^0 = M_{mZ}, \quad a_1^1 = M_{mX}, \quad b_1^1 = M_{mY} \quad (2)$$

$a_1^0$ 、 $a_1^1$ 、 $b_1^1$  分别为三度体总磁矩  $\bar{M}_m$  在 z 轴、x 轴、y 轴上的投影。可以证明（见《成像》134 页），理论上，这些球谐系数值与球坐标系原点选择无关。由式（2）可以得到磁性三度体总磁矩模  $M_m$ 、磁化倾角 I 和磁化偏角 D

$$M_m = \sqrt{(a_1^0)^2 + (a_1^1)^2 + (b_1^1)^2}, \quad I = \arctan^* \left\{ \frac{a_1^0}{\sqrt{(a_1^1)^2 + (b_1^1)^2}} \right\}, \quad D = \arctan^* \left\{ \frac{b_1^1}{a_1^1} \right\} \quad (3)$$

式中,  $\arctan^*\{ \}$  的取值区间是  $[-\pi, \pi]$ 。采用等比定理还可以证明 (见《成像》135、136 页), 式 (2)、(3) 对于磁化方向相同、分块均匀磁化和均匀磁化多体均适用, 因此, 公式 (3) 可以用于具有固定磁化方向的非均匀磁化单体或多体的磁化方向反演。当磁性体内各点磁化方向不同时, 可采用式 (3) 求得三度体平均磁化方向。

其次, 确定凸型三度体的“磁矩中心” (即球坐标系内原点 0)。求得磁化方向  $\bar{l}$  后, (1) 式成为一套可用于三度体磁场线性化“自封闭型式”反演的正反演体系。此时, 选取球坐标系磁矩中心或其附近为“球坐标系原点 0”, 第二次, 由实际在观测曲面上测量得到的磁场值, 采用沿  $\bar{l}$  方向磁化、沿  $\bar{t}$  方向测量的磁场公式  $T_l^t(r, \lambda, \theta)$ , 与前面一样, 建立求解上面 (1) 式中的  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  的联立方程组。所得到的  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  中,

$$a_0^0 = \iiint_V M_q dv = M_m, \quad b_0^0 = 0 \quad (4)$$

式中,  $M_m$  为三度体总磁矩模值。当球坐标系原点没选在三度体磁矩中心时, 1 阶球谐系数

$$\left. \begin{aligned} a_1^0 &= \iiint_V M_q z' dv, & b_1^0 &= 0 \\ a_1^1 &= \iiint_V M_q x' dv, & b_1^1 &= \iiint_V M_q y' dv \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

它们分别为三度体的 1 阶原点矩。由式 (4) 和 (5) 可以得到如下反演结果

$$M_m = a_0^0, X_0 = a_1^1 / a_0^0, Y_0 = b_1^1 / a_0^0, Z_0 = a_1^0 / a_0^0 \quad (6)$$

式中,  $X_0$ 、 $Y_0$ 、 $Z_0$  表示三度体凸型三度体磁矩中心的直角坐标。当球坐标系选在磁矩中心时, 因为  $(X_0, Y_0, Z_0) = (0, 0, 0)$ , 则有

$$a_1^1 = b_1^1 = a_1^0 = 0 \quad (7)$$

### 第三、实现“拟引力场”全空间延拓和三度体形态近似成像

求得三度体球谐系数  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  之后, 可分别代入  $T_l^t(p)$ 、 $\{T_l^t(p)\}_\tau$  的球谐级数正演通式, 在原观测曲面上计算出它们的正演值与观测值的差值、差值的代数平均值、均方误差和最大绝对误差。如果这些参考值均很小, 就可进行全方位解析延拓。如果这些参考值较大, 则说明  $r'_{\max} < r_{\min}$  这一重要条件不满足, 停止全方位解析延拓, 并考虑采取新的措施。

假定  $r'_{\max} < r_{\min}$  这一重要条件满足, 又高精度求得了球谐系数  $a_n^m$ 、 $b_n^m$ 。就可以以质心为球坐标原点, 在观测面下面 (除坐标原点外的) 区域选定计算网格点, 把球谐系数  $a_n^m$ 、 $b_n^m$  代入 (1) 式中第二式, 计算出网点处的“拟引力场”  $\tilde{F}(p)$  正演值。这就是“拟引力场”  $\tilde{F}(p)$  全空间延拓。这种延拓结果, 位于三度体边界外略远处的值是相当精确的, 称为“高精度绕场源全方位解析延拓”。靠近场源边界的延拓值则发生畸变, 但可用来近似确定场源形态和边界。场源内的延拓值是不正确的, 只表明场源赋存的位置。

当观测点与三度体的相对位置固定不变时, 无论三度体在坐标系中怎样旋转, “拟引力场”模值  $|\tilde{F}(p)|$  始终保持不变, 这叫做“旋转不变性”。而观测场  $T_l^t(p_k)$  等不具有这种特性。由这种“旋转不变性”可以断定,  $|\tilde{F}(p)|$  的等值面能够有效地反映三度体的形态, 用来近似确定其形状。

实际模型计算表明, 在异常源边界附近,  $|\tilde{F}(p)|$  等值面很快变密, 其形态和位置能较好地反映异常源的形态和略大一些的分布范围。因此, 利用这一特征, 就可实现场源近似成像。此时, 更里面极其密集的等值线可看成异常源的图象。

#### 第四、求解“均匀凸形三度体”边界位置

假定：在以三度体磁矩中心为中心、以  $R$  为半径的包围异常源的大球面上，经“全方位解析拓”，给出了三度体“拟引力位”  $\tilde{V}(R, \lambda, \theta)$  值。由此去求解该三度体边界  $R(\lambda, \theta)$ 。经理论推导，可得到如下  $R(\lambda, \theta)$  的一个近似取值公式

$$R(\lambda, \theta) \approx \left\{ \frac{3}{4\pi M_m} V(R, \lambda, \theta) R \right\}^{\frac{1}{3}} = R_0(\lambda, \theta), \quad \tilde{V}(R, \lambda, \theta) \approx M_m \frac{4\pi R_0^3(\lambda, \theta)}{3R} \quad (8)$$

式(8)的注解公式实际上是球体“拟引力位”  $\tilde{V}(p)$  的表达式。这种近似取值公式导致待反演三度体边界值大的位置处的初值偏小，而边界值小的位置处的初值偏大，需要对该初值公式进行校正。为此，先求出大球面上  $\tilde{V}(R, \lambda, \theta)$  平均值  $\bar{V}(R, \lambda, \theta)$ ，再取

$$R'(\lambda, \theta) \approx \left\{ \frac{3}{4\pi G\rho \text{或} |\bar{M}|} V(R, \lambda, \theta) R \right\}^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{V(R, \lambda, \theta)}{\bar{V}(R, \lambda, \theta)} \right]^{ks} \quad (9)$$

式中，指数  $ks = 2, 1$ ，可由计算机自动决定。为了进一步提高  $R(\lambda, \theta)$  反演精度，可以采用迭代方法。取  $R(\lambda, \theta)$  的第  $L$  次修改值  $\Delta R_L(\lambda, \theta)$  为

$$\Delta R_L(\lambda, \theta) \approx \frac{1}{sk} \left\{ \frac{3}{4\pi G\rho \text{或} |\bar{M}|} [V(\lambda, \theta) - V_{L-1}(\lambda, \theta)] [R - R_{L-1}(\lambda, \theta)] \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (10)$$

式中， $sk = 10, 20, \dots$ ，由程序自动决定，以保证正常绝对收敛。迭代至满足精度要求为止。实践表明：当下式成立时，即可结束迭代。

$$|V(R, \lambda, \theta) - V_{L-1}(R, \lambda, \theta)| < \bar{V}(R, \lambda, \theta) / 10 \quad (11)$$

## 二、凸型三度体模型连续磁化强度模值反演

现在讨论模型体内磁化强度分布反演问题。反演问题的定义是：已知观测点坐标、观测场值、模型体 1628 个边界向径  $R(\lambda, \theta)$  值和向径起算点相对观测点的空间位置，求解模型体内连续磁化强度分布，具体地说，求解磁化强度分部函数  $M(r, \lambda, \theta)$  的系数  $c_{kj}$  值。

反演的步骤是：① 取三度体磁矩中心坐标为球坐标原点，首先采用前面凸型三度体全方位成像过程中反演磁化方向步骤，由模型场精确求得模型体磁化方向；再把磁化方向代入前面公式(1)，反演精确求得“拟引力位”球谐系数；上面反演中采用“奇异值分解”算法和“正则化法压制小奇异值”措施，得到了精确稳定解。② 采用精确求得的球谐系数及第一章第四节面积分表达式(29)，建立线性方程组，进一步反演系数  $c_{kj}$  值。③ 把系数  $c_{kj}$  代入第一章第四节磁化强度函数  $M(r, \lambda, \theta)$  表达式(28)，正演出模型体内磁化强度分布。

下面是由球谐系数  $a_n^m, b_n^m$  反演  $c_{kj}$  的方法。把式该(29)改写成如下形式，

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_n^m \\ b_n^m \end{Bmatrix} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n^m(\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \sin \theta \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^N \frac{R^{(n+3+k)}(\lambda, \theta)}{(n+3+k)} \sum_{\substack{j=1 \\ p+q+s=k}}^K c_{kj} (\sin \theta \cos \lambda)^p (\sin \theta \sin \lambda)^q (\cos \theta)^s \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{j=1 \\ p+q+s=k}}^K c_{kj} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{(\sin \theta \cos \lambda)^p (\sin \theta \sin \lambda)^q (\cos \theta)^s}{(n+3+k)} R^{(n+3+k)}(\lambda, \theta) \right\} P_n^m(\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \sin \theta d\lambda d\theta \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{j=1 \\ p+q+s=k}}^K c_{kj} \begin{Bmatrix} A_{nm}(k, j) \\ B_{nm}(k, j) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

这就是用于反演  $c_{kj}$  的表达式。式中

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_{nm}(k, j) \\ B_{nm}(k, j) \end{Bmatrix} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{(\sin \theta \cos \lambda)^p (\sin \theta \sin \lambda)^q (\cos \theta)^s}{(n+3+k)} R^{(n+3+k)}(\lambda, \theta) \right\} P_n^m(\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \sin \theta d\lambda d\theta \\ &\cong \sum_{i=1}^{1628} \left\{ \frac{(\sin \theta_i \cos \lambda_i)^p (\sin \theta_i \sin \lambda_i)^q (\cos \theta_i)^s}{(n+3+k)} R^{(n+3+k)}(\lambda_i, \theta_i) \right\} \\ &\quad \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n^m(\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \sin \theta d\lambda d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

具体反演  $c_{kj}$  的过程为：① 由式 (12) 建立求解模型磁化强度系数的方程组，采用的球谐系数  $a_n^m, b_n^m$  的个数等于或略大于  $c_{kj}$  的个数。② 因为高阶球谐系数值远远大于低阶球谐系数值，使得不论采用哪种方程组解法都具有非常大的误差，致使正演所得的磁化强度分布与模型体内设定的磁化强度分布相比面目全非。③ 为了获得高精度的反演结果，采取了对方程组进行加权的措施，做法是：先求取三度体平均向径  $R$ ，然后，对具有  $n$  阶球谐系数的方程（共  $n+1$  个）左右端各项均除以  $R^{(n+3)}$ ，使高阶球谐系数值大大缩小，用以突出代表场的低缓成分的低阶球谐系数在反演中的作用，这是恒等变换，并未改变方程组与解之间的关系，但至少能够防止反演过程中大数吃小数现象。④ 采用不压制小奇异值的“奇异值分解”算法，求解经过加权处理过的方程组。模型试验结果表明：这种提高反演精度的措施十分有效。这也说明经过加权处理过的方程组的广义逆矩阵是相当稳定的。

由于采用的是“奇异值分解”方法求解方程组，解的矩阵表达式为  $C = A^* B$ ，其中， $C$  是由 35 个未知  $c_{kj}$  值组成的向量， $A^*$  是广义逆矩阵， $B$  是由 36 个球谐系数组成的向量。由于  $A^*$  是相当稳定的，假设  $B$  的分量的相对误差均为  $\eta$ ，则误差向量为  $\eta B$ ， $c_{kj}$  的误差向量  $\Delta C = A^* \eta B = \eta C$ ，故  $c_{kj}$  的相对误差也是  $\eta$ 。这表明  $c_{kj}$  的反演问题是稳定的。

## 第六节 国内外专家在求解反演问题中的失误

笔者在 1970 年代仔细阅读过参考文献[04][05][09][10]，大大提高了本人的重磁勘探专业水平。这些文献中，有中国专家研究的理论方法，也包含大量前苏联专家和欧美专家的理论方法研究成果。笔者并没有发现有哪个理论方法存在着原则性错误。但是，1980 年代中，国内专家引进并加以应用的欧、美、俄专家的主要理论方法，却存在着原则性的失误。

在专著《区域磁异常定量解释》[《36》]中，管志宁老师和笔者对有关失误做了较详细的阐述。例如：§ 4.5（151 页，第四章第 5 节，下同）前人方法中存在问题讨论，包括，① 关于 A. Gerand 求解常 J 单界面 J、h 值方法存在的问题；② 匹配滤波方法用于航磁资料反演界面的可靠性问题。§ 5.4（190 页）评 Spector 等效论及有关居里面反演方法。

§ 6.3（218 页）评用于磁化强度分层反演的向上延拓滤波和窄带滤波方法。

与此同时，我们还在《物探与地探》和《地球物理学报》上发表了三篇评论性文章，见参考文献[16][24][37]。其中，[37]号文章“评 Spector 等效论及有关局里面反演方法”，

《学报》编辑部于 1989 年 9 月 20 日收到初稿，1990 年 1 月 17 日收到修改稿，原定 1991，V. 33, No. 1 正刊发表。笔者又于 1991 年，在列宁格勒召开的“全苏勘探地球物理科技大会”



上宣读，得到与会苏联专家的认可。

然而，[37]号文章还没有在《学报》正刊发表之前，就遭到得知发表信息的国内专家的强烈反对，致使该文章被推迟发表在1992年、V. 35 (增刊)、431-438 页上。后来，在地矿部“地球物理与地球化学勘探研究所”召开的“重磁老专家专业会议”上，笔者们的三篇文章终于得到了绝大多数专家的肯定。

国内专家引进并加以应用的欧、美、俄专家的主要理论方法存在原则性失误的原因，主要有如下几个方面：

**第一、重磁勘探反演问题**(包括最简单的球体和顺层磁化薄板状体反演问题)均具有“多解性”，需要“定解条件”，才能获得“唯一解”；而“定解条件”只能根据已有的地质与地球物理实际资料予以给定，不能采用任何数学方法来求解。这是数学上的“欠定反演问题”。有人会说，欠定问题可以采用地球物理反演方法中的“最小长度解法”来求得“唯一解”。笔者认为，该方法用于无源空间内重磁场的彼此换算(如地球坐标系内“化向地磁极”方法)是可以的。用于重磁场反演，给出的解只是无穷解中的一个解，与模型体本身物性与形体参数，可能有很大差别。故此，该解法的反演结果只能作参考而已。

具常磁化强度 $J$ 的磁性单界面各点深度反演，需要的定解条件是 给定“ $J$ ”和界面平均深度 $h$ 。而 A. Gerand 等却硬要用概率统计方法把 $J$ 、 $h$ 求解出来，很具有“迷惑性”，得到了美国地球物理学会主席 B. K. 布哈塔卡亚 的承认和引用，对世界重磁勘探专家影响很大。但该方法等效于说“常 $J$ 单界面深度反演具有唯一解”，这违反了该“反演问题的多解性”，必然存在“原则性错误”。笔者已经在参考文献[24]和[《36》]中指出了 A. Gerand 等人推导中的错误所在。

还有，国内专家引进的磁性单界面变磁化强度模填图方法(可能是 R. L. Parker 研创的)，反演结果总出现大量负值，显然是有问题的。为此，我们在执行“联合国资助 029 项目子课题 磁化强度模值填图理论方法研究和应用”中，找到了国外方法总出现大量负值的根本原因。其原因在于，作为该反演方法出发点的正演公式没有考虑到多解性，导致隐含的“定解条件”，即“给定磁化强度模平均值 $J$ ”被忽略，进而导致反演结果错误。

给定“定解条件”令个别重磁专家反感。因此，特别喜欢别出心裁，脱离目标模型严格的正演理论公式，采用看似可行而实质错误的反演方法，包括与 Spector 等效论有关的居里面反演方法。

**第二、磁化强度分层反演的向上延拓滤波方法的提出者**，既没有给出“ $N$ 个厚度均为 $\Delta h$ 、能谱均为 $S(r)$ 的水平薄层组成的、顶深为 $h_t$ 、底深为 $h_b = h_t + N\Delta h$ 的磁化强度分层模型”磁场的严格正演表达式和理论模型验证，也没给出如何由观测场判断其所设的磁化强度分层模型在测区内是否存在的方法，仅凭主观推导，就得出磁化强度分层反演的向上延拓滤波方法，好像具有普遍性。该反演方法不需要“定解条件”，故得到国内某些重磁专家的青睐。该方法似乎“突破性”地成了“重磁场测深法”。笔者们在著作《区域磁场定量解释》222 到 225 页，详细地指出了该方法的错误，但过于繁杂。

这种主观主义设想、而又与磁场基本理论相违背的反演方法实在是不可取的!!

**第三、上述反演方法提出者没有设置严格的理论模型，对方法有效性进行理论模型验证。**众所周知，理论模型验证结果，对于重磁勘探来说，是检验反演方法是否成立的标准；舍此，还没有找到更好的判别方法。没有通过这一检验环节，就发表这样的磁测资料解释方法，实在缺乏科学态度。这也是采用上述反演方法专家在解释实际磁测资料时，出现问题的重要原因之一。