目　录

理　论　篇

第一章　绪论……（3）

§1-1　概述……（3）

§1-2　边界元法的发展……（4）

§1-3　本书的内容……（6）

参考文献……（6）

第二章　边界单元法概要……（11）

§2-1　概述……（11）

§2-2　位势问题的边界元法……（12）

§2-3　弹性力学问题的边界元法……（22）

§2-4　弹性动力学问题的边界元法……（28）

§2-5　断裂力学问题的边界元法……（34）

§2-6　耦合法……（40）

参考文献……（41）

第三章　位势问题的特解边界元法及其推广……（43）

§3-1　概述……（43）

§3-2　特解边界元法的数学基础……（43）

§3-3　定常位势问题的特解边界元法……（46）

§3-4　扁壳无矩内力分析……（47）

§3-5　可压缩流体动压力计算……（51）

§3-6　热传导问题的特解边界元法……（54）

§3-7　计算举例……（57）

参考文献……（58）

第四章　弹性力学问题的特解边界元法……（59）

§4-1　概述……（59）

§4-2 含体力弹性力学问题的特解边界元法……（59）
§4-3 热弹性问题的特解边界元法……（64）
§4-4 计算举例……（68）
参考文献……（69）
第五章 弹性动力问题的特解边界元法……（71）
§5-1 概述……（71）
§5-2 自振问题的特解边界元法……（72）
§5-3 瞬态动力反应问题的特解边界元法……（77）
§5-4 地震动力反应问题的特解边界元法……（82）
§5-5 数值举例……（85）
参考文献……（91）
第六章 粘弹性动力问题的特解边界元法……（93）
§6-1 概述……（93）
§6-2 粘弹性动力问题的基本方程……（95）
§6-3 粘弹性动力问题的特解边界元法……（99）
§6-4 粘弹性地基的动力刚度矩阵计算……（105）
§6-5 计算举例……（108）
参考文献……（110）
第七章 随机特解边界元法……（112）
§7-1 概述……（112）
§7-2 结构静力可靠度理论简介……（113）
§7-3 随机有限元法简述……（120）
§7-4 随机特解边界元理论……（122）
§7-5 结构动力可靠度理论基础……（130）
§7-6 用随机特解边界元计算结构动力可靠度……（135）
参考文献……（138）
第八章 特解边界元法与其它方法的数值耦合……（140）
§8-1 概述……（140）
§8-2 边界元法与样条有限点法的耦合……（140）
§8-3 特解边界元法与广义边界元法的耦合……（146）
§8-4 计算举例……（151）
参考文献……（153）

应 用 篇

第九章 异弹模界面裂缝的静断裂分析……（157）

§9-1 概述……（157）

§9-2 异弹模界面裂缝的缝端应力场……（158）

§9-3 边界元多域法分析……（165）

§9-4 计算应力强度因子的格式……（167）

§9-5 中心裂纹板的分析计算……（168）

§9-6 小结……（171）

参考文献……（172）

第十章 重力坝坝踵界面裂缝的静断裂分析……（174）

§10-1 概述……（174）

§10-2 含体力问题的多域法分析……（175）

§10-3 坝踵裂缝断裂分析……（177）

§10-4 主要结论……（182）

参考文献……（183）

第十一章 异弹模界面裂缝的动断裂分析……（184）

§11-1 概述……（184）

§11-2 动力问题的多域法分析……（185）

§11-3 裂缝的动态模拟……（187）

§11-4 中心裂纹板分析……（192）

§11-5 单边裂纹板分析……（195）

§11-6 实验考核……（199）

§11-7 小结……（204）

参考文献……（205）

第十二章 重力坝、地基、库水体系动力分析……（206）

§12-1 概述……（206）

§12-2 无穷边界单元……（207）

§12-3 地基、库水的影响及耦合……（213）

§12-4 重力坝、地基、库水体系动特性分析……（216）

§12-5 裂缝重力坝动特性分析……（220）

§12-6 若干问题讨论……（223）

参考文献…… (228)
第十三章 重力坝坝踵界面裂缝的地震断裂分析…… (229)
§13-1 概述…… (229)
§13-2 地震反应分析的多域法…… (230)
§13-3 坝踵裂缝的地震断裂分析…… (233)
§13-4 坝高的影响分析…… (254)
§13-5 主要结论…… (256)
参考文献…… (257)
第十四章 重力坝的可靠度分析…… (258)
§14-1 概述…… (258)
§14-2 极限状态方程的建立…… (260)
§14-3 沿坝基面抗滑稳定可靠度计算…… (262)
§14-4 坝踵及坝趾处应力可靠度计算…… (268)
§14-5 坝踵界面裂缝断裂可靠度计算…… (270)
§14-6 主要结论…… (276)
参考文献…… (277)
附录 动力特解边界元程序…… (278)

理 论 篇

第一章 绪 论

§1-1 概 述

由于工程问题的复杂性，往往将其抽象为满足某种微分方程和一定边界条件的数学问题来处理。然而，遗憾的是，直接寻求其解析解常常非常困难，这就促进了各种数值方法的飞速发展。有限单元法曾一度在数值方法的发展史上起着极为重要的作用。但是，就象其它任何事物一样，都存在其不足的一面，比如有限元法处理问题的自由度数目庞大，要求计算机容量大、速度快；在处理奇异问题时精度较低等，于是导致了边界元法的发展，两种方法相互补充，发挥各自的优势，可以经济有效地解决实际问题。

边界单元法只在边界上剖分单元，通过基本解把域内未知量化为边界未知量来求解，这就使自由度数目大大减少，而且由于基本解本身的奇异性特点，使得边界元法在解决奇异问题时精度较高。另外，基本解可以根据实际问题的特点适当选择，以达到最大限度地节约之功效，甚至可以避免直接处理无限边界问题。再者，边界元法的降维作用，使得问题简化许多，特别对于三维问题，更受工程人员青睐。总之，边界单元法以具有输入数据少、降低问题的维数、计算精度高，且特别适用于大区域问题和奇异问题等优点，愈来愈引起人们的重视。

边界单元法具有两种列式：一种是直接列式法 (*Direct Formulation*)；另一种是间接列式法(*Indirect Formulation*)。通俗地说，直接列式法是直接求出边界上的未知物理量，而间接列式法是把所求区域视为无限域的一部分，通过满足域内条件的边界“虚荷载”再求出边界上的未知物理量，是一种“借虚求实”的方法。本书只涉及特解边界元法的直接列式法。

§1-2 边界元法的发展

到目前为止，国际上已经召开了十多次专门的边界元学术讨论会[1~2]，国内自70年代末由杜庆华教授引进以来[3]，业已召开了三次边界元法及应用方面的学术会议[4]。如此广泛的学术交流，大大促进了边界元法的发展。从固体力学、流体力学到应用数学、电磁物理、电化学等各个方面都取得了较大的进展。单就固体力学而言，目前在弹性静力学问题中的应用已较为成熟，塑性力学、断裂力学、动力学等各个方面也取得了可喜的进展。

文献[5]就弹塑性问题的发展进行了回顾和总结。由我国学者发展起来的塑性问题拟线性解法[6]，避免了域内积分的反复迭代过程，使塑性问题的边界单元法取得了较大的进展。文献[7]解决了各种类型的非线性问题。文献[8]就体力的处理方法提出了域内积分法，该法需在域内划分网格。文献[9]就粘弹性问题的域内积分处理提出了避免直接积分的方法，其特点是将粘弹性附加项近似化为边界项，属于本文中特解边界元法的思路。文献[10]、[11]，提出了处理无限域问题和半无限域问题的边界单元法，并且提出了“无穷边界单元”的概念，给出了相应的公式，可以节约大量单元而取得较好的计算精度。

文献[12]提出了一种新的边界单元法——样条边界元法，该法以样条函数作为插值函数，提高了插值的精度，从而提高了边界元方法的精度。文献[13]提出了一种叫做“广义边界元法”的另一种边界元方法，它利用边界上的已知量的特点，给出含有广义坐标的解析形式，进而将问题转化为求解广义坐标的问题，使未知量大为减少。文献[14]就板的振动问题提出了复变函数边界元解法，并且为处理平面断裂问题提供了一条可行的途径。

边界单元法在动力学中的应用一直是一个有争议的问题，争议的焦点在于如何处理惯性力项。动力边界元法大致可分为两大类：一类是频域法，另一类是时域法。频域法是经过积分变换

[15~28]，在频域内利用相应静力问题的基本解求出频域值，然后再经过积分反变换求出时域内的响应值。显然，两次积分变换的工作量特别大，且当遇到积分变换不存在或不能进行时，该法失效。时域法是直接在时域内求解响应值，又可以分为两类：其一是显式时间法[29]，即利用时域内的基本解，直接进行时间步长积分，求得每一时刻的响应值，由于每个时段都需要积分，且时域基本解形式复杂，因此计算工作量之大是可以想象的；其二是隐式时间法[30~34]，即采用一定的方法，将惯性力项化为边界积分来处理，可以把动力问题化为类似于静力问题来解决，利用振动仿真方法直接计算出时域内的响应值。本书中利用这种思想方法，并根据微分方程理论，提出了特解边界元法，它不仅可以处理自重问题、热弹性问题等一大类带有体力的静力问题，而且可以解决自振问题、动力响应问题及地震分析问题等带有惯性力项的问题，这种方法无疑是动力边界元法的发展方向。

由于边界元法所用基本解本身的奇异性，使得它在处理断裂问题时具有较高的精度。因此，边界元法在断裂力学中的应用已相当广泛，发展起来的方法也较多[35~39]。其中发展起来的1/4等参奇性元计算应力强度因子的方法，使得计算格式简单统一，便于应用，这无疑是其一大进展。文献[40]提出了一种考虑闭合裂缝缝面间摩擦作用的多次迭代方法，使得对裂缝的考虑更接近实际。文献[41]利用边界元法和分区混合有限元法相结合计算应力强度因子，从而发挥了每种方法的优越性。尽管如此，这些文献所研究的问题仍局限于均质裂缝问题，对于异弹模界面裂缝问题，由于问题本身的复杂性，目前在这方面的研究尚不多见。

由于动力问题本身的复杂性，以及断裂问题的奇异性和裂缝碰撞的特点，使得边界元法在动态断裂力学的应用一直很缓慢，近几年才略有进展[42~51]。但是，这些文献所涉及的内容，均是均质线弹性材料裂缝问题。文献[34]曾利用振型迭加法计算过动断裂问题，由于使用该法时需计算若干振型，一则是工作量大；二则是由于裂缝的存在造成计算振型的误差，从而导致断裂分析

的精度较低。如何寻求一种更为有效的方法来处理动断裂问题，是一个亟待解决的课题。当然，作为异弹模情形下的动断裂分析，由于问题本身的复杂性，更是一个难度较大的课题，而研究这个问题的意义之大是显然的。这也是本书中的一个主要课题。

§1-3 本书的内容

本书根据作者近年来的研究成果，着重阐述特解边界元法原理及其工程应用成果。第二章概要介绍了一般边界元法，为以后诸章的应用打基础；第三章至第八章是本书的理论部分，分别介绍了位势问题的特解边界元法、弹性力学问题的特解边界元法、弹性动力问题的特解边界元法、粘弹性动力问题的特解边界元法、随机问题的特解边界元法及特解边界元法与其它数值方法的耦合等问题，并给出了应用例子，以验证其计算精度；第九章至第十四章是本书的应用部分，内容包括异弹模界面裂缝的静动态断裂分析及在重力坝中应用，重力坝、地基、库水的相互作用分析和重力坝的可靠度分析等内容。由于所涉及的内容较多，对某一部分难免欠详，敬请读者原宥。

参考文献

[1] 杜庆华等著. 边界积分方程方法——边界元法. 北京：高等教育出版社，1989

[2] C. A. Brebbia (Ed.) .Progress in Boundary Element Methods. Vol.1&2, Pentech Press, 1981

[3] 杜庆华、姚振汉. 边界积分方程——边界元法的基本理论及其在弹性力学方面的若干应用. 固体力学学报，1982年第1期

[4] 杜庆华、姚振汉、岑章志. 我国工程中边界元法研究的十年. 第二届全国工程中的边界元法会议论文集，南宁，1988

[5] 杜庆华、徐瀛. 弹性与弹塑性边界元分析的若干最新成果. 应用力学学报，1985年第2期

[6] 楼志文、杨物华. 弹塑性边界元法的拟线性解. 力学学报，1986年第1期

[7] J. C. F. Telles. The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems, Springer—Verlag, 1983

[8] D. J. Danason. A Boundary Element Formulation of Problems in Linear Isotropic Elasticity with Body Forces. Proc. 3rd. Int. Conf. BEM, 1981

[9] 沈家荫、林炳化. 区域不划分单元的粘弹性问题的边界元方法. 第二届全国工程中边界元法会议论文集，南宁，1988

[10] C. H. Zhang &.C. M. Song. Boundary Element Technique in Infinite and Semi-Infinite Plane Domam. Proc. 8th Int. Conf. BEM, Beijing, 1986

[11] 刘兴业、王成博. 半无限域弹性力学问题的边界元法. 天津大学学报，1988年第2期

[12] 秦荣. 样条边界元法. 南宁：广西科学技术出版社，1988

[13] 孙克明. 载变量变分原理和广义边界元法及其应用. 大连理工大学博士学位论文（导师：林皋），1987

[14] B. A. Ovenc & G. Z. Voyiadjis. Application of Complex Variable Theory to the Free Vibration of Plates, Proc.5th Int. Conf. BEM, Hiroshima, 1983

[15] K. Toki & T. Sato. Seismic Response Analysis of Ground with Irregular Profiles by the Boundary Element Method. Proc. 5th Int. Conf. BEM, Hiroshima, 1983

[16] T. Sato, H. Kawase & K. Yoshida. Dynamic Response Analysis of Rigid Foundations Subjected to Seismic waves by Boundary Element Method. Proc. 5th Int. Conf. BEM, Hiroshima, 1983

[17] S.Kobayashi. Some Problems of the Boundary Integral Eguation Method in Elastodynamics. Proc. 5th. Int. Conf. BEM. Hiroshima, 1983

[18] O. Tullberg. BENDYN——A Boundary Element Program for Two—Dimensional Elastodynamics. Proc.5th Int. Conf. BEM. Hiroshima, 1983

[19] W. J. Mansur & C. A. Brebbia. Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two Dimensional Transient Scalar Wave Propagation Problems. Appl. Math. Modelling, Vol.6, Aug.,1982

[20] W. J. Mansur & C. A. Brebbia. Formulation of the Boun dary Ele ment Method for Transient Problems Governed by the Scalar Wave Eguation. Appl. Math. Modelling. Vol.6, Aug., 198

[21] Y. Niwa, S. Kobayashi & M. Kitahara. Application of the Boundary Integral Equation Method to Eigenvalue Problems of Elastodynamics. Proc. 4th Int. Seminar BEM, 1982

[22] Michihiro Kitahara. Boundary Integral Equation Methods in Eige nvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates. Elsevier Press, 1985

[23] James R. Hutchinson. Determination of Membrane Vibrational Characteristics by the Boundary Integral Equation Method. In Recent Advances in Boundary Element Methods, Oxford, 1978

[24] E. Alarcon, J. Domiguez & F., Delcano. Dynamic Stiffnesses of Fou ndations. In New Developments in Boundary Elemnt Methods. Pentech Press, 1980

[25] D. L. Zhou, Z. Y. Weng & B. W. Xu. The Analysis of Dynamic Response of Underground Structure. Proc. 2nd China—Japan Conf. BEM, Beijing, 1988

[26] Q. Zhang & Z. W. Lou. The Dynamic Analysis of Viscoelastic Bodyby BEM. Proc. 2nd China--Japan Conf. BEM, Beijing, 1988

[27] Y. Saad Chebyshev. Acceleration Techniques for Solving Nonsymmetric Eigenvalue Problems. Math. Comp., Vol.42, No. 166, 1984

[28] M. Ohtst & S. Uesugi. Analysis of Elastic Wave Field in a Half-Space and Some Application to Earthquake Engineering. Proc 6th Int. Conf. BEM, Southampton, 1984

[29] W. J. Mansur & C. A. Brebbia. Transient Elastodynamics Using a time-Stepping Technique. Proc.5th Int Conf.BEM, Hiroshima, 1988

[30] D.Nardini & C.A.Brebbia.A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements. Proc. 4th Int. Conf. BEM, 1982

[31] D. Nardini & C. A. Brebbia. Transient Dynamic Analysi.

by the Boundary Element Method. Proc. 5th Int. Conf. BEM, Hiroshima, 1983

[32] Shahid Ahmad & P. K. Banerjee. Free Vibration Analysis by BEM Using Particular Integrals. J. Eng. Mech. ASCE, No.10, 1986

[33] 李庆斌、周鸿钧. 用边界单元法计算重力坝的自振特性. 郑州工学院学报, 1987年第1期

[34] 李越川、杨耀池. 一种新的动态边界积分方程解法及其在动态断裂力学中的应用. 第二届全国工程中边界元法会议论文集, 南宁: 1988

[35] J. C. Mason, R. N. Smith & R. W. Thompson. Stress Intensity Factor Evaluation by Boundary Element Methods for Cracks at Holes. Proc. 3rd Int. Conf. Num. Meth. Eng., Swansea, 1983

[36] H. Eichenaer & E. T. Till. An Efficient Boundary Element Methods for Crack Problems. Proc. 3rd Int. Conf. Num. Meth. Eng., Swansea, 1983

[37] 罗钢明、张永元. 二维等参奇性边界元尺寸的合理选择与应力强度因子的研究. 第一届全国工程中边界元法会议论文集, 重庆: 1985

[38] 张楚汉、冯令民. 用边界单元法研究重力坝坝踵裂缝的稳定性. 水利学报, 1988年第7期

[39] Jose Martinez & Jose Dominguez. On the Use of Quarter-Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computations. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 29, 1984

[40] 秦飞、岑章志、杜庆华. 考虑摩擦作用的闭合裂纹问题的边界元方法. 第二届全国工程中边界元法会议论文集, 南宁: 1988

[41] 钱俊、龙驭球. 分区混合有限元边界元法计算应力强度因子. 第二届全国工程中边界元法会议论文集, 南宁: 1988

[42] W. G. Knauss. Fundamental Consideration in Dynamic Fracture. Eng. Frac. Mech., Vol.23, No.1, 1986

[43] V. M. Rti & S. Valliappan. The Use of Quarter Point Element in Dynamic Crack Analysis. Eng. Frac. Mech., Vol.23, No.3, 1986

[44] T. Y. Fan & H. G. Hahn. Application of the Boundary Intelgra Eguation Method to Dynamic Fracture Mechanics. Eng. Frac. Mech., Vol.21, No.2, 1985

[45] A. G. Chrysakis. A New Criterion of Mixed-Mode Crack Propagation Based on the Maximization of Principal Stress σ_θ. Eng. Frac. Mech., Vol.24, No.3, 1986

[46] H. G. Georgiadis. Complex-Variable and Integral-Transform Methods for Elastodynamics Solutions of Cracked Orthotropic Strips. Eng. Frac. Mech., Vol.24, No.5, 1986

[47] T. Nishioka & S. N. Atluri.On the Computation of Mixed-Modn K-Factors for a Dynamically Propagating Crack Using PathIndependent Integrals. J. Eng. Frac. Mech. (Int.J.), Vol.20, No.2, 1984

[48] F. G. Benitez. Some Consideration on Dynamic BIEM-I, A Dynamic Problems for Two-Dimensional Fracture Mechanics Problems. Eng. Frac. Mech., Vol.20, No.4, 1986

[49] F. G. Benitez. Some Consideration on Dynamic BIEM-II, Applications to Two—Dimensional Fracture Mechanics Problems. Eng. Frac. Mech., Vol.20, No.4, 1984

[50] Zhang Wai.Computation of Dynamic Stress Intensity Factors by Direct Integral Boundary Element Method. Proc. Int. Conf. Frac. & Frac. Mech., Shanghai, 1987

[51] Yin Jiaju & Ji Xing. Numerical Computation of Dynamic Stres Intensity Factors by BEM, Proc. Int. Conf. Frac. & Frac. Mech., Shanghai, 1987

648656

第二章　边界单元法概要

§2-1　概　　述

实际上，边界单元法是一种直接求解边界积分方程的数值方法。工程中常见的位势问题和弹性力学问题，都可以借助于加权余量格式或*Betti*互换功原理，并利用相应的基本解来建立其边界积分方程，求解这个积分方程便可以得到待求的未知物理量。可见，边界元法只不过是从另外一种途径来求解工程问题，而这种方法在某些问题中显得特别有效。

如上所述，基本解在建立边界积分方程中起着十分重要的作用，它是边界元法中不可缺少的数学基础，是一个专门的数学课题，这里仅作概念性介绍，以便以后引用。数学上，把满足方程

$$\mathscr{L}(u^*_{jK})=\Delta^j \tag{2-1}$$

的函数u^*_{jk}定义为方程

$$\mathscr{L}(u_{jk})=0 \tag{2-2}$$

的基本解。这里$\mathscr{L}$是线性微分算子，可依具体问题表现出不同的形式，Δ^j为狄拉克（Dirac）δ函数，且具有下列性质

$$\int_\Omega \Delta^j u_k \mathrm{d}\Omega = C_{kl}u^l_k \tag{2-3}$$

式中，u^l_k表示k点的l向的相应物理量；C_{kl}是与积分域Ω边界几何性质有关的常数。

本章主要是为了以后各章引用上的方便，概要介绍常规边界元法的原理和数值技术，包括位势问题、弹性静力学问题、弹性动力学问题、断裂力学问题和耦合技术等。

§2-2 位势问题的边界元法

许多工程问题诸如渗流、传热、电气等问题，都可以用Laplace方程或Poisson方程来描述，这类问题统称为位势问题。本节将介绍位势问题的边界元法。

1.基本方程

位势问题可以归结为下列方程：

$$\nabla^2 u = b \tag{2-4}$$

式中，b是某个已知函数，又以下式为其边界条件

$$u = \bar{u} \qquad X \in \Gamma_1 \tag{2-5}$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \qquad X \in \Gamma_2 \tag{2-5}$$

且有$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$，如图2-1所示。

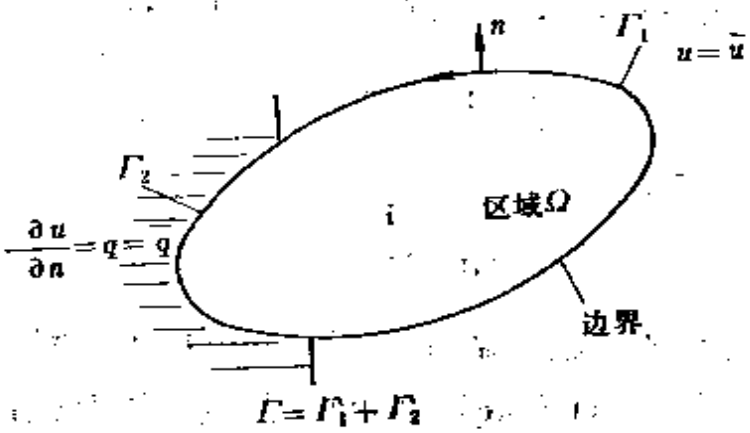


图2-1 位势问题的符号

2.边界积分方程

上述表示的位势问题可以写成加权余量式：

$$-\int_{\Omega} bw\,d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla^2 u) w\,d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q-\bar{q}) w\,d\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_1} (u-\bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \tag{2-6}$$

这里w是某种权函数。

将式 (2-6) 分部积分两次，得：

$$-\int_{\Omega} bw\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}(\nabla^2 w)u\mathrm{d}\Omega$$

$$=-\int_{\Gamma_2}\bar{q}w\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_1}qw\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_2}u\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}\bar{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma \qquad (2-7)$$

为了将其转化为边界积分，我们取权函数w为拉普拉斯方程的基本解u^*，即有：

$$\nabla^2 u^*=\Delta_i \qquad (2-8)$$

对于三维各向同性介质，基本解为：

$$u^*=\frac{1}{4\pi r} \qquad (2-9)$$

对于二维各向同性介质，其对应的基本解为：

$$u^*=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (2-10)$$

式中，r是源点到观察点间的距离，如图2-2所示。

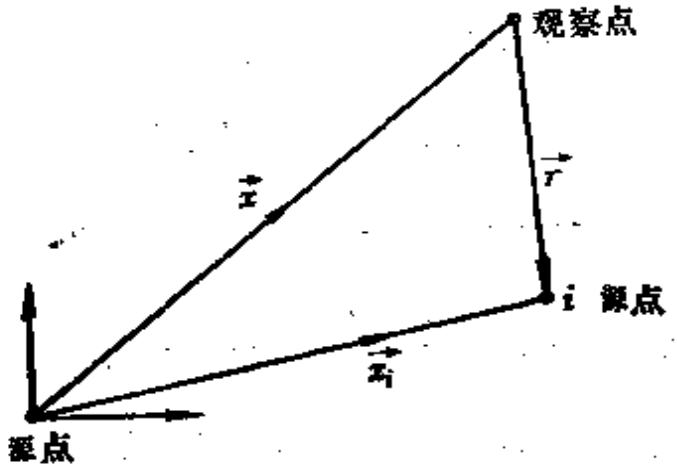


图2-2 基本解的定义符号

$$r=\left|\vec{r}\right|=\left|\vec{X}-\vec{X}_i\right| \tag{2-11}$$

于是，式 (2-7) 则变为：

$$-\int_{\Omega} bu^*\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}(\nabla^2 u^*)u\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_2}\bar{q}u^*\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}qu^*\mathrm{p}\Gamma$$

$$=\int_{\Gamma_1}\bar{u}q^*\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_2}uq^*\mathrm{d}\Gamma \tag{2-12}$$

式中，$q^*=\dfrac{\partial u^*}{\partial n}$

根据基本解的性质，可将式 (2-12) 改写为

$$C_i u_i+\int_{\Omega} bu^*\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_2}uq^*\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}\bar{u}q^*\mathrm{d}\Gamma$$

$$=\int_{\Gamma_2}\bar{q}u^*\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}qu^*\mathrm{d}\Gamma \tag{2-13}$$

式中，C_i是与边界形状有关的常数，且有：

$$C_i=\begin{cases}1 & X\in\Omega\\ 1/2 & X\in\Gamma\text{且为光滑点}\\ \beta/2\pi & X\in\Gamma\text{且为角点，}\beta\text{为该点的内角}\\ 0 & X\in(\Omega+\Gamma)\end{cases}$$

有关证明过程请参见有关文献[1]。

方程 (2-13) 可写成如下更为简明的形式：

$$C_i u_i+\int_{\Omega} bu^*\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma}uq^*\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma}qu^*\mathrm{d}\Gamma \tag{2-14}$$

此即位势问题对应的边界积分方程。

3.数值离散技术

为了简明起见，仅以二维情形给出离散技术，并令$b=0$。对于$b\neq 0$的情形，将在下节中讨论。

如图2-3所示，假设区域边界为光滑边界。根据需要可选择常单元、线性元、二次元或更高次的单元。边界经剖分离散后，假定由N个单元组成。

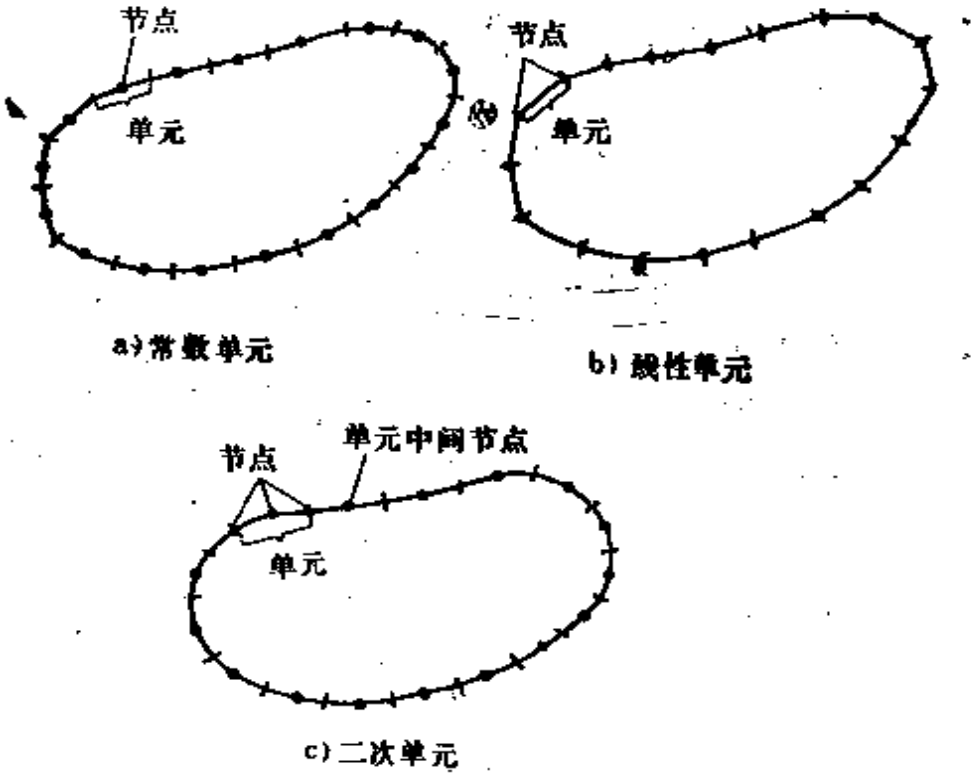


图2-3 边界程元

对边界离散后，方程 (2-14) 可写成离散形式

$$\frac{1}{2}u_i+\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}uq^*\mathrm{d}\Gamma=\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}qu^*\mathrm{d}\Gamma \qquad (2-15)$$

注意：这里的1/2已假定为光滑边界。对于常数单元，在每一个单元上u_j及q_j为常数，因此可以提到积分号外边，从而得：

$$\frac{1}{2}u_i+\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j}q^*\mathrm{d}\Gamma\right)u_j=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j}u^*\mathrm{d}\Gamma\right)q_j \tag{2-16}$$

若记

$$\hat{H}_{ij}=\int_{\Gamma_j}q^*\mathrm{d}\Gamma$$

$$G_{ij}=\int_{\Gamma_j}u^*\mathrm{d}\Gamma \tag{2-17}$$

则方程 (2-16) 又可写成

$$\frac{1}{2}u_i+\sum_{j=1}^{N}\hat{H}_{ij}u_j=\sum_{j=1}^{N}G_{ij}q_j \tag{2-18}$$

式 (2-17) 的积分可容易地计算出来，但是对于高次单元而言，积分的解析解变得比较困难，因而常常用数值法计算。下一节将部分介绍这种处理方法，详细资料请参阅有关文献。

若再令：

$$H_{ij}=\begin{cases}\hat{H}_{ij} & i\neq j\\ \hat{H}_{ij}+\dfrac{1}{2} & i=j\end{cases} \tag{2-19}$$

则式 (2-18) 又可写成

$$\sum_{j=1}^{N}H_{ij}u_j=\sum_{j=1}^{N}G_{ij}q_j \tag{2-20}$$

或者写或矩阵形式

$$[H]\{u\}=[G]\{q\} \tag{2-21}$$

注意到在每个节点i上，对应的物理量u_i及q_i中有一个是已知的，而余下的另一个是未知的。方程组(2-21)中正好包含有N个方程和N个未知量，因此可解。将方程 (2-21) 按照边界条件进

行移项整理，并置全部未知量于左端后，得：

$$[A]\{X\}=\{F\} \tag{2-22}$$

式中，$\{X\}$是由未知的u及q组成的向量。解此方程可以得到边界上的所有物理量。一旦做到这一点，即可利用式（2-14）计算任意内部点上的u及q值，即：

$$u_i=\int_\Gamma qu^*\,\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma uq^*\,\mathrm{d}\Gamma \tag{2-23}$$

离散式（2-23），可直接求得u值如下：

$$u_i=\sum_{j=1}^{N}q_jG_{ij}-\sum_{j=1}^{N}u_j\hat{H}_{ij} \tag{2-24}$$

对式（2-23）两边微分，可得q值。

$$q_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\int_\Gamma q\frac{\partial u^*}{\partial x}\,\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma u\frac{\partial q^*}{\partial x}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{2-25}$$

$$q_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\int_\Gamma q\frac{\partial u^*}{\partial y}\,\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma u\frac{\partial q^*}{\partial y}\,\mathrm{d}\Gamma$$

4.泊松方程

在许多实际问题中，我们需要引入非零项b，该项作用在物体的体积或面积上，但将不会在表达式中增加任何内部未知数。

当$b\neq 0$时，对应的边界积分方程已由方程（2-14）给出。可见，与前面不同的仅在于含有b项的域内积分。为了求得该项积分，需将区域Ω离散成一系列的“网格”或“内部单元”，这个作法类似于有限元法的网格划分（如图2-4所示），但这里却又不需要任何内部未知数，仅是为了计算该项积分，这与有限元的概念却又不同。

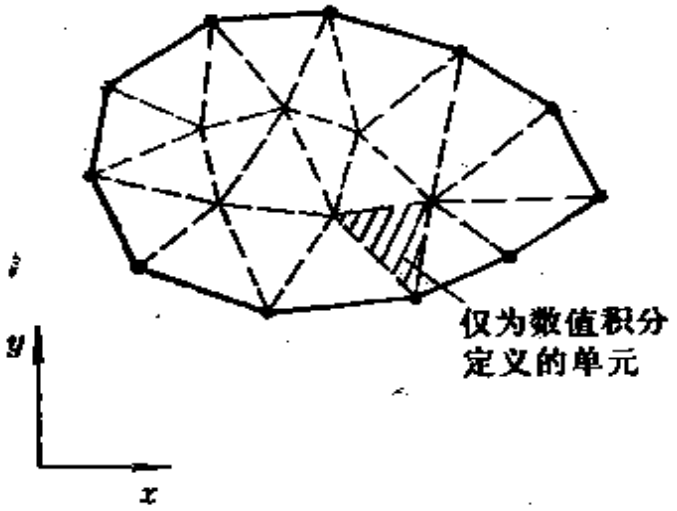


图2-4 边界单元及内部单元

考察M个内部单元，可写出：

$$B_i=\int_{\Omega} bu^*\,d\Omega=\sum_{k=1}^{M}\int_{\Omega_k} b^*\,d\Omega \tag{2-26}$$

对每一单元应用数值积分公式，得：

$$\int_{\Omega} bu^*\,d\Omega=\sum_{k=1}^{M}\left(\sum_{r=1}^{S}W_r(bu^*)_r\right)A_k \tag{2-27}$$

式中，r是积分点；W_r是权系数；S是每个单元上的积分点的总数；A_k是单元的面积或体积。

于是，方程（2-14）的离散形式为：

$$B_i+\sum_{j=1}^{N}H_{ij}u_j=\sum_{j=1}^{N}G_{ij}q_j \tag{2-28}$$

这里H_{ij}及G_{ij}与前述相同。

或将式（2-28）写成矩阵形式

$$\{B\}+[H]\{u\}=[G]\{q\} \tag{2-29}$$

按照边界条件将未知量和已知量分别移至等号两边，整理后可得到：

$$[A]\{X\}=\{F\} \tag{2-30}$$

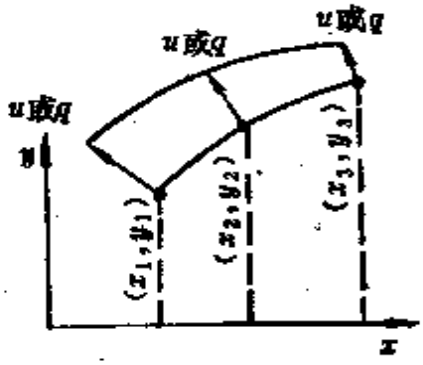
的可解方程组，其中$\{F\}$中已包含$\{B\}$的各项。

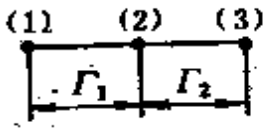
一旦求解方程式 (2-30) 后，整个边界上的u值和 q 值 为已知。于是，在计入b项贡献后，就能在任意内点计算出它们 的 数值来。例如，在任一内点之上，其u值可由下式给出：

$$u_i=\sum_{j=1}^{N}G_{ij}q_j-\sum_{j=1}^{N}\hat{H}_{ij}u_j-B_i \tag{2-31}$$

5.高次单元

为了更好地表示物体的几何形状，也常常采用高次单元。如图2-5所示的二次单元，我们把单元内的坐标、u值及q值都用局部





节点	ξ	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
1	1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1

图2-5　二次单元

坐标ξ来表示（此称为等参单元），即有：

$$X=\sum_{j=1}^{3}\phi_jX_j \tag{2-23}$$

$$u=\sum_{j=1}^{3}\phi_ju_j \tag{2-33}$$

$$q=\sum_{j=1}^{3}\phi_jq_j \tag{2-34}$$

式中，X_j，u_j及q_j为节点上的对应值，ϕ_j为：

$$\begin{cases} \phi_1=\dfrac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ \phi_2=(1-\xi)(1+\xi) \\ \phi_3=\dfrac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{cases} \tag{2-35}$$

应该注意：这些函数在指定节点（见图2-5中的表）给出节点上的相应值，而在节点之间呈二次变化。

将上述函数代入离散方程（2-15）中，对每个单元可得：

$$\int_{\Gamma_j} uq^*\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma_j}[\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3]q^*\mathrm{d}\Gamma\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$=[h^1_{ij} \; h^2_{ij} \; h^3_{ij}]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{2-36}$$

式中，

$$h^1_{ij}=\int_{\Gamma_j}\phi_1 q^*\mathrm{d}\Gamma \qquad h^2_{ij}=\int_{\Gamma_j}\phi_2 q^*\mathrm{d}\Gamma$$

$$h^3_{ij}=\int_{\Gamma_j}\phi_3 q^*\mathrm{d}\Gamma$$

同理，

$$\int_{\Gamma_j} qu^*\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma_j}[\phi_1 \; \phi_2 \; \phi_3]u^*\mathrm{d}\Gamma\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

$$=[g^1_{ij} \; g^2_{ij} \; g^3_{ij}]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \tag{2-37}$$

这里，

$$g^1_{ij}=\int_{\Gamma_j}\phi_1 u^*\mathrm{d}\Gamma \qquad g^2_{ij}=\int_{\Gamma_j}\phi_2 u^*\mathrm{d}\Gamma$$

$$g^*_{ij}=\int_{\Gamma_j}\phi_s u^*\,\mathrm{d}\Gamma$$

式中，h^K_{ij}及g^K_{ij}为影响系数，它是根据观察点i与单元j上特定节点K之间的相互作用来定义的。

利用数值积分方法计算上述各积分，并把两邻接单元$(j-1)$和j的贡献相加，使之成为一项来确定其节点总影响系数，就得到方程

$$C_i u_i+[\hat{H}_{i1}\quad \hat{H}_{i2}\quad \cdots\quad \hat{H}_{iN}]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_N\end{Bmatrix}$$

$$=[G_{i1}\quad G_{i2}\quad \cdots\quad G_{iN}]\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_N\end{Bmatrix} \tag{2-38}$$

或将其改写为：

$$C_i u_i+\sum_{j=1}^{N}\hat{H}_{ij}u_j=\sum_{j=1}^{N}G_{ij}q_j \tag{2-39}$$

进而可写成矩阵形式

$$[H]\{u\}=[G]\{q\} \tag{2-40}$$

余下的处理方法与前相同。

在上述的积分计算中，将会遇到奇异积分处理问题，这是边界元法中一个专门的和难度较大的课题，因为本书的重点不在于此，请参阅相关文献[1] [2]。

§2-3 弹性力学问题的边界元法

弹性力学问题是力学分析中最基本的问题之一，边界元法的发展亦充分体现了这一点。边界元法是在60年代后期提出的，70年代初期就开始了在弹性力学问题中的尝试，70年代中期已经有较为可靠的分析成果[2]。因此，作为以后各章的应用基础，这里介绍弹性力学问题的边界元法的原理。

1.基本方程

平衡方程：

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0 \tag{2-41}$$

本构方程：

$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}e_{kl} \tag{2-42}$$

几何方程：

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{2-43}$$

边界条件：

$$\begin{aligned} &u_i=\bar{u}_i,\quad X\in\Gamma_1\\ &t_i=\bar{t}_i,\quad X\in\Gamma_2\\ &\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2 \end{aligned} \tag{2-44}$$

式中，σ_{ij}是应力张量；e_{ij}是应变张量；E_{ijkl}是弹性张量；b_i是体积力；u_i、t_i分别是边界节点的位移和面力分量；$\bar{u}_i$、$\bar{t}_i$分别是u_i及t_i的已知值。并且，对于三维问题$i=1,2,3$；$j=1,2,3$；对于二维问题$i=1,2$；$j=1,2$。

2.边界积分方程

根据加权余量法原理，可以写出对应上述弹性力学问题的权余式为：

$$\int_{\Omega}(\sigma_{kj,j}+b_k)u^*_{ki}\,d\Omega$$

$$=\int_{\Gamma_2}(t_k-\bar{t}_k)U_{ki}^{*}\,d\Gamma+\int_{\Gamma_1}(u_k-\bar{u}_k)P_{ki}^{*}d\Gamma \qquad (2-45)$$

式中，U_{ki}^{*}是权函数，这里表示域内位移场；P_{ki}^{*}是与位移场U_{ki}^{*}相对应的边界面力场，且满足

$$P_{ki}^{*}=\sigma_{ki}^{*}n_j \qquad (2-46)$$

式中，σ_{ki}^{*}是与位移U_{ki}^{*}相应的应力场；n_j是边界的外法线方向。

对式（2-45）中的域内积分进行一次分部积分，同时考虑物理方程（2-42）和几何方程（2-43），得：

$$-\int_{\Omega}\sigma_{kj}e_{ikj}^{*}\,d\Omega+\int_{\Omega}b_kU_{ki}^{*}d\Omega$$

$$=-\int_{\Gamma_2}\bar{t}_kU_{ki}^{*}\,d\Gamma-\int_{\Gamma_1}t_kU_{ki}^{*}d\Gamma+\int_{\Gamma_1}(\bar{u}_k-u_k)\,P_{ki}^{*}d\Gamma \qquad (2-47)$$

式中，e_{ikj}^{*}是与位移U_{ki}^{*}相应的应变场。

对式（2-47）的第一个域内积分再进行一次分部积分，并利用有关定理，可得：

$$\int_{\Omega}\sigma_{kj,j}^{*}u_k\,d\Omega+\int_{\Omega}b_kU_{ki}^{*}d\Omega$$

$$=-\int_{\Gamma_2}\bar{t}_kU_{ki}^{*}d\Gamma-\int_{\Gamma_1}t_kU_{ki}^{*}\,d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma}\bar{u}_kP_{ki}^{*}d\Gamma+\int_{\Gamma_2}u_kP_{ki}^{*}d\Gamma \qquad (2-48)$$

或写成更简明的形式：

$$\int_{\Omega} \sigma^*_{kj,j} u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k U^*_{ki} d\Omega$$

$$= -\int_{\Gamma} t_k U^*_{ki} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_k P^*_{ki} d\Gamma \qquad (2-49)$$

在常规边界元法中，体力的计算是直接进行域内剖分而计算数值积分得到的，其方法类似于 §2-2中的泊淞方程的处理，尽管计算过程比较繁琐，但计算原理相当简单，也不增加新的未知量，这里不作赘述。下文中为了方便起见，暂且不计体力b_k的影响。

为了把方程 (2-49) 化为边界积分方程，需要引入基本解，通常引入形如：

$$\sigma^*_{jk,j} = -\Delta^i_i \qquad (2-50)$$

的基本解，此基本解即是著名的Kelvin基本解，对三维问题，基本解为：

$$U^*_{ik} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r}[(3-4\nu)\delta_{ik} + r_{,i}r_{,k}]$$

$$P^*_{ik} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{ik} + 3r_{,i}r_{,k}]\right.$$

$$\left. -(1-2\nu)[r_{,i}n_k - r_{,k}n_i]\right\} \qquad (2-51)$$

$$(i=1,\ 2,\ 3;\ k=1,\ 2,\ 3)$$

对二维（平面应变）问题，基本解为：

$$U^*_{ik} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}[(3-4\nu)\ln(\frac{1}{r})\delta_{ik} + r_{,i}r_{,k}]$$

$$P^*_{ik} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,k}r_{,i}]\right.$$

$$-(1-2\nu)(r_{,i}n_k-r_{,k}n_i)\Big\} \tag{2-52}$$

$$(I=1,\ 2;\ k=1,2)$$

式中，G为剪切模量；ν为泊淞比；δ_{ik}为Kronecker delta，且有：

$$r_{,i}=Y_i/r$$
$$Y_i=X_i-\xi_i$$

根据基本解的性质，将式（2-50）代入方程（2-49），可以得到边界积分方程为：

$$C_{ki}u_k+\int_\Gamma u_k P_{ik}^* d\Gamma=\int_\Gamma t_k U_{ik}^* d\Gamma \tag{2-53}$$

式中，C_{ki}是与边界几何形状有关的常数矩阵，对光滑边界有：

$$C_{ki}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

3.数值技术

由于方程（2-53）中的积分函数比较复杂，直接求其解析值异常困难，实际上往往借助于数值积分。为此，把积分边界作图2-3c所示的剖分，并通过式（2-35）所示的二次插值函数把单元内的量用节点值表示出来，即：

$$\{u\}=[\phi]\{u_i\}$$
$$\{t\}=[\phi]\{t_i\} \tag{2-54}$$

式中

$$\{u\}=\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix},\quad \{t\}=\begin{Bmatrix}t_1\\ t_2\end{Bmatrix}$$

$$\{u_i\}=[u_1^1\quad u_2^1\quad u_1^2\quad u_2^2\quad u_1^3\quad u_2^3]^T$$
$$\{t_i\}=[t_1^1\quad t_2^1\quad t_1^2\quad t_2^2\quad t_1^3\quad t_1^3]^T$$

这里，u_i^j、t_i^j表示j节点的i向节点值。

$$[\phi]=[[\phi_1]\quad[\phi_2]\quad[\phi_3]]$$

式中，$$[\phi_i]=\begin{Bmatrix}\phi_i & 0\\ 0 & \phi_i\end{Bmatrix}$$

这里ϕ_i是二次插值函数表达式，见式（2-35）。

于是，方程（2-53）的离散形式为：

$$C_{ki}u_k+\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}P_{ik}^{*}[\phi]\{u_i\}\mathrm{d}\Gamma$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}U_{ik}^{*}[\phi]\{t_i\}\mathrm{d}\Gamma \qquad (2-55)$$

式中，N是边界单元总数。

若记

$$h_{ik}^{j}=\int_{\Gamma_j}U_{ik}^{*}[\phi_i]\mathrm{d}\Gamma \qquad (2-56)$$

$$g_{ik}^{j}=\int_{\Gamma_j}P_{ik}^{*}[\phi_i]\mathrm{d}\Gamma$$

并把两相邻单元（$j-1$）和j的贡献相迭加，使之成为一项来确定其节点影响系数，就得到：

$$[C]\{u\}+[\hat{H}]\{u\}=[G]\{t\} \qquad (2-57)$$

式中，

$$\hat{H}_{ik}^{j}=\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}U_{ik}^{*}[\phi_i]\mathrm{d}\Gamma$$

$$G_{ik}^{j}=\sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j}P_{ik}^{*}[\phi_i]\mathrm{d}\Gamma \qquad (2-58)$$

$[C]$是由元素C_{ki}组成的矩阵，在实际计算中可以借助刚体平移

原理计算得到，详见文献[1]。

如果再引入实际问题的边界条件，并按照已知量和未知量分别移至等号两端，即可得到形如：

$$[A]\{X\}=\{F\}$$

的标准线性方程组。解此方程组可以求出边界上所有节点的位移和面力值。进而，利用式(2-53)还可以求出域内点的位移，即：

$$u_i=\int_\Gamma t_k U_{ik}^* d\Gamma-\int_\Gamma u_k P_{ik}^* d\Gamma \tag{2-59}$$

再利用几何方程和物理方程，借助式（2-59），可得域内点的应力计算式为：

$$\sigma_{ij}=\int_\Gamma D_{kij}t_k d\Gamma-\int_\Gamma S_{kij}u_k d\Gamma \tag{2-60}$$

式中，
$$D_{kij}=\frac{1}{r^\alpha}\{(1-2\nu)[\delta_{ki}r_{,j}+\delta_{kj}r_{,i}-\delta_{ij}r_{,k}]+\beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}\}\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)} \tag{2-61}$$

$$\begin{aligned}S_{kij}=\frac{2G}{r^\beta}\Big\{&\beta\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k}+\nu(\delta_{ik}r_{,j}+\delta_{jk}r_{,i})\\&-\theta r_{,i}r_{,j}r_{,k}+\beta\nu(n_i r_{,j}r_{,k}+n_j r_{,i}r_{,k})\\&+(1-2\nu)(\beta n_k r_{,i}r_{,j}+n_j\delta_{ik}+n_i\delta_{jk})\\&-(1-4\nu)n_k\delta_{ij}\Big\}\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)}\end{aligned} \tag{2-62}$$

上式中，对二维问题：$\alpha=1$，$\beta=2$，$\theta=4$；对三维问题：$\alpha=2$，$\beta=3$，$\theta=5$。

值得指出的是，当源点与观察点不重合时，可以利用一般的高斯积分得出其积分值，而当两点重合时，$r\to0$，$\ln\frac{1}{r}$具有奇异性，若直接利用高斯积分计算，势必造成较大的积分误差。为了保证积分的精度，必须采取特殊的处理方法，这里仅以奇异点为1（如图2-3）时的情形进行说明，其它可依此类推得到。

对式（2-35）的插值函数进行如下的坐标变换：

$$\xi=1-2\eta$$

反过来则有：

$$\eta=\frac{1-\xi}{2}$$

由ξ的变化区间（-1，1），可以推得η的变化区间为（0，1）。由变换

$$\ln\frac{1}{r}=\ln\frac{\eta}{r}+\ln\frac{1}{\eta}$$

可以看出，原来的奇异积分可以划为两项积分来计算，即：

$$\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}\Gamma=\int_{0}^{1}\ln\frac{1}{\eta}\mathrm{d}\eta+\int_{0}^{1}\ln\frac{\eta}{r}\mathrm{d}\eta$$

注意到上式中的第一个积分可以直接进行高斯积分，而第二个积分，当$\eta\to0$时，又消除了同阶的奇异性，因而大大提高了积分的精度。

§2-4 弹性动力学问题的边界元法

弹性动力学问题是本书的一个重点内容。动力问题的边界元法是边界元法应用于与时间有关的问题的一个典型例子。通常这些方法包括两大类：一类是积分变换法；另一类是时域基本解方法。本书在解决动力问题时，避开这两类方法的不足，提出了特解边界元法解决动力问题的方法。为了便于比较，本节概要介绍这两类方法。

1.基本方程

设均匀各向同性弹性体的体积为Ω，边界为Γ。在小变形和材料服从虎克定律的情况下，以位移$u_i(X,\ t)$表示的弹性动力学方程为：

$$(C_1^2-C_2^2)u_{i,ij}+C_2^2u_{j,ii}+\frac{b_j}{\rho}=\ddot{u}_j \qquad (2\text{-}63)$$

式中，
$$C_1=\sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}} \qquad C_2=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (2\text{-}64)$$

分别为膨胀波和畸变波的传播速度；λ和G是拉梅常数；ρ为弹性体质量密度。

弹性动力学问题的边界条件是

$$u_i=\bar{u}_i(X,\ \tau),\ X\in\Gamma_1,\ \tau>0 \qquad (2\text{-}65)$$
$$t_i=t_i(X,\ \tau),\ X\in\Gamma_2,\ \tau>0$$

初始条件为：

$$u_i(X,\ 0^+)=\bar{u}_{i0}(X) \qquad (2\text{-}66)$$
$$\dot{u}_i(X,\ 0^+)=v_{i0}(X)$$

由虎克定律得应力公式为：

$$\sigma_{ij}=\rho[(C_1^2-C_2^2)u_{k,k}\delta_{ij}+C_2^2(u_{i,j}+u_{j,i})] \qquad (2\text{-}67)$$

2.拉氏积分变换法

对弹性动力学的瞬态问题可以用拉氏积分变换，把弹性动力学基本方程变换到拉氏变换空间。设函数$f(\tau)$符合拉氏变换的存在条件，$f(\tau)$的拉氏变换定义为：

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau \qquad (2\text{-}68)$$

式中，s为复数。

对方程 (2-63) 作拉氏变换，并考虑初始条件 (2-66) 得：

$$(C_1^2-C_2^2)U_{i,ij}+C_2^2U_{j,ii}-s^2U_j=-\frac{x_j}{\rho} \qquad (2\text{-}69)$$

式中，
$$x_j=\rho(B_j+v_{j0}+s\bar{u}_{j0}) \qquad (2\text{-}70)$$

U_i和B_i分别是u_i和b_i的拉氏变换。对边界条件 (2-65) 也作拉氏变换得：

$$U_i(X,\ s)=\bar{U}_i(X,\ s),\ X\in\Gamma_1$$

$$T_i(X,\ s)=\bar{T}_i(X,\ s),\ X\in\Gamma_2 \tag{2-71}$$

方程（2-69）和边界条件（2-71）是在拉氏变换空间的定解方程。可据此建立拉氏变换格式的边界积分方程。

拉氏变换空间弹性动力学方程（2-69）的基本解为：

$$U^*_{ij}=\frac{1}{2\pi\rho C_2^2}(\psi\delta_{ij}-\chi r_{,i}r_{,j}) \tag{2-72}$$

（二维时$\alpha=2$；三维时$\alpha=4$）。

对于二维弹性动力学问题：

$$\psi=K_0\left(\frac{sr}{C_2}\right)+\frac{C^2}{sr}\left[K_1\left(\frac{sr}{C_2}\right)-\frac{C_2}{C_1}K_1\left(\frac{sr}{C_1}\right)\right]$$

$$\chi=K_2\left(\frac{sr}{C_2}\right)-\frac{C_2^2}{C_1^2}K_2\left(\frac{sr}{C_1}\right) \tag{2-73}$$

式中，K_0、K_1和K_2分别为零阶、一阶和二阶第三类修正的Bessel函数。

对于三维弹性动力学问题：

$$\psi=\frac{e^{-\frac{sr}{C_2}}}{r}+\left(\frac{C_2}{Sr}+\frac{C_2^2}{S^2r^2}\right)\frac{e^{-\frac{sr}{C_2}}}{r}$$

$$-\frac{C_2^2}{C_1^2}\left(\frac{C_1}{sr}+\frac{C_1^2}{S^2r^2}\right)\frac{e^{-\frac{sr}{C_1}}}{r} \tag{2-74}$$

$$\chi=\left(1+\frac{3C_2}{sr}+\frac{3C_2^2}{s^2r^2}\right)\frac{e^{-\frac{sr}{C_2}}}{r}$$

$$-\frac{C_2^2}{C_1^2}\left(1+\frac{3C_1}{sr}+\frac{3C_1^2}{s^2r^2}\right)\frac{e^{-\frac{sr}{C_1}}}{r}$$

利用式（2-67）及有关公式，可求得基本面力张量的分量P_{ij}^*。

有了拉氏变换空间基本方程的基本解，就可以按照 §2-2 所述的加权余量格式建立弹性动力学问题拉氏积分变换法的边界积分方程。即有：

$$\int_{\Omega}\left[(C_1^2-C_2^2)U_{i,ij}+C_2^2U_{j,ii}-s^2U_j+\frac{x_j}{\rho}\right]U_{ij}^*\mathrm{d}\Omega$$

$$=-\int_{\Gamma_2}(\bar{T}_j-T_j)\,U_{ij}^*\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_1}(\bar{U}_j-U_j)P_{ij}^*\mathrm{d}\Gamma \qquad (2\text{-}75)$$

经过两次分部积分，则可得变换后的边界积分方程为：

$$C_{ij}U_i+\int_{\Gamma}U_iP_{ij}^*\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma}T_iU_{ij}^*\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}\frac{x_i}{\rho}U_{ji}^*\,\mathrm{d}\Omega \qquad (2\text{-}76)$$

式中，C_{ij}是与边界几何形状有关的常数，当光滑时，与前述相同，否则请参见文献[2]。

若对方程（2-76）进行离散处理，便可以建立弹性动力学问题拉氏积分变换格式的边界元离散方程。可仿照弹性静力学的处理方法进行，但对其中的奇异积分处理等问题需作专门研究，不可照搬。

值得指出的是，由上述求得的解是拉氏变换空间的解，为了求得原来时域空间的解，必须通过数值拉氏反变换。这是该法中的一个较大的困难，又是一个专门课题，请参阅有关文献[2]。

3.傅氏积分变换法

对弹性动力学的稳态问题可以用傅氏积分变换法。函数$f(\tau)$的傅氏积分变换定义为：

$$F(\omega)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\tau \qquad (2\text{-}77)$$

对方程（2-63）和边界条件（2-65）进行傅氏积分变换，则

得：

$$(C_1^2-C_2^2)U_{i,ij}+C_2^2U_{j,ii}+B_j+\omega^2U_j=0 \tag{2-78}$$

$$\left.\begin{aligned} U_i(X,\ \omega)&=\bar{U}_i(X,\ \omega),\ X\in\Gamma_1 \\ T_i(X,\ \omega)&=\bar{T}_i(X,\ \omega),\ X\in\Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{2-79}$$

式中，U_i和B_i分别是u_i和b_i的傅氏变换

将$s=-i\omega$代入式（2-73）和式（2-74）两式，并利用关系式

$$K_n(-i\omega)=-\frac{1}{2}i\pi(i)^nH_n^{(2)}(\omega) \tag{2-80}$$

其中，$H_n^{(2)}$是第二类$Hankel$函数，可以得到傅氏变换空间内方程（2-78）的基本解，详见文献[1]，这里从略。

有了基本解，利用和前面相同的方法，可以建立傅氏积分变换空间内弹性动力学稳态问题的边界积分方程如下：

$$C_{ij}U_i+\int_\Gamma U_iP_{ij}^*\mathrm{d}\Gamma=\int_\Gamma T_iU_{ij}^*\mathrm{d}\Gamma+\int_\Omega B_iU_{ij}^*\mathrm{d}\Omega \tag{2-81}$$

经过离散处理，并引入边界条件，可得线性方程组，解方程可以得到傅氏积分变换空间内的解。同样，为了得到原空间的解，仍需进行傅氏积分反变换，这里从略。

4.时域基本解法

建立弹性动力学问题的边界积分方程的另一途径是采用与时间相关的基本解，直接根据动力学互等功定理来建立。这里对这种格式作简要介绍。

在弹性动力学方程（2-63）中，当体积力为：

$$b_j=\delta_{ij}\Delta(\tau)\Delta(Q,\ P) \tag{2-82}$$

时的解就是与时间有关的基本解。其中$\Delta(\ )$表示Dirac δ函数。现有文献中已求得此基本解。对于三维弹性动力学问题，其时域基本解为：

$$U_{ij}^{*}(Q,\ \tau;\ P,\ 0)=\frac{1}{4\pi\rho}\left\{\frac{\tau}{r^2}\left(\frac{3r_{,i}r_{,j}}{r^2}-\frac{\delta_{ij}}{r}\right)\right.$$

$$\left[H\left(\tau-\frac{r}{C_1}\right)-H\left(\tau-\frac{r}{C^2}\right)\right]+\frac{r_{,i}r_{,j}}{r}\left[\frac{1}{C_1}\Delta\left(\tau-\frac{r}{C_1}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{C_2}\Delta\left(\tau-\frac{r}{C_2}\right)\right]+\frac{\delta_{ij}}{C_2}\Delta\left(\tau-\frac{r}{C_2}\right)\right\} \tag{2-83}$$

相应的面力公式P_{ij}^{*}可由虎克定律及有关公式求出，这里从略。

式 (2-83) 中的$H(\ )$表示单位阶跃函数，定义为：

$$\int_{C_1^{-1}}^{C_2^{-1}}\lambda\Delta(\tau-\lambda r)\,\mathrm{d}\lambda=\frac{\tau}{r^2}\left[H\left(\tau-\frac{r}{C_1}\right)-H\left(\tau-\frac{r}{C_2}\right)\right]$$

采用时域基本解建立边界积分方程的理论基础是动力学互等功定理，现简述如下。

设有定义于同一规则域Ω中的两个不同的弹性动力学状态g和g'，满足：

$$\begin{aligned}&g=[u,\ \tau]\in\mathscr{E}(b,\ \rho,\ C_1,\ C_2,\ \Omega\times T^{+})\\&g'=[u',\ \tau]\in\mathscr{E}(b',\ \rho,\ C_1,\ C_2,\ \Omega\times T^{+})\end{aligned} \tag{2-84}$$

对应的初始条件分别为：

$$\begin{aligned}&u(X,\ 0)=u_0(X)\qquad \dot{u}(X,\ 0)=v_0(X)\\&u'(X,\ 0)=u_0'(X)\quad \dot{u}'(X,\ 0)=v_0'(X)\end{aligned} \tag{2-85}$$

这里，我们以$T=(-\infty,\ +\infty)$表示时间域，$T^{+}=(0,\ +\infty)$。g和g'两状态的表面力分别记作t和t'，则有如下的关系式成立：

$$\int_{\Gamma}t*u'\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}\rho\{b*u'+v_0u'+u_0u'\}\,\mathrm{d}\Omega$$

$$=\int_{\Gamma} t' * u\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}\rho\{b' * u+v_o' \cdot u+u_o' \cdot u\}\mathrm{d}\Omega \qquad (2\text{-}86)$$

这就是动力学互等功定理。其中＊号表示卷积，定义为：

$$[\phi * \psi](X,\tau)=\begin{cases}\int_0^{\tau}\phi(x,\ \tau-t)\psi(x,\ t)\mathrm{d}t, & \tau>0\\ 0, & \tau<0\end{cases} \qquad (2\text{-}87)$$

由动力学互等功定理和时域基本解建立的边界积分方程为：

$$C_{ik}u_i=\int_{\Gamma}(U_{ik}^{*} * t_i-P_{ik}^{*} * u_i)\mathrm{d}\Gamma+\rho\int_{\Omega}U_{ik}^{*} * b_i\mathrm{d}\Omega$$

$$+\rho\int_{\Omega}(v_{oi}U_{ik}^{*}+u_{oi}\dot{U}_{ik}^{*})\mathrm{d}\Omega \qquad (2\text{-}88)$$

对此方程进行边界元离散积分，可以得到含有时间变量的边界元方程，利用时间步长差分求得每个时段末的动力响应值。

§2-5 断裂力学问题的边界元法

由于边界元法的一些特点，使得边界元法在解决断裂力学问题时十分有利。涉及到的方法有位移边界积分方程法[3]，面力积分方程法[4]，以及分域法[5]等。目前采用较多而且简便的方法是分域法。这里仅就分域法解断裂力学问题作简要介绍。

1.线弹性断裂力学基础

含裂纹结构的强度分析是以裂纹尖端的应力强度因子K作为参量的，它表征了裂纹尖端附近的奇异性应力场的强弱强度。按照裂纹面的相对位移方向划分，裂纹尖端附近的应力场有三种基本型式，即张开型（Ⅰ型）、滑移型（Ⅱ型）和撕裂型（Ⅲ型）对应的应力强度因子分别称为Ⅰ型、Ⅱ型和Ⅲ型应力强度因子，分别记作K_{I}、K_{II}和K_{III}。对于Ⅰ型和Ⅱ型裂纹，其裂缝尖端附近

的应力场和位移场分别为：

对于Ⅰ型裂纹：

$$\sigma_{11}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\sigma_{22}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (2\text{-}89)$$

$$\sigma_{12}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

$$u_1=\frac{K_{\mathrm{I}}}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\kappa-1)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$u_2=\frac{K_{\mathrm{I}}}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\kappa-1)\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (2\text{-}90)$$

对于Ⅱ型裂纹：

$$\sigma_{11}=-\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left[2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\sigma_{22}=\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \qquad (2\text{-}91)$$

$$\sigma_{12}=\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$u_1=\frac{K_{\mathrm{II}}}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\kappa+3)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$u_2=-\frac{K_{\mathrm{II}}}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\kappa-3)\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (2\text{-}92)$$

式中，r、θ为缝端极坐标；

$$\kappa=\begin{cases}3-4 & \text{平面应变问题}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{平面应力问题}\end{cases}$$

由此可以看出，裂纹尖端应力场具有$r^{-1/2}$阶奇异性，而位移则随$\sqrt{r}$而变。应力强度因子K与物体和裂纹的几何尺寸以及外加载荷有关，它需对具体的裂纹体问题用线性弹性理论求解得到。然而遗憾的是，直接求解裂纹问题的解析解十分困难，实际上往往借助于数值方法。这里仅介绍边界元分域法。

2.分域法分析裂纹问题

分域法是直接利用一般边界元分析方法，对裂纹体分域求解而得到裂纹尖端附近的应力场或位移场，进而利用推求应力强度因子的方法求出缝端的应力强度因子。

如图2-6所示的中心裂纹板，由于对称性，可只取其中的1/4，沿边界ABCD离散，作边界元分析，在BF段按自由边界处理，在AB及FC段按对称性条件处理，于是一般边界元法程序就可以用来分析裂纹问题了。

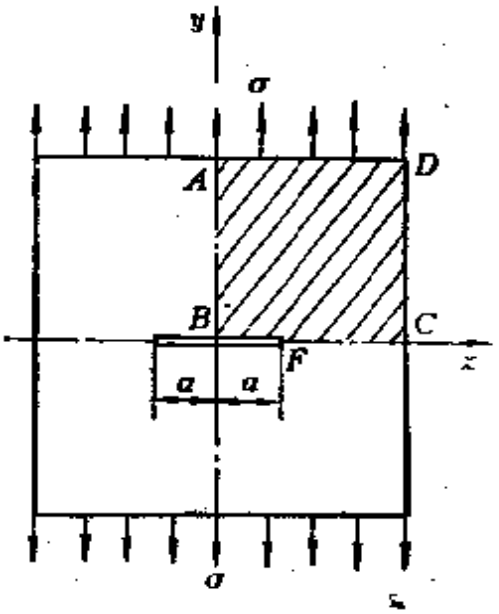


图2-6 中心裂纹

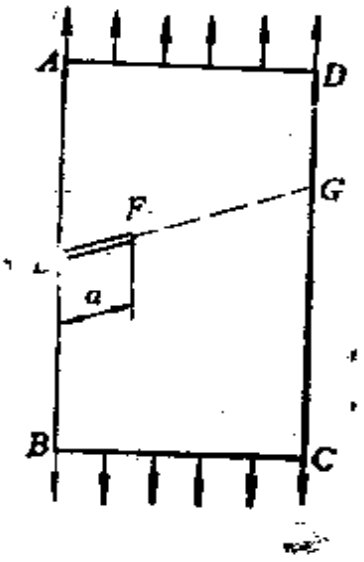


图2-7 斜裂纹

而对于如图2-7所示的斜裂纹问题，对称性条件不存在。此

时，分域法仍可利用。通常沿裂纹EF方向将裂纹板分成两个区域，即AE^+F^+GD和BE^-F^-GC，分别作边界元离散，其中E^+F^+和E^-F^-段均作自由边界处理。对GF段则要利用两个分域在交界面上的位移连续条件和面力平衡条件。这实际上即是边界元区域耦合技术，将在以后有关章节介绍。

值得指出的是，由于裂纹尖端的应力奇异性，在利用边界元法分析时，需对裂纹尖端作一些特殊处理，如采用小单元或奇性单元[6]等方法，以便真实地模拟这种奇异性。

3.应力强度因子的求出

推求应力强度因子的方法很多，这里根据本书涉及的内容介绍应力外推法、位移外推法和奇性单元法三种。

(1) 应力外推法

由式 (2-89) 知：

$$K_{\mathrm{I}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\,\sigma_{22}\Big|_{\theta=0} \tag{2-93}$$

设

$$f(r)=\sqrt{2\pi r}\,\sigma_{22}\Big|_{\theta=0} \tag{2-94}$$

给出缝端$\theta=0$线上若干点的$f(r)\sim r$的关系，将其拟合成曲线，如拟合为直线

$$f(r)=a_1r+b_1 \tag{2-95}$$

则应力强度因子

$$K_{\mathrm{I}}=\lim_{r\to 0}f(r)=b_1 \tag{2-96}$$

便可得到。

(2) 位移外推法

由式 (2-90) 知：

$$K_{\mathrm{II}}=\frac{G}{2(1-\nu)}\lim_{r\to 0}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\,u_2\Big|_{\theta=180^\circ} \tag{2-97}$$

设
$$f(r)=\sqrt{\frac{2\pi}{r}}u_2\Big|_{\theta=180^\circ} \tag{2-98}$$

则在缝面$\theta=180^\circ$的线上，给出若干点的关系$f(r)\sim r$，对其进行拟合，假若拟合为直线

$$f(r)=a_2r+b_2 \tag{2-99}$$

则应力强度因子为：

$$K_1=\frac{G}{2(1-v)}b_2 \tag{2-100}$$

(3) 奇性单元法

如图2-8所示，奇性元是把一般等参单元的中间节点移到近裂纹端点的1/4元长的地方。其转换关系如图2-9所示。所用形函数与一般等参元的形函数相同，即：

$$\begin{aligned}\phi_1&=-\frac{1}{2}\xi(\xi-1)\\ \phi_2&=(1+\xi)(1-\xi)\\ \phi_3&=\frac{1}{2}\xi(\xi+1)\end{aligned} \tag{2-101}$$

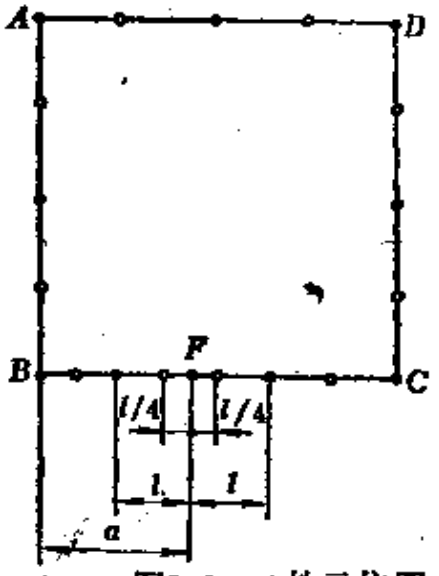


图2-8 奇性元位置

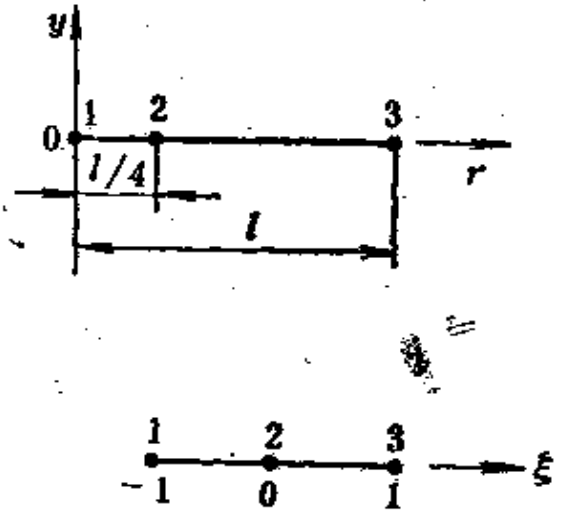


图2-9 奇性单元

于是坐标r为：

$$r=\sum_{i=1}^{3}\phi_i r_i=\frac{l}{4}(1+\xi)^2 \qquad (2\text{-}102)$$

当假定节点1的 y 向位移为零（也可以不这样假定，不影响计算结果）时，则位移的插值为：

$$u_2=\sum_{i=1}^{3}\phi_i u_2^i$$

$$=\left[(1-\xi)u_2^2+\frac{1}{2}\xi u_2^3\right](1+\xi) \qquad (1\text{-}103)$$

式中，u_2^i 表示i节点的y向位移。

可以证明奇性元具有应力$\frac{1}{\sqrt{r}}$阶奇异性。

若令：

$$r=1+\xi \qquad (2\text{-}104)$$

则将式（2-104）代入式（2-102）中，可推得：

$$r=2\sqrt{\frac{r}{l}} \qquad (2\text{-}105)$$

当$\xi\to-1$时，由式（2-103），并略去r的二阶微量，可得：

$$u_2=(4u_2^2-u_2^3)\sqrt{\frac{r}{l}} \qquad (2\text{-}106)$$

另由式（2-90）推得：

$$u_2\Big|_{\theta=180^\circ}=\frac{1-v}{G}\left(\frac{2r}{\pi}\right)^{1/2}K_I+O(r) \qquad (2\text{-}107)$$

由式（2-106）和式（2-107）略去高阶微量后相等，可推得应力强度因子为：

$$K_I=\frac{G\sqrt{\pi}}{(1-\nu)\sqrt{2l}}(4u_2^2-u_2^3) \tag{2-108}$$

对于Ⅱ型和Ⅲ型裂纹的应力强度因子推求方法与Ⅰ型类似。而对于三维裂纹则有所不同，请参见文献[6]。

§2-6 耦 合 法

所谓耦合问题，应当包含两方面的内容，其一是结构与周围介质的耦合，包括结构与流体、结构与地基以及结构、地基、流体三者的耦合等三种情况；其二是各种数值方法的相互耦合，以发挥各种数值方法的优越性，更加有效地解决问题。

关于结构与周围介质的耦合法，将在以后有关章节中介绍，这里不作赘述。而关于各种数值方法的耦合，内容较多，在此不可能一一叙述，典型的耦合法有边界元与边界元的耦合和边界元与有限元的耦合，本书部分章节将给出特解边界元法与其它数值方法的耦合技术，本节只概要介绍边界元与有限元耦合法。

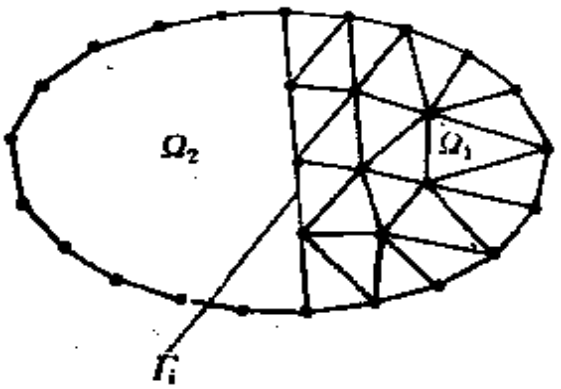


图2-10 边界元与有限元网格

如图2-10，Ω_1部分应用有限元分析，Ω_2 部分应用边界元分析，并设公共边界为Γ_i。

在Ω_1中可得标准有限元矩阵方程组为：

$$[K]\{U\}=\{F\}+\{D\} \tag{2-109}$$

式中，$[K]$为整体刚度矩阵；$\{U\}$为节点位移向量；$\{F\}$为等效的节点力向量；$\{D\}$为与体积力有关的向量。

根据有限元法中均布力化为节点力的方法，可以建立F与节

点面力向量T之间的关系：

$$\{F\}=[M]\{T\} \tag{2-110}$$

式中，$[M]$为以形函数加权边界面力而产生的矩阵，于是方程(2-109)又可写成下述形式：

$$[K]\{U\}=[M]\{T\}+\{D\} \tag{2-111}$$

而在Ω_2中边界元总体方程为：

$$[H]\{U\}=[G]\{T\}+\{B\} \tag{2-112}$$

用$[G]^{-1}$乘式(2-112)，再乘以$[M]$后，可得：

$$[K]\{U\}=\{F'\}+\{D'\} \tag{2-113}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}[K']&=[M][G]^{-1}[H]\\ \{D'\}&=[M][G]^{-1}\{B\}\\ \{F'\}&=[M]\{T\}\end{aligned}\right\} \tag{2-114}$$

另外，在Γ_c边界上两部分存在位移连续和力的平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}\{U_1\}&=\{U_2\}\\ \{T_1\}+\{T_2\}&=0\end{aligned}\right\} \tag{2-115}$$

利用此条件，可以把方程(2-111)和(2-113)联系起来，最终解此集合起来的总体方程，可得各部分的相应值。具体步骤参见文献[1]。

关于边界元与有限元的耦合，存在两种途径：一种是把边界元方程向有限元方程集结；另一种是将有限元方程向边界元方程集结。两种方法各有利弊，在实用上可依据具体情况分析采用。

参考文献

[1] C. A. Brebbia & S. Walker. Boundary Element Techniques in Engineering. Pentech Press, 1980

[2] 杜庆华等. 边界积分方程方法——边界元法. 北京:高等教育出版社,1989

[3] T. A. Cruse. Two- and Three-Dimensional Problems of Fracture Mechanics, Developments in Boundary Elment Methodl (Ed. P. K. Banerjee). Elsevier Applied Science Publishers, 1979

[4] J. Weaver. Three Dimensional Crack Analysis. Int. J. Solids

& Structures, 321-350, Vol.13, 1977

[5] G. E. Blandford et al. Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method. Int. J. Num. Meth. Eng, 387-404, Vol. 17, 1981

[6] 张永元、洪烈君.等参奇性元在双孔边裂纹平板分析中的应用及其计算精度研究.中国航空学会飞机结构断裂力学及其应用讨论会，1984

第三章　位势问题的特解边界元法及其推广

§3-1　概　　述

许多工程实际问题，如温度扩散、流体运动、柱体扭转、电磁场及腐蚀场等问题，都可以归结为位势问题。如果该问题符合Laplace方程，则可利用常规边界元法方便地得以求解。这是最简单的位势问题。然而，实际上许多问题都并非这样简单，而是符合另外一种规律的方程，如Poisson方程，Helmholz 方程等。如果按照常规边界元法求解此类问题，有的需要在域内进行单元剖分，有的所使用的基本解涉及到特殊函数，给数值积分带来困难。因此，这些方法显得不太适应。本章将根据文献[1]的理论给出这些问题的特解边界元法，可避免上述困难。文中结合具体工程问题给出有关理论，而这种理论对其它类型的工程问题亦可参照使用。

本节涉及到Poisson方程、Helmholz方程的特解边界元法。

§3-2　特解边界元法的数学基础[1]

特解边界元法是在一般边界元法方程的基础上，补充相应问题的特解，从而借助于一般边界元法求解这些非齐次方程。这种方法原理简单，使用起来也比较方便。本节介绍特解边界元法的基本原理。

假设某问题满足下列方程：

$$\mathscr{L}(u_i)+b_i=0 \tag{3-1}$$

对应的齐次方程为：

$$\mathscr{L}(u_i)=0 \tag{3-2}$$

式中 $\mathscr{L}$——线性微分算子，对不同的问题具有不同的形式；

u_i——微分方程的特征参量，可以是位移、应力、位势等；

h_i——非齐次项，可以是常数项或函数表达式。

假设已求得满足方程（3-2）的解u_i^c，即有：

$$\mathscr{L}(u_i^c)=0 \tag{3-3}$$

还求得满足方程（3-1）的一个特解u_i^p，即有：

$$\mathscr{L}(u_i^p)+h_i=0 \tag{3-4}$$

根据线性微分方程理论，方程（3-1）的解u可以用下式表示：

$$u_i=u_i^c+u_i^p \tag{3-5}$$

进而有：

$$\delta u_i=\delta u_i^c+\delta u_i^p \tag{3-6}$$

其中，δ所表示的量是与u_i的微分项有关的量，如当u_i表示位移时，δu_i表示面力。

根据第二章介绍的边界元法原理，可以方便地得到方程（3-2）的边界元方程为：

$$[H]\{u^c\}=[G]\{\delta u^c\} \tag{3-7}$$

式中，$[H]$、$[G]$是由齐次方程（3-2）的基本解计算出来的边界节点的影响系数矩阵；$\{u^c\}$、$\{\delta u^c\}$是由u_i^c和δu_i^c组成的向量。

另外，由式（3-5）和式（3-6），不难得到：

$$\begin{aligned}\{u^c\}&=\{u\}-\{u^p\}\\ \{\delta u^c\}&=\{\delta u\}-\{\delta u^p\}\end{aligned} \tag{3-8}$$

将式（3-8）代入方程（3-7），得：

$$[H]\{u\}-[G]\{\delta u\}=\{f^p\} \tag{3-9}$$

式中，$\{f^p\}=[H]\{u^p\}-[G]\{\delta u^p\}$ (3-10)

由于已经求出特解u_i^p，依此便可以求出$\{u^p\}$和$\{\delta u^p\}$，因此

$\{f^p\}$ 已知。若再引入问题的边界条件，方程 (3-9) 可解。解此方程便可得到相应非齐次方程的真实解答。

于是，利用已知的齐次方程的基本解，可求出对应非齐次方程的边界元解答。这就为求解某些难以求得非齐次方程的基本解或所求得的基本解的形式繁杂的问题，开辟了一条可行的途径，被认为是半解析方法的一个新进展[2]。

以上介绍的方法是当非齐次项h_i与特征参量u_i无关的情形。当h_i是特征参量u_i的某种函数时，即有方程：

$$\mathscr{L}(u_i)+f(u_i)=0 \tag{3-11}$$

为了应用方程 (3-2) 的基本解求解方程 (3-11)，需要特殊处理非齐次项。为了求出满足方程：

$$\mathscr{L}(u_i^p)+f(u_i)=0 \tag{3-12}$$

的特解，我们对非齐次项作近似处理，即令特征参量为：

$$u_i(X)=\sum_{m=1}^{\infty} C_{ik}(X,\ \xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{3-13}$$

或写成矩阵形式：

$$\{u\}=[P]\{\phi\} \tag{3-14}$$

其中，ϕ_k为特定参数，C_{ik}是某种已知函数，$[P]$由 C_{ik} 计算得到。

这样，将式 (3-13) 代入方程 (3-12) 后，便可求出特解u_i^p为：

$$u_i^p=\sum_{m=1}^{\infty} D_{ik}(X,\ \xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{3-15}$$

或写成矩阵形式：

$$\{u^p\}=[D]\{\phi\} \tag{3-16}$$

其中，D_{ik}是依赖于C_{ik}的某种函数。

进而可求得δu_i^p为：

$$\delta u_i^p = \sum_{m=1}^{\infty} T_{ik}(X, \xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{3-17}$$

或写成下列矩阵形式：

$$\{\delta u^p\} = [T]\{\phi\} \tag{3-18}$$

将式 (3-16) 、式 (3-18) 代入方程 (3-9) ，得：

$$[H]\{u\} - [G]\{\delta u\} = ([H][D] - [G][T])\{\phi\} \tag{3-19}$$

再由式 (3-14) ，引入上式后可得：

$$([H] - [N])\{u\} = [G]\{\delta u\} \tag{3-20}$$

其中，

$$[N] = ([H][D] - [G][T])[K] \tag{3-21}$$

而式中$[K] = [P]^{-1}$。

将问题的边界条件引入方程 (3-20) 中，解此方程可得到问题的真实解。至于域内点的真实解，可以利用式 (3-5) 和式 (3-6) ，首先计算出u_i^*，然后再求出真实解u_i。

§3-3 定常位势问题的特解边界元法

定常位势问题即是含有非齐次项h_i的Laplace方程，只是这里的h_i仅是坐标的函数，不随时间变化。即有：

$$\nabla^2 u_i + h_i = 0 \tag{3-22}$$

式中，u是位势；h_i仅是空间坐标的函数，不妨假设：

$$h_i = a + bx + cy \tag{3-23}$$

将式 (3-23) 代入方程 (3-22) ，并令特解形式为：

$$u_i^p = Ax^3 + Bx^2 + Cy^3 + Dy^2 \tag{3-24}$$

通过两边系数比较，不难求得：

$$A = \frac{b}{6}, \qquad B = \frac{a}{4}$$

$$C = \frac{c}{6}, \qquad D = \frac{a}{4}$$

于是

$$u_i^f=\frac{1}{6}(bx^3+cy^3)+\frac{a}{4}(x^2+y^2) \tag{3-25}$$

进而求得

$$q_i^f=\frac{\partial u_i^f}{\partial n}=\frac{\partial u_i^f}{\partial x}n_x+\frac{\partial u_i^f}{\partial y}n_y \tag{3-26}$$

其中，

$$\frac{\partial u_i^f}{\partial x}=\frac{1}{2}(bx^2+ax) \tag{3-27}$$

$$\frac{\partial u_i^f}{\partial y}=\frac{1}{2}(cy^2+ay)$$

根据特解边界元法的基本原理，不难建立方程（3-22）的边界元方程为：

$$[H]\{u\}-[G]\{q\}=\{f^p\} \tag{3-28}$$

其中，

$$\{f^p\}=[H]\{u^p\}-[G]\{q^p\} \tag{3-29}$$

特别指出，方程（3-28）中的影响系数矩阵是用Laplace方程的基本解计算得到。这样就避开了第二章介绍的域内积分的繁琐运算。

求解方程（3-28），即可得到方程（3-22）的真实解答。

对于 h_i 为坐标的高次函数的情形，以及三维问题的求解方法，可以仿照上述方法容易求解，这里不再给出具体公式。

§3-4 扁壳无矩内力分析

壳体作为一种复杂的三维结构，其内力计算非常繁杂，除少数特殊情况外，求其解析解十分困难，工程中常常求其数值解。有限元法在求解壳体问题中具有重要的作用，但其工作量较大，使得分析代价很高。本节介绍文献[4]中给出的求解扁壳无矩内力的特解边界元法。

扁壳无矩理论的基本方程用应力函数表示时，可以写作：

$$\nabla_K^2\phi=Z \tag{3-30}$$

其中，
$$\nabla_K^2\phi=K_y\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+K_x\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \tag{3-31}$$

式中，K_x、K_y分别是扁壳x向和y向的曲率；Z是作用在扁壳上的法向荷载，沿外法线方向为正。

对应的边界条件可以简化为：

$$\phi=0,\quad X\in\Gamma \tag{3-32}$$

内力可以用应力函数表示为：

$$N_x=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

$$N_y=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$S=-\frac{\partial\phi}{\partial x\partial y} \tag{3-33}$$

式中，N_x、N_y分别是x向和y向的轴力；S为内错力。

利用满足

$$\nabla_K^2\phi^*+\Delta_i=0 \tag{3-34}$$

的基本解
$$\phi^*=\frac{1}{\sqrt{K_xK_y}}\ \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r_0}\right) \tag{3-35}$$

可以建立齐次方程：

$$\nabla_K^2\phi=0 \tag{3-36}$$

的边界元方程为：

$$[H]\{\phi^c\}=[G]\left\{\frac{\partial\phi^c}{\partial n}\right\} \tag{3-37}$$

在式 (3-35) 中，r_0为：

$$r_0=\left(\frac{x^2}{K_x^2}+\frac{y^2}{K_y^2}\right)^{1/2} \tag{3-38}$$

为了在方程（3-36）的基础上利用特解边界元法求解方程（3-30），需要求出方程（3-30）的一个特解。为此，不妨假设：

$$Z=a+bx+cy \tag{3-39}$$

将其代入方程（3-30），并令特解形式为：

$$\phi^p=Ax^3+Bx^2+Cy^3+Dy^2 \tag{3-40}$$

通过比较系数，不难求得：

$$A=\frac{b}{6K_y},\quad B=\frac{a}{2(K_x+K_y)}$$

$$C=\frac{c}{6K_y},\quad D=\frac{a}{2(K_x+K_y)}$$

于是

$$\phi^p=\frac{1}{6}\left(\frac{b}{K_y}x^3+\frac{c}{K_x}y^3\right)+\frac{a}{2(K_x+K_y)}(x^2+y^2) \tag{3-41}$$

进而

$$\frac{\partial\phi^p}{\partial n}=\left(\frac{bx^2}{2K_y}+\frac{ax}{K_x+K_y}\right)n_x+\left[\frac{cy^2}{2K_x}+\frac{ay}{K_x+K_y}\right]n_y \tag{3-42}$$

根据特解边界元法的基本原理，将

$$\{\phi^c\}=\{\phi\}-\{\phi^p\} \tag{3-43}$$

$$\left\{\frac{\partial\phi^c}{\partial n}\right\}=\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}-\left\{\frac{\partial\phi^p}{\partial n}\right\}$$

代入方程（3-37），可得：

$$[H]\{\phi\}-[G]\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}=\{f^p\} \tag{3-44}$$

式中，
$$\{f^p\}=[H]\{\phi^p\}-[G]\left\{\frac{\partial\phi^p}{\partial n}\right\} \tag{3-45}$$

再引入边界条件（3-32），可得：

$$[G]\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\}=-\{f^p\} \tag{3-46}$$

解此方程可得边界上的$\frac{\partial\phi}{\partial n}$值。进一步可以按照下述方法求域内的内力值。

首先，域内的ϕ值可由边界积分方程求得，即：

$$\phi_i=\phi_i{}^p+\int_\Gamma\phi^*\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\frac{\partial\phi_i{}^p}{\partial n}\right)d\Gamma+\int_\Gamma\frac{\partial\phi^*}{\partial n}\phi_i{}^p d\Gamma \tag{3-47}$$

注意到式（3-33）和（3-43），不难得到：

$$\begin{aligned}N_x&=N_x^c+N_x^p\\N_y&=N_y^c+N_y^p\\S&=S^c+S^p\end{aligned} \tag{3-48}$$

对式（3-47）依照内力的表达式（3-33）进行相应的微分，并利用式（3-48），可得内力表达式为：

$$N_x=N_x{}^p+\int_\Gamma\frac{\partial^2\phi^*}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\frac{\partial\phi_i^f}{\partial n}\right)dr+\int_\Gamma\frac{\partial^3\phi^*}{\partial n\partial y^2}\phi_i^f d\Gamma$$

$$N_y=N_y{}^p+\int_\Gamma\frac{\partial^2\phi^*}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\frac{\partial\phi_i^f}{\partial n}\right)d\Gamma+\int_\Gamma\frac{\partial^3\phi^*}{\partial n\partial x^2}\phi_i^f d\Gamma$$

$$S=S^p-\int_\Gamma\frac{\partial^2\phi^*}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\frac{\partial\phi_i^f}{\partial n}\right)d\Gamma-\int_\Gamma\frac{\partial^3\phi^*}{\partial n\partial x\partial y}\phi_i^f d\Gamma \tag{3-49}$$

式中，

$$N_x^p=\frac{\partial^2\phi^p}{\partial y^2}$$

$$N_y^p=\frac{\partial^2\phi^p}{\partial x^2} \tag{3-50}$$

$$S^p=-\frac{\partial^2\phi^p}{\partial x\partial y}$$

显然，当$K_x=K_y=1$时，本节所介绍的方法即是 §3-3 的问题。这时的扁壳叫等曲率扁壳。

§3-5 可压缩流体动压力计算

理想流体的动水压力满足 Laplace 方程，可直接利用 §2-2 中介绍的方法得以求解。当考虑流体的可压缩性影响之后，流体动压力的控制方程为：

$$\nabla^2 p_i+K^2 p_i=0 \tag{3-51}$$

式中，$K=\omega/C$为波数；ω为激振圆频率；C为水中声传播速度。即是Helmhnlz方程。它可以利用Helmholz方程的基本解

$$p^*=\frac{1}{4i}H_0^{(2)}(Kr) \tag{3-52}$$

满足

$$\nabla^2 p^*+K^2 p^*+\triangle_i=0 \tag{3-53}$$

直接利用一般边界元法来求解。但是注意到基本解式 (3-52) 中包含有复数i和零阶第二类Hankel函数，在计算影响系数的积分时异常繁琐。本节将给出利用Laplace方程的基本解，采用特解边界元法求解这类问题的方法。

如 §3-2所述，如果求得p_i^0，满足：

$$\nabla_i p^0=0 \tag{3-54}$$

和p_i^p，满足：

$$\nabla^2 p_i^p+K^2 p_i=0 \tag{3 55}$$

那么，真实流体动压力可以表示为：

$$p_i = p_i^c + p_i^p \tag{3-56}$$

进而有

$$q_i = \frac{\partial p_i}{\partial n} = q_i^c + q_i^p \tag{3-57}$$

另外，利用Laplace 方程的基本解建立的方程 (3-54) 的边界元方程为：

$$[H]\{p^c\} = [G]\{q^c\} \tag{3-58}$$

将式 (3-56) 和式 (3-57) 引入方程 (3-58)，可得：

$$[H]\{p\} - [G]\{q\} = [H]\{p^p\} - [G]\{q^p\} \tag{3-59}$$

而现在问题的关键是如何求出满足方程 (3-55) 的特解 p_i^p。注意到这时域内 p_i 尚无法知道，这就给求特解带来困难。为了解决这个问题，采用 §3-2所述的方法将域内 p_i 作下述的近似表示：

$$p_i(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{ik}(x, \xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{3-60}$$

式中，i, $k=1$。且取：

$$C_{ik}(x, \xi^m) = (R-r)\delta_{ik} \tag{3-61}$$

这里

$$r = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}$$

而 $R = r_{max}$。

将式 (3-60) 代入方程 (3-55)，并且注意到：

$$\nabla^2 p_i^p = \frac{\partial^2 p_i^p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{3-62}$$

我们可以假设特解具有下列形式：

$$p_i^p(x) = K^2 \sum_{m=1}^{\infty} D_{ik}(x, \xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{3-63}$$

其中$D_{ik}(x,\ \xi^m)$ 假定具有下列形式：

$$D_{ik}(x,\ \xi^m)=(Ar^2+Br^2)\delta_{ik} \tag{3-64}$$

通过比较系数，不难得到：

$$A=\frac{1}{9},\quad B=-\frac{R}{4}$$

于是 $$D_{ik}(x,\ \xi^m)=r^2\left(\frac{1}{9}r-\frac{R}{4}\right)\delta_{ik} \tag{3-65}$$

进而，可求得：

$$q_i^p(x)=K^2\sum_{m=1}^{\infty}T_{ik}(x,\ \xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{3-66}$$

其中，$$T_{ik}(x,\ \xi^m)=\left(\frac{1}{3}r^2-\frac{R}{2}\ r\ \right)r_{,j}n_j\delta_{ik} \tag{3-67}$$

式 (3-63) 和式 (3-66) 又可写成矩阵形式：

$$\{p^p\}=[D]\{\phi\}$$
$$\{q^p\}=[T]\{\phi\} \tag{3-68}$$

将式 (3-68) 代入方程 (3-59)，并且考虑到式 (3-60)，可得：

$$[H]\{p\}-[G]\{q\}=[N]\{p\} \tag{3-69}$$

这里，

$$[N]=([H][D]-[G][T])[K] \tag{3-70}$$

其中，$[K]=[P]^{-1}$，$[P]$由式 (3-61) 计算得到。

引入流体的边界条件于方程 (3-69)，并求解所得方程，可得边界上的p_i值和q_i值。进而可按照下式求解域内的动压力值：

$$p_i=p_i^p+\int_\Gamma p^*(q_i-q_i^p)\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma q^*(p_i-p_i^p)\mathrm{d}\Gamma \tag{3-71}$$

注意这里的P^*和q^*是对应Laplace方程的基本解。

§3-6 热传导问题的特解边界元法

热传导问题是分析受热结构热应力的一个基本问题，它包括定常温度场和非定常温度场两种情形。定常温度场不随时间变化，是一个典型的位势问题，可以利用前述的几种方法予以解决；而对于非定常温度场，由于涉及到时间因素，不能直接利用前述的方法，但我们可以借助特解边界元法的思路来解决这类问题。本节着重阐述非定常温度场的热传导问题。

假设物体是均匀各向同性的，热传导系数 λ 与温度无关，热流量与单位路径的温度差成正比，其热传导微分方程式为：

$$K\nabla^2\varphi+f=\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{3-72}$$

式中，$K=\lambda/c\rho$；

$f=w/c\rho$；

c——比热 (cal/g.°C)；

ρ——物体的密度 (g/cm³)；

w——单位时间单位体积内生成的热量(cal/s·cm³)；

φ——温度 (°C)。

对应的边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(X,\ t)=\bar{\varphi}(X,\ t)\ ,\qquad X\in\Gamma_1\\&\psi(X,\ t)=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\bar{\psi}(X,t),\ X\in\Gamma_2\end{aligned}\right\} \tag{3-73}$$

初始条件为：

$$\varphi(X,\ 0)=\varphi_0(X) \tag{3-74}$$

方程 (3-72) 中，f代表域内的热源，当考虑f时可利用前述方法求解，这里为简明起见，暂且不考虑f，即有$f=0$。于是方程 (3-72) 变为：

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\ \frac{1}{K} \tag{3-75}$$

对应的齐次方程设为：

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{3-76}$$

为了利用满足方程

$$\nabla^2\varphi^*+\Delta_i=0 \tag{3-77}$$

的基本解，并采用特解边界元法求解问题，我们假定已求得φ^c和φ^p，分别满足：

$$\nabla^2\varphi^c=0 \tag{3-78}$$

$$\nabla^2\varphi^p=\frac{1}{K}\dot{\varphi} \tag{3-79}$$

这里φ上面的“·”表示φ对时间t的导数。

那么，方程（3-75）的真实解可以表示为：

$$\varphi=\varphi^c+\varphi^p \tag{3-80}$$

若记$\psi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，进而有

$$\psi=\psi^c+\psi^p \tag{3-81}$$

将式（3-80）和式（3-81）引入由方程（3-78）形成的边界元方程，整理后得到：

$$[H]\{\varphi\}-[G]\{\psi\}=[H]\{\varphi^p\}-[G]\{\psi^p\} \tag{3-82}$$

而问题的关键仍在于求出满足方程（3-79）的特解φ^p。由于$\dot{\varphi}$预先无法知道，我们将其作如下表示：

$$\dot{\varphi}=\sum_{m=1}^{\infty}C(x,\ \xi^m)\dot{a}(\xi^m) \tag{3-83}$$

其中，

$$C(x,\ \xi^m)=R-r \tag{3-84}$$

这里r和R意义同 §3-5。

将式（3-83）代入方程（3-79），采用与 §3-5类似的方法，不难求得：

$$\varphi^p=\frac{1}{K}\sum_{m=1}^{\infty}D(x,\ \xi^m)\alpha(\xi^m) \tag{3-85}$$

式中，
$$D(x,\xi^m)=r^2\left(\frac{1}{9}r-\frac{R}{4}\right) \tag{3-86}$$

进而有：

$$\psi^p=\frac{1}{K}\sum_{m=1}^{\infty}T(x,\ \xi^m)\alpha(\xi^m) \tag{3-87}$$

式中，
$$T(x,\ \xi^m)=r\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{2}R\right)r,_j n_j \tag{3-88}$$

将式 (3-85) 和式 (3-87)，以及式 (3-83) 引入方程 (3-82) 中，得到：

$$[H]\{\varphi\}-[G]\{\psi\}=[N]\{\dot{p}\} \tag{3-89}$$

这里

$$[N]=([H][D]-[G][T])\cdot[K] \tag{3-90}$$

其中，$[K]=[P]^{-1}$，$[D]$、$[T]$、$[P]$ 分别由式 (3-86) 式 (3-88) 和式 (3-84) 计算得到。

为了从数值角度求解方程 (3-89)，我们引入时间差分格式：

$$\dot{\varphi}=\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t} \tag{3-91}$$

将其代入式 (3-89) 中，得：

$$[H]\left\{\varphi(t+\Delta t)\right\}-[G]\left\{\psi(t+\Delta t)\right\}$$

$$=[N]\frac{\left\{\varphi(t+\Delta t)\right\}-\left\{\varphi(t)\right\}}{\Delta t} \tag{3-92}$$

再利用边界条件 (3-73) 和初始条件 (3-74)，将上一时段的终

了值，作为下一时段的初始值，即可计算出每个时段末的边界物理量。在每一时段末，仿照式（3-71），可以求出相应时刻的域内温度值。

另外，对于波动方程

$$\nabla^2 u=\ddot{u} \tag{3-93}$$

也可以采取与热传导方程类似的方法给出其特解边界元法，本书中不再给出有关公式。

§3-7 计 算 举 例

例1：四边简支等曲率扁壳，几何尺寸$6\times6m^2$，利用线性边界单元，采用 §3-4的方法进行计算。计算结果列于表3-1中，其中

$$N_x=-q_0R_xK_1$$
$$N_y=-q_0R_x(1-K_1)$$
$$S=q_0\sqrt{R_xR_y}\,K_s$$

式中，q_0为作用在扁壳上的法向荷载；R_x、R_y分别是扁壳在x向和y向的曲率半径；K_1和K_s为计算的内力系数。

表3-1 内力计算系数表

x	y	K_1		K_3	
		本文	文献[3]	本文	文献[3]
1.5	1.5	0.490	0.500	0.270	0.280
	3.0	0.998	1.000	0.482	0.486
3.0	1.5	0.631	0.636	0.001	0.000
	3.0	0.996	1.000	0.001	0.000

由表3-1中可以看出，本文方法具有较高的计算精度。

例2：直立刚性坝面重力坝，高为H，利用特解边界元法计算在不同干扰频率ω水平激振时的无因次动水压力幅$|p|$，其结果示于图3-1中，这里$\omega_1=\frac{\pi c}{2H}$是库水的共振频率。

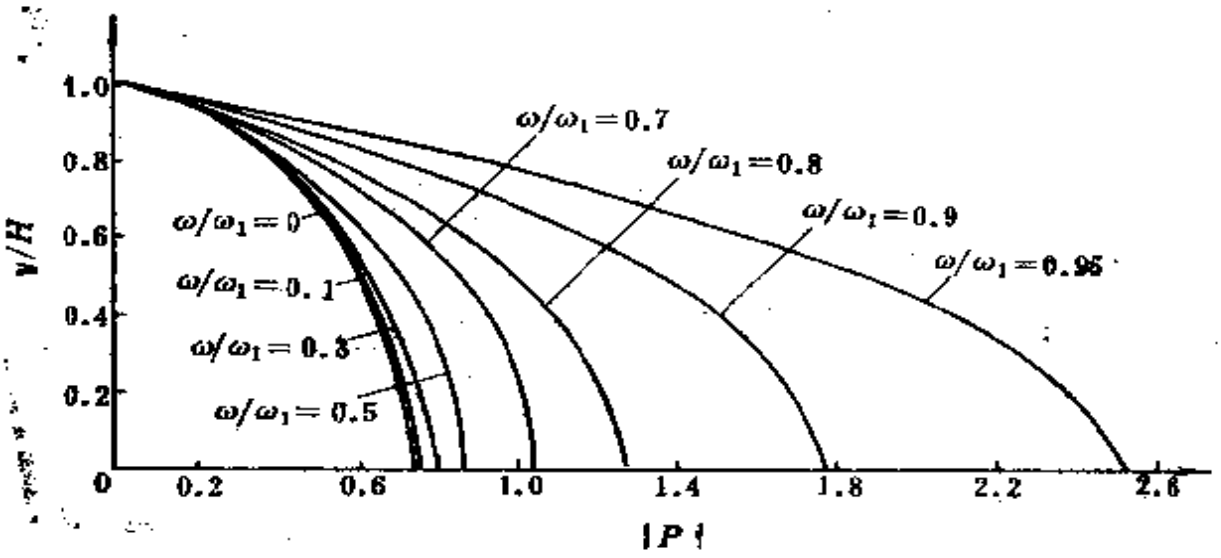


图3-1 计算动水压力幅

参 考 文 献

[1] 李庆斌、周鸿钧、林皋. 特解边界元法及其在若干问题中的应用. 郑州工学院学报，1990年第1期

[2] 曹志远. 半解析方法的新进展及其在岩石工程中的应用. 《岩石力学数值方法的工程应用》. 第二届全国岩石力学数值计算与模型实验学术研讨会论文集，上海：1990.11

[3] 徐芝纶. 弹性力学（下册）. 北京：高等教育出版社，1983

[4] 李庆斌、王本瑞. 扁壳无矩内力计算的位势边界元法. 郑州工学院学报，1989年第2期

[5] C. A. Brebbia & S. Walker. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Pentech Press, 1980

[6] 居荣初、曾心传. 弹性结构与液体的耦联振动理论. 北京：地震出版社，1981

第四章　弹性力学问题的特解边界元法

§4-1　概　　述

在第二章中，曾经介绍过用常规边界元法求解弹性力学问题，并介绍了用域内剖分单元的方法计算体力的影响。在工程实际中，体力是一种极为常见的荷载，如自重、旋转体的惯性力、温度荷载等，因此寻找计算体力荷载的有效方法有着十分重要的意义。域内剖分单元法，虽然不赘加域内未知数，但由此带来的工作量是十分繁重的，特别对于三维问题或大区域非规则区域更甚。目前，处理体力问题的方法较多，但目标只有一个，那就是避开域内的直接积分[1]，计有齐次方程法、域内积分转化为边界积分法和半解析半离散法等。在实际应用时，可以依据具体问题的特点，采用较为有效的方法。

本章主要阐述用特解边界元法求解含有体力的弹性静力学问题和热弹性问题。其思路类似于齐次方程法。

§4-2　含体力弹性力学问题的特解边界元法

对于各向同性的均匀弹性体，当含有体力时，其控制方程为：

$$\sigma_{ij,j}+B_i=0 \tag{4-1}$$

式中，B_i为体力项，可以是某种函数式。

同时应力还应满足相容方程：

$$\sigma_{ij,j}+\frac{1}{1-\upsilon}B_{i,i}=0 \tag{4-2}$$

注意式（4-2）中，i，$j=1$，2。这是对二维平面应变问题才成立。对于三维情形，则可参考有关资料[2]。本节只涉及二维问题。

方程（4-1）对应的齐次方程为：

$$\sigma_{ij,j}=0 \tag{4-3}$$

如果已经求得σ^c_{ij}和σ^p_{ij}，分别满足：

$$\sigma^c_{ij,j}=0 \tag{4-4}$$

$$\sigma^p_{ij,j}+B_i=0 \tag{4-5}$$

那么，方程（4-1）的真实解可以表示为：

$$\sigma_{ij}=\sigma^c_{ij}+\sigma^p_{ij} \tag{4-6}$$

进而有

$$t_i=t^c_i+t^p_i \tag{4-7}$$

且通过物理方程和几何方程可知：

$$u_i=u^c_i+u^p_i \tag{4-8}$$

利用满足方程：

$$\sigma_{ij,j}+\triangle_i=0 \tag{4-9}$$

的基本解σ^*_{ij}（Kelvin基本解），建立起方程（4-4）的边界元方程为：

$$[H]\{u^c\}=[G]\{t^c\} \tag{4-10}$$

将式（4-7）、式（4-8）引入方程(4-10)，可得：

$$[H]\{u\}-[G]\{t\}=\{f^p\} \tag{4-11}$$

式中，

$$\{f^p\}=[H]\{u^p\}-[G]\{t^c\} \tag{4-12}$$

再引入具体问题的边界条件，可以得到形如

$$[A]\{x\}=\{F\} \tag{4-13}$$

的线性方程组。解此方程即得到物体边界上所有节点的真实位移和真实面力。进而可以利用下式求出域内点的真实位移和真实应力：

$$u_i=u_i^p+\int_\Gamma (t_k-t_k^p)U_{ik}^*d\Gamma-\int_\Gamma (u_K-u_K^p)P_{iK}^*d\Gamma \tag{4-13}$$

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^p+\int_\Gamma D_{kij}(t_k-t_k^p)\ d\Gamma-\int_\Gamma S_{kij}(u_k-u_k^p)d\Gamma \tag{4-14}$$

式中，U_{iK}^*和P_{iK}*量与满足式（4-9）的基本解相应的位移和面力基本解，见式（2-52）；D_{kij}和S_{kij}分别见式（2-61）和式（2-62）。

而问题的关键是如何求出满足方程（4-5）的特解σ_{ij}^p。下面给出求此特解的方法。

不妨假设体力B_i为坐标的线性函数，即：

$$\left.\begin{aligned}B_1&=a_0+a_1x+a_2y\\B_2&=b_0+b_1x+b_2y\end{aligned}\right\} \tag{4-15}$$

式中，a_i，b_i为常数。

将式（4-15）代入方程（4-5），根据微分方程的阶次，可以假设特解具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}^p&=A_1x^2+F_1x+C_1y^2+D_1y\\\sigma_{22}^p&=A_2x^2+F_2x+C_2y^2+D_2y\\\sigma_{12}^p&=A_3x^2+F_3x+C_3y^2+D_3y\end{aligned}\right\} \tag{4-16}$$

式中，A_i、F_i、C_i、D_i为待定常数。

将方程（4-5）按分量展开，并引入式（4-15）和式（4-16）式，通过比较系数，可以得到：

$$A_1=-\frac{a_1}{2},\quad A_3=-\frac{b_1}{2}$$

$$F_1=-a_0,\quad F_3=0$$

$$C_2=-\frac{b_2}{2},\quad C_3=-\frac{a_2}{2}$$

$$D_2=-b_0,\quad D_3=0$$

再把式 (4-15) 、式 (4-16) 引入相容方程 (4-2) ，并通过比较系数，可得：

$$A_2=-\frac{v}{1-v}\frac{a_1}{2}$$

$$C_1=-\frac{v}{1-v}\frac{b_2}{2}$$

再根据无限体中B_1和B_2作用的互换性，不难看出：

$$F_2=-\frac{v}{1-v}a_0$$

$$D_1=-\frac{v}{1-v}b_0$$

于是求得：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}^{p}&=\phi_1+\frac{v}{1-v}\phi_2\\ \sigma_{12}^{p}&=\frac{v}{1-v}\phi_1+\phi_2\\ \sigma_{12}^{p}&=\phi_3+\phi_4\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}17)$$

式中，

$$\phi_1=-\left(a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2\right)$$

$$\phi_2=-\left(b_0y+\frac{1}{2}b_2y^2\right)$$

$$\phi_3=-\frac{1}{2}a_2y^2$$

$$\phi_2=-\frac{1}{2}b_1x^2$$

进而，通过关系式：

$$t_i^p=\sigma_{ij}^p n_j \tag{4-18}$$

求出对应的面力t_i^p。

进一步地，通过物理方程和几何方程，并取对位移的积分常数为零（因为是一个特解），可以求得位移u_i^p为：

$$u_i^p=\frac{1-2v}{2G(1-v)}f_i+\frac{1}{G}P_i \tag{4-19}$$

式中

$$f_1=-\frac{1}{2}x^2\left(a_0-\frac{1}{3}a_1x\right)$$

$$f_2=-\frac{1}{2}y^2\left(b_0-\frac{1}{3}b_2y\right)$$

$$P_1=-\frac{1}{6}a_2y^3$$

$$P_2=-\frac{1}{6}b_1x^3$$

注意：这里与文献[3]所取的特解一致。也可采用别的形式的特解，不会影响计算结果。

对于B_i为高次分布的情形，以及三维情形，都可以采取类似的方法得以解决。由于推导过程繁琐，不再赘述。这里仅给出三维情形下的一个特解如下。

假定体力为：

$$\left.\begin{aligned}B_1&=a_0+a_1x+a_2y+a_3z\\B_2&=b_0+b_1x+b_2y+b_3z\\B_3&=c_0+c_1x+c_2y+c_3z\end{aligned}\right\} \tag{4-20}$$

求得特解为：

$$
\begin{cases}
\sigma_{11}^{p}=-a_0x-\dfrac{a_1}{2}x^2-\dfrac{v}{2(1-v)}\left(\dfrac{b_2}{2}y^2+\dfrac{c_3}{2}z^2\right)\\
\sigma_{22}^{p}=-b_0y-\dfrac{b_2}{2}y^2-\dfrac{v}{2(1-v)}\left(\dfrac{c_3}{2}z^2+\dfrac{a_1}{2}x^2\right)\\
\sigma_{33}^{p}=-c_0z-\dfrac{c_3}{2}z^2-\dfrac{v}{2(1-v)}\left(\dfrac{a_1}{2}x^2+\dfrac{b_2}{2}y^2\right)\\
\sigma_{12}^{p}=-\dfrac{b_1}{2}x^2-\dfrac{a_2}{2}y^2\\
\sigma_{23}^{p}=-\dfrac{c_2}{2}y^2-\dfrac{b_3}{2}z^2\\
\sigma_{13}^{p}=-\dfrac{a_3}{2}z^2-\dfrac{c_1}{2}x^2
\end{cases}
\tag{4-21}
$$

$$
\begin{cases}
u_1^{p}=-\dfrac{a_0}{2(\lambda+2G)}x^2-\dfrac{a_1}{6(\lambda+2G)}x^3-\dfrac{a_2}{6G}y^3-\dfrac{a_3}{6G}z^3\\
u_2^{p}=-\dfrac{b_0}{2(\lambda+2G)}y^2-\dfrac{b_2}{6(\lambda+2G)}y^3-\dfrac{b_3}{6G}z^3-\dfrac{a_3}{6G}x^3\\
u_3^{p}=-\dfrac{c_0}{2(\lambda+2G)}z^2-\dfrac{c_3}{6(\lambda+2G)}z^3-\dfrac{c_1}{6G}x^3-\dfrac{c_2}{6G}y^3
\end{cases}
\tag{4-22}
$$

§4-3 热弹性问题的特解边界元法

当弹性体的温度有所改变时，它的每一部分一般都将由于温度的升高或降低而趋于膨胀或收缩。但是，由于弹性体所受的外在约束，以及各个部分之间的相互约束，这种膨胀或收缩并不能自由地发生，于是就产生应力，即所谓变温应力，现在也称为温度应力。温度应力的产生是温度改变的结果，因此须进行两方面的计算，即按照热传导理论计算弹性体内的瞬态温度场，从而求

出弹性体内的变温，以及按照热弹性力学，由变温计算出弹性体内的温度应力。本节只介绍后者的特解边界元法。

命弹性体内各点的变温为T，即后一瞬时的温度减去前一瞬时的温度，以升温时为正，降温时为负。由于变温T，弹性体内各点的微小长度，如果不受约束，将发生正应变αT，其中α是弹性体的线热胀系数，并假定α不随温度的改变而改变。在各向同性体中，系数α不随方向而变，所以这种正应变在所有各个方向都相同，因而也就不伴随任何剪应变。但是，由于弹性体内所受的外在约束以及体内各部分之间的相互约束，上述形变并不能自由发生，于是就产生了应力，即所谓温度应力。这个温度应力又将由于物体的弹性而引起附加的形变，因此，热应力问题的应变是由两部分组成的，即一部分是由温度变化引起的，另一部分是由应力引起的，故应力应变关系为：

$$\varepsilon_{ij}=E^{-1}_{ijkl}\sigma_{kl}+\delta_{ij}\alpha T \tag{4-23}$$

式中，E^{-1}_{ijkl}是弹性张量E_{ijkl}的逆张量。

反过来，应力张量可以写成：

$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \tag{4-24}$$

将式（4-24）代入平衡方程，当不计弹性体的真实体力时，可得出热弹性问题的平衡方程（用位移表示）为：

$$(\lambda+G)u_{j,ji}+Gu_{i,jj}-\frac{\alpha E}{1-2\nu}T,i=0 \tag{4-25}$$

将式（4-24）代入边界条件，并设外载面力为零，则得：

$$\lambda\sigma_{jj}n_i+G(u_{i,j}n_j+u_{j,i}n_j)=\frac{\alpha ET}{1-2\nu}n_i \tag{4-26}$$

显而易见，无外力作用的热弹性问题，相当于在体力

$$B_i=-\frac{\alpha E}{1-2\nu}T,i \tag{4-27}$$

和法向面力

$$\sigma_n=\frac{aET}{1-2\nu} \tag{4-28}$$

作用下的一般弹性力学问题。

对于法向面力σ_n引起的应力，可以按照一般边界元法原理求出，而对于等价体力B_i引起的应力则可按照特解边界元法求解，其原理已在 §4-2中介绍，为了利用上节的有关公式，不妨假定温度的改变满足某种函数关系，对于二维情形：

$$T=ax+by+cx^2+dy^2+exy+f \tag{4-29}$$

对于平面应变问题，可知对应的等价体力为：

$$\left.\begin{aligned} B_1&=(a+2cx+ey)\mu\\ B_2&=(b+2dy+ex)\mu \end{aligned}\right\} \tag{4-30}$$

于是，利用上节的结果，可以求得式 (4-30) 的特解如下：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{11}^p&=\left(\phi_1+\frac{\nu}{1-\nu}\phi_2\right)\mu\\ \sigma_{22}^p&=\left(\frac{\nu}{1-\nu}\phi_1+\phi_2\right)\mu\\ \sigma_{12}^p&=(\phi_3+\phi_4)\mu\\ u_i^p&=\left[\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}f_i+\frac{1}{G}P_i\right]\mu \end{aligned}\right\} \tag{4-31}$$

式中，

$$\mu=-\frac{Ea}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\begin{aligned} \phi_1&=-ax-cx^2\\ \phi_2&=-by-dy^2\\ \phi_3&=-ey^2/2\\ \phi_4&=-ex^2/2\\ f_1&=-ax^2/2-cx^3/3 \end{aligned}$$

$$f_2=-by^2/2-dy^3/3$$
$$P_1=-ey^3/6$$
$$P_2=-ex^3/6$$

对于三维情形，我们假定：

$$T=ax+by+cz+dx^2+ey^2+fz^2+ \\ +gxy+hyz+lxz+r \tag{4-32}$$

从而等价体力为：

$$B_1=(a+2dx+gy+lz)\mu$$
$$B_2=(b+2ey+gx+hz)\mu \tag{4-33}$$
$$B_3=(c+2fz+hy+lx)\mu$$

于是求得特解为：

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{p}=\left[-a_0x-dx^2-\dfrac{\nu}{2(1-\nu)}(ey^2+fz^2)\right]\mu \\ \sigma_{22}^{p}=\left[-by-ey^2-\dfrac{\nu}{2(1-\nu)}(fz^2+dx^2)\right]\mu \\ \sigma_{33}^{p}=\left[-cz-fz^2-\dfrac{\nu}{2(1-\nu)}(dx^2+ey^2)\right]\mu \\ \sigma_{12}^{p}=\left[-\dfrac{g}{2}(x^2+y^2)\right]\mu \\ \sigma_{23}^{p}=\left[-\dfrac{h}{2}(y^2+z^2)\mu\right. \\ \sigma_{13}^{p}=\left[-\dfrac{l}{2}(z^2+x^2)\right]\mu \end{cases} \tag{4-44}$$

$$u_1^{p}=\left[-\frac{a}{2(\lambda+2G)}x^2-\frac{d}{3(\lambda+2G)}x^3-\frac{g}{6G}y^3 \right. \\ \left. -\frac{l}{6G}z^3\right]\mu$$

$$\begin{cases} u_1^f=\left[-\dfrac{b}{2(\lambda+2G)}y^2-\dfrac{e}{3(\lambda+2G)}y^3-\dfrac{h}{6G}z^3\right.\\ \qquad\left.-\dfrac{l}{6G}x^3\right]\mu \\ u_3^f=\left[-\dfrac{c}{2(\lambda+2G)}z^2-\dfrac{f}{3(\lambda+2G)}z^3-\dfrac{l}{6G}x^3\right.\\ \qquad\left.-\dfrac{h}{6G}y^3\right]\mu \end{cases} \tag{4-45}$$

有了特解，即可利用特解边界元法按照 §4-2的方法求出变温应力。

§4-4 计 算 举 例

例1：为了考核用特解边界元法计算自重的精度，对如图4-1所示的单拉板进行了计算，其中容重 $\gamma=24\text{kN/m}^3$，弹模 $E=2.0\times10^4\text{MPa}$，$\nu=0.0$计算结果列于表4-1中，其中 e_{max}为t_x、t_y的最大相对误差，理论值$t_x=0.0$，$t_y=24\text{kN/m}$。可见，当节点达到一定水平时，该法精度较高。

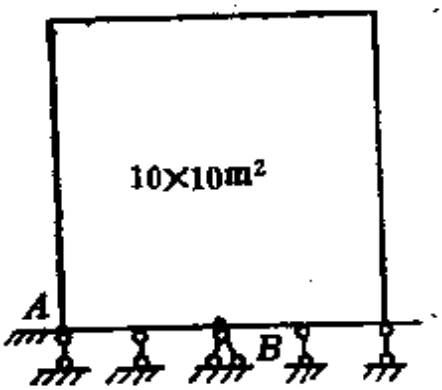


图4-1 单拉板示意图

例2：如图4-2所示的矩形薄板，发生如下变温：

$$T=T_0\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{4-46}$$

式中，T_0为常数。求得的域内应力分布示于表4-2中，可见精度较高。

表4-1 单拉板支反力

点号 / 边界点数 / 反力	A			B		
	t_x	t_y	$\varepsilon_{max}(\%)$	t_x	t_y	$\varepsilon_{max}(\%)$
8	0.000	20.98	−12.6	0.0001	26.17	+9.04
16	0.000	23.01	−4.13	0.0020	24.85	+3.54
32	0.000	24.32	+1.33	0.0004	24.18	+0.75

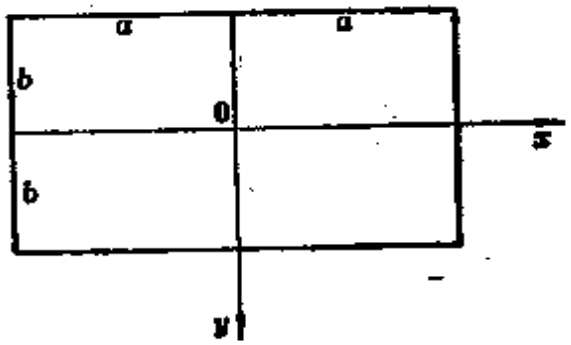


图4-2 矩形薄板示意图

表4-2 温度应力比较 (aET_0)

y	−0.56	0.256	0.0	0.256	0.56
计算值	0.653	−0.078	−0.321	−0.079	−0.654
理论值	+0.667	−0.083	−0.333	−0.083	+0.667

参 考 文 献

[1] 秦荣. 样条边界元法. 南宁：广西科学技术出版社，1988

[2] 徐芝纶. 弹性力学（下册）. 北京：高等教育出版社，1983

[3] 沈家荫、张扬. 边界元法若干问题的探讨. 华东水利学院学报，1985年第2期

[4] 黄炎. 工程弹性力学. 北京：清华大学出版社，1982

[5] 徐芝纶. 弹性力学（上册）. 北京：高等教育出版社，1983

[6] 李庆斌. 特解边界元法及其在重力坝坝踵区界面裂缝静动态断裂分析中的应用. 大连理工大学博士学位论文，1989

第五章　弹性动力问题的特解边界元法

§5-1　概　　述

弹性动力问题是工程中最基本的问题之一。许多在静荷载作用下稳定的结构，在受到动荷载作用时则有可能失去稳定，特别是遇到强烈地震荷载时，其破坏性更为严重，因此研究结构在动荷载作用下的响应特性，对于把握结构的动力性能，采取适宜的抗震措施，具有十分重要的意义。

由于结构本身的复杂性和动力问题本身的困难，在工程中常常借助于数值方法来分析动力问题。有限元法在动力分析中起着不可低估的作用，但由于有限元法需对物体进行单元剖分，有时这种网格要求划到很密的程度，这势必使得总体自由度数庞大，造成计算机求解时的工作量繁重，特别是遇见某些特殊问题，如大区域或无限区域、动裂纹问题等，有限元法显得不太适应，相应地，边界单元法却在这方面做了有效的补充。由于边界元法在区域内使用基本解，因此不需在域内剖分单元，特别对于无限域问题，大大减少总体自由度数，所以深入研究和发展动力边界元法，已成为解决某些特殊问题的必要途径。

到目前为止，动力边界元法可分为两大类：一类是频域法；一类是时域法。频域法首先采用积分变换，在频域内采用相应的基本解求出频域响应值，然后再利用数值积分反变换给出时域响应值，这种变换与反变换工作量较大，使用起来不太方便。时域法是直接在时域内求解响应值，或者采用时间差分格式，或者采用时域基本解等方法，不需要作任何变换，但这两种格式都比较复杂，特别是时域基本解形式复杂，给数值积分带来困难。本章

采用文献[1]、[2]的思路，提出动力分析的特解边界元法，其特点是采用静力基本解建立动力边界元方程，在时域内采用振动仿真方法直接计算时域响应值[3]，使问题简单明了，且具有满意的精度。本法属于时域法的另外一种形式。

§5-2 自振问题的特解边界元法[4] [5]

对于均匀的各向同性的线弹性体，在简谐振动情形下，其控制微分方程为：

$$\mathscr{L}(u_i)+\rho\omega^2 u_i=0 \tag{5-1}$$

式中，
$$\mathscr{L}(u_i)=(\lambda+G)u_{j,\,ij}+Gu_{i,\,jj} \tag{5-2}$$

这里，λ和G为拉梅常数；ρ为质量密度；ω为弹性体的自振圆频率。

自振问题对应的边界条件为：

$$\left.\begin{aligned} t_i&=0, X\in\Gamma_1\\ u_i&=0, X\in\Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

$$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$$

如果已求得u_i^c和u_i^p，分别满足：

$$\mathscr{L}(u^c)=0 \tag{5-4}$$

$$\mathscr{L}(u_i^f)+\rho\omega^2 u_i=0 \tag{5-5}$$

那么，方程（5-1）的真实解可以表示为：

$$u_i=u_i^c+u_i^p \tag{5-6}$$

进而有

$$t_i=t_i^c+t_i^f \tag{5-7}$$

接下来即可利用§2-2所述的方法建立所需要的边界元方程，而问题的关键仍在如何求出满足方程（5-5）的特解上。由于在方程（5-5）中，位移向量u_i预先无法知道，求解u_i^f当然困难。为了使求解成为可能，我们将其用下式表示：

$$u_i(X)=\sum_{m=1}^{\infty} C_{ik}(X,\xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{5-8}$$

式中 ϕ_k——待定参数；

$$C_{ik}(X,\xi^m)=(R-r)\delta_{ik} \tag{5-9}$$

其中，r——源点到考察点的距离，且 $r=[(x_1-\xi_1^m)^2+(x_2-\xi_2^m)^2+(x_3-\xi_3^m)^2]^{1/2}$；

R——所有边界节点中两点之间的最大距离，即 $R=r_{max}$。

当然，$C_{ik}(X,\xi^m)$ 也可以取为别的形式，或取为与其它形式的组合，以提高这种近似的精度。

实际计算中，式 (5-8) 只可能取有限项，即取为总的边界节点的个数，可见，要保证这种近似表示的精度，就要保证边界节点的个数不能少于某个数目。这时，可将式 (5-8) 写成矩阵形式：

$$\{u\}=[P]\{\phi\} \tag{5-10}$$

其中矩阵$[P]$由式 (5-9) 计算得到。当$[P]$可逆时，亦可写成：

$$\{\phi\}=[K]\{u\} \tag{5-11}$$

这里，$[K]=[P]^{-1}$。实际上，由式 (5-9) 计算得到的矩阵 $[P]$ 的可逆性是显而易见的，因为它形成的矩阵是一个主对角线占优的方阵。

将式 (5-8) 代入方程 (5-5)，选择其任意一个特解，这里建议的特解为（推导思路可参考文献[11]）：

$$u_i^p(X)=\rho\omega^2\sum_{m=1}^{\infty} D_{ik}(X,\xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{5-12}$$

式中，
$$D_{ik}(x,\xi^m)=\frac{1}{G}[(C_1r-C_2R)r^2\delta_{ik}-C_3Y_iY_kr] \tag{5-13}$$

式中，$Y_i=x_i-\xi_i^m$

$$C_1=[2(d+3)(1-\nu)-1]/[18(3d-1)(1-\nu)]$$

$$C_2=(1-2\nu)/[2(1+d-2\nu d)]$$

$$C_3=1/[2(1-\nu)(d^2+4d+3)]$$

其中，d 是问题的维数，对于二维情形：$d=2$；三维问题：$d=3$。

式 (5-12) 在计算时又可写成矩阵形式：

$$\{u^p\}=\rho\omega^2[D]\{\phi\} \tag{5-14}$$

其中，$[D]$由式 (5-13) 计算得到。

进而，利用物理方程和几何方程以及边界上面力与应力的关系，可以求得面力t_i^p为：

$$t_i^p(X)=\rho\omega^2\sum_{m=1}^{\infty}T_{ik}(X,\xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{5-15}$$

式中，
$$T_{ik}(X,\xi^m)=(C_4r-C_5R)Y_{,n_k}+(C_6r-2C_7R)Y_{,k}n_i$$
$$+[(C_6r-2C_7R)\delta_{ik}-2C_8Y_{,i}Y_{,k}/r]Y_{,j}n_j \tag{5-16}$$

这里，
$$C_4=[(d+3)\nu-1]/[3(3d-1)(1-\nu)]$$

$$C_5=2\nu/[(1+d)-2\nu d]$$

$$C_6=[(d+2)-(d+3)\nu]/[3(3d-1)(1-\nu)]$$

同样，式 (5-15) 也可以写成矩阵形式：

$$\{t^p\}=\rho\omega^2[T]\{\phi\} \tag{5-17}$$

其中，矩阵$[T]$由式 (5-16) 计算得出。

我们知道，方程 (5-4) 对应的边界元方程为：

$$[H]\{u^c\}=[G]\{t^c\} \tag{5-18}$$

将式 (5-6) 和式 (5-7) 引入方程 (5-18)，得：

$$[H]\{u\}-[G]\{t\}=[H]\{u^p\}-[G]\{t^p\} \tag{5-19}$$

再将式 (5-14) 和式 (5-17) 代入方程 (5-19)，得：

$$[H]\{u\}-[G]\{t\}=([H][D]-[G][T])\{\phi\} \tag{5-20}$$

最后，将式 (5-11) 代入式 (5-20)，可得动力平衡方程的边界元格式：

$$[H]\{u\}-[G]\{t\}=\omega^2[M]\{u\} \tag{5-21}$$

式中，
$$[M]=\rho([H][D]-[G][T])[K] \tag{5-22}$$

为了使方程（5-21）能够求解，还需引入边界条件。为此，将方程（5-21）按照Γ_1和Γ_2写成分块矩阵的形式：

$$\omega^2\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=$$

$$=-\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1\\ t_2\end{Bmatrix} \tag{5-23}$$

边界条件（5-3）写成向量形式为：

$$\left.\begin{aligned}\{t_1\}&=0\\ \{u_2\}&=0\end{aligned}\right\} \tag{5-24}$$

把式（5-24）引入式（5-23），并按照已知和未知值移项整理，得：

$$\omega^2\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ 0\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}H_{11} & -G_{12}\\ H_{21} & -G_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ t_2\end{Bmatrix}=\{0\} \tag{5-25}$$

注意到方程（5-25）中两个特征向量不相同，这样方程便不能求解。为了克服这种现象，将其按照相等的原则改写成下列形式：

$$\omega^2\begin{bmatrix}M_{11} & 0\\ M_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ t_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11} & -G_{12}\\ H_{21} & -G_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ t_2\end{Bmatrix} \tag{5-26}$$

这样就将自由振动问题转化为求解形如

$$[A]\{X\}=\omega^2[\bar{M}]\{X\} \tag{5-27}$$

的特征方程的特征根问题。这里

$$[A]=\begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} \\ H_{21} & -G_{22} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}]=\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{X\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}$$

利用一般的求解特征值的方法求解方程（5-27），就可以得到弹性体自由振动时的各阶频率和相应的振型。

值得指出的是，方程（5-27）中的矩阵$[A]$、$[\bar{M}]$都是非对称的，因此在选择特征值计算方法时应该特别注意这一点。这里简单介绍一下文献[5]中采用的幂法与穷举法相结合的方法。

首先把方程（5-27）化为标准形式：

$$[\bar{A}]\{X\}=\lambda\{X\} \tag{5-28}$$

其中，
$$[\bar{A}]=[A]^{-1}[M]$$
$$\lambda=1/\omega^2$$

然后按下列步骤计算特征值。

（1）选择初始向量$\{X\}$，并作归一化处理，即有：

$$\{X\}=\{X\}/|\vec{X}| \tag{5-29}$$

其中，
$$|\vec{X}|=\sqrt{\{X\}^T\{X\}}$$

（2）作乘法运算，求新的迭代向量$\{y\}$，即：

$$\{Y\}=[\bar{A}]\{X\} \tag{5-30}$$

（3）收敛判别。设：

$\{X\}$ 的分量为x_1，x_2，…，x_n

$\{Y\}$ 的分量为y_1，y_2，…，y_n

作两向量之比：

$$r_1=y_1/x_1$$
$$r_2=y_2/x_2$$

……

$$r_n=y_n/x_n$$

若它的最大比值r_{max}和最小比值r_{min}的差十分小，则可把瑞利商 (*Rayleigh*)

$$r=\frac{\{X\}^T\{Y\}}{\{X\}^T\{X\}} \tag{5-31}$$

作为特征值λ的最好近似值，计算结束。

或者取此次迭代的比值r_i的平均值

$$\lambda''=\frac{1}{n}\ (r_1+r_2+\cdots+r_n) \tag{5-32}$$

与前一次计算出来的比值λ'比较，若：

$$\frac{|\lambda'-\lambda''|}{\lambda}\times 100\%<e \tag{5-33}$$

(e为给定的误差) 则把λ''作为λ的最好近似值，计算结束。

(4) 迭代的控制。若 (3) 的收敛条件不满足，则把 $\{y\}$ 赋予$\{x\}$作为新的迭代向量，重新执行(1)。

(5) 穷举法求下一阶特征值。求得一个特征值后，为了求下一个特征值，将矩阵$[\bar{A}]$变换为只包括余下特征值的矩阵，然后应用前述算法。这种变换即为：

$$新[\bar{A}]=[\bar{A}]-\lambda\{u\}\{u\}^T \tag{5-34}$$

式中，λ是上一阶特征值；$\{u\}$是对应于λ的$[\bar{A}]$的特征向量；$\{\vec{v}\}$是对应于λ的$[\bar{A}]^T$的特征向量，并且已正规化$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$。

按照上述步骤，直到计算出所需要的各阶特征值。

§5-3 瞬态动力反应问题的特解边界元法[6][7]

对于各向同性的均质弹性体，其动力控制微分方程为：

$$\mathscr{L}(u_i)-\rho\ddot{u}_i=0 \tag{5-35}$$

式中，$\mathscr{L}(u_i)=(\lambda+G)u_{j,ij}+Gu_{i,jj}$

其中，λ和G是拉梅常数，u顶上"·"代表对时间求一阶导数。

如果已经求得u_i^0和u_i^f，分别满足：

$$\mathscr{L}(u_i^0)=0 \tag{5-36}$$

$$\mathscr{L}(u_i^f)-\rho\ddot{u}_i=0 \tag{5-37}$$

那么，方程（5-35）的真实解可以表示为：

$$\left.\begin{aligned} u_i&=u_i^0+u_i^f\\ t_i&=t_i^0+t^f \end{aligned}\right\} \tag{5-38}$$

进而有

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_i&=\dot{u}_i^0+\dot{u}_i^f\\ \ddot{u}_i&=\ddot{u}_i^0+\ddot{u}_i^f \end{aligned}\right\} \tag{5-39}$$

然而，问题的关键仍然是如何求出u_i^0来。仿照上节的处理，可将加速度$\ddot{u}_i$作如下近似：

$$\ddot{u}_i(X)=\sum_{m=1}^{\infty}C_{ik}(X,\xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{5-40}$$

式中，ϕ_k为待定参数。

$$C_{ik}(X,\xi^m)=(R-r)\delta_{ik} \tag{5-41}$$

或将式（5-40）写成矩阵形式：

$$\{\ddot{u}\}=[P]\{\phi\} \tag{5-42}$$

也可写成逆形式：

$$\{\phi\}=[K]\{\ddot{u}\} \tag{5-43}$$

这里$[K]=[P]^{-1}$，$[P]$由式（5-41）计算得出。

将式（5-40）代入方程（5-37），可求得其一个特解为：

$$u_i^0(X)=\sum_{m=1}^{\infty}D_{ik}(X,\xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{5-44}$$

其中， $D_{ik}(X,\xi^m)=-\frac{\rho}{G}[(C_1r-C_2R)r^2\delta_{ik}-C_3Y_iY_kr]$

(5-45)

或写成矩阵形式：

$$\{u^p\}=[D]\{\phi\} \tag{5-46}$$

其中，[D]由式（5-45）计算得到。

进而，可求得面力：

$$t_i^p(X)=\sum_{m=1}^{\infty}T_{ik}(X,\xi^m)\phi_k(\xi^m) \tag{5-47}$$

其中，

$$T_{ik}(X,\xi^m)=-\rho\{(C_4r+C_5R)Y_in_k+(C_6r-2C_2R)Y_kn_i +[(C_6r-2C_2R)\delta_{ik}-2C_3Y_iY_k/r]Y_jn_j \tag{5-48}$$

或写成矩阵形式：

$$\{t^p\}=[T]\{\phi\} \tag{5-49}$$

其中，[T]由式（5-48）计算得出。

值得指出的是上述诸式中各符号的意义与上节相同。

将式（5-46）和式（5-49）代入方程（5-36）对应的边界元方程：

$$[H]\{u^p\}=[G]\{t^p\} \tag{5-50}$$

中，可得：

$$[H]\{u\}-[G]\{t\}=([H][D]-[G][T])\{\phi\} \tag{5-51}$$

再将式（5-43）引入，可得特解边界元动力平衡方程为：

$$[M]\{\ddot{u}\}+[H]\{u\}=[G]\{t\} \tag{5-52}$$

式中，

$$[M]=([H][D]+[G][T])[K] \tag{5-53}$$

按照问题的边界条件

$$\left.\begin{aligned} t_i&=\bar{t}_i \quad X\in\Gamma_1\\ u_i&=\bar{u}_i \quad X\in\Gamma_2\end{aligned}\right\} \tag{5-54}$$

$$(\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2)$$

将方程（5-52）写成分块形式：

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \tag{5-55}$$

将式（5-54）引入方程（5-55），并按照列向量相同的原则，得：

$$[\bar{M}]\{\ddot{X}\}+[\bar{H}]\{X\}=\{F\} \tag{5-56}$$

其中，

$$[\bar{M}]=\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{H}]=\begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} \\ H_{21} & -G_{22} \end{bmatrix}$$

$$\{X\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}=\begin{bmatrix} G_{11} & -H_{12} \\ G_{21} & -H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

值得指出的是，在建立方程（5-56）中已假定Γ_2上位移向量$\{u_2\}$不随时间变化，当其变化时，可将其贡献移至右端项中考虑。

利用振动仿真方法求解方程（5-56），可得物体在瞬态荷载作用下的时程反应。通常采用Wilson-θ法或Houblt法计算，下面给出其格式。

1.Wilson-θ法

$$\{u(\tau+\theta\Delta\tau)\}=\left[[\bar{H}]+\frac{6}{(\theta\Delta\tau)^2}[\bar{M}]\right]^{-1}\left[[\bar{M}][2\ddot{u}(\tau)\right.$$

$$+\frac{6}{\theta\Delta\tau}\{\dot{u}(\tau)\}+\frac{6}{(\theta\Delta\tau)^2}\{u(\tau)\}[+\{F(\tau+\theta\Delta\tau)\}]$$

$$\{\ddot{u}(\tau+\theta\Delta\tau)\}=\frac{6}{(\theta\Delta t)^2}\left\{\{u(\tau+\theta\Delta\tau)\}-\{u(\tau)\}\right\}-$$

$$\frac{6}{\theta\Delta\tau}\{\dot{u}(\tau)\}-2\{\ddot{u}(\tau)\}$$

$$\{\ddot{u}(\tau+\Delta\tau)\}=\left(1-\frac{1}{\theta}\right)\{\ddot{u}(\tau)\}+\frac{1}{\theta}\{\ddot{u}(\tau+\theta\Delta\tau)\}$$

$$\{\dot{u}(\tau+\Delta\tau)\}=\{\dot{u}(\tau)\}+\frac{\Delta\tau}{2}\left\{\{\ddot{u}(\tau)\}+\{\ddot{u}(\tau+\Delta\tau)\}\right\}$$

$$\{u(\tau+\Delta\tau)\}=\{u(\tau)\}+\Delta\tau\{\dot{u}(\tau)\}+\frac{(\Delta\tau)^2}{6}\left\{2\{\ddot{u}(\tau)\}\right.$$

$$\left.+\{\ddot{u}(\tau+\Delta\tau)\}\right. \qquad (5\text{-}57)$$

注意：θ 是其插值参数，当 $\theta\geqslant 1.37$时才有意义，通常取 $\theta\geqslant 1.40$。

2.Houblt法

本法不需计算每一时段的速度和加速度值，而是直接给出每个时段的位移值。它是一种无条件稳定格式。本法假定在

$$u(\tau-2\Delta\tau),\ u(\tau-\Delta\tau),\ u(\tau),\ u(\tau+\Delta\tau)$$

的范围内 u值可用三次式近似。在具体计算中，前两个时段的值需要假定，因此，本法在开始几个时段内可能存在误差。具体格式为：

$$\{u(\tau+\Delta\tau)\}=\left[[\bar{M}]+\frac{1}{2}(\Delta\tau)^2[\bar{H}]\right]^{-1}\left\{\frac{1}{2}(\Delta\tau)^2\{F(\tau+\Delta\tau)\}\right.$$

$$+\frac{5}{2}[\bar{M}]\{u(\tau\}-2[\bar{M}]\{u(\tau-\Delta\tau)\}$$

$$\left.+\frac{1}{2}[\bar{M}]\{u(\tau-2\Delta\tau)\}\right\} \qquad (5\text{-}58)$$

对于域内点的值，当边界值求出后在每个时段内采用公式

(4-13) 及式 (4-14) 即可求得。

§5-4 地震动力反应问题的特解边界元法

对于均质的各向同性的线弹性体，在地震荷载作用下，当不考虑基底地震的相位差和波长的影响时，其动力平衡方程为：

$$\mathscr{L}(u_i)-\rho\ddot{u}_i-\rho\ddot{u}_{g\,i}=0 \tag{5-59}$$

其中
$$\mathscr{L}(u_i)=(\lambda+G)u_{j,\,ij}+Gu_{i,\,jj} \tag{5-60}$$

式中，ρ为质量密度；λ、G 为拉梅常数；$\ddot{u}_{g\,i}$为地震时地面运动的牵连加速度。

对应的边界条件为：

$$\left.\begin{aligned} t_i&=0 \quad X\in\Gamma_1\\ u_i&=0 \quad X\in\Gamma_2\\ (\Gamma&=\Gamma_1+\Gamma_2)\end{aligned}\right\} \tag{5-61}$$

如果已经求得u_i^0，u_i^{p1}和u_i^{p2}，分别满足

$$\mathscr{L}(u_i^0)=0 \tag{5-62}$$

$$\mathscr{L}(u_i^{p1})-\rho\ddot{u}_i=0 \tag{5-63}$$

$$\mathscr{L}(u_i^{p2})-\rho\ddot{u}_{g\,i}=0 \tag{5-64}$$

那么，根据线性微分方程理论，方程 (5-59) 的真实解可以表示为：

$$u_i=u_i^0+u_i^{p1}+u_i^{p2} \tag{5-65}$$

进而有：

$$t_i=t_i^0+t_i^{p1}+t_i^{p2} \tag{5-66}$$

而问题的关键是如何求出满足方程式 (5-63) 和式 (5-64) 的两个特解u_i^{p1}和u_i^{p2}来。实际上，方程 (5-63) 就是方程 (5-37)，那里已经求得：

$$\left.\begin{aligned} \{u^{p1}\}&=[D]\{\phi\}\\ \{t^{p1}\}&=[T]\{\phi\}\\ \{\phi\}&=[K]\{\ddot{u}\}\end{aligned}\right\} \tag{5-67}$$

式中，各矩阵见 §5-3。

而对于方程（5-64），当把$\rho\ddot{u}_{gi}$作为体积力考虑时，可以利用 §4-2中处理体积力的方法比较方便地求解出$\{u^{p2}\}$和$\{f^{p2}\}$，只是这里的体积力在随时间变化罢了，即这里的体积力为时间的函数，而在每一时刻则可以利用 §4-2所述的方法将体积力化为面力来处理，这样就可以得到地震惯性力随时间的变化过程了。对于 §4-2中体力 B_i 与本节惯性力的关系，不难求得下列转换关系。

对于二维情形，假设同时作用横向地震$\ddot{u}_{gx}$和竖向地震 $\ddot{u}_{gy}$，则有：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}^{p2}&=\rho\left(\ddot{u}_{gx}x+\frac{\nu}{1-\nu}\ddot{u}_{gy}y\right)\\ \sigma_{22}^{p2}&=\rho\left(\frac{\nu}{1-\nu}\ddot{u}_{gx}x+\ddot{u}_{gy}y\right)\\ \sigma_{12}^{p2}&=0\end{aligned}\right\}\tag{5-68}$$

$$\left.\begin{aligned}u_1^{p2}&=\frac{1-2\nu}{4G(1-\nu)}\rho\ddot{u}_{gx}x^2\\ u_2^{p2}&=\frac{1-2\nu}{4G(1-\nu)}\rho\ddot{u}_{gy}y^2\end{aligned}\right\}\tag{5-69}$$

对于三维情形，假设同时作用着x向地震动 $\ddot{u}_{gx}$ 和 z 向地震动$\ddot{u}_{gz}$，则：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}^{p2}&=\rho\ddot{u}_{gx}x\\ \sigma_{33}^{p2}&=\rho\ddot{u}_{gz}z\\ \sigma_{22}^{p2}&=\sigma_{12}^{p2}=\sigma_{23}^{p2}+\sigma_{13}^{p2}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-70}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1^{p2} &= \frac{\rho}{2(\lambda+2G)}\ddot{u}_{gx}x^2 \\ u^{p2} &= 0 \\ u_3^{p2} &= \frac{\rho}{2(\lambda+2G)}\ddot{u}_{gz}z^2 \end{aligned}\right\} \tag{5-71}$$

把式 (5-65) 和式 (5-66) 引入齐次方程 (5-62) 所对应的边界元方程

$$[H]\{u^c\}=[G]\{t^c\} \tag{5-72}$$

中，可得：

$$[H]\{u\}-[G]\{t\}=([H]\{u^{p1}\}-[G]\{t^{p1}\}) +([H]\{u^{p2}\}-[G]\{t^{p2}\}) \tag{5-73}$$

再将式 (5-67) 代入式 (5-73)，整理得：

$$[M]\{\ddot{u}\}+[H]\{u\}=[G]\{t\}+\{f^p\} \tag{5-74}$$

其中，

$$[M]=([H][D]-[G][T][K]$$

$$\{f^p\}=[H]\{u^{p2}\}-[G]\{t^{p2}\}$$

按照边界条件 (5-61) 将方程 (5-74) 写成分块形式：

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1^p \\ f^p \end{Bmatrix} \tag{5-75}$$

将式 (5-61) 引入方程 (5-75)，并按照列向量相等的原则，可得最终的求解方程为：

$$[\bar{M}]\{\ddot{X}\}+[\bar{H}]\{X\}=\{f^p\} \tag{5-76}$$

其中，

$$[\bar{M}]=\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[H]=\begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} \\ H_{21} & -G_{22} \end{bmatrix}$$

$$\{X\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}$$

利用振动仿真方法求解方程（5-76），可以得到边界物理量的时程反应值，进一步利用下述公式可以求出域内值：

$$u_i=u_i^{f1}+u_i^{f2}+\int_\Gamma (t_k-t_K^{f1}-t_K^{f2})U_{iK}^* d\Gamma$$

$$-\int_\Gamma (u_k-u_K^{f1}-u_K^{f2})P_{iK}^* d\Gamma \qquad (5\text{-}77)$$

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{f1}+\sigma_{ij}^{f2}+\int_\Gamma (t_k-t_K^{f1}-t_K^{f2})D_{kij} d\Gamma$$

$$-\int_\Gamma (u_k-u_K^{f1}-u_K^{f2})S_{kij} d\Gamma \qquad (5\text{-}78)$$

式中，U_{iK}^*，P_{iK}^*，D_{kij}，S_{kij}见第二章 §2-3。

地震反应分析的精度取决于 §5-3中的动力分析的精度和 §4-2中体力分析的精度。

§5-5 数值举例

例1：重力坝自振分析

为了考查特解边界元法在计算自振频率时的收敛性，对图5-1所示的重力坝分别取不同的边界节点数计算其前四阶自振频率。计算中取材料的动弹模 $E_d=3.0\times10^4 MPa$，泊淞比$\nu=0.167$，密度$\rho=2400kg/m^3$。计算结果列于表5-1中，其中 ε_{max}表

示相对于84节点的各阶频率的最大误差。

由表5-1可以看出，随着节点个数的增加，各阶频率趋于稳定值，这就从数值上证明了特解边界元法计算的收敛性。可见，为了保证特解边界元法的收敛性，必须取边界节点足够多，太多时亦不会提高精度十分显著，造成机时增加，太少时又难以保证精度，因此提请使用者应注意到这一点。

另外，为了考查本法的计算精

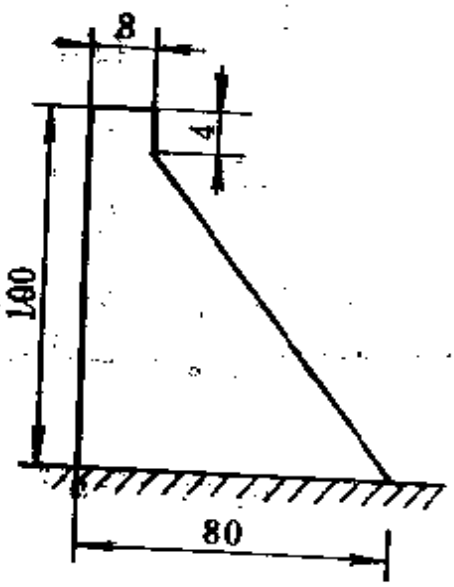


图5-1 重力坝图

表5-1 重力坝的自振圆频率 单位：rad/s

节点数 \ 振型	1	2	3	4	e_{max}(%)
10	26.57	74.77	91.75	154.05	+28.4
16	27.90	58.23	76.83	134.85	−10.6
28	28.81	59.37	80.37	110.48	−10.1
38	28.05	64.00	78.83	119.93	−2.5
50	28.12	65.14	79.32	119.39	−0.1
84	28.16	65.79	79.53	119.55	0.0

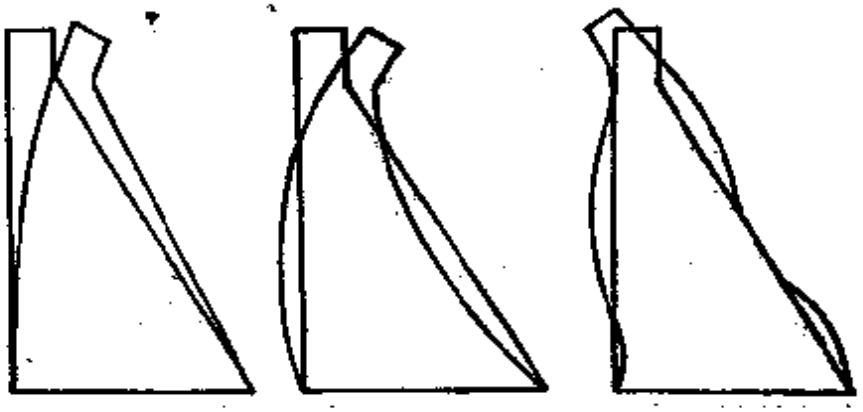
度，还对表5-2列出的三座重力坝进行了计算，并与有限元法的计算结果[8]进行了对比。其结果示于表5-3和图5-2中。可以看出，两者具有较好的一致性。

表5-2 重力坝几何尺寸 单位：m

坝 号	坝 高	顶 宽	底 宽	颈 高
A 坝	40.0	2.0	37.5	1.6
B 坝	76.0	16.0	61.0	6.0
C 坝	284.0	22.0	220.0	18.0

表5-3 重力坝固有圆频率计算结果

坝 号	算 法	振 型		
		1	2	3
A 坝	FEM	133.1	297.2	532.4
	BEM	140.4	289.3	559.0
B 坝	FEM	37.2	80.6	149.6
	BEM	35.1	78.8	140.3
C 坝	FEM	10.8	22.8	38.5
	BEM	9.2	24.4	36.0



a) 第一振型 b) 第二振型 c) 第三振型

图5-2 计算振型图

例2　剪力墙的自振频率计算

为了考查特解边界元法在多连通域中的计算收敛性，对图5-3所示的剪力墙进行了自振计算。计算中取$E=10^2$MPa，$\rho=1000$kg/m^3 $\nu=0.0$。计算结果列于表5-4中，表中的有限元结果引自文献[2]。

由此可见，特解边界元法在多连通域问题中同样具有较好的精度。

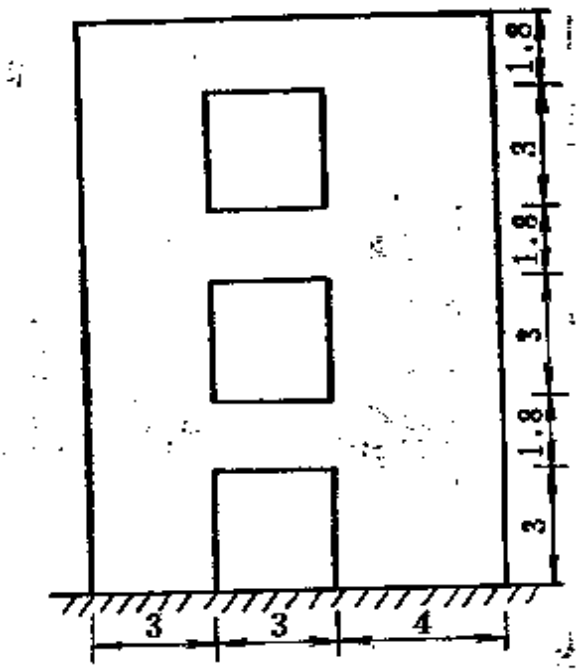


图5-3　剪力墙图（单位：m）

表5-4　剪力墙的自振圆频率　　单位：rad/s

振型 / 方法	1	2	3
BEM	1.985	6.829	7.627
FEM	2.079	7.181	77.644
误差（%）	4.5	4.9	0.4

例3　矩形深梁的位移反应

如图5-4所示的矩形深梁，几何尺寸为2m×4m，底部固端约束，顶部受脉冲剪力作用，材料参数 $E=10^3$MPa，$\nu=0.25$，$\rho=1000$kg/m^3。计算中取32个边界节点，采用的振动仿真的方法是Houblt法，时间步长$\Delta t=0.004$s。计算出的顶部中点 A 的水平位移时程反应曲线示于图5-5中，图中的有限元结果引自文献[10]。

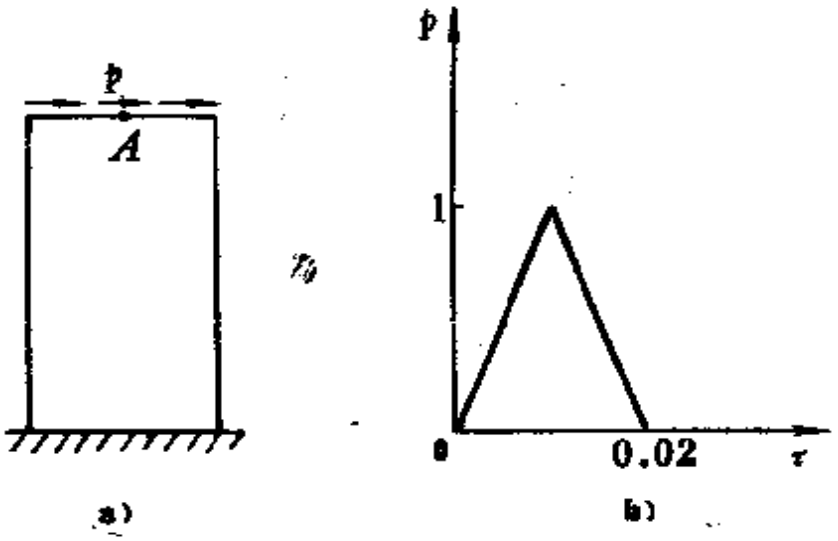


图5-4 矩形深梁图

由此可见，特解边界元法计算出的瞬态位移反应与用有限元法计算结果具有较好的一致性。说明特解边界元法计算瞬态动力反应问题具有较好的精度。

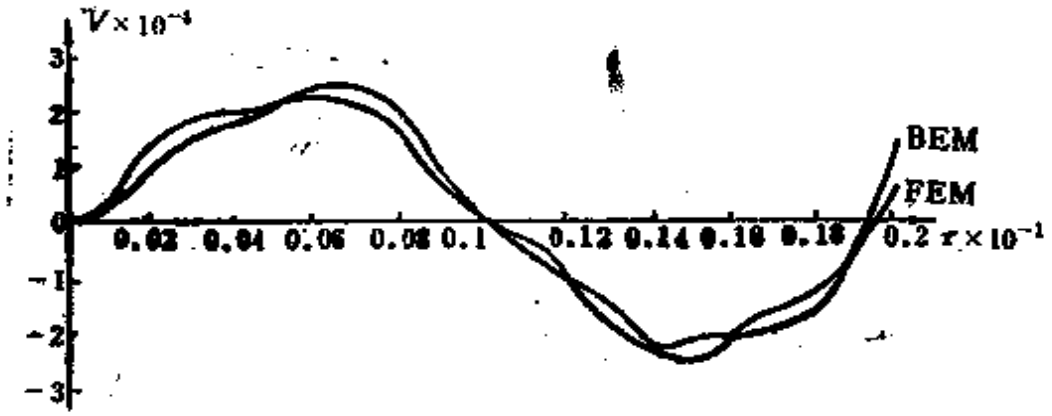


图5-5 矩形深梁位移反应

例4 空心板的面内位移反应

如图5-6所示的空心板，属于多连通域情形，其左侧受均匀的冲击荷载$P(\tau)$的作用，材料参数 $E=10^3$MPa，$\nu=0.2$，$\rho=1000$kg/m^3，用特解边界元法计算顶部中点A的水平位移时程曲线，计算结果示于图5-7。计算中取40个边界节点，时间步长$\Delta\tau=0.01$s，其中的有限元结果引自文献[10]。

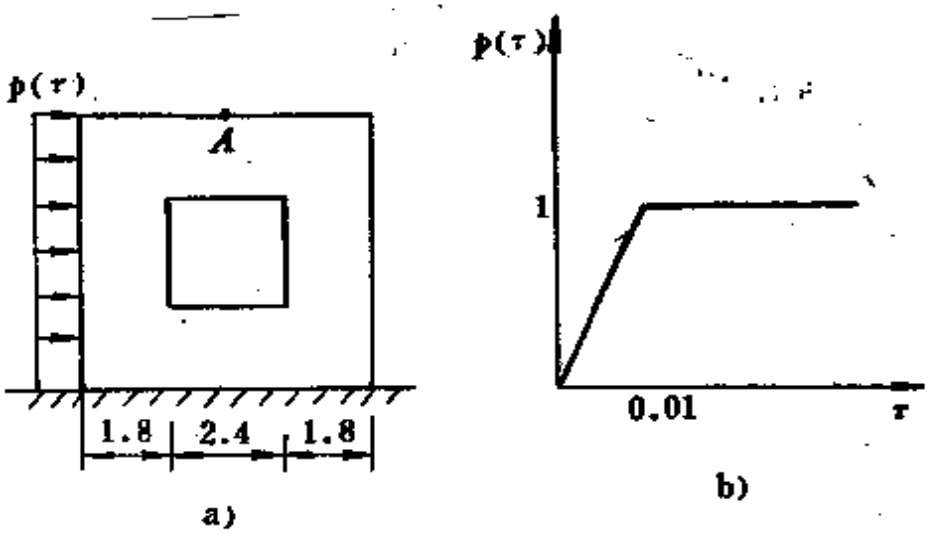


图5-6　空心板图

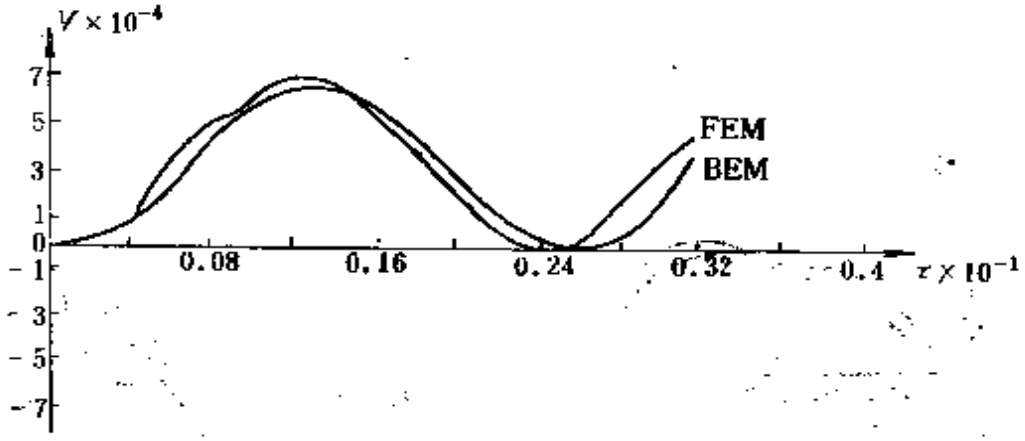


图5-7　空心板位移时程曲线

本算例的结果证明了特解边界元法用于解决多连通域瞬态动力反应问题亦是十分有效的。

例5　三维悬臂梁自振分析

如图5-8所示的三维悬臂梁，用特解边界元法计算其自振频率。材料参数 $E=2.1\times10^4$MPa，$\nu=0.167$，$\rho=2400$kg/m^3。计算中采用四边形八节点等参元，共56个节点，计算结果列于表5-5中。

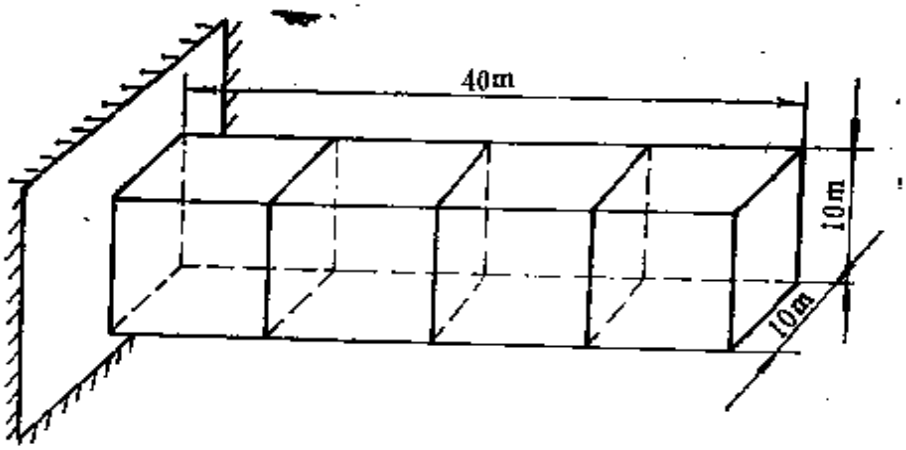


图5-8 三维悬臂梁图

表5-5 三维悬臂梁圆频率 (rad/s)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
BEM	18.57	18.57	54.60	79.03	79.04	112.02
FEM	18.88	18.88	54.01	77.91	77.91	111.32

由此可见，三维特解边界元法的精度亦是令人满意的。

参 考 文 献

[1] D. Nardini & C. A. Brebbia. A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elment Method. Proc. 4th Int. Conf. BEM, 1982

[2] Shahid Amad & P. K. Banerjee. Free Vibration Analysis by BEM Using Particular Integrals. ASCE J. Eng. Mech., No. 10, 1986

[3] 户川隼人，振动分析的有限元法（中泽本）.北京：地震出版社，1985

[4] 李庆斌、周鸿钧、材皋．特解边界元法及其在若干问题中的应用．郑州工学院学报，1990年第1期

[5] 李庆斌、周鸿钧、林皋．自振分析的特解边界元法．第三届全国地震工程会议论文集，大连，1990

[6] 周鸿钧、李庆斌、兰振凯、李宗坤、董耀星．结构物动力分析的特解边界

元法，郑州工学院学报，1991年第2期

[7] Li Qingbin, Zhou Hongjun & Lin Gao. Particular Solution Boundary Elment Method for Transient Dynamic Response Analysis. Proc. Int. Conf. Vib. Eng., China, 1990

[8] 李庆斌、周鸿钧、林皋. 异弹横界面裂缝地震断裂分析的特解边界元法及在重力坝中的应用. 第三届全国工程中的边界元法会议论文集，武汉：1991

[9] 王良琛. 混凝土坝地震动力分析. 北京：地震出版社，1981

[10] *D. Nardini & C. A. Brebbia. Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method. Proc 5th Int. Conf. BEM, Hiroshima*, 1983

[11] 阮海生、李鸿宝. 三维自由振动和瞬态响应的边界元动力分析. 第二届全国计算力学会议论文. 上海：1986.

第六章　粘弹性动力问题的特解边界元法

§6-1　概　　述

在以上几章，我们讨论了理想弹性介质的动力计算问题。但在实际工程中，无论是建筑物或是地基，都不是理想弹性介质，在波的传递过程中，由于介质的内摩擦作用，介质在变形的过程中要引起能量损失。因此，在研究结构物和地基动力相互作用问题中，将其视为粘弹性介质，这较之以往假定其为理想弹性介质来说更为合理，是一个很大的进步。

粘弹性动力反应的理论分析已有不少文献讨论过，但这些分析大都是以相应的弹性解为前提的。由于粘弹性介质本构关系的复杂性，其动力反应问题计算多数采用数值方法求解。过去大都采用有限元、差分法等区域型解法，需要计算机容量大，计算机机时也较长，给解题带来很大的困难和耗费。而边界元法在求解未知量、边界离散、计算精度等方面与区域型解法相比有较大的优势，特别是在处理奇异积分和无限域问题等更为方便、经济。

边界元法作为一种有效的数值计算方法，在弹性力学领域中得到了广泛的应用，但在粘弹性力学中的应用相对较晚，特别是在粘弹性动力反应问题中的应用更是近几年的事，文献较少，尚处于发展阶段。1985年Kobayashi将边界元法与傅里叶变换相结合，提出了位移随时间简谐变化的粘弹性动力问题的解法[1]。文献[2]借助于离散的傅里叶变换，应用静态Kelvin（克尔文）基本解作权函数分析了粘弹性动态响应，其动态方程的推导完全类似于静态方程的推导，只是加入了一个被看做为广义体力的加速度项，由此导出的边界积分方程中含有域积分，但它的形式比

较适合于动态问题的重复计算，并对奇异积分通过变换以解析积分取代了高斯积分，这是该法的可取之处。尽管如此，仍需在频域内划分单元，所求得的解还需反变换到时域中去。文献[3]、[4]采用边界元法结合拉普拉斯变换和反变换技术，建立了粘弹性结构动态响应分析的数值求解方法。文献[3]在拉普拉斯变换区域应用边界元法求出相应的变换解，然后应用Durbin（杜宾）方法进行拉普拉斯数值反演，求出时域内的解。文献[4]在文献[3]的基础上，根据磨光函数理论引入了Lanczos（兰索斯）因子、改进了Durbin数值反变换方法的计算精度和提高了效率。但该法仍未摆脱积分变换，无法避免在域内划分单元。文献[5]研究了二维多相材料结构的动力响应边界元法，多相结构的每个子结构的材料特性可以是粘弹性的或线弹性的，应用拉普拉斯变换和加权残数法，对每个子结构可以建立起在拉普拉斯区域中的边界积分方程，按不同材料结合面上的连续条件得到了分块带状的总体系数矩阵，再应用改进的Durbin数值反演技术，可将在拉普拉斯区域中的数值解变换到时间区域中求解。尽管该法没有摆脱积分变换和域内划分单元的问题，但有其可取之处，即开辟了用边界元法求解多相粘弹性结构动力响应计算的一条途径。文献[6]用有限元与边界元相结合研究了土与结构共同作用的粘弹性动力解，文中考虑到结构物的几何形状和物理性质的多样性，上部结构采用有限元法，土层采用粘弹性模型，由于它的半空间特性而采用边界元法，两者经过拉普拉斯变换后联合求解，将求得的解进行拉普拉斯反变换，得到粘弹性解答。该法综合了有限元法求解复杂问题的有效性和边界元法求解半空间问题的优越性，但仍需进行积分变换和域内积分。

从以上分析可以看出，粘弹性动力响应分析的边界元法已经取得了一些可喜的成果，但还极不成熟，还仅局限于采用频域法（积分变换法），这是由于粘弹性体本构关系的复杂性而引起起的。上述方法利用粘弹性理论中的对应性原理，运用积分变换使粘弹性问题化为类似于线弹性问题，而方便地得以解决问题。但

这种方法有一定的局限性，即首先要保证积分变换存在，另外，数值逆变换（数值反演）选点的多少影响其精度。这样，为了保证一定的精度，就必须保证一定数量的点，这就会增加机时。同时，选点的多少与求解具体问题有着密切关系，难以得到统一规律，这就要求计算者有一定的经验，否则，难以得到满意的结果。因此，上述方法存在两个缺点：一是积分变换工作量大；二是无法避免在域内划分单元，不能充分体现边界元法只离散边界的优越性。因此，寻求一种能避免积分变换和域内积分的新方法是非常有意义的。文献[7]曾利用特解边界元法的思想方法避免了积分变换和域内积分，但可惜未考虑惯性力项，仍属拟静态法。同时，由于采用的是一般积分型的本构关系，使得求解过程复杂化。在上述工作的启迪下，我们将采用特解边界元法来求解复阻尼模型的粘弹性动力反应问题，建议方法的优点是避免了进行积分变换和域内划分单元，可以直接在时间域内求解，使得求解过程甚为简单化。

§6-2 粘弹性动力问题的基本方程

众所周知，应力波在弹性介质和粘弹介质中的传播，其特性有着明显的区别。对于粘弹性介质来说，在波的传递过程中，介质的变形将引起能量的耗散，这是由于介质的内摩擦作用引起的，这也是粘弹性介质与弹性介质的本质区别。因此，我们在对粘弹性介质进行研究时，应该体现在如何考虑介质的内摩擦问题上。

材料的内摩擦作用可以这样来考虑：在运动过程中材料的变形为e时，除了产生弹性应力Ee外，还产生阻尼应力，而散失的能量即等于阻尼应力所做的负功。

关于阻尼应力的处理，由于考虑的方法不同而提出了不同的阻尼模型和理论，如粘滞阻尼理论，复阻尼理论（线性滞变阻尼理论）等。显然，在建立或选用阻尼理论时，有两个方面的问题

是需要着重考虑的。首先，阻尼理论应该能够足够正确地表明结构的阻尼性质，亦即根据这种阻尼理论计算所得的结构振动规律应尽可能符合实际情况，其次，应该尽可能减少结构振动计算中的数学困难。

目前，多数学者认为复阻尼理论能较好地符合结构由于材料的内摩擦引起耗散的能量，并能较好地反映真实结构振动的衰减规律，这些规律主要体现在[8]：

(1) 单频自由振动的振幅按等比级数衰减，亦即具有指数形式的振幅衰减曲线；

(2) 对数衰减率与振动周期无关，振动时能量的耗散与变形速度无关；

(3) 阻尼对结构的自振频率的影响极小；

(4) 阻尼不影响结构物的振型。

同时，我们也可以看到，按照复阻尼理论的数学表达式进行振动计算时特别简便，其所得到的线性振动有时比常用的伏格特理论结果还要简单。

综上所述，可见复阻尼理论比较符合由于材料内摩擦而耗散的能量，并具有运算简便的优点，而粘弹性材料正是通过内摩擦而引起能量耗散的，所以我们认为采用复数阻尼来揭示粘弹性体的运动规律是合适的。下面，我们就应用复阻尼理论来建立粘弹性体的动力基本方程。

在复阻尼理论中采用的主要假定为：阻尼应力与弹性应力Ee成正比，而且与变形速度$\dot{\varepsilon}$同相[13]。

在简谐运动中，应变及应变速度用复数形式表达为：

$$\text{应变：}\qquad \varepsilon=\varepsilon_0 e^{i\omega\tau}=e_0(\cos\omega\tau+i\sin\omega\tau) \tag{6-1}$$

$$\text{应变速度：}\quad \dot{\varepsilon}=i\omega e_0 e^{i\omega\tau}=\omega e_0 e^{i\left(\omega\tau+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{6-2}$$

式 (6-2) 说明应变速度的相位超越应变 (或位移) 为

$\frac{\pi}{2}$，即90°。

根据上述关于阻尼应力的假定，可得：

弹性应力$=Ee_0e^{i\omega t}=Ee$ (6-3)

阻尼应力$=\eta Ee_0e^{i\omega t}=i\eta Ee$ (6-4)

从而得到总应力（弹性应力与阻尼应力之和）为：

$$\sigma=Ee+i\eta Ee=E^*e \tag{6-5}$$

$$E^*=(1+i\eta)E \tag{6-6}$$

式中，E^*为复弹性模量；E为弹性模量；$i=\sqrt{-1}$为虚数单位；η为阻尼系数或粘性系数，其值取为粘滞阻尼理论（或结构动力学中）定义的振型阻尼比的二倍，如对基岩可取0.1或略大一些[8][10]。

苏联学者СОРОКИН（索罗肯）经过理论分析及实验验证，已将上述结论，即式（6-5）及式（6-6）推广到一般的非简谐运动中[11]，从而大大拓宽了复阻尼理论的应用范围，具有非常重要的意义。

从以上推导可以看出，复阻尼理论的假定相当于结构具有复弹性模量或复刚度，因而对粘弹性体建立运动方程时，只需在理想弹性体运动方程的基础上将弹性模量或刚度系数（或暗含弹性模量或刚度系数）的前面乘以复常数（$1+i\eta$）即可。

根据弹性理论，在均匀等相连续介质中，在小变形的情况下，用位移表示的运动方程为：

$$(\lambda+G)u_{j,ij}+Gu_{k,jj}+b_k=\rho\ddot{u}_k \tag{6-7}$$

式中，
$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6-8a}$$

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}=\frac{2G\nu}{1-2\nu} \tag{6-8b}$$

式中，λ、G为拉梅常数；G为剪切模量；b_k为体积力；ρ为介质密度。

对于保守系统而言，重力不影响动态变形的大小，当无其它体积力作用时，介质的运动方程可表示为：

$$(\lambda+G)u_{j,kj}+Gu_{k,jj}=\rho\ddot{u}_k \qquad (6-9)$$

方程（6-9）是把介质视为理想连续弹性体来研究波动在介质中的传递而得到的，但是，对于水坝或地基而言，当波在其内传播时，往往由于介质的内摩擦作用将引起能量的耗散，因此，把水坝或地基假定为粘弹性介质是合理的，这对以往将之视为理想弹性体的假定是一个巨大的进步，况且，不少文献已经做了相应研究。

根据以上所述的考虑介质内摩擦（阻尼）时采用复阻尼理论建立运动方程的方法，将式（6-8a）及（6-8b）代入式（6-9），即可求得粘弹性介质的动力方程如下：

$$(\lambda^*+G^*)\,u_{j,kj}+G^*u_{k,jj}=\rho i_k \qquad (6-10)$$

其中：

$$\lambda^*=(1+i\eta)\lambda \qquad (6-11)$$

$$G^*=(1+i\eta)G \qquad (6-12)$$

式中，λ^*和G^*为粘弹性介质的复拉梅常数，其实部λ、G表示介质的弹性性质，即通常所指的拉梅常数，其虚部表示介质的粘弹性性质，即介质的内摩擦性质或阻尼性质。值得指出的是，在粘弹性介质中，泊松比ν与弹性介质中的泊松比完全相同，仍为实数，即$\nu^*=\nu$。

从上述可以看出，粘弹性介质内的运动方程式（6-10）的求解与弹性介质内的运动方程式（6-9）的求解无多大区别，只需把实的弹性常数（E、λ、G）换成复数形式的粘弹性常数（E^*、λ^*、G^*）就可以了。这不但反映了对实际问题的深入理解，而且将为问题的求解提供极大的方便。

值得指出的是，以上推导粘弹性介质的运动方程式（6-10）的方程与文献[12]的方法不同，此处是直接把与弹性模量E有关的项λ、G乘以复常数（$1+i\eta$）而得到。而文献[12]实质上是采用粘滞阻尼理论中阻尼力与介质的变形速度成正比的假定，在简谐运动情况下才得到与方程（6-10）形式上相同的方程。但其量

拉梅常数为振动频率的函数，经过近似简化处理后，才能得到与式（6-11）及式（6-12）完全相同的复拉梅常数，而本文方法不需任何近似处理，完全直接由复阻尼理论推导而得。

前面我们已经作了理论推导，现在的问题是如何求解式（6-10）了。由于特解边界元法较之常规边界元法具有无法比拟的优点，如把域内积分化为边界积分，不需作任何积分变换而可以直接在时域内求解（隐式时间法），可以利用已知的齐次方程的基本解（或静力基本解）求非齐次方程（或运动方程）的边界元解答等，因此，我们采用特解边界元法求解方程式（6-10）。

§6-3 粘弹性动力问题的特解边界元法

为了便于使用特解边界元法求解，我们把式（6-10）改写为式（3-1）的形式，即：

$$\mathscr{L}(u_k)-\rho u_k=0 \tag{6-13}$$

式中，
$$\mathscr{L}(u_k)=(\lambda^*+G^*)u_{j,kj}+G^*u_{k,jj} \tag{6-14}$$

对应于式（6-13）的齐次方程为：

$$\mathscr{L}(u_k)=0 \tag{6-15}$$

对于二维各向同性平面应变问题，只需把对应于式（6-15）的弹性问题的基本解中的实弹性常数（λ、G、E）换成复数形式的粘弹性常数（λ^*、G^*、E^*）即可得到对应于式（6-15）的粘弹性问题的基本解，从而我们就可以从已知的弹性问题的Kelvin（克尔文）基本解得到对应的粘弹性问题的基本解如下：

$$U_{ik}^*=\frac{1}{8\pi G^*(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ik}+r_{,i}r_{,k}\right] \tag{6-16}$$

$$P_{ik}^*=\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu]\delta_{ik}+2r_{,k}r_{,i}\right]$$

$$-(1-2\nu)(r_{,i}n_k-r_{,k}n_i)\Big\} \qquad (6\text{-}17)$$

式中，G^*为复剪切模量；ν 为泊松比；r 为边界上两点间的距离；n_k为边界点的外法线方向。

$$r_{,i}=X_i/r \qquad (6\text{-}18)$$

可见P^*_{ik}的表达式由于与λ、G及E无关，所以与弹性问题的基本解完全一样，仍为实数，而U^*_{ik}则由于其表达式的公分母上有复剪切模量$G^*=(1+i\eta)G$，使得其值为复数，为对应的弹性问题实数解的$\frac{1}{1+i\eta}$倍。

如果已求得U^c_K，U^f_K分别满足：

$$\mathscr{L}(u^c_K)=0 \qquad (6\text{-}19)$$

$$\mathscr{L}(u^f_K)-\rho\ddot{u}_k=0 \qquad (6\text{-}20)$$

进而可以求出面力t^c_i及t^f_i。其真实位移和面力可表示为：

$$u_k=u^c_K+u^f_K \qquad (6\text{-}21)$$

$$t_k=t^c_K+t^f_K \qquad (6\text{-}22)$$

如写成矩阵的形式则为：

$$\{u\}=\{u^c\}+\{u^p\} \qquad (6\text{-}23)$$

$$\{t\}=\{t^c\}+\{t^p\} \qquad (6\text{-}24)$$

用基本解式（6-16）及式（6-17）作权函数，我们就可以得到与式（6-19）对应的边界元方程为：

$$[H]\{u^c\}=[G^*]\{t^c\} \qquad (6\text{-}25)$$

式中，系数矩阵$[H]$与弹性问题时完全相同，仍为实数矩阵，为方便起见，采用与弹性问题相同的符号表示，系数矩阵$[G^*]$为复数矩阵，其值为对应的弹性问题系数矩阵的$\frac{1}{1+i\eta}$倍，即：

$$[G^*]=\frac{1}{1+i\eta}[G] \qquad (6\text{-}26)$$

要需指出，凡系数矩阵的右上角标有*号者，表示复数矩

阵，否则表示实数矩阵，其值等于对应的弹性问题的实数矩阵，下均同。

将式（6-23）及式（6-24）代入式（6-25）中即得到对应于方程（6-13）的边界元方程，其形式为：

$$[H]\{u\}-[G^*]\{t\}=[H]\{u^p\}-[G^*]\{t^p\} \tag{6-27}$$

第五章已经求得对应于方程（6-20）的弹性问题的特解如下：

$$\{u^p\}=[D]\{\ddot{\phi}\} \tag{6-28}$$

$$\{t^p\}=[T]\{\ddot{\phi}\} \tag{6-29}$$

$$\{\ddot{\phi}\}=[K]\{\ddot{u}\} \tag{6-30}$$

其中，$[D]$，$[T]$，$[K]$意义同第五章，分别由式（5-45）、（5-48）、（5-41）计算得出。

可以看出，只有$[D]$矩阵元素的分母中含有G，从而可以推得对应的粘弹性问题的特解为：

$$\{u^p\}=[D^*]\{\ddot{\phi}\} \tag{6-31}$$

$$\{t^p\}=[T]\{\ddot{\phi}\} \tag{6-32}$$

$$\{\ddot{\phi}\}=[K]\{\ddot{u}\} \tag{6-33}$$

式中，
$$[D^*]=\frac{1}{1+i\eta}[D] \tag{6-34}$$

将式（6-31）～（6-33）代入方程（6-27）得到：

$$[H]\{u\}-[G^*]\{t\}=([H][D^*]-[G^*][T])[K]\{\ddot{u}\} \tag{6-35}$$

将式（6-26）及（6-34）代入式（6-35）得粘弹性动力问题的边界元方程为：

$$[M]\{\ddot{u}\}+(1+i\eta)[H]\{u\}=[G]\{t\} \tag{6-36}$$

式中，$[M]=([G][T]-[H][D])[K]$ (6-37)

当外荷载为谐振力时，任何反应量均可用振幅与谐振因子$e^{i\omega\tau}$的乘积来表示，如

$$\gamma(x,\ y,\ \tau)=\bar{\gamma}(x,\ y,\ \omega)e^{i\omega\tau} \tag{6-38}$$

这时，式（6-36）变为：

$$-\omega^2[M]\{\bar{u}\}+(1+i\eta)[H]\{\bar{u}\}=[G]\{\bar{t}\} \qquad (6\text{-}39)$$

只要求出振幅$\bar{u}$或$\bar{t}$，即可求得$u=\bar{u}e^{i\omega\tau}$或$t=\bar{t}e^{i\omega\tau}$。

这与采用有限元法得到的结果基本一致，有限元的动力方程为：

$$-\omega^2[M]\{\bar{u}\}+(1+i\eta)[K]\{\bar{u}\}=\{\bar{F}\} \qquad (6\text{-}40)$$

方程（6-39）是一复系数线性代数方程组，可以利用有关的计算方法求解。

下面我们讨论粘弹性体的地震反应分析（这里假定为简谐地震）。

在地震荷载作用下粘弹体的动力平衡方程为：

$$\mathscr{L}(u_k)-\rho\ddot{u}_k-\rho\ddot{u}_{gk}=0 \qquad (6\text{-}41)$$

式中，$\mathscr{L}(u_k)$同式（6-14）。

设地震荷载为谐振力：

$$F_k=\bar{F}_k e^{i\omega\tau} \qquad (6\text{-}42)$$

则方程（6-41）变为：

$$\mathscr{L}(\ddot{u}_k)-\rho\ddot{u}_k-\bar{F}_k e^{i\omega\tau}=0 \qquad (6\text{-}43)$$

如果已求得u_K^c，u_K^{p1}，u_K^{p2}分别满足

$$\mathscr{L}(u_K^c)=0 \qquad (6\text{-}44)$$

$$\mathscr{L}(u_K^{p1})-\rho\ddot{u}_k=0 \qquad (6\text{-}45)$$

$$\mathscr{L}(u_K^{p2})-\bar{F}_k e^{i\omega\tau}=0 \qquad (6\text{-}46)$$

那么，根据微分方程原理，可将方程（6-43）的解表示为：

$$u_k=u_K^c+u_K^{p1}+u_K^{p2} \qquad (6\text{-}47)$$

进而可以推出面力的表达式为：

$$t_k=t_K^c+t_K^{p1}+t_K^{p2} \qquad (6\text{-}48)$$

其中，t_K^c，t_K^{p1}及t_K^{p2}分别是对应于位移u_K^c，u_K^{p1}及u_K^{p2}的面力。

将式（6-47）及式（6-48）写成矩阵形式为：

$$\{u\}=\{u^c\}+\{u^{p1}\}+\{u^{p2}\} \qquad (6\text{-}49)$$

$$\{t\}=\{t^c\}+\{t^{p1}\}+\{t^{p2}\} \qquad (6\text{-}50)$$

前面已经求出方程（6-44）的边界元方程为：

$$[H]\{u^c\}=[G^*]\{t^c\} \tag{6-51}$$

将式 (6-49) 及式 (6-50) 代入式 (6-51) 可以得出方程 (6-43) 的边界元方程如下：

$$[H]\{u\}-[G^*]\{t\}=[H](\{u^{p1}\}+\{u^{p2}\})-[G^*](\{t^{p1}\}+\{t^{p2}\}) \tag{6-52}$$

我们已经求得方程 (6-45) 的特解如下：

$$\{u^{p1}\}=[D^*]\{\ddot{\phi}\} \tag{6-53}$$

$$\{t^{p1}\}=[T]\{\ddot{\phi}\} \tag{6-54}$$

$$\{\ddot{\phi}\}=[K]\{\ddot{u}\} \tag{6-55}$$

方程 (6-46) 的特解$\{u^{p2}\}$及$\{t^{p2}\}$可以按常体力问题。

$$\mathscr{L}(u_k)-\bar{F}_k=0 \tag{6-56}$$

求解，然后乘以谐振因子$e^{i\omega\tau}$

第四章已求得常体力问题。

$$\mathscr{L}(u_k)+h_k=0 \tag{6-57}$$

的特解。由此，我们可以求出式 (6-46) 的特解如下：

$$\sigma_{11}^{p2}=(\bar{F}_1x_1+\frac{\nu}{1-\nu}\bar{F}_2x_2)e^{i\omega\tau} \tag{6-58}$$

$$\sigma_{22}^{p2}=\left(\frac{\nu}{1-\nu}\bar{F}_1x_1+\bar{F}_2x_2\right)e^{i\omega\tau} \tag{6-59}$$

$$\sigma_{12}^{p2}=0 \tag{6-60}$$

$$u_K^{p2}=\frac{1-2\nu}{4G^*(1-\nu)}\bar{F}_kx^2{}_ke^{i\omega\tau}=\frac{1}{1+i\eta}A(x_k)e^{i\omega\tau} \tag{6-61}$$

式中，$A(x_k)\ \frac{1-2\nu}{4G(1-\nu)}\bar{F}_kx^2{}_k$ (6-62)

由 $$t_k^{p2}=\sigma_{kj}^{p2}n_j=\sigma_{kk}^{p2}n_k \tag{6-63}$$

可以求得面力的特解为：

$$t^{p2}=S_k(x_1,\ x_2)e^{i\omega\tau} \tag{6-64}$$

式中，
$$S_1=(\bar{F}_1x_1+\frac{\nu}{1-\nu}\bar{F}_2x_2)n_1 \tag{6-65}$$

$$S_2=\left(\frac{\nu}{1-\nu}\bar{F}_1x_1+\bar{F}_2x_2\right)n_2 \tag{6-66}$$

将式 (6-61) 及式 (6-64) 用矩阵表示为：

$$\{u^{p2}\}=\frac{1}{1+i\eta}\{A\}e^{i\omega\tau}=\{A^*\}e^{i\omega\tau} \tag{6-67}$$

$$\{t^{p2}\}=\{S\}e^{i\omega\tau} \tag{6-68}$$

式中，
$$\{A^*\}=\frac{1}{1+i\eta}\{A\} \tag{6-69}$$

将式 (6-53)、(6-54)、(6-55)、(6-67) 及式 (6-68) 代入式 (6-52) 可得：

$$[H]\{u\}-[G^*]\{t\}=[H]([\dot{D}^*][K]\{\dot{u}\}+\{A^*\}e^{i\omega\tau})$$
$$-[G^*]([T][K]\{\dot{u}\}+\{S\}e^{i\omega\tau}) \tag{6-70}$$

再将式 (6-26)、(6-34) 及式 (6-69) 代入式 (6-70) 可得：

$$[M]\{\ddot{u}\}+(1+i\eta)[H]\{u\}=[G]\{t\}+\{B'\}e^{i\omega\tau} \tag{6-71}$$

式中，
$$\{B'\}=[H]\{A\}-[G]\{S\} \tag{6-72}$$

如上所述，在谐振力作用下，任何反应量均可表示为振幅与谐振因子$e^{i\omega\tau}$的乘积，从而可将式 (6-71) 改写成为：

$$-\omega^2[M]\{\bar{u}\}+(1+i\eta)[H]\{\bar{u}\}=[G]\{\bar{t}\}+\{B'\} \tag{6-73}$$

这就是简谐地震的动力方程，求解该复系数线性代数方程组得反应幅值$\bar{u}$或$\bar{t}$，然后乘以谐振因子$e^{i\omega\tau}$即得地震反应值。

可见，粘弹性体的简谐地震反应问题，最后归结为求解复系数线性代数方程组 (6-73)，其中的系数矩阵$[M]$、$[H]$、$[G]$完全与弹性问题的实矩阵相同，可以直接按弹性问题计算形成这些矩阵，将使计算工作量大大减少，具有重要意义。

这样，对于粘弹性体单域动力问题的计算得到了解决，至于

多域问题，只要利用耦合边的连续条件，形成总体系数矩阵，最后得到的耦合边界元方程式将与式（6-36）、（6-39）及式（6-73）具有类似的形式，其处理方法将在 §11-2中叙述。

§6-4 粘弹性地基的动力刚度矩阵计算

目前，子结构方法被认为是分析结构和地基动力相互作用问题最为有效的方法之一。该法将结构与地基分开考虑，以便采取不同方法进行处理。结构部分一般用数值方法进行离散，如有限元法、边界元法，而地基的影响则用与频率有关的复动力刚度矩阵来反映。将地基的刚度矩阵耦合到频域的结构动力方程中，进而求解结构与地基相互作用下的动力反应。因此，应用子结构方法的关键是如何建立地基的动力刚度矩阵。

对于具有规则边界的地基可以通过解析法去求解。Chopra等曾采用两种方法[14]、[15]解析求解粘弹性半平面地基的动力刚度矩阵，指出刚度系数法误差较大，而柔度系数法精度较好。为此，我们将借助于特解边界元法，采用柔度系数法求出地基的柔度系数，形成柔度系数矩阵，然后利用虚功原理建立地基的动力刚度矩阵。

上节已用特解边界元法建立了粘弹性介质在简谐荷载作用下的动力方程（如式（6-39））。方程（6-39）是一复系数线性代数方程组，引入边界条件后即可进行求解。

对于图6-1所示的粘弹性半无限平面地基，在长度为b的区间

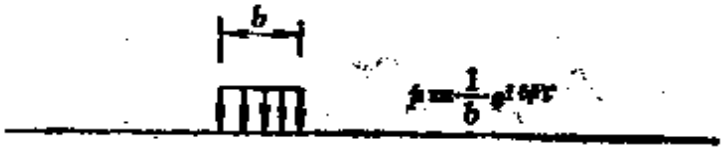


图 6-1

上作用简谐均布力$p=\frac{1}{b}e^{i\omega t}$，作用方向为水平或垂直，利用方程（6-39）进行求解即可得到地基的柔度系数，从而形成地基的动力柔度矩阵$[F]$。

设地基表面有等间距分布的若干结点，如图6-2所示。如果在结点—1和结点1之间的结线上作用有合力大小为$\{f_1\}=$



图 6-2

$\begin{Bmatrix} f^{(x)} \\ f^{(y)} \end{Bmatrix}$的水平和垂直均布力时，在结点$m(x=(m-\frac{1}{2})\quad b)$上产生的位移为[12]：

$$\begin{Bmatrix} u^{(x)} \\ u^{(y)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m^{xx} & F_m^{xy} \\ F_m^{yx} & F_m^{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f^{(x)} \\ f^{(y)} \end{Bmatrix} \tag{6-74}$$

简写为：

$$\{u_m\}=[F_m]\{f_1\} \tag{6-75}$$

其中，F_m^{yy}，F_m^{yx}表示在x方向作用单位简谐力时x、y方向的柔度系数，F_m^{yy}，F_m^{xy}表示在y方向作用单位简谐力时y、x方向的柔度系数；m为结点号。

$[F_m]$中的各元素可由方程（6-39）解出。根据对称性，应有：

$$[F_m]^T=[F_{-m}] \tag{6-76}$$

当水坝与地基的连接面上共有n个结点（为方便计算，令其为等间距分布）时，如图6-3所示，作用在结点间的均布力与结点位移之间有如下关系式：

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^I & F_2^T \cdots & F_{n-1}^T \\ F_1 & F_1^T \cdots & F_{n-2}^I \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots & \cdots \\ F_{n-1} & F_{n-2} & \cdots & F_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{Bmatrix} \tag{6-77}$$

简写为：

$$\{u\} = [F]\{f\} \tag{6-78}$$

式中，$[F]$为$2n \times 2(n-1)$ 矩阵。

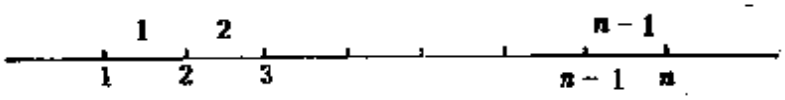


图6-3

结点力$\{P\}$与结点位移$\{u\}$之间应有：

$$\{P\} = [S_f(a_0)]\{u\} \tag{6-79}$$

式中，$[S_f(a_0)]$为地基的动力刚度矩阵；$a_0 = \frac{\omega b}{C_s}$为无量纲频率；$\omega$为激振力频率；$b$为荷载作用宽度；$C_s$为$S$波波速。

设节线中点的位移为结点位移的平均值，则它们之间存在下述关系：

$$\{\hat{u}\} = [L]\{u\} \tag{6-80}$$

应用虚功原理

$$\{\hat{u}\}^T\{P\} = \{u\}\{f\} \tag{6-81}$$

可以得到地基的复动力刚度矩阵为：

$$[S_f(a_0)] = [L]^T[[L][F]]^{-1}[L] \tag{6-82}$$

式中，

$$[L]=\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \tag{6-83}$$

为$2(n-1)\times 2n$矩阵。

§6-5 计 算 举 例

对于粘弹性半无限平面地基，动力柔度系数既有积分形式的解析解[15]，又有数值解，如有限元与无穷元耦合法[16]，无限边界法[17]，样条半解析法[18]。为了验证特解边界元法处理粘弹性动力问题的合理性和精确度，我们利用§6-3建立的粘弹性动力边界元方程式（6-39）来求解粘弹性半无限地基的柔度系数，计算简图如图6-4所示。

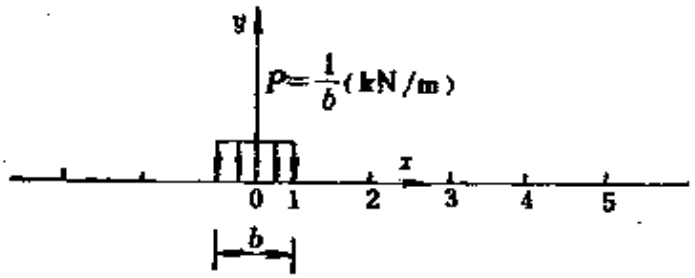


图6-4

计算中采用的主要参数如下：地基弹性模量 E 为2×10^4 MPa，泊松比ν为$\frac{1}{3}$，粘性系数η为0.25，容重γ为$2\times10^4 N/m^3$，

相应的S波波速C_s为1936m/s，为方便比较，采用与文献[15]中相同的地基柔度表示方法，即：

$$\left.\begin{aligned} F_m^{xx}(a_o)&=\frac{1}{G}\left[f_m^{xx}(a_o)+ig_m^{xx}(a_o)\right]\\ F_m^{yy}(a_o)&=\frac{1}{G}\left[f_m^{yy}(a_o)+ig_m^{yy}(a_o)\right]\end{aligned}\right\}\qquad(6-84)$$

其中，F_m^{xx}，F_m^{yy}分别为x与y方向的地基柔度系数；m为地基表面节点编号；其余符号同前。

图6-5给出了$a_o=0.5$，$\eta=0.25$，$\nu=\frac{1}{3}$的计算结果，同时将解析解[15]一并给出，以资比较。

从比较结果（图6-5）可以看出，特解边界元法计算结果与

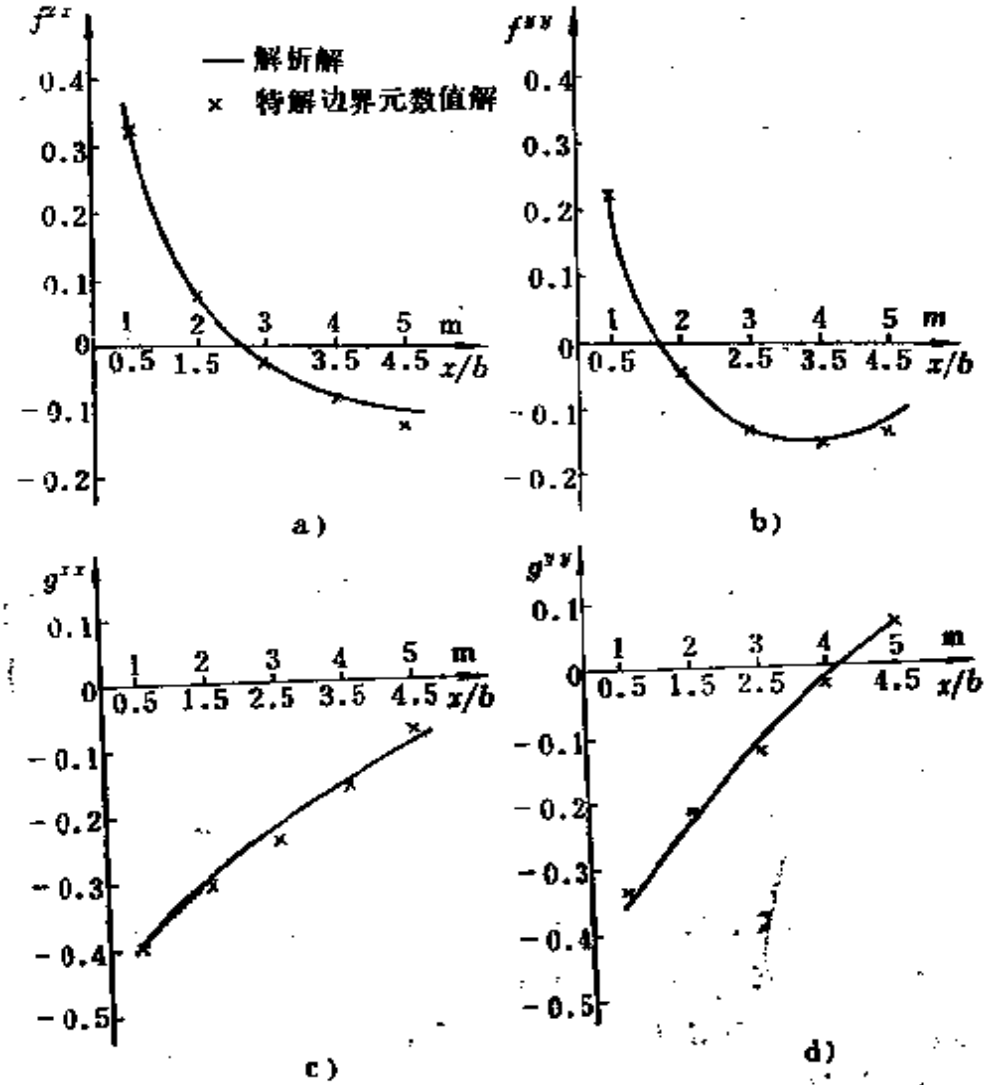


图6-5 粘弹性地基柔度系数比较

($a_0=0.5$ $\eta=0.25$ $\nu=\frac{1}{3}$)

解析解比较吻合，说明有良好的计算精度。同时，建议的方法可以在时域内求解，因而使得求解过程大为简化。

参考文献

[1] S. Kobayashi & T. Kawakami. Boundary Element Ⅷ, Proc. 7th Int. Conf., Italy, 1985

[2] 张琦、楼志文. 粘弹性体动态响应的边界元分析. 全国第二届工程中边界元法会议论文集，南宁：1988

[3] 戚支全、孙柄楠. 粘弹性结构动力响应的边界元分析. 全国第二届工程中边界元法会议论文集，南宁：1988

[4] 孙柄楠，戚支全. 二维粘弹性结构动力响应的边界元法分析. 上海力学，1990年第1期

[5] 孙柄楠、戚支全. 多相粘弹性结构的动力响应边界元分析. 计算结构力学及其应用，1990年第3期

[6] 项玉寅、唐锦春. 土与结构共同作用的有限元——边界元粘弹性动力分析. 全国第二届工程中边界元法会议论文集，南宁：1988。

[7] 沈家荫、林炳仕. 边界元法分析区域不划分单元的粘弹性问题. 河海大学学报，1990年第4期

[8] 王光远. 具有线性滞变阻尼的弹性体振动的一般规律. 哈尔滨建筑工程学院学报，1963年第3期

[9] 王光远. 建筑结构的振动. 北京：科学出版社，1978

[10] 楼梦麟、林皋. 粘弹性地基中人工边界的波动反射效应. 水利学报，1986年第6期

[11] Е. С. Сорокин, К теории Внутреннего Трения при Колебаниях Упругих Систем. Госстройиздат, 1960

[12] 楼梦麟. 粘弹性地基的动力刚度矩阵及坝基相互作用对水坝地震反应的影响. 大连理工大学博士学位论文，1984

[13] T. Theodorsen & I. E. Garrick. Mechanism of Flutter, a Theoretical and Experimental Investigation of the Flutter Problem. Technical Report No. 685, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, D. C., 1940。

[14] A. K. Chopra et al. Dynamic Stiffness Matrices for Viscoelastic Half-plane Foundations. J. Eng. Mech. Div., ASCE, EM3, Vol. 102, 1976

[15] G. Dasgupta et al. Dynamic Stiffness Matrices for Viscoelastic Half Planes, J. Eng. Mech. Div., ASCE, EM5, Vol.105, 1979

[16] 张楚汉、赵崇斌. 复杂地基中波动问题的数值模拟. 土木工程学报, 1987年第4期

[17] 张楚汉、王光纶. 无限域的数值模拟与无限单元. 第一届全国解析与数值结合法会议论文集, 长沙: 湖南大学出版社, 1989

[18] 王复明、林皋. 层状地基分析的样条半解析法及其应用. 郑州: 河南科技出版社, 1988

第七章　随机特解边界元法

§7-1．概　　述

结构可靠性理论在近几十年内得到了突飞猛进的发展，已经进入了实用阶段。结构可靠性的早期研究多集中在影响结构的安全性、适用性和耐久性的随机因素的处理方面，即关心结构设计中基本随机变量随机特征的数学描述。同时，结构可靠度计算方法也得到了发展。1960年，C.A.Cornell提出了可靠指标的概念，1974年，A.M.Hasofer和N.C.Lind 在标准正 态随机变量空间中定义了可靠指标。1976年，国际“结构安全 度 联 合 委员会”(JCSS) 采用R.Rackwitz和B.Fiessler等人提出的通过“当量正态”方法求可靠指标的一次二阶矩模式，标志着结构可靠度的计算方法进入实用阶段。A.H-S. Ang和W.H.Tang于 1975 年出版的《工程规划与设计中的概率概念》一书，系统地阐述了有关概念和计算理论，在国际上有较大影响。目前已有多种改进的一次二阶矩模式的可靠度计算方法[1] [2] [3]，同时蒙特卡罗法及其改进、数值计算方法等也得到了重视和发展[4] [5] [6]。

由于各种随机因素的处理以及概率论和数理统计在可靠性分析中的重要性以及人们在这方面所做的大量工作，容易给初学者造成这样一种误解，以为结构可靠性问题仅是一个概率论研究的数学问题。事实上，结构可靠性问题首先是一个工程问题，它的理论基础是力学和数理统计的结合，它的工程基础是实践检验和实验数据。我们知道：任何一个可靠度问题都归结为功能函数的取值概率的计算，而功能函数包含了结构材料 的 抗 力 和荷载效应。材料抗力常常是基本随机变量的显函数，而荷载效应需用力学的方法求出。

对于构件或简单结构，可用材料力学法求解。此时荷载效应

多可表示为基本随机变量的显函数，这给用一次二阶矩模式求解结构可靠度问题带来了方便。然而，由于材料力学法的局限性，对于工程中许多实际结构的复杂受力状态，以及复杂因素的考虑，例如二维问题、三维问题、多域问题、断裂问题等，都需要借助其他力学方法，如有限单元法、边界单元法等来解决。

因此，随着可靠度理论在实际中应用范围的扩大，随着各类结构的可靠度分析任务的提出，寻求适用于结构可靠度分析的力学分析方法的重要性也就日益显示出来了。

目前，国际国内已经开展了随机有限元方法的探讨[7][8]，取得了一些成绩。但是，有限元法有着对奇异问题的局限性以及计算工作量大的缺点，限制了在一些领域的有效运用。另一方面，边界单元法在各类问题的力学分析中的成功运用为其在可靠度分析中的应用提供了良好的基础，探讨边界单元法在结构可靠度问题中的应用不仅是有益的，而且对奇异问题来说是迫切的。

本章介绍作者在这方面所做的工作，着重讨论考虑变量随机性的随机特解边界元理论的基本概念及其在结构可靠度分析中的应用。

§7-2 结构静力可靠度理论简介

1.基本概念

结构的可靠性包括结构的安全性、适用性和耐久性。结构的可靠度是结构在规定时间内，在规定的条件下完成预定功能的概率。结构可靠度理论研究具有不确定性的结构在具有不确定性的荷载作用下的可靠度。

结构可靠度问题可以归结为一组表示材料和荷载不确定性的基本随机变量：

$$\{X\}=[X_1,\ X_2,\cdots,X_n]^T \tag{7-1}$$

和一个或多个描述结构状态的功能函数：

$$Z=\{Z_i=g_i(X),\ i=1,\ 2,\ \cdots m\} \tag{7-2}$$

这样的模式，并计算在随机向量空间$\{X\}$内功能函数Z在某一范围内取值的概率。通常计算结构的破坏概率。

如果基本随机变量$x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$服从正态分布，且功能函数为基本随机变量的线性函数，即：$Z_j=\sum_{i=1}^{n}C_iX_i$，其中C_i为常系数，则破坏概率可由功能函数的均值和标准差表示如下：

$$P_f=\Phi\left(-\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) \tag{7-3}$$

式中，P_f——破坏概率；

$\Phi(\ )$——标准正态分布函数；

μ_z——功能函数Z_j的均值；

σ_z——功能函数Z_j的标准差。

引入变量：

$$\beta=\mu_z/\sigma_z \tag{7-4}$$

β称为可靠指标，为一无因次数。破坏概率与可靠指标的关系为：

$$P_f=\Phi(-\beta) \tag{7-5}$$

$$\beta=-\Phi^{-1}(P_f) \tag{7-6}$$

其中，Φ^{-1}为Φ的反函数。

可靠指标β是可靠度理论中的一个重要概念，这是因为它是结构可靠度的度量，即有：

$$P_r=\Phi(\beta) \tag{7-7}$$

其中，P_r为结构可靠度。由式(7-7)可知：可靠指标越大，结构的可靠度越高。

通常，基本随机变量是其统计特征可以通过实验或量测直接求得的随机变量，例如荷载、材料特性常数、构件尺寸等。

功能函数描述结构的力学性态。习惯上，在确定功能函数时使之满足以下条件：

$$Z_i=g_i(X)\begin{cases}<0 & \text{表示结构失效或破坏}\\ =0 & \text{表示结构处于极限状态}\\ >0 & \text{表示结构正常或安全}\end{cases}$$

方程

$$Z_i=g_i(X)=0 \tag{7-8}$$

称为极限状态方程，在基本随机向量X空间中它表示一个曲面，称为失效面或破坏面。

如前所述，当基本随机变量$\{X\}$为正态分布且功能函数为基本随机变量的线性函数时可用简单的公式求解。但多数情况下，功能函数是基本随机变量的非线性函数，问题的求解需借助于其他方法，如一次二阶矩模式、数值解法以及蒙特卡罗模拟等。其中一次二阶矩模式已达到实用阶段，具有一定的精度，是目前结构可靠度计算常用的方法，而且它可方便地用于随机有限元法和本章重点介绍的随机边界元法中，故在此作一简单介绍。

2.可靠指标的计算方法

通常，随机向量X的联合分布难以或无法精确确定，而其一阶矩（均值）和二阶矩（方差）较容易得到。一次二阶矩模式就是一种在随机变量的准确分布未知的情况下，采用只有均值和方差的数学模型来求解结构可靠度的方法。

设基本随机变量向量为：

$$\{X\}=[X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n]^T \tag{7-9}$$

式中，$X_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$服从正态分布，功能函数为：

$$Z=g(X)=g(X_1,\ X_2,\ \cdots X_n) \tag{7-10}$$

极限状态方程为：

$$Z=g(X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n)=0 \tag{7-11}$$

把功能函数在某点$\{X_0\}=[X_{10},\ X_{20},\ \cdots,\ X_{n0}]^T$

展为泰勒级数，有：

$$Z=g(X_{10},\ X_{20},\ \cdots,\ X_{n0})+\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{i0})\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_{X_0}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{i0})^2\frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2}\Big|_{X_0}+\cdots \qquad (7-12)$$

取至一次项得线性函数为：

$$Z\approx g(X_{10},X_{20},\cdots,X_{n0})+\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{i0})\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_{X_0} \qquad (7-13)$$

由概率论知识[6]：功能函数的均值μ_z可由下式求出：

$$\mu_z=g(\mu_{X1},\ \mu_{X2},\ \cdots\mu_{Xn}) \qquad (7-14)$$

当随机变量间相互统计独立时，功能函数的标准差可由下式求出：

$$\sigma_z=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_{\mu_X}\cdot\sigma_{Xi}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (7-15)$$

由前述可靠指标的定义，可求出可靠指标为：

$$\beta=\mu_z/\sigma_z \qquad (7-16)$$

并进而可由式（7-5）和式（7-7）求出结构的破坏概率和可靠度。

从上面的推导可知，在求可靠指标时，需要把非线性功能函数在某点线性化，然后在基本随机变量X_i为正态分布且相互独立的前提下用式（7-16）求解。

在一次二阶矩法发展的早期，人们把线性化点选在基本随机变量的均值点$\{\mu_X\}=[\mu_{X1},\ \mu_{X2},\ \cdots,\ \mu_{Xn}]^T$，但是，由于非线性功能函数线性化带来的误差随线性化点到失效边界的距离的增大

而增大，而均值点一般不在失效边界上，使得计算结果有相当大的误差。另外，求得的可靠指标随极限状态方程的表达式的形式而变化，不能保证计算结果的唯一性和准确性[10]。

针对上述问题，A.M.Hasofer和N.C.Lind于1974年提出了把线性化点选在失效边界上与结构最大可能失效概率对应的点上[11]，该点称为设计验算点，记为 $\{X^*\}=[X^*_1, X^*_2, \cdots, X^*_n]^T$。

设正态分布随机变量X_i的均值为μ_{Xi}，标准差为σ_{Xi}，作变换：

$$Y_i=\frac{X_i-\mu_{Xi}}{\sigma_{Xi}} \tag{7-17}$$

则Y_i为标准正态随机变量。改写功能函数为：

$$\begin{aligned} Z&=g(X_1, X_2, \cdots, X_n)\\ &=g(\mu_{X1}+Y_1\sigma_{X1}, \mu_{X2}+Y_2\sigma_{X2}, \cdots, \mu_{Xn}+Y_n\sigma_{Xn})\\ &=G(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \end{aligned} \tag{7-18}$$

极限状态方程为：

$$G(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)=0 \tag{7-19}$$

它是失效曲面在新的随机变量空间$\{Y\}$中的表示方程。

在新的随机变量空间$\{Y\}$中，可靠指标β可由下式求出[11]：

$$\beta=\sqrt{\{Y^*\}^T\{Y^*\}} \tag{7-20}$$

式中，$\{Y^*\}$为设计验算点的坐标；β的几何意义是坐标原点到失效边界的最短距离。

由此可见，只要求出了设计验算点的坐标$\{Y^*\}$，即可求出可靠指标。由于未知量的个数多于方程的个数，需迭代求解。R. Rackwitz和B. Fiessler提出了一个迭代公式[12]：

$$\{Y\}^{(i+1)}=\left[Y^{(i)T}\{\alpha\}^{(i)}+\frac{G(Y)^{(i)}}{|\nabla G(Y)^{(i)}|}\right]\{\alpha\}^{(i)} \tag{7-21}$$

式中：

$\{Y\}^{(i+1)}$：第i次迭代求出的设计验算点坐标向量；

$\{Y\}^{(i)T}$：第i次迭代采用的设计验算点坐标向量的转置；

$\{a\}^{(i)}$：第i次迭代采用的灵敏系数向量，

$$\{a\}^{(i)}=-\frac{\nabla G(Y)^{(i)}}{|\nabla G(Y)^{(i)}|} \tag{7-22}$$

$G(Y)^{(i)}$：第i次迭代时功能函数的值；

$|\nabla G(Y)^{(i)}|$：第i次迭代求出的功能函数对随机向量$\{Y\}$的梯度向量的模，

$$|\nabla G(Y)^{(i)}|=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial Y_i}\Big|_{Y^{*(i)}}\right)^2\right]^{1/2} \tag{7-23}$$

以上公式是在基本随机变量为正态分布且相互独立的前提下推导出来的。当变量相关时，可通过适当的线性变换得到一组不相关的随机变量。对非正态分布随机变量，可采用R.Rackwitz和B.Fiessler提出的"当量正态"法转换为正态变量[12]，然后用上述各公式求解。

3.对功能函数的进一步考查

由前面的介绍可知，功能函数是结构状态的描述。在功能函数中包含表示结构强度（或称抗力）的随机变量$\{Y(X)\}$，例如材料的屈服极限、断裂韧度、疲劳强度、摩擦系数、粘结力、允许位移等，和表示荷载效应的随机变量$\{S(X)\}$，例如应力、应力强度因子、位移、裂缝的宽深等。所以功能函数又可表示为：

$$Z=g(X)=g[R(X),\ S(X)] \tag{7-24}$$

在转换后的标准正态空间，功能函数为：

$$Z=g(X)=G(Y)=G[R(Y),S(Y)] \tag{7-25}$$

在由式（7-17）定义的变换中，随机向量$\{Y\}$与随机向量$\{X\}$的关系可表示为：

$$\{Y\}=A_1\{X\}+A_2 \tag{7-26}$$

其中，
$$A_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{X1}} & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_{X2}} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_{Xn}} \end{pmatrix} \tag{7-27}$$

$$A_2=\left[-\frac{\mu_{X1}}{\sigma_{X1}},\ -\frac{\mu_{X2}}{\sigma_{X2}},\ \cdots,\ -\frac{\mu_{Xn}}{\sigma_{Xn}}\right]^T \tag{7-28}$$

从前述迭代公式可知，在求解结构可靠指标的运算中，需要求出$\nabla G(Y)$，即功能函数对随机向量$\{Y\}$的梯度向量。

由式（7-25）并注意到式（7-26），利用复合函数的求导法则，有：

$$\begin{aligned}\nabla G(Y)&=([A_1]^{-1})^T\nabla g_X(R,\ S)\\&=([A_1]^{-1})^T[[J_R]\nabla g_R(R,\ S)+[J_S]\nabla g_S(R,S)]\end{aligned} \tag{7-29}$$

式中，$\nabla g_R(R,\ S)$、$\nabla g_S(R,\ S)$、$\nabla g_S(R,\ S)$分别为功能函数对于基本随机向量$\{X\}$、抗力$\{R(X)\}$和荷载效应$\{S(X)\}$的梯度向量，而$[J_R]=\left[\frac{\partial R}{\partial X}\right]$，$[J_S]=\left[\frac{\partial S}{\partial X}\right]$分别为$\{R(X)\}$、$\{S(X)\}$的雅可比矩阵。

抗力$\{R\}$一般可以表示为基本随机变量的显函数，有些抗力变量本身即可作为基本随机变量，而荷载效应$\{S\}$与基本随机变量的关系却复杂得多，多数难以用显示表示。因此，式（7-29）中的$\nabla g_R(R,S)$、$\nabla g_S(R,\ S)$和$[J_R]$都比较容易求得，而J_S则难以求出，需要做进一步的工作，这即是本章后两节所重点讲述的内容。

§7-3 随机有限元法简述

由上节可知，对非线性功能函数，求解可靠指标β的问题现已转化为求雅可比矩阵J_{ni}。

在有限元法中，荷载效应 S 可用位移响应 $\{\delta\}$ 来表示，即有：

$$\{S\}=[Q]\{\delta\}+\{S_0\} \tag{7-30}$$

式中，$[Q]$为位移-荷载效应转换矩阵；$\{S_0\}$为$\{\delta\}=0$时的荷载效应。将上式对基本随机变量$\{X\}$求导得：$[J_n]=[\{J_{n1}\},\cdots,\{J_{nn}\}]$，其中

$$\{J_{ni}\}=\frac{\partial\{S\}}{\partial X_i}=\frac{\partial[Q]}{\partial X_i}\{\delta\}+[Q]\ \frac{\partial\{\delta\}}{\partial X_i}+\frac{\partial\{S_0\}}{\partial X_i}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,n) \tag{7-31}$$

式中，$\frac{\partial[Q]}{\partial X_i}$、$[Q]$、$\frac{\partial\{S_0\}}{\partial X_i}$可以容易地求出，关键在于求$\{\delta\}$和$\frac{\partial\{\delta\}}{\partial X_i}$。

对于线性结构，$\{\delta\}$可由有限元基本方程

$$[K]\{\delta\}=\{F\} \tag{7-32}$$

求出。式中K为结构的整体刚度阵，$\{F\}$为荷载向量。

改写式 (7-32) 为：

$$\{\delta\}=[K]^{-1}\{F\} \tag{7-33}$$

即可求出$\{\delta\}$。

将式 (7-33) 对$\{X\}$求导，得：

$$\frac{\partial\{\delta\}}{\partial X_i}=\frac{\partial[K]^{-1}}{\partial X_i}\{F\}+[K]^{-1}\ \frac{\partial\{F\}}{\partial X_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

(7-34)

由矩阵理论知：

$$\frac{\partial[K]^{-1}}{\partial X_i}=-[K]^{-1}\frac{\partial[K]}{\partial X_i}[K]^{-1}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots n) \qquad (7-35)$$

将式 (7-35) 代入式 (7-34) ，整理得：

$$\frac{\partial\{\delta\}}{\partial X_i}=[K]^{-1}\left(\frac{\partial\{F\}}{\partial X_i}-\frac{\partial[K]}{\partial X_i}[K]^{-1}\{F\}\right)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (7-36)$$

将式 (7-33) 和式 (7-36) 代入式 (7-31) 中，得：

$$\{J_{si}\}=\frac{\partial\{S\}}{\partial X_i}$$

$$=\frac{\partial[Q]}{\partial X_i}[K]^{-1}\{F\}+[Q][K]^{-1}\left(\frac{\partial\{F\}}{\partial X_i}-\frac{\partial[K]}{\partial X_i}\cdot\right.$$

$$\left.[K]^{-1}\{F\}\right)+\frac{\partial\{S_0\}}{\partial X_i}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(7-37)

此即为随机有限元法求线性结构 $[J_s]$ 的基本公式，用此式求出$[Js]$后，即可用前节所述方法求可靠指标β。

在具体运用中，可根据所选的单元种类推导具体的计算公式。文献[7]给出了梁单元的计算公式并求解了平面刚架的可靠度问题，文献[8]给出了三角形常单元的公式并应用于重力坝可靠度计算中，文献[13]进一步推导了三维等参元的公式并分析了拱坝的可靠度。

然而，由于有限元法本身对应力集中问题、断裂问题等奇异问题的局限性，限制了随机有限元法在这些方面的可靠度计算中的有效应用。下节介绍随机边界元法。

§7-4 随机特解边界元理论

考虑到随机有限元法计算工作量大和对奇异问题应用的局限性，以及边界单元法对奇异问题的求解具有独特的优势，有必要开展随机边界元的理论及其在可靠度分析中的应用的研究工作。

由第四章可知，特解边界元法对于求解含有体力的弹性力学问题具有独到的优势。为此，本章在特解边界元法的基础上提出随机特解边界元理论并推导用随机特解边界元理论求解结构可靠度问题的公式。

1.随机特解边界元法的基本方程

如 §4-2所述，含有体力问题的特解边界元方程为：

$$[H]\{U\}-[G]\{T\}=[H]\{U^p\}-[G]\{T^p\} \tag{7-38}$$

本章用大写字母表示随机变量，小写字母表示随机变量的一个实现。

当考虑结构材料的随机性以及结构所受荷载的随机性时，式 (7-38) 中各项均为基本随机变量$\{X\}$的函数。将式 (7-38) 对$\{X\}$求导，得：

$$\frac{\partial[H]}{\partial X_i}\{U\}+[H]\frac{\partial\{U\}}{\partial X_i}-\frac{\partial[G]}{\partial X_i}\{T\}-[G]\frac{\partial\{T\}}{\partial X_i}$$

$$=\frac{\partial[H]}{\partial X_i}\{U^p\}+[H]\frac{\partial\{U^p\}}{\partial X_i}-\frac{\partial[G]}{\partial X_i}\{T^p\}$$

$$-[G]\frac{\partial\{T^p\}}{\partial X_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{7-39}$$

整理后有：

$$[H]\frac{\partial\{U\}}{\partial X_i}-[G]\frac{\partial\{T\}}{\partial X_i}$$

$$=[H]\frac{\partial\{U^p\}}{\partial X_i}-[G]\frac{\partial\{T^p\}}{\partial X_i}+\{W_i\}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{7-40}$$

式中，$\{W_i\}=\frac{\partial[H]}{\partial X_i}[\{U^p\}-\{U\}]-\frac{\partial[G]}{\partial X_i}[\{T^p\}-\{T\}]$

$(i=1,2,\cdots,n)$ (7-41)

对于随机变量空间$\{x\}$的一个点$\{X\}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若以相应的小写字母记各矩阵在该点处的值，则式 (7-38) 和式 (7-40)、可写为：

$$[h]\{u\}-[g]\{t\}=[h]\{u^p\}-[g]\{t^p\} \tag{7-42}$$

$$[h]\frac{\partial\{u\}}{\partial X_i}-[g]\frac{\partial\{t\}}{\partial X_i}=[h]\frac{\partial\{u^p\}}{\partial X_i}-[g]\frac{\partial\{t^p\}}{\partial X_i}+\{W_i\} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{7-43}$$

式中，$\{W_i\}=\frac{\partial[h]}{\partial X_i}(\{u^p\}-\{u\})-\frac{\partial[g]}{\partial X_i}(\{t^p\}-\{t\})$

$(i=1, 2, \cdots, n)$ (7-44)

公式 (7-42) 至式 (7-44) 中各导数形式应理解为各量对随机变量$\{X\}$的导数在$\{X\}=\{x\}$时的值。

式 (7-42) 至式(7-44)中，h、g、$\frac{\partial[h]}{\partial X}$、$\frac{\partial[g]}{\partial X}$、$\{u^p\}$、$\{t^p\}$、$\frac{\partial\{u^p\}}{\partial X_i}$、$\frac{\partial\{t^p\}}{\partial X_i}$ 均为已知量，解方程 (7-42) 可以求出$\{u\}$和$\{t\}$，再由式 (7-44) 求出$\{W_i\}$，代入方程 (7-43) 可以求出$\frac{\partial\{u\}}{\partial X_i}$和$\frac{\partial\{t\}}{\partial X_i}$。

式 (7-42) 和式 (7-43) 称为随机特解边界元法的基本方程。

对于体力为零的问题，式 (7-42) 至式 (7-44) 分别化为：

$$[h]\{u\}-[g]\{t\}=0 \tag{7-45}$$

$$[h]\frac{\partial\{u\}}{\partial X_i}-[g]\frac{\partial\{t\}}{\partial X_i}=\{W_i\}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(7-46)

而此时 $\{W_i\}=\frac{\partial[g]}{\partial X_i}\{t\}-\frac{\partial[h]}{\partial X_i}\{u\}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

(7-47)

求解随机特解边界元的基本方程，可以得到考虑结构与荷载不确定性时区域边界点的面力 $\{t\}$ 和位移 $\{u\}$，并可进而求出结构任一点的应力 $\{S\}$ 以及其他荷载效应。

对于位移功能函数，$[J_s]=\left[\frac{\partial\{u\}}{\partial X_1},\ \frac{\partial\{u\}}{\partial X_2},\ \cdots,\ \frac{\partial\{u\}}{\partial X_n}\right]$ 已经求出。

对于应力功能函数，$[Js]=\left[\frac{\partial\{S\}}{\partial X_1},\ \frac{\partial\{S\}}{\partial X_2},\ \cdots,\ \frac{\partial\{S\}}{\partial X_n}\right]$

下面介绍应力功能函数$[Js]$的求法。

2.域内点应力雅可比阵$[Js]$的计算

由边界元理论可知，域内点的应力可由下式计算：

$$\sigma_{ij}=\int_\Gamma D_{kij}t_k\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma S_{kij}u_k\mathrm{d}\Gamma+\int_\Omega D_{kij}b_k\mathrm{d}\Omega$$

(7-48)

式中，D_{kij}、S_{kij}、t_k、u_k、b_k的意义可参见文献 [14]，在此不一一详述。

将式 (7-48) 对基本随机变量$\{X\}$求导，有

$$J_{ei}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial X_i}=\int_\Gamma\left(\frac{\partial D_{kij}}{\partial X_i}t_k+D_{kij}\frac{\partial t_k}{\partial X_i}\right)\mathrm{d}\Gamma$$

$$-\int_\Gamma\left(\frac{\partial S_{kij}}{\partial X_i}u_k+S_{kij}\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_\Omega\left(\frac{\partial D_{kij}}{\partial X_i}b_k+D_{kij}\frac{\partial b_k}{\partial X_i}\right)\mathrm{d}\Omega$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{7-49}$$

式中，$\frac{\partial D_{kij}}{\partial X_i}$、$\frac{\partial S_{kij}}{\partial X_i}$和$\frac{\partial b_k}{\partial X_i}$均为$\{X\}$的显函数，易于求出，而$u_k$、$t_k$、$\frac{\partial u_k}{\partial X_i}$、$\frac{\partial t_k}{\partial X_i}$可由随机特解边界元法的基本方程（7-42）和式（7-43）求出，至此，J_s可以方便地得到，用第二节的公式可以求出域内任一点的应力可靠指标。

3.边界点应力雅可比阵[Js]的计算

由面力与应力关系式：

$$t_i=\sigma_{ij}n_j \tag{7-50}$$

和物理方程：

$$\sigma_{i,j}=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}u_{k,k}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{7-51}$$

可以推出关系式：

$$\frac{2\nu}{1-2\nu}n_iu_{k,k}+(u_{i,j}+u_{j,i})n_j=\frac{t_i}{\mu} \tag{7-52}$$

再根据多变量函数的求导法则，有关系式：

$$u_{i,j}\frac{\mathrm{d}Y_j}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\xi} \tag{7-53}$$

这里，$\frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}\xi}$和$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\xi}$在边界上可由插值求出。

将方程（7-52）和方程（7-53）联立，对于二维情形，可以得出下列方程：

$$[B]\{Y\}=\{P\} \tag{7-54}$$

其中，

$$\{Y\}=\left[\frac{\partial u_1}{\partial Y_1}\ \frac{\partial u_1}{\partial Y_2}\ \frac{\partial u_2}{\partial Y_1}\ \frac{\partial u_2}{\partial Y_2}\right]^T \tag{7-55}$$

$$\{P\}=\left[\frac{t_1}{\mu}\ \frac{t_2}{\mu}\ \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\xi}\ \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}\xi}\right]^T \tag{7-56}$$

$$[B]=\begin{pmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}n_1 & n_2 & n_2 & \frac{2\nu}{1-2\nu}n_1 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu}n_2 & n_1 & n_1 & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}n_2 \\ \frac{dY_1}{d\xi} & \frac{dY_2}{d\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dY_1}{d\xi} & \frac{dY_2}{d\xi} \end{pmatrix} \tag{7-57}$$

求解方程 (7-54) 可以得出所求高斯点上的 $u_{i,j}$，代入式 (7-51) 可求出边界上各点的应力分量。

将式 (7-51) 对$\{X\}$求导，有：

$$J_{ij}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial X_i}=\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\right)\delta_{ij}u_{k,k}+\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{\partial u_{k,k}}{\partial X_i}$$

$$+\frac{\partial\mu}{\partial X_i}(u_{i,j}+u_{j,i})+\mu\left(\frac{\partial u_{i,j}}{\partial X_i}+\frac{\partial u_{j,i}}{\partial X_i}\right)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{7-58}$$

式中，除 $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial X_i}$ 外均为已知量，而 $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial X_i}$ 可由下述办法求出。

将式 (7-54) 对X_i求导，有：

$$\frac{\partial[B]}{\partial X}\{Y\}+[B]\frac{\partial\{Y\}}{\partial X_i}=\frac{\partial\{P\}}{\partial X_i} \tag{7-59}$$

解方程 (7-59) 可得 $\frac{\partial\{Y\}}{\partial X_i}$，亦即可得 $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial X}$，而

$$\frac{\partial\{P\}}{\partial X_i}=\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{t_1}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{t_2}{\mu}\right)\ \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{du_1}{d\xi}\right)\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{du_2}{d\xi}\right)\right]^T \tag{7-60}$$

中的前两项已从随机特解边界元的基本方程式 (7-43) 中求出，后两项可由边界插值求出。

至此，已可求出边界点的应力雅可比阵[J_s]中的所有各量。

以上各公式在实际计算时应根据所采用的单元形式推导具体形式，并可根据问题的性质作进一步的简化。

4.算例

基于前述随机特解边界元法的理论及公式，编制了考虑随机性的结构分析和结构可靠度分析程序，在微机上运行通过。为考查随机特解边界元程序的计算精度及其对实际问题的适应性，计算了无限长矩形墙和重力坝两个例题，结果表明：随机特解边界元法具有较高的计算精度和较广的适用范围。

例1 考虑图 7-1 所示无限长矩形墙，材料弹模 $E=2.4\times10^4$MPa，泊松比 $\nu=0.0$，墙高$h=5.0$m，墙厚$h=1.0$m，底部为简支。

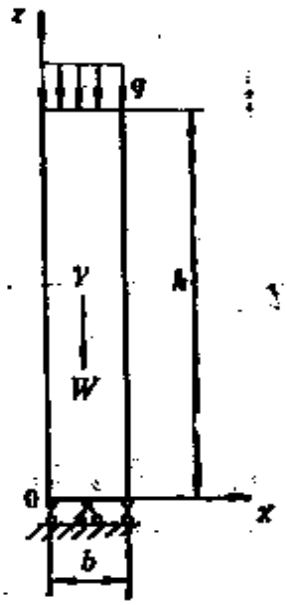


图7-1 矩形墙简图

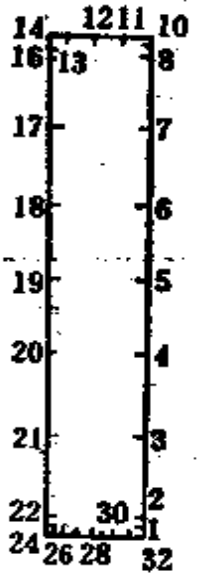


图7-2 单元剖分图

首先考查顶部承受随机均布力q的情况。不计自重时，理论解给出底部的竖向应力为：

$$S=q$$

设q服从正态分布，其均值 $\mu_q=0.02$MPa，标准差 $\sigma_q=$

0.002MPa，则由概率论知，S为具有均值$\mu_s=0.02$MPa，标准差$\sigma_s=0.002$MPa的正态分布随机变量，计算中采用了32个结点，16个二次单元，单元剖分示于图7-2，其中的小单元是为了保证计算精度。

用随机特解边界元法计算出荷载q作用下26点至30点的应力均值及标准差与理论解的误差列于表7-1。

表7-1 随机荷载作用下计算值与理论值比较表

单位：10^{-2}MPa

点号		26	27	28	29	30
均值	理论值	−2.0	−2.0	−2.0	−2.0	−2.0
	计算值	−1.92	−2.02	−2.00	−2.02	−1.92
	误差	4.0%	1.1%	0.0%	1.1%	4.0%
标准差	理论值	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
	计算值	0.192	0.202	0.200	0.202	0.192
	误差	4.0%	1.0%	0.0%	1.0%	4.0%

另考虑自重作用的情况。自重作用下底部的竖向应力为：

$$S=-h\gamma$$

式中，墙高h为常量；容重γ为正态分布随机变量，其均值$\mu_\gamma=100\text{kN/m}^3$，标准差$\sigma_\gamma=10\text{kN/m}^3$，$S$的统计参数的理论值为：

$$\mu_s=h\mu_\gamma=-0.05\text{MPa}$$

$$\sigma_s=h\sigma_\gamma=0.005\text{MPa}$$

程序计算出的26点到30点的竖向应力均值及标准差值列于表7-2。

由表7-1和表7-2可知，随机特解边界元法的计算结果与理论值的误差均在4%以内，表明方法具有较高的精度。对于含有随机体力的结构，随机特解边界元法能给出满意的结果。

表7-2 随机自重作用下计算值与理论值比较表

单位：10^{-2}MPa

点号		26	27	28	29	30
均值	理论值	−5.0	−5.0	−5.0	−5.0	−5.0
	计算值	−4.80	−5.04	−4.99	−5.04	−4.80
	误差	4.0%	0.8%	0.2%	0.8%	4.0%
标准差	理论值	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	计算值	0.480	0.504	0.499	0.504	0.480
	误差	4.0%	0.8%	0.2%	0.8%	4.0%

例2 为进一步考查随机特解边界元法在实际问题中的应用，计算图7-3所示重力坝空库时在自重作用下坝踵处的抗压应力可靠度。坝体混凝土容重为随机变量，其均值为21.8kN/m³标准差为2.18kN/m³，服从正态分布。计算中仍采用二次单元，在坝基角点处使用了小单元，以消除计算误差，小单元尺寸示于图7-4。坝基范围取3倍的坝高。共采用100个结点，50个二次单元。

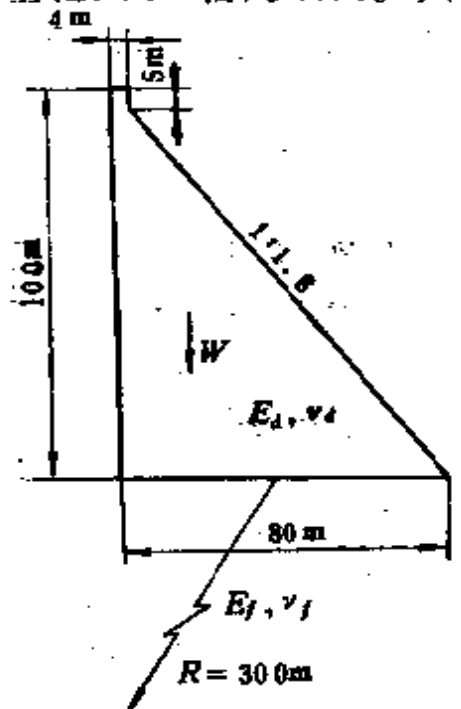


图7-3 重力坝剖面图

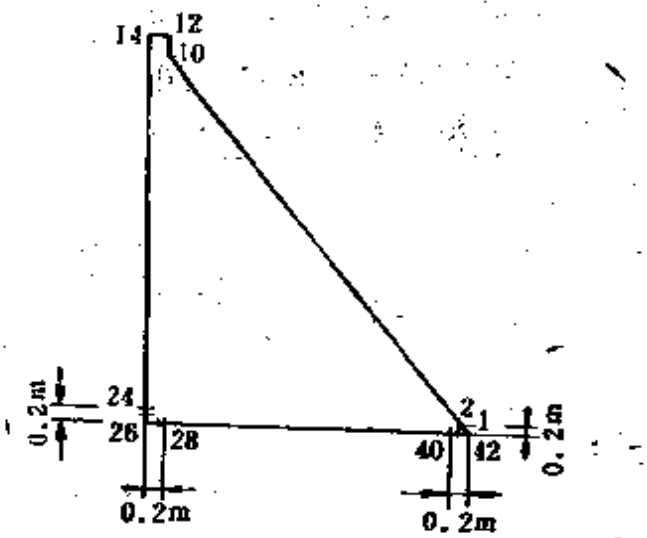


图7-4 小单元布置示意图

考查坝踵处24号点的抗压应力可靠度，取该点极限应力R为随机变量，其均值为$\mu_R=23\text{MPa/m}^2$，标准差$\sigma_R=4.6\text{MPa}$，正态分布。若24点的竖向压应力为S，则极限状态方程为：

$$Z=R-S$$

假设为刚性地基，计算出24点的抗压可靠指标为$\beta=4.465$，与材料力学法计算出该点的可靠指标4.519相比，误差为1.2%，说明这两种方法计算的结果十分接近。但由于随机特解边界元法可以考虑多种因素，如地基弹性的影响，复杂受力情况以及奇异问题等，故具有更广泛的适用性。

图7-5给出了考虑地基弹性时24点的抗压应力可靠指标随坝体与坝基的弹模比$\alpha_E=E_d/E_f$的变化情况。由图可见，随着地基刚度的减小，可靠指标下降。假设地基为刚性时得到的可靠指标最大，由于实际工程中的岩基不可假设为刚性，故所得结果偏大。因此，考虑地基弹性所得结果更加符合实际。这充分显示了随机特解边界元法较材料力学法的优越性。

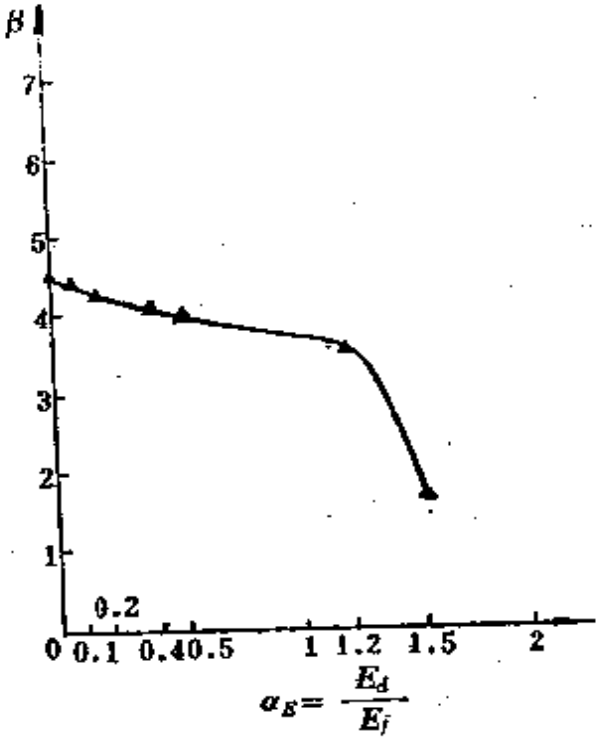


图7-5 坝踵处抗压可靠指标与弹模比关系图

§7-5 结构动力可靠度理论基础

结构动力可靠度是承受动态作用的结构在规定时间内和规定条件下完成预定功能的概率。由于动力可靠性分析的难度较大，故多采用简化的模型，把多自由度或无限自由度体系简化为单自

由度体系或仅考虑起主要作用的振型分量，不考虑结构体系及静荷载的随机性，不考虑结构由于静力或动力失稳、腐蚀、磨损等导致的破坏。

动力可靠性分析中常采用的破坏机制有首次超越破坏机制和疲劳破坏机制，疲劳破坏机制认为破坏是由于结构在长期的动力荷载作用下其动力反应在不大的界限内（低于或远低于首次超越破坏的界限）多次重复，最后因累积损伤达到某一限值，或裂纹扩张而发生破坏。首次超越破坏机制将结构的动力反应（如应力、位移等）首次超越临界值或安全界限作为结构破坏的标志。在这两种破坏机制中，首次超越机制虽然简单，却给出了动力可靠性的基本思路。本章仅介绍基于首次超越破坏机制的结构动力可靠性分析。

在首次超越问题中，按安全界限的不同类别，动力可靠度有不同的定义。安全界限分为单侧界限、双侧界限和包络界限，其中单侧界限可作为双侧界限的特例处理且双侧界限具有较广的应用背景，因此我们主要讨论双侧界限的情形，包络界限情形参见文献[16]。

设结构的动力反应$X(t)$满足

$$-b_2 \leqslant X(t) \leqslant b_1 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{7-61}$$

时是安全的，则结构在时间[0，T]内的动力可靠度定义为：

$$P_{s2}(b_1, -b_2) = P[X(t) \leqslant b_1 \cap X(t) \geqslant -b_2,\ 0 \leqslant t \leqslant T] \tag{7-62}$$

即结构在时间[0，T]内的动力可靠度定义为其动力反应$X(t)$不超过安全界限[$-b_2$，b_1]的概率。

$X(t)$为随机过程，其最大值$\max X(t)$和最小值$\min X(t)$为随机变量，下列关系式显然成立：

$$X(t) \leqslant b_1 \Leftrightarrow \max X(t) \leqslant b_1 \tag{7-63}$$

$$X(t) \geqslant -b_2 \Leftrightarrow \min X(t) \geqslant -b_2 \tag{7-64}$$

即随机过程$X(t) \leqslant b_1$（或$X(t) \geqslant -b_2$）等价于其最大值$\max X(t) \leqslant b_1$（或其最小值$\min X(t) \geqslant -b_2$）。故结构动力可靠度又

可定义为：

$$P_{s2}(b_1,-b_2)=P[\max X(t)\leqslant b_1 \cap \min X(t)\geqslant -b_2, \quad 0\leqslant t\leqslant T] \tag{7-65}$$

设结构在零初始条件下首次超越安全界限$[-b_2,\ b_1]$的时间为T_{f2}，其概率分布函数为：

$$F_{Tf2}(t)=P(T_{f2}\leqslant t,\ 0\leqslant t\leqslant T) \tag{7-66}$$

显然$F_{Tf2}(t)$的最大值为$F_{Tf2}(T)$，它表示首次超越时间T_{f2}小于T的概率，亦即在T内发生首次超越的概率，因此，$F_{Tf2}(T)$即为破坏概率。所以结构动力可靠度又可定义为：

$$P_{s2}(b_1,-b_2)=1-F_{Tf2}(T) \tag{7-67}$$

即结构动力可靠度为在时间$[0,\ T]$内不发生首次超越的概率。

可见，计算动力可靠度等价于求首次超越安全界限时间的概率分布函数。由于$X(t)$最值的分布函数和首次超越时间的分布函数难以精确确定，故多用近似解法。当安全界限很大时，由于$X(t)$超越界限的机会很少，可以认为每个超越是独立发生的事件，能够应用泊松分布法则。

对于在时间$[0,\ T]$内的交叉总次数$n(\lambda,\ T)$为非平稳随机泊松过程的情形，双侧界限动力可靠度为[17]：

$$P_{s2}(b_1,-b_2)=\exp\{-\int_0^T[\nu^{+}_{b_1}(t)+\nu^{-}_{b_2}(t)]\mathrm{d}t\} \tag{7-68}$$

式中，$\nu^{+}_{b_1}(t)$为单位时间内$X(t)$以正斜率和$X=b_1$交叉次的期望值；$\nu^{-}_{b_2}(t)$为单位时间内$X(t)$以负斜率和$X=-b_2$交叉次数的期望值；

式（7-68）为基于泊松假定的结构动力可靠度计算的基本公式。

如果$X(t)$与$\dot{X}(t)$的共概率密度函数$f_{X\dot{X}}(X,\dot{X},t)$对于原

点对称，即：

$$f_{x\dot{x}}(X,\ \dot{X},\ t)=f_{x\dot{x}}(-X,\ -\dot{X},\ t) \tag{7-69}$$

则有：

$$v_{b_1}^{+}(t)=v_{-b_2}^{+}(t) \tag{7-70}$$

所以当$b_1=b_2=b$时，式 (7-68) 可写为：

$$P_{s_2}(b_1-b)=F_{xm}(\lambda)=1-F_{T/2}(T)$$

$$=\exp[-2\int_0^T v_b^{+}(t)dt] \tag{7-71}$$

对于单侧界限$X(t)\leqslant b$，有：

$$P_{s_1}(b)=\exp[-\int_0^T v_T^{+}(t)dt] \tag{7-72}$$

当$X(t)$为平稳随机过程时，$v^{+}_{b}(t)$与时间t无关，式 (7-71) 和式 (7-72) 分别为：

$$P_{s_2}(b,\ -b)=\exp(-2v_b^{+}T) \tag{7-73}$$

和

$$P_{s_1}(b)=\exp(-v_b^{+}T) \tag{7-74}$$

若$X(t)$为均值为零的平稳高斯过程，则：

$$v_b^{+}=\frac{1}{\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_x^2}\right) \tag{7-75}$$

此时的动力可靠度为：

$$P_{s_2}(b,-b)=\exp\left[-\frac{\omega_2}{\pi}T\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right)\right] \tag{7-76}$$

式中：

$$\omega_2=\left[\int_0^\infty \omega^2 G_x(\omega)d\omega\Big/\int_0^\infty G_x(\omega)d\omega\right]^2=\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \tag{7-77}$$

$$\upsilon=\frac{b}{\sigma_x} \tag{7-78}$$

是界限值b和$X(t)$的标准差σ_x之比。

上述各式为基于泊松假定的动力可靠度计算公式，由于泊松过程只适用于交叉次数是独立的且为小概率事件，所以它对于窄频带过程与低界限问题是不适用的。E.H.Vanmarcke基于交叉次数为马尔克夫过程的假定，对高斯过程的表达式作了改进。

非平稳高斯过程$X(t)$在双侧对称界限时的基于泊松过程的动力可靠度表达式为：

$$P_{s2}(b_1,-b)=\exp\left\{-\int_0^T\frac{\omega_2(t)}{\pi}\exp\left[-\frac{r^2(t)}{2}\right]dt\right\} \tag{7-79}$$

其基于马尔克夫的改进公式为：

$$P_{s2}(b,-b)=\exp\left\{-\int_0^T 2\nu_0^+(t)\times\left[\frac{1-\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{bq(t)}{\sigma_x(t)}\right]}{\exp\left[\frac{b^2}{2\sigma_x^2(t)}\right]-1}\right]dt\right\} \tag{7-80}$$

对式（7-76）所示平稳高斯过程基于泊松假定的公式改进公式为：

$$P_{s2}(b,-b)=\exp\left\{-\frac{\omega_2}{\pi}T\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\times\frac{1-\exp\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}qr\right]}{1-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)}\right\} \tag{7-81}$$

式中，$q=\frac{\omega_s}{\omega_2}$ (7-82)

$$\omega_s=\sqrt{\omega_2-\omega_1} \tag{7-83}$$

$$\omega_1=\int_0^\infty \omega G_x(\omega)\mathrm{d}\omega \Big/ \int_0^\infty G_x(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{7-84}$$

§7-6 用随机特解边界元计算结构动力可靠度

由前节可知，若求得结构的动力反应$S(t)$，即可求出结构的动力可靠度。本节介绍用随机特解边界元法计算结构动力随机反应的方法。

1.用模拟法求地震作用下的结构反应S(t)

由 §5-4，地震作用下结构动力分析的特解边界元方程为：

$$[\bar{M}]\{\ddot{S}\}+[\bar{H}]\{S\}=\{F^p\} \tag{7-85}$$

式中，$$[\bar{M}]=\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{7-86}$$

$$[\bar{H}]=\begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} \\ H_{21} & -G_{22} \end{bmatrix} \tag{7-87}$$

$$\{S\}=\begin{Bmatrix} U_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \tag{7-88}$$

$$\{F^p\}=[H]\{U^{p2}\}-[G]\{T^{p2}\} \tag{7-89}$$

对于二维和三维情形，$\{U^{p2}\}$、$\{T^{p2}\}$与地震时地面加速度$\ddot{U}_g(x)$的关系见式（5-68）至式（5-71）。

设地震加速度波为非平稳随机过程，用下式表示：

$$\ddot{U}_g(x)=g(t)S(t) \tag{7-90}$$

式中 $\ddot{U}_g(x)$ ——地震加速度，为一随机过程；

$g(t)$ ——为时间t的确定函数；

$S(t)$ ——为均值为0的平稳高斯过程。

$\ddot{U}_g(x)$ 的模拟模型可取为[16]：

$$\ddot{U}_g^d(x)=g(t)S^d(t) \tag{7-91}$$

式中，$$S^d(t)=\sigma_x\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=1}^{n}\cos(\omega_k t+\phi_k) \tag{7-92}$$

为随机高斯过程$S(t)$的抽样函数的模拟模型。

设$S(t)$ 的功率谱密度函数为$S_x(\omega)$，则式 (7-92) 中各项的意义为：

$$\sigma_x=\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\mathrm{d}\omega\right]^{1/2} \tag{7-93}$$

为$S(t)$的标准差；

ω_k——具有概率密度函数：

$$P(\omega)=\frac{S_x(\omega)}{\sigma_x^2} \tag{7-94}$$

的随机变量；

ϕ_k——[0，2π]范围内的同一随机数；

N——充分大正数。

模拟时，由已知的$S_x(\omega)$通过式 (7-93) 和式(7-94)求出概率密度函数$P(\omega)$，另在[0，1]区间内抽取同一随机变量 (即[0，1]区间内的均匀分布随机变量)、通过滤波$P(\omega)$ 可做出抽样ω_k，独立地重复N次，得N个ω_k ($k=1$，2，…，N)。另一方面，与此独立地从[0，2π]范围内做出独立的N个ϕ_k，把这一组ω_k，ϕ_k ($k=1$，2，…，N) 代入式 (7-92) 右侧，按一定时间间隔给出t，就可算出$S^d(t)$，代入式 (7-91) 即可得地震加速度的一个抽样函数$\ddot{U}^d_g(X)$。以上操作重复m次，即可得到m个$\ddot{U}^d_{gi}(t)$ ($i=1$，2，…，m)。用这m个抽样函数代入式 (7-85)，即可算出m个反应曲线$S_i(t)$，亦即$S(t)$的m个抽样函数，

对其做统计分析即可得出$S(t)$的均值$E[S(t)]$和标准差σ_{xs}，令最大反应期望值为σ_{xs}的p倍，最大反应标准差为σ_{xs}的q倍，即：

$$E[\max S(t)]=P\sigma_{xs} \tag{7-95}$$

$$\sigma_{\max S(t)}=q\sigma_{xs} \tag{7-96}$$

A.G.Davenport给出的公式为[17]：

$$p=\sqrt{2\ln\nu\tau}+\frac{0.5772}{\sqrt{2\ln\nu\tau}} \tag{7-97}$$

$$q=\frac{\pi}{6}\frac{1}{\sqrt{2\ln\nu\tau}} \tag{7-98}$$

式中，τ为地震的持续时间；

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_2/\lambda_0} \tag{7-99}$$

为反应$S(t)$的平均正向跨零率：

$$\lambda_i=\int_0^\infty \omega^i G(\omega)d\omega \qquad (i=0,\ 1,\ 2) \tag{7-100}$$

求出$E[\max S(t)$和$\sigma_{\max S(t)}$后即可用前节公式进行结构动力可靠度分析。

当地震的强烈作用持续时间比结构的基本周期长得多时，一般可用零期望平均高斯随机过程来模拟，亦具有足够的工程精度[18]。此时可令式(7-91)中的$g(t)=1$。

2.用模拟法求瞬态动力荷载作用下的结构反应$S(t)$

§5-3的公式(5-56)给出了瞬态动力问题的特解边界元方程，即：

$$[\bar{M}]\{\ddot{S}\}+[\bar{H}]\{S\}=\{F\} \tag{7-101}$$

式中，$\{F\}$向量中的动力荷载在各边界节点上的值$\bar{t}_{ij}$可用互相关多个随机过程的数学模型来计算[16]，然后代入方程(7-101)，引入边界条件后，用§5-3给出的振动仿真法可求出结构的时程反应$S(t)$的一个抽样函数$S_i(t)$，重复m次可得$S(t)$的m个抽样函数。与上面所述地震反应的处理方法相同，对$S_i(t)$进行统计分析，

可求出$S(t)$的均值和标准差以及$S(t)$的最大值$\max S(t)$的均值和标准差，从而可以进行结构在随机瞬态动力荷载作用下的动力可靠度分析。

3.用振型迭加法求结构反应$S(t)$

用 §5-2 所述的自振问题的特解边界元法，可以求出结构的自振频率ω_i和振型ϕ_i。将结构在动力荷载作用下的反应按振型分解，即令：

$$\{S\}=[\phi]\{Y\} \tag{7-102}$$

若能从边界元方程中求出$\{Y\}$及其导数与动力荷载$P(t)$的关系式，则由$P(t)$的功率谱密度可以求出$\{Y\}$的功率谱密度，并进而可以求出结构反应$S(t)$的功率谱密度及所需的统计量，从而可以进行结构动力可靠度分析。

从特解边界元基本方程出发求广义坐标$\{Y\}$与动力荷载的关系进而进行随机反应分析的工作值得进一步研究。

参 考 文 献

[1] 吴世伟. 用验证荷载法校核重力坝的可靠度. 应用力学学报, 1986年第6期

[2] 赵国藩、曹居易、张宽权. 工程结构可靠度. 北京: 水利水电出版社, 1984.12

[3] E. Paloheimo, H. Hannus. Structural Design Based on Weighted Fractiles. J.Struct. Div. ASCE, Vol.100, ST7, June, 1974

[4] 叶军、吴世伟. 蒙特卡罗法在结构可靠度分析中的应用. 河海大学学报, 1988年第5期

[5] 董聪星、周鸿钧. 结构可靠度分析的蒙特卡罗边界法. 郑州工学院学报, 1989年第2期

[6] 吴翩玲、姚耀武、陈重. 用高斯积分法研究随机变量不同分布的重力坝失效概率, 重力坝的应力稳定与可靠性, 北京: 中国科学技术出版社, 1990

[7] A. Der Kiureghian and Jyh-Bin Ke. Finite Element Based Reliability Analysis of Frame Structures. ICOSSAR '85 .pp.I-395～I-404

[8] 武清玺、吴世伟. 基于随机有限元法的重力坝可靠度分析. 水利学报, 1990

年第1期

[9] A. H-S. Ang and W. H. Tang. Probability Concepts in Engineering Planning and Design. John Wiley & Sons, Vol.I, 1975, Vol. II, 1984

[10] 吴世伟. 结构可靠度分析. 北京: 人民交通出版社, 1990

[11] A. M. Hasofer and N. C. Lind. An Exact and Invariant First Order Retiability Format. Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.1974, pp.111~121

[12] R. Rackwitz and B. Fiessler. Structural Reliability Under Combined Load Seguences. Computers and Structures, Vol.9, pp. 489-494, 1978

[13] 李同春、吴世伟. 基于三维随机有限元的拱坝可靠度分析. 工程结构可靠性. 全国第二届学术交流会议论文集, 1989.11

[14] C. A. Brebbia, et al. Boundary Element Techniques in Engineering Pentech Press, 1980

[15] 李桂青. 结构可靠度. 武汉: 武汉工业大学出版社,1989

[16] [日]星谷胜著. 随机振动分析. 北京: 地震出版社, 1977

[17] A.G.Davenport. Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading. Proceeding Institution of Civil Engineers, London, Vol.28 1964

[18] A. Der Kiureghian. A Response Spectrum Methed for Random Viberations.UCB/EERC, pp.80-15, 1980

第八章　特解边界元法与其它方法的数值耦合

§8-1　概　　述

事物都是一分为二的，数值方法也是如此。各种数值方法都有它发挥最佳效用的特定条件和适用范围，因此，随着数值方法的发展，各种数值方法耦合起来求解问题，以发挥各种方法的优势，已成为必然。

通常，耦合问题包含两个方面的内容：其一是结构与周围介质的耦合，包括结构和地基、结构与流体以及结构、地基和流体的相互作用等；其二是各种数值方法的耦合，计有有限元法与有限元法的耦合，有限元法与边界元法的耦合、不同边界元法的耦合、边界元法与加权残值法的耦合，以及边界元法与其它半解析法的耦合等。目前，后者的发展比较活跃，大有百花齐放的趋势。

本章介绍作者提出来的边界元法与样条有限点法的耦合和特解边界元法与广义边界元法的耦合。

§8-2　边界元法与样条有限点法的耦合

边界元法适用于非规则区域或大区域（无限域等），而样条有限点比较适用于求解规则区域，且所需的自由度数较少，若能将两者结合起来求解问题，则具有较为广阔的应用前景。本节介绍文献[5]、[6]给出的用耦合法求解流体与固体的耦振问题，其中流体采用边界元法，固体采用样条有限点法。

如图8-1所示，流体和固体共同作用将对固体的自振特性产生影响。为了分析这种影响，我们利用边界元法计算流体内的动水压力。

在忽略流体的粘性和可压缩性及表面重力波的影响时，流体内的动水压力p满足Laplace方程，即：

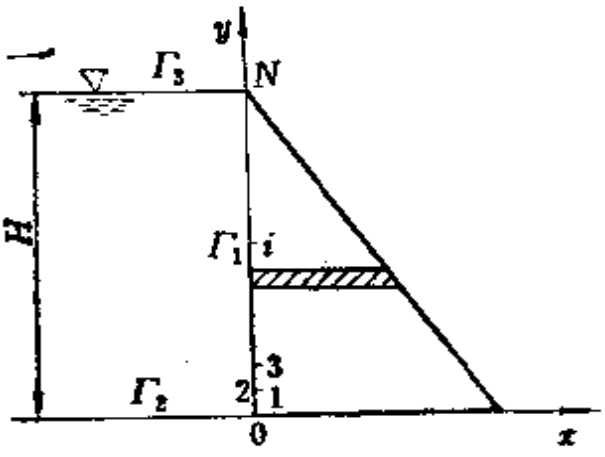


图8-1 流体与固体耦合图

$$\nabla^2 p=0 \tag{8-1}$$

并设边界条件为：

$$\left.\begin{aligned} q_1&=\frac{\partial p}{\partial n}=-\rho_w \ddot{u}_1, && X\in\Gamma_1\\ q_2&=0 && X\in\Gamma_2\\ p_3&=0 && X\in\Gamma_3 \end{aligned}\right\} \tag{8-2}$$

式中，$\ddot{u}_1$是固体与流体交界面上的节点加速度（法向）；ρ_w为流体的质量密度。

根据第二章所述的理论，可得方程（8-1）的边界元方程为：

$$[H]\{p\}=[G]\{q\} \tag{8-3}$$

进一步按照边界条件（8-2），将方程（8-3）写成分块形式：

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13}\\ H_{21} & H_{22} & H_{23}\\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13}\\ G_{21} & G_{22} & G_{23}\\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3 \end{Bmatrix} \tag{8-4}$$

引入边界条件（8-2）的后两式，整理得：

$$\begin{bmatrix}\hat{H}_{11} & \hat{H}_{12}\\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{G}_{11} & \hat{G}_{12}\\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\ 0\end{Bmatrix} \tag{8-5}$$

其中，$[\hat{H}_{11}]=[H_{11}]$

$$[\hat{G}_{11}]=[G_{11}]$$
$$[\hat{H}_{12}]=[H_{12}\quad -G_{13}]$$
$$[\hat{G}_{12}]=[G_{12}\quad -H_{13}]$$

$$[\hat{H}_{21}]=\begin{bmatrix}H_{21}\\ H_{31}\end{bmatrix}$$

$$[\hat{G}_{21}]=\begin{bmatrix}G_{21}\\ G_{31}\end{bmatrix}$$

$$[\hat{H}_{22}]=\begin{bmatrix}H_{22} & -G_{23}\\ H_{32} & -G_{33}\end{bmatrix}$$

$$[\hat{G}_{22}]=\begin{bmatrix}G_{22} & -H_{23}\\ G_{32} & -H_{33}\end{bmatrix}$$

$$\{\hat{p}_2\}=\begin{Bmatrix}p_2\\ q_3\end{Bmatrix}$$

将式 (8-5) 展开，得到两个方程：

$$[\hat{H}_{11}]\{p_1\}+[\hat{H}_{12}]\{\hat{p}_2\}=[\hat{G}_{11}]\{q_1\} \tag{8-6a}$$
$$[\hat{H}_{21}]\{p_1\}+[\hat{H}_{22}]\{\hat{p}_2\}=[\hat{G}_{21}]\{q_1\} \tag{8-6b}$$

从式 (8-6) 中消去$\{\hat{p}_2\}$，得：

$$\{p_1\}=[Q]\{q_1\} \tag{8-7}$$

式中 $[Q]=[\hat{H}]^{-1}[\hat{G}]$

$$[\hat{H}]=[\hat{H}_{11}]-[\hat{H}_{12}][\hat{H}_{22}]^{-1}[\hat{H}_{21}]$$
$$[\hat{G}]=[\hat{G}_{11}]-[\hat{G}_{12}][\hat{H}_{22}]^{-1}[\hat{G}_{21}]$$

再将边界条件 (8-2) 中的第一式引入方程 (8-7)。可以求得交

界面上动水压力为：

$$\{p_1\}=-\rho_w[Q]\{\ddot{u}_1\} \tag{8-8}$$

当固体部分按照二维问题分析时，为了实现流体与固体的耦合，需要对式（8-8）进行扩阶处理（详见第十二章），本节将固体按照一维梁分析，其u_1即是梁的挠度。

对于固体部分，如图8-1所示，将其看作变截面梁处理，下面给出其样条有限点法的分析原理。

首先，将变截面梁在[0，H]内分成N等份，在$N+1$个节点上设定待求的位移函数，并用样条函数表示为：

$$W_o=W(y)\sin(\omega\tau+\alpha) \tag{8-9}$$

其中，$W(y)=\sum_{i=-1}^{N+1}C_i\phi_i=[\phi]\{C\}$ (8-10)

式中，$[\phi]$是利用样条函数计算出的与坐标有关的系数矩阵，$\{C\}$是待定系数，并且：

$$\{C\}=[C_{-1}\quad C_0\quad C_1\quad\cdots\quad C_N\quad C_{N+1}]^T \tag{8-11}$$

$$[\phi]=[\phi_{-1}\quad\phi_0\quad\phi_1\quad\cdots\quad\phi_N\quad\phi_{N+1}] \tag{8-12}$$

其中，$\phi_i(y)$是一组由三次B样条函数组合构成的基函数[7] [8]：

$$\phi_{-1}(y)=\varphi_3\left(\frac{y}{h}+1\right)$$

$$\varphi_0(y)=\varphi_3\left(\frac{y}{h}\right)-4\varphi_3\left(\frac{y}{h}+1\right)$$

$$\phi_1(y)=\varphi_3\left(\frac{y}{h}+1\right)-\frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{y}{h}\right)+\varphi_3\left(\frac{y}{h}-1\right)$$

$$\phi_i(y)=\varphi_3\left(\frac{y}{h}-i\right)\quad(i=2,\ 3,\ \cdots,\ N-2)$$

$$\phi_{N-1}(y)=\varphi_3\left(\frac{y}{h}-N+1\right)-\frac{1}{2}\varphi_3\left(\frac{y}{h}-N\right)$$

$$+\varphi_3\left(\frac{y}{h}-N-1\right)$$

$$\phi_N(y)=\varphi_3\left(\frac{y}{h}-N\right)-4\varphi_3\left(\frac{y}{h}-N-1\right)$$

$$\phi_{N+1}(y)=\varphi_3\left(\frac{y}{h}-N-1\right)$$

这里$h=H/N$，$\varphi_3(y)$是三次B样条函数，表达式为：

$$\varphi_3(y)=\frac{1}{6}\begin{cases}(y+2)^3, & y\in(-2,\ -1]\\ (y+2)^3-4(y+1)^3, & y\in(-1,\ 0]\\ (2-y)^3-4(1-y)^3, & y\in(0,\ 1]\\ (2-y)^3, & y\in(1,\ 2)\\ 0, & |y|\geqslant 2\end{cases}$$

(8-13)

且$\phi_i(y)$具有下列特点：

$\phi_i(o)=0 \quad (i\neq -1)$

$\phi_i'(o)=0 \quad (i\neq -1,\ 0)$

$\phi_i(y_N)=0 \quad (i\neq N+1)$

$\phi_i'(y_N)=0 \quad (i\neq N+1,\ N)$

根据$\phi_i(y)$的上述特点可以引入变截面梁的固端条件，引入后位移函数为：

$$W(y)=\sum_{i=1}^{N+1}C_i\phi_i=[\phi]\{C\} \tag{8-14}$$

其中，$[\phi]=[\phi_1\quad \phi_2\quad \cdots\quad \phi_N\quad \phi_{N+1}]$

$\{C\}=[C_1\quad C_2\quad \cdots\quad C_N\quad C_{N+1}]^T$ (8-15)

有了位移函数，便可将梁在振动过程中的能量泛函表达为：

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2$$

式中，
$$\Pi_1=\frac{1}{2}\int_0^H\left\{\left[EI(y)\frac{d^2W}{dy^2}\right]^2-\bar{m}w^2\omega^2\right\}dy \tag{8-16}$$

$$\Pi_2=-\int_0^H q\omega dy \tag{8-17}$$

这里，$I(y)$是变截面的转动惯量；$\bar{m}$是梁的线密度；ω是梁的振动圆频率；q是作用在梁上的分布荷载。并注意式中为了书写上的方便，省略了荷载因子$\sin(\omega\tau+\alpha)$。

将式 (8-14) 引入式 (8-16)，得：

$$\Pi_1=\frac{1}{2}\int_0^H EI(y)\{C\}^T[\phi'']^T[\phi'']\{C\}dy$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^H\bar{m}\omega^2\{C\}^T[\phi]^T[\phi]^T[C]dy \tag{8-18}$$

式中，$[\phi'']$是$\phi_i(y)$对坐标y的二阶导数。由于变截面梁的$EI(y)$和$\bar{m}$沿梁是变化的，因此需要对式 (8-18) 分段计算，得：

$$\Pi_1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)h}^{kh}EI(y)\{C\}^T[\phi'']^T[\phi'']\{C\}dy$$

$$-\frac{1}{2}\omega^2\sum_{K=1}^{N}\int_{(k-1)h}^{kh}\bar{m}\{C\}^T[\phi]^T[\phi]\{C\}dy$$

$$=\frac{1}{2}\{C\}^T[F]\{C\}-\omega^2\{C\}^T[A]\{C\} \tag{8-19}$$

其中，
$$[F]=\sum_{K=1}^{N}\int_{(k-1)h}^{kh}EI(y)[\phi'']^T[\phi'']dy$$

$$[A]=\sum_{K=1}^{N}\int_{(k-1)h}^{kh}\bar{m}[\phi]^T[\phi]\mathrm{d}y \tag{8-20}$$

类似地，利用式（8-8）可得π_2的计算式为：

$$\Pi_2=\int_0^H q w\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^H \rho_w\{C\}^T[\phi]^T[Q]_m^T\{C\}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{\omega^2}{2}\{C\}^T[E]\{C\} \tag{8-12}$$

其中，
$$[E]=2\rho_w\sum_{K=1}^{N}\int_{(k-1)h}^{kh}[\phi]^T[Q]_k^T[\phi]\mathrm{d}y \tag{8-22}$$

这里的q已用$q=-p_1$和$u_1=w$引入了固体和流体的连续条件，其中$[Q]_m$表示矩阵$[Q]$的第m行元素所组成的矩阵。

根据最小势能原理$\delta\Pi=0$，得：

$$[F]\{C\}-\omega^2[A]\{C\}-\omega^2[E]\{C\}=0$$

整理得，
$$[F]\{C\}=\omega^2[M]\{C\} \tag{8-23}$$

其中，
$$[M]=[A]+[E] \tag{8-24}$$

这里$[E]$是由流体作用引起的附加质量矩阵。

方程（8-23）即是固体和流体的耦振特征方程，解此方程可得梁的振型和频率。

作者曾对文献[9]中的例子进行过验证，其第一阶频率文献值为7.45，而计算值为7.09，两者相差不足5%，因此本法具有较好的精度。

§8-3 特解边界元法与广义边界元法的耦合

广义边界元法是在边界积分方程的基础上通过坐标转换，给出了以广义坐标为变量的边界积分方程，这种广义坐标的数目比

一般边界元法的自由度数目小得多，从而可以节约大量的计算工作量，特别适应于已知区域基本解的大区域问题。特解边界元法在求解动力问题时有其独特的优点，若将这两种方法耦合起来，求解某些特殊的问题，将具有特殊的效果。本节介绍文献[10]给出的用特解边界元法与广义边界元法耦合求解流固耦振问题的方法，其中流体动水压力采用广义边界元法计算，固体的动力方程采用特解边界元法求解。

对于理想流体，其动水压力满足Laplace方程：

$$\nabla^2 p=0 \tag{8-25}$$

对应的边界条件为：

$$p_1=\bar{p}, \quad X\in\Gamma_1 \tag{8-26}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial n}=\bar{q}, \quad X\in\Gamma_2 \tag{8-27}$$

$$p=0, \quad X\in\Omega_e \tag{8-28}$$

对应于图8-2。

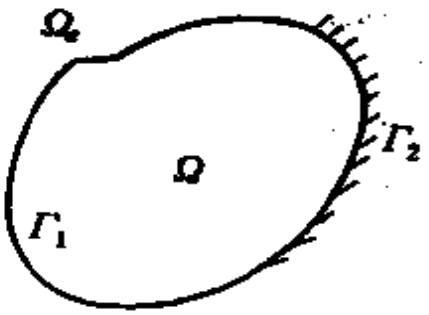


图8-2 流体边界图

式中，$\bar{p}$和$\bar{q}$是边界的已知函数，$\Omega\in R^n$且具有Lipschitz连续边界$\partial\Omega=\Gamma_1+\Gamma_2$。

设p^*是方程(8-25)的基本解，由*Green*公式可得到与以上问题等价的形式[11]：

$$\begin{cases} \text{求 } p\in H^s(\Omega),\ \text{使得} \\ \alpha p(\eta)+\int_{\partial\Omega}\left[p(\xi)\dfrac{\partial p^*(\xi,\ \eta)}{\partial n}-p^*(\xi,\ \eta)\dfrac{\partial p}{\partial n}\right]\mathrm{d}\xi=0 \\ \alpha=1,\ X\in\Omega \\ \alpha=\dfrac{\gamma}{2\pi},\ X\in\partial\Omega \\ \alpha=0,\ X\in\Omega e \end{cases} \tag{8-29}$$

式中，γ为边界角点的内角，$H^s(\Omega)$ 为一般的Sobolev空间；ξ、η为点坐标。

引入一组辅助函数 $[V_i(\eta),\ i=1,\ 2,\ \cdots]$，由 $V_i(\eta)$ 乘式 (8-29)，并沿某一边界C积分后，得到式 (8-29) 的弱型式为：

$$\begin{cases} \text{求 } p\in H^s(\Omega),\ \text{使得} \\ \int_c \alpha V_i(\eta)p(\eta)\mathrm{d}\eta+\int_{\partial\Omega}\left[\dfrac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial n}p(\xi)\right. \\ \qquad \left.-\phi_i(\xi)\dfrac{\partial p(\xi)}{\partial n}\right]\mathrm{d}\xi=0 \\ \alpha=1,\ C\subset\Omega \\ \alpha=\dfrac{\nu}{2\pi},\ C\subset\partial\Omega \\ \alpha=0,\ C\subset\Omega, \end{cases} \tag{8-30}$$

其中，
$$\phi_i[\xi]=\int_c V_i(\eta)p^*(\xi,\ \eta)\mathrm{d}\eta \tag{8-31}$$

$$\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial n}=\int_c V_i(\eta)\frac{\partial p^*(\xi,\ \eta)}{\partial n}\mathrm{d}\eta \tag{8-32}$$

可以证明式 (8-30) 与一般的边界元法在理论上是等价的（详见

文献[11])。

由式 (8-30) 取$C\subset\Omega_e$，且将相应的边界条件代入，得：

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial n}\bar{p}(\xi)d\xi+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial n}p(\xi)d\xi$$

$$-\int_{\Gamma_1}\frac{\partial p(\xi)}{\partial n}\phi_i(\xi)d\xi-\int_{\Gamma_2}\bar{q}(\xi)\phi_i(\xi)d\xi=0$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots) \tag{8-33}$$

进一步，进行坐标转换，令

$$p=\sum_{j=1}^{N}a_j\phi_j \tag{8-34}$$

将其代入方程 (8-33)，整理得

$$[G]\{A\}=\{F\} \tag{8-35}$$

其中，　$\{A\}=[a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_N]^T$

$$G_{ij}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\left[\phi_i(\xi)\frac{\partial\phi_j(\xi)}{\partial n}+\phi_j(\xi)\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial n}\right]d\xi$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\left[\phi_i(\xi)\frac{\partial\phi_j(\xi)}{\partial n}+\phi_j(\xi)\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial n}\right]d\xi \tag{8-36}$$

$$F_i=\int_{\Gamma_2}\bar{q}(\xi)\phi_i(\xi)d\xi-\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial n}\bar{p}(\xi)d\xi \tag{8-37}$$

显然，利用式 (8-35) 进行计算时，可以避免奇异积分的计算，且方程组的阶数较低，这就给计算带来了方便。

当利用上述方法计算如图8-1所示的流体的动水压力时，可将动水压力表示为：

$$\{p\}=[\Phi]\{A\} \tag{8-38}$$

式中，　$\phi_m=\exp(\lambda_m x)\cos\lambda_m y$ (8-39)

$$\lambda_m=\frac{(2m-1)\pi}{2H} \qquad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ M) \tag{8-40}$$

广义坐标$\{A\}$由下式求出：

$$[G]\{A\}=\{f\} \tag{8-41}$$

式中，

$$G_{ij}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\phi_i(\xi)}{\partial n}\phi_j(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\phi_i(\xi)\frac{\partial\phi_j(\xi)}{\partial n}\,d\xi \tag{8-42}$$

$$f_i=-\rho_w\int_{\Gamma_1}\bar{a}_1(\xi)\phi_i(\xi)d\xi \tag{8-43}$$

由于基函数$[\Phi]$已满足部分边界条件，故利用式（8-41）计算时，只需对交界面Γ_1进行离散积分。对于不同的节点j分别利用式（8-41）计算，就可求得广义坐标：

$$[G][Q]=[E] \tag{8-44}$$

其中，

$$E_{ij}=-\rho_w\int_{\Gamma_1}\bar{a}_{1j}(\xi)\phi_i(\xi)d\xi \tag{8-45}$$

求出动水压力影响矩阵为：

$$[D]=[\Phi][Q] \tag{8-46}$$

即交界面上的面力与加速度满足下述关系：

$$\{t_f\}=-[D]\{\ddot{u}_f\} \tag{8-47}$$

而利用特解边界元法建立的固体的动力边界元法方程为：

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=[G]\{t\} \tag{8-48}$$

将其按照交界面f和非交界面s写成分块形式，得：

$$[M_s\ \ M_f]\begin{Bmatrix}\ddot{u}_s\\ \ddot{u}_f\end{Bmatrix}+[K_s\ \ K_f]\begin{Bmatrix}u_s\\ u_f\end{Bmatrix}=[G_s\ \ G_f]\begin{Bmatrix}t_s\\ t_f\end{Bmatrix} \tag{8-49}$$

将式（8-47）引入式（8-49），整理后得：

$$-\omega^2[M_s \quad \bar{M}_f]\begin{Bmatrix}\ddot{u}_s\\ \ddot{u}_f\end{Bmatrix}+[K_s \quad K_f]\begin{Bmatrix}u_s\\ u_f\end{Bmatrix}=0 \qquad (8-50)$$

其中，
$$[\bar{M}_f]=[M_f]+[G_f][D] \qquad (8-51)$$

方程（8-50）即为流体与固体的耦振特征方程，由此方程可得耦振频率和振型。

§8-4 计 算 举 例

例1：如图8-1所示的楔形坝，上游直立并有满库水的作用，下游边坡为n，水的密度$\rho_w=1000kg/m^3$，坝体的密度$\rho=2400kg/m^3$，弹模$E=2.0\times10^4$MPa，计算其频率，所用的方法是边界元与样条有限点耦合法。计算结果列于表8-1中。

表8-1 楔形坝有水圆频率（第一阶） (rad/s)

n \ H	50m	75m	100m	125m	150m
0.70	12.3	18.5	24.6*	30.8	36.9
0.75	13.2	19.8	26.4	33.0	39.5
0.80	14.1	21.1	28.1	35.2	42.2
0.85	14.6	22.4	29.9	37.3	44.8

*注 文献[12]的计算结果为23.9

例2：如图8-3所示的直立坝面重力坝，上游作用着满库的库水，几何尺寸见表8-2，坝体弹模$E=3\times10^4$MPa，$\nu=0.2$，$\rho=2400kg/m^3$。用特解边界元与广义边界元耦合求解其耦振频率，计算结果列于表8-3，并与有限元法进行了对比。

可以看出，本法具有较高的精度。

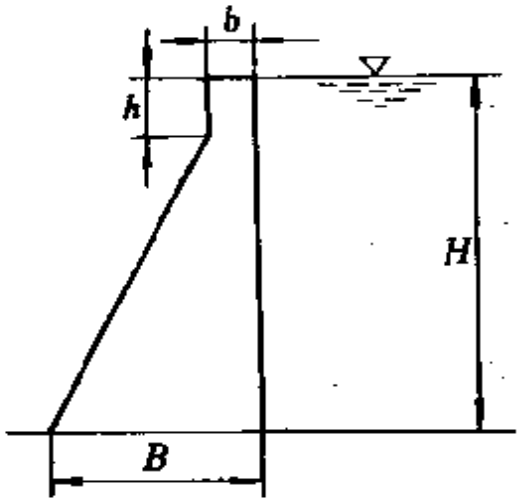


图8-3 坝水体系图

表8-2 重力坝尺寸表 (m)

尺寸	H		B	b
A 坝	30.0	1.6	37.5	2.0
B 坝	76.0	6.0	61.0	6.0

表8-3 坝水耦振圆频率 (rad/s)

项号	算法	ω_1	ω_2	ω_3
A 坝	本法	112.7	275.1	514.4
	有限元	114.8	267.7	494.4
B 坝	本法	29.8	72.7	143.3
	有限元	31.3	72.2	136.6

参 考 文 献

[1] 黄玉盈．边界元——有限元联合法分析系统的耦联振动．第一届全国工程中边界元法会议论文集，重庆：1985

[2] 孙克明、林皋、赵金城．拱坝在库水耦联作用下的动特性研究．第一届全国工程中边界元法会议论文集，重庆：1985

[3] D. W. Kelly, G. G. W. Mostoe & O. C. Zienkiewicz．边界元法与其它数值方法的耦合．应用力学，1981年第1期

[4] 姜弘道．边界元——有限元联合解法用于半无限地基上建筑物的应力分析．华东地区固体力学会议交流论文，杭州：1985

[5] 周鸿钧、李庆斌．用样条半解析——边界元法解固液耦振问题．第二届全工程中边界元会议论文集，南宁：1988

[6] 李庆斌、周鸿钧．液固耦合的边界元——样条有限点法．郑州工学院学报，1988年第1期

[7] 周鸿钧、王复明、李庆斌．非规则板壳分析．郑州：河南科技出版社，1992

[8] 秦荣．结构力学的样条函数方法．南宁：广西人民出版社，1985

[9] 黄玉盈．无限长带形域流场的格林函数及其在耦振中的应用．华中工学院学报，1985年第1期

[10] 石明生．动水压力计算的广义边界元法及坝水耦振分析．郑州工学院硕士学位论文（导师：周鸿钧），1989

孙克明．载变量变分原理和广义边界元法及其应用．大连理工大学博士学位论文（导师：林皋），1987

[12] 李庆斌．特解边界元法及其在重力坝坝踵界面裂缝动静态断裂分析中的应用．大连理工大学博士学位论文，1989

应 用 篇

第九章　异弹模界面裂缝的静断裂分析

§9-1　概　　述

在实际工程中，由于天然条件及使用环境的不同，经常会遇到两种材料的交界面分析的问题，例如水利工程中水坝与地基的交界面、结构工程中常见到的两种钢材的的焊接面、电子工程中电子元件的涂层之间的交界面等，都是异弹模交界面的例子。由于种种原因（如温度应力、焊缝质量、涂层的粘接效果等），经常在交结面上出现裂缝，那么这种裂缝在外荷载的作用下能否保证安全，就需要对这种异弹模界面裂缝进行研究，

最早发现这个问题并进行研究的是Williams[1]，研究结果表明：由于缝岸两边材料弹性模量的差异，在交结面上会产生应力集中现象，在缝岸附近，由于几何不连续，材料不连续，其位移和应力呈现出极其复杂的状态，因而对应力强度因子有本质的影响，通常情况下，当缝岸两边材料不存在差异时，缝端应力具有1/2阶奇异性，而当缝岸两边材料不同时，这种奇异性与材料的性质有关[2]。这不仅给寻求其解析解带来了极大的困难，就是数值解也带来了诸多不便[3~8]。文献[9]、[10]利用分区混合有限元法计算了异弹模界面裂缝的应力强度因子，并将其应用到重力坝坝踵界面裂缝的断裂分析问题。文献[11]给出了三种材料情形下缝端奇异应力场和位移场，并用分区混合有限元法计算其应力强度因子。但由于有限单元法在解决奇异性问题时具有精度低的弱点，不但造成奇异元尺寸选择上的困难，而且由奇异元确定应力强度因子的格式也比较繁琐，不便于直接采用。因此，寻找一种简便有效的计算方法，在工程中具有较大的实际意义。

由于边界元法中所用基本解本身的奇异性，使得边界元法比

较适用于求解断裂问题。如前所述，目前利用边界元法分析均质材料内的裂缝问题已发展得相当成熟，特别是发展起来的四分之一奇性元，使得应力强度因子的计算格式非常简单。但是，遗憾的是，由于异弹模界面裂缝缝端应力场的奇异性与材料的性质有关，使得奇性元中间节点的相对位置随问题的变化而变化，这势必造成使用奇性元的困难。文献[12]、[13]避开了奇性元的使用，采用边界元分域法分析其应力，用缝端的小单元模拟缝端奇异性，由应力外推法求出其应力强度因子，取得了成功。本章即介绍这种方法。

§9-2 异弹模界面裂缝的缝端应力场

文献[9]给出了异弹模界面裂缝缝端应力场的表达式，为了本文引用上的方便，这里进行概要叙述。

如图9-1所示的异弹模界面裂缝，选取缝端为直角坐标系和极坐标系的原点，x轴下方（$-\pi\leqslant\theta\leqslant 0$）为第一种介质材料，$x$轴上方（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）为第二种介质材料。对于缝端附近的小范围内忽略体力的作用（这里仅是为了推导上的方便，当有体力作用

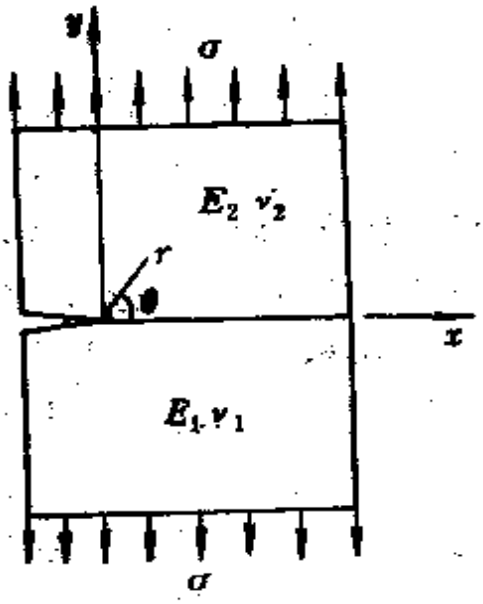


图9-1 异弹模界面裂缝图

时，可以推出相同的结果），则线弹性力学中的平面问题复变函数解答的科洛索夫公式为：

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x^{\alpha}=\sigma_{xx}^{\alpha}+i\sigma_{yy}^{\alpha}=\varphi_{\alpha}'(z)+\bar{\varphi}_{\alpha}'(z)-z\bar{\varphi}_{\alpha}''(z)\\
&\qquad-\bar{\psi}'_{\alpha}(z)\\
&\sigma_y^{\alpha}=\sigma^{\alpha}{}_{yy}-i\sigma_{xy}^{\alpha}=\varphi_{\alpha}'(z)+\bar{\varphi}_{\alpha}'(z)+z\bar{\varphi}_{\alpha}''(z)\\
&\qquad+\bar{\psi}_{\alpha}'(z)\\
&u^{\alpha}=u_x^{\alpha}+iu_y^{\alpha}=\frac{1}{2G_{\alpha}}[\kappa_{\alpha}\varphi_{\alpha}(z)-z\bar{\varphi}_{\alpha}'(z)\\
&\qquad-\bar{\psi}_{\alpha}(z)
\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{-}1)$$

式中，G_{α}、ν_{α}分别是材料α的剪切模量和泊松比；$\varphi(z)$、$\psi_{\alpha}(z)$为复势函数；$z=re^{i\theta}$，$i=\sqrt{-1}$；

$$\kappa_{\alpha}=\begin{cases}3-4\nu_{\alpha}, & \text{平面应变问题}\\ \dfrac{3-\nu_{\alpha}}{1+\nu_{\alpha}}, & \text{平面应力问题}\end{cases}$$

$$\alpha=\begin{cases}1, & -\pi\leqslant\theta\leqslant 0\\ 2, & 0\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

假设缝面上无面力作用及在$\theta=0$的界面上应力平衡、位移连续条件满足，则边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_y^1\mid_{\theta=-\pi}=0\\
&\sigma_y^2\mid_{\theta=\pi}=0\\
&\sigma_y^1\mid_{\theta=0}=\sigma_y{}^2\mid_{\theta=0}\\
&u^1\mid_{\theta=0}=u_y^2{}_{\theta=0}
\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{-}2)$$

设复势函数$\varphi(z)$、$\psi(z)$取下列形式：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\alpha(z)&=A_\alpha z^\lambda\\ \psi_\alpha(z)&=B_\alpha z^\lambda\end{aligned}\right\} \tag{9-3}$$

其中，A_α、B_α是待定的复系数；λ是满足边界条件的特征根。

将式 (9-1) 、式 (9-3) 代入边界条件 (9-2) ，得：

$$A_1 e^{-i\lambda\pi}+(\bar{A}_1\lambda+\bar{B}_1)e^{i\lambda\pi}=0$$

$$A_2 e^{i\lambda\pi}+(\bar{A}_2\lambda+\bar{B}_2)e^{-i\lambda\pi}=0$$

$$A_1+\bar{A}_1\lambda+\bar{B}_1-A_2-(\bar{A}_2\lambda+\bar{B}_2)=0$$

$$G_2[\kappa_1 A_1-\bar{A}_1\lambda-\bar{B}_1]-G_1[\kappa_2 A_2-\bar{A}_2\lambda-\bar{B}_2]=0$$

化简后，得：

$$(1-e^{-i2\lambda\pi})A_1-(1-e^{i2\lambda\pi})A_2=0$$

$$G_2(\kappa_1+e^{-i2\lambda\pi})A_1-G_1(\kappa_2+e^{i2\lambda\pi})A_2=0$$

为使A_1、A_2有非零解，则系数行列式应为零，即

$$\begin{vmatrix}1-e^{-i2\lambda\pi} & -(1-e^{i2\lambda\pi})\\ G_2(\kappa_1+e^{-i2\lambda\pi}) & -G_1(\kappa_2+e^{i2\lambda\pi})\end{vmatrix}=0$$

将行列式展开，化简后得到：

$$(1-e^{-i2\lambda\pi})[(G_1\kappa_2+G_2)+(G_2\kappa_1+G_1)e^{i2\lambda\pi}]=0 \tag{9-4}$$

式 (9-4) 即为满足边界条件的特征方程。

由式 (9-4) 可求得特征根为：

$$\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)+i\in,\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

式中，$\in=\dfrac{1}{2\pi}\ln R$

$$R=\frac{G_1+G_2\kappa_1}{G_2+G_1\kappa_2}=\frac{G_1/G_2+\kappa_1}{1+\kappa_2 G_1/G_2} \tag{9-5}$$

显然$\bar{\lambda}_n$也是特征根。

由式 (9-1) 和式 (9-3) 可以看出，缝端附近的应力、位移

与极径r之间具有下列关系：

$$\left.\begin{aligned}|\sigma| &= O(r^{Re\lambda-1})\\ |u| &= O(r^{Re\lambda-1})\end{aligned}\right\} \tag{9-6}$$

显然，为了保证缝端附近应力的奇异性质，特征根λ的实部必须位于0和1之间，所以获得奇异性应力状态的特征根为：

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{2}+i\in\\ \bar{\lambda} &= \frac{1}{2}-i\in\end{aligned}\right\} \tag{9-7}$$

值得说明的是，当特征根仅取式（9-7）的形式时，忽略了产生非奇异应力的特征根，由此得出的缝端应力场表达式适用于缝端奇异应力区，亦即所谓的近场公式。

根据式（9-7），可以假设能够使缝端产生奇异性应力状态的复势函数为：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\alpha(z) &= A_\alpha Z^\lambda + a_\alpha z^{\bar{\lambda}}\\ \psi_\alpha(z) &= B_\alpha z^\lambda + b_\alpha Z^{\bar{\lambda}}\end{aligned}\right\} \tag{9-8}$$

其中，λ取式（9-7）的形式。

将式（9-8）、（9-1）代入式（9-2），可以得到满足边界条件的系数为：

$$\left.\begin{aligned}A_\alpha &= Am_\alpha\\ a_\alpha &= 0\\ B_\alpha &= -A\lambda m_\alpha\\ b_\alpha &= \bar{A}n_\alpha\end{aligned}\right\} \tag{9-9}$$

其中，A是任意的复常数，而

$$\left.\begin{aligned} m_\alpha &= \begin{cases} 1, & \alpha=1 \\ R, & \alpha=2 \end{cases} \\ n_\alpha &= \begin{cases} R, & \alpha=1 \\ 1, & \alpha=2 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{9-10}$$

将式（9-8）、（9-9）代入式(9-1)，可得到仅含有一个复常数的缝端应力场和位移场：

$$\begin{aligned} \sigma_z^\alpha &= \sigma_{xx}^\alpha + i\sigma_{yy}^\alpha \\ &= A\lambda r^{\lambda-1}[m_\alpha e^{i(\lambda-1)\theta} - n_\alpha e^{-i(\lambda-1)\theta}] \\ &\quad + m_\alpha \bar{A}\bar{\lambda} r^{\bar{\lambda}-1}(\bar{\lambda}+1)e^{-i(\bar{\lambda}-1)\theta} - (\bar{\lambda}-1)e^{-i(\bar{\lambda}-3)\theta}] \end{aligned} \tag{9-11a}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{\alpha *} &= \sigma_{yy}^\alpha - i\sigma_{xy}^\alpha \\ &= A\lambda r^{\lambda-1}[m_\alpha e^{i(\lambda-1)\theta} + n_\alpha e^{-i(\lambda-1)\theta}] \\ &\quad + m_\alpha \bar{A}\bar{\lambda} r^{\bar{\lambda}-1}(1-\bar{\lambda})[e^{-i(\bar{\lambda}-1)\theta} - e^{-i(\bar{\lambda}-3)\theta}] \end{aligned} \tag{9-11b}$$

$$\begin{aligned} 2G_\alpha u^\alpha &= 2G_\alpha(u_x^\alpha + iu_y^\alpha) \\ &= Ar^\lambda[\kappa_\alpha m_\alpha e^{i\lambda\theta} - n_\alpha e^{-i\lambda\theta}] + m_\alpha \bar{A}\bar{\lambda} r^{\bar{\lambda}}(1-e^{i2\theta})e^{-\bar{\lambda}i\theta} \end{aligned} \tag{9-11c}$$

对于均质材料中的混合型（Ⅰ＋Ⅱ型）裂缝，有定义：

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}\big|_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} - i\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} r^{-\frac{1}{2}}$$

其中，　$K = K_I + iK_{II}$ (9-12)

类似地，对于异弹模界面裂缝，定义：

$$\sigma_{yy}^\alpha - i\sigma_{xy}^\alpha\big|_{\theta=0} = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} r^{\lambda-1} \tag{9-13}$$

由式（9-11）得：

$$\sigma_{yy}^{a}-i\sigma_{xy}^{a}\mid_{\theta=0}=A\lambda r^{\lambda-1}(m_a+n_a)$$
$$=A\lambda r^{\lambda-1}(1+R)$$

将其代入式（9-13），得出：

$$A=\frac{K}{\sqrt{2\pi(1+R)\lambda}}=\frac{LK_0}{\lambda_0}e^{-i(\phi+\delta)} \tag{9-14}$$

其中，
$$\left.\begin{aligned} K_0&=\sqrt{K_{\mathrm{I}}^2+K_{\mathrm{II}}^2}\\ \phi&=\mathrm{tg}^{-1}(K_{\mathrm{II}}/K_{\mathrm{I}})\\ \lambda_0&=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\in^2}\\ \delta&=\mathrm{tg}^{-1}(2\in)\\ L&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+R)}}\end{aligned}\right\} \tag{9-15}$$

由式（9-7）、（9-11）和式（9-14）可得到异弹模界面裂缝缝端附近的应力场和位移场的诸分量表达式，因本书中采用位移表达式，这里仅给出应力分量的表达式如下：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx}^{a}&=Lr^{-\frac{1}{2}}e^{-\in\theta}[f_{xx}^{a}(r,\theta)K_{\mathrm{I}}+g_{xx}^{a}(r,\theta)K_{\mathrm{II}}]\\ \sigma_{yy}^{a}&=Lr^{-\frac{1}{2}}e^{-\in\theta}[f_{yy}^{a}(r,\theta)K_{\mathrm{I}}+g_{yy}^{a}(r,\theta)K_{\mathrm{II}}]\\ \sigma_{xy}^{a}&=Lr^{-\frac{1}{2}}e^{-\in\theta}[f_{xy}^{a}(r,\theta)K_{\mathrm{I}}+g_{xy}^{a}(r,\theta)K_{\mathrm{II}}]\end{aligned}\right\} \tag{9-16}$$

其中，
$$f_{xx}^{a}(r,\theta)=m_a\left\{3\cos\left(t-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\theta\left[\sin\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\in\cos\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right]\right\}-n_a e^{2\in\theta}\cos\left(t+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$g^{\alpha}_{xx}(r,\ \theta)=m_{\alpha}\left\{3\sin\left(t-\frac{\theta}{2}\right)-\sin\theta\left[\cos\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\epsilon\sin\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right]\right\}$$

$$-n_{\alpha}e^{2\epsilon\theta}\sin\left(t+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$f^{\alpha}_{yy}(r,\ \theta)=m_{\alpha}\left\{\cos\left(t-\frac{\theta}{2}\right)-\sin\theta\left[\mathrm{nis}\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\epsilon\cos\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right]\right\}$$

$$+n_{\alpha}e^{2\epsilon\theta}\sin\left(t+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$g^{\alpha}_{yy}(r,\ \theta)=m_{\alpha}\left\{\sin\left(t-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\theta\left[\cos\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\epsilon\sin\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right]\right\}$$

$$+n_{\alpha}e^{2\epsilon\theta}\sin\left(t+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$g^{\alpha}_{xy}(r,\ \theta)=m_{\alpha}\left\{-\sin\left(t-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\theta\left[\cos\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\epsilon\sin\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right]\right\}$$

$$-n_{\alpha}e^{2\epsilon\theta}\sin\left(t+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$g^{\alpha}_{xy}(r,\ \theta)=m_{\alpha}\left\{\cos\left(t-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\theta\left[\sin\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\epsilon\cos\left(t-\frac{3}{2}\theta\right)\right]\right\}$$

$$+n_a e^{2\varepsilon\theta}\cos\cos\left(t+\frac{\theta}{2}\right) \qquad (9\text{-}17)$$

这里，　$t=\in 1nr$　　(9-18)

可见，对于异弹模界面裂缝的$f_{ij}(r,\ \theta)$，$g_{ij}(r,\ \theta)$ 不仅与两种介质材料的特性有关，且与r有关，这正是异弹模界面裂缝的特性所在。

§9-3　边界元多域法分析

我们知道，边界单元法所使用的基本解都是在均质弹性材料的假定下求出的。因此，它只适用于均质弹性体的求解问题，对于多种材料组成的物体，就需要采用边界元法的多区域耦合技术来进行分析，即在每个区域上分别建立边界元方程，然后通过耦合边界上的连续条件，将多个区域耦合在一起。对于异弹模界面裂缝，由于缝岸两边的材料不相同，所以也只能采用两个区域耦合法进行分析。

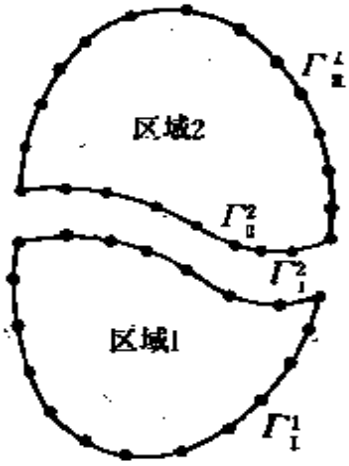


图9-2　物体分划为两个区域

如图9-2，物体被剖分为两个区域，在两个区域分别建立边界元方程，对于区域I，边界元方程为：

$$[H_I \quad H_I^*]\begin{Bmatrix} u_I \\ u_I \end{Bmatrix} = [G_I \quad G_I^*]\begin{Bmatrix} t_I \\ t_I^* \end{Bmatrix} \qquad (9\text{-}19)$$

对于区域Ⅱ，有边界元方程：

$$[H_{II} \quad H_{II}^*]\begin{Bmatrix} u_{II} \\ u_{II}^* \end{Bmatrix} = [G_{II} \quad G_{II}^*]\begin{Bmatrix} t_{II} \\ t_{II}^* \end{Bmatrix} \qquad (9\text{-}20)$$

上述式（9-19）、（9-20）中，“*”号表示的量为耦合边上的

相应量。

又根据两种材料在耦合边上的连续条件：

$$\left.\begin{aligned}\{u_{\mathrm{I}}\}&=\{u_{\mathrm{II}}^{*}\}=\{u\}\\ \{t_{\mathrm{I}}\}&=-\{t_{\mathrm{II}}^{*}\}=\{t\}\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{–}21)$$

将方程（9–19）、(9–20)分别改写为：

$$[H_{\mathrm{I}}^{*}\quad H_{\mathrm{I}}^{*}\quad -G_{\mathrm{I}}^{*}]\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{I}}\\ u\\ t\end{Bmatrix}=[G_{\mathrm{I}}]\{t_{\mathrm{I}}\} \qquad (9\text{–}22a)$$

$$[H_{\mathrm{II}}\quad G_{\mathrm{II}}\quad H_{\mathrm{II}}]\begin{Bmatrix}u\\ t\\ u_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix}=[G_{\mathrm{II}}]\{t_{\mathrm{II}}\} \qquad (9\text{–}22b)$$

将式(9–22a)、(9–22b)耦合在一起，则变为：

$$\begin{bmatrix}H_{\mathrm{I}} & H_{\mathrm{I}}^{*} & -G_{\mathrm{I}} & 0\\ 0 & H_{\mathrm{II}}^{*} & G_{\mathrm{II}}^{*} & H_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{I}}\\ u\\ t\\ u_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{\mathrm{I}} & 0\\ 0 & G_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_{\mathrm{I}}\\ t_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix} \qquad (9\text{–}22c)$$

对方程(9–22)引入问题的边界条件，并把已知和未知量分别移至等号两端，可以得到形如：

$$[A]\{X\}=\{F\} \qquad (9\text{–}23)$$

的线性方程组。解此方程可以得到所有边界（包括耦合边界）上节点的位移和面力。有了边界上的位移和面力，可以根据需要在每个区域上利用前述公式计算域内点的位移和面力。还可以根据§7–4介绍的方法求出边界应力值[14]。

§9-4 计算应力强度因子的格式

由于异弹模界面裂缝缝端奇异性比较复杂，因此如何根据这些特点建立合适的边界元格式，是一个值得探讨的课题。作为尝试，这里采用应力外推法求解异弹模界面裂缝的应力强度因子。

由式（9-16），可以推得当$\theta=0$时缝端应力表达式为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}^{a}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\frac{3m_a-n_a}{1+R}(K_{\mathrm{I}}\cos\frac{t}{2}+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{t}{2})\\ \sigma_{22}^{a}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}(K_{\mathrm{I}}\cos\frac{t}{2}+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{t}{2})\\ \sigma_{12}^{a}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}(K_{\mathrm{II}}\cos\frac{t}{2}-K_{\mathrm{I}}\sin\frac{t}{2})\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{-}24)$$

如图9-1所示，假定以第二种介质为对象来计算应力强度因子，对平面应变情形，可得：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\frac{3R-1}{1+R}(K_{\mathrm{I}}\cos\frac{t}{2}+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{t}{2})\\ \sigma_{22}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}(K_{\mathrm{I}}\cos\frac{t}{2}+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{t}{2})\\ \sigma_{12}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}(K_{\mathrm{II}}\cos\frac{t}{2}-K_{\mathrm{I}}\sin\frac{t}{2})\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{-}25)$$

假定裂缝的方向与x轴重合，那么在该方向上σ_{11}并不出现，可以利用式(9-25)中的后两个表达式反推出应力强度因子与缝端应力的关系为：

$$\left.\begin{aligned}K_{\mathrm{I}}&=\sqrt{2\pi r}(\sigma_{22}\cos\frac{t}{2}-\sigma_{12}\sin\frac{t}{2})\\ K_{\mathrm{II}}&=\sqrt{2\pi r}(\sigma_{22}\sin\frac{t}{2}+\sigma_{12}\cos\frac{t}{2})\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{-}26)$$

正如§9-2中所述，公式(9-24)是在忽略产生非奇异应力的

特征根的情况下得到的，因此式（9-26）也只适用于缝端奇异应力区。于是，缝端的应力强度因子可用极限形式表示为：

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= \lim_{r\to 0} f_{\mathrm{I}}(r) \\ K_{\mathrm{II}} &= \lim_{r\to o} f_{\mathrm{II}}(r) \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}27)$$

式中，$f_{\mathrm{I}}(r)=\sqrt{2\pi r}(\sigma_{22}\cos t-\sigma_{12}\sin t)$

$f_{\mathrm{II}}(r)=\sqrt{2\pi r}(\sigma_{22}\sin t+\sigma_{12}\cos t)$ $\qquad (9\text{-}28)$

式（9-27）即为异弹模界面裂缝的缝端应力强度因子与缝端应力的关系式，其中的$f_{\mathrm{I}}(r)$、$f_{\mathrm{II}}(r)$叫做应力因子函数。

根据上节介绍的方法，可以求得缝端第一个单元上对应局部坐标点为$\zeta=-0.95,-0.85,-0.75,-0.65,-0.55$五个点的应力值，将所得应力代入式（9-28），可以得到这五个点上的应力因子函数值，根据最小二乘法原理，将应力因子值拟合成坐标r的线性函数，然后外推，由$r=0$，得到应力强度因子值，其表达式为：

$$K_{\mathrm{I}}=(\Sigma f_{\mathrm{I}}^{j}\cdot\Sigma r_j^2-\Sigma r_j f_{\mathrm{I}}^{j}\cdot\Sigma r_j)/(5\Sigma r_j^2-\Sigma r_j\cdot\Sigma r_j)$$

$$K_{\mathrm{II}}=(\Sigma f_{\mathrm{II}}^{j}\cdot\Sigma r_j^2-\Sigma r_j f_{\mathrm{I}}^{j}\cdot\Sigma r_j)/(5\Sigma r_j^2-\Sigma r_j\cdot\Sigma r_j) \qquad (9\text{-}29)$$

式中，“Σ”表示j从1到5求和。

至此，便得到异弹模界面裂缝缝端应力强度因子的数值解答。

§9-5 中心裂纹板的分析计算

为了考查用应力外推法计算异弹模界面裂缝的应力强度因子精度，实际计算了中心裂纹板在单向拉伸荷载作用下，当缝岸两边材料弹性模量变化时的缝端应力强度因子，并与无限大中心裂

纹板的解折解进行了对比。根据文献[7]的结论，如图9-3所示，当取$a=1.0$，$W=10.0$时，该板的应力强度因子接近于无限板的解析解。由于问题的对称性，取其一半进行分析，计算简图见图9-4。

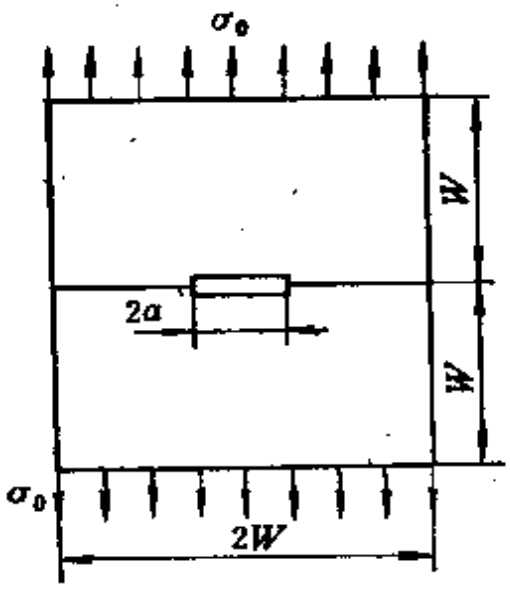


图9-3 中心裂纹板

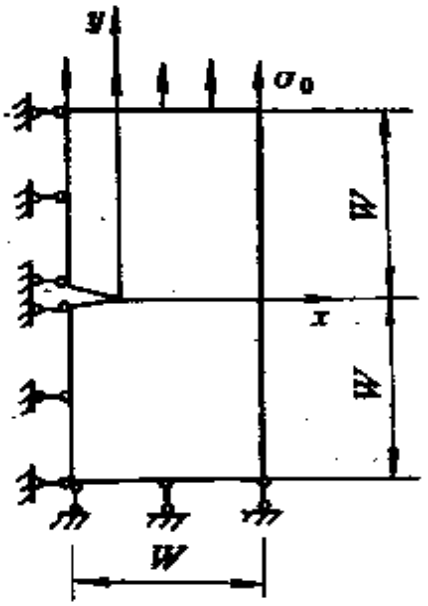


图9-4 计算简图

影响应力强度因子计算精度的因素主要有两个，即缝端小单元的尺寸及拟合应力点。实际上应该对这两个影响因素进行选优，以保证计算出来的应力强度因子的精度最高。为简化起见，本文采用固定五个拟合点的位置来选择最佳小单元尺寸的办法进行选优。计算时取材料参数$\nu_1=\nu_2=0.3$，$E_1=E_2=1.0$，取不同的小单元尺寸进行计算，在缝端及缝面尖端设置3个小单元，并将结果列于表9-1中。

表9-1 小单元尺寸的影响比较($E_1/E_2=1.0$，$\sigma_0=1.0$)

小单元尺寸	0.10a	0.20a	0.25a	0.30a	0.35a	0.40a	精确解
K_0	2.44028	1.98102	1.79309	1.76308	1.76015	1.74312	1.77250

由此可以看出，当小单元的尺寸为其它单元长度的$\frac{1}{4}\sim\frac{1}{3}$时，计算精度为最好。本计算中取一般单元长度为1.0。

接下来，变化E_1/E_2的值，计算异弹模界面裂缝的应力强度因子，其结果列于表9-2中，表中K_0^*为无限大中心裂纹板的解析解，参见文献[3]。

表9-2 中心裂纹板在单拉时的计算比较($\sigma^0=1$)

E_1/E_1	K_0	K^*_0	相对误差(%)
1	1.76308	1.77250	−0.53
	1.76620	1.76529	+0.05
	1.73151	1.74312	−0.67
10	1.69503	1.72781	−0.19
100	1.62012	1.70750	−4.53
1000	1.62059	1.70740	−4.94

由此可见，应力外推法计算精度令人满意。

最后，为了探讨工程中常见的有限尺寸的中心裂纹板的应力强度因子的变化规律，对图9-3所示的中心裂纹板进行了分类计算。计算中取$W=10.0$，$a=1.0$，2.0，3.0，4.0，5.0 $\gamma_1=\gamma_2=0.3$，$E_1/E_2=1$，2，5，10，100，1000。计算结果列于表9-3，并将其中的$E_1/E_2=1$，100，1000三种结果画出了其变化曲线，示于图9-5。

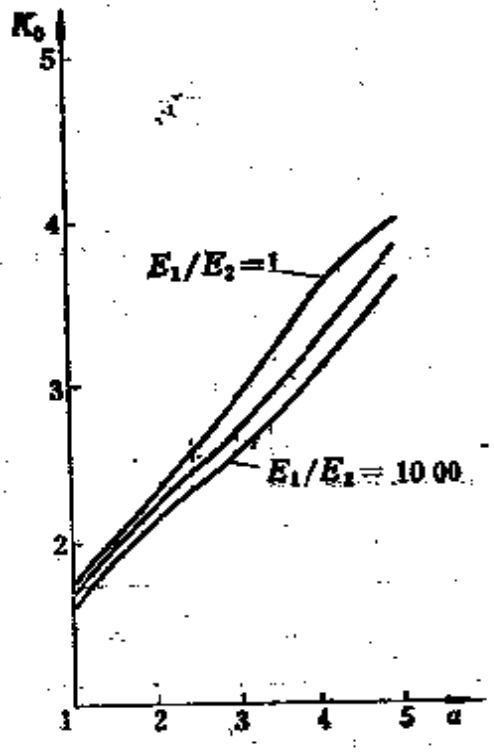


图9-5 K_0～a曲线

表9-3 中心裂纹板的应力强度因子($\sigma_0=1$)

E_1/E_2 \ a	1	2	3	4	5
1	1.76308	2.33150	2.88940	3.53552	4.00180
2	1.76620	2.33786	2.87552	3.50192	4.02225
5	1.73151	2.29406	2.79200	3.37815	3.93633
10	1.69503	2.24966	2.71695	3.27455	3.84003
100	1.63012	2.17790	2.59219	3.10816	3.66959
1000	1.62059	2.16808	2.57446	3.08488	3.64488

计算结果表明：

(1) 应力强度因子K_0随缝长a的变化而变化，在同一弹模比E_1/E_2下，K_0随缝长a的增加基本上呈线性增加。

(2) 应力强度因子K_0随弹模比E_1/E_2的不同而变化，在同一缝长情况下，K_0在$E_1/E_2=1\sim2$之间有一个低微的上升，当$E_1/E_2>2$后开始下降，而且下降的速度随弹模比E_1/E_2的增加呈现出减缓的趋势。

§9-6 小 结

本章给出的用分域边界元法分析应力场，用小单元模拟缝端应力奇异性，并由应力外推法计算应力强度因子的方法，原理简单，程序设计方便，而且精度满足工程要求。这种用边界元法分析变奇异性问题，具有比有限元法更大的优越性，拓宽了边界元法的应用领域，是一种很有发展前途的数值方法。

求出了应力强度因子后，就可以根据断裂判据对裂缝的稳定性作出判断。关于异弹模界面裂缝的断裂判据，尚缺乏研究，能否直接应用均质裂缝的断裂判据，是一个值得研究的课题。根据异弹模界面裂缝的K_0控制的特点，建议采用下述判据来判别异弹模界面裂缝的稳定性。即：

当
$$K_0>K_{0c} \tag{9-30}$$
时，裂纹起裂扩展；当：
$$K_0=K_{0c} \tag{9-31}$$
时，裂纹处于临界状态；当：
$$K_0<K_{0c} \tag{9-32}$$
时，裂纹稳定。

其中的K_{0c}为材料特性，反映材料所能抵抗的复应力强度因子的能力。实用中可由实验测得。

参考文献

[1] *M. L. Williams. The Stress Around a Fault Or Crack in Dissimilar Media. Bulletin of the Seismological Society of America, No.59, 1959*

[2] *J. F. Yau & S. S. Wang. An Analysis of Interface Cracks Between Dissimilar Isotropic Materials Using Conservation Integrals in Elasticity. Eng. Frac. Mech. Vol.20, No.3, 1984*

[3] *J. R. Rice & G. C. Sih. Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media. J. Appl. Mech., June, 1965*

[4] *C. C. Hong & M. Stern. The Computation of Stress Intensity Factors in Dissimilar Material. J. Elasticity. Vol 8, No.1, 1978*

[5] *Maria Comninou. The Interface Crack in a Shear Field. J. Appl. Mech., Vol. 45, June, 1978*

[6] *Maria Comninou. The Interface Crack. J. Appl. Mech., Vol.45. Dec., 1977*

[7] *K. Y. Lin & J. W. Mar. Finite Element Analysis of Stress.*

Intensity Factors for Cracks at a Bi-material Interface. Int. J. Frac., Vol. 12, No.4, 1976

[8] *Ralph H. Graves & Kenneth N. Derucher. Interface Smeared Crack Model Analysis of Concrete Dams in Earthquakes. J. Eng. Mech., Vol.113, No.11, 1987*

[9] 周鸿钧、段云岭. 异弹模界面裂缝缝端应力场的计算. 郑州工学院学报，1986 年第1期

[10] 周鸿钧、段云岭. 重力坝坝踵区界面裂缝的断裂分 析. 水 利学 报，1986 年第11期

[11] 周红锤. 复杂地基上重力坝坝踵界面裂缝断裂分析. 郑州工学院硕士学位论文，1988

[12] 李庆斌、周鸿钧、林皋. 用边界单元法计算异弹模界面裂缝的应力强度因子. 第二届全国工程中的边界元法学术讨论会论文集，南宁：1988.

[13] 李庆斌、林皋、周鸿钧. 异弹模界面裂缝的断裂分析及其应用. 大连理工大学学报，1991年第2期

[14] 杜庆华等. 边界积分方程方法——边界元法. 北京：高等教育出版社，1989

第十章　重力坝坝踵界面裂缝的静断裂分析

§10-1　概　　述

重力坝是一种大体积混凝土结构。由于在浇筑过程中产生大量的水化热和温度应力的作用，以及干缩变形等因素的影响，在重力坝的表面上会产生大量的微裂缝，特别是在坝与基础的交界面上，由于两种材料变形性质的不同，不少重力坝在坝踵处出现了裂缝。有关统计资料表明，目前我国大中型混凝土坝上的裂缝95%以上属于表面裂缝，但某些表面裂缝存在着发展成为深层裂缝或劈头裂缝的危险性，从而危及大坝安全。鉴于混凝土裂缝结构的这种严重性，因此，研究这种裂缝在各种荷载作用下是否扩展，其扩展规律如何，无疑对重力坝的安全和稳定是至关重要的，这也是工程中急切需要解决的问题。近些年来，这个问题开始受到广泛重视[1]。

关于重力坝坝踵裂缝的研究，由于问题十分典型，最早受到人们的重视[2-5]，并在有关的计算方法上进行了有益的探讨[6]，但这些研究都限制了重力坝和地基属于同一材料，这显然不甚合理。由于裂缝两边材料的差异，对裂缝的性质产生本质影响（见第九章）。另外，由于异弹模界面裂缝本身的复杂性，目前在重力坝的应用还不多见。文献[7]、[8]曾对这个问题进行过有益的探索，作者利用分区混合有限元法分析坝踵应力，以奇异单元的格式给出了应力强度因子的计算公式，公式中涉及许多积分使计算异常复杂，加上奇异单元的复杂性，给使用者带来许多不便。本书作者曾在文献[9]中用特解边界元法对重力坝坝踵界面裂缝进行过研究，使这种分析趋于简单化。这里即介绍有关的内容。

重力坝建筑在弹性地基上，一方面，坝踵裂缝的产生会影响地基的变形；另一方面，地基的变形又反过来影响缝端应力场的分布，这就是坝体与地基的相互作用。因此，在分析坝踵裂缝时，必须同时考虑地基的影响。图10-1是本章的计算简图，其中地基取$L=5h$，底部以圆弧计入，并按固端约束处理其边界。

实际上的重力坝非常复杂，为了集中研究坝踵裂缝问题，不得不忽略一些次要因素。因此，为了研究问题的方便，计算中采用了下述几个假定：

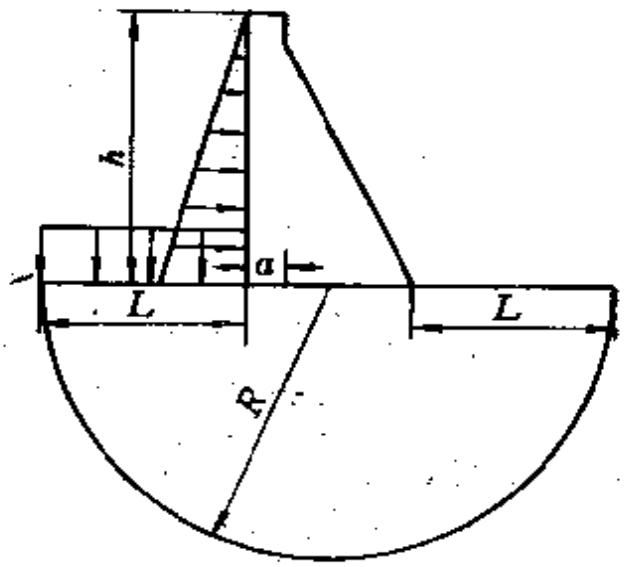


图10-1　重力坝计算简图

(1) 重力坝和坝基分别为均质的各向同性的线弹性材料，并假定变形微小，即是小变形假定成立；

(2) 取$L=5h$的坝基面考虑地基的影响，认为此范围以外的部分对重力坝的应力状态没有影响；

(3) 由于地基的存在先于坝体的建立，即在建坝之前，地基的变形已经稳定，因此认为坝基本身的重量对坝体的变形没有影响；

(4) 平面应变假定，即认为坝轴线较长，重力坝某坝段的变形简化为平面应变问题来处理；

(5) 假定缝面之间为光滑接触，即不考虑缝面之间的摩擦作用。

§10-2　含体力问题的多域法分析

由于边界元法本身仅限于求解均质问题，当遇见多种介质情形时，须借助边界元法的多域耦合技术予以求解。因此，对于重

力坝结构，由于坝体和地基分属不同的材料，也需要进行耦合分析。同时，重力坝主要靠本身的重量来维持其稳定，故在分析重力坝的应力状态时必须充分考虑自重的影响。如前所述，如果把自重直接化为域内积分来处理，就需在域内剖分单元，尽管这种被剖分的域内单元不增加新的未知数，但由此带来的数据输入量和计算机时的增加也是不能低估的，从而会给使用者带来不便。这里将采用 §4-2所述的特解边界元法，把自重化为等价的边界项来处理，从而可以节省许多工作量，有关公式请见 §4-2，本节只给出含体力问题的多域法分析原理。

对于含体力的弹性力学问题，可以建立相应的边界元方程为：

$$[H]\{u\}=[G]\{t\}+\{f\} \tag{10-1}$$

其中：

$$\{f\}=[H]\{u^p\}-[G]\{t^p\} \tag{10-2}$$

式中，$\{u^p\}$、$\{t^p\}$是相应于自重的特解向量。

对于每个区域都可以建立如式（10-1）所示的边界元方程，并将其按照耦合边与非耦合边界写成分块矩阵形式：

对于区域Ⅰ：

$$[H_1 \quad H_1^*]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1^* \end{Bmatrix}=[G_1 \quad G_1^*]\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_1^* \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_1^* \end{Bmatrix} \tag{10-3}$$

对于区域Ⅱ：

$$[H_{\text{Ⅱ}} \quad H_{\text{Ⅱ}}^*]\begin{Bmatrix} u_{\text{Ⅱ}} \\ u_{\text{Ⅱ}}^* \end{Bmatrix}+[G_{\text{Ⅱ}} \quad G_{\text{Ⅱ}}^*]\begin{Bmatrix} t_{\text{Ⅱ}} \\ t_{\text{Ⅱ}}^* \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} f_{\text{Ⅱ}} \\ f_{\text{Ⅱ}}^* \end{Bmatrix} \tag{10-4}$$

再将其引入耦合边的连续条件：

$$\left.\begin{aligned} \{u_1^*\}&=\{u_{\text{Ⅱ}}^*\}=\{u\} \\ \{t_1^*\}&=-\{t_{\text{Ⅱ}}^*\}=\{t\} \end{aligned}\right\} \tag{10-5}$$

并按照已知和未知移到等号两端。即：

$$[H_{\mathrm{I}} \quad H_{\mathrm{I}}^{*} \quad -G_{\mathrm{I}}^{*}]\begin{Bmatrix} u_{\mathrm{I}} \\ u \\ t \end{Bmatrix}=[G_{\mathrm{I}}]\{t_{\mathrm{I}}\}+\begin{Bmatrix} f_{\mathrm{I}} \\ f_{\mathrm{I}}^{*} \end{Bmatrix} \tag{10-6a}$$

和

$$[H_{\mathrm{II}}^{*} \quad G_{\mathrm{II}}^{*} \quad H_{\mathrm{II}}]\begin{Bmatrix} u \\ t \\ u_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix}=[G_{\mathrm{II}}]\{t_{\mathrm{II}}\}+\begin{Bmatrix} f_{\mathrm{II}} \\ f_{\mathrm{II}}^{*} \end{Bmatrix} \tag{10-6b}$$

再将其写在一起，得：

$$\begin{bmatrix} H_{\mathrm{I}} & H_{\mathrm{I}}^{*} & -G_{\mathrm{I}}^{*} & 0 \\ 0 & H_{\mathrm{II}}^{*} & G_{\mathrm{II}}^{*} & H_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{\mathrm{I}} \\ u \\ t \\ u_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} G_{\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & G_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t_{\mathrm{I}} \\ t_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} f_{\mathrm{I}} \\ f^{*} \\ f_{\mathrm{II}} \\ f_{\mathrm{II}}^{*} \end{Bmatrix} \tag{10-7}$$

方程（10-7）即为含体力问题的耦合方程。将实际问题的边界条件引入方程（10-7），可得到形如：

$$[A]\{X\}=\{F\} \tag{10-8}$$

的标准线性方程组。解此方程可以得到所有边界点（包括耦合边）的位移和面力。有了边界点的位移和面力值，就可以根据§4-2中的有关公式，在每个区域分别计算出所需域内点的位移和应力，还可以根据§7-4所述的方法计算边界点的应力值。

§10-3 坝踵裂缝断裂分析

由于坝体与地基弹性模量的差别，需要利用上节所述的方法分析其应力状态，而利用§9-4中的应力外推法求解坝踵裂缝缝端的应力强度因子，从而实现坝踵裂缝的断裂分析。

为了研究重力坝坝踵处界面裂缝的应力强度因子随坝体弹模及上游水位的变化规律，本书作者曾对如图10-1所示的裂缝重力坝进行了计算分析[9]。计算中固定坝高为100.0m、底宽为80.0m、缝长a为1.0m不变，取上游水位分别为100.0m，90.0m，80.0m、70.0m和60.0m进行计算，并在每个水位情形下，计算坝基与坝体的弹模比E_f/E_d分别为1.0，1.2，1.5，2.0，3.0，4.0，5.0，10.0八种情况下的应力强度因子。计算中假定坝体弹模$E_d=2\times10^4$MPa不变，而坝基的弹性模量由E_f/E_d反推得到，泊松比$\nu_d=\nu_f=0.167$，坝的容重为24kN/m^{3}并不计坝基自重的影响。

上游坝面的静水压力按三角形分布考虑，底部强度为γh(γ为水的容重，h为上游水深)，基岩在库水范围内承受的静水压力按表面力计算，每点的强度均为γh，下游按无水考虑。

为了比较有无缝水压力对应力强度因子的影响，分别计算了缝面无水压和有水压两种情况，其中在考虑缝面水压力时，水压力按三角形分布计入，即缝端压力强度为零，坝踵角点处的压力强度为相应水深对应的静水压力γh。

计算结果列于表10-1中，并将其示于图10-2、图10-3和图10-4中。为了说明裂缝工作状态的变化，表10-2给出了$H=80.0$m、90.0m的K_{I}和K_{II}值。

计算结果表明：

(1) 在同一弹模比下，应力强度因子K_0随着水位的变化呈曲线变化，并且该曲线有一个极小值存在，该极小值不论是在考虑缝水压力，还是在不考虑缝水压力的情况下，均在$h=80.0$m附近，而对应着其它水位的应力强度因子K_0均大于该极小值，并且水位越低，K_0值越大，其原因主要是随着水位的降低，裂缝的工作状态由拉剪状态变为压剪状态的缘故（见表10-2），而这个临界点即是极小值对应的水位，可叫做临界水位。

(2) 在同一水位下，应力强度因子K_0随着弹模比的变化呈现出显著的变化，并且当水位在小于临界水位范围内变化时，无论

表10-1 坝踵界面裂缝的应力强度因子K_0

单位：$10^4 N \cdot m^{-3/2}$

Ef/Ed	缝压 \ H	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0
1.0	无	591.09	449.04	270.74	167.82	358.54
	有	942.26	670.09	403.64	286.85	655.21
1.2	无	562.88	423.51	250.57	166.44	367.90
	有	894.94	657.64	371.97	291.46	672.13
1.5	无	528.46	392.52	226.54	167.95	379.57
	有	837.21	606.21	335.56	302.88	692.77
2.0	无	485.67	354.88	186.76	174.26	394.27
	有	765.52	542.97	294.74	322.86	718.26
3.0	无	430.68	305.68	167.62	188.40	413.16
	有	673.65	463.25	252.47	355.68	750.53
4.0	无	396.67	276.03	151.36	199.82	424.80
	有	617.01	415.12	234.29	378.90	770.12
5.0	无	373.61	256.18	142.26	208.47	432.63
	有	578.73	383.23	226.34	395.74	783.17
10.0	无	319.86	211.07	129.07	230.89	450.60
	有	489.97	312.18	223.44	436.74	811.87

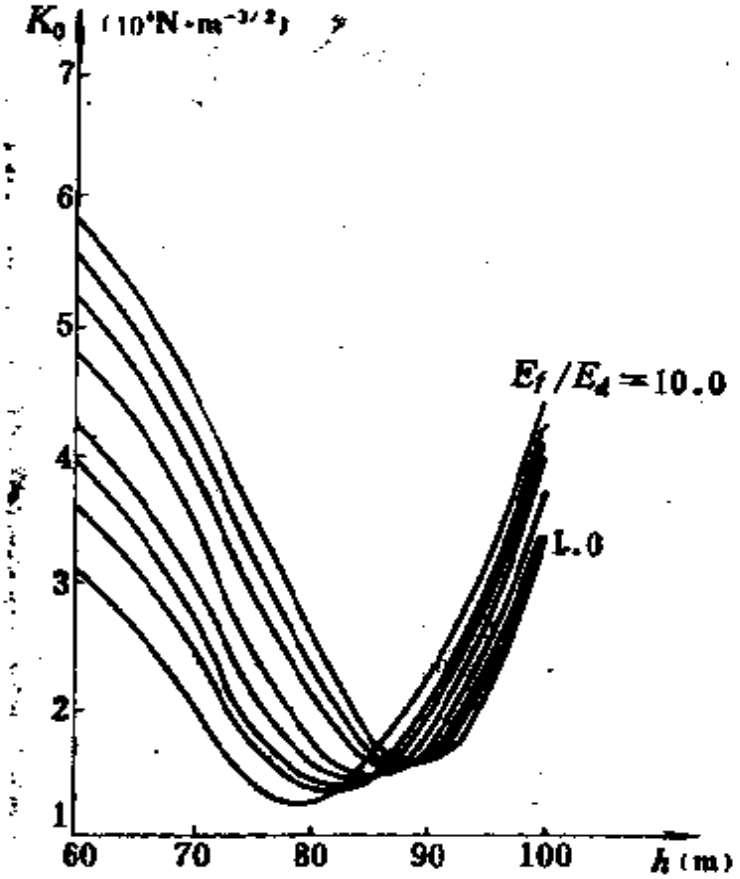


图10-2 K_0～h(无缝压)

表10-2 不计缝压时的应力强度因子K_I

单位：10^4N·m$^{-3/2}$

E_f/E_d \ H \ K_i	80.0m		90.0m	
	K_I	K_{II}	K_I	K_{II}
1.0	−257.32	84.19	−36.97	163.70
1.2	−227.91	104.12	−6.30	166.32
1.5	−190.04	123.31	30.69	160.12
2.0	−124.36	139.33	75.44	157.08
3.0	−79.87	147.37	129.71	136.64
4.0	−41.77	145.48	160.81	118.61
5.0	−16.51	141.30	180.57	104.19
10.0	39.62	122.84	221.81	64.12

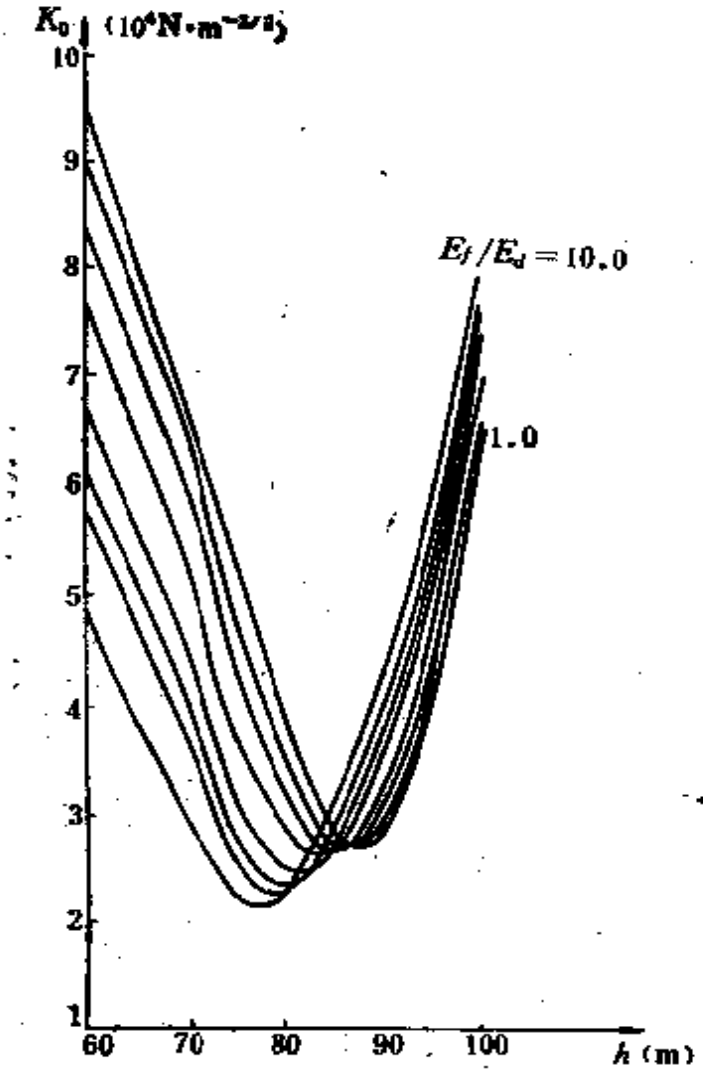


图10-3 K_0～h(有缝压)

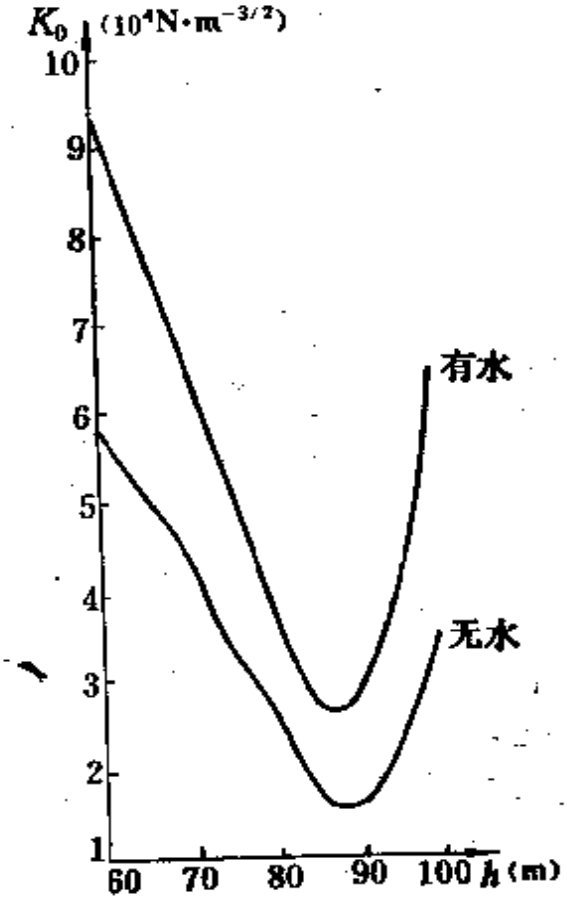


图10-4 K_0～h(E_f/E_d=1.0)

是计入缝水压力，还是不计入缝水压力，K_0值均随弹模比的增加而下降；而当水位在大于临界水位范围内变化时，K_0则随弹模比的增加而增加。

(3) 在其它条件相同的情况下，考虑缝水压力情况下的应力强度因子K_0比不考虑缝水压力情况下的K_0值为大，而且这两种情况下的应力强度因子K_0随水位h的变化曲线接近平行（图10-4）。因此，在工程实际中应该区分什么情况下计入缝水压力，什么情况下不计入缝水压力的问题。

(4) 应力强度因子K_0随弹模比E_f/E_d的变化规律，在E_f/E_d

$=1\sim2$之间变化时，K_0变化比较剧烈，而在$E_1/E_2>2$时，变化相对缓慢。因此，工程上应严格测量坝体与坝基的弹性模量，特别是两者弹模接近时更应特别慎重。

有了应力强度因子K_0，可以按照上一章建议的判据，对坝踵裂缝的稳定性作出判断。

§10-4 主要结论

本章的分析得出以下几个结论：

(1) 用特解边界元法计算重力坝坝踵区界面裂缝的应力强度因子，具有原理简单、处理方便等优点，比较适用于解决这种大体积带自重的问题。

(2) 把重力坝坝踵界面裂缝作为异弹模界面裂缝进行断裂分析是合理的，它可以反映出由于坝体与坝基的弹性模量的差别而对应力强度因子的影响，特别是当两者的弹性模量比较接近时，影响更加显著。因此，对于工程中的中高坝进行坝踵裂缝分析时，由于坝体和坝基的弹模接近，应该特别注意坝基弹性模量的影响，这就要求在实际工程中，应该尽可能准确地测量材料的弹性模量，以对裂缝的稳定性作出准确的评价，确保工程的安全。

(3) 水位的变化会影响到裂缝的工作状态，因此，在利用判据$K_0\geqslant K_{0c}$对裂缝进行失稳性校核时，除了考虑K_0值的大小以外，还要考虑裂缝所处的工作状态，才能对裂缝作出正确的判断。当然，关于裂缝判据问题是一个难度较大的课题，特别对异弹模界面裂缝应进行专门研究。

(4) 考虑缝水压力时的应力强度因子比不考虑缝水压力时的应力强度因子为大，因此，缝水压力是否为坝踵裂缝失稳的主要动力，是一个值得研究的课题。

另外，重力坝坝踵界面裂缝的应力强度因子在其它荷载作用下的变化规律，以及考虑缝面之间摩擦机制时的变化规律等，都有待于进一步研究。

参 考 文 献

[1] 潘家铮. 断裂力学在水工结构设计中的应用. 水利学报，1980年第1期

[2] 周群力等. 混凝土重力坝与基岩胶结面用断裂力学方法进行计算的探讨. 水文地质与工程地质，1979年第6期

[3] 赵中极. 重力坝坝面与坝踵水平裂缝的断裂力学分析. 水利学报，1982年第6期

[4] 黄松梅等. 重力坝坝踵处应力强度因子计算. 水利学报，1984年第9期

[5] 涂传林. 混凝土坝坝踵区的断裂分析. 水利学报，1984年第9期

[6] 黄松梅等. 用杂交模型法计算重力坝坝踵区的应力强度因子. 水利学报，1988年第10期

[7] 周鸿钧、段云岭. 重力坝坝踵区界面裂缝的断裂分析. 水利学报，1986年第11期

[8] 周红锤. 复杂地基上重力坝坝踵界面裂缝断裂分析. 郑州工学院硕士学位论文(导师：周鸿钧)，1988

[9] 李庆斌、林皋、周鸿钧. 异弹模界面裂缝的边界元分析及其应用. 大连理工大学学报，1991年第2期

第十一章　异弹模界面裂缝的动断裂分析

§11-1　概　　述

裂缝的出现使结构分析变得困难，动荷载的作用又使得裂缝结构的断裂分析更加复杂化，多年来在这方面的研究一直比较缓慢[1]。寻找解析解相对于静力情形要困难得多[2]，借助于有限单元法时，由于有限元法本身在解决动力问题中的困难，又加上缝端奇异性的影响，使得精度和工作量往往发生冲突，给使用造成极大困难[3][4]。近年来开始利用边界元法求解动断裂问题取得了成功[5][6]，它吸收了边界元法在解决断裂问题上的优点，但由于采用积分变换方法求解动力响应而引起繁琐的数值反变换，同样给使用带来不便。目前所见到的文献中大多数只解决均质裂缝的断裂分析问题，对于异弹模界面裂缝的动断裂分析尚少研究。

另外，当结构出现裂缝以后，由于在动荷载作用下缝岸的张合、摩擦和碰撞，使结构响应变得非常复杂，直接用求解线弹性结构的方法计算裂缝问题存在着困难，文献[7]利用有限单元法，通过在线弹性结构上，叠加脉冲荷载效应，解决了均质裂缝的动断裂分析，取得了与实验一致的结果。但由于有限单元法的自由度数较多，直接将其应用于解决裂缝状态下的坝与基础的相互作用问题，显得不太适用。

本书作者近年来围绕异弹模界面裂缝的动断裂分析问题开展了一定的研究，利用特解边界元法计算动态应力强度因子，并提出了适合于边界元法的“初位移模型”考虑缝岸的碰撞效应，取

得与实验一致的结果[8-10]。本章即着重介绍这些内容。

§11-2 动力问题的多域法分析

对于异弹模界面裂缝问题，由于缝岸两边材料各不相同，当对其进行动力反应分析时，就要用到多域法。对于这种多区域问题，可以分别在每个区域上建立各自的边界元方程，然后根据耦合边上的连续条件，将这些区域方程装配在一起。

对于动力反应问题，可以按照 §5-3所介绍的方法，在每个区域上建立形如：

$$[M]\{\ddot{u}\}+[H]\{u\}=[G]\{t\} \tag{11-1}$$

的边界元方程，并将其按照耦合边界与非耦合边界，写成分块矩阵的形式。对区域Ⅰ：

$$[M_{\mathrm{I}} \quad M^*]\begin{Bmatrix}\ddot{u}_{\mathrm{I}}\\ \ddot{u}^*_{\mathrm{I}}\end{Bmatrix}+[H_{\mathrm{I}} \quad H^*_{\mathrm{I}}]\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{I}}\\ u^*_{\mathrm{I}}\end{Bmatrix}=[G_{\mathrm{I}} \quad G^*_{\mathrm{I}}]\begin{Bmatrix}t_{\mathrm{I}}\\ t^*_{\mathrm{I}}\end{Bmatrix} \tag{11-2}$$

对区域Ⅱ：

$$[M_{\mathrm{II}} \quad M^*_{\mathrm{II}}]\begin{Bmatrix}\ddot{u}_{\mathrm{II}}\\ \ddot{u}^*_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix}+[H_{\mathrm{II}} \quad H^*_{\mathrm{II}}]\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{II}}\\ u^*_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix}=[G_{\mathrm{II}} \quad G^*_{\mathrm{II}}]\begin{Bmatrix}t_{\mathrm{II}}\\ t^*_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix} \tag{11-3}$$

再根据耦合节点在动力问题中的连续条件：

$$\left.\begin{aligned}\{u^*_{\mathrm{I}}\}&=\{u^*_{\mathrm{II}}\}=\{u\}\\ \{\ddot{u}^*_{\mathrm{I}}\}&=\{\ddot{u}^*_{\mathrm{II}}\}=\{\ddot{u}\}\\ \{t^*_{\mathrm{I}}\}&=-\{t^*_{\mathrm{II}}\}=\{t\}\\ \{\ddot{t}^*_{\mathrm{II}}\}&=-\{\ddot{t}^*_{\mathrm{II}}\}=\{\ddot{t}\}\end{aligned}\right\} \tag{11-4}$$

将式(11-2)、(11-3)按式(11-4)改写，分别为：

$$[M_{\mathrm{I}} \quad M_{\mathrm{I}}^{*}]\begin{Bmatrix}\ddot{u}_{\mathrm{I}}\\ \ddot{u}\end{Bmatrix}+[H_{\mathrm{I}} \quad H_{\mathrm{II}}^{*} \quad -G_{\mathrm{I}}^{*}]\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{I}}\\ u\\ t\end{Bmatrix}=[G_{\mathrm{I}}]\{t_{\mathrm{I}}\} \tag{11-5}$$

$$[M_{\mathrm{II}} \quad M_{\mathrm{II}}^{*}]\begin{Bmatrix}\ddot{u}_{\mathrm{II}}\\ \ddot{u}\end{Bmatrix}+[H_{\mathrm{II}} \quad H_{\mathrm{II}}^{*} \quad G_{\mathrm{II}}^{*}]\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{II}}\\ u\\ t\end{Bmatrix}=[G_{\mathrm{II}}]\{t_{\mathrm{II}}\} \tag{11-6}$$

按照矩阵运算法则，可以将方程（11-5）、(11-6) 装配在一起，并将特征向量统一后，得：

$$\begin{bmatrix}M_{\mathrm{I}} & M_{\mathrm{I}}^{*} & 0 & 0\\ 0 & M_{\mathrm{II}}^{*} & 0 & M_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_{\mathrm{I}}\\ \ddot{u}\\ \ddot{t}\\ \ddot{u}_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}H_{\mathrm{I}} & H_{\mathrm{I}}^{*} & -G_{\mathrm{I}}^{*} & 0\\ 0 & H_{\mathrm{II}}^{*} & G_{\mathrm{II}}^{*} & H_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{I}}\\ u\\ t\\ u_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{\mathrm{I}} & 0\\ 0 & G_{\mathrm{II}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_{\mathrm{I}}\\ t_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix} \tag{11-7}$$

对于实际问题，与单域情形相同地引入边界条件，就可以得到标准的振动仿真方程，形如：

$$[\bar{M}]\{\ddot{X}\}+[\bar{K}]\{X\}=[G]\{P\} \tag{11-8}$$

式中，矩阵 $[\bar{M}]$、$[\bar{K}]$、$[G]$是由方程（11-7）中的相应矩阵引入边界条件后得到的；$\{X\}$为未知向量，$\{P\}$是已知向量。这些已知向量或未知向量，有一部分位移和一部分面力组成。

利用一般的振动仿真方法可以求解方程（11-8），得到边界上（包括耦合边界上）所有节点的位移和面力。进而可以在每个区域上利用单域上的计算公式，求出域内点的位移和应力时程反

应曲线。同时，也可以在每一时段上，利用边界上求解应力的方法求出边界上的应力。

对于自由振动问题（将在第十二章中用到），方程（11-8）中的已知向量为零向量，不难推出其特征方程为：

$$(-\omega^2[\bar{M}]+[K])\{X\}=0 \qquad (11-9)$$

式中，
$$[\bar{M}]=\begin{bmatrix} M_{\mathrm{I}} & M_{\mathrm{I}}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\mathrm{II}}^{*} & 0 & M_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} H_{\mathrm{I}} & H_{\mathrm{I}}^{*} & -G_{\mathrm{I}}^{*} & 0 \\ 0 & H_{\mathrm{II}}^{*} & G_{\mathrm{II}}^{*} & H_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

$$\{X\}=[u_{\mathrm{I}} \quad u \quad t \quad u_{\mathrm{II}}]^{T}$$

再引入问题的边界条件，方程（11-9）就成为非奇异特征方程，求此方程可得问题的自振频率和相应的振型。

§11-3 裂缝的动态模拟

裂缝结构在动态荷载作用下，由于裂缝面的张合、摩擦和碰撞，本质上变为非线性问题，但这种非线性与一般的材料非线性和几何非线性都不一样，它是由于裂缝的存在而使裂缝界面在振动过程中张合、碰撞所引起的非周期运动[7]，这就给问题的求解造成极大的困难。

关于缝面间碰撞模拟的方法，目前所见到的有两种：一种是冲量模型[7]；另一种是动接触模型[11]。冲量模型是把缝面间的碰撞化为等效的脉冲荷载，并以冲量的形式体现出来，然后与假想结构（即不考虑碰撞的理想模型）叠加，求解动力反应。这种方法适用于有限元法求解，效果较好。动接触模型是用缝面节点碰撞后的速度改变量来模拟碰撞，对单质点情形比较合理，对于多质点情形尚无完善的理论。这两种方法都不适用于以边界元法模拟缝面间的碰撞过程。

然而，我们却可以从动接触模型中得到这样的启示：两点间的碰撞可以化为碰撞后质点速度的改变量来等效；另一方面，速度的改变必然会造成时间推移后的位移的改变。从振动仿真的Houblt法可知，位移的改变又隐含着速度的改变，两者在描述具体问题的意义下是统一的，也就是说，考虑了位移的变化，就意味着考虑了速度的改变。基于这种考虑，作者在文献[9]中提出了下述的“初位移模型”。

初位移模型首先假定缝面之间没有摩擦作用。为了说明这种模型的含义，首先推导位移增量与速度的关系。

如图11-1所示，设在时刻τ_j的位移为u_j，速度为$\dot{u}_j$，τ_{j+1}时刻的位移为u_{j+1}，速度为$\dot{u}_{j+1}$，现在要求中间某时刻τ到τ_{j+1}这个时段$\Delta\tau'$内位移的改变量Δu。

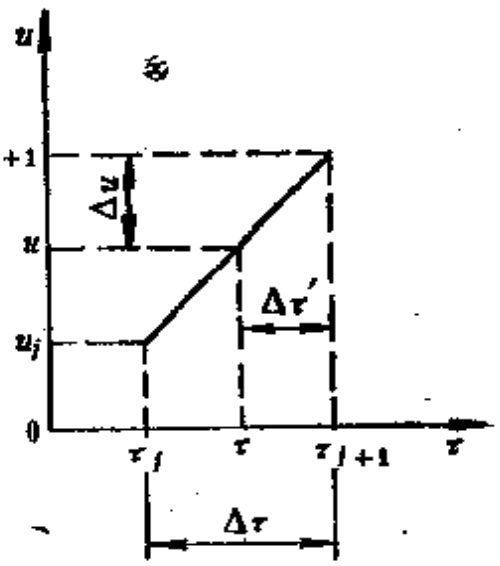


图11-1 位移插值示意图

根据线性加速度法，τ时刻的加速度、速度可以表示为：

$$\ddot{u}(\tau)=\ddot{u}(\tau_{j+1})-\frac{\ddot{u}(\tau_{j+1})-\ddot{u}(\tau_j)}{\Delta\tau}\Delta\tau' \qquad (11-10)$$

$$\dot{u}(\tau)=\dot{u}(\tau_{j+1})-\frac{\ddot{u}(\tau_j)+\ddot{u}(\tau)}{2}\Delta\tau' \qquad (11-11)$$

而由关系式：

$$u(\tau_{j+1})=u(\tau)+\Delta\tau'\dot{u}(\tau)+\frac{(\Delta\tau')^2}{3}\ddot{u}(\tau)+\frac{(\Delta\tau')^2}{6}\ddot{u}(\tau_{j+1}) \qquad (11-12)$$

和关系式：

$$\Delta u=u(\tau_{j+1})-u(\tau) \qquad (11-13)$$

并引入式(11-10)、(11-11)，整理后可得：

$$\Delta u=\frac{\Delta\tau^3}{6\Delta\tau}[\ddot{u}(\tau_{j+1})-\ddot{u}(\tau_j)]-\frac{\Delta\tau^2}{2}\ddot{u}(\tau_j)+\Delta\tau\cdot\dot{u}(\tau_{j+1}) \tag{11-14}$$

由于在振动仿真计算中，$\Delta\tau$往往取得比较小，而$\Delta\tau'<\Delta\tau$恒成立，于是$\Delta\tau'$更小，因此在方程(11-14)中，可以略去$\Delta\tau'$的高阶项的影响。由此可得位移增量与速度的关系为：

$$\Delta u=\Delta\tau'\dot{u}(\tau_{j+1}) \tag{11-15}$$

即某一时段内位移的增量与该时段末的速度成正比。实际上，为了综合考虑时间$\Delta\tau$高阶项和其它因素的共同影响，可以引进综合修正系数K，即有：

$$\Delta u=K\Delta\tau\dot{u}(\tau_{j+1}) \tag{11-16}$$

这里K可由试验确定，本文中假定$K=1.0$。

如果τ_j时刻裂缝没有发生碰撞现象，那么在不考虑碰撞情况下，可以计算出该时刻段末τ_{j+1}时刻的速度$\dot{u}(\tau_{j+1})$和位移$u(\tau_{j+1})$。如果上下缝面上的一对对应点1和2（见图11-2）的位移满足：

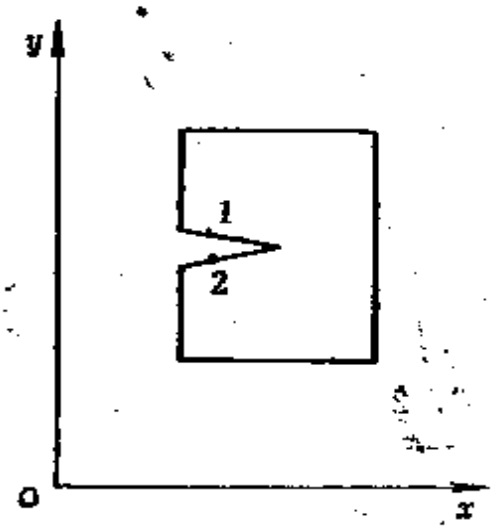


图11-2　缝面碰撞示意

$$d=u_1(\tau_{j+1})-u_2(\tau_{j+1})<0 \tag{11-17}$$

那么1、2两点将发生交叉现象(这里已假定裂缝的初始宽度为零，当宽度不为零时，可仿此得出类似的结论)，交叉的距离为$|d|$，那么在$\tau_j\sim\tau_{j+1}$间的某个时刻τ，这两点即发生碰撞，碰撞的时刻即是$d=0$的瞬间，它可以依照位移增量与速度的关系来确定。

根据式（11-15），对1、2两点分别有

$$\left.\begin{aligned}\Delta u_1&=\Delta\tau'\dot{u}_1(\tau_{j+1})\\ \Delta u_2&=\Delta\tau'\dot{u}_2(\tau_{j+1})\end{aligned}\right\} \tag{11-18}$$

而 $$\Delta u_1 - \Delta u_2 = d$$

所以

$$\Delta\tau' = \frac{d}{\dot{u}_1(\tau_{j+1}) - \dot{u}_2(\tau_{j+1})} \tag{11-19}$$

即在时刻

$$\tau = \tau_{j+1} - \Delta\tau' \tag{11-20}$$

处，1、2 两点发生碰撞。

再将求得的$\Delta\tau'$反代入式 (11-18)，可以求出1、2两点的位移增量Δu_1、Δu_2。

如果在碰撞时刻τ处，给1、2两点反方向施加一个初始位移Δu_1、Δu_2，而物体的时程反应也在原有τ_{j+1}时刻反应的基础上叠加一个由该初始位移引起的反应（包括位移反应、速度反应和加速反应），那么就可以保证τ_{j+1}时刻1、2两点不发生交叉现象。实际上，缝面上的碰撞点往往不只是1、2两点，因此，需对每一对碰撞点做相同的处理。此外，注意到在对另外点做上述修正后，又可能造成原来已修改的1、2两点的交叉，即1、2两点又会发生碰撞现象，那么又要对1、2两点进行相同步骤的修正。同样，对1、2两点的再修正，又会影响到其它点，又需对其它点进行修正。因此，这是一个反复迭代修正的过程，直到所有的点都不发生交叉现象为止。而实际上不可能对其进行无数次修改，可以限制最大修正次数，本书中限定为4次，具体迭代步骤如下：

(1) 对迭代遍数循环；

(2) 对可能碰撞点循环；

(3) 判断是否交叉，若无交叉现象，转向 (7)，否则，顺序执行 (4)；

(4) 计算交叉距离d，确定碰撞时刻τ，计算出待叠加的初位移Δu_1、Δu_2；

(5) 计算在$\Delta\tau'$时段内由初位移Δu_1、Δu_2引起的反应；

(6) 将 (5)的反应值与物体在τ_{j+1}时刻的相应反应叠加，得到修正后τ_{j+1}时刻的相应反应值；

(7) 判断本次迭代中所有可能碰撞点是否已全部修正，是则顺序执行 (8)，否则返回 (2)；

(8)判断是否还有交叉现象，有则顺序执行 (9)，否则迭代结束；

(9) 判断是否满足最大迭代次数，不满足，返回 (1) 继续执行，满足则修正完成。

这种迭代的过程也可以用图11-3所示的框图表示。

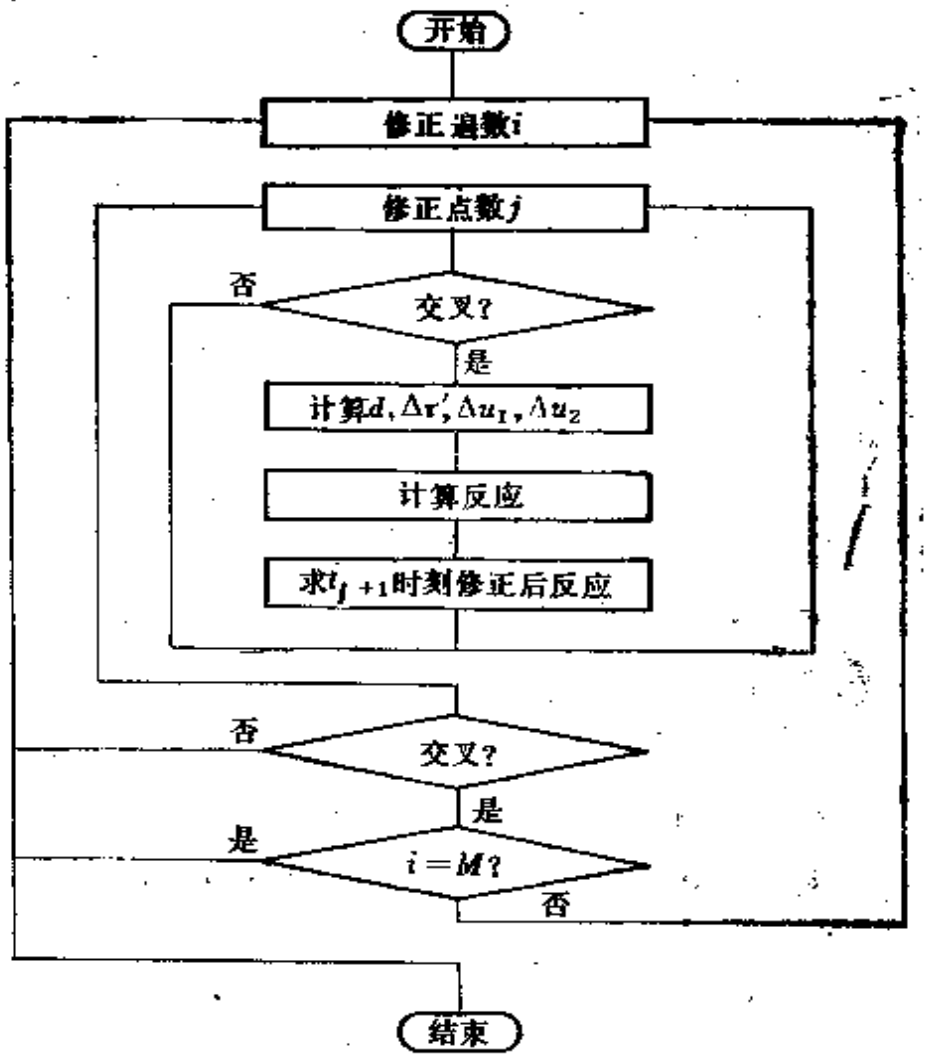


图11-3 缝面碰撞迭代框图

利用这种方法，即把碰撞问题化为等价的初始位移向量来考虑。从上述推导过程可以看出，在利用这种模型时，Δt取得不能过大，否则会造成较大的误差，这一点提醒使用者特别注意。

求出了裂缝结构的反应后，即可以仿照 §9-4所述的方法计算裂缝的动态应力强度因子，即有：

$$K_{\mathrm{I}}(\tau)=[\Sigma f^{j}_{\mathrm{I}}(\tau)\cdot\Sigma r^{2}_{j}-\Sigma r_{j}f^{j}_{\mathrm{I}}(\tau)\Sigma r_{j}]/(5\Sigma^{2}_{j}-\Sigma r_{j}\cdot\Sigma r_{j})$$

$$K_{\mathrm{II}}(\tau)=[\Sigma f^{j}_{\mathrm{I}}(\tau)\cdot\Sigma r^{2}_{j}-\Sigma r_{j}f^{j}_{\mathrm{II}}(\tau)\cdot\Sigma r_{j}]/(5\Sigma r^{2}_{j}-\Sigma r_{j}\cdot\Sigma r_{j}) \tag{11-21}$$

式中，$f^{j}_{\mathrm{I}}(\tau)=\sqrt{2\pi r_{j}}[\sigma_{yy}(\tau)\cos q-\sigma_{xy}(\tau)\sin q]$

$$f^{j}_{\mathrm{II}}(\tau)=\sqrt{2\pi r_{j}}[\sigma_{yy}(\tau)\sin q+\sigma_{xy}(\tau)\cos q] \tag{11-22}$$

这里，“Σ”表示 j 从1到5求和，这五个点的位置见第九章，τ是时间变量，且：

$$q=\in \ln r_{j}$$

$$\in=\frac{1}{2\pi}\ln s$$

$$s=\frac{G_{1}+G_{2}\kappa_{1}}{G_{2}+G_{1}\kappa_{2}}$$

$$\kappa_{i}=\begin{cases}3-4\nu_{i}, & \text{平面应变问题}\\ \dfrac{3-\nu_{i}}{1+\nu_{i}}, & \text{平面应力问题}\end{cases}$$

在实际中，用到的复应力强度因子模为：

$$K_{0}(\tau)=\sqrt{K^{2}_{\mathrm{I}}(\tau)+K^{2}_{\mathrm{II}}(\tau)} \tag{11-23}$$

§11-4 中心裂纹板分析

为了考核动力耦合分析程序的正确性，作者对图11-4所示的2×4m的矩形深梁，将其分为上下相等的两个2×2m的方形域来计算A点的水平位移反应，时程反应曲线示于图11-4中，并与有限元法所得的结果进行了对比。由图可以看出，耦合程序的精度是有保证的。

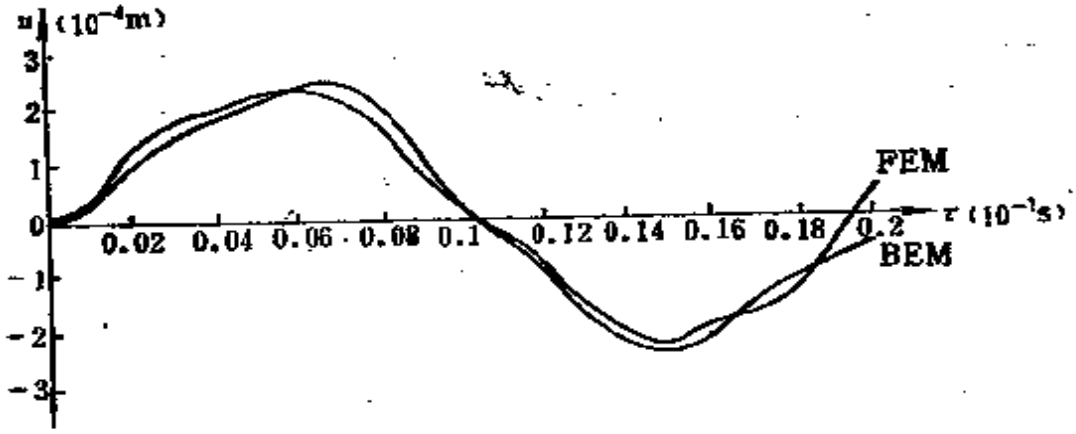


图11-4 矩形深梁的位移时程

为了考查用边界元法计算动态应力强度因子的正确性，作者对文献[5]提供的算例进行了计算。如图11-5所示的中心裂纹板，缝岸两边材料相同，在Heaviside荷载作用下的应力强度因子K_I的时程反应曲线示于图11-6，由图可以看出，用特解边界元法和应力外推法计算动态应力强度因子具有较好的精度。本章§11-6中的试验结果也证明了同样的结论。

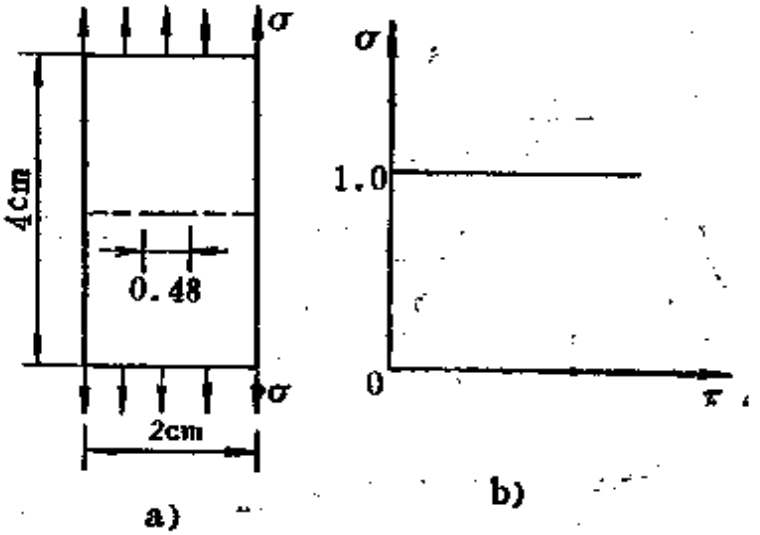


图11-5 中心裂纹板示意图

考查了计算精度以后，作者对图11-7所示的中心裂纹板在缝岸两边材料不同的情况下进行了计算分析，计算中假定$\sigma=\sin(0.5\pi\tau)$，并根据对称性取一半计算，其参数$\gamma_1=\gamma_2=10\text{kN/m}^3$，$E_2=10^4\text{MPa}$，$E_1$由$E_1/E_2=1.0,\pm1.2,\pm2.0,5.0,10.0,100.0,1000.0$反推得到，缝长$2a=2.0\text{m}$，图11-7中的尺寸单位为m，

计算结果分别列于图11-8、11-9及表11-1中。其中，图11-8给出了当$E_1/E_2=1.0$时K_1随时间的变化曲线，图11-9给出了$E_1/E_2=1.0$和1000.0时K_0随时间的变化曲线，表11-1给出的是当缝长为1.0m时，K_0的最大值随弹模比的变化。单位为$10^4\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-3/2}$。

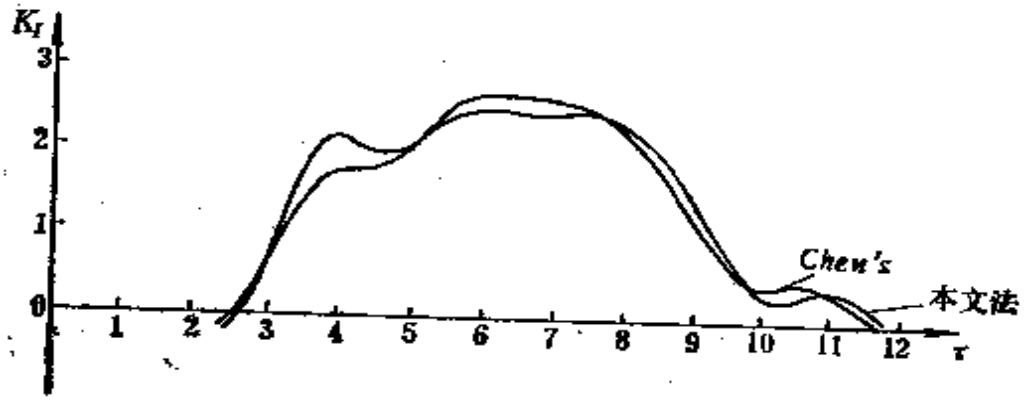


图11-8　中心裂纹板动应力强度因子时程

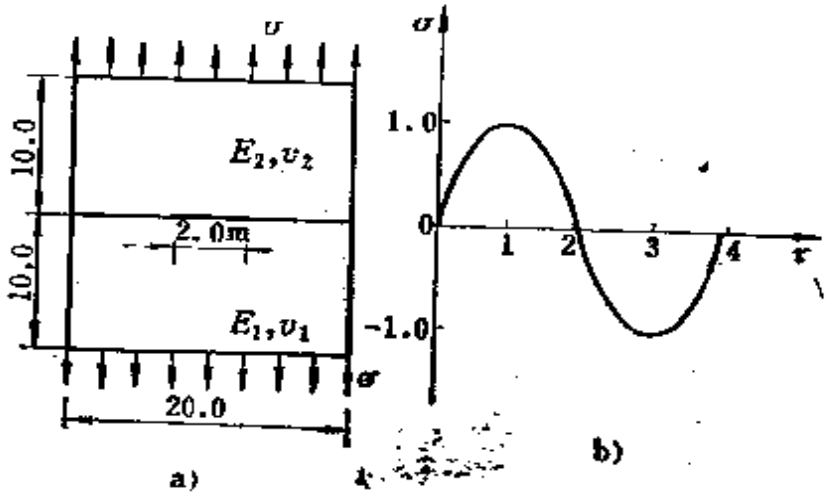


图11-7　异弹模界面裂缝示意图

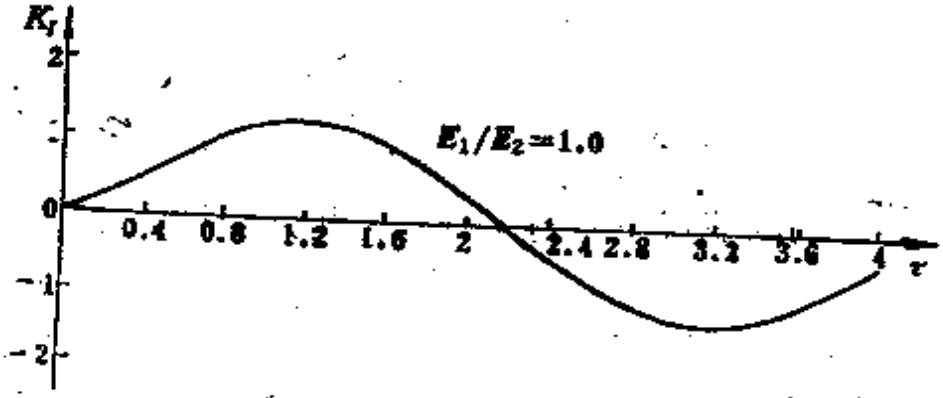


图11-8　$K_I\sim\tau(E_1/E_2=1.0)$

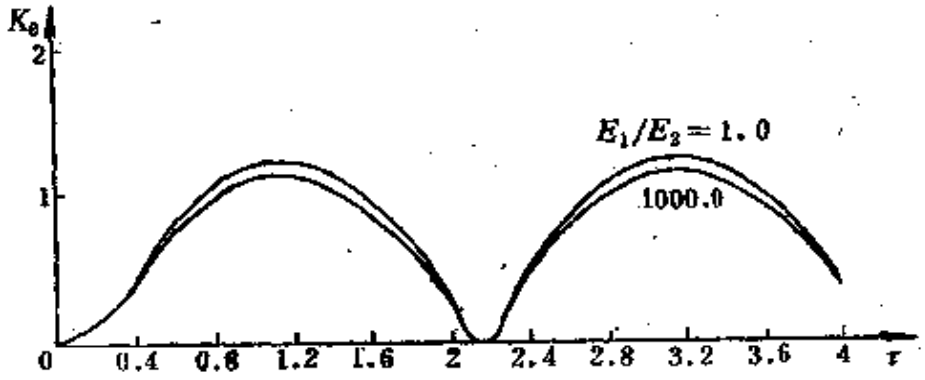


图11-9 K_0～τ曲线

表11-1 a=1 m时应力强度因子最大值K_{0max}

E_1/E_2	1.0	1.2	2.0	5.0	10.0	100.0	1000.0
K_{0max}	1.238	1.239	1.238	1.219	1.201	1.168	1.163

计算结果表明：

(1) 在正弦荷载sinτ作用下，K_0随时间呈|sinτ|变化，K_1随时间呈sinτ变化。

(2) 在正弦荷载作用下的最大复应力强度因子K_{0max}随弹模比E_1/E_2的增加而变化，其变化规律在$E_1/E_2=1$～2内有一个低微上升，然后下降，但总的变化比较缓慢，这个规律与静态情形类似。

值得指出的是，中心裂纹板在考虑裂缝碰撞和不考虑裂缝碰撞的结果几乎没有差别，其原因可能是该裂纹关于y轴对称，两边缝尖的限制作用使得缝面节点几乎无交叉现象。

§11-5 单边裂纹板分析

为了考查初位移模型的有效性，作者对图11-10所示的单边裂纹板在悬臂状态下受正弦荷载$\sigma=\sin(0.5\pi\tau)$作用时的动态应

力强度因子按照考虑碰撞和不考虑碰撞两种情况分别进行计算。计算中取$E_1=2\times10^4$MPa，$v_1=v_2=0.2$，$\gamma_1=\gamma_2=10$kN/m^3，E_2按$E_1/E_2=1.0$，1.2，1.5，2.0，5.0，10.0，100.0，1000.0反推得到，计算结果列于图11-11、11-12和图11-13及表11-2中。其中，图11-11给出了当$E_1/E_2=1.0$时，K_0随缝长变化时的时程曲线，图11-12是不同缝长时K_0的时程曲线，图11-13分别给出了不同缝长时，对应于$E_1/E_2=1.0$和1000.0时K_0的时程曲线，表11-2列出了不同裂缝长度和不同弹模比对应的最大复应力强度因子K_{0max}。

值得说明的是，这里给出的结果都是考虑碰撞后所得到的，对于非碰撞情形下的结果均呈标准正弦（或其绝对值）曲线变化，这里没有给出。

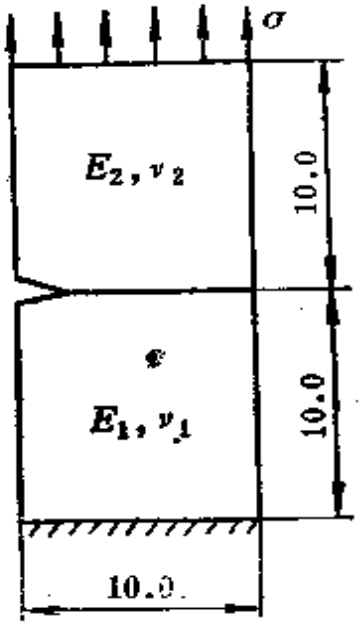


图11-10 单边裂纹板示意图

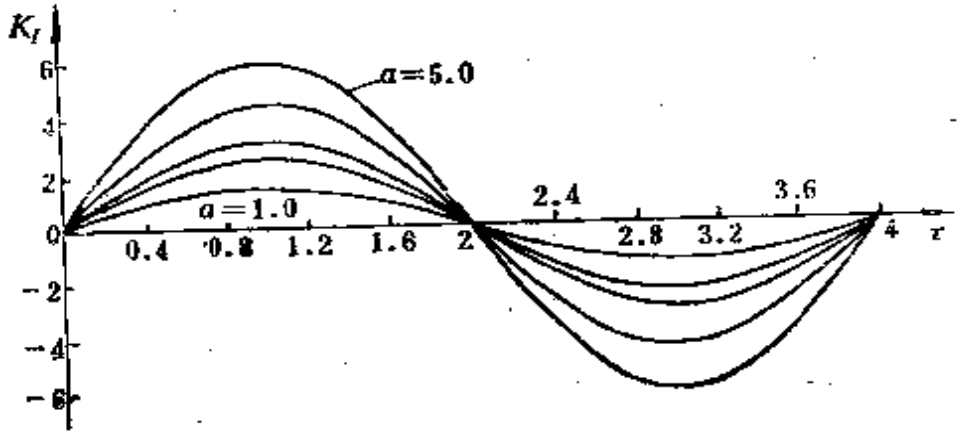


图11-11 $K_1\sim\tau$曲线

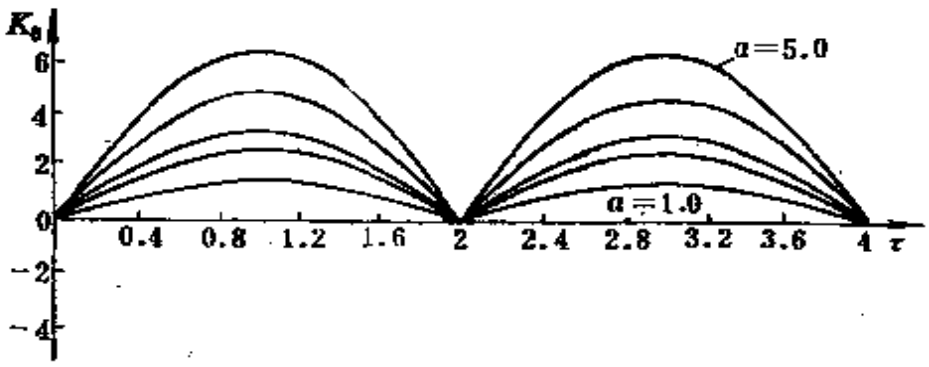


图11-12　K_0～τ曲线

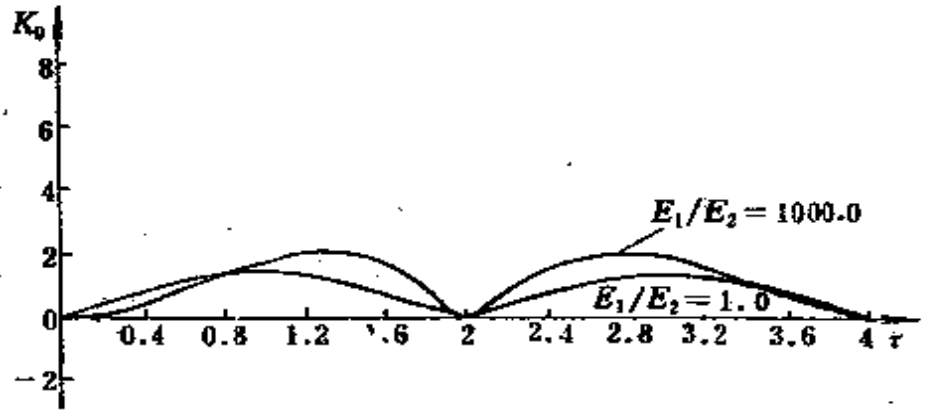


图11-13(a)　K_0～τ曲线($a=1.0$m)

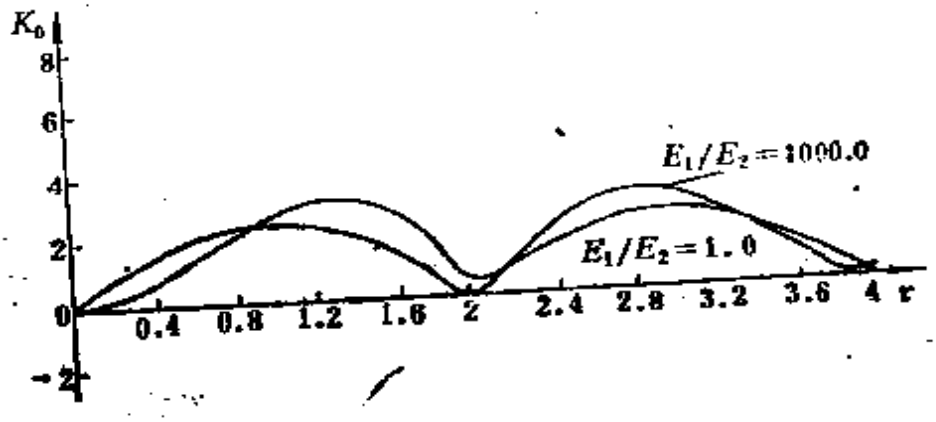


图11-13(b)　K_0～τ曲线($a=2.0$m)

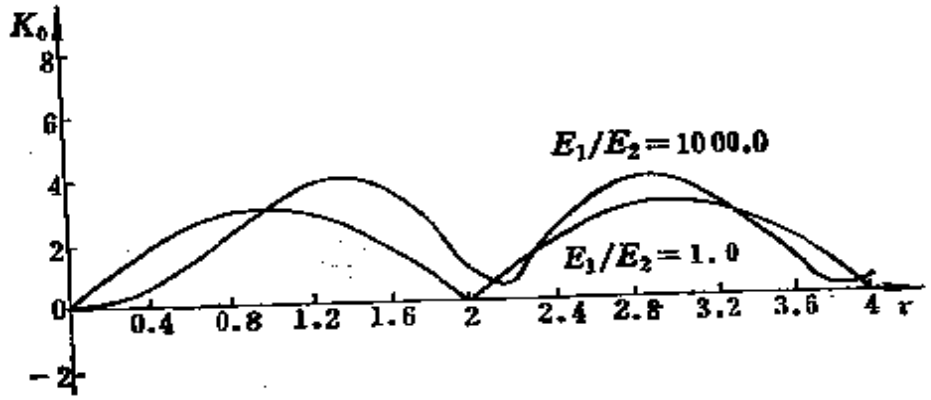


图11-13(c)　$K_0\sim\tau$曲线($a=3.0$m)

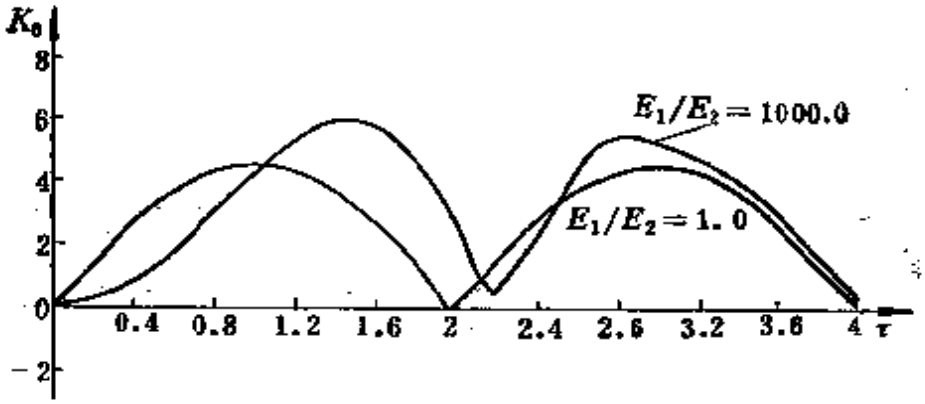


图 11-13(d)　$K_0\sim\tau$曲线($a=4.0$m)

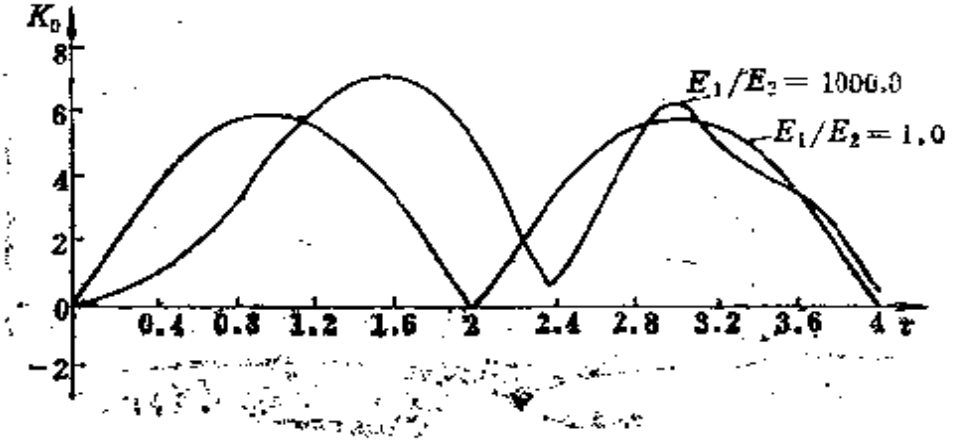


图11-13(e)　$K_0\sim\tau$曲线($a=5.0$m)

表11-2 单边裂纹板最大应力强度因子$K_{\theta max}$

E_1/E_2 / a	1.0	1.2	1.5	2.0	5.0	10.0	100.0	1000.0
1.0	1.453	1.454	1.456	1.461	1.488	1.510	1.563	2.080
2.0	2.502	2.501	2.502	2.502	2.507	2.515	2.580	3.232
3.0	3.087	3.086	3.085	3.084	3.080	3.090	3.412	3.984
4.0	4.555	4.563	4.572	4.582	4.608	4.644	5.296	5.915
5.0	5.718	5.725	6.029	6.039	6.070	6.174	7.578	7.264

由计算可以看出：

(1) 单边裂纹板在正弦荷载$\sin rt$作用下，复应力强度因子K_θ随缝长的增加而增加，特别当$E_1/E_2=1.0$时，K_1呈$\sin rt$变化，K_0呈$|\sin rt|$变化。

(2) 在同一缝长下，K_θ随弹模比的增加基本上呈现增加的趋势，个别出现跳跃的原因可能是缝面碰撞的结果。弹模比愈大，碰撞愈加剧烈，因此，在缝长较大弹模比也比较大的情况下，缝面的碰撞就显得特别重要。

§11-6 实验考核[10]

关于异弹模界面裂缝的动态试验研究，尚未见报导。本书作者为了验证用特解边界元法计算应力强度因子的精度，对异弹模界面裂缝进行了动态实验研究。

试验模型由两块尺寸为$10\times10cm^2$的不同弹性模量的石膏用氯丁胶粘结而成，用很薄的锯条锯成裂缝，利用电测法测量缝端的应变值，用光线示波器记录其历时，测量点选在$r=0.2\sim0.4a$之间（a是裂缝长度）[7]，利用虎克定律将应变转化为应力，再用下列公式求其应力强度因子：

$$K_1=L^{-1}r^{-\frac{1}{2}}\ e^{\epsilon_\theta}\frac{\sigma_{yy}g_{xy}-\sigma_{xy}g_{yy}}{f_{yy}g_{xy}-f_{xy}g_{yy}}$$

$$K_1=L^{-1}r^{\frac{1}{2}}e^{\epsilon\theta}\frac{\sigma_{yy}f_{xy}-\sigma_{xy}f_{yy}}{g_{yy}f_{xy}-g_{xy}f_{yy}}$$

(11-24)

式中有关参数的含义请见 §9-2。

试验原理图示于图11-14中。

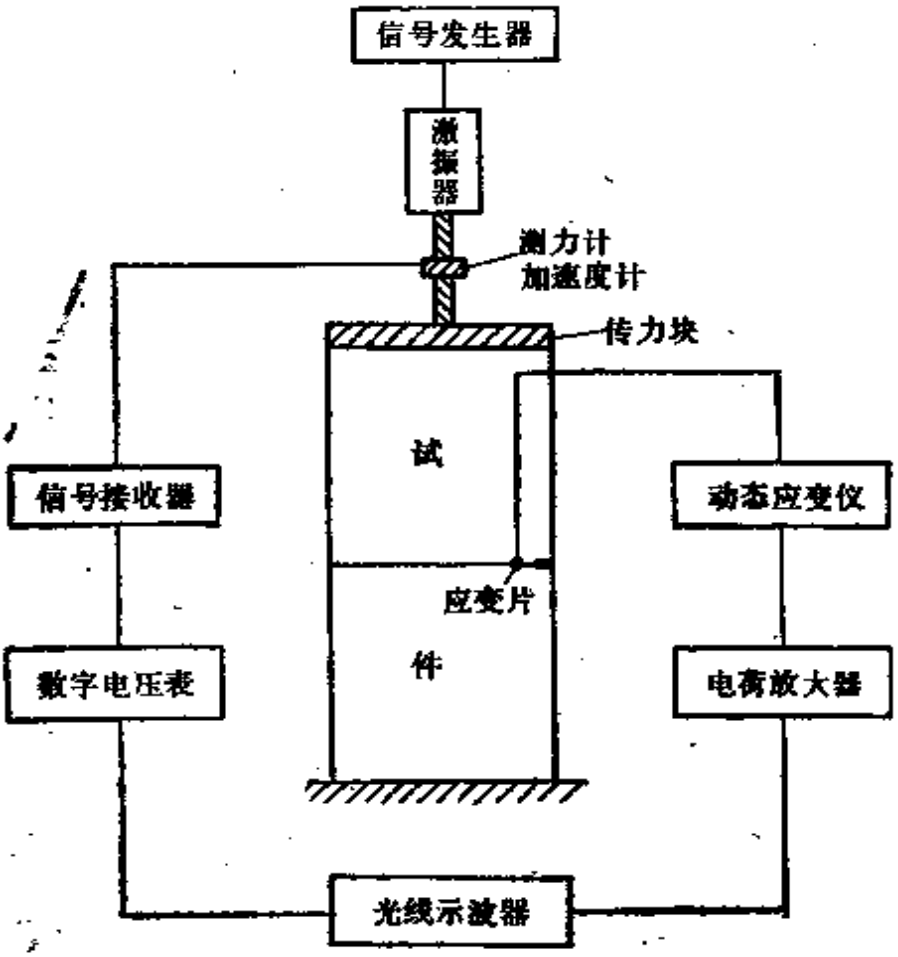


图11-14 试验原理图

试验中，以五种弹模比 E_1/E_2=1.0，1.2，1.5，2.0，5.0和四种裂缝a=1.0，3.0，5.0，7.0cm为不同的试件分别进行试验。所施加的荷载为频率f=25Hz的标准正弦波，峰值的大小由

每次试验实测得到，然后换算为标准荷载。由此换算得到的峰值应力强度因子分别列于表11-3、11-5和11-7中。同时按照相同工况用前述的特解边界元法计算出相应的应力强度因子，分别列于表11-4、11-6和11-8中。

表11-3 实验K_I峰值表 ($10^4 N \cdot m^{-3/2}$)

E_1/E_2 \ a	1.0	3.0	5.0	7.0
1.0	1.306	2.383	4.615	10.906
1.2	1.291	2.358	4.388	10.902
1.5	1.269	2.353	4.332	10.740
2.0	1.218	2.106	4.225	10.693
5.0	1.192	2.001	4.021	9.018

表11-4 计算K_I峰值表 ($10^4 N \cdot m^{-3/2}$)

E_1/E_2 \ a	1.0	3.0	5.0	7.0
1.0	1.307	2.327	4.530	10.830
1.2	1.304	2.322	4.521	10.821
1.5	1.292	2.303	4.485	10.730
2.0	1.263	2.257	4.404	10.542
5.0	1.124	2.037	4.011	9.623

表11-5 实验K_{II}峰值表 ($10^4 N \cdot m^{-3/2}$)

E_1/E_2 \ α	1.0	3.0	5.0	7.0
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000
1.2	0.090	0.138	0.201	0.643
1.5	0.201	0.327	0.627	1.469
2.0	0.355	0.526	1.078	2.491
5.0	0.746	1.117	2.045	4.838

表11-6 计算K_{II}峰值表 ($10^4 N \cdot m^{-3/2}$)

E_1/E_2 \ α	1.0	3.0	5.0	7.0
1.0	0.002	0.005	0.005	0.005
1.2	0.098	0.149	0.278	0.680
1.5	0.217	0.334	0.618	1.487
2.0	0.362	0.558	1.030	2.466
5.0	0.719	1.102	2.024	4.820

表11-7　实验K_0峰值表　　($10^4 N \cdot m^{-3/2}$)

E_1/E_2 \ a	1.0	3.0	5.0	7.0
1.0	1.306	2.383	4.615	10.906
1.2	1.294	2.362	4.393	10.921
1.5	1.285	2.376	4.377	10.840
2.0	1.269	2.171	4.360	10.979
5.0	1.406	2.292	4.511	10.234

表11-8　计算K_0峰值表　　($10^4 N \cdot m^{-3/2}$)

E_1/E_2 \ a	1.0	3.0	5.0	7.0
1.0	1.307	2.327	4.530	10.830
1.2	1.308	2.327	4.530	10.842
1.5	1.310	2.327	4.527	10.833
2.0	1.314	2.325	4.523	10.827
5.0	1.334	2.316	4.493	10.763

由此可以看出，用特解边界元法和应力外推法求解异弹模界面裂缝的动态应力强度因子是有效的，与试验结果具有较好的一致性。

§11-7 小　　结

本章的计算分析和试验结果，得出有下述结论：

(1) 特解边界元法分析裂缝结构的动应力，应力外推法求解动态应力强度因子的方法，是求解异弹模界面裂缝动态应力强度因子的有效方法，具有原理简单、程序设计方便、精度高等优点，能够较好地模拟试验结果。

(2) 文中提出的模拟裂缝碰撞现象的“初位移模型”比较适用于求解动断裂问题。裂缝碰撞问题是裂缝动态分析时关键而又难度较大的课题，值得深入研究，特别当裂缝较长，变形较严重时，更应该特别慎重。

对于动态裂缝，求出了其动态应力强度因子以后，可以仿照静态裂缝的断裂判据对动态裂缝进行判断。即：

当 $$K_0>K_{0d}$$

时，裂缝失稳起裂；

当 $$K_0=K_{0d}$$

时，裂纹处于失稳临界状态；

当 $$K_0>K_{0d}$$

时，裂纹稳定。这里K_{0d}是材料的动态断裂韧度。

当然，异弹模界面裂缝的断裂判据尚少研究，由于其复杂性，需进行深入地研究。

参 考 文 献

[1] W. G. Knauss. Fundamental Consideration in Dynamic Fracture. Eng. Frac. Mech., Vol.23, No.1, 1986

[2] H. G. Georgiadis. Coplex-Variable and Integral -Transform Methods for Elastodynamic Solutions of Cracked Orthotropic Strips. Eng. Frac. Mech., Vol.24, No.5, 1986

[3] V. M. Rti & S. Valliappan. The Use of Quarter Point Element in Dynamic Crack Analysis. Eng. Frac. Mech., Vol.23, No.3, 1986

[4] T. Y. Fan & H. G. Habn. Application of the Boundary Integral Equation Method to Dynamic Fracture Mechanics. Eng. Frac. Mech., Vol.21, No.2, 1985

[5] Zhang Wai. Computation of Dynamic Stress Intensity Factor by Direct Integral Boundary Element Method. Proc. Int. Conf. Frac. & Frac. Mech., Shanghai, 1987

[6] Yin Jiaju & Ji Xing. Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factors by BEM, Proc. Int. Conf. Frac. & Frac. Mech., Shanghai, 1987

[7] 周晶、林皋。重力坝坝面水平裂缝的地震应力强度因子。水利学报，1985年第4期

[8] 李庆斌、周鸿钧、林皋。用特解边界元法计算动态应力强度因子。解析与数值结合法的理论及其工程应用(第一届全国解析与数值结合法会议论文集)，长沙：湖南大学出版社，1989

[9] 李庆斌、周鸿钧、林皋。异弹模界面裂纹的动断裂分析。地震工程与工程振动。1990年第4期

[10] 李庆斌、林皋、周鸿钧。异弹模界面裂缝的动态实验研究。实验力学，1990年第3期

[11] 陶建人。动接触减震法及其应用。大连理工大学博士学位论文(导师：林皋)，1987

第十二章　重力坝、地基、库水体系动力分析

§12-1　概　　述

重力坝作为一种大型的水工建筑物，在对其进行动力分析时，除了和一般结构相同的考虑外，它还有自己的特殊性[1]。一方面，在坝体振动时，带动了库水的振动，在库水内产生附加的动水压力，动水压力反过来又作用于坝体，改变了坝体的动力特性和动力反应，因此，必须考虑坝体与库水之间的相互作用对坝体动力特性和动力反应的影响；另一方面，坝体在外荷激发下产生振动，坝体的振动会带动地基运动，而地基又反过来影响坝体的动力特性和动力反应，这就是所谓结构与地基的相互作用，由于重力坝质量巨大，加上地基对坝体的影响较严重，因此，必须考虑重力坝与地基的相互作用。由此可见，应该将重力坝、库水和地基三者作为一个弹性整体来考虑，这个体系在计算机技术已很发达的今天，可以直接应用有限单元法求解[2]，但是，对于如何确定地基的影响范围和合理的边界条件以及水域的有效影响范围等问题，都还没有很好地得到解决。处理这种复杂问题的另一途径是将库水与地基的影响分别作为作用在重力坝迎水面和坝与基础交界面上的外力来对待，即所谓的子结构方法，这样可以避免较多的自由度数，减少计算机时，且地基可以看作半无限平面体，库水可以看作半无限带形区域来处理，这就给使用边界元法创造了极好的条件。

围绕重力坝与地基、库水的相互作用问题的分析方法，开展

了不少研究，文献[3]用有限元和边界元耦合法分析固体与液体的耦联振动，文献[4]研究了用拱梁模态综合法与边界元耦合法分析三维结构与液体的相互作用问题，文献[5]研究了样条半解析法与边界元法联合求解固液耦振问题，文献[6]研究的是用全边界元法求解坝体与库水的耦振问题。这些方法各有千秋，可根据不同的情况作出恰当的选择。但是，目前文献中同时考虑重力坝、地基、库水三者相互作用的研究还不太成熟，本书作者曾在文献[7]中作过探讨，这里着重介绍这种方法。

文献[7]利用特解边界元法考虑坝体与地基的相互作用，用边界元法考虑库水的影响，较好地解决了三者的相互作用问题。另外，还介绍文献[8]、[9]利用本法求出的有关结果，以供读者参考。

§12-2 无穷边界单元

对于半无限地基，当用全平面域上的基本解时，就要在无限边界上划分单元，如果仅用一般边界单元，则必须把无限边界作近似处理，即截取足够长来近似分析。这种处理在动力问题中改变了动力边界条件，势必造成误差，文献[10]给出了无穷边界元来处理这种无限边界问题，可以节省大量的边界单元。

文献[10]证明，对于图12-1所示的无限平面域问题，直接对无穷边界积分，所得边界积分方程为：

$$C_{ki}u_k+\int_{\Gamma_1}u_k P_{ki}^*\mathrm{d}r+u_i+\omega C_i=\int_{\Gamma_1}t_k U_k^*\mathrm{d}r \qquad (12-1)$$

其中，比方程（2-53）多出的两项u_i。ω为刚体的平动和转动引起的，在平面问题中，可令$\omega=0$来考虑，Γ_1为有限边界。

那么，把这种思想方法应用到如图12-2所示的半无限平面域问题时，Γ_1就变为半无限边界了，如果直接对这个无限边界进行一般边界单元剖分，所需的单元数非常多，精度也不能保证，给使

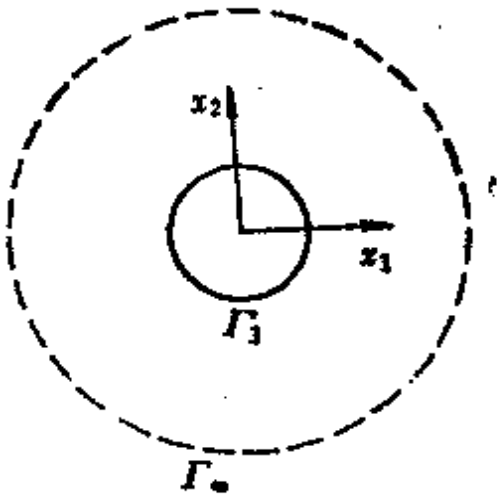


图12-1 无限平面域示意图

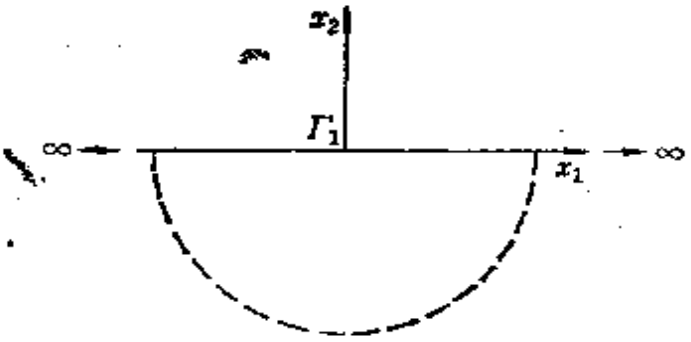


图12-2 平面半无限域示意图

用带来不便。为了节省单元，减少计算工作量，必须引入无穷边界单元。

可以看出，所用到的无穷边界单元不外乎有两种形式，如图12-3所示。

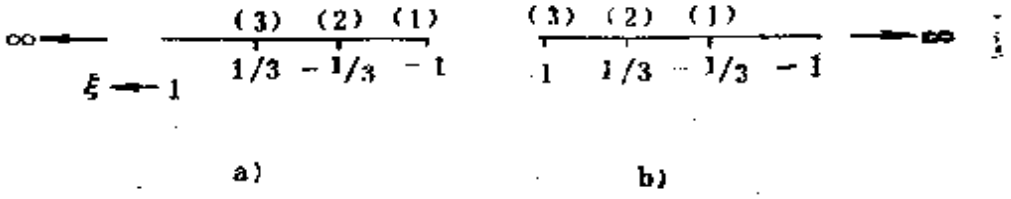


图12-3 无穷边界单元示意图

根据无限远处的坐标为无穷，位移有$\ln\frac{1}{r}$奇性（合力不为零时）、$\frac{1}{r}$奇性（合力为零时）和刚体位移，面力为零的特点，不难构造出这两种单元的插值函数，结果如下：

1.无穷边界元Q的插值函数

(1) 坐标

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{3} \phi_i x_i \\
\phi_1(\xi) &= \frac{1}{2}(9\xi^2-1)/(1-\xi)^2 \\
\phi_2(\xi) &= \frac{4}{3}(1+\xi)(1-3\xi)/(1-\xi)^2 \\
\phi_3(\xi) &= \frac{1}{6}(1+\xi)(1+3\xi)/(1-\xi)^2
\end{aligned}\right\} \qquad (12\text{–}2)
$$

(2) 位移

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{3} \phi_i' u_i \\
\phi_1'(\xi) &= \frac{1}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\left[-\ln 3-\ln(1-\xi)\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{3}{2}\ln 2\right)(1-\xi)\right] \\
\phi_2'(\xi) &= \frac{1}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\left[\ln\frac{27}{4}+2\ln(1-\xi)\right. \\
&\quad \left.-\left(\frac{3}{2}\ln 3\right)(1-\xi)\right] \\
\phi_3'(\xi) &= \frac{1}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\ln\frac{16}{27}-\ln(1-\xi)\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}\right)(1-\xi)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (12\text{–}3)
$$

(3) 面力

$$\left.\begin{aligned} t&=\sum_{i=1}^{3}\phi_i''t_i \\ \phi_1''(\xi)&=\frac{9}{16}\left(\xi-\frac{1}{3}\right)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)(1-\xi) \\ \phi_2''(\xi)&=-\frac{27}{16}(1+\xi)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)(1-\xi) \\ \phi_3''(\xi)&=\frac{27}{16}(1+\xi)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)(1-\xi) \end{aligned}\right\} \qquad (12-4)$$

2.无穷边界元b的插值函数

(1) 坐标

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(\xi)&=\frac{1}{6}(1-\xi)(1-3\xi)/(1+\xi)^2 \\ \phi_2(\xi)&=\frac{4}{3}(1-\xi)(1+3\xi)/(1+\xi)^2 \\ \phi_3(\xi)&=\frac{1}{2}(9\xi^2-1)/(1+\xi)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (12-5)$$

(2) 位移

$$\left.\begin{aligned} \phi_1'(\xi)&=\frac{1}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\left[\ln\frac{16}{27}-\ln(1+\xi)\right. \\ &\qquad \left.+\left(\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}\right)(1+\xi)\right] \\ \phi_2'(\xi)&=\frac{1}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\left[\ln\frac{27}{4}+2\ln(1+\xi)\right. \end{aligned}\right\} \qquad (12-6)$$

$$-\left(\frac{3}{2}\ln 3\right)(1+\xi)]$$

$$\phi_2'(\xi)=\frac{1}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\left[-\ln 3-\ln(1+\xi)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}\ln 2\right)(1+\xi)\right]$$

(3) 面力

$$\left.\begin{aligned}\phi_1''(\xi)&=-\frac{27}{16}(1-\xi)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)(1+\xi)\\ \phi_2''(\xi)&=\frac{27}{16}(1-\xi)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)(1+\xi)\\ \phi_3''(\xi)&=\frac{9}{16}\left(\xi-\frac{1}{3}\right)\left(\xi+\frac{1}{3}\right)(1+\xi)\end{aligned}\right\}\quad(12\text{-}7)$$

利用类似的方法可以证明位势问题的无穷边界积分方程形式，也同样可以构造位势问题的无穷边界元插值函数。根据无限远处坐标为无穷和无限远处不反射透射波的条件，构造出的无穷边界单元（位势问题）的插值函数如下。

3.无穷边界单元a（位势问题）

(1) 坐标

$$\left.\begin{aligned}x&=\sum_{i=1}^{3}\phi_i x_i\\ \phi_1(\xi)&=\frac{1}{2}(9\xi^2-1)/(1-\xi)^2\\ \phi_2(\xi)&=\frac{4}{3}(1+\xi)(1-3\xi)/(1-\xi)^2\\ \phi_3(\xi)&=\frac{1}{6}(1+\xi)(1+3\xi)/(1-\xi)^2\end{aligned}\right\}\quad(12\text{-}8)$$

(2) 位势及其导数

$$\left.\begin{aligned} p&=\sum_{i=1}^{3}\phi_i'(\xi)p_i \\ \frac{\partial p}{\partial n}&=\sum_{i=1}^{3}\phi_i'(\xi)\frac{\partial p_i}{\partial n} \\ \phi_1'(\xi)&=\frac{9}{16}(\xi-\frac{1}{3})(\xi+\frac{1}{3})(1-\xi) \\ \phi_2'(\xi)&=-\frac{27}{16}(1+\xi)(\xi-\frac{1}{3})(1-\xi) \\ \phi_3'(\xi)&=\frac{27}{16}(1+\xi)(\xi+\frac{1}{3})(1-\xi) \end{aligned}\right\} \quad (12-9)$$

4.无穷边界单元b (位势问题)

(1) 坐标

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(\xi)&=\frac{1}{6}(1-\xi)(1-3\xi)/(1+\xi)^2 \\ \phi_2(\xi)&=\frac{4}{3}(1-\xi)(1+3\xi)/(1+\xi)^2 \\ \phi_3(\xi)&=\frac{1}{2}(9\xi^2-1)/(1+\xi)^2 \end{aligned}\right\} \quad (12-10)$$

(2) 位势及其导数

$$\left.\begin{aligned} \phi_1'(\xi)&=-\frac{27}{16}(1-\xi)(\xi-\frac{1}{3})(1+\xi) \\ \phi_2'(\xi)&=\frac{27}{16}(1-\xi)(\xi+\frac{1}{3})(1+\xi) \\ \phi_3'(\xi)&=\frac{9}{16}(\xi-\frac{1}{3})(\xi+\frac{1}{3})(1+\xi) \end{aligned}\right\} \quad (12-11)$$

§12-3 地基、库水的影响及耦合

如图12-4所示，重力坝建筑在半无限平面地基上，为了计入地基的影响，需在Γ_2、Γ_5、Γ_6边界上进行边界元剖分，其中Γ_2、Γ_6在两个无限边上要采用无穷边界单元，然后建立其边界元方

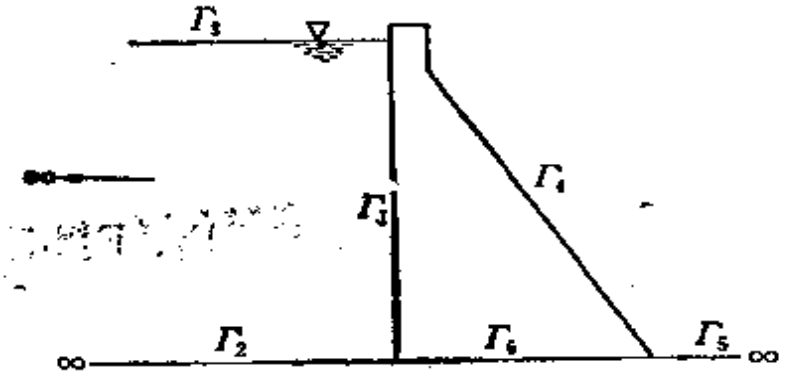


图12-4 重力坝、地基、库水系统图

程，再与重力坝本身所得到的边界元方程，利用 §11-2中介绍的方法耦合起来，记耦合后的方程为：

$$[\bar{M}]\{\ddot{X}\}+[K]\{\dot{X}\}=[\bar{G}]\{p\} \tag{12-12}$$

式中，$[\bar{M}]$、$[K]$、$[\bar{G}]$、$\{\ddot{X}\}$、$\{p\}$的意义见 §11-2节。

再按照坝体与库水的交界边f和其余边界s，将方程(12-12)写成分块形式：

$$[\bar{M}_s\ \bar{M}_f]\begin{Bmatrix}\ddot{X}_s\\ \ddot{X}_f\end{Bmatrix}+[K_s\ K_f]\begin{Bmatrix}\dot{X}_s\\ \dot{X}_f\end{Bmatrix}$$

$$=[\bar{G}_s\ \bar{G}_f]\begin{Bmatrix}p_s\\ p_f\end{Bmatrix} \tag{12-13}$$

等待与流体部分进行耦合。

对于库水部分，在忽略流体的粘性和可压缩性及表面重力波

的影响时，流体内的动水压力 p 满足Laplace方程：

$$\nabla^2 p=0 \tag{12-14}$$

并满足下述边界条件：

$$\left.\begin{aligned} &q_1=\frac{\partial p}{\partial n}=-\rho_w \ddot{u}_1,\ x\in \Gamma_1 \\ &q_2=0,\ X\in \Gamma_2 \\ &p_3=0,\ X\in \Gamma_3 \end{aligned}\right\} \tag{12-15}$$

其中，$\ddot{u}_1$ 是坝体在 Γ_1 边上的 X 向加速度；ρ_w 是水的密度。

为了利用无限域上的Laplace方程的基本解来建立边界元方程，就需要对边界 Γ_1 剖分一般单元，而在 Γ_2、Γ_3 中除了采用一般单元外，还应采用流体的无穷边界单元。然后利用 §8-2所述的方法，建立库水动水压力的边界元方程：

$$[H]\{p\}=[G]\{q\} \tag{12-16}$$

然后，按照 Γ_1、Γ_2、Γ_3 三种边界写成分块形式，并引入相应的边界条件，经过一定的处理（详见 §8-2），便可得到下述方程：

$$\{p_1\}=[Q]\{q_1\} \tag{12-17}$$

另外，注意到 Γ_1 上的边界条件，可以建立起 Γ_1 上的动水压力 p_1 与坝体加速度 $\ddot{u}_1$ 之间的关系为：

$$\{p_1\}=-\rho_w[Q]\{\ddot{u}_1\} \tag{12-18}$$

注意到这里的 $\ddot{u}_1$ 系指 x 向的加速度，为了能与方程（12-13）耦合，须对其进行扩阶处理，记扩阶后的方程为：

$$\{p_f\}=-\rho_w[\bar{Q}]\{\ddot{u}_f\} \tag{12-19}$$

式中，$\{p_f\}$、$\{\ddot{u}_f\}$ 已经与坝体方程（12-13）中的对应交界边的向量一致起来，而 $[\bar{Q}]$ 中的元素是将 $[Q]$ 中的对应点的元素放在 $[\bar{Q}]$ 中对应点的 x 向位置上，而其余三个元素均为零，即：

$$[\overline{Q}]=\begin{Bmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{12} & 0 & \cdots & Q_{1n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ Q_{21} & 0 & Q_{22} & 0 & \cdots & Q_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \cdots & & & & \\ Q_{n1} & 0 & Q_{n2} & 0 & \cdots & Q_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{12-20}$$

注意到在方程（12-13）和（12-19）中，存在关系：

$$\left.\begin{aligned} \{\dot{x}_f\}&=\{\ddot{u}_f\} \\ \{x_f\}&=\{u_f\} \end{aligned}\right\} \tag{12-21}$$

于是，将式（12-19）代入方程（12-13），整理后得到重力坝、地基、库水三者的耦合方程为：

$$[\overline{M}_s,\ \hat{M}_f]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_s\\ \ddot{u}_f\end{Bmatrix}+[\overline{K}_s,\ \overline{K}_f]\begin{Bmatrix}x_s\\ u_f\end{Bmatrix}=[\overline{G}_f]\{p_s\} \tag{12-22}$$

其中，$$[\hat{M}_f]=[\overline{M}_f]+\rho_w[\overline{G}_f][\overline{Q}] \tag{12-23}$$

对于自由振动情形，不难推得其特征方程为：

$$\omega^2[\overline{M}_s,\ \hat{M}_f]\begin{Bmatrix}x_s\\ u_f\end{Bmatrix}=[\overline{K}_s,\ \overline{K}_f]\begin{Bmatrix}x_s\\ u_f\end{Bmatrix} \tag{12-24}$$

值得指出的是，利用边界单元法求解流固耦合问题时，相当于在与坝面相关的节点列上，叠加一个附加质量矩阵。这一点与有限元法不同，有限元法是把附加质量仅仅叠加在由坝面节点所形成的方阵上，其原因是因为有限元的转换矩阵$[T]$是方阵，而边界元的转换矩阵$[\overline{G}_f]$则不是方阵，这在式（12-23）中可以看出。

引入具体问题的边界条件于方程（12-22）中，利用振动仿真方法可以求出坝体的动力反应。若将边界条件引入方程

(12-24)，并认为地基的质量为零，求此方程可得体系的自振频率和相应的振型。

§12-4 重力坝、地基、库水体系动特性分析

本节利用上述原理，分别对实体重力坝体系和空腹重力坝体系进行了自振计算，关于动力反应计算，参见下章。

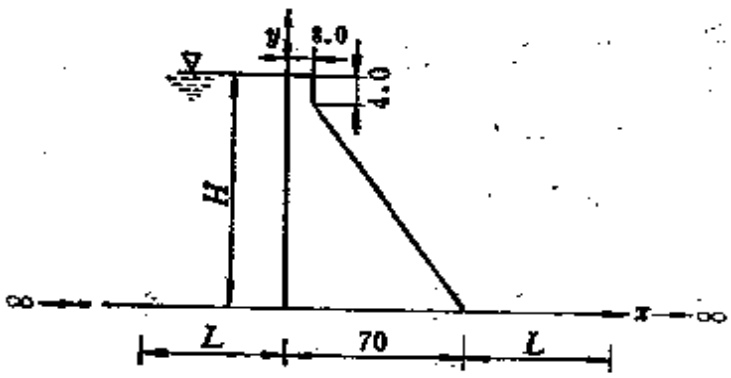


图12-5 实体重力坝体系

如图12-5所示的实体重力坝，坝高$H=100.0$m，底宽70.0，坝体弹模$\bar{E}_d=3\times10^4$MPa，容重$\gamma_d=24$kN/m^3，$\nu_d=0.16$，地基的$\gamma_f=0.0$，$\nu_f=0.16$，而弹模按E_f/E_d的值换算得出。

首先，考查了地基表面无穷边界单元所取位置的影响，分别取$L=3H$和$L=8H$在$E_f/E_d=1$时进行了对比，其结果列于表12-1中。由此看出，在$L=3H$处设置无穷元即能满足计算精度要求，而对库水亦采用相同的结论。

表12-1 无穷元位置的影响比较表($E_f/E_d=1$)

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$L=3H$	22.23	36.87	48.04	85.28	132.58	155.88
$L=8H$	22.20	36.68	47.98	85.22	132.44	155.81
误差(%)	0.13	0.52	0.12	0.07	0.11	0.04

接下来，计算了坝体的自振频率，坝体与库水的耦振频率，坝体与地基的耦振频率及坝体、地基、库水体系的自振频率，结果列于表12-2中。由此可见，库水和地基对坝体的自振频率都有影响，两者比较，地基（与坝体弹模相同）的影响更为显著。

表12-2 重力坝的振动圆频率 $(E_f/E_d=1.0)$ (rad/s)

ω_i / 工况	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
坝体	27.97	63.55	78.66	122.25	171.53	214.75
坝 水	23.90	55.46	76.08	116.03	——	——
坝、基	22.2	36.87	48.04	85.28	132.58	155.88
坝、基、水	17.38	35.90	45.82	81.13	——	——

值得说明的是，在坝体和库水耦振时，库底的条件按刚性考虑，当坝体、地基和库水一起考虑时，库底的条件按照流固耦合的一般方法处理，即忽略了由于地基运动而引起的库水动水压力变化，而按刚性地基来考虑。当考虑这种因素的影响时，库水变成了竖向的运动，将对非直立坝面产生影响。

对于实体重力坝，还针对地基弹模的影响进行了详细计算，分别在空库和满库两种情况下，取不同弹模的地基，进行计算，计算结果分别列于表12-3和表12-4中。由此可以看出，无论是否考虑库水的影响，当地基的弹模为坝体弹模的100倍时，即可以认为是刚性地基，这时引起的误差为5%左右。

如图12-6所示的空腹重力坝，尺寸和材料参数与实体重力坝相同，而空腹的尺寸见图。与实体重力坝类似，分别计算了坝体本身、坝和库水耦合、坝与地基耦合及坝、地基、库水体系的自

表12-3 空库时系统自振圆频率 (rad/s)

ω / E_1/E_4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
10000	27.97	63.53	78.65	122.24
1000	27.96	63.53	78.50	121.74
100	26.54	60.30	72.02	107.82
10	25.97	51.37	65.77	96.79
1.0	22.23	36.87	48.04	85.28
0.2	13.28	27.32	35.08	65.85
0.1	9.79	14.04	28.64	60.59

表12-4 满库时系统自频率 (rad/s)

ω_i / E_1/E_4	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
10000	23.90	55.47	76.08	116.63
1000	23.89	55.46	76.06	116.00
100	22.78	53.64	70.12	102.37
10	20.82	45.04	61.55	89.97
1.0	17.38	35.90	45.02	81.13
0.2	11.37	20.47	31.88	60.04
0.1	7.42	13.12	21.37	54.80

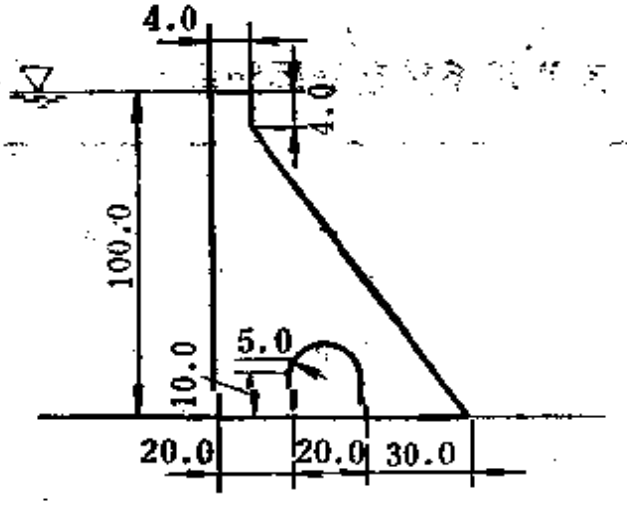


图12-6　空腹重力坝体系图

振频率，结果列于表12-5中。对应满库工况下不同弹模地基时的频率列于表12-6中。

表12-5　空腹坝自振圆频率　　(rad/s)

工况 \ ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
坝　体	22.47	53.18	70.86	92.48
坝、水	16.25	42.60	69.13	84.88
坝、基	15.01	30.38	47.70	63.06
坝、基、水	9.87	27.07	43.42	57.36

由此也可以看出，当坝体与坝基弹模相同时，地基与库水两者的影响比较，地基的影响较为显著。而地基的影响当地基的弹模为坝体弹模的100倍时，可以按刚性地基来处理，由此产生的误差不足10%，这在工程中将具有一定的实际意义。

比较表12-4和表12-6，还可以发现，在同等条件下，空腹的存在会降低坝体的自振频率，如果从发生共振的频率来说，可能不利于抗震。因此，空腹坝的抗震设计应进行专题研究，以确定合理的抗震措施。

表12-6 空腹坝系统自振圆频率 (rad/s)

E_1/E_2 \ ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1000000	16.25	42.60	69.13	84.88
100000	16.25	42.60	69.13	84.88
10000	16.24	42.60	69.01	84.75
1000	16.23	42.40	68.85	84.61
100	15.09	40.82	63.65	76.05
10	13.26	32.32	50.03	68.37
1.0	9.87	27.07	43.42	57.36
0.2	7.31	15.42	30.46	42.57
0.1	3.85	9.98	18.80	31.01

§12-5 裂缝重力坝动特性分析

结构产生裂缝以后，由于刚度降低，将会影响结构的动力特性。严格说来，裂缝的存在使得结构成为非线性，精确分析裂缝结构的动特性异常困难。然而，幸运的是裂缝缝端的奇异性对自振特性影响不大，况且在不计入碰撞现象时，使问题转化为一般结构的动力分析。本节将利用特解边界元法研究坝踵裂缝对重力坝动特性的影响。

如图12-7所示，重力坝建筑在半无限弹性地基上，坝踵处存

在裂缝，其长度为a，坝体材料 $E_d=3.0\times10^4$MPa，$\nu_d=0.2$，$\gamma_d=2.4$kN/m^3，地基 $\gamma_f=0.0$，$\nu_f=0.2$，弹模 E_f 按照E_d/E_f的不同比值推求得到。计算结果分别示于图12-8和表12-7中，其中，图12-8给出了第一阶频率随缝长的变化曲线，表12-7给出了各阶频率随缝长和弹模比E_d/E_f的变化。

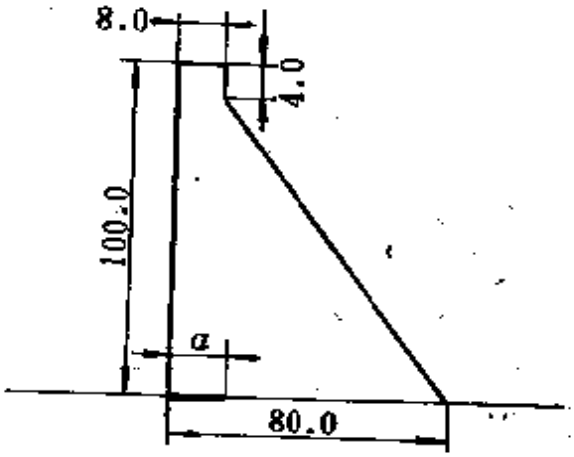


图12-7　裂缝重力坝图

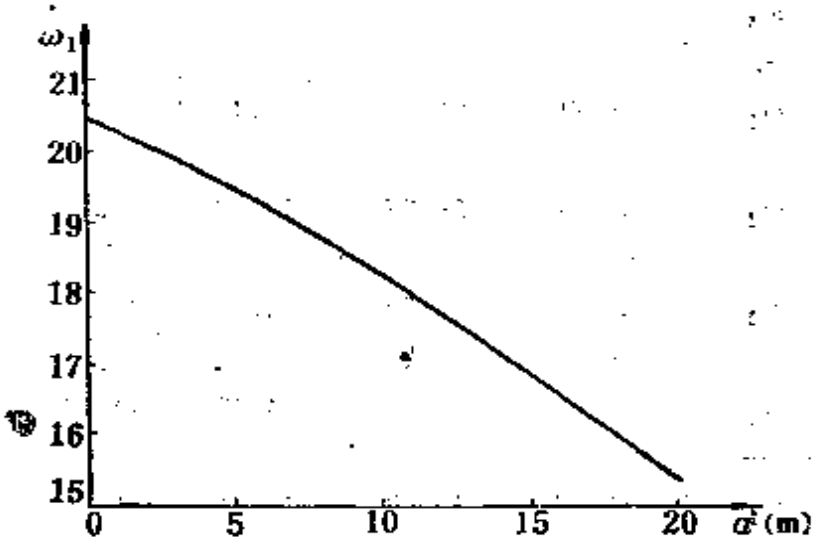


图12-8　重力坝第一频率随缝长变化

由此看出，重力坝的自振频率随缝长的增加而降低，亦随坝基弹模的降低而减少。

表12-7 裂缝重力坝的自振圆频率 (rad/s)

a	ω_i \ E_u/E_f	0.1	1.0	5.0	10.0	100.0
1	ω_1	26.66	20.24	11.65	8.61	2.85
	ω_2	62.33	39.34	19.17	13.72	4.38
	ω_3	70.67	46.53	32.64	26.09	9.65
	ω_4	139.49	89.34	64.93	59.65	53.27
2	ω_1	26.55	20.06	11.57	8.53	2.83
	ω_2	61.99	39.30	19.11	13.68	4.37
	ω_3	70.32	46.38	32.47	25.90	9.56
	ω_4	139.37	89.30	64.86	59.51	53.11
3	ω_1	26.40	19.88	11.44	8.46	2.81
	ω_2	61.67	39.28	19.07	13.64	4.35
	ω_3	69.76	46.26	32.33	25.74	9.50
	ω_4	139.23	89.26	64.78	59.37	52.95
4	ω_1	26.22	19.69	11.34	8.39	2.79
	ω_2	61.38	39.23	19.01	13.59	4.34
	ω_3	69.08	46.15	32.19	25.59	9.43
	ω_4	139.17	89.24	64.68	59.22	52.78

（续表）

a	ω_i \ E_s/E_f	0.1	1.0	5.0	10.0	100.0
5	ω_1	26.01	19.49	11.23	8.31	2.77
	ω_2	61.16	39.17	18.95	13.55	4.33
	ω_3	68.29	46.05	32.06	25.44	9.38
	ω_4	139.14	89.14	64.62	59.07	52.58

§12-6 若干问题讨论

1.关于流体动水压力计算问题

§8-2中介绍了理想流体动水压力计算方法，§3-5介绍了可压缩性流体动水压力计算方法，这里讨论库底对应力波的吸收问题、表面重力波的影响问题。

（1）库底对应力波的吸收问题

在以前的讨论中，都是假定库底的应力波发生完全反射。若考虑水库库底的能量吸收问题，仍然可以用边界元法进行分析，困难仅在于边界条件的处理上。对于谐波激振情形，边界条件应为：

$$\left.\begin{aligned} q_1&=\frac{\partial p}{\partial n}=-\rho\omega^2 u_1, X\in\Gamma_1\\ p_2&=0, X\in\Gamma_2\\ q_3&=-i\omega p_3/\beta c, X\in\Gamma_3 \end{aligned}\right\} \tag{12-25}$$

式中，$\beta=\rho_b C_b/\rho_w C$，$\rho_b$和$C_b$分别为库底材料的质量密度和纵波波速；$\rho_w$和$C$分别为水的质量密度和水中声速；$\beta$值的大小随库

底岩石情况而定，对于一般岩面通常可取$\beta=5$，而对于沉积泥沙，$\beta=1\sim2$；ω为激振圆频率。

为了求出动水的压力，将流体的边界元方程按照Γ_1、Γ_2和Γ_3写成分块形式，即：

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \tag{12-26}$$

将式（12-25）中的第三式引入（12-26）式，整理得

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13}+id G_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23}+id G_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33}+id G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \\ G_{31} & G_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \\ q_2 \end{Bmatrix} \tag{12-27}$$

其中，$d=\omega/\beta C$。

按照§8-2所述的方法，将边界条件（12-25）中的前两式引入，可以得到形如：

$$[A]\{X\}=\{F\} \tag{12-28}$$

的线性方程组。但需注意：该方程为复数方程组，需利用复数方程解法求解。求解此方程，可得在谐波激振下，作用在坝面上的动水压力（复数）。

利用§12-3介绍的方法，还可以实现固体与流体的耦联分析，但这时所得方程仍为复数方程，需借助于复数方程振动仿真方法求解。

(2) 表面重力波的影响问题

目前的研究结果一般认为，在水平激励作用下，重力波的影响可以忽略，但重力波对于接近自由表面处作用于坝体上的压力将达到相当可观的数值。如果要精确地考虑表面重力波的影响，则在自由表面应满足泊淞条件，即：

$$q_2=\frac{\omega^2}{g}p_2,\quad X\in\Gamma_2 \tag{12-29}$$

式中，ω为圆频率；g为重力加速度。

将式（12-29）代入方程（12-26）中，整理后得

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12}-bG_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22}-bG_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32}-bG_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} \\ G_{21} & G_{23} \\ G_{31} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ q_3 \end{Bmatrix} \tag{12-30}$$

式中，$b=\omega^2/g$。

然后采用前述的方法处理式（12-30），可以解出动水压力值。

2.关于动力相互作用分析中动力刚度阵计算问题

地震波或冲击波通过介质作用于结构，当波由地基传至结构处，由于地基与结构交界面处弹性参数的间断，在相互作用面附近将产生波的散射现象，实际作用于介质上的地震波或冲击波，就是这种入射波与散射波的叠加。但是，不管怎样复杂，地基弹性半空间中的位移场u总是满足Navier方程，并且可以分解为下列两部分的和：

$$u_i=u_i^f+u_i^s \tag{12-31}$$

式中，上标f代表自由场；s代表散射场；下标i是向量符号。

同样，边界面力满足

$$t_i = t_i^f + t_i^s \tag{12-32}$$

自由场的值，可以用解析方法或其它数值方法方便地得出，如果再求出散射场，问题便可得到解决。散射场的求解仍可以利用特解边界元法予以解决。

根据特解边界元法原理，可以建立散射场u^s的边界元方程为：

$$[M]\{\ddot{u}^s\}+[H]\{u^s\}=[G]\{t^s\} \tag{12-33}$$

对于简谐散射波，可以简化为：

$$[A]\{u^s\}=[B]\{t^s\} \tag{12-34}$$

式中，$[A]=\omega^2[M]+[H]$

$[B]=[G]$

为了便于与上部结构耦合，按照耦合边b和非耦合边f，将方程（12-34）写成分块矩阵形式，即：

$$\begin{bmatrix} A_{bb} & A_{bf} \\ A_{fb} & A_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b^s \\ u_f^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{bb} & B_{bf} \\ B_{fb} & B_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_b^s \\ t_b^f \end{Bmatrix} \tag{12-35}$$

地震波或冲击波作用下，地基表面的非耦合点对应的表面力应为零，即：

$$\{\ t_f^s\ \} = \{\ 0\ \} \tag{12-36}$$

将式（12-36）代入方程（12-35），展开后得：

$$[\ A_{bb}\ ]\{\ u_b^s\} + [\ A_{bf}\ ]\{\ u_f^s\ \} = [\ B_{bb}\ ]\{\ t_b^s\ \} \tag{12-37a}$$

$$[A_{fb}]\{u_b^e\}+[A_{ff}]\{u_f^e\}$$

$$=[B_{fb}]\{t_b^e\} \tag{12-37b}$$

从中消去$\{u_f^e\}$，得：

$$\{\ t_b^e\ \}\ =\ [W]\{\ u_b^e\ \} \tag{12-38}$$

其中，$[W]=[[B_{bb}]-[A_{bf}][A_{ff}]^{-1}[B_{fb}]]^{-1}$

$$\times[[A_{bb}]-[A_{bf}][A_{ff}]^{-1}[A_{fb}]] \tag{12-39}$$

式(12-38)建立了耦合边界b上面力$\{t_b^e\}$与位移$\{u_b^e\}$之间的关系，将其代入式(12-32)，得

$$\{t_b\}=[W]\{u_b^e\}+\{t_b^*\} \tag{12-40}$$

为了与上部结构的有限元方程耦合，需将面力转化为等效节点力，为此引入转化矩阵$[T]$，这里$[T]$与面力的插值函数和其积分有关，得节点力为：

$$\{F_e\}=[T][W]\{u_b^e\}+[T]\{t_b^*\} \tag{12-41}$$

而上部结构的有限元方程为：

$$\begin{bmatrix}S_{aa} & S_{ab}\\ S_{ba} & S_{bb}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_a\\ u_b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ F_e\end{Bmatrix} \tag{12-42}$$

这里下标a表示耦合边，b代表非耦合边。

注意到在耦合边上应满足连续条件：

$$\left.\begin{aligned}&\{\ F_b\ \}+\{\ F_e\ \}=\{\ 0\ \}\\ &\{\ u_b\ \}\ =\ \{\ u_b^e\ \}\ +\ \{\ u_b^*\ \}\end{aligned}\right\} \tag{12-43}$$

将式 (12-43)、式 (12-38)代入方程 (12-42)中，整理得：

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb}+TW \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ TW\,u_b^f + T\,t_b^f \end{Bmatrix} \quad (12\text{-}44)$$

解此方程即得结构在地震波或冲击波作用下的绝对位移，而 $[T]$ $[W]$为地基的动力刚度矩阵。

参 考 文 献

[1] 王良琛．混凝土坝地震动力分析．北京：地震出版社，1981

[2] Gregory Fenues & Anil K. Chopra. Earthquake Analysis of Concrete Gravity Dams Including Resevoir Bottom Absorption And Dam—Water—Foundation Rock Interaction. Earthq. Eng. & Stru. Dyn., Vol.12, No.4, 1984

[3] 黄玉盈．边界元——有限元联合法分析系统的耦联振动．第一届全国工程中的边界元法会议论文集，重庆：1985

[4] 孙克明、林皋、赵金城．拱坝在库水耦联作用下的动力特性研究．第一届全国工程中的边界元法会议论文集，重庆：1985

[5] 周鸿钧、李庆斌．固液耦合的边界元——样条半解析法．第二届全国工程中的边界元法会议论文集，南宁：1988

[6] 周鸿钧、李庆斌．坝体与库水耦振的边界元计算．水利学报，1983年第7期

[7] 李庆斌、周鸿钧、林皋．重力坝、地基、库水体系动特性分析的特解边界元法．水利学报，1991年第8期

[8] 李宗坤．裂缝重力坝动力分析的特解边界元法．郑州工学院硕士学位论文（导师：周鸿钧），1988

[9] 胡玉明．特解边界元法在空腹坝、水、地基系统和三维问题动力分析中的应用．郑州工学院硕士学位论文（导师：周鸿钧），1989

[10] C. H. Zhang & C. M. Song. Boundary Element Technique in Infinite and Semi—Infinite Plane Domain. Proc. 8th Int. Conf. BEM, Beijing, 1986

[11] 屠荣初、曾心传．弹性结构与液体的耦联振动理论．北京：地震出版社，1983

[12] John P. Wolf. Dynamic Soil—Stucture Interction. Prentice—Hall, 1985

第十三章　重力坝坝踵界面裂缝的地震断裂分析

§13-1　概　　述

不少文献的研究结果表明：在静荷载作用下稳定的裂纹，在动荷载作用下则有可能被破坏。因此，对裂纹的稳定性应该区别静载和动载两种情况分别进行校核，特别对于地震作用下裂缝的稳定性应进行单独校核。对于象重力坝这样一类一旦失事将造成极大损失的建筑物，这种裂缝稳定性的校核就更加重要。

目前，对于坝身表面裂缝的动断裂分析已有文献研究过，得到了不少有益的结论[1]。但是，对于坝踵裂缝的动断裂分析，即使是缝岸两边材料作为同一弹模考虑的情形，也没有研究过，至于把缝岸两边材料作为不同弹性模量的考虑，就更无人涉入。然而，在实际工程中，由于种种原因，会在坝踵处产生裂缝，那么这种裂缝是否稳定，特别在地震荷载作用下的稳定性如何，直接影响到重力坝本身的安全及人民生命财产的安全。因此，探讨坝踵裂缝在地震荷载作用下的稳定性，为工程实际应用提供切实的理论依据，将具有极为重要的意义。

本章根据重力坝本身的特性，利用特解边界元法计算坝踵异弹模界面裂缝在地震作用下的应力强度因子，将重力坝、地基、库水作为一个整体统一考虑，计算中对计入库水影响和不计入库水影响两种情况分别进行计算，其中的地基和库水的简化模型与第十二章相同。另外，在计算过程中没有计入缝面上的动水压力的影响，并假定初始时刻裂缝的缝隙为零，即这时的裂缝没有宽度[2]。

§13-2 地震反应分析的多域法

在 §5-4中已经给出了地震反应分析的特解边界元法，但由于采用的是均质域内的基本解，因此，只适用于一种介质的情形，对于象重力坝这样的结构，坝与地基弹模不同时，需要进行两个区域的耦合。

利用 §5-4所述的方法，可以在每个区域上分别建立边界元方程，形如：

$$[M]\{\ddot{u}\}+[H]\{u\}=[G]\{t\}+\{f'\} \tag{13-1}$$

式中诸参量见 §5-4。

再按照耦合边与非耦合边将其写成分块形式，对于区域Ⅰ：

$$\begin{bmatrix} M_I & M_I^* \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_I \\ \ddot{u}_{II}^* \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} H_I & H_I^* \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_I \\ u_I^* \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} G_I & G_I^* \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t_I \\ t_I^* \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} f_I' \\ f_I^{*'} \end{Bmatrix} \tag{13-2}$$

对于区域Ⅱ：

$$\begin{bmatrix} M_{II} & M_I^* \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_{II} \\ \ddot{u}_{II}^* \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} H_{II} & H_{II}^* \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{II} \\ u_{II}^* \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_{\text{II}} & G_{\text{II}}^{*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{\text{II}} \\ t_{\text{II}}^{*} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{K}^{p} \\ f_{\text{II}}^{p*} \end{Bmatrix} \tag{13-3}$$

在耦合边界上，具有连续条件：

$$\left.\begin{aligned} \{u_{\text{I}}^{*}\} &= \{u_{\text{II}}^{*}\} = \{u\} \\ \{\ddot{u}_{\text{II}}^{*}\} &= \{\ddot{u}_{\text{II}}^{*}\} = \{\ddot{u}\} \\ \{t_{\text{I}}^{*}\} &= -\{t_{\text{II}}^{*}\} = \{t\} \end{aligned}\right\} \tag{13-4}$$

将式（13-4）分别引入方程（13-2）、（13-3），并按照矩阵运算法则和特征向量相同的原则，可以将方程（13-2）和式（13-3）耦合在一起，记耦合后的方程为：

$$[\bar{M}]\{\ddot{X}\}+[\bar{K}]\{X\}=[\bar{G}]\{\ddot{t}\}+[\bar{F}] \tag{13-5}$$

其中，$[\bar{M}]=\begin{pmatrix} M_{\text{I}} & M_{\text{I}}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\text{II}}^{*} & 0 & M_{\text{II}} \end{pmatrix}$

$$[\bar{K}]=\begin{pmatrix} H_{1} & H_{\text{I}}^{*} & -G_{\text{I}}^{*} & 0 \\ 0 & H_{\text{II}}^{*} & G_{\text{II}}^{*} & H_{\text{II}} \end{pmatrix}$$

$$[\bar{G}]=\begin{pmatrix} G_{\text{I}} & 0 \\ 0 & G_{\text{II}} \end{pmatrix}$$

$$\{x\}=[u_1 \quad u \quad t \quad u_0]^T$$

$$\{\bar{t}\}=[t_1 \quad t_0]^T$$

$$\{\bar{F}\}=\left[f_1^p \quad f_1^{p*} \quad f_0^p \quad f_0^{p*}\right]^T$$

若再引入边界条件，方程（13-5）便可利用振动仿真方法求解，从而得到坝和地基共同作用下坝体的反应。

另外，当考虑库水的影响时，还需进行流固耦合分析。为此，将方程（13-5）按流固耦合面f和非耦合面s，将其写成分块形式：

$$[\bar{M}_s \quad \bar{M}_f]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_s\\ \ddot{x}_f\end{Bmatrix}+[\bar{K}_s \quad K_f]\begin{Bmatrix}x_s\\ x_f\end{Bmatrix}$$

$$=[\bar{G}_s \quad \bar{G}_f]\begin{Bmatrix}\bar{t}_s\\ \bar{t}_f\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\bar{F}_s\\ \bar{F}_f\end{Bmatrix} \qquad (13-6)$$

而库水的影响可以按照§12-3所述的方法计算，记最后求得流固耦合面上的动水压力表达式为：

$$\{p_f\}=-\rho_W[\bar{Q}]\{\ddot{u}_f\} \qquad (13-7)$$

式中，诸参量见§12-3。

注意到在耦合面上，存在关系：

$$\left.\begin{aligned}&\{\ddot{x}_f\}=\{\ddot{u}_f\}\\&\{x_f\}=\{u_f\}\\&\{\bar{F}_f\}+\{\quad_f\}=\{0\}\end{aligned}\right\} \qquad (13-8)$$

则将式（13-8）、式（13-7）引入方程（13-6）后，整理得

$$[\bar{M}_s \quad \hat{M}_f]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_s\\ \ddot{u}_f\end{Bmatrix}+[\bar{K}_s \quad K_f]\begin{Bmatrix}x_s\\ u_f\end{Bmatrix}$$

$$=[\bar{G}_s]\{\ddot{\bar{\delta}}_s\}+\begin{Bmatrix}\bar{F}_s\\ \bar{F}_f\end{Bmatrix} \tag{13-9}$$

其中，
$$[\hat{M}_f]=[\bar{M}_f]+\rho_w[\bar{G}_f][\bar{Q}] \tag{13-10}$$

引入边界条件后，方程（13-9）可解，由此可得坝体、地基、库水共同作用下坝体的地震反应。

求出地震反应后，就可以利用第十一章介绍的方法求出坝踵界面裂缝的动态应力强度因子。其中缝面碰撞因素的考虑仍采用第十一章中的模型。

§13-3 坝踵裂缝的地震断裂分析

如图13-1所示，假设重力坝坝踵处出现缝长为a的裂缝，对其在地震荷载作用下的应力强度因子进行计算分析。计算中，取坝体的弹性模量$E_d=3\times10^4$MPa，$\gamma_d=24$kN/m^3，$\nu_d=0.16$不变，为了考查地基弹模的变化对应力强度因子的影响，分别以$E_f/E_d=1.0,1.2,1.5,2.0,5.0,10.0$反推地基的弹性模量$E_f$。为了考查缝长对应力强度因子的影响规律，分别计算$a=1.0,2.0,5.0,10.0,20.0$m等各种情况。另外，为了保证地震在坝基面上输入，仍取地基为半无限无质量地基，地基的泊淞比$\nu_f=0.16$，库水为不可压缩的理想流体，容重$\gamma_w=10$kN/m^3。计算中都计入了裂缝缝面的碰撞现象。

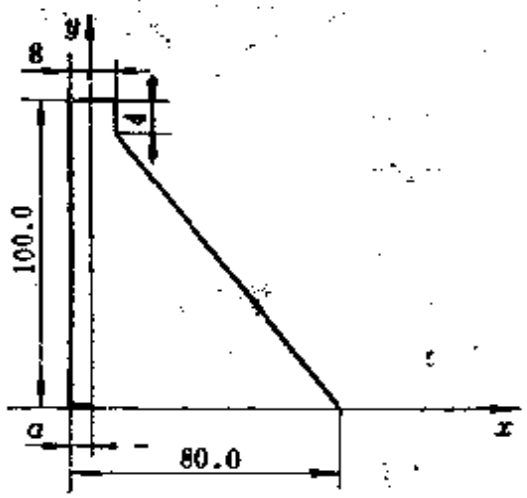


图13-1 裂缝重力坝示意图

文中对于地震烈度为8度的情形进行了计算分析，只考虑水

平地震的影响，加速度幅值取为0.25g，并假设地震波按正弦方式变化，变化的频率为2.5赫兹（Hz）。计算结果分别示于图13-2～图13-14中，其中横轴的时间因子为0.1秒，纵轴应力强度因子的单位为$10^4 N \cdot m^{-3/2}$。应力强度因子在$\tau > 0.8s$后趋于稳定的变化趋势，图中为节省篇幅没有列出。

图13-2a、b、c、d、e、f给出了弹模比固定时，无水应力强度因子K_I随缝长a的变化曲线。由图可以看出，不管弹模怎样变化，K_I的峰值均随缝长的增加而减少。

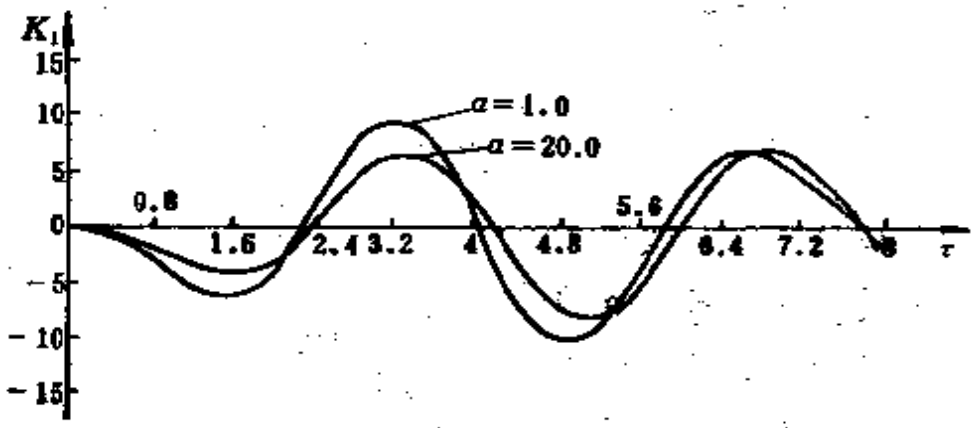


图13-2 (a)　无水K_I，$E_f/E_c=1.0$

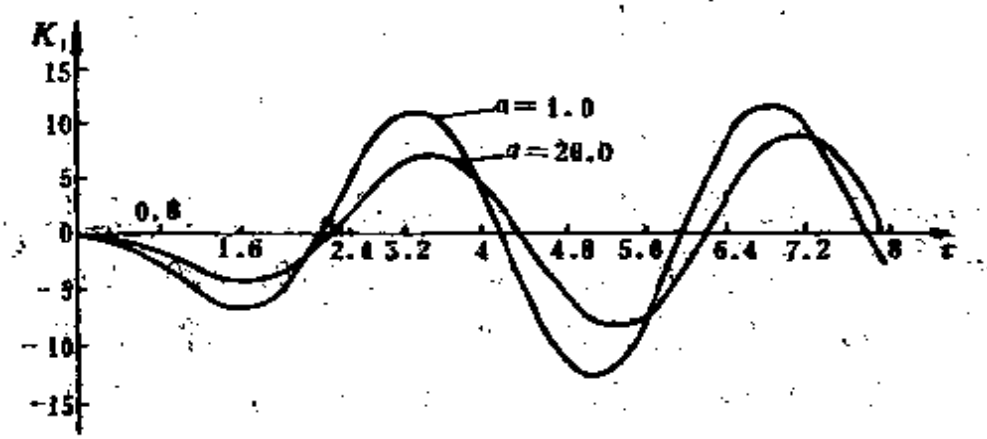


图13-2 (b)　无水K_I，$E_f/E_c=1.2$

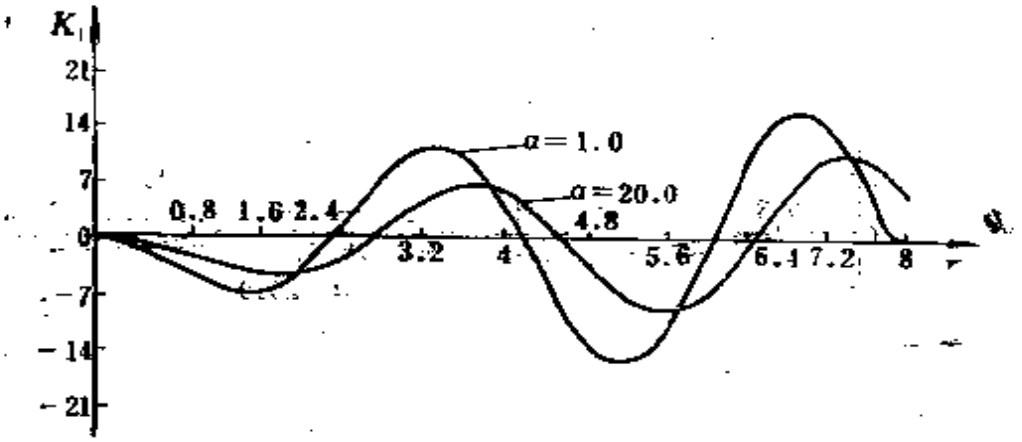


图13-2 (c)　无水K_1，$E_1/E_2=1.5$

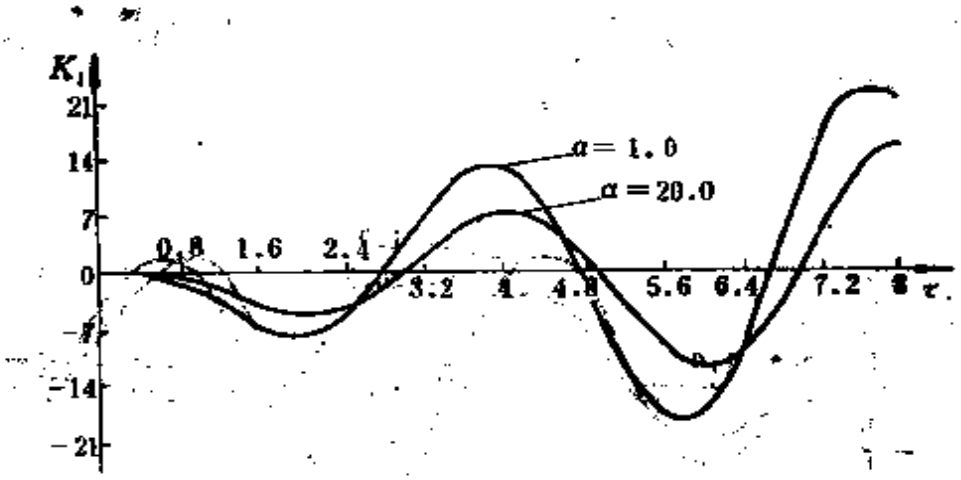


图13-2 (d)　无水K_1，$E_1/E_2=2.0$

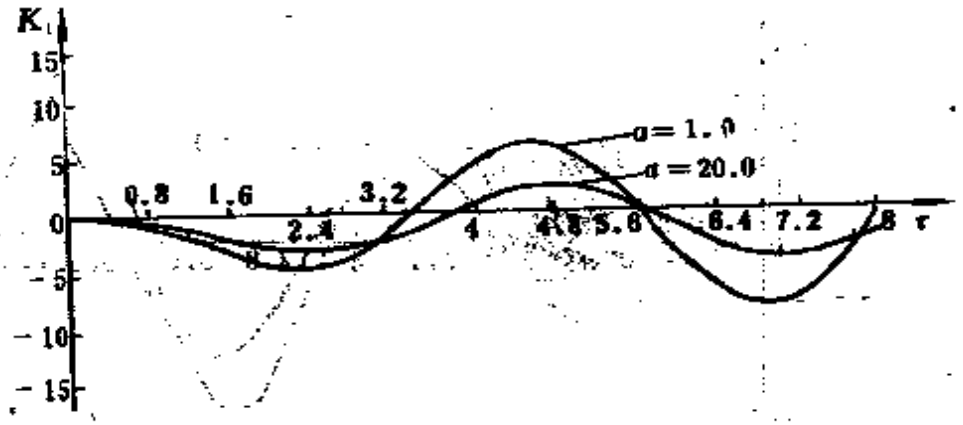


图13-2 (e)　无水K_1，$E_1/E_2=5.0$

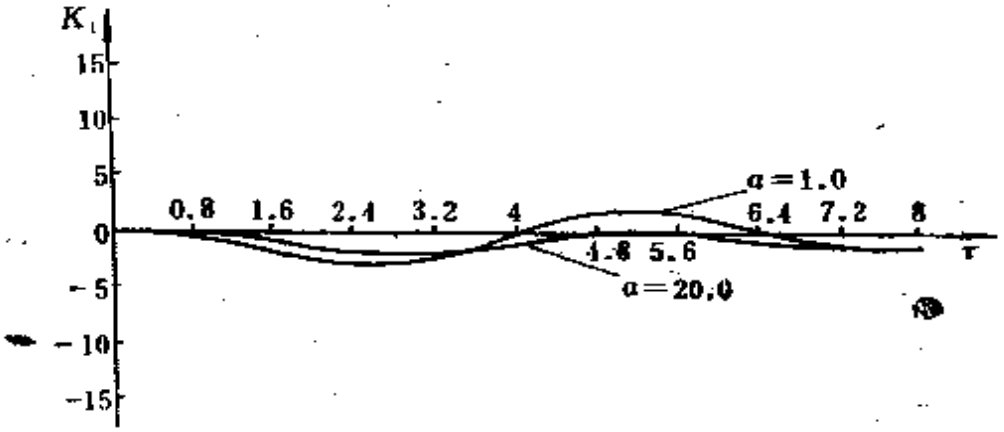


图13-2 (f)　无水K_I，$E_1/E_d=10.0$

图13-3a、b、c、d、e、f给出了弹模比固定时，有水情形下K_I随缝长的变化曲线。可以看出，不论弹模比怎样变化，有水K_I亦均随缝长的增加而减少。

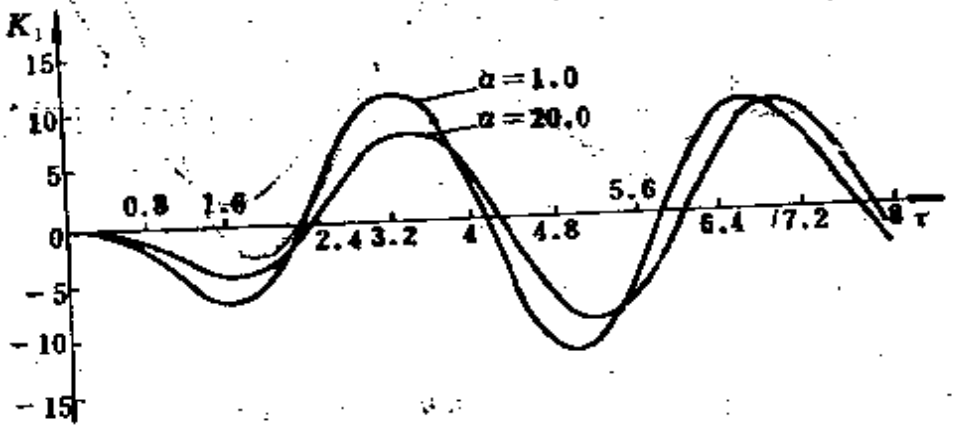


图13-3 (a)　有水K_I，$E_1/E_d=1.0$

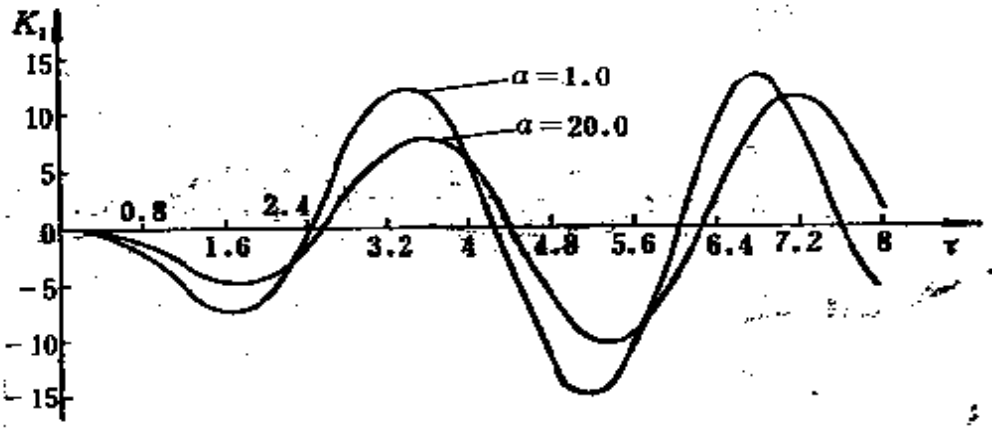


图13-3 (b)　有水K_I，$E/E_d=1.2$

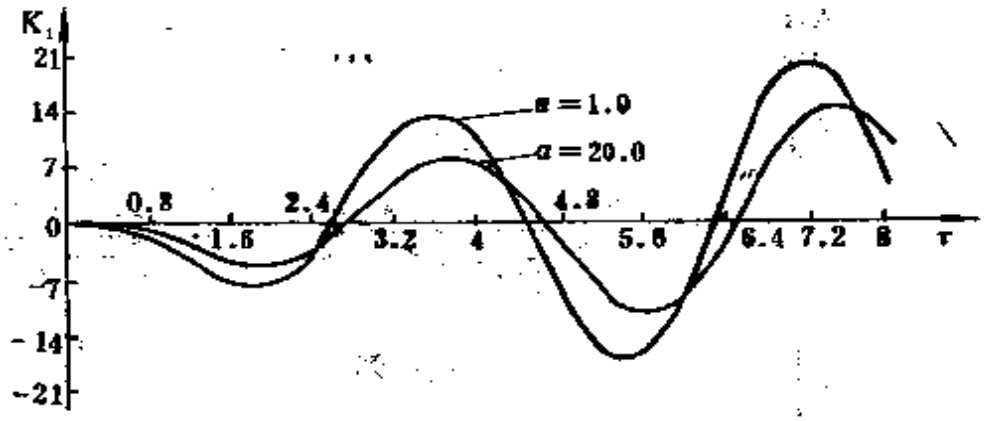


图13-3 (c)　有水K_1，$E_f/E_d=1.5$

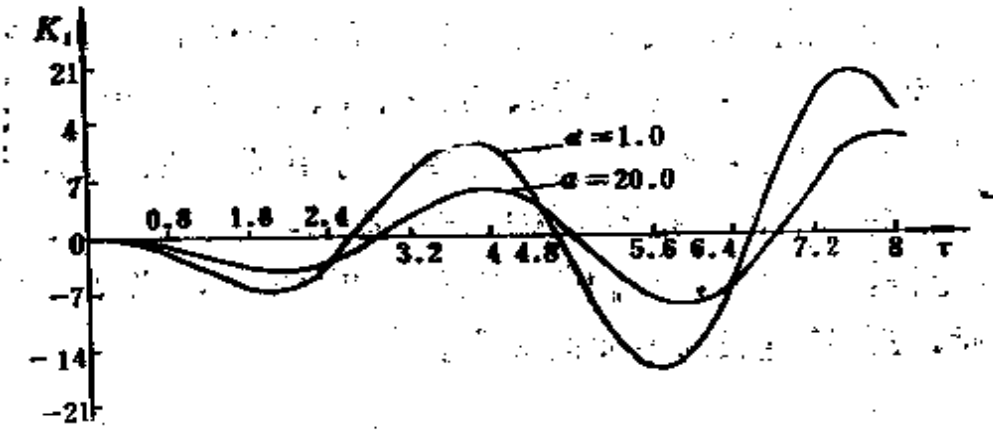


图13-3 (d)　有水K_1，$E_f/E_d=2.0$

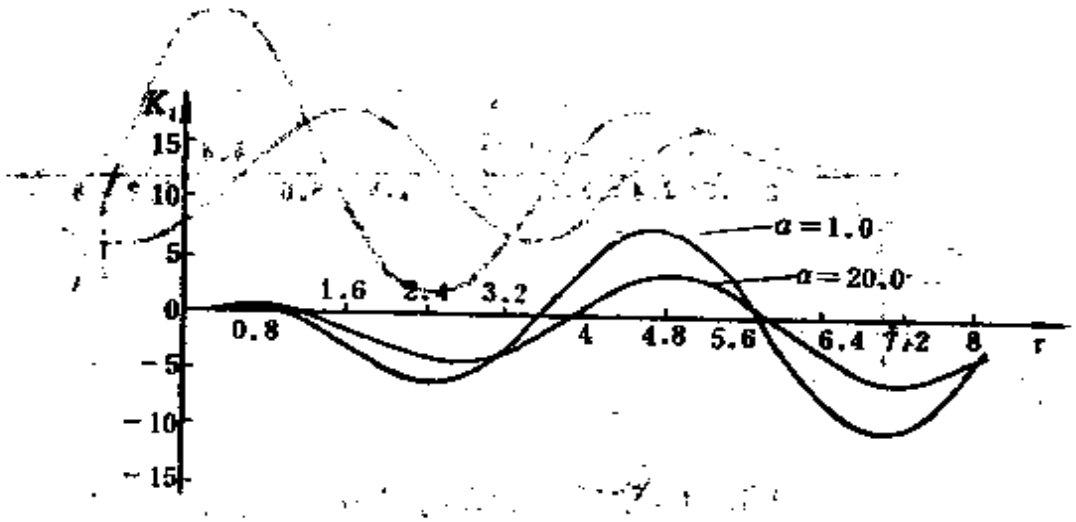


图13-3 (e)　有水K_1，$E_f/E_d=5.0$

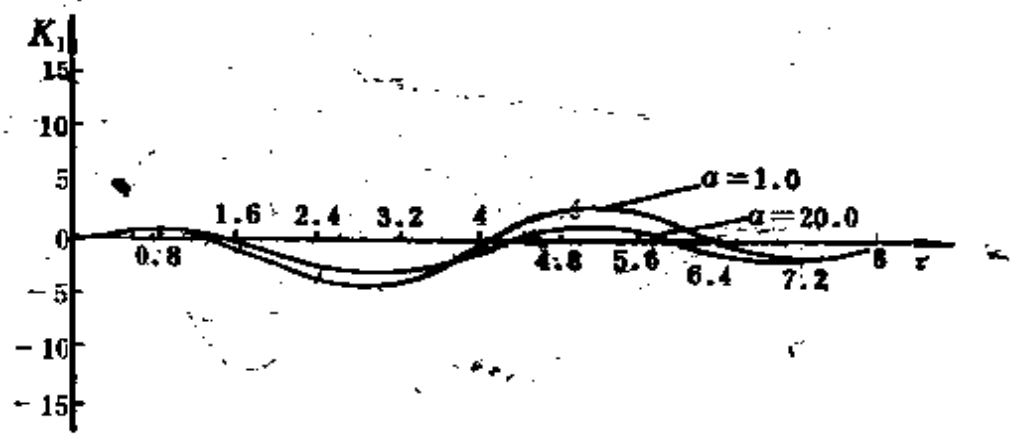


图13-3 (f)　有水K_I，$E_f/E_d=10.0$

图13-4a、b、c、d、e、f是当固定弹模比时，无水K_{II}随缝长的变化曲线；图13-5a、b、c、d、e、f给出了当弹模比固定时，有水K_{II}随缝长的变化曲线图。由此可以看出，不管是考虑库水的影响，还是不考虑库水的影响，当弹模比在$E_f/E_d<5.0$范围内变化时，K_{II}随缝长的增加而增加，当$E_f/E_d\geqslant 5.0$变化时，K_{II}随缝长的增加而减小。

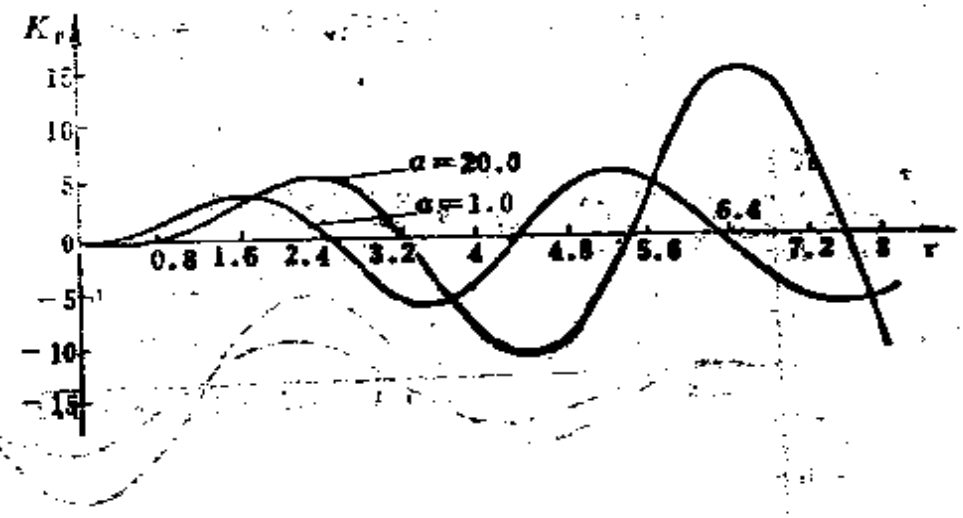


图13-4 (a)　无水K_{II}，$E_f/E_d=1.0$

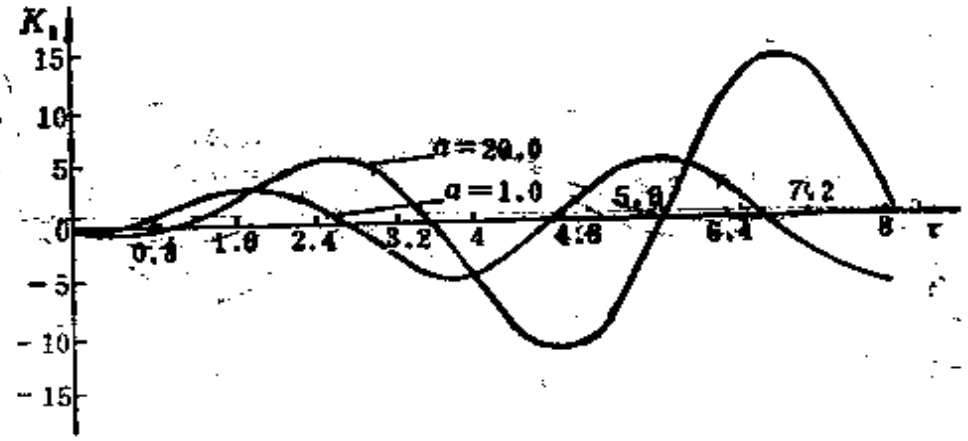


图13-4 (b)　无水K_{II}，$E_1/E_2=1.2$

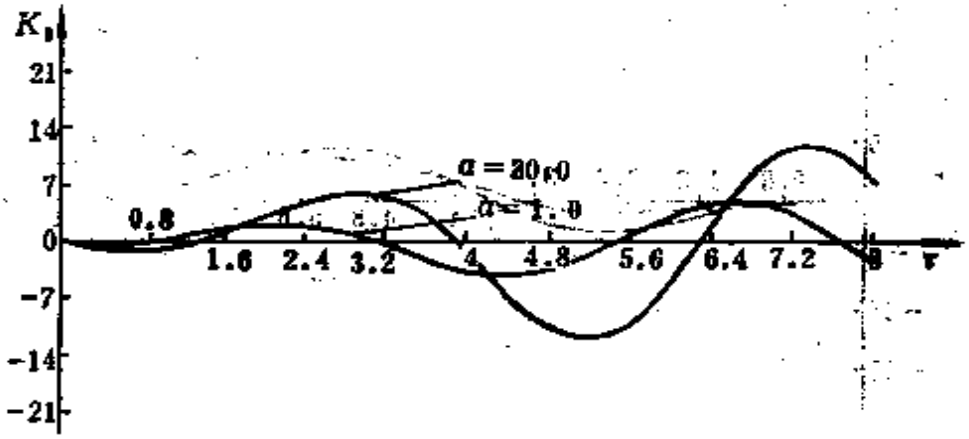


图13-4 (c)　无水K_{II}，$E_1/E_2=1.5$

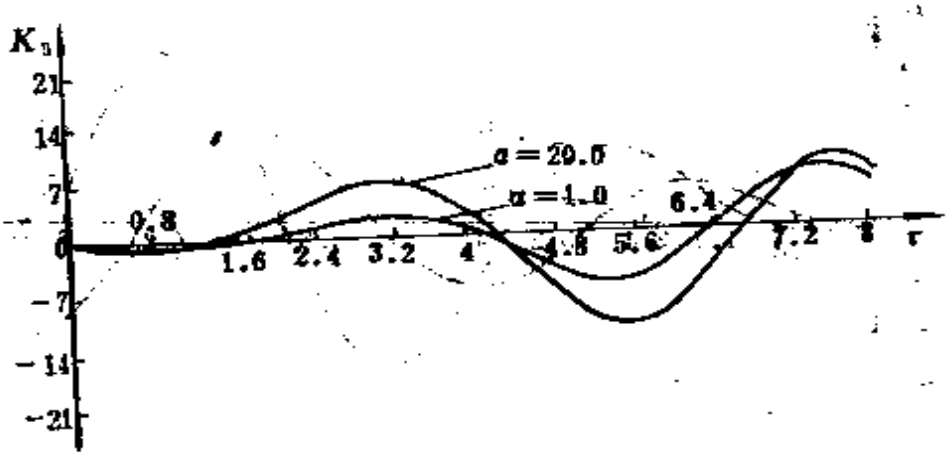


图13-4 (d)　无水K_{II}，$E_1/E_2=2.0$

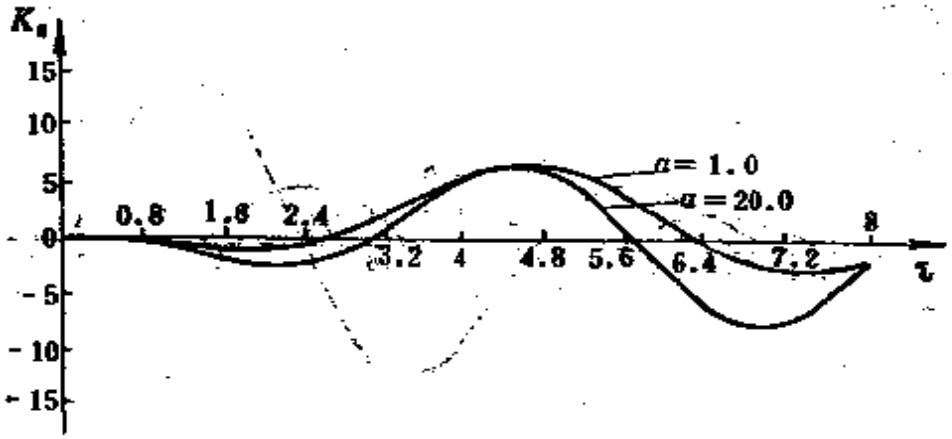


图13-4 (e)　无水K_{II}，$E_1/E_d=5.0$

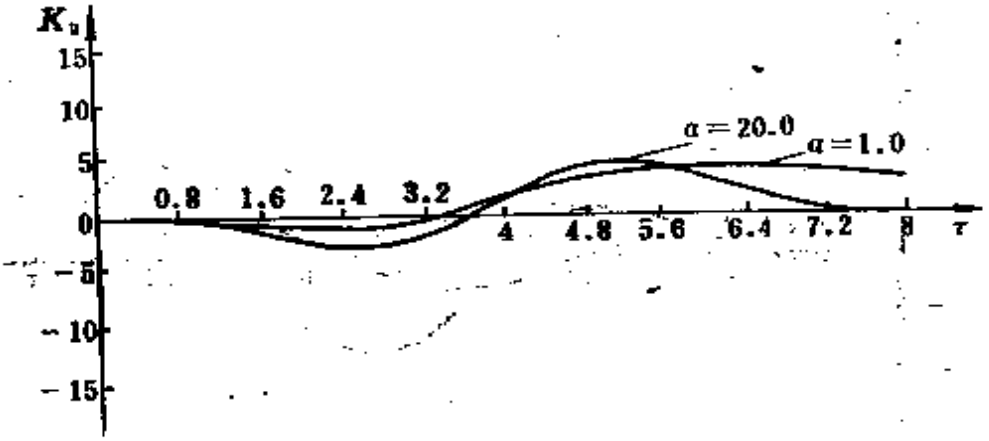


图13-4 (f)　无水K_{II}，$E_1/E_d=10.0$

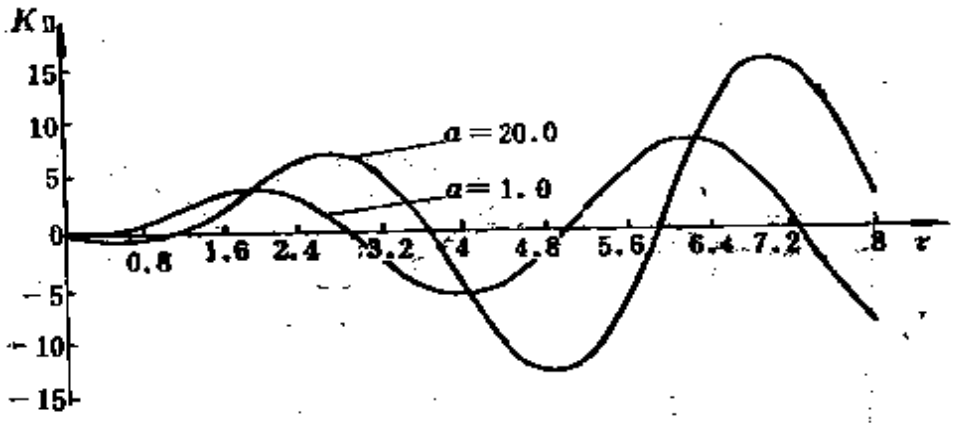


图13-5 (a)　有水K_{II}，$E_1/E_d=1.0$

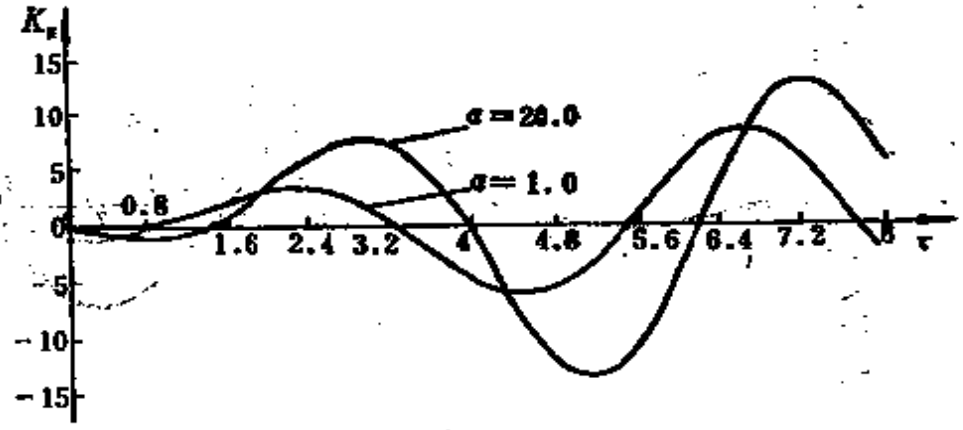


图13-5 (b)　有水K_{II}，$E_1/E_2=1.2$

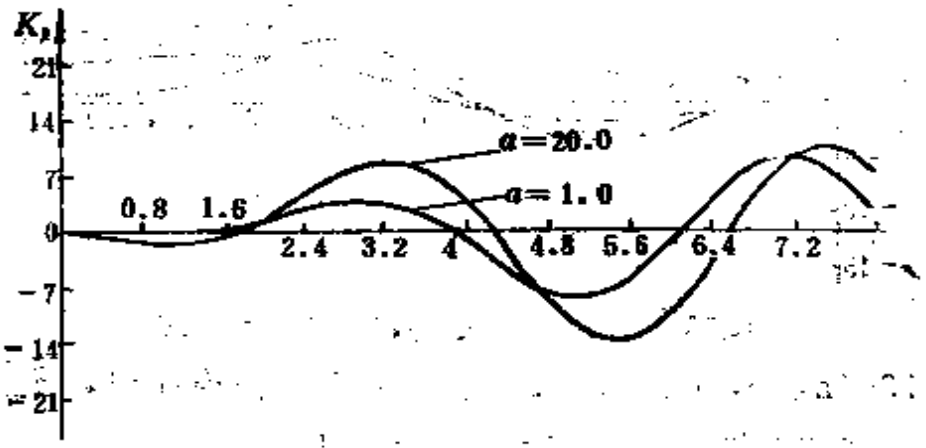


图13-5 (c)　有水K_{II}，$E_1/E_2=1.5$

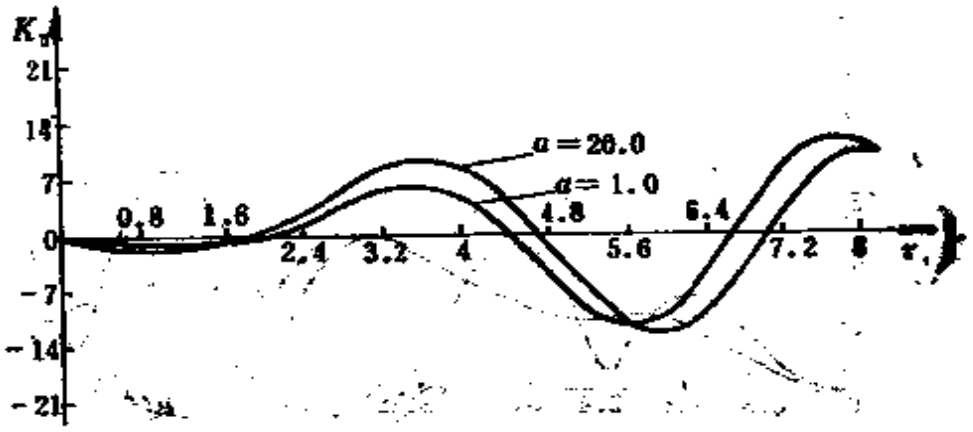


图13-5 (d)　有水K_{II}，$E_1/E_2=2.0$

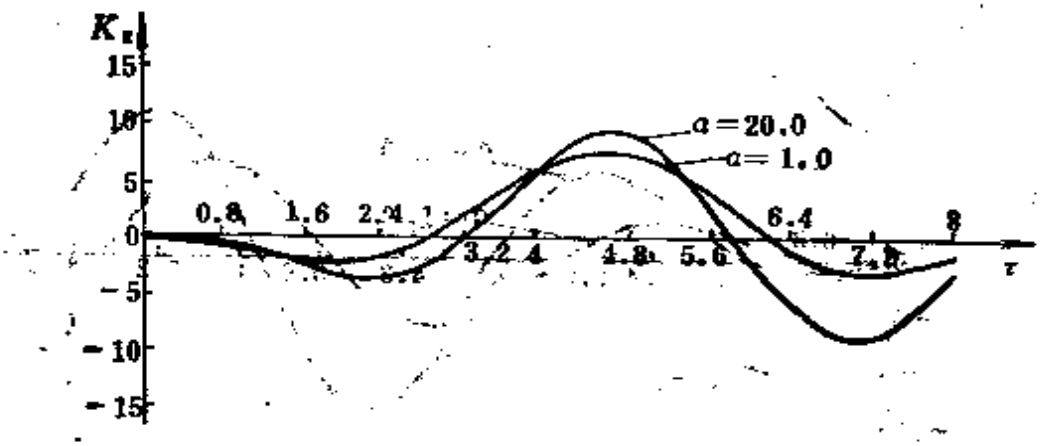


图13-5 (e)　有水K_{II}，$E_1/E_d=5.0$

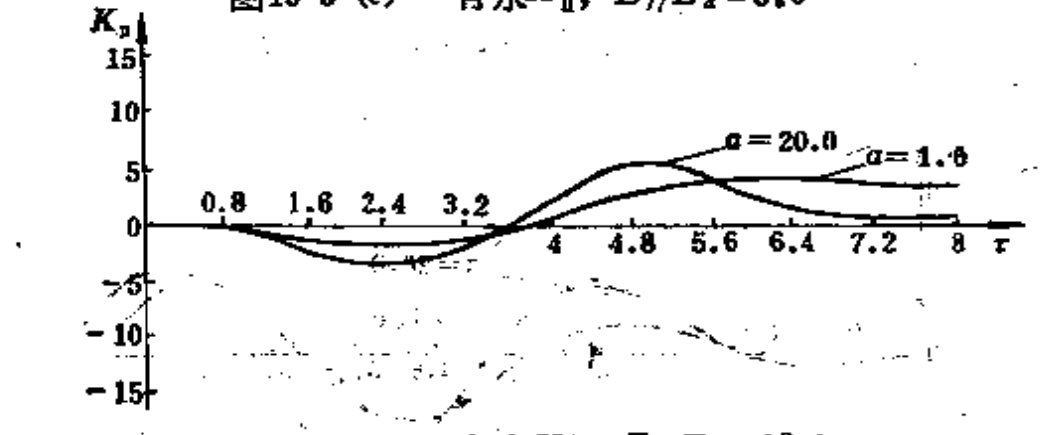


图13-5 (f)　有水K_{II}，$E_1/E_d=10.0$

图13-6a、b、c、d、e、f给出了固定弹模比时，无水K_0随缝长的变化曲线图；图13-7a、b、c、d、e、f给出了固定弹模比时，有水K_0随缝长的变化曲线图。由图可以看出，不管水的影响考虑与否，当弹模比$E_1/E_d<5.0$变化时，K_0都随缝长的增加而增加，而当$E_1/E_d\geqslant 5.0$时，K_0都随缝长的增加而减小。

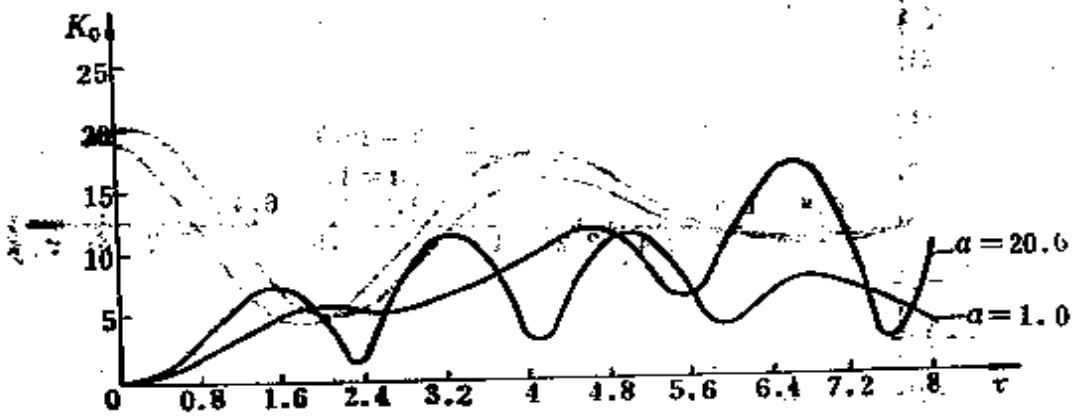


图13-6 (a)　无水K_0，$E_1/E_d=1.0$

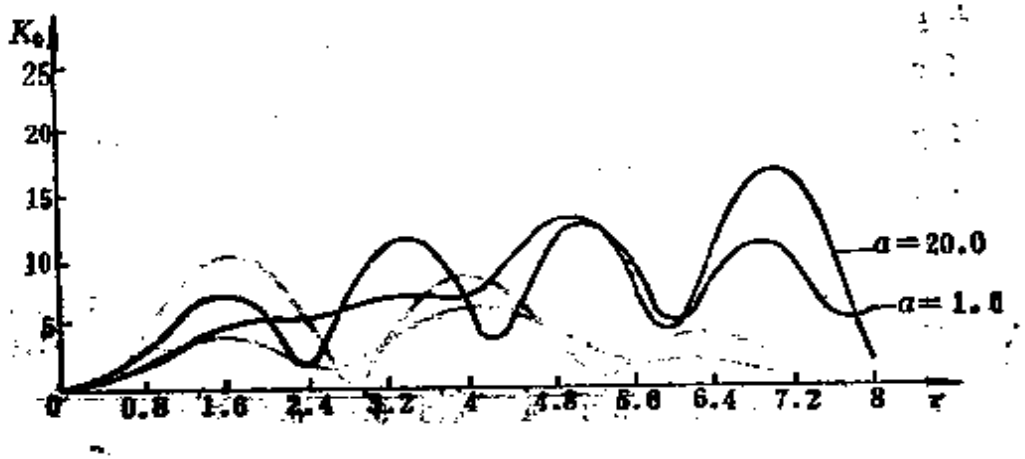


图13-6 (b) 无水K_0, $E_1/E_2=1.3$

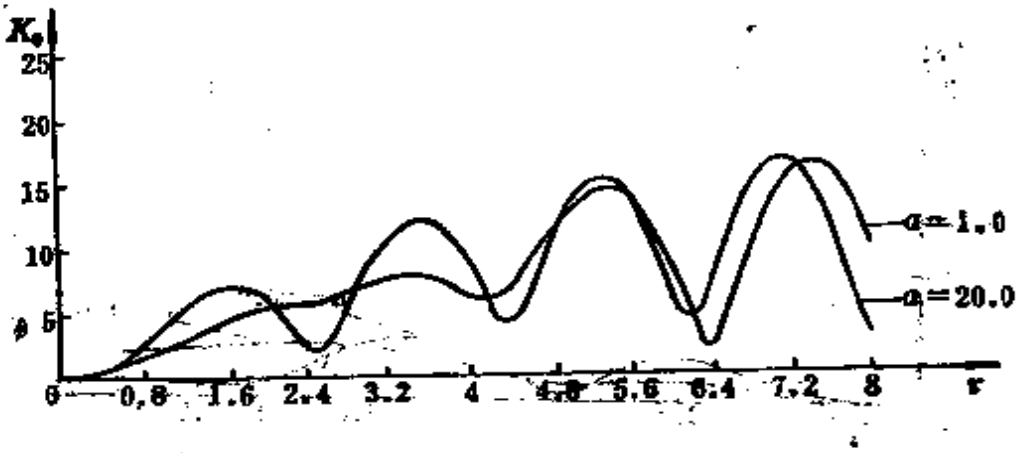


图13-6 (c) 无水K_0, $E_1/E_2=1.5$

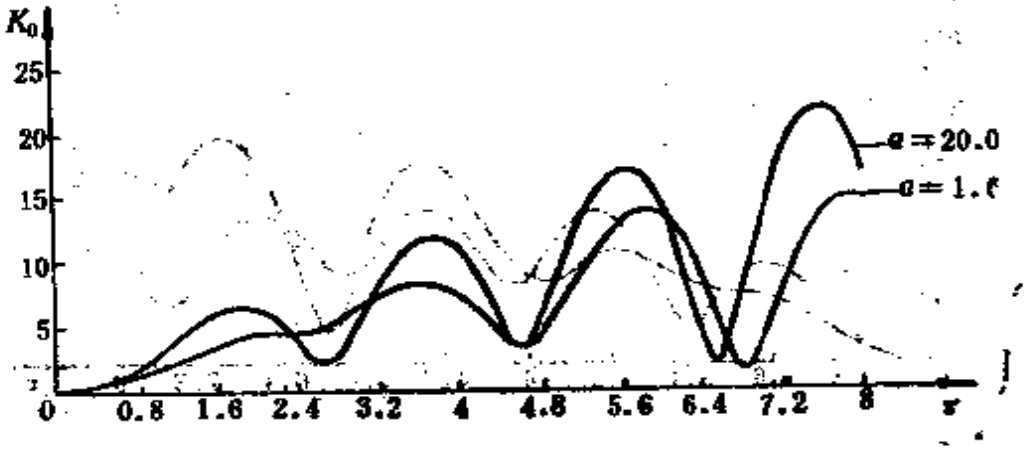


图13-6 (d) 无水K_0, $E_1/E_2=2.0$

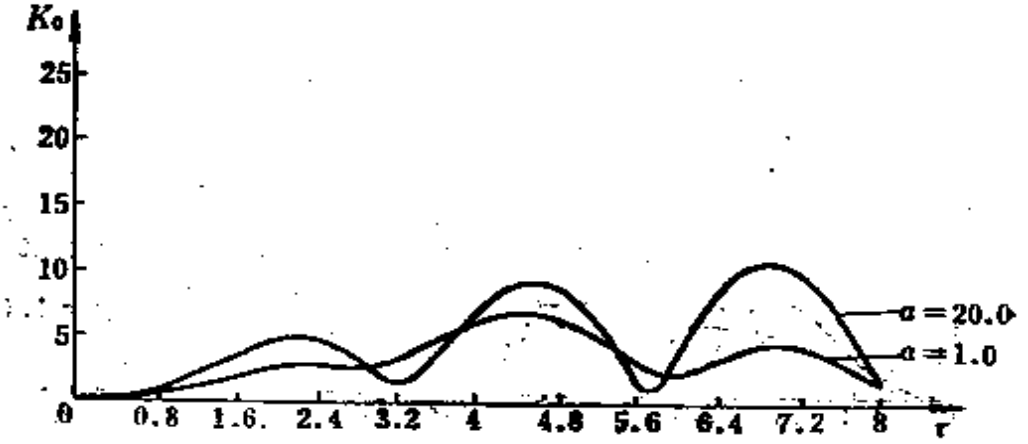


图13-6 (e) 无水K_0，$E_f/E_d=5.0$

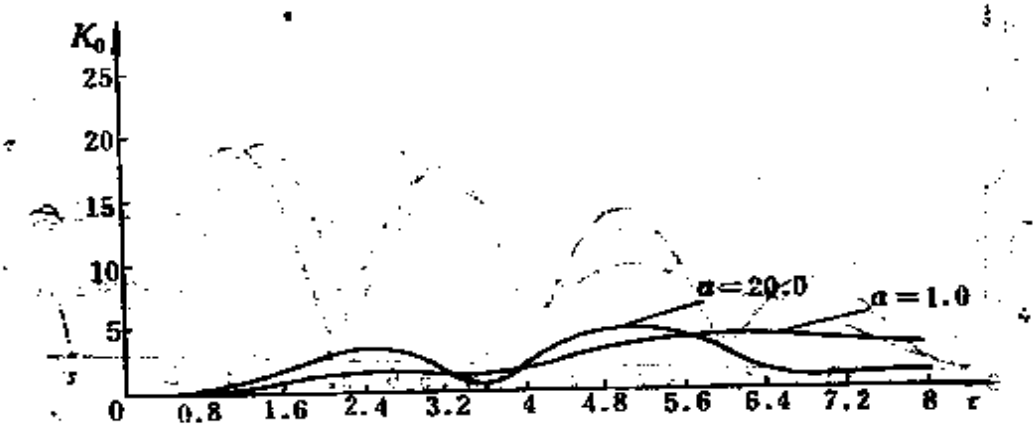


图13-6 (f) 无水K_0，$E_f/E_d=10.0$

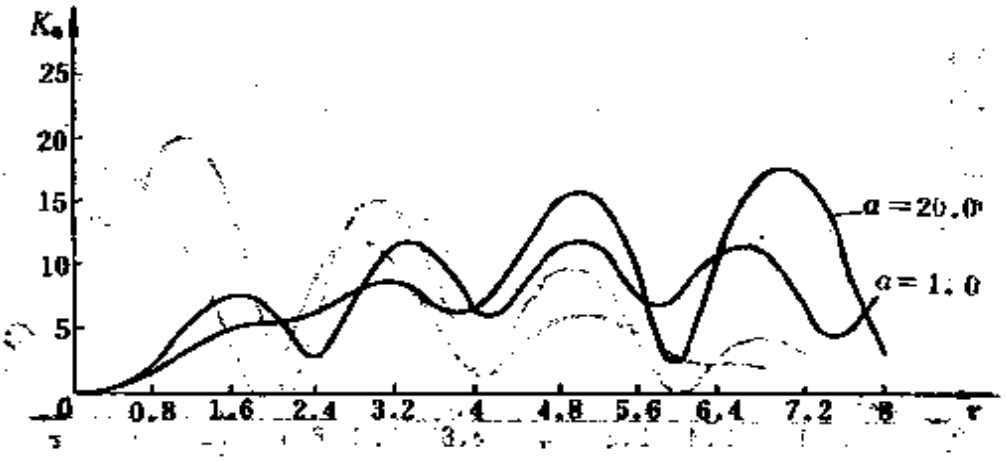


图13-7 (a) 有水K_0，$E_f/E_d=1.0$

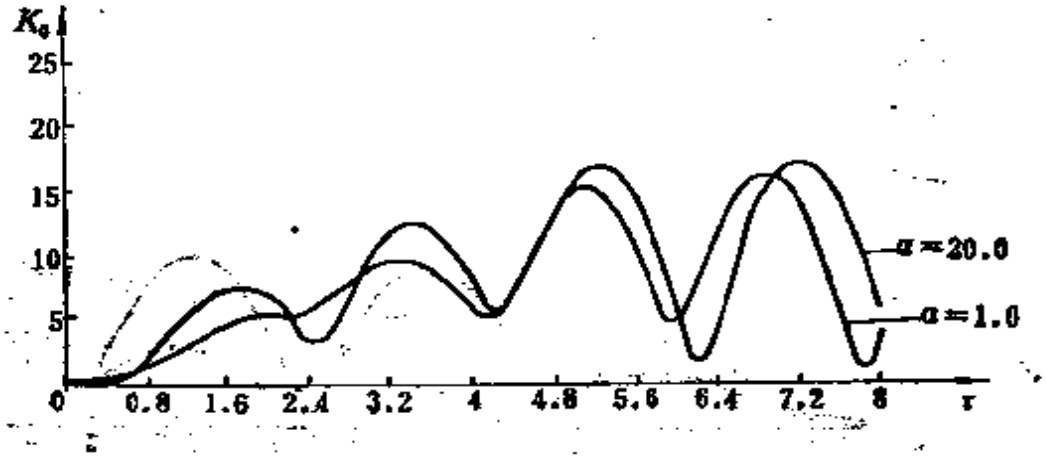


图13-7 (b)　有水K_0，$E_1/E_2=1.2$

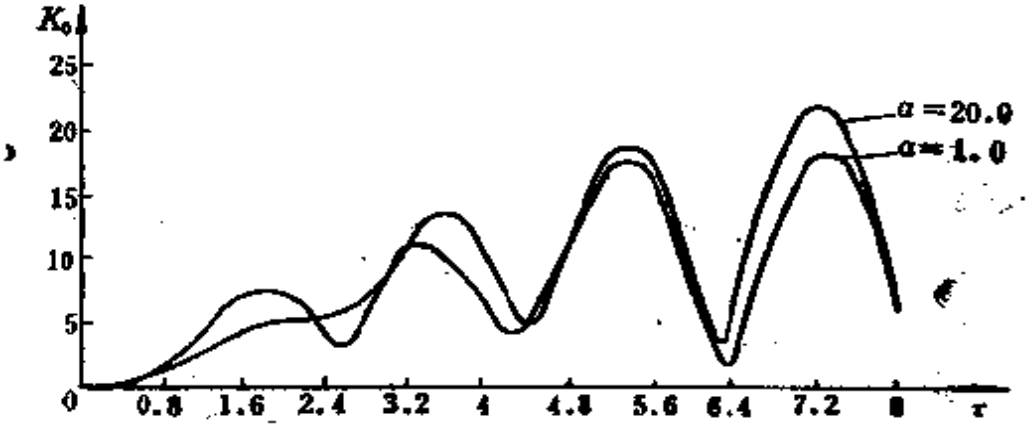


图13-7 (c)　有水K_0，$E_1/E_2=1.5$

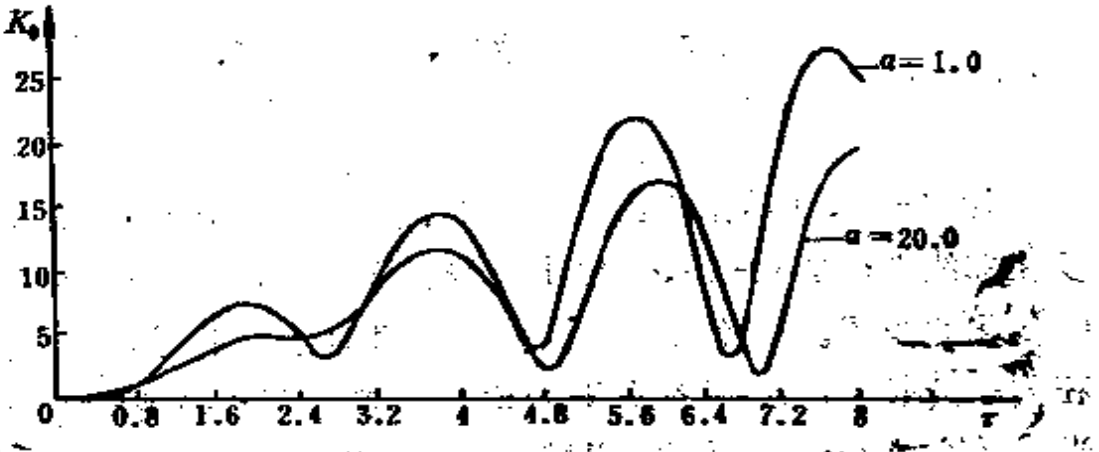


图13-7 (d)　有水K_0，$E_1/E_2=2.0$

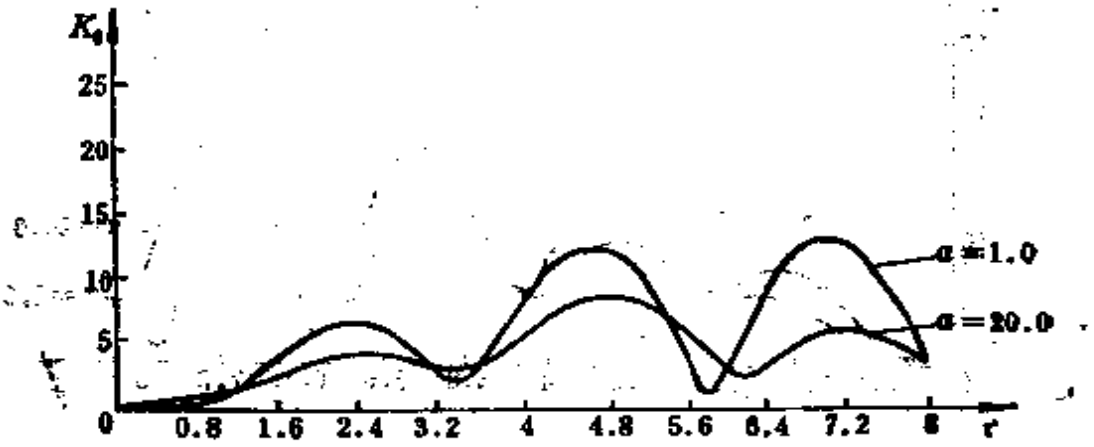


图13-7 (e)　有水K_0，$E_f/E_d=5.0$

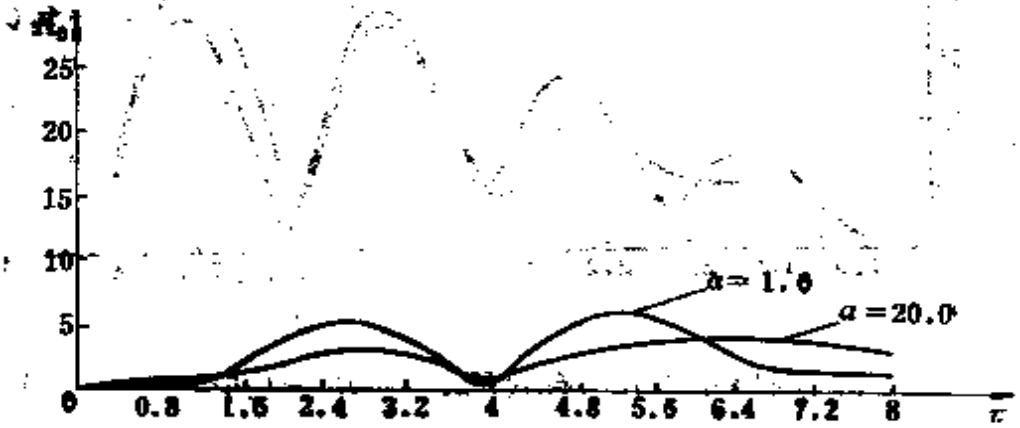


图13-7 (f)　有水K_0，$E_f/E_d=10.0$

图13-8a、b给出了缝长固定时，无水K_I随弹模比E_f/E_d的变化曲线图；图13-9a、b给出了缝长固定时，有水K_I随弹模比的变化曲线图。由此可以看出，不管是有水情形还是无水情形，在同一缝长下，K_I的变化随弹模比的增加有较显著的变化，且当$E_f/E_d\leqslant 2.0$时，K_I随弹模比的增加而增加，而当$E_f/E_d>2.0$时，K_I则随弹模比的增加而减小。

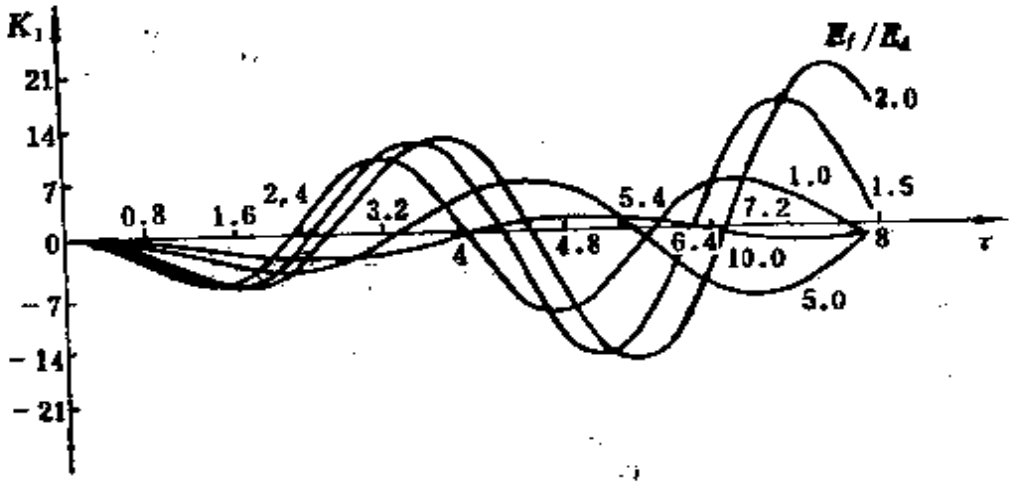


图13-8(a)　无水K_1，a＝1.0

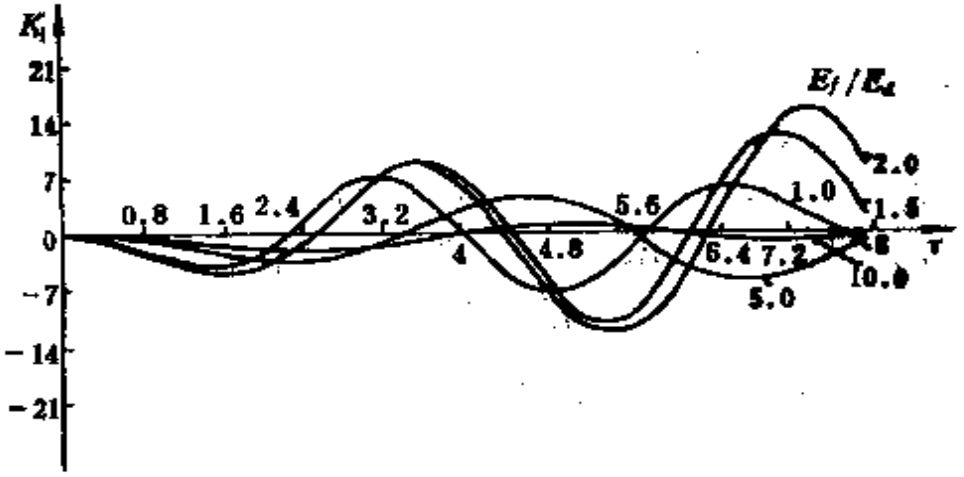


图13-8(b)　无水K_1，a＝2.0

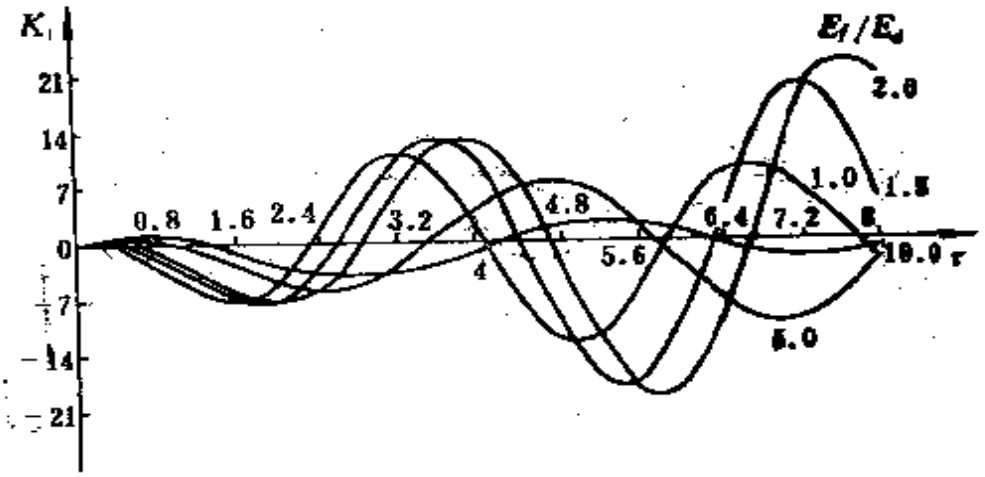


图13-9(a)　有水K_1，a＝1.0

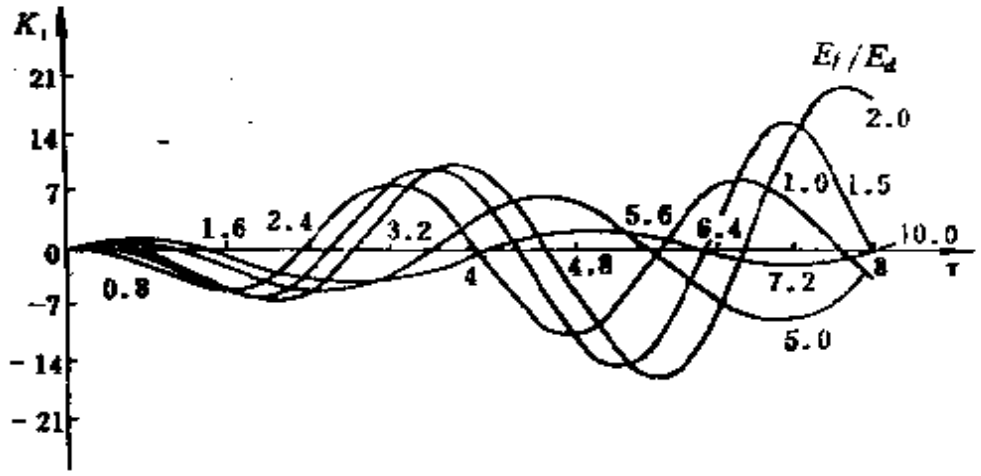


图13-9(b)　有水K_1，a＝2.0

图13-10a、b给出了固定缝长时，无水K_{II}随弹模比的变化对比图；图13-11a、b给出了固定缝长时，有水K_{II}随弹模比的变化曲线图，由图可以看出，在有水和无水两种情况下，K_{II}随弹模比的变化规律相同，即当$E_f/E_d \leqslant 5.0$时，K_{II}随弹模比的增加而增加，当$E_f/E_d > 5.0$时，K_{II}随弹模比的增加而减小。

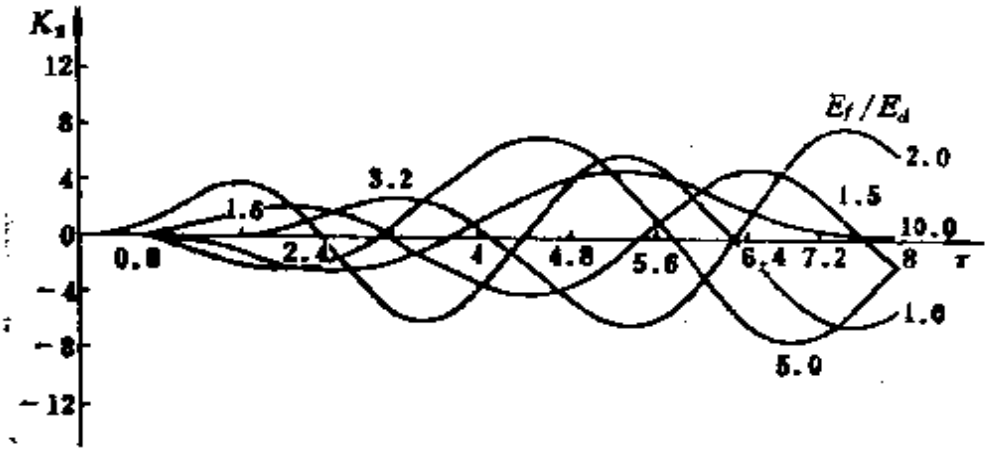


图13-10(a)　无水K_{II}，a＝1.0

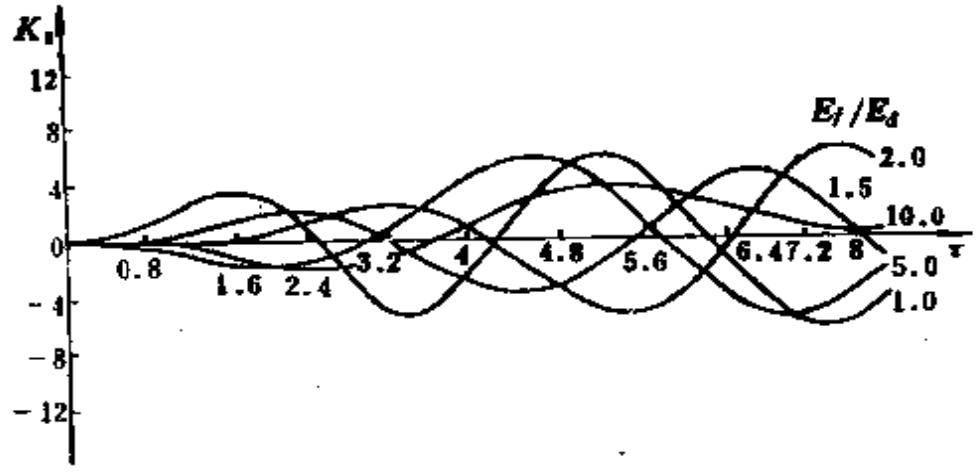


图13-10(b)　无水K_{β}，a＝2.0

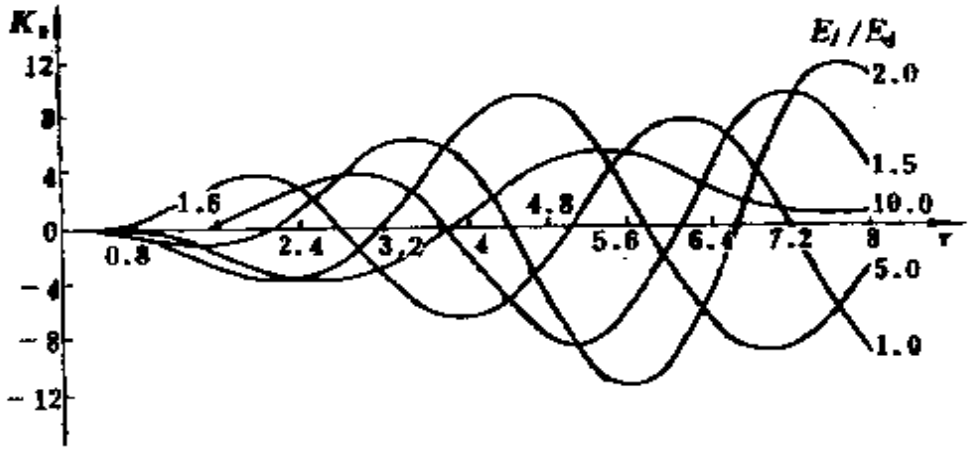


图13-11(a)　有水K_{β}，a＝1.0

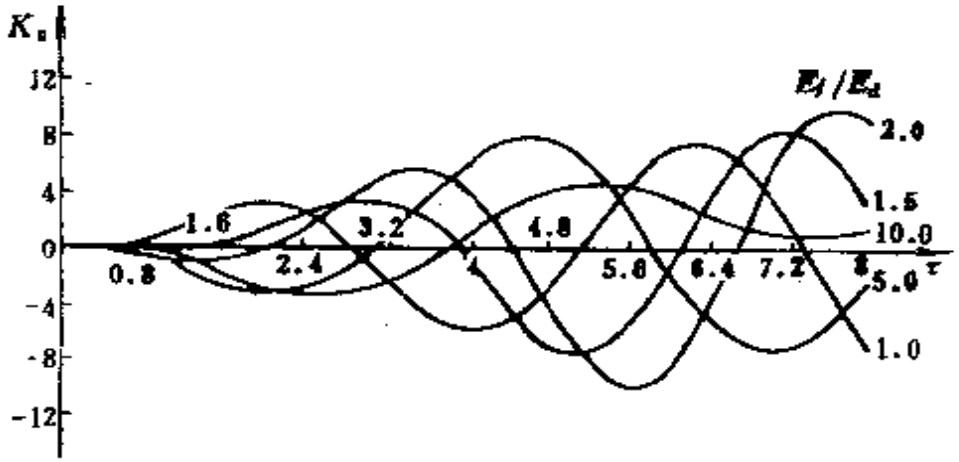


图13-11(b)　有水K_{β}，a＝2.0

图13-12a、b给出了固定缝长时，无水K_0随弹模比的变化对比图；图13-13a、b给出了固定缝长时，有水K_0随弹模比变化的对比图。由此可见，在缝长不变的情况下，库水的作用并不影响K_0随弹模比的变化规律，且当弹模比$E_f/E_d \leqslant 2.0$时，K_0随弹模比的增加而增加，当$E_f/E_d > 2.0$时，K_0随弹模比的增加而减小。

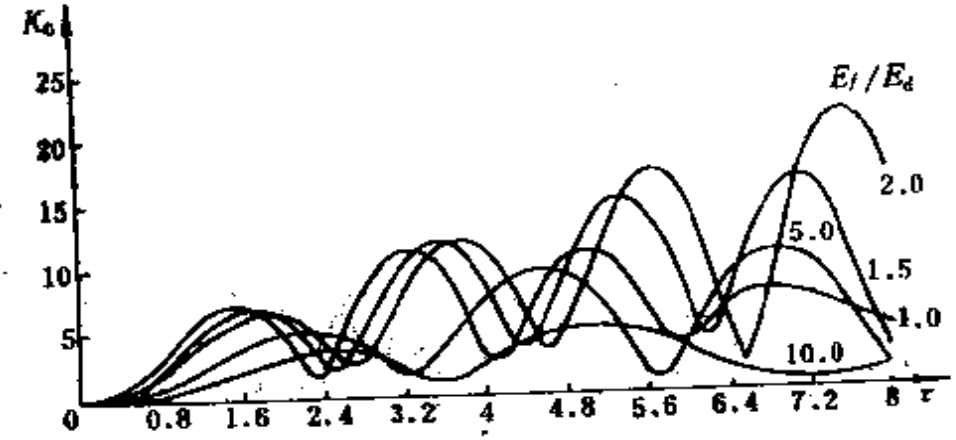


图13-12(a)　无水K_0，a = 1.0

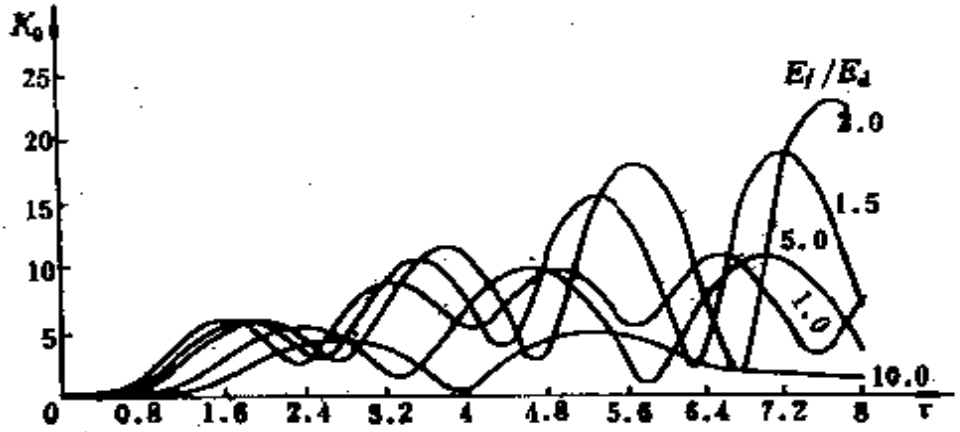


图13-12(b)　无水K_0，a = 2.0

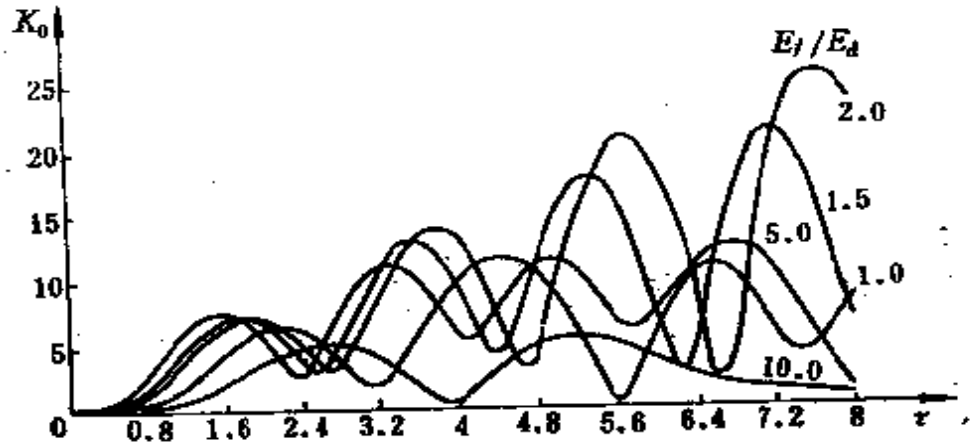


图13-13(a)　有水K_0，a=1.0

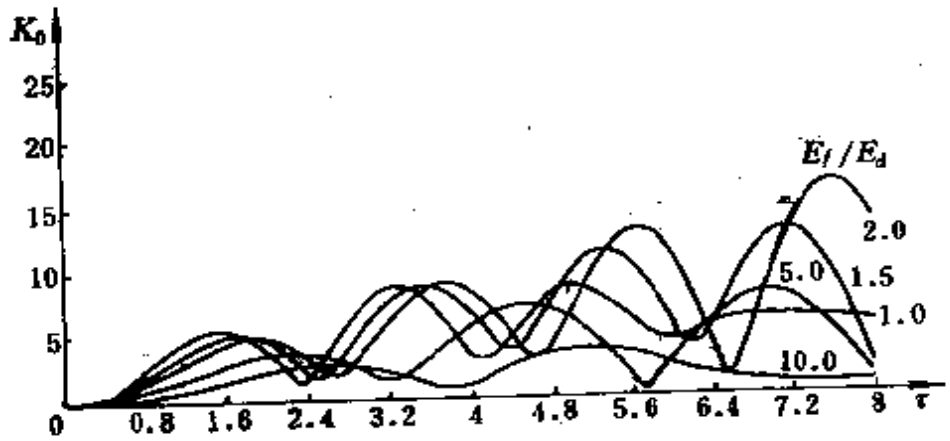


图13-13(b)　有水K_0，a=2.0

图13-14a、b、c、d、e、f给出了缝长为1.0m，且当弹模比固定时，有水和无水情况下K_0的对比图。可见水的作用使得K_0增加。

同时，从上述图中还可以看出，缝长的增长或弹模比的增加都会使K_I、K_{II}、K_0的周期延长。

最后说明一点，图中为了清晰起见，只画出了参数变化极端情况下的曲线图，其它情形均在此间变化，这里没有画出。

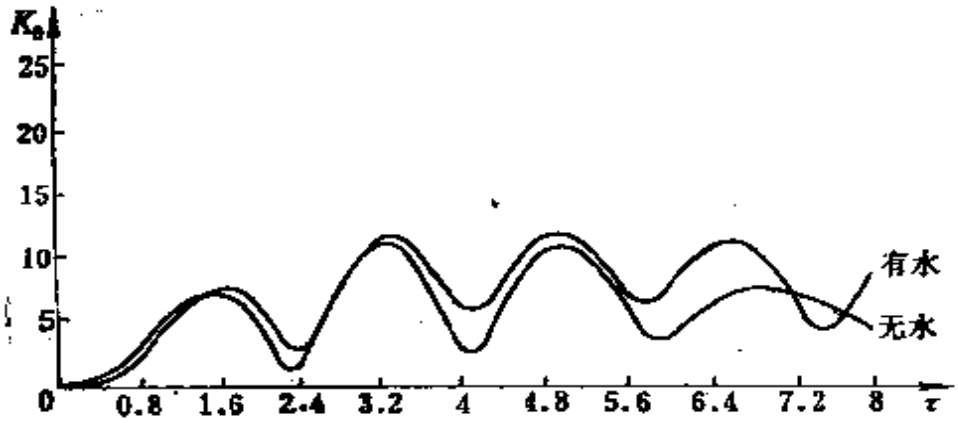


图13-14(a) K_0, a=1.0, $E_f/E_d=1.0$

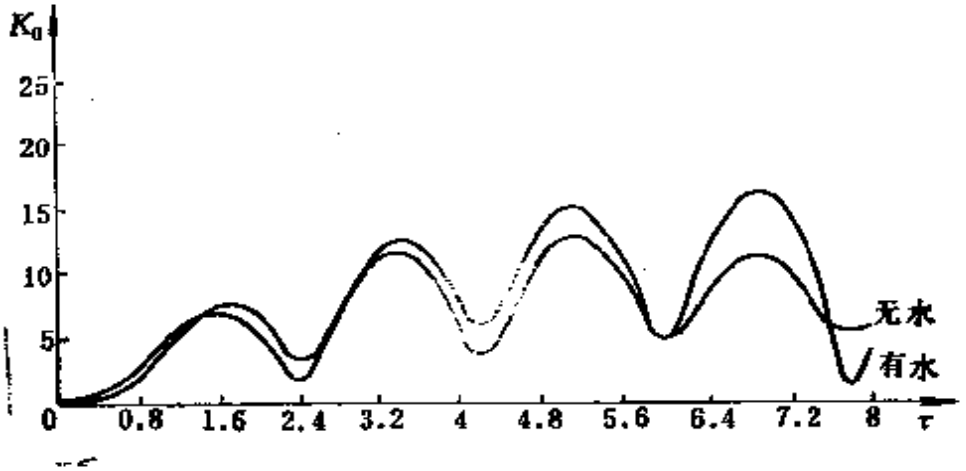


图13-14(b) K_0, a=1.0, $E_f/E_d=1.2$

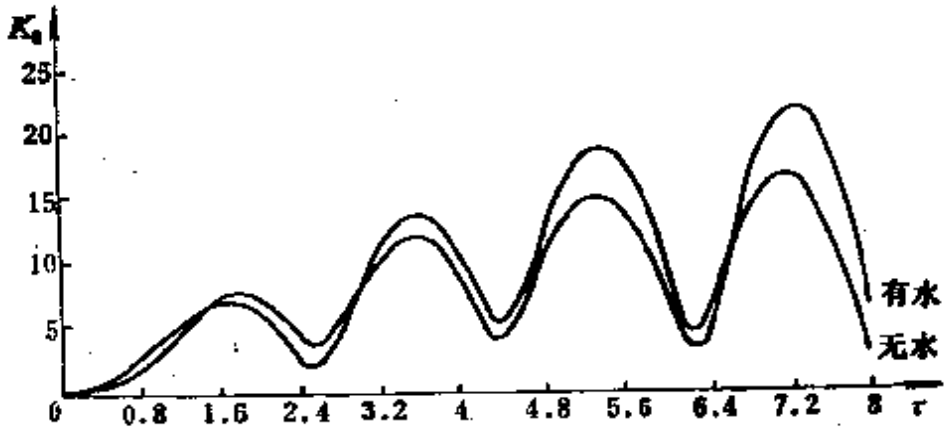


图13-14(c) K_0, a=1.0, $E_f/E_d=1.5$

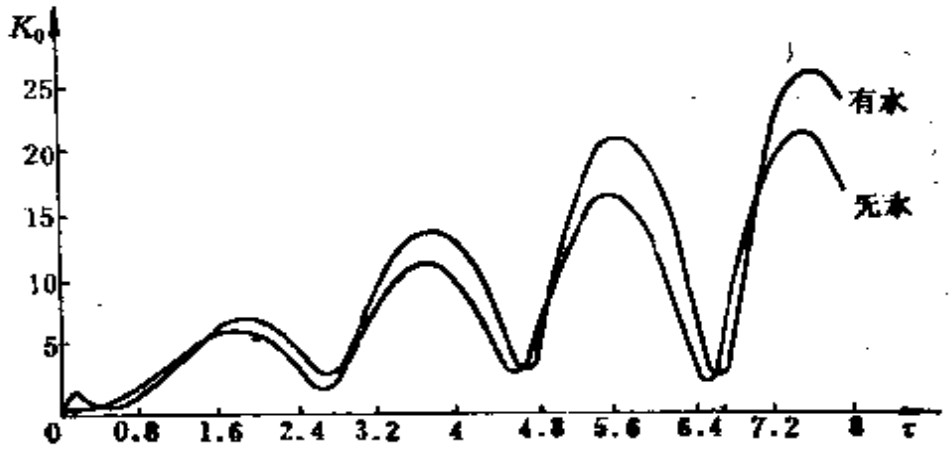


图13-14(d)　K_0，a=1.0，$E_1/E_2=2.0$

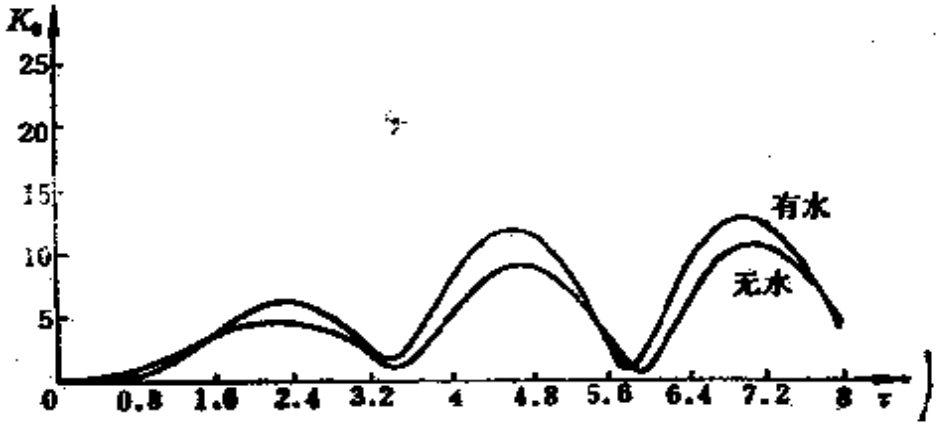


图13-14(e)　K_0，a=1.0，$E_1/E_2=5.0$

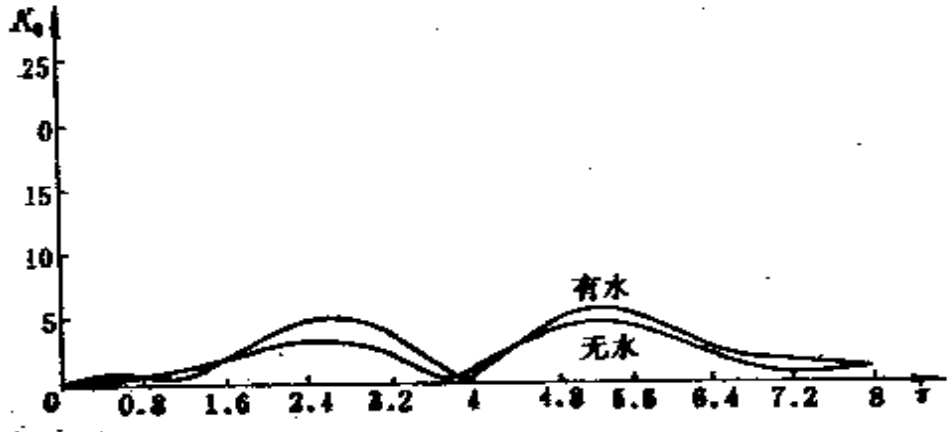


图13-14(f)　K_0，a=1.0，$E_1/E_2=10.0$

§13-4 坝高的影响分析

在动力问题中，重力坝的坝高对其反应值的影响较大，那么，坝高对应力强度因子有什么样的影响呢？为了研究这个问题，本书作者对三种不同坝高的重力坝，在缝长为1.0m时，就弹模比为1.0，1.5，2.0，10.0的不同情况，在有水和无水两种工况下进行了计算。重力坝的几何尺寸示于表13-1中。计算中所取材料参数及地震荷载同 §13-3。计算结果列于表13-2中，为节省篇幅，这里只给出了峰值的大小。

表13-1 重方坝尺寸表 单位：m

类型 / No.	坝 高	底 宽	顶 宽	颈 高
1	50.0	40.0	4.0	2.0
2	100.0	70.0	8.0	4.0
3	150.0	120.0	8.0	4.0

结果表明：

(1) 库水的影响仍然使得应力强度因子增加。不管对任何弹模比和任意的坝高，上游库水的作用总是使坝踵裂缝的应力强度因子增加。

(2) 坝高对应力强度因子的影响，随弹模比的不同而呈现不同的影响规律，即当弹模比$E_f/E_d<2.0$时，应力强度因子随坝高的增加而增加，当$E_f/E_d>2.0$时，应力强度因子随坝高的增加而减少，而当$E_f/E_d=2.0$时，坝高在100m以下变化时，应力强度因子随坝高的增加而增加，坝高在100m以上变化时，应力强度因子随坝高的增加而减少。

表13-2　坝高对应强度因子的影响比较（$a=1.0$m）　　10^4N·m$^{-3/2}$

E_1/E_d	K 坝高(m) / 工况	K_I			K_{II}			K_0		
		50	100	150	50	100	150	50	100	150
1.0	无水	2.892	9.983	18.93	1.825	6.207	8.665	3.367	11.44	20.42
	有水	3.045	12.44	24.73	2.748	7.933	9.822	3.670	12.44	25.84
1.5	无水	3.381	16.51	24.64	2.512	5.192	5.277	4.107	16.90	25.13
	有水	3.906	19.95	35.06	5.412	9.827	11.23	6.511	22.24	37.81
2.0	无水	4.224	20.79	17.09	5.374	7.836	7.117	6.748	22.22	18.52
	有水	4.343	24.62	31.05	10.48	11.93	9.978	11.02	27.35	32.61
10.0	无水	8.850	2.956	2.825	9.647	4.841	3.984	13.07	5.269	4.083
	有水	9.884	4.138	3.246	13.76	5.594	4.743	16.93	6.425	5.640

§13-5 主要结论

本章的分析结果，说明了下述几个结论：

(1) 利用特解边界元法进行地震反应分析及动态应力强度因子计算，原理简单，计算方法可向工程界推荐。

(2) 上游库水的作用不改变空库时坝重力坝踵界面裂缝的地震应力强度因子的变化规律，但库水的作用使得K_{I}、K_{II}、K_0的幅值增加。

(3) 应力强度因子K_{I}、K_{II}、K_0随缝长的变化而变化，在弹模比一定时，K_{I}随缝长的增加而减小，K_{II}随缝长的增加而增加，K_0的变化当$E_f/E_d<5.0$时随缝长的增加而增加，当$E_f/Ed\geqslant 5.0$时随缝长的增加而减少。

(4) 应力强度因子K_{I}、K_{II}、K_0随弹模比的变化而有显著的变化。在同一缝长下，K_{I}的变化当$E_f/E_d\leqslant 2.0$的，K_{I}随弹模比的增加而增加，当$E_f/E_d>2.0$时，K_{I}随弹模比的增加而减少；K_{II}的变化当$E_f/E_d\leqslant 5.0$时随弹模比的增加而增加，当$E_f/E_d\leqslant 5.0$时随弹模比的增加而增加，当$E_f/E_d>5.0$时，K_{II}随弹模比的增加而减少；而K_0的变化则是当$E_f/E_d\leqslant 2.0$时随弹模比的增加而增加，当$E_f/E_d>2.0$时，K_0随弹模比的增加而减少。

(5) 坝高对应力强度因子的影响，不论工况如何，K_{I}、K_{II}、K_0的变化规律相同，即当弹模比$E_f/E_d<2.0$时，应力强度因子随坝高的增加而增加，当$E_f/E_d>2.0$时，应力强度因子随坝高的增加而减少，而当$E_f/E_d=2.0$时，坝高在100m以下变化时，应力强度因子随坝高的增加而增加，坝高在100m以上增加时，应力强度因子随之减少。因此，要判断某坝踵裂缝的稳定性，除了考虑裂缝本身的尺寸大小及外部荷载以外，还要同时考虑坝与地基的弹模的差别，以及坝高的影响等。

另外，有了应力强度因子以后，还需籍助于断裂力学来判别裂缝的稳定性，由于坝踵裂缝的复杂性，对这个问题尚缺乏研究。

这是研究坝踵裂缝稳定性的重要课题。

参 考 文 献

[1] 周晶、林皋．重力坝坝面水平裂缝的地震应力强度因子．水利学报，1985年第4期

[2] 李庆斌、周鸿钧、林皋．异弹模界面裂缝地震断裂分析的特解边界元法及在重力坝中的应用．水利学报，1992年第7期

第十四章　重力坝的可靠度分析

§14-1　概　　述

近年来，我国学者对重力坝的可靠度分析作了大胆的探索[1][2]。由于重力坝的应力计算可以简化为平面问题，且依据规范可用材料力学法作为应力计算方法，这给重力坝的可靠性分析带来了方便。因此，在进行重力坝的可靠度分析时常用材料力学法进行应力计算。但是，用材料力学法作应力计算工具有一定的缺点与限制，如：

(1) 重力坝坝踵及坝趾处的应力值较大，重力坝应力可靠度分析的重点多集中在这两个区域，而这两处为应力集中区，材料力学法在这两个区域的计算结果不准确。

(2) 研究表明[3]：地基刚度对重力坝应力分布及大小具有明显的影响作用。而材料力学法假设地基是刚性的，不能反映地基刚度对坝体应力的影响。

(3) 裂缝在重力坝中十分常见，有必要对裂缝进行断裂分析，材料力学法对此无能为力。

鉴于以上材料力学法的缺点与限制，本章在重力坝可靠度中采用了边界单元法。

在可靠度计算方法方面，蒙特卡罗方法是一种相对精确解法：近年来得到了很大发展，出现了许多改进方法[4][5][6]，其中，本章采用的蒙特卡罗边界法，具有模拟次数少，精度高、应用范围广及易于程序实现等优点。

蒙特卡罗边界法计算结构体系破坏概率的公式为：

$$\bar{P}f=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\max_{1\leqslant K\leqslant L}\left\{F_{x1}\left[\bar{g}_k(X_2^{(i)},X_3^{(i)},\cdots,X_m^{(i)})\right]\right\} \tag{14-1}$$

其方差为：

$$\mathrm{Var}(Pf)=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(P_f^{(i)}-\bar{P}_f)^2 \qquad (14-2)$$

式中

$\bar{P}_f$——结构破坏概率；

N——抽样模拟次数；

L——结构破坏模式个数，

$L>1$时可计算结构体系破坏概率；

$L=1$时为单个构件的破坏概率；

$X_1,\cdots,X_m$——相互独立的随机变量；

$F_{Xi}(\ )$——第i个随机变量的累积分布函数；

$\bar{g}_k(X_2,\cdots,X_m)$满足结构第$k$个极限状态方程，即：$g_k(\bar{g}_k, X_2,\cdots,X_m)=0$

本章用特解边界元法作为结构应力分析方法，用蒙特卡罗边界法作为可靠度计算方法，两者结合对重力坝的可靠性做了以下几方面的分析：

(1) 重力坝沿坝基面的抗滑稳定可靠度，主要分析了摩擦系数统计参数对抗滑稳定可靠度的影响；

(2) 坝踵和坝趾处应力可靠度，特别对坝基刚度对坝体应力可靠度的影响作了分析；

(3) 坝踵界面裂缝失稳扩展可靠度。

值得指出的是：本章采用的方法对非线性结构或效应与基本随机变量为非线性相关的问题不适用，此时应采用考虑随机因素的应力分析方法，如本书第七章介绍的随机特解边界元法及随机有限元法等。

§14-2 极限状态方程的建立

1.抗滑稳定极限状态方程

功能函数为：

$$Z=f\Sigma W-\Sigma P \tag{14-3}$$

对应的极限状态方程为：

$$f\Sigma W-\Sigma P=0 \tag{14-4}$$

式中 ΣW——坝基面以上所有竖向分力之和；

ΣP——坝基面以上所有水平分力之和；

f——摩擦系数。

2.应力极限状态方程

解边界积分方程可得到边界点的位移向量与面力向量，但边界点的应力尚需经过其他运算求出，二维线弹性问题边界点应力的解法已于 §7-4中介绍。

在计算应力可靠度时，采用了影响系数法[7]，将隐式的极限状态方程化为显式，只需作一次结构分析，求得影响系数后，即可对应力可靠度作蒙特卡罗模拟。

用特解边界元法求出重力坝在第i个荷载均值μ_{pi}作用下任一点处的三个应力分量σ_{xi}、σ_{yi}、τ_{xyi}，求得影响系数为：

$$\left.\begin{aligned}R_{xi}&=\sigma_{xi}/\mu_{pi}\\R_{yi}&=\sigma_{yi}/\mu_{pi}\\R_{ti}&=\tau_{xyi}/\mu_{pi}\end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots,m) \tag{14-5}$$

则当第i个荷载取值为P_i时，该点的三个应力分量可表示为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xi}&=R_{xi}\,P_i\\\sigma_{yi}&=R_{yi}\,P_i\\\tau_{xyi}&=R_{ti}\,P_i\end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots,m) \tag{14-6}$$

在m个荷载共同作用下，该点的应力分量可表示为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\sum_{i=1}^{m}\sigma_{xi}=\sum_{i=1}^{m}R_{xi}P_i\\ \sigma_y&=\sum_{i=1}^{m}\sigma_{yi}=\sum_{i=1}^{m}R_{yi}P_i\\ \tau_{xy}&=\sum_{i=1}^{m}\tau_{xyi}=\sum_{i=1}^{m}R_{ti}P_i\end{aligned}\right\}\qquad(14\text{-}7)$$

该点的主应力可表示为：

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=S_1\pm S_2\qquad(14\text{-}8)$$

设该点材料的抗压极限强度为R_c，抗拉极限强度为 R_t，则该点的功能函数可建立如下：

对压应力极限，因为边界元法求得的压应力为负值，故有：

$$Z_c=R_c+\sigma_2\qquad(14\text{-}9)$$

对应的极限状态方程为：

$$R_c+\sigma_2=0\qquad(14\text{-}10)$$

对拉应力极限，有：

$$Z_t=R_t-\sigma_1\qquad(14\text{-}11)$$

对应的极限状态方程为：

$$R_t-\sigma_1=0\qquad(14\text{-}12)$$

为统一描述抗拉及抗压极限状态方程，引入拉压参数l_y。定义：

$$\left.\begin{aligned}l_y&=1\quad\text{对抗拉极限}\\ l_y&=-1\quad\text{对抗压极限}\end{aligned}\right\}\qquad(14\text{-}13)$$

此时，抗压和抗拉极限状态方程可统一写为：

$$R-l_y(S_1+l_y\cdot S_2)=0\qquad(14\text{-}14)$$

式中，R为混凝土抗拉或抗压极限强度，取其绝对值。

3.裂缝扩展极限状态方程

对坝踵处坝体与坝基交界面上的界面裂缝，考虑其缝端沿交界面继续开裂的极限状态。在§9-4中已经给出了异弹模界面裂缝的应力强度因子的计算公式，详见式（9-29），由其推导过程可知，缝端应力强度因子K_{I}、K_{II}，与荷载具有线性关系，影响系数法仍然适用，即有：

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}}&=\sum_{i=1}^{m}K_{\mathrm{I}i}=\sum_{i=1}^{m}R_{k\mathrm{I}i}P_i \\ K_{\mathrm{II}}&=\sum_{i=1}^{m}K_{\mathrm{II}i}=\sum_{i=1}^{m}R_{k\mathrm{II}i}P_i \end{aligned}\right\} \tag{14-15}$$

功能函数为：

$$\left.\begin{aligned} Z_t&=K_{\mathrm{I}c}-K_{\mathrm{I}} \\ Z_k&=K_{\mathrm{II}c}-K_{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\} \tag{14-16}$$

极限状态方程为：

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}c}-K_{\mathrm{I}}&=0 \\ K_{\mathrm{II}c}-K&=0 \end{aligned}\right\} \tag{14-17}$$

对复合裂缝，由断裂力学知，应区分压剪与拉剪两种组合方式，将在下节叙述。

§14-3 沿坝基面抗滑稳定可靠度计算

重力坝的抗滑稳定是重力坝设计与校核的重要内容，沿坝基面滑动是常见的失稳方式，有必要对重力坝沿坝基面滑动失稳的概率进行分析计算。

极限状态方程采用式（14-4）。计算坝例示于图14-1。

坝体受有重力、上游水压力和扬压力三种荷载，并取混凝土容重、上游水位，扬压力系数为随机变量，其统计参数列于表14-1。

表14-1 荷载采用值

荷　载	单　位	均　值	变异系数	分　布
容　重	$10KN/m^3$	2.4	0.02	正态
上游水位	m	91.665	0.06	正态
扬压力系数		0.35	0.15	极值Ⅰ型

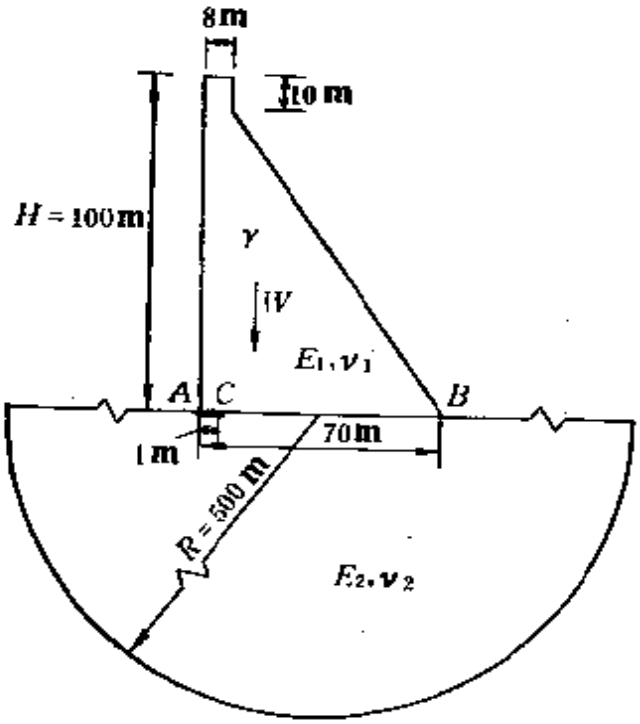


图 14-1 计算坝例

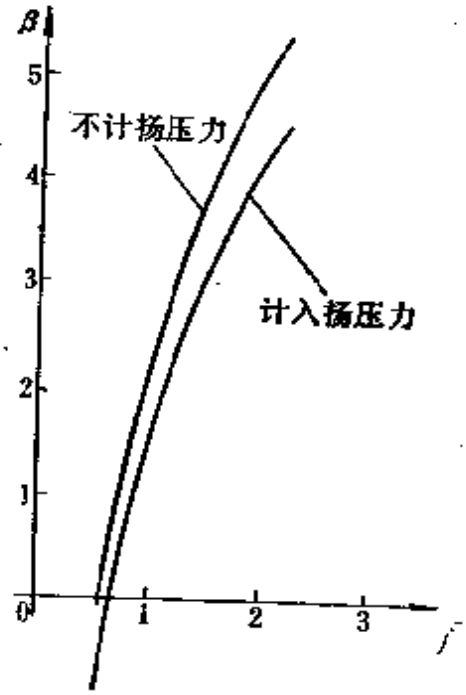


图 14-2 β~f关系图

1.摩擦系数统计参数对稳定可靠度影响分析

图14-2和表14-2为摩擦系数均值变化对抗滑稳定可靠指标的影响规律。从表中可以看出：当摩擦系数f的均值从1.0变 到 2.0时，可靠指标由1.71增加到4.20，增加了145.6%。由图中可见曲线的斜率很大，说明摩擦系数均值对重力坝抗滑稳定可靠度具有显著影响。由图中也可以看出对所计算剖面，当f的均值小于1.0时，抗滑稳定可靠指标在1.0以下，其可靠度是很低的。

14-2 摩擦系数均值变化对抗滑稳定可靠指标的影响

摩擦系数均值	不计扬压力		计入扬压力	
	破坏概率P_f	可靠指标B	破坏概率P_f	可靠指标B
2.25	0.255×10^{-7}	5.449	0.184×10^{-5}	4.629
2.00	0.273×10^{-6}	5.010	0.133×10^{-4}	4.202
1.75	0.320×10^{-5}	4.513	0.100×10^{-3}	3.718
1.50	0.407×10^{-4}	3.941	0.785×10^{-3}	3.161
1.25	0.546×10^{-3}	3.266	0.312×10^{-2}	2.505
1.00	0.729×10^{-2}	2.443	0.441×10^{-1}	1.706
0.75	0.828×10^{-1}	1.386	0.24?	0.679
0.50	0.538	−0.095	0.776	−0.760

注：$V_f=0.23$

图14-3及表14-3表示了f的离散性对抗滑稳定可靠指标的影响。由图中可以看出，随着变异系数的增大，可靠指标减小。当f的均值取1.0时，变异系数从0.1增加到0.5时，可靠指标由3.07降至0.81，降低了73.6%，说明f的离散程度对抗滑稳定可靠度的影响是很大的。

为了考查f的不同分布对抗滑稳定可靠指标的影响，固定f的均值为1.0，变异系数取0.1，0.2，0.3，0.4，0.5，取f的分布分别为正态、对数正态和极值Ⅰ型，可得到不同的可靠指标，示于图14-4。

由图中可见，三条曲线相当接近，说明f的分布对抗滑稳定可靠指标的影响不显著。对比这三条曲线可知，f为正态分布时，所得β值最小，即，若假设f为正态分布，将得到较其他分布小的可靠指标，计算结果偏于安全。

由以上分析可知，f的均值和离散性对抗滑稳定可靠指标的影响是显著的。这一显著性决定了f的均值和变异系数的取值的重要性。因此，对具体坝址，应充分重视f值的试验取值工作，尽

表14-3　摩擦系数方差变化对抗滑稳定可靠指标的影响

变异系数	不计扬压力		计入扬压力	
U_f	破坏概率	可靠指标	破坏概率	可靠指标
0.05	0.608×10^{-11}	6.778	0.775×10^{-4}	3.783
0.10	0.138×10^{-5}	4.688	0.106×10^{-2}	3.074
0.15	0.131×10^{-3}	3.651	0.630×10^{-2}	2.495
0.20	0.160×10^{-2}	2.948	0.203×10^{-1}	2.047
0.25	0.729×10^{-2}	2.443	0.441×10^{-1}	1.706
0.30	0.194×10^{-1}	2.066	0.747×10^{-1}	1.442
0.35	0.379×10^{-1}	1.776	0.109	1.223
0.40	0.611×10^{-1}	1.545	0.141	1.065
0.50	0.115	1.203	0.209	0.809

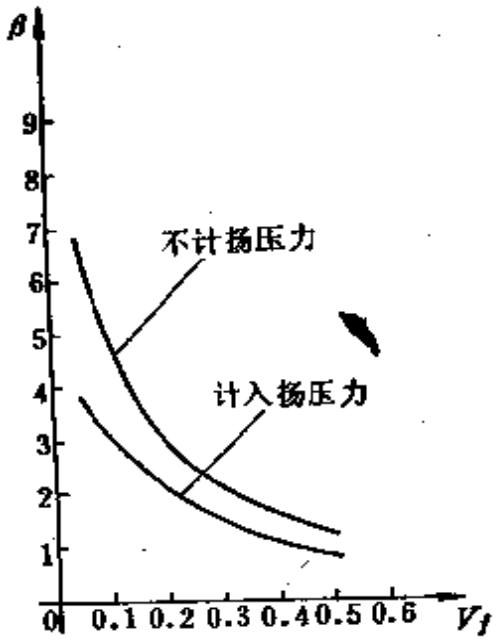


图14-3　$\beta\sim V_f$关系图

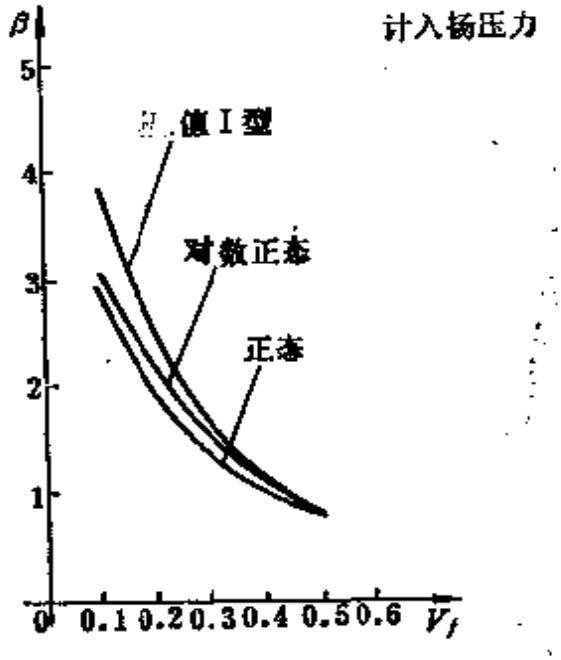


图14-4　β-f分布关系图

量保证 f 的这两个统计参数的准确性，为坝体的经济合理的设计提供精确的基本资料。然而，由于试验条件及经费等因素的限制，现场试验的子样数往往是很少的，这给分布形式的确定带来

一定困难。当对多种分布检验都不拒绝时，假设 f 为正态分布将可得到偏于安全的计算结果。

2.扬压力对抗滑稳定可靠指标的影响分析

为定量研究扬压力对重力坝抗滑稳定可靠度的影响，对所示坝例作了计入扬压力和不计扬压力两种情况的抗滑稳定可靠度计算。

表14-4、表14-5、表14-6分别列出了 f 的均值、变异系数分布不同时，扬压力对抗滑稳定可靠指标的影响。从表中可以看出，在多数情况下，扬压力将使抗滑稳定可靠指标降低30%左右，最大可降低51%，最小时也降低15%。由此可得出结论：扬压力对抗滑稳定可靠度来说是一种不利因素。一般说来，它的存在将使抗滑稳定可靠指标降低1/3。因此，在施工与运行管理中尽量减小扬压力将有助于提高坝体的抗滑稳定可靠性，这又一次支持了工程中的一贯做法。

表14-4 扬压力对抗滑稳定可靠指标的影响(1)

摩擦系数均值 f	可靠指标		可靠指标减少 (%)	备注
	不计扬压力	计入扬压力		
2.25	5.449	4.629	15	f 的变异系数为 0.25
2.00	5.010	4.202	16	
1.75	4.513	3.718	18	
1.50	3.941	3.161	20	
1.25	3.266	2.505	23	
1.00	2.443	1.706	30	
0.75	1.386	0.679	51	

表14-5 扬压力对抗滑稳定可靠指标的影响(2)

摩擦系数的变异系数 V_f	可靠指标		可靠指标减少 (%)	备注
	不计扬压力	计入扬压力		
0.05	6.778	3.783	44	f的均值为1.0
0.10	4.688	3.074	34	
0.15	3.651	2.495	32	
0.20	2.948	2.047	31	
0.25	2.443	1.706	30	
0.30	2.066	1.442	30	
0.35	1.776	1.223	31	
0.40	1.545	1.065	31	
0.50	1.203	0.809	33	

表14-6 扬压力对抗滑稳定可靠指标的影响(3)

摩擦系数分布	可靠指标		可靠指标减少 (%)	备注
	不计扬压力	计入扬压力		
正态	1 630	1.264	22	$\overline{f}=1.0$
对数正态	2.066	1.442	30	$V_f=0.3$
极值Ⅰ型	2.191	1.519	31	

§14-4 坝踵及坝趾处应力可靠度计算

重力坝上游坝踵处的抗拉极限及下游坝趾处的抗压极限是重力坝应力可靠度分析最关心的两个极限状态，本节重点介绍对图14-1所示重力坝所做的考虑地基刚度影响的可靠度计算结果。应力极限状态取式（14-14），并以$\alpha_E=E_1/E_2$表示坝体与坝基的弹模比，取坝体弹模$E_1=2.4\times10^4$MPa，α_E的取值由0.001至100共取10组，分别对图14-1中A点抗拉可靠度及B点抗压可靠度进行了计算，结果示于表14-7、图14-5和图14-6。

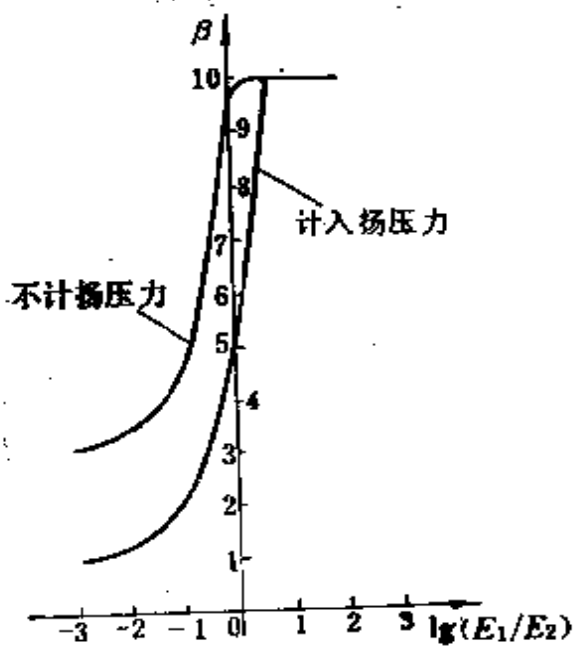


图14-5 A点$\beta\sim\lg\alpha_E$关系图

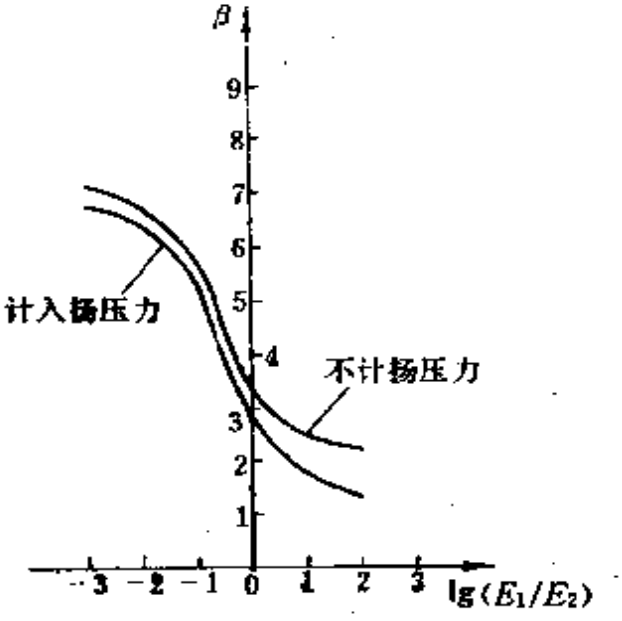


图14-6 B点$\beta\sim\lg\alpha_E$关系图

图14-5是坝踵A点抗拉可靠指标随弹模比的变化情况，当$\lg\alpha_E$由－3增至1时，即地基弹模逐渐减小时，A点抗拉可靠指标逐渐变大，由1.02增至10.0，可见地基刚度对坝踵处抗拉可靠度的影响不容忽视，地基弹模越小，坝踵处的抗拉可靠度越高，这是因为地基的弹模相对较小时，地基较软，缓和了坝踵处的应力集中现象，减小了该处的拉应力；而当地基弹模增大时，应力集中现象较为严重，A点处拉应力超过抗拉极限的可能性增大，可靠指标下降。这种变化当α_E在0.01～5.0这个范围内

表14-7 地基刚度对坝体应力可靠指标的影响——计入扬压力

E_1/E_2	$\lg(E_1/E_2)$	A 点		B 点	
		破坏概率P_f	可靠指标β	破坏概率P_f	可靠指标β
0.001	−3.0	0.155	1.016	$\cdot 605\times10^{-11}$	6.779
0.01	−0.2	0.134	1.107	$\cdot 174\times10^{-10}$	6.624
0.1	−1.0	$\cdot 277\times10^{-1}$	1.915	$.226\times10^{-7}$	5.470
0.2	−0.699	$\cdot 422\times10^{-2}$	2.634	$\cdot 143\times10^{-5}$	4.681
0.5	−0.301	$\cdot 258\times10^{-4}$	4.048	$\cdot 215\times10^{-3}$	3.521
1.0	0.0	$\cdot 692\times10^{-7}$	5.273	$\cdot 249\times10^{-2}$	2.808
2.0	0.301	$\cdot 562\times10^{-12}$	7.114	$\cdot 101\times10^{-1}$	2.321
5.0	0.699	0.0	10.0	$\cdot 292\times10^{-1}$	1.892
10.0	1.0	0.0	10.0	$\cdot 510\times10^{-1}$	1.635
100.0	2.0	0.0	10.0	0.116	1.196

注：Rc=5MPa，0.25，对数正态，Rt=2MPa，0.25，对数正态

比较剧烈，在图 14-5中表现为曲线斜率较大，α_E 在此范围以外时，曲线较为平缓。

图14-6表示坝趾B点的抗压可靠指标与α_E的关系。与 A 点相反，地基刚度的减小，将使B点的可靠指标下降。这种影响的明显变化范围也在$\alpha_E=0.1\sim5.0$之间。

由图14-5和图14-6可见，假设地基为刚性时，计算出的A点的抗拉可靠指标较弹性地基时的值小，结果偏于安全。而地基为刚性时，计算出的B点的抗压可靠指标较弹性地基时大，结果偏于危险。因此，在计算实际工程中重力坝坝趾可靠度时，应尽量考虑地基弹性的影响，武断地取刚性地基将得出危险的结果。

由图中还可看出：当地基弹模较小时（例如地基弹模小于坝体弹模的1/3），坝趾处抗压可靠度将小于坝踵处可靠度而应得到重视。当地基弹模较大时（例如大于坝体弹模的1/3），坝踵处抗拉可靠度将小于坝趾处抗压可靠度而成为主要矛盾。因此，在

进行重力坝设计时，应充分重视地基刚度的影响，根据地基情况合理进行混凝土的配合比设计及混凝土的分区，达到既安全又经济的目的。

从图中同时也可看出，扬压力对 A、B 两点的应力可靠度同样产生不良影响，由于扬压力的分布重心偏于上游，对坝踵 A 点的影响尤为显著。例如：当 $\alpha_E=1$ 时，扬压力将使 A 点的可靠指标降低47%，使 B 点的可靠指标降低15%。

§14-5 坝踵界面裂缝断裂可靠度计算

由于混凝土的温度应力和干缩变形的作用，以及坝体的受力特性与应力集中现象，在重力坝的坝踵区多有表面裂缝出现，而在坝与基础的交界面上，由于坝体与坝基两种材料变形性质的差异，常常会发生界面裂缝，这些表面裂缝和界面裂缝如果继续扩展，就会成为深层裂缝，而对大坝安全构成严重威胁，为此，有必要开展裂缝特别是界面裂缝的断裂可靠性研究。

由于实际工程中坝体与坝基材料的弹模存在不同程度的差异，因此在分析坝踵区的界面裂缝时应该采用异弹模界面裂缝的分析方法，虽然断裂力学中对同弹模条件下得出的裂缝失稳扩展理论已有不少研究，但异弹模界面裂缝的断裂准则尚不成熟。对于复合型裂缝，研究表明：拉剪复合型和压剪复合型裂缝具有不同的缝端应力场，在进行断裂分析时应采用不同的判据[81]，为此，本章在对重力坝坝踵界面裂缝作可靠分析时，对拉剪复合型裂缝取式（14-17）的第一式，对压剪复合型裂缝取式（14-17）的第二式。在图14-1所示坝例中，假设在坝踵处已存在1.0m长的界面裂缝，计算该裂缝沿缝端扩展的概率。

1.断裂韧度统计参数对界面裂缝断裂可靠度的影响分析

选定坝体与坝基的弹模比 $\alpha_E=2$，在图示荷载作用下，由计算知界面裂缝处于拉剪状态，故采用式（14-17）的第一式作为极限状态方程。

图14-7是 K_{Ic} 的均值变化对裂缝稳定可靠指标的影响。当 K_{Ic} 的均值在 $10^5 N \cdot m^{-3/2}$ 至 $2\times10^7 N \cdot m^{-3/2}$ 范围内变化时，可靠指标对应于不计扬压力和计入扬压力两种情况，分别在2.04至

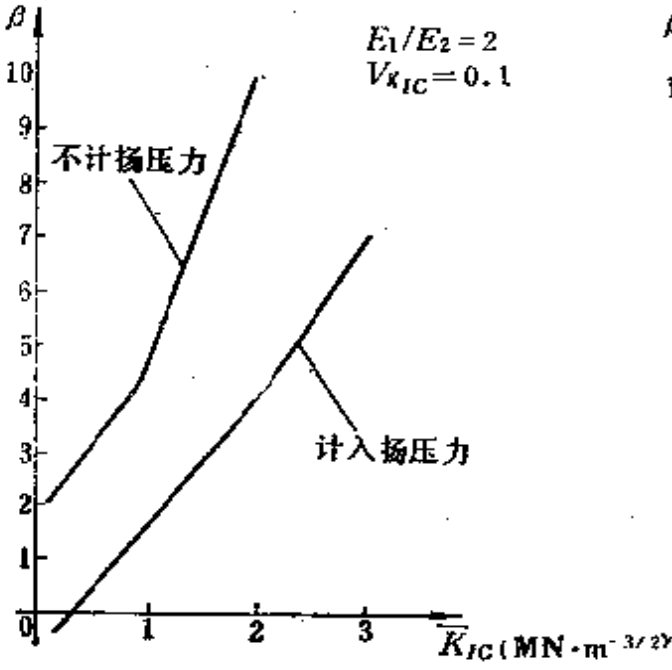


图 14-7 $\beta\sim K_{IC}$关系图

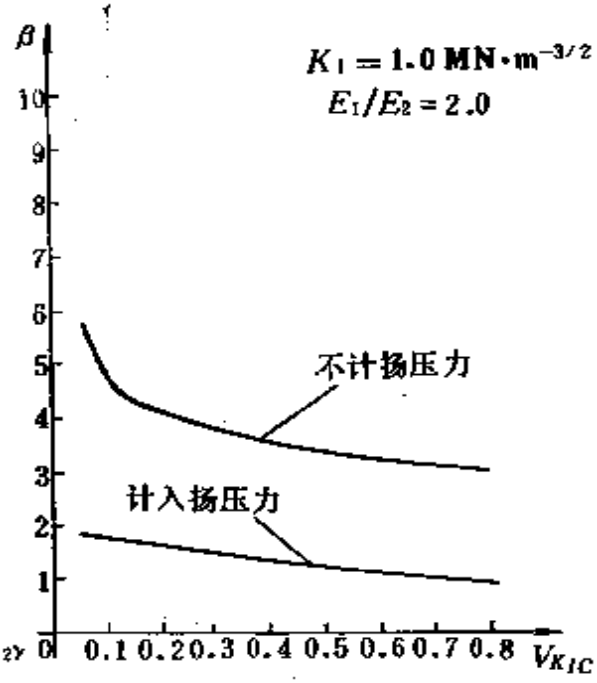


图 14-8 $\beta\sim V_{K_{IC}}$关系图

表14-8 K_{Ic}均值变化对裂缝稳定可靠指标的影响

K_{IC}	不计扬压力		计入扬压力	
$10^{-4}N\cdot m^{-3}/_2$	P_f	β	P_f	β
200	0.0	10.0	2.19×10^{-5}	4.086
150	7.05×10^{-14}	7.394	1.96×10^{-3}	2.885
100	2.33×10^{-6}	4.579	3.81×10^{-2}	1.774
80	6.01×10^{-5}	3.846	0.101	1.276
60	2.17×10^{-4}	3.518	0.215	0.789
40	2.51×10^{-3}	2.805	0.385	0.292
20	1.02×10^{-2}	2.318	0.593	−0.235
10	2.09×10^{-2}	2.035	0.690	−0.495

注：计算中 $V_{K_{IC}}=0.1$

10.0和—0.5至4.09范围内的变化（参见表14-8），这是个相当大的变化范围。又从图中曲线斜率较大亦可得知：K_{Ic}的均值变化对裂缝稳定有很大影响。而从图14-8可见，K_{Ic}的方差变化对可靠指标的影响则相对小得多，当K_{Ic}的变异系数由0.2变至0.8时，曲线十分平缓，可靠指标的最大差值为1.11（不计扬压力）和0.70（计入扬压力）（参见表14-9）。K_{Ic}的分布对可靠指标

表14-9 K_{Ic}变异系数变化对裂缝稳定可靠指标的影响

K_{IC}变异系数	不计扬压力		计入扬压	
V_{KIC}	P_f	β	P_f	β
0.05	2.68×10^{-9}	5.841	3.44×10^{-2}	1.820
0.10	2.33×10^{-6}	4.579	3.81×10^{-2}	1.774
0.20	1.90×10^{-5}	4.120	5.06×10^{-2}	1.639
0.30	5.69×10^{-5}	3.859	6.80×10^{-2}	1.491
0.35	9.77×10^{-5}	3.725	7.79×10^{-2}	1.419
0.40	1.57×10^{-4}	3.603	8.83×10^{-2}	1.351
0.50	3.34×10^{-4}	3.403	0.110	1.227
0.60	5.86×10^{-4}	3.246	0.132	1.117
0.70	9.11×10^{-4}	3.118	0.153	1.024
0.80	1.29×10^{-3}	3.013	0.174	0.938

注：计算中取$\bar{K}_{Ic}=10^6 N\cdot m^{-3/2}$

的影响也较小。由图14-9和14-10可见，当K_{Ic}分别取正态、对数正态和极值Ⅰ型分布时，所得可靠指标变化的三条曲线相距较近，最大差值小于1.0（参见表14-10和表14-11）。对变异系数大于0.2的情况，假设K_{Ic}为正态分布时所得可靠指标最小，计算结果偏于安全。

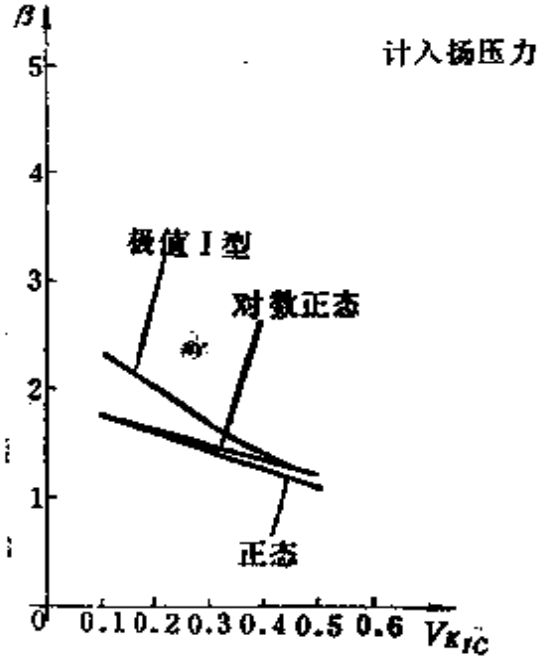


图 14-9 $\beta\sim K_{IC}$分布关系图
（计入扬压力）

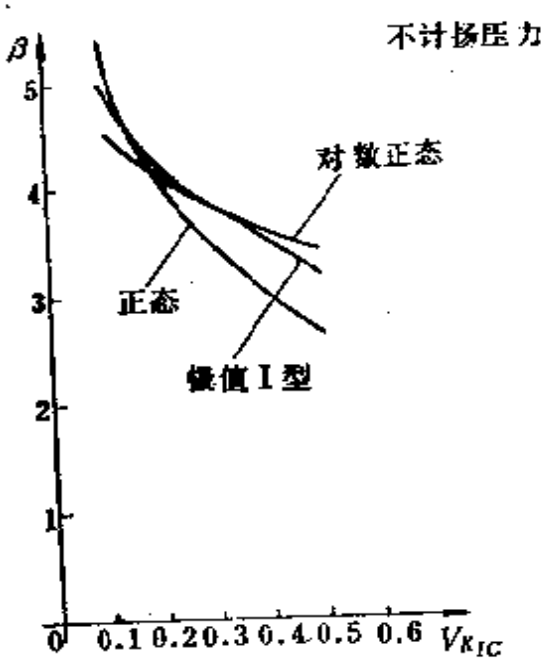


图 14-10 $\beta\sim K_{IC}$分布关系图
（不计入扬压力）

综上所述，K_{Ic}的均值是影响界面裂缝稳定可靠性的主要因素，而K_{Ic}的离散性及分布规律的影响相对次要。从已有混凝土的断裂韧度试验研究的成果看，K_{Ic}的均值具有尺寸效应，对重力坝这种大体积结构，K_{Ic}值如何尚未可知。从上述可靠度计算成果来看，若保证界面裂缝不沿界面继续扩展的可靠指标不小于3.0，对不计扬压力情形需$K_{Ic}\geqslant 5\times 10^{5}N\cdot m^{-3/2}$，对计入扬压力情形需$K_{Ic}\geqslant 1.6\times 10^{6}N\cdot m^{-3/2}$。

对坝踵界面裂缝的稳定来说，扬压力仍是一种不利因素，它无论在何种K_{Ic}的均值、变异系数和分布情况下，都大幅度地降低了裂缝的稳定可靠指标。因此，有效地控制扬压力将有助于提高坝踵界面裂缝的稳定可靠度。

表14-10 K_{Ic}分布变化对裂缝稳定可靠指标的影响

(不计扬压力)

变异系数	正态分布		对数正态分布		极值Ⅰ型分布	
$V_{K_{IC}}$	P_f	β	P_f	β	P_f	β
0.1	1.76×10^{-8}	5.513	2.33×10^{-6}	4.579	2.60×10^{-7}	5.109
0.2	1.75×10^{-4}	4.138	1.90×10^{-5}	4.120	1.62×10^{-5}	4.156
0.3	2.31×10^{-3}	3.502	5.69×10^{-3}	3.859	4.75×10^{-3}	3.903
0.4	1.24×10^{-2}	3.025	1.57×10^{-4}	3.603	1.96×10^{-4}	3.545
0.5	4.09×10^{-2}	2.644	3.34×10^{-4}	3.403	6.57×10^{-4}	3.213

注：计算中取$\overline{K}_{IC}=10^6 N\cdot m^{-3/2}$，$\alpha_E=2$

表14-11 K_{Ic}分布变化对裂缝稳定可靠指标的影响

(计入扬压力)

变异系数	正态分布		对数正态分布		极值Ⅰ型分布	
$V_{K\overline{IC}}$	P_f	β	P_f	β	P_f	β
0.1	4.01×10^{-2}	1.748	3.81×10^{-2}	1.774	9.41×10^{-3}	2.349
0.2	5.33×10^{-2}	1.614	5.06×10^{-2}	1.639	1.94×10^{-2}	2.067
0.3	7.41×10^{-2}	1.442	6.80×10^{-2}	1.491	4.45×10^{-2}	1.700
0.4	0.102	1.271	8.83×10^{-2}	1.351	7.93×10^{-2}	1.410
0.5	0.132	1.118	0.110	1.227	0.116	1.198

注：计算中取$\overline{K}_{IC}=10^6 N\cdot m^{-3/2}$，$\alpha=2$。

2.地基刚度对界面裂缝可靠指标的影响分析

对九组弹模比的可靠指标的计算表明：地基刚度对坝踵界面裂缝的稳定有很大影响，且其影响较为复杂。

图14-11示出了裂缝稳定可靠指标随 α_E 的变化情况。由图可知，当 $\lg\alpha_E$由－2变到＋2时，地基刚度由大变小，K_{Ic} 值由正值降为零，又变为负值，裂缝由拉剪型过渡到压剪型。图中$K_I=0$左边的区域内，$K_I>0$，$K_{II}\approx 0$，裂缝处于拉剪状态，极限状态方程取式（14-17）的第一式，此时，K_I增大时，可靠指标减小，而当K_I减小时，可靠指标增大。在 $K_I=0$ 右边的区域内，$K_I<0$,$K_{II}\approx 0$，裂缝处于压剪状态，极限状态方程取式（14-17）第二式，此时，可靠指标随K_I的下降而上升。在$K_I=0$处，可靠指标曲线是不连续的，拉剪状态与压剪状态求出的可靠指标

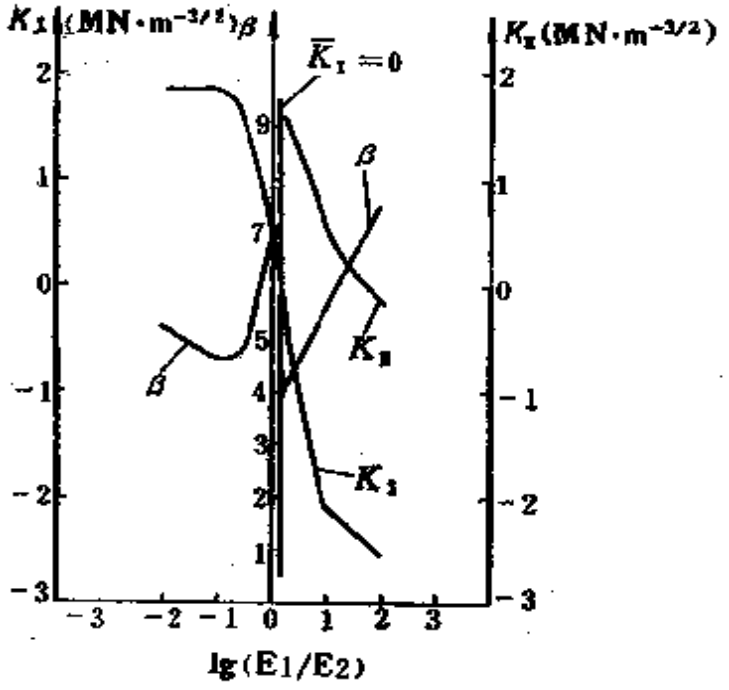


图 14-11 α_E变化时$\beta\sim K_I$、K_{II}关系图

在 $K_I=0$ 附近有较大差值。因此，对裂缝进行断裂可靠度计算时，区分裂缝是拉剪型或压剪型是十分重要的。计算表明：仅采用一种判据将得出错误的结果。

§14-6 主 要 结 论

通过前几节对重力坝稳定，应力和裂缝稳定可靠度的计算分析，可以得出如下结论：

(1) 对重力坝沿坝面的抗滑稳定可靠性来说，摩擦系数的均值和变异系数是重要的两个影响因素，而摩擦系数分布的变化对抗滑稳定可靠性的影响较小，且当分布难以确定时，假设 f 为正态分布将使计算结果偏于安全。因此，对具体坝址，应充分重视 f 的均值和变异系数的试验及统计工作，力求获得精确的数据，为重力坝的经济合理设计提供依据。

(2) 地基刚度对重力坝应力可靠度的影响是十分显著的，应给予充分重视。坝踵处的抗拉可靠度随地基刚度的减小而增大；坝趾处的抗压可靠度随地基刚度的减小而减小。因此，假设地基为刚性时计算出的坝趾处的抗压可靠指标偏大，按此结果设计偏于危险。

(3) 材料断裂韧度的均值是影响界面裂缝稳定的主要因素，而断裂韧度的变异系数及分布变化的影响则相对次要。对断裂可靠度分析来说，区分裂缝是拉剪型还是压剪型是十分重要的。地基刚度的变化影响缝端的应力场，从而影响裂缝的稳定可靠度。这一影响是显著的，因而不可忽视。

(4) 扬压力对重力坝的抗滑稳定可靠度、应力可靠度和界面裂缝的稳定可靠度来说均是一种不利因素，在各种条件下，扬压力都大幅度地降低了可靠指标的数值。因此，为提高和保证重力坝具有足够的体系可靠度，必须有效地控制扬压力。这与工程中的一贯做法是一致的。

(5) 计算表明：用特解边界元法结合蒙特卡罗边界法，可对结构作各种可靠度分析。该法具有较高的精度和很强的适用性，可以考虑各种复杂因素对结构可靠度的影响，从而也可加深我们对各种可靠度变化规律的认识。

参 考 文 献

1] 吴世伟. 重力坝可靠度校核方法的探讨，结构安全度与可靠度分析论文集，南京：河海大学出版社，1988

[2] 姚耀武. 重力坝实用剖面的稳定和应力可靠度分析. 重力坝的应力稳定可靠性. 北京中国科学技术出版社，1990

[3] 吴丽玲、姚耀武、刘国华. 坝基岩石弹模对重力坝应力、变形的影响. 重力坝的应力稳定与可靠性. 北京：中国科学技术出版社，1990

[4] 叶军、吴世伟. 蒙特卡罗方法在结构可靠分析中的应用. 河海大学学报，1988年第2期

[5] A.H- S. Ang and W. H. Tang. Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Vol, Ⅱ, 1984

[6] 董耀星、周鸿钧. 结构可靠度分析的蒙特卡罗边界法. 郑州工学院学报. 1989年第2期

[7] 吴世伟. 水工结构可靠度分析中几个问题的处理. 结构安全度与可靠度分析论文集. 南京：河海大学出版社，1988

[8] 徐道远等. 压剪复合应力强度因子及混凝土压剪断裂判据. 河海大学学报，1988年第1期

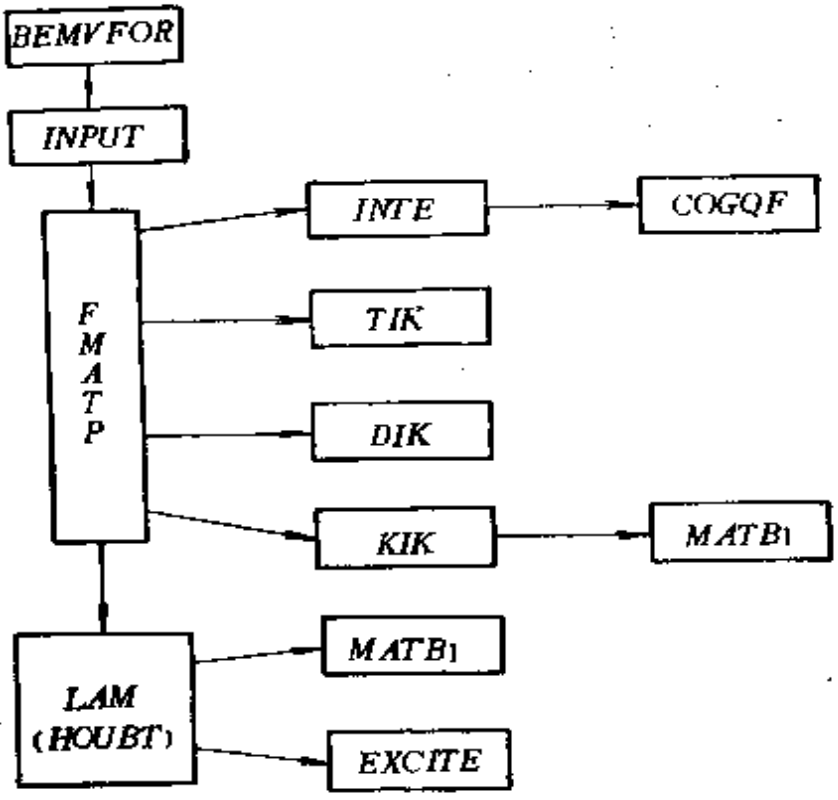
附录　动力特解边界元程序

1.程序（BEMV）功能

本程序采用第五章介绍的动力特解边界元理论编制而成，可以用来计算均质弹性体在瞬态荷载作用下的动力反应问题，其中振动仿真的方法可根据需要采用Wilson-θ法或Houbolt法。对于地震荷载作用下的动力反应计算以及多区域的耦合问题，均可在该程序基础上稍加修改而成。

2.程序框图

如附图1所示，只给出了粗框图。



附图 1

3.各程序段说明

(1) BEMVFOR：主程序，给初位移及初速度赋零值，并

调用子程序INPUT、FMATP及LAM(或HOUBT)。

(2) INPUT：输入数据子程序，包括两个数据文件：一个是输入数据文件DATA；一个是输出数据文件DATOUT。前者输入原始数据，后者将原始数据及自动生成部分以格式化形式输出。

(3) FMATP：调用子程序 INTE、TIK、DIK及KIK，形成总体系数矩阵 $[\bar{M}]$、$[\bar{H}]$、$[\bar{G}]$，并引入边界条件，形成易于求解的微分方程组：

$$[\bar{M}]\{\ddot{X}\}+[\bar{H}]\{X\}=[\bar{G}]\{\bar{t}\}$$

(4) INTE：形成单元系数矩阵 HIE(2,6)，GRE(2,6)，并求出HIP(2,2)，为求对角点元素作准备。

(5) COGQF：等精度高斯积分，按某一精度确定高斯积分点数。

(6) TIK：形成矩阵$[T]$。

(7) DIK：形成矩阵$[D]$。

(8) KIK：形成矩阵$[K]$，该子程序调用了$MATB1$。

(9) MATB1：实矩阵求逆。

(10) LAM：Wilson-θ法，将计算结果写入输出文件RUT中。

(11) HOUBT：Houbolt法，将计算结果写入输出文件RUT中。

(12) EXCITE：施加外部荷载，并求出右端列向量。

4.输入变量说明 (DATA建立方法)

(1) 卡片1 M，E，XNU，RO

M：团合边数；

E：弹性模量；

XNU：泊松比；

RO：质量密度。

(2) 卡片2 NC(1)，NC(2)，NC(3)，NC(4)，NC(5)

NC(1)～NC(5) 为团合边最大点号，若$M=1$只需读入

NC(1)，若M=2，则需读入 NC(1)，NC(2) 两个闭合边最大点号，余类推。

(3) 卡片3 KE1，KP1

KE1：可自动生成坐标的直线段数；

KP1：需读入的坐标点数。

(4) 卡片4 KE，N1，N2，X(N1)，Y(N1)，X(N2)，Y(N2) (共KE1张)

KE：可自动生成坐标的直线段序号；

N1：可自动生成坐标的直线段起始节点号；

N2：可自动生成坐标的直线段终了节点号；

X(N1)：可自动生成坐标的直线段起点x坐标；

Y(N1)：可自动生成坐标的直线段起点y坐标；

X(N2)：可自动生成坐标的直线段终点x坐标；

Y(N2)：可自动生成坐标的直线段终点y坐标。

(5) 卡片5 TSTART，TEND，H

TSTART：初始时刻；

TEND：终了时刻；

H：时间积分步长。

(6) 片卡6 KUV0

KUV0：约束点数；

(7) 卡片7 II，KODE(2*II-1)，KODE (2*II) (共KUV0张)；

II：约束点的节点号；

KODE(2*II-1)：约束点 II 的X方向约束类型，0或1，已知位移时为0，已知面力时为1；

KODE(2*II)：约束点II的Y方向约束类型，0或1，已知位移时为0，已知面力时为1。

5.输出文件说明

(1) DATOUT文件

该文件在INPUT程序段形成，包括如下四项内容：

1）9个简单变量：

N，NE，E，XNU，GE，RO，TSTART，TEND，H

其中，N为节点总数；NE为单元总数；GE为剪切模量；其余变量同前。

2）节点坐标：格式为

NODE	X	Y
节点号	x坐标	y坐标

3）单元信息：格式为

ELEMENT	I	J	K
单元号	点1号	点2号	点3号

4）节点类型：格式为

NODE	TYPE-X	TYPE-Y
节点号	x方向类型	y方向类型

(2) RUT文件

该文件为最终结果文件，在 LAM 或HOUBT中形成，如果主程序BEMVFOR调用 LAM，其内容为：

时刻t

输出列向量号，位移$u(t)$，速度$\dot{u}(t)$，加速度$\ddot{u}(t)$。

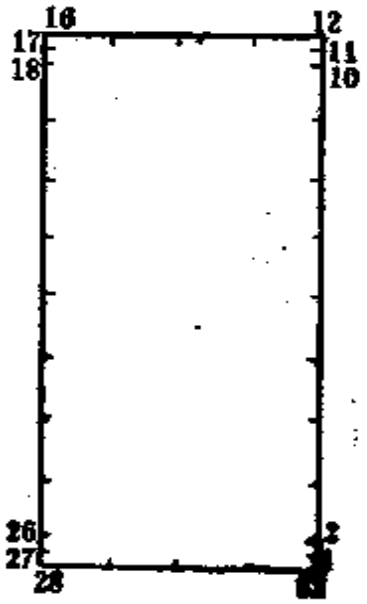
如果主程序调用HOUBT，其内容为：

时刻t

节点列向量号，位移u，右端列向量F，类型数组KODE。

6.程序使用实例

算例采用第五章中例3，节点划分如附图2所示。



附图 2

首先按照INPUT程序段要求，建立输入数据文件 DATA 如下（均为自由格式）：

```
1,1.005,0.25D0,1.0D0
32
4,4
1,2,10,2.0D0,0.001D0,2.0D0,3.999D0
2,12,16,2.0D0,4.0D0,0.0D0,4.0D0
3,18,26,0.0D0,3.999D0,0.0D0,0.001D0
4,28,32,0.0D0,0.0D0,2.0D0,0.0D0
1,2.0D0,0.0005D0
11,2.0D0,3.9995D0
17,0.0D0,3.9995D0
27,0.0D0,0.0005D0
0.0D0,0.304D0,0.004D0
5
28,0,0
29,0,0
30,0,0
31,0,0
32,0,0
```

然后即可运行，运行中将出现如下屏幕显示：

```
---------- INPUT ----------
---------- FMATP ----------
---------- INTE ----------
---------- TIK ----------
---------- DIK ----------
---------- KIK ----------
---------- MATB1 ----------
---------- INTE ----------
---------- LAM ----------
```

运行后结果写入文件DATOUT和RUT中，其中 DATOUT 为：

N= 32 NE= 16 E= 0.1000000D+06
XNU= 0.2500000D+00 GE= 0.4000000D+05 RO= 0.1000000D+01
TSTART= 0.0000000E+00 TEND= 0.3040000D+00 H= 0.4000000D-02

********** NODAL COORDINATES **********

NODE	X	Y
1	0.2000000D+01	0.5000000D-03
2	0.2000000D+01	0.1000000D-02
3	0.2000000D+01	0.5007500D+00
4	0.2000000D+01	0.1000500D+01
5	0.2000000D+01	0.1500250D+01
6	0.2000000D+01	0.2000000D+01
7	0.2000000D+01	0.2499750D+01
8	0.2000000D+01	0.2999500D+01
9	0.2000000D+01	0.3499250D+01
10	0.2000000D+01	0.3999000D+01
11	0.2000000D+01	0.3999500D+01
12	0.2000000D+01	0.4000000D+01
13	0.1500000D+01	0.4000000D+01
14	0.1000000D+01	0.4000000D+01
15	0.5000000D+00	0.4000000D+01
16	0.0000000E+00	0.4000000D+01
17	0.0000000E+00	0.3999500D+01
18	0.0000000E+00	0.3999000D+01
19	0.0000000E+00	0.3499250D+01
20	0.0000000E+00	0.2999500D+01
21	0.0000000E+00	0.2499750D+01
22	0.0000000E+00	0.2000000D+01
23	0.0000000E+00	0.1500250D+01
24	0.0000000E+00	0.1000500D+01
25	0.0000000E+00	0.5007500D+00
26	0.0000000E+00	0.1000000D-02
27	0.0000000E+00	0.5000000D-03
28	0.0000000E+00	0.0000000E+00
29	0.5000000D+00	0.0000000E+00
30	0.1000000D+01	0.0000000E+00
31	0.1500000D+01	0.0000000E+00
32	0.2000000D+01	0.0000000E+00

********** ELEMENT DEFINITIONS **********

ELEMENT	I	J	K

1	2	3	4
2	4	5	6
3	6	7	8
4	8	9	10
5	10	11	12
6	12	13	14
7	14	15	16
8	16	17	18
9	18	19	20
10	20	21	22
11	22	23	24
12	24	25	26
13	26	27	28
14	28	29	30
15	30	31	32
16	32	1	2

**********NODAL TYPE **********

NODE	TYPE-X	TYPE-Y
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	1	1
7	1	1
8	1	1
9	1	1
10	1	1
11	1	1
12	1	1
13	1	1
14	1	1
15	1	1
16	1	1
17	1	1
18	1	1
19	1	1
20	1	1
21	1	1
22	1	1
23	1	1
24	1	1
25	1	1
26		

27	1	1
28	0	0
29	0	0
30	0	0
31	0	0
32	0	0

文件RUT为：

```
T=0.0000E+00
    27   0.0000000E+00   0.0000000E+00   0.0000000E+00
T=0.4000D-02
    27   0.1706258D-05   0.1279693D-02   0.6398466D+00
T=0.8000D-02
    27   0.1186276D-04   0.3778295D-02   0.6094541D+00
T=0.1200D-01
    27   0.3171156D-04   0.6111104D-02   0.5569503D+00
T=0.1600D-01
    27   0.6012273D-04   0.7972267D-02   0.3736313D+00
T=0.2000D-01
    27   0.9131745D-04   0.6704244D-02  -0.1007643D+01
T=0.2400D-01
    27   0.1119711D-03   0.4097070D-02  -0.2959442D+00
T=0.2800D-01
    27   0.1287986D-03   0.5018330D-02   0.7565740D+00
T=0.3200D-01
    27   0.1511704D-03   0.5229025D-02  -0.6512265D+00
T=0.3600D-01
    27   0.1658202D-03   0.1831793D-02  -0.1047390D+01
T=0.4000D-01
    27   0.1688702D-03   0.7186526D-03   0.4908197D+00
T=0.4400D-01
    27   0.1762501D-03   0.3116032D-02   0.7078698D+00
T=0.4800D-01
    27   0.1911038D-03   0.3492453D-02  -0.5196590D+00
T=0.5200D-01
    27   0.2005542D-03   0.1142211D-02  -0.6554622D+00
T=0.5600D-01
    27   0.2038555D-03   0.1502462D-02   0.8355878D+00
T=0.6000D-01
    27   0.2156411D-03   0.4163147D-02   0.4947545D+00
T=0.6400D-01
    27   0.2300208D-03   0.1468937D-02  -0.1841859D+01
T=0.6800D-01
    27   0.2234702D-03  -0.4167073D-02  -0.9761460D+00
T=0.7200D-01
    27   0.2050152D-03  -0.3554883D-02   0.1282241D+01
T=0.7600D-01
    27   0.1963431D-03  -0.1958736D-02  -0.4841675D+00
T=0.8000D-01
    27   0.1801416D-03  -0.7265358D-02  -0.2169143D+01
T=0.8400D-01
    27   0.1404412D-03  -0.1090627D-01   0.3488853D+00
T=0.8800D+01
    27   0.1034904D-03  -0.6597898D-02   0.1805503D+01
T=0.9200D-01
```

```
    27   0.8449252D-04  -0.4663652D-02  -0.8383814D+00
T=0.9600D-01
    27   0.5674880D-04  -0.9803723D-02  -0.1731654D+01
T=0.1000D+00
    27   0.1293005D-04  -0.9793307D-02   0.1736862D+01
T=0.1040D+00
    27  -0.1124786D-04  -0.2020544D-02   0.2149520D+01
T=0.1080D+00
    27  -0.1369153D-04  -0.2090701D-02  -0.2184598D+01
T=0.1120D+00
    27  -0.3819958D-04  -0.9830442D-02  -0.1685272D+01
T=0.1160D+00
    27  -0.7879599D-04  -0.7415882D-02   0.2892553D+01
T=0.1200D+00
    27  -0.9081211D-04   0.3457367D-04   0.8326751D+00
T=0.1240D+00
    27  -0.9607615D-04  -0.5682532D-02  -0.3691228D+01
T=0.1280D+00
    27  -0.1389923D-03  -0.1343955D-01  -0.1872833D+00
T=0.1320D+00
    27  -0.1827476D-03  -0.5562847D-02   0.4125637D+01
T=0.1360D+00
    27  -0.1842548D-03   0.1744017D-02  -0.4722055D+00
T=0.1400D+00
    27  -0.1905134D-03  -0.7237568D-02  -0.4018587D+01
T=0.1440D+00
    27  -0.2347257D-03  -0.1064694D-01   0.2313899D+01
T=0.1480D+00
    27  -0.2513611D-03   0.4189600D-02   0.5104373D+01
T=0.1520D+00
    27  -0.2148789D-03   0.8773663D-02  -0.2812341D+01
T=0.1560D+00
    27  -0.2055935D-03  -0.4958564D-02  -0.4053772D+01
T=0.1600D+00
    27  -0.2335849D-03  -0.2968865D-02   0.5048622D+01
T=0.1640D+00
    27  -0.2084814D-03   0.1466812D-01   0.3769869D+01
T=0.1680D+00
    27  -0.1467034D-03   0.9457484D-02  -0.6375186D+01
T=0.1720D+00
    27  -0.1498207D-03  -0.8502554D-02  -0.2604833D+01
T=0.1760D+00
    27  -0.1771181D-03   0.1741691D-02   0.7726955D+01
T=0.1800D+00
    27  -0.1261693D-03   0.1927437D-01   0.1039383D+01
T=0.1840D+00
    27  -0.6728320D-04   0.3537031D-02  -0.8908052D+01
```

```
T=0.1880D+00
    27  -0.9735021D-04  -0.1180821D-01   0.1235432D+01
T=0.1920D+00
    27  -0.1106787D-03   0.1114921D-01   0.1024328D+02
T=0.1960D+00
    27  -0.2053445D-04   0.2482320D-01  -0.3406279D+01
T=0.2000D+00
    27   0.3344942D-04  -0.2345934D-02  -0.1017829D+02
T=0.2040D+00
    27  -0.1186102D-04  -0.8934385D-02   0.6884062D+01
T=0.2080D+00
    27   0.1574289D-04   0.2480358D-01   0.9984919D+01
T=0.2120D+00
    27   0.1406861D-03   0.2413041D-01  -0.1032150D+02
T=0.2160D+00
    27   0.1579521D-03  -0.1466836D-01  -0.9077886D+01
T=0.2200D+00
    27   0.8609984D-04  -0.6396672D-02   0.1321373D+02
T=0.2240D+00
    27   0.1474903D-03   0.3240874D-01   0.6188975D+01
T=0.2280D+00
    27   0.2639762D-03   0.1016902D-01  -0.1730883D+02
T=0.2320D+00
    27   0.2029281D-03  -0.3150647D-01  -0.3528910D+01
T=0.2360D+00
    27   0.1109712D-03   0.1103084D-02   0.1983369D+02
T=0.2400D+00
    27   0.2175170D-03   0.3803580D-01  -0.1367329D+01
T=0.2440D+00
    27   0.3027909D-03  -0.9381517D-02  -0.2234133D+02
T=0.2480D+00
    27   0.1647371D-03  -0.4009465D-01   0.6984783D+01
T=0.2520D+00
    27   0.1039334D-03   0.2061699D-01   0.2337105D+02
T=0.2560D+00
    27   0.2739837D-03   0.3956166D-01  -0.1389872D+02
T=0.2600D+00
    27   0.2959493D-03  -0.3485165D-01  -0.2330793D+02
T=0.2640D+00
    27   0.8791163D-04  -0.3970911D-01   0.2087920D+02
T=0.2680D+00
    27   0.9490359D-04   0.4290379D-01   0.2042725D+02
T=0.2720D+00
    27   0.2968838D-03   0.2482306D-01  -0.2946762D+02
T=0.2760D+00
    27   0.1946937D-03  -0.6735342D-01  -0.1662062D+02
T=0.2800D+00
```

```
    27  -0.6538970D-04  -0.2711450D-01   0.3674006D+02
T=0.2840D+00
    27   0.4665095D-04   0.6477933D-01   0.9206835D+01
T=0.2880D+00
    27   0.2375294D-03  -0.4813488D-02  -0.4400324D+02
T=0.2920D+00
    27  -0.1477628D-04  -0.9159580D-01   0.6120875D+00
T=0.2960D+00
    27  -0.2449193D-03   0.9360151D-02   0.4986589D+02
T=0.3000D+00
    27   0.2483734D-04   0.8386541D-01  -0.1261326D+02
T=0.3040D+00
    27   0.1524568D-03  -0 4678967D-01  -0.5271428D+02
```

计算机源程序清单(见下页)：

```
      PROGRAM BEMVFOR
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/ONE/N,NE,GE,XNU,RO
      COMMON/XKK/XK(10000)
      COMMON/XMK/XM(10000)
      COMMON/XFK/XF(10000)
      COMMON/TWO/A(10000)
      DIMENSION X(150),Y(150),KODE(300),NO(300),U(300),UD(300)
      WRITE(*,100)
100   FORMAT(1X,'----------INPUT----------')
      CALL INPUT(X,Y,KODE,NO,TSTART,TEND,H)
      NN=2*N
      WRITE(*,200)
200   FORMAT(1X,'----------FMATP----------')
      CALL FMATP(X,Y,KODE,NO)
      WRITE(*,300)
300   FORMAT(1X,'----------LAM----------')
      DO 10 I=1,NN
      U(I)=0.0
      UD(I)=0.0
10    CONTINUE
      CALL LAM(U,UD,NN,H,TSTART,TEND,KODE)
C     CALL HOUBT(U,NN,H,TSTART,TEND,KODE)
      STOP
      END
C
C
C---------- INPUT----------
C
C
      SUBROUTINE INPUT(X,Y,KODE,NO,TSTART,TEND,H)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/ONE/N,NE,GE,XNU,RO
      DIMENSION X(150),Y(150),KODE(300),NO(300),NP(5),NC(5)
      OPEN(1,FILE='DATA',LIBRARY='ZTD',RECL=80,STATUS='OLD')
      OPEN(2,FILE='DATOUT',LIBRARY='ZTD',RECL=80,STATUS='NEW')
C
C     READ IN AND WRITE OUT DATA
C
      READ(1,*) M,E,XNU,RO
      READ(1,*)  (NC(I),I=1,M)
      N=NC(M)
      READ(1,*) KE1,KP1
      DO 10 I=1,KE1
      READ(1,*) KE,N1,N2,X(N1),Y(N1),X(N2),Y(N2)
      N3=N2-N1
      N4=N3-1
```

```
      DO 10 J=1,N4
      X(N1+J)=X(N1)+J*(X(N2)-X(N1))/N3
      Y(N1+J)=Y(N1)+J*(Y(N2)-Y(N1))/N3
10    CONTINUE
      DO 20 I=1,KP1
      READ(1,*) K,X(K),Y(K)
20    CONTINUE
      READ(1,*) TSTART,TEND,H
      READ(1,*) KUV0
      DO 30 I=1,N
      KODE(2*I-1)=1
      KODE(2*I)=1
30    CONTINUE
      DO 40 I=1,KUV0
      READ(1,*) II,KODE(2*II-1),KODE(2*II)
40    CONTINUE
      NP(1)=NC(1)/2
      IF(N.EQ.1) GOTO 45
      DO 43 I=2,N
43    NP(I)=(NC(I)-NC(I-1))/2
45    NE=0
      DO 47 I=1,N
47    NE=NE+NP(I)
      DO 50 I=1,NP(1)
      DO 50 K=1,3
      L1=3*(I-1)+K
      L2=2*(I-1)+K+1
      IF(L2.EQ.(NC(1)+1)) L2=1
      IF(L2.EQ.(NC(1)+2)) L2=2
      NO(L1)=L2
50    CONTINUE
      IF(N.EQ.1) GOTO 59
      NT=0
      DO 55 J=2,N
      NT=NT+NP(J-1)
      DO 55 I=1,NP(J)
      DO 55 K=1,3
      L1=3*(I+NT-1)+K
      L2=NC(J-1)+2*(I-1)+K+1
      IF(L2.EQ.(NC(J)+1)) L2=NC(J-1)+1
      IF(L2.EQ.(NC(J)+2)) L2=NC(J-1)+2
55    NO(L1)=L2
59    CONTINUE
      GE=0.5*E/(1.0+XNU)
      WRITE(2,2001) N,NE,E,XNU,GE,RO,TSTART,TEND,H
2001  FORMAT(/,4X,'N=',I4,6X,'NE=',I4,4X,
     *'E=',D15.7/4X,'XNU=',D15.7,4X,'GE=',D15.7,4X,'RO=',D15.7,
```

```
     */4X,'TSTART=',D15.7,4X,'TEND=',D15.7,4X,'H=',D15.7)
      WRITE(2,2002)
2002  FORMAT(//6X,'********** NODAL COORDINATES **********'/4X,
     *'NODE',25X,'X',25X,'Y'/)
      DO 60 I=1,N
60    WRITE(2,2003) I,X(I),Y(I)
2003  FORMAT(4X,I4,2D26.7)
      WRITE(2,2004)
2004  FORMAT(//6X,'********** ELEMENT DEFINITIONS **********'/4X,
     *'ELEMENT',14X,'I',15X,'J',15X,'K'/)
      DO 70 IE=1,NE
70    WRITE(2,2005) IE,NO(3*(IE-1)+1),NO(3*(IE-1)+2),NO(3*(IE-1)+3)
2005  FORMAT(4X,I4,I18,2I16)
      WRITE(2,2006)
2006  FORMAT(//6X,'**************NODAL TYPE ****************'/4X,
     *'NODE',20X,'TYPE-X',20X,'TYPE-Y'/)
      DO 80 I=1,N
80    WRITE(2,2007) I,KODE(2*I-1),KODE(2*I)
2007  FORMAT(4X,I4,2I26)
      CLOSE(1)
      CLOSE(2)
      RETURN
      END
C
C     SET UP GLOBAL MATRIXS
C
      SUBROUTINE FMATP(X,Y,KODE,NO)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/ONE/N,NE,GE,XMU,RO
      COMMON/XYE/XK(10000)
      COMMON/XME/XM(10000)
      COMMON/XFE/XF(10000)
      COMMON/TWO/A(10000)
      DIMENSION X(150),Y(150),KODE(300),NO(300)
      DIMENSION XIE(3),YIE(3),HIE1(2,6),GRE1(2,6),HIP1(2,2)
      NN=2*N
      DO 10 I=1,NN
      DO 10 J=1,NN
      KK=400*(J-1)+I
      A(KK)=0.0
      XK(KK)=0.0
      XF(KK)=0.0
10    XM(KK)=0.0
      WRITE(*,5001)
5001  FORMAT(1X,'----------INTE----------')
      DO 400 IP=1,N
      DO 400 IE=1,NE
```

```
      DO 305 I=1,3
      K1=3*(IE-1)+I
      K=NO(K1)
      XIE(I)=X(K)
305   YIE(I)=Y(K)
      DO 345 I=1,3
      K1=3*(IE-1)+I
      K=NO(K1)
      IF(IP-K) 320,310,320
310   KK=I
      GOTO 360
320   KK=0
345   CONTINUE
360   CONTINUE
      CALL INTE(X(IP),Y(IP),XIE,YIE,HIE1,GRE1,HIP1,KK)
      DO 370 I=1,2
      I1=2*(IP-1)+I
      DO 370 J=1,3
      K1=3*(IE-1)+J
      DO 370 K=1,2
      I2=2*(NO(K1)-1)+K
      I3=NN*(I2-1)+I1
      L=2*(J-1)+K
      A(I3)=A(I3)+GRE1(I,L)
      XM(I3)=XM(I3)+HIE1(I,L)
370   CONTINUE
      DO 380 I=1,2
      I1=2*(IP-1)+I
      DO 380 K=1,2
      I2=2*(IP-1)+K
      I3=NN*(I2-1)+I1
      XM(I3)=XM(I3)-HIP1(I,K)
380   CONTINUE
400   CONTINUE
      WRITE(*,1003)
1003  FORMAT(1X,'----------TIK----------')
      CALL TIK(X,Y,NO,CAPRCON)
      CAPR=CAPRCON
      DO 450 I=1,NN
      DO 450 J=1,NN
      DO 450 K=1,NN
      KKK=NN*(J-1)+I
      KK1=NN*(K-1)+I
      KK2=NN*(J-1)+K
450   XF(KKK)=XF(KKK)+A(KK1)*XK(KK2)
      WRITE(*,1004)
1004  FORMAT(1X,'----------DIK----------')
```

```
      CALL DIK(X,Y,CAPR)
      DO 500 I=1,NN
      DO 500 J=1,NN
      DO 500 K=1,NN
      KKK=NN*(J-1)+I
      KK1=NN*(K-1)+I
      KK2=NN*(J-1)+K
500   XF(KKK)=XF(KKK)-XM(KK1)*XK(KK2)
C
      WRITE(*,2001)
2001  FORMAT(1X,'----------KIK----------')
      CALL KIK(X,Y,CAPR)
      DO 560 I=1,NN
      DO 560 J=1,NN
      KK=NN*(J-1)+I
560   XM(KK)=0.0
      DO 600 I=1,NN
      DO 600 J=1,NN
      DO 600 K=1,NN
      KKK=NN*(J-1)+I
      KK1=NN*(K-1)+I
      KK2=NN*(J-1)+K
600   XM(KKK)=XM(KKK)+XF(KK1)*XK(KK2)
C
      DO 650 I=1,NN
      DO 650 J=1,NN
      KK=NN*(J-1)+I
      A(KK)=0.0
      XK(KK)=0.0
650   XF(KK)=0.0
      WRITE(*,5002)
5002  FORMAT(1X,'----------INTE----------')
      DO 1000 IP=1,N
      DO 1000 IE=1,NE
      DO 700 I=1,3
      K1=3*(IE-1)+I
      K=NO(K1)
      XIE(I)=X(K)
700   YIE(I)=Y(K)
      DO 705 I=1,3
      K1=3*(IE-1)+I
      K=NO(K1)
      IF(IP-K) 760,755,760
755   KK=I
      GOTO 709
760   KK=0
705   CONTINUE
```

```
709   CONTINUE
      CALL INTE(X(IP),Y(IP),XIE,YIE,HIE1,GRE1,HIP1,KK)
      DO 800 I=1,2
      I1=2*(IP-1)+I
      DO 800 J=1,3
      K1=3*(IE-1)+J
      DO 800 K=1,2
      I2=2*(ND(K1)-1)+K
      I3=NN*(I2-1)+I1
      L=2*(J-1)+K
      XF(I3)=XF(I3)+GRE1(I,L)
      XK(I3)=XK(I3)+HIE1(I,L)
800   CONTINUE
      DO 900 I=1,2
      I1=2*(IP-1)+I
      DO 900 K=1,2
      I2=2*(IP-1)+K
      I3=NN*(I2-1)+I1
      XK(I3)=XK(I3)-HIP1(I,K)
900   CONTINUE
1000  CONTINUE
C
CC    BOUNDARY CONDITION
C
      DO 2000 J=1,NN
      IF(KODE(J)) 1200,1100,1200
1100  DO 1150 I=1,NN
      KK=NN*(J-1)+I
      XK(KK)=0.0
      C=-XK(KK)
      XK(KK)=-XF(KK)
      XF(KK)=C
1150  CONTINUE
      GOTO 1500
1200  CONTINUE
1500  CONTINUE
2000  CONTINUE
      RETURN
      END
C
CCC
CCC
CCC   SET UP BOUNDARY ELEMENT MATRIXS
CCC
C
      SUBROUTINE INTE(XP,YP,XIE,YIE,HIE,GRE,HIP,KK)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
      COMMON/ONE/N,NE,GE,XNU,RO
      DIMENSION XGW(8,9),HIE(2,6),GRE(2,6),HIP(2,2)
      DIMENSION XIE(3),YIE(3),A(3),C(3),U(2,2),P(2,2)
      DIMENSION U2(2,2),V(2,2),ZI(6),ZME(6),AS(3),CS(3)
      SAVE XGW
      DATA XGW/0.000D0,-0.577350269ZD0,-0.774596669ZD0,-0.861136311 6D0,
     1 -0.906179845 9D0,-0.932469514ZD0,-0.949107912 3D0,-0.960289856 5D0,
     2  0.101228536 3D0, 0.577350269ZD0, 0.000000000 0D0,-0.339981043 6D0,
     3 -0.538469310 1D0,-0.661209386 5D0,-0.741531185 6D0,-0.796666477 4D0,
     4  0.222381034 5D0, 0.129484966ZD0, 0.774596669ZD0, 0.339981043 6D0,
     5  0.000000000 0D0,-0.238619186 1D0,-0.405845151 4D0,-0.525532409 9D0,
     6  0.313706645 9D0, 0.279705391 5D0, 0.171324492 4D0, 0.861136311 6D0,
     7  0.538469310 1D0, 0.238619186 1D0, 0.000000000 0D0,-0.183436425 5D0,
     8  0.362683783 4D0, 0.381830505 0D0, 0.360761573 1D0, 0.236926885 1D0,
     9  0.906179845 9D0, 0.661209386 5D0, 0.405845151 4D0, 0.183436425 5D0,
     A  0.362683783 4D0, 0.417959183 7D0, 0.467913934 6D0, 0.478628670 5D0,
     B  0.347854845 1D0, 0.932469514ZD0, 0.741531185 6D0, 0.525532409 9D0,
     C  0.313706645 9D0, 0.381830505 0D0, 0.467913934 6D0, 0.568888889 9D0,
     D  0.652145154 9D0, 0.555555555 6D0, 0.949107912 3D0, 0.796666477 4D0,
     E  0.222381034 5D0, 0.279705391 5D0, 0.360761573 1D0, 0.478628670 5D0,
     F  0.652145154 9D0, 0.888888888 9D0, 1.000000000 0D0, 0.960289856 5D0,
     G  0.101228536 3D0, 0.129484966ZD0, 0.171324492 4D0, 0.236926885 1D0,
     H  0.347854845 1D0, 0.555555555 6D0, 1.000000000 0D0, 2.000000000 0D0/
CDEBUG
      DO 100 I=1,2
      DO 100 J=1,6
      HIE(I,J)=0.0
100   GRE(I,J)=0.0
      EPS=1.0D-4
      CALL COGQF(MM,KK,EPS,XP,YP,XIE,YIE)
      DO 2000 I=1,MM
      SS=XGW(MM,I)
      II=9-MM
      JJ=II+I
      WW=XGW(II,JJ)
      A(1)=-SS*(1.0-SS)/2.0
      A(2)=1.0-SS*SS
      A(3)=SS*(1.0+SS)/2.0
      X=A(1)*XIE(1)+A(2)*XIE(2)+A(3)*XIE(3)
      Y=A(1)*YIE(1)+A(2)*YIE(2)+A(3)*YIE(3)
      C(1)=(2.0*SS-1.0)/2.0
      C(2)=-2.0*SS
      C(3)=(1.0+2.0*SS)/2.0
      DX=C(1)*XIE(1)+C(2)*XIE(2)+C(3)*XIE(3)
      DY=C(1)*YIE(1)+C(2)*YIE(2)+C(3)*YIE(3)
      VJ=DSQRT(DX*DX+DY*DY)
      ETA2=-DX/VJ
```

```
      ETA1=DY/VJ
      R=DSQRT((X-XP)*(X-XP)+(Y-YP)*(Y-YP))
      CU=1.0/(8.0*3.1415926535897793*(1.0-XNU)*GE)
      CP=1.0/(4.0*3.1415926535897793*(1.0-XNU))
      CC=1.0-2.0*XNU
      CD=1.0+2.0*XNU
      CL=3.0-4.0*XNU
      U(1,1)=CU*(CL*DLOG(1.0/R)+(X-XP)*(X-XP)/(R*R))
      U(1,2)=CU*(X-XP)*(Y-YP)/(R*R)
      U(2,1)=U(1,2)
      U(2,2)=CU*(CL*DLOG(1.0/R)+(Y-YP)*(Y-YP)/(R*R))
      IF(KK.LE.0) GOTO 500
      U2(1,1)=CU*(X-XP)*(X-XP)/(R*R)
      U2(1,2)=U(1,2)
      U2(2,1)=U(2,1)
      U2(2,2)=CU*(Y-YP)*(Y-YP)/(R*R)
500   CONTINUE
      R4=R*R*R*R
      R2=R*R
      X111=-CP*(CC*(X-XP)/R2+2.0*(X-XP)*(X-XP)*(X-XP)/R4)
      X121=-CP*(CC/R2+2.0*(X-XP)*(X-XP)/R4)*(Y-YP)
      X221=-CP*(CD*(X-XP)/R2-2.0*(X-XP)*(X-XP)*(X-XP)/R4)
      X112=-CP*(CD/R2-2.0*(Y-YP)*(Y-YP)/R4)*(Y-YP)
      X122=-CP*(CC*(X-XP)/R2+2.0*(Y-YP)*(Y-YP)*(X-XP)/R4)
      X222=-CP*(CC/R2+2.0*(Y-YP)*(Y-YP)/R4)*(Y-YP)
      P(1,1)=X111*ETA1+X121*ETA2
      P(1,2)=X121*ETA1+X221*ETA2
      P(2,1)=X112*ETA1+X122*ETA2
      P(2,2)=X122*ETA1+X222*ETA2
      DO 1000 I1=1,3
      IF(KK-I1) 1100,1200,1100
1200  T=0.0
      DO 1210 K1=1,2
      DO 1210 K2=1,2
1210  W(K1,K2)=U2(K1,K2)
      GOTO 1300
1100  T=1.0
      DO 1110 K1=1,2
      DO 1110 K2=1,2
1110  W(K1,K2)=U(K1,K2)
1300  CONTINUE
      DO 1000 I2=1,2
      DO 1000 I3=1,2
      IL=(I1-1)*2+I2
      HTE(I3,IL)=HTE(I3,IL)+P(I3,I2)*VJ*A(I1)*WT*T
      GRE(I3,IL)=GRE(I3,IL)+W(I3,I2)*VJ*A(I1)*WW
1000  CONTINUE
```

```
2000  CONTINUE
      IF(KK) 5000,5000,3000
3000  ZI(1)=0.0216340000
      ZI(2)=0.1295833900
      ZI(3)=0.3140204400
      ZI(4)=0.5386572100
      ZI(5)=0.7569153300
      ZI(6)=0.9226688500
      ZME(1)=0.2387636600
      ZME(2)=0.3082865700
      ZME(3)=0.2453174200
      ZME(4)=0.1420087500
      ZME(5)=0.0554546200
      ZME(6)=0.0101689600
      GOTO(3100,3200,3300),KK
3100  DO 3110 I=1,6
      ZI(I)=2.0*ZI(I)-1.0
3110  ZME(I)=ZME(I)*2.0
      GOTO 3500
3200  DO 3210 I=1,6
      ZME(I)=ZME(I)*2.0
3210  ZI(I)=ZI(I)
      GOTO 3500
3300  DO 3310 I=1,6
      ZI(I)=1.0-ZI(I)*2.0
3310  ZME(I)=ZME(I)*2.0
3500  CONTINUE
      U11=0.0
      DO 4000 I=1,6
      SS=XGW(6,I)
      WW=XGW(3,I+3)
      A(1)=-SS*(1.0-SS)/2.0
      A(2)=1.0-SS*SS
      A(3)=SS*(SS+1.0)/2.0
      AS(1)=-ZI(I)*(1.0-ZI(I))/2.0
      AS(2)=1.0-ZI(I)*ZI(I)
      AS(3)=ZI(I)*(ZI(I)+1.0)/2.0
      X=A(1)*XIE(1)+A(2)*XIE(2)+A(3)*XIE(3)
      Y=A(1)*YIE(1)+A(2)*YIE(2)+A(3)*YIE(3)
      R=DSQRT((X-XP)*(X-XP)+(Y-YP)*(Y-YP))
      C(1)=(2.0*SS-1.0)/2.0
      C(2)=-2.0*SS
      C(3)=(1.0+2.0*SS)/2.0
      CS(1)=(2.0*ZI(I)-1.0)/2.0
      CS(2)=-2.0*ZI(I)
      CS(3)=(1.0+2.0*ZI(I))/2.0
      DX=C(1)*XIE(1)+C(2)*XIE(2)+C(3)*XIE(3)
```

```
      DY=C(1)*YIE(1)+C(2)*YIE(2)+C(3)*YIE(3)
      DXS=CS(1)*XIE(1)+CS(2)*XIE(2)+CS(3)*XIE(3)
      DYS=CS(1)*YIE(1)+CS(2)*YIE(2)+CS(3)*YIE(3)
      VJ=DSQRT(DX*DX+DY*DY)
      VJS=DSQRT(DXS*DXS+DYS*DYS)
      GOTO(3510,3520,3530),KK
3510  RW=(1.0+SS)/(2.0*R)
      GOTO 3600
3520  RW=DABS(SS)/R
      GOTO 3600
3530  RW=(1.0-SS)/(2.0*R)
3600  CONTINUE
      RL=DLOG(RW)
      U11=U11+CU*CL*(VJ*A(KK)*WW*RL+VJS*AS(KK)*ZME(I))
4000  CONTINUE
      L1=2*KK-1
      L2=2*KK
      GRE(1,L1)=GRE(1,L1)+U11
      GRE(2,L2)=GRE(2,L2)+U11
5000  CONTINUE
      HIP(1,1)=HIE(1,1)+HIE(1,3)+HIE(1,5)
      HIP(1,2)=HIE(1,2)+HIE(1,4)+HIE(1,6)
      HIP(2,1)=HIE(2,1)+HIE(2,3)+HIE(2,5)
      HIP(2,2)=HIE(2,2)+HIE(2,4)+HIE(2,6)
      RETURN
      END
C
CC
C     MATRIX  T
CC
C     PROGRAM TIK
      SUBROUTINE TIK(X,Y,NO,CAPR)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/ONE/N,NE,GE,XNU,RO
      COMMON/XKK/XK(10000)
      DIMENSION X(150),Y(150),NO(300),XKI(3),XIE(3),YIE(3)
      DIMENSION ETA(2),YY(2),C(3)
      SAVE XKI
      DATA XKI/-1.0,0.0,1.0/
      NN=2*N
      CAPR=0.0
      DO 200 I=1,N
      DO 200 J=1,N
      X1=X(I)-X(J)
      Y1=Y(I)-Y(J)
      R=DSQRT(X1*X1+Y1*Y1)
      IF(CAPR.LT.R) CAPR=R
```

```
200   CONTINUE
      C2=(1.0-2.0*XNU)/(6.0-8.0*XNU)
      C3=1.0/(30.0*(1.0-XNU))
      C4=(5.0*XNU-1.0)/(15.0*(1.0-XNU))
      C5=2.0*XNU/(3.0-4.0*XNU)
      C6=(4.0-5.0*XNU)/(15.0*(1.0-XNU))
      DO 1000 IP=1,N
      DO 1000 IE=1,NE
      DO 300 I=1,3
      K=NO(3*(IE-1)+I)
      XIE(I)=X(K)
300   YIE(I)=Y(K)
      DO 350 I=1,2
      K=NO(3*(IE-1)+I)
      C(1)=(2.0*XKI(I)-1.0)/2.0
      C(2)=-2.0*XKI(I)
      C(3)=(1.0+2.0*XKI(I))/2.0
      DX=C(1)*XIE(1)+C(2)*XIE(2)+C(3)*XIE(3)
      DY=C(1)*YIE(1)+C(2)*YIE(2)+C(3)*YIE(3)
      VJ=DSQRT(DX*DX+DY*DY)
      ETA(1)=DY/VJ
      ETA(2)=-DX/VJ
      YY(1)=X(K)-X(IP)
      YY(2)=Y(K)-Y(IP)
      R=DSQRT(YY(1)*YY(1)+YY(2)*YY(2))
      IF(R.EQ.0.0) R=1.0D-10
      CC1=C4*R-C5*CAPR
      CC2=C6*R-2.0*C2*CAPR
      CC3=2.0*C3/R
      CC4=YY(1)*ETA(1)+YY(2)*ETA(2)
      DO 310 L1=1,2
      I1=2*(IP-1)+L1
      DO 310 L2=1,2
      I2=2*(K-1)+L2
      I3=NN*(I1-1)+I2
      DELT=0.0
      IF(L1.EQ.L2) DELT=1.0
      XKI3=-RO*(CC1*YY(L1)*ETA(L2)+CC2*YY(L2)*ETA(L1)+
     1(CC2*DELT-CC3*YY(L1)*YY(L2))*CC4)
      XK(I3)=XKI3
310   CONTINUE
350   CONTINUE
1000  CONTINUE
      RETURN
      END
C
C
```

```
C     MATRIX  D
C
C
C     PROGRAM DIK
      SUBROUTINE DIK(X,Y,CAPR)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/ONE/N,NE,GE,XNU,RO
      COMMON/XKK/XK(10000)
      DIMENSION X(150),Y(150),YY(2)
      NN=2*N
      C1=(9.0-10.0*XNU)/(90.0*(1.0-XNU))
      C2=(1.0-2.0*XNU)/(6.0-8.0*XNU)
      C3=1.0/(30.0*(1.0-XNU))
      DO 100 I=1,N
      DO 100 J=1,N
      YY(1)=X(J)-X(I)
      YY(2)=Y(J)-Y(I)
      R=DSQRT(YY(1)*YY(1)+YY(2)*YY(2))
      DO 50 L1=1,2
      I1=2*(I-1)+L1
      DO 50 L2=1,2
      I2=2*(J-1)+L2
      I3=NN*(I2-1)+I1
      DELT=0.0
      IF(L1.EQ.L2) DELT=1.0
      XK(I3)=-RO*((C1*R-C2*CAPR)*DELT*R*R-C3*R*YY(L1)*YY(L2))/GE
50    CONTINUE
100   CONTINUE
      RETURN
      END
C
C
C     SET UP MATRIX  K
C
C     PROGRAM KIK
      SUBROUTINE KIK(X,Y,CAPR)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/ONE/N,NE,GE,XNU,RO
      COMMON/XKK/XK(10000)/XMK/XM(10000)
      DIMENSION X(150),Y(150)
      DO 200 I=1,N
      DO 200 J=1,N
      X1=X(J)-X(I)
      Y1=Y(J)-Y(I)
      R=DSQRT(X1*X1+Y1*Y1)
200   XM(N*(J-1)+I)=CAPR-R
      WRITE(*,1001)
1001  FORMAT(1X,'----------MATB1----------')
```

```
      CALL MATB1(N,ISW)
      IF(ISW.EQ.0) WRITE(*,250) ISW
250   FORMAT(1X,'ISW=',I10)
      NN=2*N
      DO 400 I=1,N
      DO 400 J=1,N
      KK=N*(J-1)+I
      DO 300 L1=1,2
      DO 300 L2=1,2
      K1=2*(I-1)+L1
      K2=2*(J-1)+L2
      K3=NN*(K2-1)+K1
      DELT=0.0
      IF(L1.EQ.L2) DELT=1.0
      XK(K3)=XM(KK)*DELT
300   CONTINUE
400   CONTINUE
      RETURN
      END
C
C     PROGRAM COGUF
C
      SUBROUTINE COGUF(M,IK,EPS,XP,YP,XIE,YIE)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION XIE(3),YIE(3),R(3)
CDEBUG
      R1=XIE(1)-XIE(3)
      R2=YIE(1)-YIE(3)
      A1=DSQRT(R1*R1+R2*R2)
      IF(IK.EQ.0) GOTO 10
      M=6
      GOTO 100
10    DO 20 I=1,3
      R1=XP-XIE(I)
      R2=YP-YIE(I)
      R1=R1*R1+R2*R2
20    R(I)=DSQRT(R1)
      RMIN=R(1)
      DO 60 I=2,3
      IF(R(I).LT.RMIN) RMIN=R(I)
60    CONTINUE
      M=6
      B1=0.25/RMIN
      R1=B1*A1
      DO 80 I=2,6
      R3=(R1**(2*I))*FLOAT(2*I+1)
      IF(R3.GT.EPS) GOTO 80
```

```
      M=I
      GOTO 100
   80 CONTINUE
  100 CONTINUE
      RETURN
      END
C
CC    PROGRAM MATB1
C
C
CC    INVERSE OF MATRIX
C
C
      SUBROUTINE MATB1(N,ISW)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/XMK/A(10000)
      DIMENSION L(200),B(200),C(200)
      EP=1.0D-25
      DO 5 K=1,N
    5 L(K)=K
      D=1.0
      DO 10 K=1,N
      KA1=K+1
      Y=A(N*(K-1)+K)
      JO=K
      IF(K.EQ.N) GOTO 13
      DO 15 J=KA1,N
      W=A(N*(J-1)+K)
      IF(DABS(W).LE.DABS(Y)) GOTO 15
      Y=W
      JO=J
   15 CONTINUE
   13 IF(DABS(Y).GE.EP) GOTO 20
      ISW=0
      RETURN
   20 D=D*Y
      Y=1.0/Y
      DO 25 I=1,N
      C(I)=A(N*(JO-1)+I)
      A(N*(JO-1)+I)=A(N*(K-1)+I)
      A(N*(K-1)+I)=-C(I)*Y
      LLL=N*(I-1)+K
      B(I)=A(LLL)*Y
   25 A(N*(I-1)+K)=B(I)
      A(N*(K-1)+K)=Y
      I=L(K)
      L(K)=L(JO)
```

```
      L(JO)=I
      DO 10 I=1,N
      IF(I.EQ.K) GOTO 10
      DO 30 J=1,N
      IF(J.EQ.K) GOTO 30
      A(N*(J-1)+I)=A(N*(J-1)+I)-C(I)*B(J)
30    CONTINUE
10    CONTINUE
      NS1=N-1
      DO 50 K=1,NS1
      IF(L(K).EQ.K) GOTO 50
      KA1=K+1
      DO 60 I=KA1,N
      IF(L(I).NE.K) GOTO 60
      DO 70 J=1,N
      W=A(N*(J-1)+I)
      A(N*(J-1)+I)=A(N*(J-1)+K)
70    A(N*(J-1)+K)=W
      L(I)=L(K)
      D=-D
      GOTO 50
60    CONTINUE
50    CONTINUE
      ISW=1
      RETURN
      END
C
C
C     WILSON-THITA METHOD
C
      SUBROUTINE LAM(U,UD,NN,H,TSTART,TEND,KODE)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/XKK/XK(10000)
      COMMON/XMK/XM(10000)
      COMMON/XFK/XF(10000)
      COMMON/TWO/A(10000)
      DIMENSION U(NN),UD(NN),KODE(NN),F(300),Q(300),R(300),U2D(300)
      DO 10 I=1,NN
      F(I)=0.0
      R(I)=F(I)
10    CONTINUE
      C1=H/2.0
      C2=H*H/6.0
      C3=H*H/3.0
      TH=1.50
      G=H*TH
      G2=G*G/6.0
```

```
      G3=G*G/3.0
      PP=1.0-1.0/TH
      QQ=1.0/TH
      DO 20 I=1,NN
      DO 20 J=1,NN
      NG=NN*(J-1)+I
      XM(NG)=XM(NG)+G2*XK(NG)
20    CONTINUE
      CALL MATB1(NN,ISW)
      IF(ISW.EQ.0) WRITE(*,1)ISW
1     FORMAT(1X,I10)
      LAST=(TEND-TSTART)/H+1.0
      OPEN(3,FILE='RUT',RECL=80,STATUS='NEW')
      DO 30 L=1,LAST
      T=TSTART+FLOAT(L-1)*H
      DO 40 I=1,NN
      U2D(I)=R(I)
40    CONTINUE
      T1=T+TH*H
      CALL EXCITE(F,T1,NN)
      WRITE(3,2001) T
2001  FORMAT(10X,'T=',D10.4)
      DO 60 I=1,NN
      IF(I.EQ.27) WRITE(3,2002) I,U(I),UD(I),U2D(I)
2002  FORMAT(10X,I6,3D16.7)
60    CONTINUE
      DO 80 I=1,NN
      Q(I)=U(I)+G*UD(I)+G3*U2D(I)
80    CONTINUE
      DO 90 I=1,NN
      R(I)=F(I)
      DO 90 J=1,NN
      NK=NN*(J-1)+I
      R(I)=R(I)-XM(NK)*Q(J)
90    CONTINUE
C
      DO 93 I=1,NN
93    Q(I)=0.0
      DO 95 I=1,NN
      DO 95 J=1,NN
      NK=NN*(J-1)+I
95    Q(I)=Q(I)+XM(NK)*R(J)
      DO 100 I=1,NN
      R(I)=Q(I)
100   CONTINUE
C
      DO 110 I=1,NN
```

```
      R(I)=U2D(I)*PP+R(I)*QQ
  110 CONTINUE
      DO 120 I=1,NN
      U(I)=U(I)+H*UD(I)+C3*U2D(I)+C2*R(I)
      UD(I)=UD(I)+C1*(U2D(I)+R(I))
  120 CONTINUE
   30 CONTINUE
      CLOSE(3)
      RETURN
      END
C
C     HOUBOLT METHOD
C
      SUBROUTINE HOUBT(U0,NN,H,TSTART,TEND,KODE)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/XKK/XK(10000)
      COMMON/XMK/XM(10000)
      COMMON/XFK/XF(10000)
      COMMON/TWO/A(10000)
      DIMENSION U0(NN),KODE(NN),F(300),U1(300),U2(300),X(300)
      DO 10 I=1,NN
      U1(I)=0.0
      U2(I)=0.0
   10 CONTINUE
      PP=H*H*0.5
      DO 20 I=1,NN
      DO 20 J=1,NN
      NG=NN*(J-1)+I
      A(NG)=XM(NG)
      XM(NG)=XM(NG)+PP*XK(NG)
   20 CONTINUE
      CALL MATB1(NN,ISW)
      IF(ISW.EQ.0) WRITE(*,1)ISW
    1 FORMAT(1X,I10)
      LAST=(TEND-TSTART)/H+1.0
      OPEN(3,FILE='RUT',RECL=80,STATUS='NEW')
      DO 100 L=1,LAST
      T=TSTART+FLOAT(L-1)*H
      CALL EXCITE(F,T,NN)
      WRITE(3,2001) T
 2001 FORMAT(1X,'T=',D10.4)
      DO 30 I=1,NN
      WRITE(3,2002) I,U0(I),F(I),KODE(I)
 2002 FORMAT(1X,I10,2D16.7,I10)
   30 CONTINUE
      DO 50 I=1,NN
      S=F(I)*PP
```

```
      DO 40 J=1,NN
      KK=NN*(J-1)+I
      S=S+A(KK)*(2.5*U0(J)-2.0*U1(J)+0.5*U2(J))
40    CONTINUE
      X(I)=S
50    CONTINUE
C
      DO 60 I=1,NN
60    F(I)=0.0
      DO 70 I=1,NN
      DO 70 J=1,NN
      KK=NN*(J-1)+I
70    F(I)=F(I)+XM(KK)*X(J)
C
      DO 80 I=1,NN
      X(I)=F(I)
80    CONTINUE
      DO 90 I=1,NN
      U2(I)=U1(I)
      U1(I)=U0(I)
      U0(I)=X(I)
90    CONTINUE
100   CONTINUE
      CLOSE(3)
      RETURN
      END
C
C-------------------------EXCITE-------------------------------------
C
      SUBROUTINE EXCITE(F,T,NN)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON/XFK/XF(10000)
      DIMENSION F(NN),UT(300)
      DO 10 I=1,NN
      UT(I)=0.0
10    CONTINUE
      DO 20 I=23,31,2
      IF(T.LE.0.01) UT(I)=100.0*T
      IF(T.GT.0.01.AND.T.LE.0.02) UT(I)=2.0-100.0*T
      IF(T.GT.0.02) UT(I)=0.0
20    CONTINUE
      DO 25 I=1,NN
      F(I)=0.0
25    CONTINUE
      DO 30 I=1,NN
      DO 30 J=1,NN
      K=NN*(J-1)+I
```