

3DMine 地质统计学帮助文档

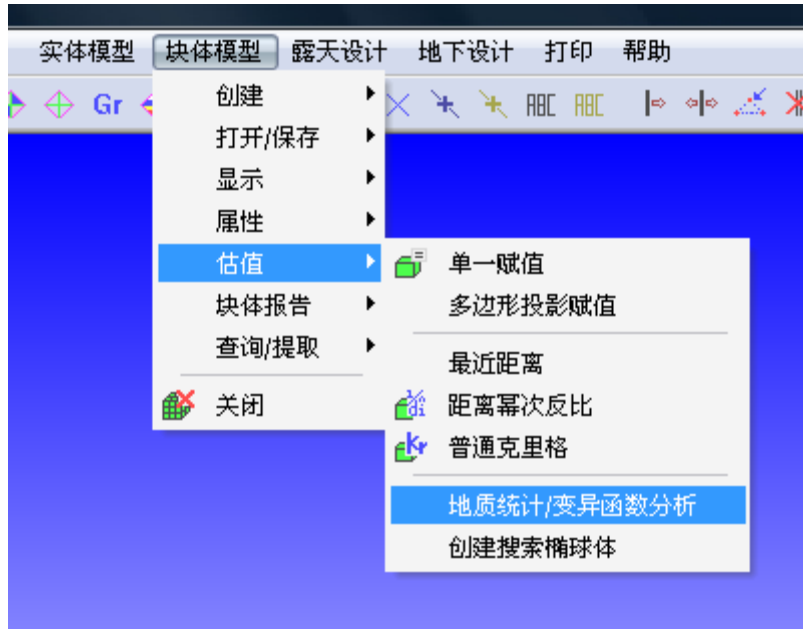
www.3dmine.com.cn

2009-2-20

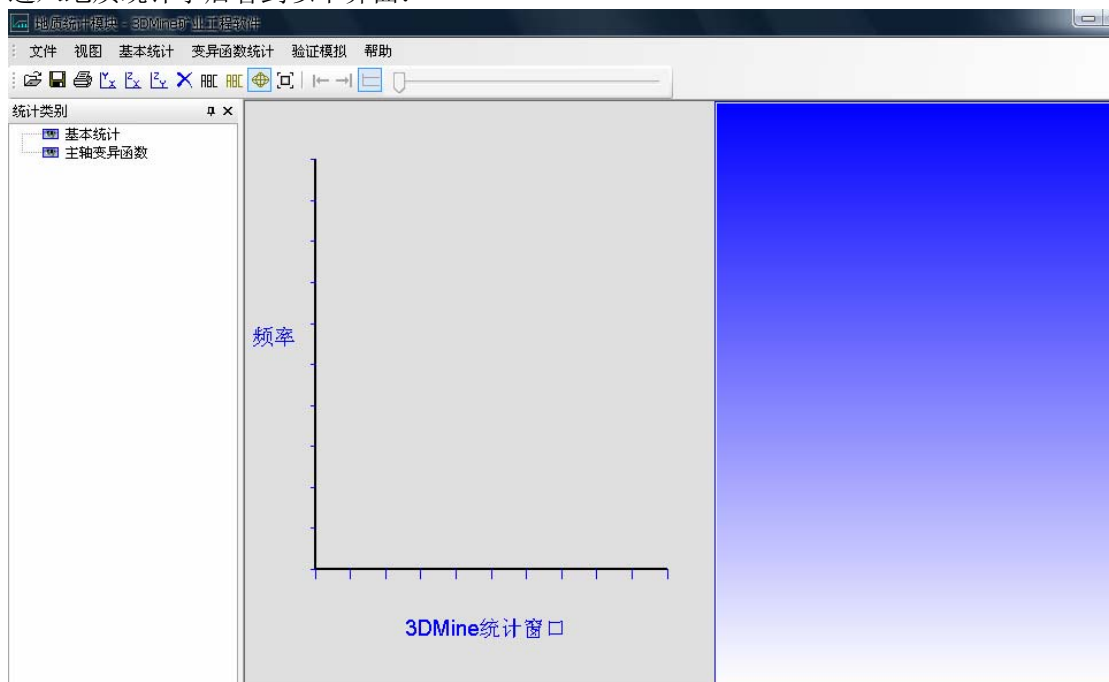
操作部分：

3Dmine 中的地质统计学是借助软件将数学与地质相结合的一套新理论，下面借助实例对地质统计学估值进行演示。

首先打开 3Dmine 下面的地质统计学界面，如图：

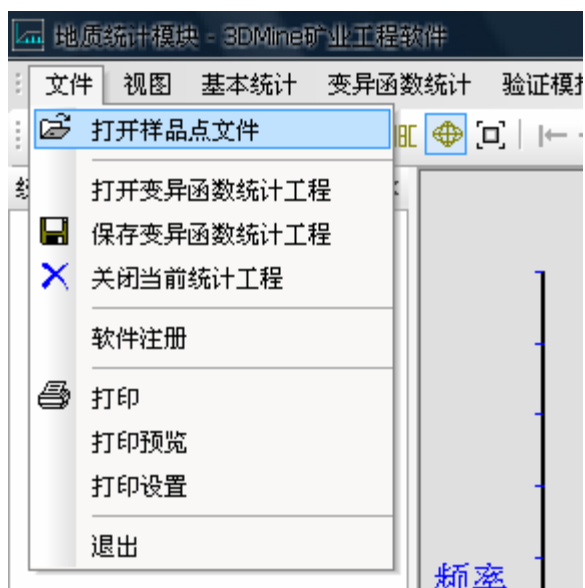


进入地质统计学后看到以下界面：

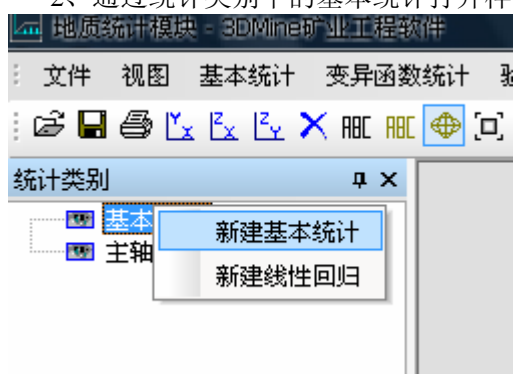


一、选择你所需要的样品点进行统计，有两种方法打开样品点文件：

- 1、通过屏幕左上角的文件直接打开样片点



2、通过统计类别中的基本统计打开样品文件

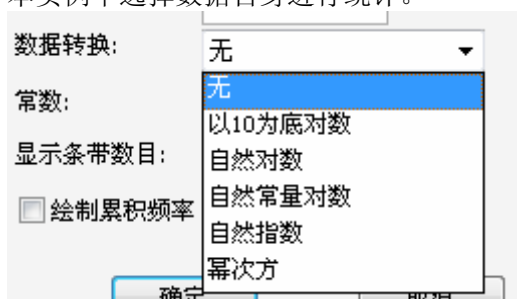


二、对打开样品进行基本统计。点击左边的基本统计中的新建基本统计，弹出以下对话框

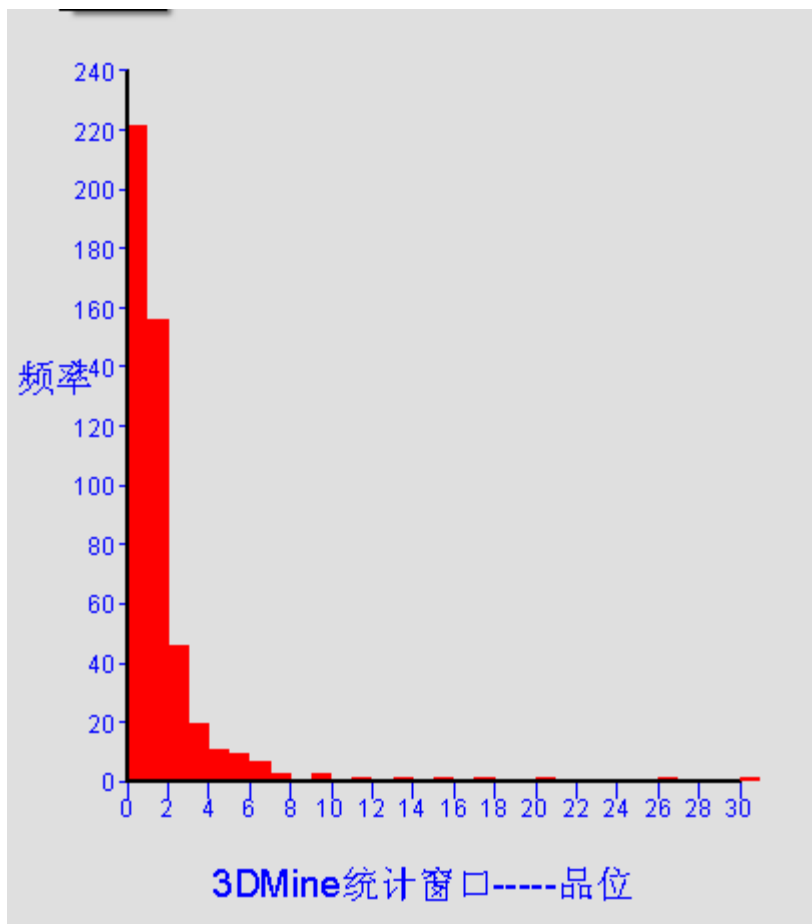


3DMine统计窗口

统计的属性：选择你要进行统计的属性，一般情况下为样品品味，最小值与最大值为默认值 0—9999。
 数据转换有以下几种转换形式，目的是容易观察出品味的变化情况，
 本实例中选择数据自身进行统计。



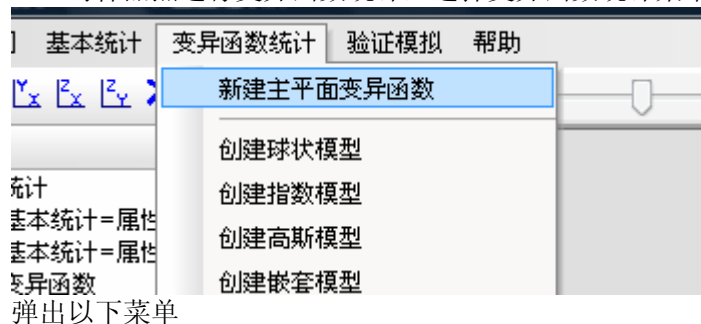
选择好您所要进行的统计属性及数据转换形式后点击确定，品味统计图如下，通过该图可以清楚的看到品位与与之间出现频率的关系，本实例中低品位的样品居多。



在地质统计学界面的统计信息中会出现基本统计所得出的结果：

统计信息			
统计属性:	属性1	数据转换:	无
有效样品数:	476		
最小值:	0.000		
最大值:	29.960		
平均值:	1.699		
中 值:	1.060		
方 差:	7.084		
标准差:	2.662		
变异系数:	1.566		

三、对样品点进行变异函数统计，选择变异函数统计菜单下的新建主平面变异函数。



变异函数方案

面参数

面方位角

200

面倾角

20

变异函数个数

16

搜索圆锥参数

展开角

45

展开界限

200

搜索距离

500

动态步距参数

最小步距

10

最大步距

100

滑块增量单位

1

样品参数

统计属性

属性1

最小值

0

最大值

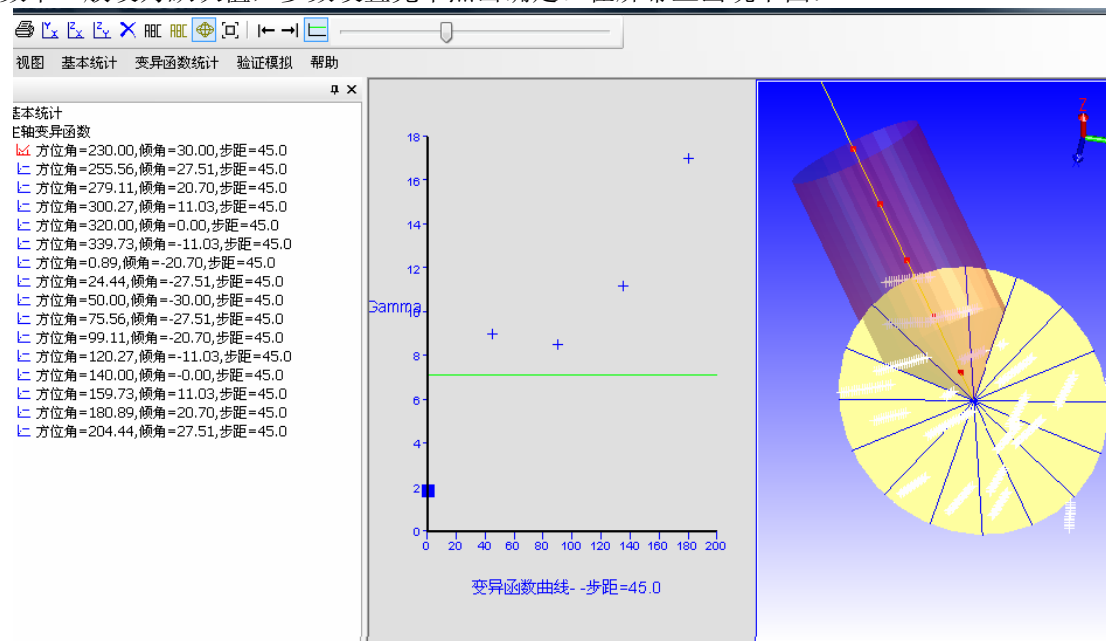
99999

确定

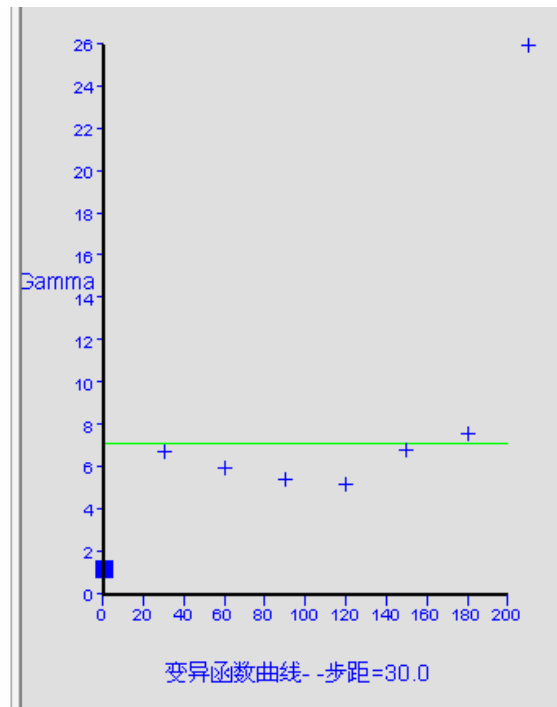
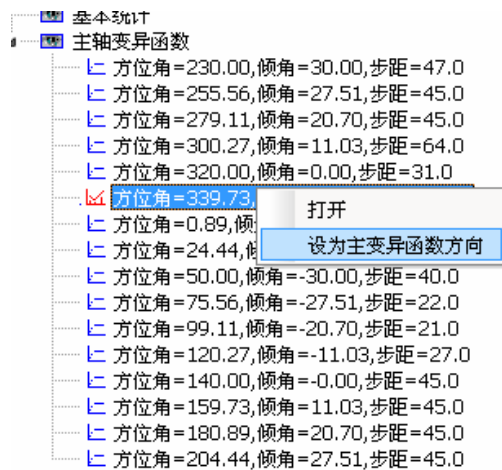
取消

预览

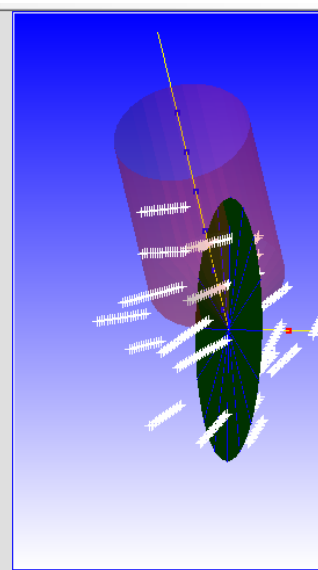
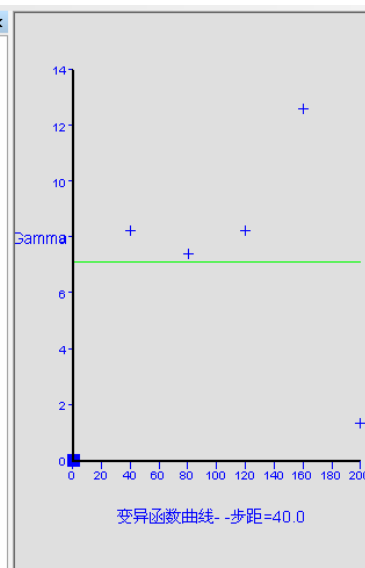
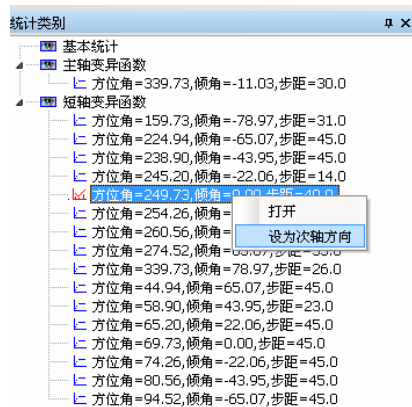
面方位角是指矿体的走向方向，面倾角指矿体的倾角，变异函数个数一般为默认，展开角是假想圆锥的顶角，展开界限为圆锥上部圆柱体的半径，搜索距离为样品品位所能影响的范围，动态步距参数中一般设为默认值，参数设置完毕点击确定。在屏幕上出现下图：



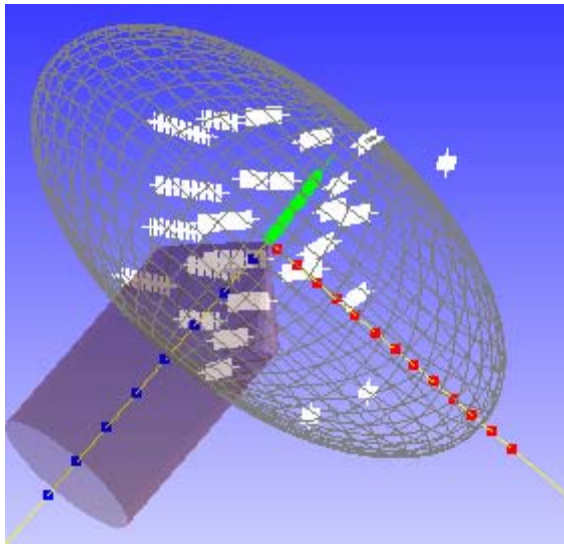
圆盘被分为 16 个扇区，每一个扇区的方向都进行统计，这样可以得出 Gamma 值最符合正态分布的一个方向，我们将此方向设为主变异函数，也就是搜索椭球体的长轴。由于样品在各个方向上的影响半径并不一样，所以我们要找出各个方向上的影响距离的比值，这就是我们所说的各向异性。至于 Gamma 值我们会在下面地质统计学的原理中介绍。选择 Gamma 值最符合正态分布的方向设为椭球体的长轴，然后同样的方法找到椭球体的次轴。



同样的方法寻找次轴:

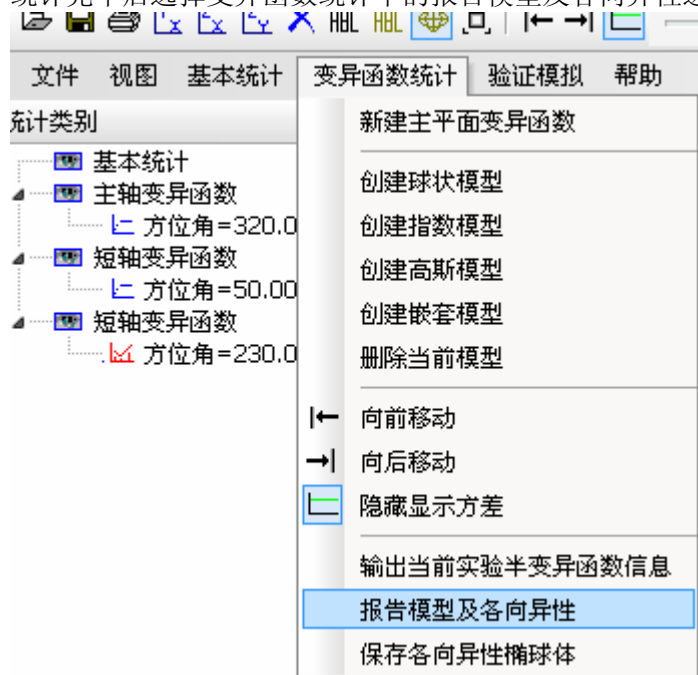


在椭球体次轴确定的同时，椭球体的最短轴方向也会被确定，下面再来确定椭球体的长轴与次轴及短轴的比值，这些要通过拟合函数模型来实现，拟合函数模型中通常用的两种是球型模型及指数模型，这两种原理在以后介绍，通过创建模型我们得到椭球体与其信息分别为：

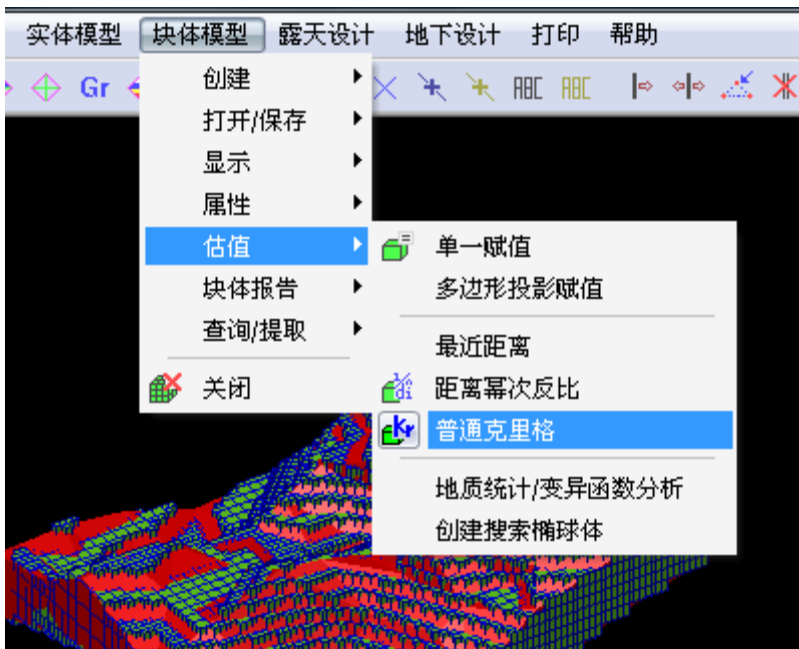


统计信息			
主轴变异函数	块金值=1.08		
球状模型	基台值= 4.69	变程=56.02	
指数模型	基台值=-0.00	变程=177.04	
搜索椭球体:方位角=339.730 主轴倾角=-11.030 次轴倾角=0.000			
几何各向异性系数: 主轴/次轴=1.855 主轴/短轴=1.761			

统计完毕后选择变异函数统计中的报告模型及各向异性进行保存。



关闭地质统计学界面回到 3Dmine 界面中，将矿体与块体模型打开，用普通克里格方法进行估值：



弹出如下对话框:



从左下角的导入参数中将刚才地质统计学中所完成的保存文件导入，点击确定:

搜索样品参数--第二步

搜索椭球体参数

最大搜索半径

400

椭球体方位角

320

主轴/次轴

1.86083

主轴倾角

0

主轴/短轴

1.66245

次轴倾角

-22.5

次分块估值

X:

3

Y:

3

Z:

3

样品参数

最少选择样品数

3

最多选择样品数

12

☐ 每孔最多选择样品数

5

孔号所在的字段

属性2

八分圆

☐ 使用八分区

有效分区最少数目

2

分区内最少样品数

1

分区内最多样品数

4

☐ 只考虑XY平面距离

☐ 显示椭球体

估值报告

估值报告

确定

取消

参数设置完毕继续点击确定：

块体约束引擎

约束类型

☒ 实体

☐ 表面

☐ 闭合线

☐ 块值

☐ 区域文件

参数

实体文件:

文件

☒ 内部:

添加约束 ->

清除约束 --

实体内部C:\3DMine2009.1\示例数据\练习数据2\矿体.3dm

☐ 保存到区域文件

确定

取消

点击确定，估值完成，估值信息如下：

长轴/次轴 = 1.86
长轴/短轴 = 1.66
搜索方位角 = 328.00
长轴倾角 = 0.00
次轴倾角 = -22.50

调试第一个块的估值结果

克里格矩阵:

5.904	5.695	5.485	5.277	5.068	4.861	4.655	4.451	4.248	4.047	3.848	3.651	1.000	1.353
5.695	5.904	5.694	5.485	5.276	5.068	4.861	4.655	4.451	4.248	4.047	3.848	1.000	1.236
5.485	5.694	5.904	5.695	5.485	5.276	5.068	4.861	4.655	4.451	4.248	4.047	1.000	1.121
5.277	5.485	5.695	5.904	5.694	5.485	5.276	5.068	4.861	4.655	4.451	4.248	1.000	1.010
5.068	5.276	5.485	5.694	5.904	5.694	5.485	5.276	5.068	4.861	4.655	4.451	1.000	0.903
4.861	5.068	5.276	5.485	5.694	5.904	5.695	5.485	5.277	5.068	4.861	4.655	1.000	0.800
4.655	4.861	5.068	5.276	5.485	5.695	5.904	5.694	5.485	5.276	5.068	4.861	1.000	0.702
4.451	4.655	4.861	5.068	5.276	5.485	5.694	5.904	5.695	5.485	5.276	5.068	1.000	0.609
4.248	4.451	4.655	4.861	5.068	5.277	5.485	5.695	5.904	5.694	5.485	5.276	1.000	0.521
4.047	4.248	4.451	4.655	4.861	5.068	5.276	5.485	5.694	5.904	5.694	5.485	1.000	0.440
3.848	4.047	4.248	4.451	4.655	4.861	5.068	5.276	5.485	5.694	5.904	5.695	1.000	0.364
3.651	3.848	4.047	4.248	4.451	4.655	4.861	5.068	5.276	5.485	5.695	5.904	1.000	0.295
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000

待估值点坐标 X=7927.500 Y=6502.500 Z=335.000

X	Y	Z	0U	各向异性距离	真实距离	权重
7954.139	6526.551	349.493	1.000	68.334	38.706	0.772523
7954.127	6528.440	350.148	0.860	70.751	40.142	-0.005555
7954.115	6528.228	350.000	0.276	72.107	41.625	-0.006270

块体模型中每一个块体已经被普通克里格法估值成功，可以进行储量计算。

理论部分：

地质统计学法 (Geostatistical Method)

地质统计学是 60 年代初期出现的一个新兴应用数学分支，其基本思想是由南非的 Danie Krige 在金矿的品位估算实践中提出来的，后来由法国的 Georges Matheron 经过数学加工，形成一套完整的理论体系。在过去的三十多年中，地质统计学不仅在理论上得到发展与完善，而且在实践中得到日益广泛的应用。如今，地质统计学在国际上除被用于矿床的品位估算外，也被用于其他领域中研究与位置有关的参数变化规律和参数估计。如农业中农作物的收成、环保中污染物的分布等等。本节将从矿床的品位估算的角度，简要介绍地质统计学的基本概念、原理和方法。

一、区域化变量、协变异函数与半变异函数

应用传统统计学（“传统”二字是相对于地质统计学而言的）可以对矿床的取样数据进行各种分析，并估计矿床的平均品位及其置信区间。在给定边界品位时，传统统计学也可用于初步估算矿石量和矿石平均品位。然而，传统统计学的分析计算均基于一个假设，即样品是从一个未知的样品空间随机选取的，而且是相互独立的。根据这一假设，样品在矿床中的空间位置是无关紧要的，从相隔上千米的矿床两端获取的两个样品与从相隔几米的两点获取的两个样品从理论上讲是没有区别的，它们都是一个样本空间的两个随机取样而已。

但是在实践中，相互独立性是几乎不存在的，钻孔的位置（即样品的选取）在绝大多数情况下也不是随机的。当两个样品在空间的距离很小时，样品间会存在较强的相似性，而当距离很大时，相似性就会减弱或不存在。也就是说，样品之间存在着某种联系，这种联系的强弱是与样品的相对位置有关的。这样就引出了“区域化变量”的概念。

（一）区域化变量及协变异函数：

如果以空间一点为中心获取一样品，样品的特征值 $X(z)$ 是该点的空间位置 z 的函数，那么变量 X 即为一区域化变量。

显然，矿床的品位是一个区域化变量，而控制这一区域化变量之变化规律的是地质构造和矿化作用。区域化变量的概念是整个地质统计学理论体系的核心，用于描述区域化变量变化规律的基本函数是 **协变异函数** 和 **半变异函数**。

设有两个随机变量 X_1 与 X_2 ，如果 X_1 与 X_2 之间存在某种相关性，那么从传统统计学可知，这种相关关系由 X_1 与 X_2 的协方差 $\sigma(x_1, x_2)$ 表示：

$$\sigma(x_1, x_2) = E[(x_1 - E(x_1))(x_2 - E(x_2))] \quad (1-39)$$

让 $\sigma_{x_1}^2$ 和 $\sigma_{x_2}^2$ 分别表示 X_1 和 X_2 的方差，则：

$$\sigma_{x_1}^2 = E[(x_1 - E(x_1))^2] \quad (1-40)$$

$$\sigma_{x_2}^2 = E[(x_2 - E(x_2))^2] \quad (1-41)$$

式中， $E[*]$ 表示随机变量 $[*]$ 的数学期望。

X_1 与 X_2 之间的相关系数为：

$$\rho_{x_1, x_2} = \frac{\sigma(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} \quad (1-42)$$

当 X_1 和 X_2 互相独立时，即二者之间不存在任何相关性时，协方差与相关系数均为零。当 X_1 和 X_2 “完全相关”时，相关系数为 1.0（或 -1.0）。

如果 X_1 和 X_2 不是一般的随机变量，而是区域化变量 X 在矿体 Ω 中的取值，即：

X_1 代表 $X(z)$: 区域化变量 X 在矿体 Ω 中 z 点的取值;
 X_2 代表 $X(z+h)$: 区域化变量 X 在矿体 Ω 中距 z 点 h 处的取值。

那么, 由式(1-39)可计算 $X(z)$ 与 $X(z+h)$ 在矿体 Ω 中的协方差:

$$\sigma_{(X(z), X(z+h))} = \sigma(h) \\ = E[(X(z) - E[X(z)])(X(z+h) - E[X(z+h)])] \quad (1-43)$$

$\sigma(h)$ 称为区域化变量 X 在 Ω 中的 **协变异函数**(Covariogram)。

让 σ_1^2 和 σ_2^2 分别表示 $X(z)$ 与 $X(z+h)$ 在矿体 Ω 中的方差,则:

$$\sigma_1^2 = E[(X(z) - E[X(z)])^2] \quad (1-44)$$

$$\sigma_2^2 = E[(X(z+h) - E[X(z+h)])^2] \quad (1-45)$$

那么 $X(z)$ 与 $X(z+h)$ 之间的相关系数为:

$$\rho(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (1-46)$$

$\rho(h)$ 称为区域化变量 X 在 Ω 中的 **相关函数**(Correlogram)。

对于任何矿床, 都可能计算出其协变异函数 $\sigma(h)$, 但在利用 $\sigma(h)$ 对矿床中单元体的品位进行估值时, 需满足二阶稳定性条件。

二阶稳定性条件](Second order stationarity conditions):

- ● $X(z)$ 的数学期望与空间位置 z 无关, 即对任意位置 z_0 :

$$E[X(z_0)] = \mu \quad (1-47)$$

- ● 协变异函数与空间位置无关只与距离 h 有关, 即对于任何位置 z_0 :

$$E[(X(z_0) - \mu)(X(z_0 + h) - \mu)] = \sigma(h) \quad (1-48)$$

当(1-48)成立时, $X(z)$ 与 $X(z+h)$ 的方差相等, 即: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 式(1-46)变为

$$\rho(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma^2} \quad (1-49)$$

(二) 半变异函数

用于描述区域化变量变化规律的另一个更具实用性的函数是 **半变异函数** (Semivariogram)。半变异函数的定义为:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[(X(z) - X(z+h))^2] \quad (1-50)$$

如果满足二阶稳定性条件, 半变异函数和协变异函数之间存在以下关系:

$$\gamma(h) = \sigma^2 - \sigma(h) \quad (1-51)$$

证明:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} E[(X(z) - \mu)^2] + \frac{1}{2} E[(X(z+h) - \mu)^2] - E[(X(z) - \mu)(X(z+h) - \mu)] \\
&= \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 - \sigma(h) \\
&= \sigma^2 - \sigma(h)
\end{aligned}$$

图 1-22 是关系式(1-51)的示意图。

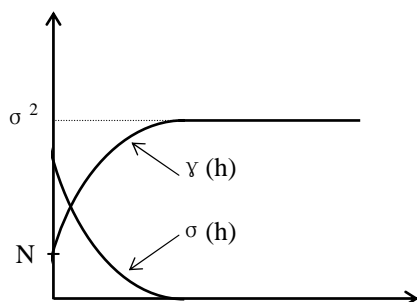


图 1-22 半变异函数与协变异函数的关系示意图

当 $h=0$ 时，点 z 和 $z+h$ 变为一点，区域化变量 X 的取值 $X(z)$ 与 $X(z+h)$ 应变为同一取值。从以上各式可以看出 $\sigma(0) = \sigma^2$ ， $\gamma(0) = 0$ 。实际上，在同一位置获得两个完全相同的样品是几乎不可能的。如果我们从紧挨着的两点($h=0$)取两个样品，由于取样过程中的误差和微观矿化作用的变化，两个样品不会完全相同；即使是把同一个样品化验两次，由于化验过程中的误差，化验结果也难以完全相同。因此，半变异函数在原点附近实际上不等于零，这种现象称为**块金效应**。块金效应的大小用块金值 N 表示：

$$N = \lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = \sigma^2 - \lim_{h \rightarrow 0} [\sigma(h)] \quad (1-52)$$

应用半变异函数进行参数估计时，需满足内蕴假设。

[内蕴假设](Intrinsic Hypothesis)

- ● 区域化变量 X 的增量的数学期望与位置无关，即对于区域 Ω 内的任意位置 z_0 ：

$$E[X(z_0) - X(z_0 + h)] = m(h) \quad (1-53)$$

- ● 半变异函数与位置无关，即对于区域 Ω 内的任意位置 z_0 ：

$$\frac{1}{2} E[(X(z_0) - X(z_0 + h))^2] = \gamma(h) \quad (1-54)$$

内蕴假设的内涵是：区域化变量的增量，在给定区域 Ω 内的所有位置上具有相同的概率分布。内蕴假设要求的条件要比二阶稳定性条件宽松得多，当满足后者时，前者自然得到满足。

二、实验半变异函数及其计算

象普通随机变量的概率分布特征值一样，半变异函数对任一给定矿床 Ω 是未知的，需要通过取样值对之进行估计。

设从矿床 Ω 中获得一组样品，相距 h 的样品对数为 $n(h)$ ，那么半变异函数 $\gamma(h)$ 可以用下式估计：

$$\gamma(h)=\frac{1}{2n(h)}\sum_{i=1}^{n(h)}[X(z_i)-X(z_i+h)]^2 \tag{1-55}$$

式中， $X(z_i)$ 是在 z_i 处的样品值， $X(z_i+h)$ 是在与 z_i 相距 h 处的样品值。由(1-55)计算的半变异函数称为**实验半变异函数**。下面举例说明实验半变异函数的计算过程。

[例 1-2]在一条直线上取得 10 个样品，其位置如图 1-23 所示，试计算实验半变异函数。

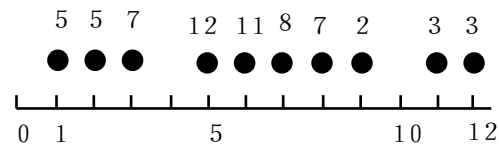


图 1-23 一维取样分布

表 1-3 基于图 1-23 中数据的半变异函数计算结果

间 距 h	1	2	3	4
样品对数 $n(h)$	7	6	6	6
$\gamma(h)$	2.857	8.167	15.667	18.917

表 1-4 $h=3$ 时 $\gamma(h)$ 的计算过程

样 品 对			
$x(z)$	$x(z+3)$	$x(z)-x(z+3)$	$(x(z)-x(z+3))^2$
5	12	-7	49
7	11	-4	16
12	7	5	25
11	2	9	81
7	3	4	16
2	3	-1	+ 1
$\gamma(3)=188/12=15.667$			188

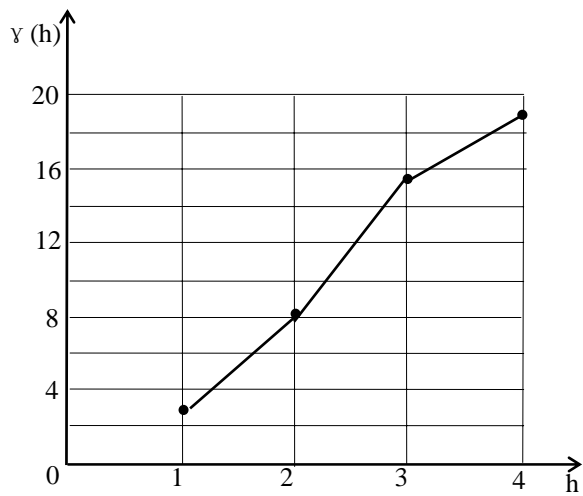


图 1-24 实验半变异函数

解：样品是一个离散集，因此我们只能对几个离散 h 值计算 $\gamma(h)$ 。应用公式(1-55)计算结果列于表 1-3 中。以 $h=3$ 为例，计算过程列于表 1-4 中。表 1-3 中的计算结果绘于图 1-24。

上例中样品落于一直线上，是一个在一维空间计算实验半变异函数的问题。在二维或三维空间，半变异函数是具有方向性的，即在不同的方向上，半变异函数可能不一样。下面是一个二维空间下求半变异函数的算例。

[例 1-3]如图 1-25 所示，在矿床的某一台阶取样 31 个，样品位于间距为 1 的规则网格点上，各样品的品位如图中的数字所示。试求在 4 个方向上的实验半变异函数。

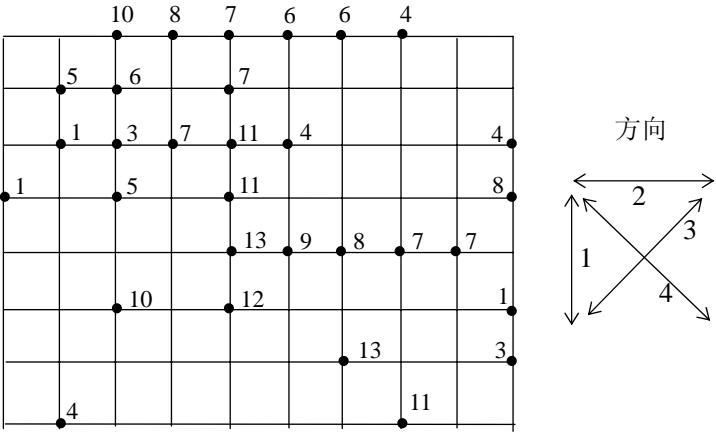


图 1-25 二维取样分布

解：在任一方向上计算过程与例 1-2 相同。只是在一给定方向上选取间距为 h 的样品对时，只能在该方向上选取。在方向 1 和 2 上的实验半变异函数计算结果列在表 1-5 中，在方向 3 和 4 上的计算结果列于表 1-6 中。

表 1-5 例 1-3 中在方向 1 和 2 上的实验半变异函数计算结果

方 向	$h = 1$		$h = 2$		$h = 3$	
	$n(h)$	$\gamma(h)$	$n(h)$	$\gamma(h)$	$n(h)$	$\gamma(h)$
1	11	3.91	12	9.00	8	11.06
2	14	4.07	14	7.64	9	15.22

表 1-6 例 1-3 中在方向 3 和 4 上的实验半变异函数计算结果

方 向	$h = \sqrt{2}$		$h = 2\sqrt{2}$		$h = 3\sqrt{2}$	
	$n(h)$	$\gamma(h)$	$n(h)$	$\gamma(h)$	$n(h)$	$\gamma(h)$
3	10	5.90	11	12.09	6	20.08
4	9	5.06	12	12.92	6	16.83

若将平面上所有方向上相距为 h 的样品对用于计算 $\gamma(h)$ ，得到的实验半变异函数称为该平面上的 **平均实验半变异函数**，例 1-3 中的平均实验半变异函数计算结果列于表 1-7。

表 1-7 例 1-3 中平均实验半变异函数计算结果

h	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	3	$3\sqrt{2}$
$n(h)$	25	19	26	23	17	12
$\gamma(h)$	4.00	5.50	8.27	12.52	13.26	18.46

所有 4 个方向上的实验半变异函数与平均半变异函数计算结果绘于图 1-26。

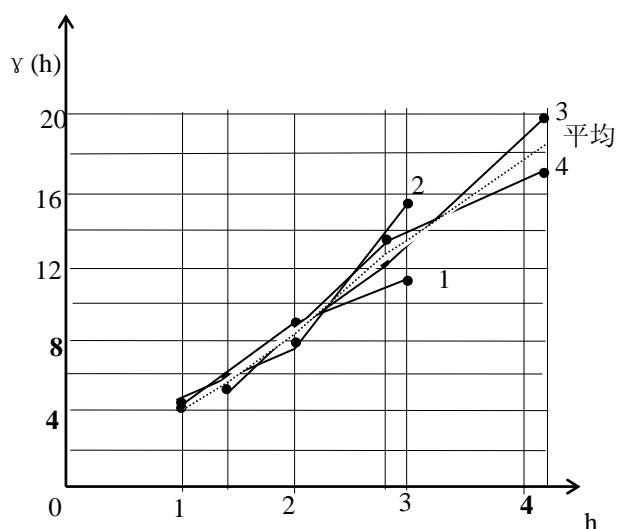


图 1-26 不同方向上的实验半变异函数

在实践中，样品在平面上的分布可能很不规则，不可能所有样品都位于规则的网格点上，样品间的距离也不会是一个基数的整数倍，而且往往需要计算任意方向的实验半变异函数。因此，恰好落在某一给定方向的方向线上和间距恰好等于某一给定 h 的样品对很少（或几乎不存在）。所以如图 1-27 所示，在计算实验半变异函数时，我们需要确定一个最大方向角偏差 $\Delta\alpha$ 和距离偏差 Δh ，如果一对样品 $X(z_i)$ 和 $X(z_j)$ 所在的位置所组成的向量 $Z_i \rightarrow Z_j$ 的方向落于 $\alpha - \Delta\alpha$ 和 $\alpha + \Delta\alpha$ 之间，那么就可以认为 $X(z_i)$ 和 $X(z_j)$ 是在方向 α 上的一个样品对；如果样品 $X(z_i)$ 和 $X(z_j)$ 之间的距离落于 $h - \Delta h$ 和 $h + \Delta h$ 之间，就可认为这两个样品是相距 h 的一个样品对。 $2\Delta\alpha$ 称为窗口(window)。在实际计算中，往往以 $2\Delta h$ 作为 h 的增量，以 Δh 作为最小 h 值（即偏移量Offset）。例如，当 $2\Delta h = 10$ 米时， h 取 5 米，15 米，25 米……。

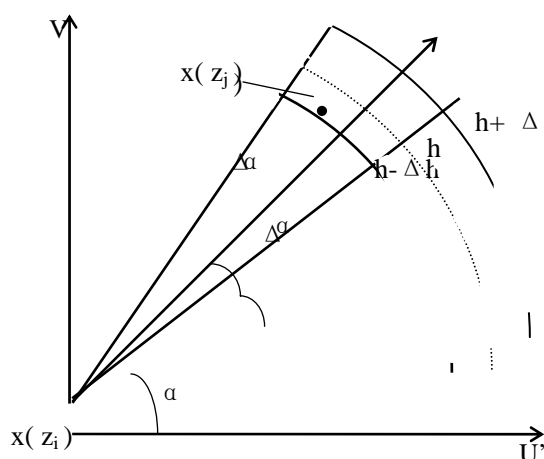


图 1-27 二维半变异函数的实用计算方法

在三维空间，图 1-27 中的扇形变为图 1-28 中的锥体，空间的某一方向由方位角 ϕ 与倾角 ψ 表示。另外，在三维空间，一个样品不是一个二维点，而是具有一定长度的三维体，所以在计算半变异函数前，需要将样品进行组合处理，形成等长度的组合样品。在实验半变异函数的实际计算中，首先要对所有样品对进行矢量运算，找出落于方向与间距最大偏差范围内的样品对，然后对这些样品对应用公式(1-55)进行计算，获得半变异函数 $\gamma(h)$ 曲线上的一个点。需要说明的是，距离 h 是所有这些样品对的平均距离。

三、半变异函数的数学模型

实验半变异函数由一组离散点组成，在实际应用时很不方便。因此常常将实验半变异函数拟合为一个可以用数学解析式表达的数学模型。常见的半变异函数的数学模型有以下几种：

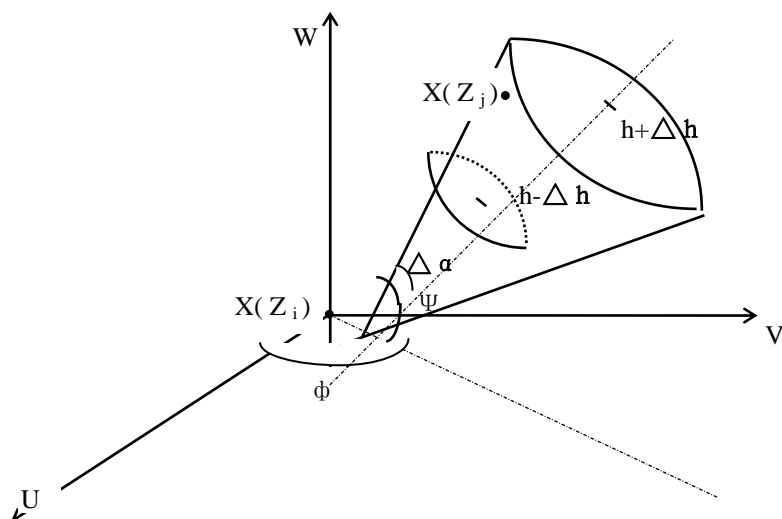


图 1-28 三维半变异函数的实用计算方法

(一) 球状模型(Spherical Model)

实验半变异函数在大多数情况下可以拟合成球状模型。因此，球状模型是应用最广的一种半变异函数模型，其数学表达式为：

$$\gamma(h) = \begin{cases} C(\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3}) & h \leq a \\ C & h > a \end{cases} \quad (1-56)$$

式中， C 称为**槛值**或**台基值**(sill)，一般情况下可以认为 $C = \sigma^2$ (σ^2 为样品的方差)， a 称为**变程**(range)。

图 1-29 是球状模型的图示。从图中可以看出， $\gamma(h)$ 随 h 的增加而增加，当 h 达到变程时， $\gamma(h)$ 达到槛值 C ；之后 $\gamma(h)$ 便保持常值 C 。这种特征的物理意义是：当样品之间的距离小于

变程时，样品是相互关联的，关联程度随间距的增加而减小，或者说，变异程度随间距的增加而增大；当间距达到一定值时，样品之间的关联性消失，变为完全随机，这时 $\gamma(h)$ 即为样品的方差。因此，变程实际上代表样品的影响范围。

（二）随机模型(Random Model)

当区域化变量 X 的取值是完全随机的，即样品之间的协方差 $\sigma(h)$ 对于所有 h 都等于 0 时，半变异函数是一常量：

$$\gamma(h) = C \quad (1-57)$$

这一模型称为随机模型，其图示为一水平直线（图 1-30）。随机模型表明样品之间互不相关。随机模型有时也被称为 **纯块金效应模型**(Pure nugget effect model)。

（三）指数模型(Exponential Model)

指数模型的数学表达式为：

$$\gamma(h) = C(1 - e^{-h/a}) \quad (1-58)$$

指数模型的特征与球状模型相似（图 1-31），变异速率较小。式(1-58)中的 a 是原点处的切线达到 C 时的 h 值。

（四）高斯模型(Gaussian Model)

高斯模型的数学表达式为：

$$\gamma(h) = C(1 - e^{-h^2/a^2}) \quad (1-59)$$

如图 1-32 所示，高斯模型在原点的切线为水平线，表明 $\gamma(h)$ 在短距离内变异很小。

（五）线性模型(Linear Model)

线性模型的数学表达式为一线性方程，即：

$$\gamma(h) = (P^2/2)h \quad (1-60)$$

式中， P^2 为一常量，且

$$P^2 = E[(X(Z_{i+1}) - X(Z_i))^2] \quad (1-61)$$

如图 1-33 所示，线性模型没有槛值， $\gamma(h)$ 随 h 无限增加。

（六）对数模型(Logarithmic Model)

对数模型的表达式为：

$$\gamma(h) = 3\alpha \log_e h \quad (1-62)$$

式中， α 为常量。当 h 取对数坐标时，对数模型为一条直线（图 1-34）。对数模型没有槛值。当 $h < 1$ 时， $\gamma(h)$ 为负数，由半变异函数的定义（式 1-55）可知 $\gamma(h)$ 不可能为负数。所以对数模型不能用于描述 $h < 1$ 时的区域化变量特性。

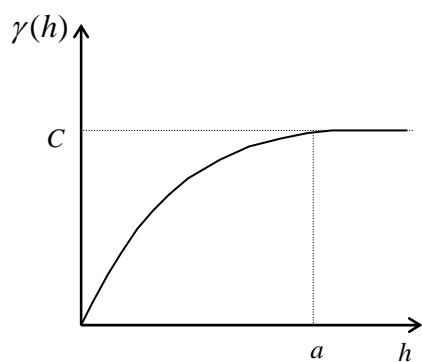


图 1-29 球状模型示意图

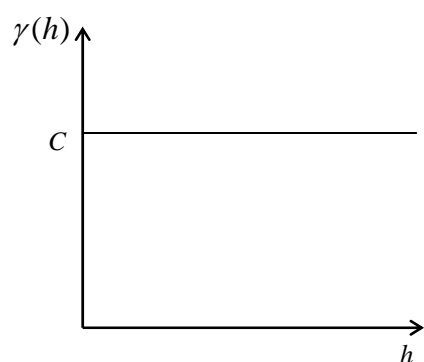


图 1-30 随机模型

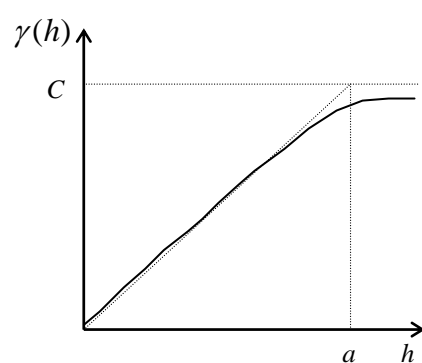


图 1-31 指数模型

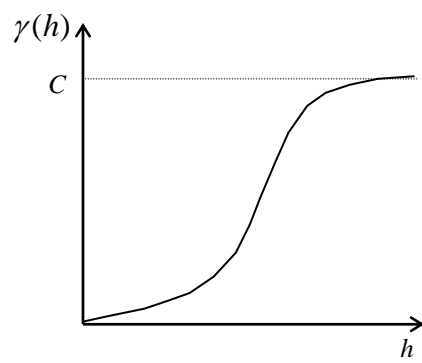


图 1-32 高斯模型

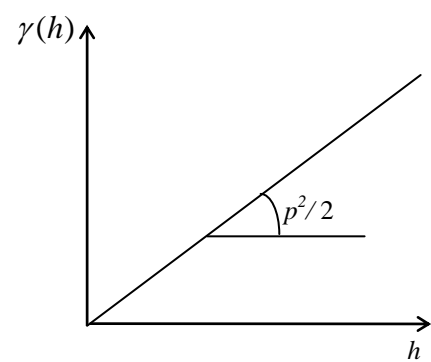


图 1-33 线性模型

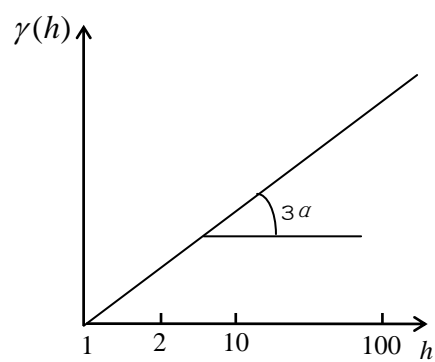


图 1-34 对数模型

除对数模型和随机模型外，均有 $\gamma(0)=0$ 。但由于取样、化验误差和矿化作用在短距离内（小于最小取样间距）的变化，在绝大多数情况下半变异函数在原点不等于零，即存在**块金效应**。因此，在实践中应用最广的模型是具有块金效应的球状模型，其数学表达式为：

$$\gamma(h)=\begin{cases} N+C(\frac{3h}{2a}-\frac{h^3}{2a^3}) & h<a \\ N+C & h\geq a \end{cases} \tag{1-63}$$

式中， N 为块金效应； $N+C$ 为阈值。

在某些情况下，区域化变量的结构特性较复杂，难以用单一结构的数学模型描述。这时，往往采用几个结构的数学组合来描述较复杂的结构。带有块金效应的球模型（式 1-63）实质上就是由两个结构组成的：一个是纯块金效应结构（或随机结构），另一个是球形结构。由多个半变异函数组成的结构称为**嵌套结构**(nested structures)。实践中较常见的嵌套结构由块金效应与两个球模型组成，即：

$$\gamma(h)=N+\gamma_1(h)+\gamma_2(h) \tag{1-64}$$

式中， $\gamma_1(h)$ 和 $\gamma_2(h)$ 为具有不同 α 和 C 值的球模型。图 1-35 是这一嵌套结构的示意图：

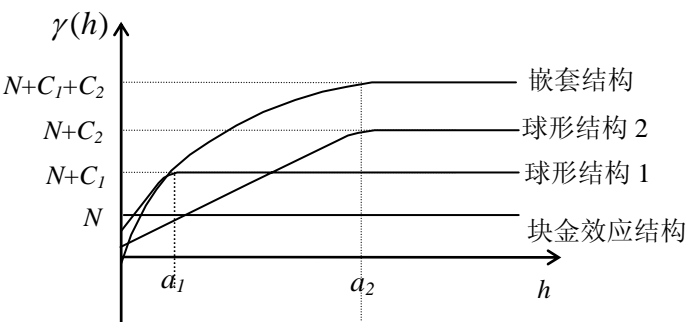


图 1-35 球模型的嵌套结构示意图

四、半变异函数的拟合

实践中半变异函数是根据有限数目的地质取样建立的，而通过取样我们只能得到由一些离散点组成的实验半变异函数。因此，需要对实验半变异函数进行加工获得实验半变异函数的数学模型。将实验半变异函数加工成数学模型的过程称为**半变异函数的拟合**。这里只讲球模型的拟合。

图 1-36 是从一组样品得到的实验半变异函数。虽然数据点的分布不很规则，但仍可看出 $\gamma(h)$ 随 h 首先增加，然后趋于稳定的特点。因此，其数学模型应为具有块金效应的球模型。如果能确定块金效应 N ，阈值 $N+C$ 和变程 a ，拟合也就完成了。

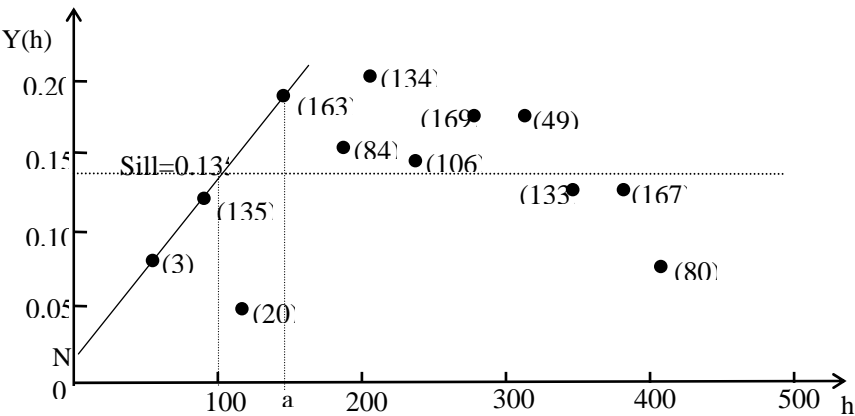


图 1-36 实验半变异函数的拟合

首先确定阈值。从数据点的分布很难看出 $\gamma(h)$ 稳定在何值，但从理论上讲，可以认为阈值等于样品的方差 σ^2 。因此，在实际拟合时，往往取 σ^2 为阈值。这里 $\sigma^2=0.135$ ，故 $N+C=0.135$ 。

其次确定块金效应。根据阈值以下靠近原点的曲线变化趋势，作一条斜线，斜线与纵轴的截距即为块金效应 N ，从图中可以看出 $N \approx 0.02$ 。这样 $C=0.135-0.02=0.115$ 。

最后确定变程。根据球模型的数学表达式可知， $\gamma(h)$ 在 $h=0$ 处的切线斜率为 $C/(\frac{2}{3}a)$ 。所以上面求块金效应时所作的斜线与等于阈值的水平线的交点之横坐标为 $\frac{2}{3}a$ 。从图中可以看出， $\frac{2}{3}a$ 约为 100 米，所以变程约为 150 米。

利用实际数据进行半变异函数的拟合通常是个十分复杂的过程，需要对地质特征有较好的了解和拟合经验。当取样间距较大时，变程以内的数据点很少，很难确定半变异函数在该范围内的变化趋势，而恰恰这部分曲线是半变异函数最重要的组成部分。在这种情况下，常常求助于“沿钻孔实验半变异函数”(down-hole variogram)，即沿钻孔方向建立的实验半变异函数。因为沿钻孔取样间距小，沿钻孔半变异函数可以捕捉短距离内的结构特征，帮助确定半变异函数的块金效应和变化趋势。但必须注意，当存在各向异性时，沿钻孔半变异函数只代表区域化变量沿钻孔方向的变化特征，并不能完全代表其他方向上半变异函数在短距离的变化特征。

五、各向异性(Anisotropy)

当区域化变量在不同方向呈现不同特征时，半变异函数在不同方向也具有不同的特性。我们称这种现象为 **各向异性**。常见的各向异性有两种。

(1)**几何各向异性(Geometric Anisotropy)**: 几何各向异性的特点是半变异函数的阈值不变，变程随方向变化。如果求出任一平面内所有方向上的半变异函数，半变异函数在平面上的等值线是一组椭圆(图 1-37)。椭圆的短轴和长轴称为 **主方向(Principal Directions)**。对应于阈值的等值线上的每一点 r 到原点的距离是在 $o \rightarrow r$ 方向上半变异函数的变程。所以，对应于阈值的等值线椭圆称为各向异性椭圆，它是影响范围的一种表达。若平面为水平面，各向异性椭圆的长轴方向一般与矿体的走向重合(或非常接近)。因此即使矿体的产状是未知的，通过各向异性分析也可以确定矿体的走向。在三维空间，各向异性椭圆变为椭球体。

(2)**区域各向异性**: 区域各向异性的特点是半变异函数的阈值与变程均随方向变化，如图 1-38 所示。

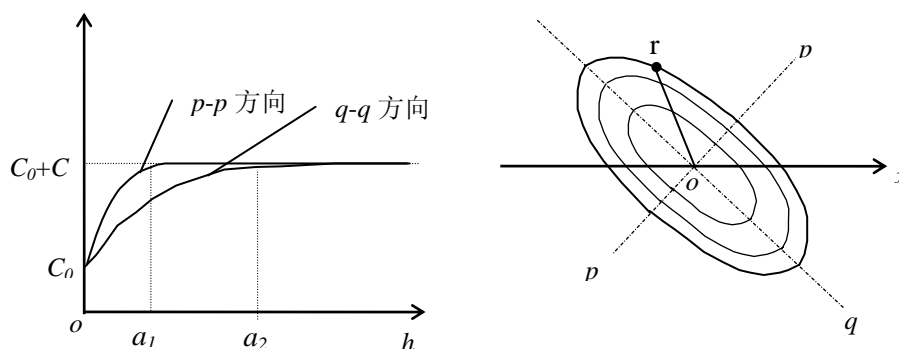


图 1-37 几何各向异性示意图

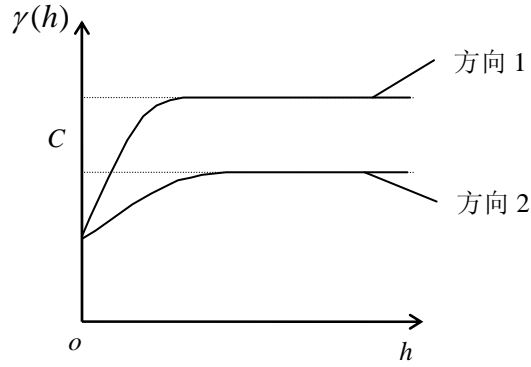


图 1-38 区域异性示意图

六、半变异函数平均值的计算

应用地质统计学方法进行参数估值时,需要计算半变异函数在两个几何体之间或在一个几何体内的平均值。设在区域 Ω 中有两个几何体 V 和 W , 如果在 V 中任取一点 z , 在 W 中任取一点 z' , z 与 z' 之间的距离为 h , 那么半变异函数在两点上的值为 $\gamma(h)$, 记为 $\gamma(z, z')$ 。半变异函数在 V 和 W 之间的平均值就是当 z 取 V 中所有点、 z' 取 W 中所有点时, $\gamma(z, z')$ 的平均值, 即:

$$\bar{\gamma}(V, W) = \frac{1}{VW} \int \int_{z \in V, z' \in W} \gamma(z, z') dz dz' \quad (1-65)$$

上式积分可以用数值方法计算。将 V 划分为 n 个大小相等的子体, 每个子体的中心位于 $z_i (i=1, 2, \dots, n)$; 同理, 将 W 划分为 n' 个子体, 每个子体的中心位于 $z'_j (j=1, 2, \dots, n')$ 。这样, 上面的积分可用下式逼近:

$$\bar{\gamma}(V, W) = \frac{1}{nn'} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n'} \gamma(z_i, z'_j) \quad (1-66)$$

当 V 和 W 是同一几何体时, $\bar{\gamma}(V, V)$ 即为半变异函数在几何体 V 内的平均值:

$$\bar{\gamma}(V, V) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(z_i, z_j) \quad (1-67)$$

式中, z 和 z_j 都是 V 中的子体中心位置。

根据半变异函数的定义, $\gamma(z_i, z_j) = \frac{1}{2} E[(x_i - x'_j)^2]$, x_i 和 x'_j 分别为区域化变量 x 在 z_i 和 z'_j 处的取值。这样, 式 (1-66) 和 (1-67) 也可分别改写为以下的形式:

$$\bar{\gamma}(V, W) = \frac{1}{nn'} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n'} \frac{1}{2} E[(x_i - x'_j)^2] \quad (1-68)$$

$$\bar{\gamma}(V, V) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} E[(x_i - x_j)^2] \quad (1-69)$$

如果几何体 W 代表的是一个样品, 用 ω 表示, 样品的中心位于 z_0 , 样品值为 x_0 , 而且样品 ω 的体积很小, 不再划分为子体, 即 $n'=1$, 那么式 (1-66) 变为:

$$\bar{\gamma}(\omega, V) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma(z_0, z_i) \quad (1-70)$$

式(1-68)变为:

$$\bar{\gamma}(\omega, V) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} E[(x_0 - x_i)^2] \quad (1-71)$$

$\gamma(\omega, V)$ 称为半变异函数在样品 ω 与几何体 V 之间的平均值。

如果 V 也代表一个样品 ω' , ω' 的中心位于 z_0' , ω' 的取值为 x_0' , ω' 的体积很小, 不再划分为子体($n=1$), 那么式(1-70)和(1-71)分别变为:

$$\bar{\gamma}(\omega, \omega') = \gamma(z_0, z_0') \quad (1-72)$$

$$\bar{\gamma}(\omega, \omega') = \frac{1}{2} E[(x_0 - x_0')^2] \quad (1-73)$$

$\gamma(\omega, \omega')$ 称为半变异函数在两个样品之间的“平均值”。

当然, 如果样品的体积较大, 需要把样品也划分为子体时, 半变异函数在样品与几何体之间, 样品与样品之间的平均值和半变异函数在两个几何体之间的平均值是一回事。因此, 式(1-66)或(1-68)是计算半变异函数平均值的一般公式, 其它公式都是这两个公式的特例。值得注意的是, 当把样品也划分为离散点进行计算时, 意味着半变异函数不是由具有一定体积的样品数值得来的, 而是从无限小的点值得到的。这样的半变异函数称为**点半变异函数**(Point semivariogram)。但在实践中点半变异函数是未知的, 半变异函数是通过具有一定体积的样品数据建立的。因此, 在实际计算中一般把样品看作是“不可再分”的。

七、克里金(Kriging)

由于地质统计学的基本思想是由 Danie Krige (丹尼·克里金) 提出的, 所以应用地质统计学进行参数估值的方法被命名为克里金法(Kriging)。克里金估值是在一定条件下具有无偏性和最佳性的线性估值。所谓**无偏性**就是参数估值 $\bar{\mu}_V$ 与真值 μ_V 之间的偏差的数学期望为零, 即:

$$E(\bar{\mu}_V - \mu_V) = 0 \quad (1-74)$$

所谓**最佳性**是指估计值与真值之间偏差的平方的数学期望达到最小, 即:

$$E[(\bar{\mu}_V - \mu_V)^2] = \min \quad (1-75)$$

$E[(\bar{\mu}_V - \mu_V)^2]$ 也称为**估计方差**(Estimation Variance), 用 σ_E^2 表示; 用克里金法进行估值的估值方差称为**克里金方差**(Kriging Variance)或**克里金误差**(Kriging Error), 用 σ_k^2 表示。

所谓**线性估值**是指未知量 μ_V 的估计 $\bar{\mu}_V$ 是若干个已知取样值 x_i 的线性组合, 即:

$$\bar{\mu}_V = \sum_{i=1}^n b_i x_i \quad (1-76)$$

式中, b_i 为常数。

设从区域 Ω 中取样 n 个, 样品 ω_i 的值为 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$; Ω 中的一个单元体 V 的未知真值为 μ_V (图 1-39)。那么, 用这 n 个样品对 μ_V 的克里金估值即为式(1-76)。

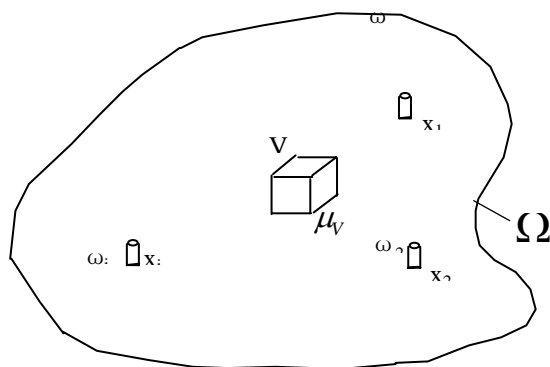


图 1-39 克里金法示意图

根据无偏性要求 $E(\bar{\mu}_V - \mu_V) = 0$, 有:

$$E[\sum_{i=1}^n b_i x_i - \mu_V] = \sum_{i=1}^n b_i E[x_i] - E[\mu_V] = 0$$

如果在区域 Ω 内, 区域化变量满足内蕴假设且“无漂移”, $E[x_i] = E[\mu_V] = \mu$ (μ 为参数在 Ω 的平均值), 上式变为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i \mu - \mu &= 0, \text{ 消去 } \mu \text{ 得:} \\ \sum_{i=1}^n b_i &= 1 \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^n b_i - 1 = 0 \end{aligned} \quad (1-77)$$

因此, 估值具有无偏性的充要条件是取样值的权值之和为 1。

将几何体 V 看作是由 m 个相同的子体组成, 每个子体的值为 v_k , 那么 μ_V 等于子体值的平均值, 即 $\mu_V = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m v_k$ 。这样克里金方差为:

$$\sigma_k^2 = E[(\bar{\mu}_V - \mu_V)^2] = E[(\sum_{i=1}^n b_i x_i - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m v_k)^2]$$

令 x_j' 表示另一个样品 ω_j' 的值 (当 $j' = i$ 时, $x_j' = x_i$); v_l 表示 V 中的另一个子体的值 (当 $l = k$ 时, $v_l = v_k$)。那么当 $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ 时上式可以改写为:

$$\begin{aligned}
\sigma_k^2 &= E[-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} b_i b_j (x_i - x_j)^2 - \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{1}{2} (v_k - v_l)^2 + \sum_{i=1}^n b_i (\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x_i - v_k)^2)] \\
&= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} b_i b_j E[(x_i - x_j)^2] - \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{1}{2} E[(v_k - v_l)^2] \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^n b_i (\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} E[(x_i - v_k)^2])
\end{aligned} \tag{1-78}$$

从公式(1-73)可知 $\frac{1}{2} E[(x_i - x_j)^2] = \bar{\gamma}(\omega_i, \omega_j)$ ，即半变异函数在样品 ω_i 和 ω_j 间的平均值；从公式(1-69)可知 $\frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{1}{2} E[(v_k - v_l)^2] = \bar{\gamma}(V, V)$ ，即

半变异函数在几何体 V 内的平均值；从公式(1-71)可知： $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} E[(x_i - v_k)^2] = \bar{\gamma}(\omega_i, V)$ ，即半变异函数在样品 ω_i 和 V 之间的平均值。

将这些等价关系代入式(1-78)，得：

$$\sigma_k^2 = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j \bar{\gamma}(\omega_i, \omega_j) - \bar{\gamma}(V, V) + 2 \sum_{i=1}^n b_i \bar{\gamma}(\omega_i, V) \tag{1-79}$$

这样，最佳估值就是在 $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ 的条件下求 σ_k^2 达到最小值时的权值 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。应用拉格朗日乘子法，得拉格朗日函数：

$$L(b_1, b_2, \Lambda \Lambda, b_n, \lambda) = \sigma_k^2 - 2\lambda (\sum_{i=1}^n b_i - 1) \tag{1-80}$$

式中， 2λ 为拉格朗日乘子。在 $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ 的条件下求 σ_k^2 达到最小的条件是拉格朗日函数对 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 和 λ 的一阶偏微分为零，即：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b_i} &= 0 \quad \text{对} \quad i = 1, 2, \Lambda \Lambda, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{1-81}$$

将式(1-79)代入式(1-80)中并求导，得(1-81)的具体形式为：

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_j \bar{\gamma}(\omega_i, \omega_j) + \lambda &= \bar{\gamma}(\omega_i, V) \\ \sum_{j=1}^n b_j &= 1 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \Lambda \Lambda, n \tag{1-82}$$

将(1-82)展开，得：

$$\begin{aligned}
&b_1 \bar{\gamma}(\omega_1, \omega_1) + b_2 \bar{\gamma}(\omega_1, \omega_2) + \Lambda \Lambda + b_n \bar{\gamma}(\omega_1, \omega_n) + \lambda = \bar{\gamma}(\omega_1, V) \\
&b_1 \bar{\gamma}(\omega_2, \omega_1) + b_2 \bar{\gamma}(\omega_2, \omega_2) + \Lambda \Lambda + b_n \bar{\gamma}(\omega_2, \omega_n) + \lambda = \bar{\gamma}(\omega_2, V) \\
&\quad \begin{matrix} \text{M} & \text{M} & & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} & \text{M} & \text{M} \end{matrix} \tag{1-83} \\
&b_1 \bar{\gamma}(\omega_n, \omega_1) + b_2 \bar{\gamma}(\omega_n, \omega_2) + \Lambda \Lambda + b_n \bar{\gamma}(\omega_n, \omega_n) + \lambda = \bar{\gamma}(\omega_n, V) \\
&b_1 \quad + \quad b_2 \quad + \Lambda \Lambda + \quad b_n \quad + 0 = 1
\end{aligned}$$

式(1-83)是有 $n+1$ 个方程组成的线性方程组，称为**克里金方程组**。解这个方程组就可求出

$n+1$ 个未知数($b_1, b_2, \dots, b_n, \lambda$)。将求得的 b_1, b_2, \dots, b_n 代入式(1-76)即得 μ_v 的无偏、最佳估值 $\bar{\mu}_v$ 。式(1-83)也可用矩阵形式表示, 令

$$A = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(\omega_1, \omega_1) & \bar{\gamma}(\omega_1, \omega_2) & \Lambda & \Lambda & \bar{\gamma}(\omega_1, \omega_n) & 1 \\ \bar{\gamma}(\omega_2, \omega_1) & \bar{\gamma}(\omega_2, \omega_2) & \Lambda & \Lambda & \bar{\gamma}(\omega_2, \omega_n) & 1 \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ \bar{\gamma}(\omega_n, \omega_1) & \bar{\gamma}(\omega_n, \omega_2) & \Lambda & \Lambda & \bar{\gamma}(\omega_n, \omega_n) & 1 \\ 1 & 1 & \Lambda & \Lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \text{M} \\ b_n \\ \lambda \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(\omega_1, V) \\ \bar{\gamma}(\omega_2, V) \\ \text{M} \\ \bar{\gamma}(\omega_n, V) \\ 1 \end{bmatrix}$$

式(1-83)可改写为:

$$AB = C \quad (1-84)$$

上式的解为:

$$B = A^{-1}C \quad (1-85)$$

如果区域化变量在 Ω 中满足二阶稳定性假设, $\gamma(h) = \sigma^2 - \sigma(h)$ 。因此, 克里金方程组也可用协变异函数表示, 这时:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\omega_1, \omega_1) & \bar{\sigma}(\omega_1, \omega_2) & \Lambda & \Lambda & \bar{\sigma}(\omega_1, \omega_n) & 1 \\ \bar{\sigma}(\omega_2, \omega_1) & \bar{\sigma}(\omega_2, \omega_2) & \Lambda & \Lambda & \bar{\sigma}(\omega_2, \omega_n) & 1 \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ \bar{\sigma}(\omega_n, \omega_1) & \bar{\sigma}(\omega_n, \omega_2) & \Lambda & \Lambda & \bar{\sigma}(\omega_n, \omega_n) & 1 \\ 1 & 1 & \Lambda & \Lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \text{M} \\ b_n \\ -\lambda \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(\omega_1, V) \\ \bar{\sigma}(\omega_2, V) \\ \text{M} \\ \bar{\sigma}(\omega_n, V) \\ 1 \end{bmatrix}$$

式中, $\bar{\sigma}(\omega_i, \omega_j)$ 为协变异函数在两样品间的平均值; $\bar{\sigma}(\omega_i, V)$ 为协变异函数在样品 ω 和几何体 V 之间的平均值。 $\bar{\sigma}(\omega_i, \omega_j)$ 和 $\bar{\sigma}(\omega_i, V)$ 的计算公式与 $\bar{\gamma}(\omega_i, \omega_j)$ 和 $\bar{\gamma}(\omega_i, V)$ 的计算公式在形式上相同。

[例 1-4]如图 1-40 所示, 矿床 Ω 中有一个方块, 其边长为 3, 一个样品 ω 位于方块的中心, 其品位为 $x_1=1.2$; 另一个样品 ω 位于方块的一角, 其品位为 $x_2=0.5$ 。半变异函数的方程为:

$$\begin{cases} \gamma(h) = 0.5h & h < 2 \\ \gamma(h) = 1.0 & h \geq 2 \end{cases}$$

假设品位在矿床中满足内蕴假设且无漂移，试用克里金法估计方块 V 的品位。

=

3

$\gamma(h)$

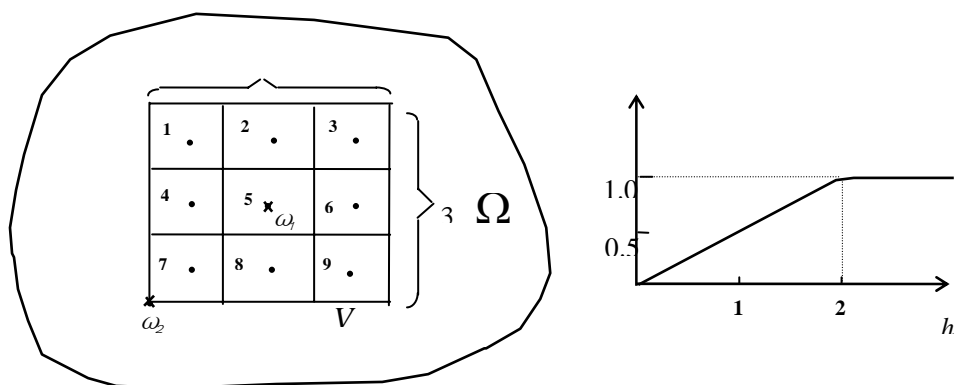


图 1-40 例 1-4 中方块与样品相对位置及半变异函数示意图

解:

(1) 计算 $\bar{\gamma}(\omega_i, \omega_j)$:

ω_1 与 ω_2 之间的距离为 $1.5\sqrt{2} = 2.121$ ， ω_1 和 ω_2 到自身的距离为 0 根据公式(13-72)，有：

$$\bar{\gamma}(\omega_1, \omega_2) = \bar{\gamma}(\omega_2, \omega_1) = \gamma(2.121) = 1.0$$

$$\gamma(\omega_1, \omega_1) = \bar{\gamma}(\omega_2, \omega_2) = \gamma(0) = 0.0$$

(2) 计算 $\bar{\gamma}(\omega_1, V)$ 和 $\bar{\gamma}(\omega_2, V)$:

将 V 等分为如图所示的 9 个小块，根据公式(1-70)，有：

$$\bar{\gamma}(\omega_1, V) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 \gamma(z_0, z_i)$$

式中 z_0 为 ω_1 的位置， z_i 为第 i 个小块的中心位置。当 $i=2$ 时，样品 ω_1 距第二小块的距离为 1，因此 $\gamma(z_0, z_2) = \gamma(1) = 0.5$ 。类似地可以求出任意 i 的 $\gamma(z_0, z_i)$ ：

$$\begin{array}{r}
\gamma(z_0, z_1) = 0.707 \\
\gamma(z_0, z_2) = 0.500 \\
\gamma(z_0, z_3) = 0.707 \\
\gamma(z_0, z_4) = 0.500 \\
\gamma(z_0, z_5) = 0.0 \\
\gamma(z_0, z_6) = 0.500 \\
\gamma(z_0, z_7) = 0.707 \\
+ \gamma(z_0, z_8) = 0.500 \\
\hline
\sum 4.282
\end{array}$$

$$\bar{\gamma}(\omega_1, V) = 4.282/9 = 0.536$$

仿照上述做法，求得： $\bar{\gamma}(\omega_2, V) = 0.882$

(3) 建立克里金方程组并求解：

将上面求得的 $\bar{\gamma}(\omega_i, \omega_j)$ 和 $\bar{\gamma}(\omega_i, V)$ 代入式(1-83)，有：

$$\begin{cases}
0.0b_1 + 1.0b_2 + \lambda = 0.536 \\
1.0b_1 + 0.0b_2 + \lambda = 0.882 \\
b_1 + b_2 = 1.0
\end{cases}$$

解上面的方程组得：

$$b_1 = 0.673, \quad b_2 = 0.327, \quad \lambda = 0.209$$

(4) 求方块 V 的品位

方块 V 的品位的估值为：

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_V &= b_1x_1 + b_2x_2 \\
&= 0.673 \times 1.2 + 0.327 \times 0.5 \\
&= 0.971
\end{aligned}$$

(5) 计算方块品位的克里金方差：

计算克里金方差 σ_k^2 需要计算 $\bar{\gamma}(V, V)$ ，根据式(1-67)

$$\bar{\gamma}(V, V) = \frac{1}{81} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 \gamma(z_i, z_j)$$

式中 z_i 和 z_j 为两个小方块的位置，对于每一对 z_i 和 z_j ， $\gamma(z_i, z_j)$ 的算法与第(2)步中 $\gamma(z_0, z_i)$ 的算法相同。这里不再重复，只给出计算结果如下：

$$\bar{\gamma}(V, V) = 0.683$$

将有关数值代入式(1-79)得：

$$\sigma_k^2 = 0.175$$

对于图 1-13 所示的样品分布及品位值，通过不同方向的实验半变异函数计算和拟合，得知半变异函数在台阶上是各向异性的，长轴主方向为 135° （即东南—西北），短轴主方向为 45°

(即西南—东北), 两个主方向上的半变异函数均为球函数:

长轴方向: $N=0.015$ $C=0.200$ $a=137$ 米

短轴方向: $N=0.010$ $C=0.160$ $a=122$ 米

用克里金法对台阶上所有方块的估值结果如图 1-41 所示:

第九节 影响范围

当对块状模型中每一单元块的品位进行估值时, 无论用什么方法, 均需要确定由哪些样品参与估值运算。一般地讲, 对被估单元块有影响的样品(即落入影响范围内的样品)都应参与估值运算。

地质统计学把品位看作是区域化变量, 而且用半变异函数描述品位在矿床中的相互关联特征。因此地质统计学为帮助确定合理影响范围提供了理论依据。如前所述, 在大多数情况下品位的半变异函数的数学模型为球模型。球模型的特点是: 半变异函数 $\gamma(h)$ 随距离 h 的增加而增加, 当 h 增加到变程 a 时 $\gamma(h)$ 达到槛值。由于槛值为样品的方差, 这表明当 $h \geq a$ 时样品值变为完全随机的, 样品之间失去了相互影响。因此, 半变异函数的变程 a 可以被看作是影响半径的一种表述。然而当存在各向异性时, 不同方向上的半变异函数具有不同的变程, 影响范围是一椭球体, 即 **各向异性椭球体**。因此, 确定合理影响范围首先要建立各个方向的半变异函数, 进行各向异性分析。

影响范围在品位、矿量计算中起着相当重要的作用, 在某些情况下, 所选取的影响范围不同, 矿量计算结果会有很大的差别。然而, 确定合理影响范围是一件不容易的事, 需要对矿床的成矿特征有深入的了解, 同时也需要丰富的实践经验。地质统计学可以帮助确定合理的影响范围, 但并不意味着各向异性椭球体(在各向同性情况下为球体)就是最合理的影响范围, 最后决策应是综合考虑各种因素(包括经验)的结果。

0	0	0	0	18	18	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	18	18	18	42	42	49	49	49	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	18	18	30	42	42	49	49	49	0	0	0	0	0	0	0	0
21	21	21	40	40	52	58	53	39	42	45	45	0	14	14	14	0	0	0	0
21	21	21	40	40	40	69	69	38	38	43	43	0	14	14	14	0	0	0	0
21	30	32	37	35	48	70	67	63	67	70	65	48	35	14	14	0	0	0	0
0	39	39	39	32	32	72	72	81	81	89	89	48	48	0	0	0	0	0	0
0	39	39	31	27	37	77	73	69	66	79	78	79	83	89	63	9	9	9	9
0	0	10	16	17	23	83	68	83	45	72	72	10	10	89	89	9	9	9	9
												1	1						
0	0	10	14	10	13	33	44	99	83	83	91	12	10	64	48	8	7	6	6
												0	9						
0	0	10	33	43	44	2	2	13	13	92	92	13	13	52	52	7	7	4	4
								6	8			4	4						
0	0	0	64	64	64	2	45	62	59	73	93	15	13	68	61	34	28	4	4
												2	2						
0	0	48	48	50	49	41	28	28	28	64	64	16	16	76	76	48	48	3	3
												1	1						
0	0	48	48	45	41	41	21	20	20	25	35	80	78	92	73	18	13	3	3
0	0	48	35	31	29	41	17	17	17	6	6	40	40	10	10	1	1	0	0
														0	0				
0	0	0	23	23	23	0	20	20	19	15	15	15	24	59	50	1	1	0	0
0	0	0	23	23	23	0	22	22	22	19	19	3	3	39	39	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	22	22	22	21	19	3	19	39	39	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	23	23	23	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	23	23	23	0	0	0	0	0	0	0	0

图 1-41 基于图 1-13 数据的克里金估值结果

小 结

本章介绍了取样数据的处理与分析以及品位（矿量）估算的几种常用方法。地质统计学法被大部分人认为是一种较好的品位估值方法，尤其适用于品位变化大，矿岩界线由品位控制的矿床，如侵染型的贵金属矿床。必须指出，无论方法在数学上如何复杂，在理论上如何先进，方法本身不能增加已知信息量，而品位与矿量估算的准确程度主要取决于已知信息量的大小。另外，不同的估值方法有不同的适用条件。对于一给定矿床，方法 A 最为合适；而对于另一矿床，也许方法 B 最为合适。各种方法在不同矿床的实际应用经验是选择估值方法的重要依据。

在实践中，国际上通常的做法是：在对矿床进行初步评价或是数据量不足时，选用较简单的方法（一般是距离 N 次方反比法）。当有了足够的数 据，对矿床进行正式可行性评价时，选用地质统计学法。地质统计学法也常被用于开采过程中局部范围内的矿岩重新圈定和品位、矿量计算。