面向 21 世纪高等学校电子/通信类专业规划教材
电子科技大学“十五”规划精品教材

电磁场与电磁波

杨显清　赵家升　王园　编著

MIXIAZAI.com 觅下载

国防工业出版社
·北京·

内 容 提 要

本书采用演绎法建立的公理化体系，即根据演绎推理的方法，按一般到特殊的顺序组织教材内容。

本书覆盖了电磁场与电磁波的基本内容，分为八章，即电磁场的数学物理基础、平面电磁波在无界均匀媒质中的传播、平面电磁波在分界面上的反射和透射、导行电磁波、传输线理论、电磁波的辐射与天线、静态电磁场、静态场边值问题的解法。在每节之后有紧密结合该节基本内容的练习题，每章之后选编了一些具有综合性的习题，书末附有阶段测试题，并给出了习题的参考答案。

本书可作为高等学校电子信息类专业作为“电磁场与电磁波”、“电磁场理论”、“电磁场与天线”等课程的教材或教学参考书，也可供相关科技人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波 / 杨显清等编著. —北京：国防工业出版社，2003.7

ISBN 7-118-03106-2

Ⅰ.电… Ⅱ.杨… Ⅲ.①电磁场②电磁波 Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 011181 号

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号）

（邮政编码 100044）

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 24 550 千字

2003 年 7 月第 1 版 2003 年 7 月北京第 1 次印刷

印数：1—5000 册 定价：32.00 元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

前　言

“电磁场与电磁波”是高等学校电子信息类及电气信息类专业本科生必修的一门技术基础课，它包含的内容是合格的电子、电气信息类专业本科生应具备的知识结构的重要组成部分。近代科学技术的发展过程表明，电磁场与电磁波基本理论又是一些交叉学科的生长点和新兴边缘学科发展的基础。因此，学好电磁场与电磁波课程不仅为学习专业课程准备了必须的基础知识，而且将对完善自身素质、增强适应能力和创造能力长久地发挥作用。

本书采用演绎法建立的公理化体系，即根据演绎推理的方法，按一般到特殊的顺序组织教材内容。一开始简要回顾了电磁学的一些基本物理量和基本定律，从而引出麦克斯韦方程组，紧接着讨论时变电磁场，进而讨论电磁波的传播与辐射特性，把静态电磁场作为时变电磁场的特殊情况来分析。这样处理有利于建立电磁场与电磁波的整体概念，同时，既与“大学物理”（电磁学部分）有较好的衔接，又避免了在内容上过多的重复。这种教材体系压缩了静态场，充实了时变电磁场与波的内容，符合电子信息类专业教学改革的需要。

在本书编写中，编者对以下几个方面予以关注：

（1）注重教材的基础性，突出电磁场与波的基本内容，期望学生牢固掌握基础知识和基本分析计算方法。

（2）注重电磁场与波的基本理论与工程应用的结合，在论述和举例中体现电磁场与波强烈的实践性。

（3）精选例题和习题。“解题难”一直是学生学习电磁场课程的难点所在，针对这一特点，本书编入了相当数量的例题。这些例题突出解题思路的分析，将会对学生拓宽解题思路、增强应用基本理论分析和解决问题的能力有所帮助。在每节之后有紧密结合该节基本内容的练习题，每章之后选编了一些具有综合性的习题，书末给出了习题的参考答案。

（4）对传统电磁场与波教材的一些内容进行必要的删减。例如传输线理论中的圆图，由于计算机技术的发展和应用，完全可以通过计算机来准确求解传输线问题，故本书删去了“圆图”。

本书共八章，即电磁场的数学物理基础、平面电磁波在无界均匀媒质中的传播、平面电磁波在分界面上的反射和透射、导行电磁波、传输线理论、电磁波的辐射与天线、静态电磁场、静态场边值问题的解法。

本书的第一、七、八章由杨显清编写，第二、三、六章由赵家升编写，第四、五章由王园编写。本书的编写融入了编著者长期从事电磁场与电磁波课程教学和进行教学研究的经验，以及长期进行电磁场与波应用的科研实践体会，也吸取了全国高等学校电磁场教学与

教材研究会学术年会交流的经验。本书的编写得到电子科技大学电子工程学院、微波工程系以及电磁场课程教学小组同仁的支持，编者表示谢意。

限于编者的学识水平和能力，书中不妥或错误之处，敬请读者指正。

编　者

2002 年 10 月

于电子科技大学

目　　录

第一章　电磁场的数学物理基础…… 1
1.1　矢量分析与场论基础 …… 1
1.1.1　标量场的梯度 …… 2
1.1.2　矢量场的散度 …… 4
1.1.3　矢量场的旋度 …… 7
1.1.4　拉普拉斯运算…… 10
1.1.5　亥姆霍兹定理…… 10
练习题 …… 12
1.2　电磁场的源量——电荷与电流…… 13
1.2.1　电荷与电荷密度…… 13
1.2.2　电流与电流密度…… 14
1.2.3　电荷守恒定律与电流连续性方程…… 15
练习题 …… 16
1.3　电场强度与磁感应强度…… 16
1.3.1　电场强度…… 16
1.3.2　磁感应强度…… 19
练习题 …… 21
1.4　电磁场中媒质的电磁特性…… 22
1.4.1　介质的极化·电位移矢量…… 22
1.4.2　磁介质的磁化·磁场强度矢量…… 24
1.4.3　导电媒质的传导特性…… 26
练习题 …… 27
1.5　静态场的基本规律…… 27
1.5.1　静电场的基本规律…… 28
1.5.2　静磁场的基本规律…… 29
练习题 …… 31
1.6　电磁感应定律和位移电流…… 31
1.6.1　电磁感应定律…… 31
1.6.2　位移电流…… 33
练习题 …… 35
1.7　麦克斯韦方程组…… 35
1.7.1　麦克斯韦方程组的微分形式…… 35

1.7.2 麦克斯韦方程组的积分形式 …… 37
1.7.3 麦克斯韦方程组的复数形式 …… 37
练习题 …… 39
1.8 电磁场的边界条件 …… 39
1.8.1 边界条件的一般形式 …… 40
1.8.2 理想导体表面上的边界条件 …… 41
练习题 …… 43
1.9 电磁能量守恒定律 …… 43
1.9.1 坡印廷定理和坡印廷矢量 …… 44
1.9.2 正弦电磁场的平均坡印廷矢量 …… 45
练习题 …… 46
习 题 …… 47

第二章 平面电磁波在无界媒质中的传播 …… 53
2.1 波动方程 …… 53
练习题 …… 54
2.2 非导电媒质中的均匀平面波 …… 54
2.2.1 一维波动方程的解 …… 54
2.2.2 均匀平面波的传播特性 …… 56
2.2.3 沿任意方向传播的均匀平面波 …… 61
练习题 …… 63
2.3 导电媒质中的均匀平面波 …… 63
2.3.1 导电媒质中的波动方程及其解 …… 63
2.3.2 良导体中的波 …… 67
2.3.3 低损耗媒质中的波 …… 69
2.3.4 色散现象和群速 …… 72
练习题 …… 74
2.4 波的极化 …… 74
2.4.1 线极化 …… 74
2.4.2 圆极化 …… 75
2.4.3 椭圆极化 …… 76
练习题 …… 79
2.5 各向异性媒质中的平面波 …… 79
2.5.1 等离子体中的平面波 …… 79
2.5.2 铁氧体中的平面波 …… 83
练习题 …… 85
习 题 …… 86

第三章 平面电磁波在分界面上的反射和透射 …… 89

3.1 均匀平面波对分界面的垂直入射 …… 89
3.1.1 完纯介质与完纯导体的分界面 …… 89
3.1.2 完纯介质与完纯介质的分界面 …… 93
3.1.3 一般导体与一般导体的分界面 …… 98
练习题 …… 103
3.2 均匀平面波对多层媒质分界面的垂直入射 …… 104
3.2.1 多层媒质的场量关系和等效波阻抗 …… 104
3.2.2 两个有重要意义的特例 …… 106
练习题 …… 109
3.3 均匀平面波对分界面的斜入射 …… 109
3.3.1 垂直极化波对完纯介质表面的斜入射 …… 110
3.3.2 平行极化波对完纯介质表面的斜入射 …… 114
3.3.3 全反射和临界角 …… 116
3.3.4 全透射和布儒斯特角 …… 119
3.3.5 垂直极化波对完纯导体表面的斜入射 …… 121
3.3.6 平行极化波对完纯导体表面的斜入射 …… 124
练习题 …… 126
习 题 …… 127

第四章 导行电磁波 …… 131
4.1 均匀波导的一般特性 …… 132
4.1.1 横向场分量与纵向场分量的关系 …… 132
4.1.2 TEM 波 …… 134
4.1.3 TM 波 …… 135
4.1.4 TE 波 …… 138
练习题 …… 141
4.2 矩形波导 …… 141
4.2.1 矩形波导中的 TM 波 …… 142
4.2.2 矩形波导中的 TE 波 …… 147
4.2.3 矩形波导中的主模 …… 151
练习题 …… 157
4.3 圆柱形波导 …… 158
4.3.1 纵向场分量与横向场分量的关系 …… 158
4.3.2 圆柱形波导中的 TM 波 …… 159
4.3.3 圆柱形波导中的 TE 波 …… 162
4.3.4 圆柱形波导中波的传播特性 …… 163
4.3.5 圆柱形波导中的几个主要模式 …… 165
练习题 …… 168
4.4 同轴波导 …… 168

4.4.1 同轴波导中的 TEM 波 …… 169
4.4.2 同轴波导中的 TM 波 …… 171
4.4.3 同轴波导中的 TE 波 …… 173
练习题 …… 175
4.5 微波谐振器 …… 175
4.5.1 矩形谐振腔 …… 176
4.5.2 圆柱形谐振腔 …… 182
练习题 …… 185
习 题 …… 185

第五章 传输线理论 …… 187
5.1 传输线方程 …… 187
5.1.1 传输线中“场”与“路”的关系 …… 187
5.1.2 等效电路及传输线方程 …… 189
5.1.3 传输线方程的解 …… 190
练习题 …… 193
5.2 电压波和电流波的传输特性参数 …… 193
5.2.1 传播常数 …… 193
5.2.2 相速度 …… 194
5.2.3 特性阻抗 …… 194
练习题 …… 195
5.3 传输线的阻抗 …… 195
5.3.1 定义 …… 195
5.3.2 几种特殊情况下的输入阻抗 …… 196
练习题 …… 200
5.4 传输线的反射系数 …… 200
5.4.1 定义 …… 200
5.4.2 反射系数与电压、电流的关系 …… 202
5.4.3 反射系数与输入阻抗的关系 …… 202
5.4.4 反射系数与负载阻抗的关系 …… 202
练习题 …… 203
5.5 传输线的工作状态 …… 204
5.5.1 行波状态 …… 204
5.5.2 驻波状态 …… 205
5.5.3 行驻波状态 …… 207
练习题 …… 212
5.6 传输功率与效率 …… 213
5.6.1 传输功率的计算 …… 213
5.6.2 传输线的功率容量 …… 214

5.6.3 传输线的传输效率 …… 214
练习题 …… 217
5.7 传输线的阻抗匹配 …… 217
5.7.1 λ/4 阻抗变换器 …… 217
5.7.2 单短截线匹配器 …… 219
练习题 …… 223
5.8 传输线谐振器 …… 224
练习题 …… 225
习 题 …… 226

第六章 电磁波的辐射与天线 …… 228
6.1 矢量位函数和标量位函数 …… 228
6.1.1 矢量位和标量位的波动方程 …… 228
6.1.2 滞后位 …… 230
练习题 …… 231
6.2 电偶极子的辐射 …… 231
6.2.1 电偶极子的电磁场 …… 232
6.2.2 近区场和远区场 …… 233
练习题 …… 236
6.3 磁偶极子的辐射 …… 236
6.3.1 磁偶极子的电磁场 …… 236
6.3.2 近区场和远区场 …… 238
练习题 …… 239
6.4 天线的电参数 …… 239
6.4.1 辐射方向图 …… 239
6.4.2 辐射效率 …… 243
6.4.3 增益系数 …… 243
6.4.4 输入阻抗 …… 244
6.4.5 有效长度 …… 244
6.4.6 极化特性 …… 245
6.4.7 频带宽度 …… 245
练习题 …… 245
6.5 线形天线 …… 245
6.5.1 对称振子天线 …… 245
6.5.2 阵列天线 …… 249
6.5.3 单极天线 …… 254
6.5.4 引向天线 …… 257
6.5.5 螺旋天线 …… 261

6.5.6 对数周期天线 …… 264
6.5.7 平衡—不平衡变换器 …… 266
练习题 …… 268
6.6 面形天线 …… 268
6.6.1 分析面形天线辐射场的方法 …… 268
6.6.2 旋转抛物面天线 …… 269
6.6.3 卡塞格伦天线 …… 270
练习题 …… 271
习 题 …… 271

第七章 静态电磁场 …… 272
7.1 静电场的标量电位 …… 272
7.1.1 静电位的微分方程 …… 272
7.1.2 电位差 …… 273
7.1.3 静电位的边界条件 …… 274
练习题 …… 276
7.2 恒定电场及其电位函数 …… 277
7.2.1 恒定电场的基本方程 …… 277
7.2.2 恒定电场的边界条件 …… 278
练习题 …… 280
7.3 恒定磁场的矢量位和标量位 …… 280
7.3.1 恒定磁场的矢量位 …… 280
7.3.2* 静磁场的标量磁位及其微分方程 …… 284
练习题 …… 285
7.4 电容与部分电容 …… 286
7.4.1 电容 …… 286
7.4.2 电介质击穿 …… 287
7.4.3* 部分电容 …… 288
7.4.4 静电屏蔽 …… 291
练习题 …… 291
7.5 电阻 …… 292
7.5.1 电阻 …… 292
7.5.2 接地电阻 …… 293
7.5.3 电阻率法测井 …… 294
练习题 …… 295
7.6 电感 …… 295
7.6.1 自感 …… 295
7.6.2 互感 …… 297
7.6.3 纽曼公式 …… 298

练习题…… 300
7.7 静电能量和静电力 …… 300
7.7.1 静电场能量 …… 300
7.7.2 静电力 …… 303
练习题…… 305
7.8 磁场能量与磁场力 …… 305
7.8.1 磁场的能量 …… 305
7.8.2 磁场力 …… 307
练习题…… 309
习 题…… 310

第八章 静态场边值问题的解法…… 315
8.1 边值问题的惟一性定理 …… 315
8.1.1 边值问题的类型 …… 315
8.1.2 惟一性定理 …… 316
练习题…… 317
8.2 分离变量法 …… 317
8.2.1 直角坐标系中的分离变量法 …… 317
8.2.2 圆柱面坐标系中的分离变量法 …… 320
8.2.3 球面坐标系中的分离变量法 …… 324
练习题…… 326
8.3 镜像法 …… 327
8.3.1 导体平面的镜像 …… 327
8.3.2 导体球面镜像 …… 330
8.3.3 导体圆柱面镜像 …… 333
8.3.4 介质平面的镜像 …… 336
练习题…… 338
8.4 有限差分法 …… 338
8.4.1 有限差分方程 …… 338
8.4.2 差分方程的求解方法 …… 340
练习题…… 341
8.5 有限元法 …… 341
8.5.1 泛函极值问题的构成 …… 342
8.5.2 场域的剖分与插值 …… 342
8.5.3 变分问题的离散化 …… 343
练习题…… 344
8.6 矩量法 …… 345
练习题…… 347
习 题…… 347

附录

附录一　常用正交坐标系…… 351

附录二　重要的矢量公式…… 353

附录三　部分材料的电磁参数…… 354

习题答案…… 356

阶段测验题…… 369

第一章　电磁场的数学物理基础

电磁现象是广泛存在的，其中一些来源于自然界，例如闪电、星体辐射等。另一些则是由人为方式产生的，例如无线电波、激光、电器开关火花等。麦克斯韦于1864年在对宏观电磁现象的实验规律进行分析总结的基础上，经过扩充和推广总结出了麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组的建立是对电磁理论的重大贡献，是物理学上的一个伟大的成就，为现代电磁理论奠定了基础。麦克斯韦方程组揭示了电磁场与电荷、电流之间，电场与磁场之间的相互作用和联系，是一切宏观电磁现象所遵循的普遍规律。所以，它是电磁场的基本方程，是现代电磁理论的核心和精髓，是分析研究电磁场问题的基本出发点。

本章将首先对矢量分析进行简要讨论，它是研究电磁理论的重要数学工具，然后介绍电磁场中的一些基本物理量和媒质的电磁特性，从静电、静磁和电磁感应等现象的基本规律出发，建立麦克斯韦方程，并对麦克斯韦方程组的意义和内涵进行详细的讨论。在本章中，还介绍了求解电磁场问题必不可少的电磁场边界条件，讨论了反映电磁场中能量守恒与转换关系的坡印廷定理。

本章的主要目的在于让读者首先从整体上了解并掌握电磁理论的核心内容，为分析研究电磁场问题打下良好的基础。

1.1　矢量分析与场论基础

在电磁理论中，我们要研究某些物理量（如电位、电场强度、磁场强度等）在空间的分布和变化规律。为此，引入了场的概念。如果每一时刻，一个物理量在空间中的每一点都有一个确定的值，则称在此空间中确定了该物理量的场。

标量场：若所研究的物理量是一个标量，则称该物理量的场为标量场，例如：温度场、密度场、电位场；

矢量场：若所研究的物理量是一个矢量，则称该物理量的场为矢量场，例如：力场、速度场、电场。

若物理量不随时间变化，则称该物理量所确定的场为静态场；反之，则称为动态场或时变场。

电磁场是分布在三维空间的矢量场，矢量分析是研究电磁场在空间的分布和变化规律的基本数学工具之一。标量场在空间的变化规律由其梯度来描述，而矢量场在空间的变化规律则通过场的散度和旋度来描述。下面将着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律。

1.1.1 标量场的梯度

1. 等值面

一个标量场 u 可以用一个标量函数来表示。在直角坐标系中，可表示为

$$u = u(x,y,z) \tag{1.1.1}$$

在标量场中，为了形象直观地描述物理量在空间的分布状况，常常要考察场中物理量取得相同值的点，引入了等值面的概念。在标量场中，使标量函数 $u(x,y,z)$ 取得相同数值的点构成一个空间曲面，称为标量场的等值面。例如，在温度场中，由温度相同的点构成等温面；在电位场中，由电位相同的点构成等位面。

对任意给定的常数 C，方程

$$u(x,y,z) = C \tag{1.1.2}$$

就是等位面方程。常数 C 取一系列不同的值，就得到一系列不同的等值面，形成等值面族（见图 1－1）。等值面族充满整个场空间，且不同的等值面互不相交。



图 1－1　等值面

2. 方向导数

标量场 $u(x,y,z)$ 的等值面只描述了场量 u 的分布状况，而研究标量场的另一个重要方面，就是要研究标场量 $u(x,y,z)$ 在空间任一点的邻域内沿各个方向的变化规律。为此，引入了标量场的方向导数和梯度的概念。

设 M_0 为标量场 $u(M)$ 中的一点，从点 M_0 出发引一条射线 l，点 M 是射线 l 上的动点，到点 M_0 距离为 Δl，则标量场 $u(M)$ 在点 M_0 处沿方向 $\boldsymbol{e}_l$（$\boldsymbol{e}_l$ 是射线的单位矢量）的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} \tag{1.1.3}$$

在直角坐标系中，设 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的方向余弦，即

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l},\ \cos\beta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l},\ \cos\gamma = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$$

根据复合函数求导法则，容易得到直角坐标系中方向导数的计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.1.4}$$

方向导数具有以下性质：

（1）方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ 是标量场 $u(M)$ 在点 M_0 处沿方向 $\boldsymbol{e}_l$ 对距离的变化率。当 $\dfrac{\partial u}{\partial l} > 0$ 时，标量场 $u(M)$ 沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向是增加的；当 $\dfrac{\partial u}{\partial l} < 0$ 时，标量场 $u(M)$ 沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向是减小的；当 $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 0$ 时，标量场 $u(M)$ 沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向无变化。

（2）方向导数值既与点 M_0 有关，也与 $\boldsymbol{e}_l$ 方向有关。因此，标量场中，在一个给定点 M_0 处沿不同方向 $\boldsymbol{e}_l$，其方向导数的值一般是不同的。

3. 梯度

在标量场中，从一个给定点出发有无穷多个方向。一般说来，标量场在同一点 M 处

沿不同方向上的变化率是不同的，在某个方向上，变化率可能最大。那么标量场在什么方向上的变化率最大、其最大的变化率又是多少？为了描述这个问题，引入了梯度的概念。

标量场 u 在点 M 处的梯度记作 $\mathrm{grad}u$，它是一个矢量，其方向为标量场 u 变化率最大的方向、大小则等于其最大变化率，即

$$\mathrm{grad}u = \boldsymbol{e}_l \frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{\max} \tag{1.1.5}$$

在直角坐标系中，由方向导数的计算公式(1.1.4)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \\ &\left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{e}_x\cos\alpha + \boldsymbol{e}_y\cos\beta + \boldsymbol{e}_z\cos\gamma) = \\ &\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_l = |\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{e}_l)\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

式中，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$ 是与方向 $\boldsymbol{e}_l$ 无关的矢量。从式(1.1.6)可以看出，当方向 $\boldsymbol{e}_l$ 与矢量 $\boldsymbol{G}$ 的方向一致时，方向导数的值最大，且等于矢量 $\boldsymbol{G}$ 的模 $|\boldsymbol{G}|$。根据梯度的定义，可得到直角坐标系中梯度的表达式为

$$\mathrm{grad}u = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.1.7}$$

标量场的梯度具有以下性质：

(1) 标量场 $u(M)$ 的梯度是一个矢量场，通常称 $\mathrm{grad}u$ 为标量场 u 所产生的梯度场。

(2) 标量场 $u(M)$ 中，在给定点处沿任意方向 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向导数等于梯度在该方向上的投影。

(3) 标量场 $u(M)$ 中每一点 M 处的梯度，垂直于过该点的等值面，且指向 $u(M)$ 增加的方向。

在矢量分析中，经常使用那勃勒算符 ∇（读作“del”或“Nabla”）。∇ 是一个矢量微分运算符。

在直角坐标系中，有

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.1.8}$$

因此，标量场 u 的梯度通常用那勃勒算符 ∇ 表示为

$$\mathrm{grad}u = \left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)u = \nabla u \tag{1.1.9}$$

也就是说，可以把标量场 u 的梯度看作是算符 ∇ 作用于标量函数 u 的运算。

梯度在圆柱面坐标系和球面坐标系中的表达式要复杂一些。

在圆柱面坐标系 (ρ,ϕ,z) 中，有

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial u}{\rho\partial \phi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.1.10}$$

在球面坐标系 (r,θ,ϕ) 中，有

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial u}{r\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{1.1.11}$$

例 1.1 设点电荷 q 位于坐标原点，在周围空间任一点 $M(x,y,z)$ 处产生的电位为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

式中，ε 为介电常数，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$，$r=|\boldsymbol{r}|$，试求电位 φ 的梯度。

解：根据球面坐标系的梯度运算公式(1.1.11)，得

$$\nabla\varphi = \nabla\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$\boldsymbol{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\boldsymbol{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$$

而点电荷 q 产生的电场强度 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$，故有

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$$

这表明，静电场中的电场强度等于电位梯度的负值。

1.1.2 矢量场的散度

为了研究矢量场的空间变化规律，引入了矢量场的散度和旋度的概念。本小节讨论矢量场的散度，而矢量场的旋度则在下一小节讨论。

1. 矢量线

在矢量场中，各点的场量是随空间位置变化的矢量。因此，一个矢量场 $\boldsymbol{F}$ 可以用一个矢量函数来表示。在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{e}_x F_x(x,y,z) + \boldsymbol{e}_y F_y(x,y,z) + \boldsymbol{e}_z F_z(x,y,z) \tag{1.1.12}$$

式中，$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 分别是沿 x、y 和 z 方向的单位矢量；$F_x(x,y,z)$、$F_y(x,y,z)$ 和 $F_z(x,y,z)$ 是 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的三个分量。

在矢量场中，为了形象直观地描述矢量在空间的分布状况，引入了矢量线的概念。矢量线是一条空间曲线，在它上面每一点的场矢量都与其相切，并且用箭头来表示矢量线的正方向(见图 1－2)。例如，静电场中的电力线、磁场中的磁力线等，都是矢量线的例子。一般地，矢量场中的每一点都有矢量线通过，所以矢量线也充满矢量场所在的空间。

根据矢量线的概念可知，矢量线满足的方程为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F} = 0 \tag{1.1.13}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是矢量线的长度元矢量。

2. 矢量场的通量

如图 1－3 所示，S 为一有向曲面，其正侧的单位法线矢量为 $\boldsymbol{n}$，则矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在曲面 S 上的积分

$$\psi = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.1.14}$$

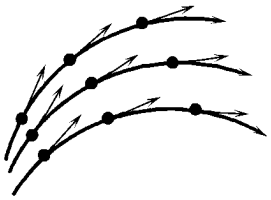


图 1－2　矢量线

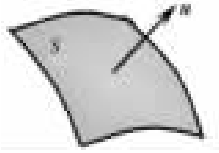


图 1－3　有向曲面

称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 通过曲面 S 的通量。例如：在电场中，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 在某一曲面 S 上的面积分就是矢量 $\boldsymbol{D}$ 通过该曲面的电通量；在磁场中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 在某一曲面 S 上的面积分就是矢量 $\boldsymbol{B}$ 通过该曲面的磁通量。

在直角坐标系中，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}S_x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}S_y+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}S_z=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则通量可以写成

$$\psi=\int_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S F_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+F_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+F_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.15}$$

如果 S 是一闭合曲面，则通过闭合曲面的总通量可表示为

$$\psi=\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.1.16}$$

对于闭合曲面，通常规定曲面 S 的外法线方向为面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向。

由通量的定义可知，若 $\boldsymbol{F}$ 从面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的负侧穿到 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的正侧时，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 相交成锐角，则通过面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的通量为正值；反之，若 $\boldsymbol{F}$ 从面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的正侧穿到 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的负侧时，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 相交成钝角，则通过面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的通量为负值。

式(1.1.16)中的 ψ 则表示从曲面 S 内穿出的正通量与从曲面 S 穿入的负通量的代数和，即穿出曲面 S 的净通量。若 $\psi>0$ 时，穿出闭合曲面 S 的通量多于穿入的通量，此时闭合曲面 S 内必有发出通量线的源，称之为正源。例如，静电场中的正电荷就是发出电力线的正源。若 $\psi<0$ 时，穿出闭合曲面 S 的通量少于穿入的通量，此时闭合曲面 S 内必有接受通量线的源，称之为负源。例如，静电场中的负电荷就是接受电力线的负源。若 $\psi=0$ 时，穿入闭合曲面 S 的通量等于穿出的通量，此时闭合曲面 S 内正源与负源的代数和为零，或闭合曲面 S 内无源。

3. **矢量场的散度**

在矢量场中，通过闭合曲面 S 的通量由闭合曲面 S 内的通量源所决定。但是，通量是一个积分量，描述的是一定范围内的通量源与净通量之间的关系，而不能反映场域内的通量源分布情况。例如，穿过某一闭合曲面 S 的净通量为零，只表明该闭合曲面内的正通量源与负通量源的代数和为零，并非该闭合曲面内一定没有通量源分布。为了研究矢量场中每一点的场与通量源之间的关系，需要引入矢量场的散度的概念。

在矢量场 $\boldsymbol{F}$ 中的任一点 M 处作一个包围该点的任意闭合曲面 S，所限定的体积为 ΔV。矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 M 处的散度记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$，其定义为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1.1.17}$$

从散度定义可知：

(1) div$\boldsymbol{F}$ 表示在矢量场中任意点 M 处，穿出单位体积的净通量，所以 div$\boldsymbol{F}$ 描述了通量源的密度。

(2) 在矢量场中的点 M 处，若 div$\boldsymbol{F}>0$，则该点有发出通量线的正通量源；若 div$\boldsymbol{F}<0$，则该点有接受通量线的负通量源；若 div$\boldsymbol{F}=0$，则该点无通量源(见图 1－4)。

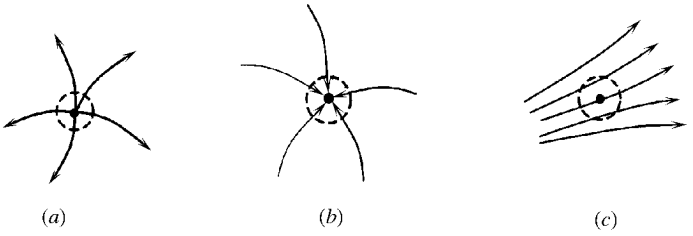


图 1－4　散度的意义

(a) div$\boldsymbol{F}>0$；(b) div$\boldsymbol{F}<0$；(c) div$\boldsymbol{F}=0$。

(3) 矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度是一个标量场，通常称 div$\boldsymbol{F}$ 为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 所产生的散度场。

散度的计算公式与坐标系有关。在直角坐标系中，根据高斯公式，有

$$\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S F_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+F_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+F_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_V\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\approx\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

代入式(1.1.17)，得到直角坐标系中散度的表达式为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\tag{1.1.18}$$

div$\boldsymbol{F}$ 又常用算符∇表示为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{e}_xF_x+\boldsymbol{e}_yF_y+\boldsymbol{e}_zF_z)=\nabla\cdot\boldsymbol{F}\tag{1.1.19}$$

在圆柱面坐标系和球面坐标系中，散度的表达式分别为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\frac{\partial F_\phi}{\rho\partial\phi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\tag{1.1.20}$$

和

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}\tag{1.1.21}$$

4. **散度定理**

根据散度的定义可知，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 是场中任意点处每单位体积内向外穿出的净通量。因此，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 在某一体积 V 上的体积分就是在该体积内向外穿出的净通量，即

$$\psi=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V$$

这个通量与从限定体积 V 的闭合曲面 S 向外穿出的净通量是相同的，于是得到

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.1.22}$$

式(1.1.22)称为散度定理，它表明矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 在体积 V 上的体积分等于矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在限定该体积的闭合曲面 S 上的面积分。散度定理是矢量场的体积分与面积分之间的一个变换关系，在电磁理论中非常有用。

例 1.2 已知 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{e}_x(x-x')+\boldsymbol{e}_y(y-y')+\boldsymbol{e}_z(z-z')$，$R=|\boldsymbol{R}|$。求矢量 $\boldsymbol{D}=\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}$ 在 $R\neq 0$ 处的散度。

解：根据散度的运算公式(1.1.18)，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x'}{R^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y'}{R^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z'}{R^3}\right)=$$

$$\frac{1}{R}-\frac{3(x-x')^2}{R^5}+\frac{1}{R}-\frac{3(y-y')^2}{R^5}+\frac{1}{R}-\frac{3(z-z')^2}{R^5}=0$$

1.1.3 矢量场的旋度

矢量场的散度描述了通量源的分布情况，反映了矢量场的一个重要性质。描述矢量场的空间变化规律的另一个表示方式是矢量场的旋度，它与矢量场的环量有关。

1. 矢量场的环量与环量面密度

矢量场 $\boldsymbol{F}$ 沿场中的一条闭合路径 C 的曲线积分

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.1.23}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 沿闭合路径 C 的环量。其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是路径元矢量，大小为 $\mathrm{d}l$、方向沿路径 C 的切线方向(见图 1－5)。

在直角坐标系中，有

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x F_x + \boldsymbol{e}_y F_y + \boldsymbol{e}_z F_z$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_x \mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y \mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}z$$

因此，式(1.1.23)可写成

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_C F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \tag{1.1.24}$$

矢量场的环量具有一定的物理意义，若某一矢量场的环量不等于零，通常认为场中有产生该矢量场的旋涡源。例如在电磁学中，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿闭合路径 C 的环量就是穿过以路径 C 为边界的曲面 S 的总电流。

在矢量场 $\boldsymbol{F}$ 中的某点 M 处作一面元 ΔS，取此面元的正法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与其边界围线 C 的绕行方向成右手螺旋关系(见图 1－6)。

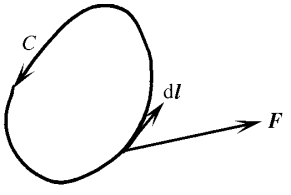


图 1－5 有向曲线



图 1－6 $\boldsymbol{n}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的关系

在点 M 处，当面元 ΔS 保持以 $\boldsymbol{n}$ 为法线方向而向点 M 处无限缩小时，极限

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度，记作 $\mathrm{rot}_n\boldsymbol{F}$，即

$$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{1.1.25}$$

从环量面密度的定义可知：

(1) 矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度，就是在该点处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的旋涡源密度。例如在磁场中，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度就是在该点沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的电流密度。

(2) 环量面密度的值既与点 M 有关，也与面元 ΔS 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 有关。因此，在矢量场中，一个给定点 M 处沿不同方向 $\boldsymbol{n}$，其环量面密度的值一般是不同的。

2. 矢量场的旋度

由于矢量场在点 M 处的环量面密度与面元 ΔS 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 有关，在某一个方向上，环量面密度可能取得最大值。为了描述这种分布状态，引入了旋度的概念。矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 M 处的旋度定义为：方向沿着使环量面密度取得最大值的面元正法线方向、大小等于该环量面密度最大值的矢量。并记作 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$(或记作 $\mathrm{curl}\boldsymbol{F}$)，即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{n}\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\Big|_{\max} \tag{1.1.26}$$

从旋度的定义可知：

(1) 矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度仍然是一个矢量，通常称 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ 为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 所产生的旋度场。

(2) 矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 M 处的旋度就是在该点的旋涡源密度。例如，在磁场中，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 在点 M 处的旋度就是在该点的电流密度 $\boldsymbol{J}$。

(3) 矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度，等于 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ 在该方向上的投影，即 $\mathrm{rot}_n\boldsymbol{F}=\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$。

旋度的具体表达式与坐标系有关，可以证明，在直角坐标系中旋度的表达式为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{1.1.27}$$

可以看出，上式右端恰好与 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 相同，所以旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ 又常用算符 ∇ 表示为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F} \tag{1.1.28}$$

为了便于记忆，可将 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 写成行列式形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \tag{1.1.29}$$

在圆柱面坐标系中，$\nabla\times\boldsymbol{F}$ 的表达式为

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} \tag{1.1.30}$$

在球面坐标系中，$\nabla \times \boldsymbol{F}$ 的表达式为

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi \end{vmatrix} \tag{1.1.31}$$

旋度与散度的区别：

(1) 一个矢量场的旋度是一个矢量函数，而一个矢量场的散度是一个标量函数。

(2) 旋度描述的是矢量场中各点的场量与旋涡源的关系，而散度描述的是矢量场中各点的场量与通量源的关系。

(3) 如果矢量场所在的全部空间中，场的旋度处处为零，则这种场中不可能存在旋涡源，因而称之为无旋场(或保守场)；如果矢量场所在的全部空间中，场的散度处处为零，则这种场中不可能存在通量源，因而称之为无源场(或管形场)。

(4) 在旋度公式(1.1.27)中，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的场分量 F_x、F_y、F_z 分别只对与其垂直方向的坐标变量求偏导数，所以矢量场的旋度描述的是场分量在与其垂直的方向上的变化规律；而在散度公式(1.1.18)中，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的场分量 F_x、F_y、F_z 分别只对 x、y、z 求偏导数，所以矢量场的散度描述的是场分量沿着各自方向上的变化规律。

3. 斯托克斯定理

在矢量场 $\boldsymbol{F}$ 所在的空间中，对于任一个以曲线 C 为周界的曲面 S，存在如下重要关系式：

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.1.32}$$

上式称为斯托克斯定理，它表明矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 在曲面 S 上的面积分等于矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在限定该曲面的闭合曲线 C 上的线积分。斯托克斯定理是矢量场的曲面积分与曲线积分之间的一个转换关系，在电磁理论中也是很有用的。

例 1.3 在球面坐标系中，已知矢量场 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_r \dfrac{2\cos\theta}{r^3} + \boldsymbol{e}_\theta \dfrac{\sin\theta}{r^3}$，求 $\nabla \times \boldsymbol{E}$。

解：由球面坐标系中的旋度计算公式(1.1.31)，有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ \dfrac{2\cos\theta}{r^3} & r\dfrac{\sin\theta}{r^3} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin\theta}{r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\right)\right] = 0$$

1.1.4 拉普拉斯运算

1. 标量场的拉普拉斯运算

标量场 u 的梯度∇u 是一个矢量场，如果再对∇u 求散度，即$\nabla \cdot (\nabla u)$，称为标量场 u 的拉普拉斯运算，记为

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u \tag{1.1.33}$$

这里“∇^2”称为拉普拉斯算符。

在直角坐标系中，由式(1.1.9)和式(1.1.18)，可得

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1.1.34}$$

在圆柱面坐标系和球面坐标系中，$\nabla^2 u$ 的表达式分别为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1.1.35}$$

和

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \tag{1.1.36}$$

2. 矢量场的拉普拉斯运算

在电磁场中，经常会遇到矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的拉普拉斯运算$\nabla^2 \boldsymbol{F}$，它的定义是

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) \tag{1.1.37}$$

容易证明，在直角坐标系中，有

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x \nabla^2 F_x + \boldsymbol{e}_y \nabla^2 F_y + \boldsymbol{e}_z \nabla^2 F_z \tag{1.1.38}$$

1.1.5 亥姆霍兹定理

1. 亥姆霍兹定理

根据前面几节的讨论，我们知道，一个矢量场的散度和旋度是两个独立的运算，只有同时给出散度和旋度才能完整地描述矢量场的性质。事实上，可以证明，在有限的区域 V 内，任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件(即限定区域 V 的闭合面 S 上的矢量场的分布)惟一确定，这就是亥姆霍兹定理。亥姆霍兹定理的意义是非常重要的，它是研究电磁场理论的一条主线，无论对静态电磁场还是时变电磁场，都要研究它们的散度、旋度和边界条件。

2. 矢量场的分类

根据矢量场的散度和旋度，可将矢量场分为四种基本类型。

1) 调和场

如果矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在区域 V 内处处都有

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$$

和

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$$

则称该矢量场为调和场。

在矢量分析中，有以下重要的恒等式

$$\nabla \times (\nabla u) = 0 \tag{1.1.39}$$

也就是说，任何一个标量场的梯度的旋度恒为零。式(1.1.39)又表明，若矢量场是一个无旋场，则该矢量场可表示为一个标量场的梯度。因此，调和场 $\boldsymbol{F}$ 可以表示为一个标量场 u 的梯度，即

$$\boldsymbol{F} = -\nabla u \tag{1.1.40}$$

函数 u 称为调和场 $\boldsymbol{F}$ 的标量位函数，简称标量位。式中有一负号，是因为电磁场中取 $\boldsymbol{F}$ 的方向为 u 减小的方向。

将式(1.1.40)代入 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}=0$，可得

$$\nabla^2 u = 0 \tag{1.1.41}$$

这是拉普拉斯方程。因此，对于调和场，可通过解拉普拉斯方程求得 u，然后由 $\boldsymbol{F}=-\nabla u$ 计算矢量场 $\boldsymbol{F}$。

2) 有源无旋场

如果矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在区域 V 内处处都有 $\nabla \times \boldsymbol{F}=0$，但 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}=\rho \neq 0$，则该矢量场为有源无旋场。由于 $\nabla \times \boldsymbol{F}=0$，仍然有 $\boldsymbol{F}=-\nabla u$，代入 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}=\rho$，则得

$$\nabla^2 u = -\rho \tag{1.1.42}$$

这是泊松方程。因此，对于有源无旋场，可通过解泊松方程求得 u，然后由 $\boldsymbol{F}=-\nabla u$ 计算矢量场 $\boldsymbol{F}$。

3) 无源有旋场

如果矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在区域 V 内处处都有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0,\ \nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \neq 0$$

则该矢量场为无源有旋场。

在矢量分析中，另一个重要的恒等式为

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{1.1.43}$$

也就是说，任何一个矢量场的旋度的散度恒为零。式(1.1.43)又表明，若一个矢量场是无散场，则该矢量场可表示为另一个矢量场的旋度。因此，可将无源有旋场 $\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.1.44}$$

函数 $\boldsymbol{A}$ 称为无源场 $\boldsymbol{F}$ 的矢量位函数，简称矢量位。将 $\boldsymbol{F}=\nabla \times \boldsymbol{A}$ 代入 $\nabla \times \boldsymbol{F}=\boldsymbol{J}$，可得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}$$

由于 $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}=\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A})-\nabla^2 \boldsymbol{A}$，所以

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{J}$$

根据亥姆霍兹定理，为了得到惟一确定解，还需给定 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$。若令 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0$，则有

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{J} \tag{1.1.45}$$

这就是矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的矢量泊松方程。

4) 有源有旋场

一般的情况下，如果矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度和旋度都不为零，即

$$\begin{cases}\nabla \cdot \boldsymbol{F}=g\\ \nabla \times \boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}\end{cases}$$

这里 g 和 $\boldsymbol{G}$ 为已知函数，则该矢量场为有源有旋场。这时，可将矢量场 $\boldsymbol{F}$ 表示为一个有源无旋场 $\boldsymbol{F}_i$ 和无源有旋场 $\boldsymbol{F}_s$ 的叠加，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_s \tag{1.1.46}$$

式中，$\boldsymbol{F}_s$ 和 $\boldsymbol{F}_i$ 分别满足

$$\begin{cases}\nabla \cdot \boldsymbol{F}_s=0\\ \nabla \times \boldsymbol{F}_s=\boldsymbol{G}\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\nabla \cdot \boldsymbol{F}_i=g\\ \nabla \times \boldsymbol{F}_i=0\end{cases}$$

因而，可定义一个标量位函数 u 和矢量位函数 $\boldsymbol{A}$，使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_i=-\nabla u\\ \boldsymbol{F}_s=\nabla \times \boldsymbol{A}\end{cases}$$

于是

$$\boldsymbol{F}=-\nabla u+\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.1.47}$$

练　习　题

1.1－1　求标量场 $u=xy+yz+zx$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿矢径的方向导数。

1.1－2　已知标量函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y-6z$。(1)求 ∇u；(2)在哪些点上 ∇u 等于零。

1.1－3　已知矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x^2 yz+\boldsymbol{e}_y xy^2 z+\boldsymbol{e}_z xyz^2$，求 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$。

1.1－4　求下列矢量的旋度

(1) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x^2+\boldsymbol{e}_y y^2+\boldsymbol{e}_z z^2$；

(2) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x yz+\boldsymbol{e}_y zx+\boldsymbol{e}_z xy$；

(3) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x(y^2+z^2)+\boldsymbol{e}_y(z^2+x^2)+\boldsymbol{e}_z(x^2+y^2)$。

1.1－5　证明任何一个标量场的梯度的旋度恒为零，即 $\nabla \times (\nabla u)=0$。

1.1－6　证明任何一个矢量场的旋度的散度恒为零，即 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})=0$。

1.1－7　已知矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x(x^2+axz)+\boldsymbol{e}_y(xy^2+by)+\boldsymbol{e}_z(z-z^2+czx-2xyz)$，试确定常数 a、b、c 使 $\boldsymbol{E}$ 为无源场。

1.1－8　已知三个矢量

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x(3y^2-2x)+\boldsymbol{e}_y x^2+\boldsymbol{e}_z 2z$（直角坐标系）；

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\rho z^2 \sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi z^2 \cos\phi-\boldsymbol{e}_z 2\rho z \sin\phi$（圆柱面坐标系）；

$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_r \sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_\theta \cos\theta\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi \sin\phi$（球面坐标系）。

问:(1)哪些矢量可以表示为一个标量函数的梯度?

(2)哪些矢量可以表示为一个矢量函数的旋度?

1.2 电磁场的源量——电荷与电流

在电磁理论中,电荷和电流是产生电磁场的源量。电荷要产生电场,运动的电荷形成电流,电流要产生磁场。

1.2.1 电荷与电荷密度

自然界中存在的电荷有正电荷和负电荷两种形式,带电体所带的电荷数量的多少称为电荷量,通常用 q 表示,单位为 C(库)。从微观上看,电荷集中在一个个带电微观粒子上,最小的带电粒子包括电子和质子。也就是说,电荷是以离散的方式分布的。但在研究宏观电磁现象时,对大量带电微观粒子的宏观效应,则可以假定电荷是以连续的形式分布在带电体上,并用电荷密度来描述这种分布。

在电磁理论中,根据电荷分布的具体情况,电荷源模型分为体电荷、面电荷、线电荷和点电荷。

1. 电荷体密度(即体电荷密度)

连续分布于体积 V 内的电荷称为体分布电荷。设分布在体积元 ΔV 中的电荷量为 Δq,则电荷体密度 ρ 的定义为

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \tag{1.2.1}$$

式中,$\rho(\boldsymbol{r})$是空间位置 $\boldsymbol{r}$ 的函数,单位为 $\mathrm{C/m^3}$(库/米^3)。利用 $\rho(\boldsymbol{r})$可以求出体积 V 中的总电量为

$$q = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V \tag{1.2.2}$$

2. 电荷面密度(即面电荷密度)

当电荷分布在一个薄层上时,为了便于分析,引入了面电荷的概念,并用电荷面密度 ρ_S 来描述其分布。设分布在面积元 ΔS 上的电荷量为 Δq,则电荷面密度 ρ_S 的定义为

$$\rho_S(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} \tag{1.2.3}$$

式中,$\rho_S(\boldsymbol{r})$是空间位置 $\boldsymbol{r}$ 的函数,单位为 $\mathrm{C/m^2}$(库/米^2)。利用 $\rho_S(\boldsymbol{r})$可以求出曲面 S 上的总电量为

$$q = \int_S \rho_S(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{1.2.4}$$

3. 电荷线密度(即线电荷密度)

若电荷分布在一根细线上,则称为线电荷。设分布在长度元 Δl 上的电荷量为 Δq,则电荷线密度 ρ_l 定义为

$$\rho_l(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \tag{1.2.5}$$

式中，$\rho_l(\boldsymbol{r})$是空间位置 $\boldsymbol{r}$ 的函数，单位为 C/m(库/米)。利用 $\rho_l(\boldsymbol{r})$可以求出某段曲线 l 上的总电量为

$$q=\int_l \rho_l(\boldsymbol{r})\mathrm{d}l \tag{1.2.6}$$

4. 点电荷与点电荷体密度

“点电荷”在电磁场问题的讨论中是一个重要的概念。当一个带电体的体积小，以至于可以忽略其体积的大小时，可将其看作电荷 q 集中在一个体积为零的几何点上，这个电荷就称为点电荷 q。显然，位于坐标原点的点电荷 q 的体密度 $\rho(\boldsymbol{r})$应该具有如下性质：

$$\rho(\boldsymbol{r})=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{q}{\Delta V}=\begin{cases}0, \boldsymbol{r}\neq 0\\ \infty, \boldsymbol{r}=0\end{cases} \tag{1.2.7}$$

1.2.2 电流与电流密度

电流是由电荷定向流动形成的，电流通常用 i 表示，单位为 A(安)。设在 Δt 时间内通过某一曲面 S 的电量为 Δq，则定义通过曲面 S 的电流为

$$i=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.8}$$

若电荷运动的速度不随时间变化，则形成的电流也不随时间变化，称为恒定电流，通常用 I 表示。

在电磁理论中，电流源模型分为体电流、面电流和线电流。

1. 体电流密度

电荷在某一体积内流动所形成的电流称为体电流。在空间不同的位置上，电荷流动的快慢可能不同，其方向也可能不同，所以仅仅用穿过某一截面的电荷量无法描述电流在空间的分布情况。为此，引入了电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 来描述电流的分布情况。空间任一点的电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 的方向为该点处正电荷的运动方向，其大小等于通过在该点垂直于 $\boldsymbol{J}$ 的单位面积的电流，即

$$J=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta i}{\Delta S}=\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}S} \tag{1.2.9}$$

其单位为 $\mathrm{A/m^2}$(安/米^2)。

当体密度为 ρ 的电荷以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动时，通过任意面积元 $\Delta\boldsymbol{S}$ 的电流为 $\Delta i=\rho\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$。由此可得

$$\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v} \tag{1.2.10}$$

由已知的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 可求得通过任一曲面 S 的电流为

$$i=\int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.2.11}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的法向单位矢量。

2. 面电流密度

若电荷只在一个厚度很小的薄层内流动时，为了便于分析，可以忽略薄层的厚度，近似认为电荷是在一个几何曲面上流动，所形成的电流称为面电流。对于面电流，可用面电

流密度 $\boldsymbol{J}_S$ 来描述其分布情况。如图 1－7 所示，在曲面 S 上垂直于电荷运动方向取一线元 Δl，设通过此线元的电流为 Δi，则面电流密度 $\boldsymbol{J}_S$ 的大小为

$$J_S = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}l} \tag{1.2.12}$$

其单位为 A/m(安/米)。

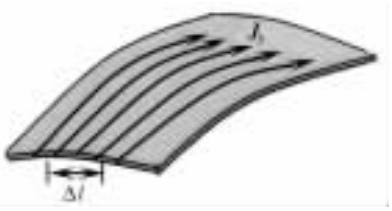


图 1－7　面电流密度

3. 线电流密度

若电荷沿一横截面积可以忽略的曲线流动，所形成的电流称为线电流。长度元为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的电流 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 称为电流元，也是电磁场中的重要概念之一。若电荷以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，则

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\mathrm{d}q/\mathrm{d}t)\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}q(\mathrm{d}\boldsymbol{l}/\mathrm{d}t) = \mathrm{d}q\boldsymbol{v}$$

1.2.3　电荷守恒定律与电流连续性方程

实验证明，电荷是守恒的，既不能被创造，也不能被消灭，只能从一个物体转移到另一个物体，或者从一个地方移动到另一个地方。这就是电荷守恒定律，是电磁现象中的基本定律之一。

在电流密度为 $\boldsymbol{J}$ 的空间中，任取一个边界面为 S 的体积 V。根据电荷守恒定律，单位时间内体积 V 中减少的电荷量 $-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ 应该等于流出曲面 S 的电流 $\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，即

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{1.2.13}$$

上式就是电荷守恒定律的积分表示式，又称为电流连续性方程。

若体积 V 是固定的，不随时间变化，则式(1.2.13)中的全导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 可以改成偏导数 $\frac{\partial}{\partial t}$，即有

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{1.2.14}$$

在式(1.2.14)的左端应用散度定理，将闭合面上的面积分变为体积分，并且由于体积 V 的大小和形状不随时间变化，可将微分移入积分号中，得

$$\int_V \left(\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\mathrm{d}V = 0 \tag{1.2.15}$$

考虑到体积 V 的任意性，要使积分成立，被积函数必须为零，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.2.16}$$

这就是电荷守恒定律的微分形式。

对于恒定电流，为了维持空间任意点电流密度不随时间变化，此点的电荷分布必须与时间无关，即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$，于是可以得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \text{ 和 } \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.2.17}$$

这就是恒定电流连续性方程。它表明,空间的稳恒电流形成一个无源场,电流线形成连续的闭合曲线,没有起点和终点。

例 1.4 在球面坐标系中,传导电流密度为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}_r 10 r^{-1.5} \quad (\mathrm{A/m^2})$$

求:(1) 通过半径 $r=1\mathrm{mm}$ 的球面的电流值;

(2) 在半径 $r=1\mathrm{mm}$ 的球面上电荷密度的增加率;

(3) 在半径 $r=1\mathrm{mm}$ 的球体内总电荷的增加率。

解:(1)
$$I = \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 10 r^{-1.5} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \Big|_{r=1\mathrm{mm}} =$$

$$40\pi r^{0.5} \Big|_{r=1\mathrm{mm}} = 3.97(\mathrm{A})$$

(2) 在球面坐标系中

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 10 r^{-1.5}) = 5 r^{-2.5}$$

由电流连续性方程(1.2.16),得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\Big|_{r=1\mathrm{mm}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{J}\Big|_{r=1\mathrm{mm}} = -1.58\times 10^8 \quad (\mathrm{A/m^3})$$

(3)由式(1.2.13),得到半径 $r=1\mathrm{mm}$ 的球体内总电荷的增加率为

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 3.97 \quad (\mathrm{A})$$

练 习 题

1.2−1 已知半径为 a 的球面上分布着 $\rho_S = \rho_{S0}\cos\theta$ 的面电荷,ρ_{S0} 为常数。求球面上的总电量 q。

1.2−2 已知半径为 a、长为 l 的圆柱体内分布着轴对称的体电荷,电荷密度 $\rho(r) = \rho_0 \dfrac{r}{a}(0 \leqslant r \leqslant a)$,$\rho_0$ 为常数。求总电量 q。

1.2−3 已知半径为 a 的球面上分布着总电量为 q 的面电荷。当球面以角速度 ω 绕某一直径(z 轴)旋转时,求球面上的面电流密度 $\boldsymbol{J}_S$。

1.3 电场强度与磁感应强度

描述电场的基本物理量是电场强度矢量,描述磁场的基本物理量是磁感应强度矢量。

1.3.1 电场强度

近代物理学的发展表明,电荷周围会形成一种物质,这种物质就是电场。描述电场分布的基本物理量是电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$,简称电场强度,单位为 V/m(伏/米)。不随

时间变化的静止电荷产生的电场称为静电场，随时间发生变化的电荷产生的电场称为时变电场。

电场的一个重要特性是会对位于电场中的其他电荷施加电场力的作用。实验表明，若将一个电量为 q_0 的试验电荷放入电场中，它所受到的电场力 $\boldsymbol{F}_e$ 为

$$\boldsymbol{F}_e = q_0 \boldsymbol{E} \tag{1.3.1}$$

由式(1.3.1)可见，电荷所受到的电场力 $\boldsymbol{F}_e$ 的大小与电量 q_0 成正比，其方向与电场强度的方向一致。因此，由试验电荷 q_0 在电场中所受的电场力 $\boldsymbol{F}_e$ 可以确定电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\boldsymbol{F}_e}{q_0} \tag{1.3.2}$$

式中，取极限 $q_0 \to 0$ 的意思是 q_0 应为足够小的点电荷，以使它的引入不会对原有的电场产生影响。

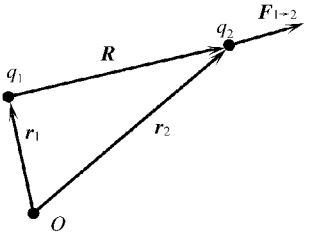


图 1－8　点电荷间的作用力

库仑从实验中总结出真空中两个静止点电荷之间相互作用力的规律，称为库仑定律。如图 1－8 所示，两个点电荷 q_1 和 q_2 分别处于矢径为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的位置上，则 q_1 对 q_2 的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{1\to2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{R} \tag{1.3.3}$$

式中，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 表示由 q_1 指向 q_2 的距离矢量；$R=|\boldsymbol{R}|$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的模；$\boldsymbol{e}_R$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的单位矢量。$\varepsilon_0 \approx (1/36\pi)\times10^{-9} \approx 8.854\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$(法/米)，称为真空介电常数或真空电容率。

根据电场强度的定义式(1.3.2)和库仑定律(1.3.3)，可以得到位于矢径 $\boldsymbol{r}'$ 处的点电荷 q 在场点 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1.3.4}$$

若有 N 个点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_N$，分别位于 $\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}'_2, \cdots, \boldsymbol{r}'_N$，则场点 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度为各电荷单独产生的电场强度的矢量和，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_i|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_i) \tag{1.3.5}$$

若在体积 V 中存在电荷体密度为 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 的体电荷分布，可将体积 V 划分为很多小体积元 $\Delta V'_i (i=1,2,\cdots,N)$，小体积元 $\Delta V'_i$ 包含的电荷量 $\Delta q_i = \rho(\boldsymbol{r}'_i)\Delta V'_i$，在场点 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度产生的电场强度

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_i|^3}\rho(\boldsymbol{r}'_i)\Delta V'_i$$

将所有 Δq_i 产生的 $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ 矢量叠加，并令小体积元 $\Delta V'_i$ 趋于零，即可得到场点 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\substack{\Delta V'_i \to 0 \\ N\to\infty}}\sum_{i=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_i|^3}\rho(\boldsymbol{r}'_i)\Delta V'_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V' \tag{1.3.6}$$

类似地，面电荷和线电荷的电场强度分别为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho_S(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{1.3.7}$$

和

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho_l(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l' \tag{1.3.8}$$

例 1.5　均匀带电有限长直线的电场强度

如图 1－9 所示，长度为 $2l$ 的直线段上分布着电荷线密度 ρ_{l0} 的均匀电荷，求此线电荷的电场强度。

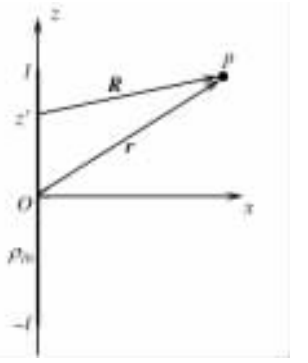


图 1－9　有限长直线电荷

解：采用圆柱面坐标系，令线电荷与 z 轴相重合，中点位于坐标原点。显然电场强度具有轴对称性，可以仅在 ϕ 为常数的平面内计算电场强度。这样场点的位矢 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_\rho\rho+\boldsymbol{e}_z z$，源点的位矢 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_z z'$。由式(1.3.8)可得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{\boldsymbol{e}_\rho\rho+\boldsymbol{e}_z(z-z')}{[\rho^2+(z-z')^2]^{3/2}}\mathrm{d}z' =$$

$$\boldsymbol{e}_\rho\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left\{\frac{z+l}{[\rho^2+(z+l)^2]^{1/2}}-\frac{z-l}{[\rho^2+(z-l)^2]^{1/2}}\right\}+$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left\{\frac{l}{[\rho^2+(z+l)^2]^{1/2}}-\frac{1}{[\rho^2+(z-l)^2]^{1/2}}\right\}$$

如果在直线段的两端无限延长变为无限长线电荷，令 $l\to\infty$，即得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_\rho\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

例 1.6　均匀带电的环形薄圆盘轴线上的电场强度

如图 1－10 所示，一个均匀带电的环形薄圆盘，内半径为 a，外半径为 b，电荷面密度为 ρ_{S0}，求环形薄圆盘轴线上任一点的电场强度。

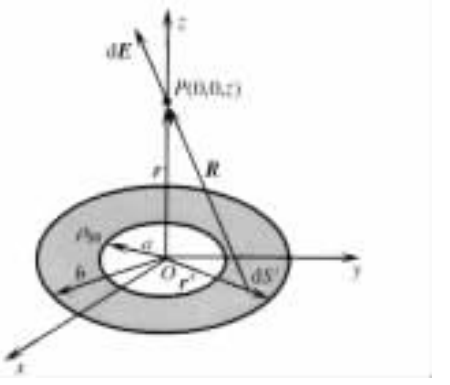


图 1－10　均匀带电环形薄圆盘在轴线上的电场强度

解：环形薄圆盘上的面积元 $\mathrm{d}S'$ 所带电荷为 $\rho_{S0}\mathrm{d}S'=\rho_{S0}\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\phi'$，此电荷到轴线上 $P(0,0,z)$ 点的距离矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_z z-\boldsymbol{e}'_\rho\rho'$，其大小 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=(z^2+\rho'^2)^{1/2}$。由式(1.3.7)，得 $P(0,0,z)$ 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(z) = \frac{\rho_{S0}}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{e}_z z-\boldsymbol{e}'_\rho\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\phi' =$$

$$\frac{\rho_{S0}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_a^b\frac{\boldsymbol{e}_z z\rho'\mathrm{d}\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'-\int_a^b\frac{\rho'^2\mathrm{d}\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{e}'_\rho\mathrm{d}\phi'\right.$$

由于 $\boldsymbol{e}'_\rho=\boldsymbol{e}_x\cos\phi'+\boldsymbol{e}_y\sin\phi'$，所以

$$\int_0^{2\pi}\boldsymbol{e}'_\rho\mathrm{d}\phi' = \int_0^{2\pi}(\boldsymbol{e}_x\cos\phi'+\boldsymbol{e}_y\sin\phi')\mathrm{d}\phi' = 0$$

于是

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{s0}z}{2\varepsilon_0}\int_a^b\frac{\rho'\mathrm{d}\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{s0}z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(z^2+a^2)^{1/2}}-\frac{1}{(z^2+b^2)^{1/2}}\right]$$

从以上结果可以看到，轴线上的电场强度只有 $\boldsymbol{e}_z$ 分量，这是由于电荷的对称分布，对 P 点一侧的每一个可以产生电场强度径向分量的电荷元，在 P 点另一侧存在相对应的电荷元恰好与它的作用抵消，从而使电场强度没有径向分量。

在以上结果中，保持内半径 a 不变，令外半径 $b\to\infty$，可得到具有圆形孔的无限大均匀带电平面在圆孔轴线上的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S0}}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+a^2)^{1/2}}$$

若保持外半径 b 不变，令内半径 $a\to0$，则得到半径为 b 的均匀带电圆盘在轴线上的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S0}z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|}-\frac{1}{(z^2+b^2)^{1/2}}\right]$$

若令内半径 $a\to0$ 且外半径 $b\to\infty$，则得到无限大均匀带电平面外任一点的电场强度

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_z\frac{\rho_{S0}}{2\varepsilon_0}$$

1.3.2 磁感应强度

运动的电荷形成电流，电流要产生磁场，描述磁场分布的基本物理量是磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$，简称磁感应强度，单位为 T(特〔斯拉〕)。磁场的重要特性是对磁场中的运动电荷产生磁场力作用。实验表明，若一个电量为 q_0 的试验电荷以速度 $\boldsymbol{v}$ 在磁场中运动，它所受到的磁场力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}$ 为

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{m}=q_0\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\tag{1.3.9}$$

由式(1.3.9)可见，静止电荷不会受到磁场力的作用，而运动电荷所受到的磁场力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{m}$ 的大小不仅与乘积 q_0v 成正比，并且随电荷运动方向与磁场方向之间的夹角而变化。当电荷运动方向与磁场方向一致时，电荷所受到的磁场力为零；当电荷运动方向与磁场方向垂直时，电荷所受到的磁场力最大。因此，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$\boldsymbol{B}=\lim_{q_0\to0}\frac{(\boldsymbol{F}_\mathrm{m})_{\max}}{q_0\boldsymbol{v}}\tag{1.3.10}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向与电荷受到的磁场力为零的运动方向一致。

由于 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}q\boldsymbol{v}$，由式(1.3.9)可知，电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场中受力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{m}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}\tag{1.3.11}$$

安培根据实验结果的分析，总结出真空中的两个恒定电流元之间的相互作用力规律，称为安培定律。如图 1－11 所示，设电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 和 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 分别位于矢径为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的位置上，则电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 对电流元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{1\to 2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times[I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3} \tag{1.3.12}$$

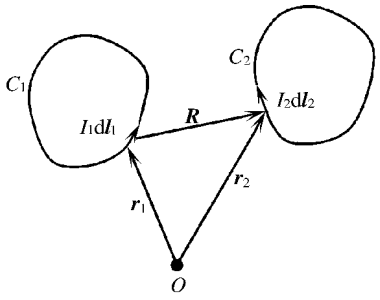


图 1－11　电流元之间的作用力

式中，$\mu_0\approx 4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$（亨/米），称为真空磁导率。

由式(1.3.11)和(1.3.12)可知，位于矢径为 $\boldsymbol{r}'$ 的恒定电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 在场点 $\boldsymbol{r}$ 处的磁感应强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{1.3.13}$$

此式即为毕奥－沙伐尔定律。

任何恒定电流回路 C 周围空间的磁感应强度可由式(1.3.13)计算得出

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{1.3.14}$$

对于体电流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 和面电流密度 $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}')$，相应的电流元分别为 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$ 和 $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'$。所以体电流和面电流的磁感应强度分别为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' \tag{1.3.15}$$

和

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}S' \tag{1.3.16}$$

例 1.7　有限长直线电流的磁感应强度

如图 1－12 所示，长度为 $2l$ 的直线电流为 I，求此线电流的磁感应强度。

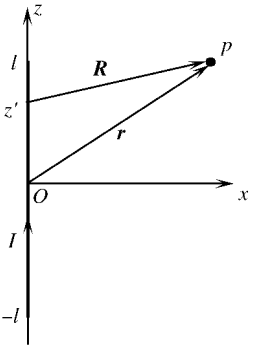


图 1－12　有限长直线电流

解：采用圆柱面坐标系，令线电流与 z 轴相重合，中点位于坐标原点。显然磁感应强度具有轴对称性，只需在 ϕ 为常数的平面内计算磁感应强度即可。这样场点的位矢 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_\rho\rho+\boldsymbol{e}_z z$，源点的位矢 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_z z'$。由式(1.3.14)可得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\boldsymbol{e}_z\times[\boldsymbol{e}_\rho\rho+\boldsymbol{e}_z(z-z')]}{[\rho^2+(z-z')^2]^{3/2}}\mathrm{d}z'=$$

$$\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\rho}{[\rho^2+(z-z')^2]^{3/2}}\mathrm{d}z'=$$

$$\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left\{\frac{z+l}{[\rho^2+(z+l)^2]^{1/2}}-\frac{z-l}{[\rho^2+(z-l)^2]^{1/2}}\right\}$$

如果在直线段的两端无限延长变为无限长线电流，令 $l\to\infty$，即得到

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

例 1.8　线电流圆环轴线上的磁感应强度

如图 1－13 所示，一个半径为 a 的线电流圆环，电流为 I，求圆环轴线上任一点的磁

感应强度。

解：在圆柱面坐标系中，圆环上的电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=\boldsymbol{e}'_{\phi}Ia\,\mathrm{d}\phi'$，到轴线上 $P(0,0,z)$ 点的距离矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_z z-\boldsymbol{e}'_{\rho}a$，其大小 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=(z^2+a^2)^{1/2}$。由式(1.3.14)，得 P 点磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}(z)=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{e}'_{\phi}\times(\boldsymbol{e}_z z-\boldsymbol{e}'_{\rho}a)}{(z^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\phi'=$$

$$\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{e}'_{\rho}z+\boldsymbol{e}_z a}{(z^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\phi'=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 Ia^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

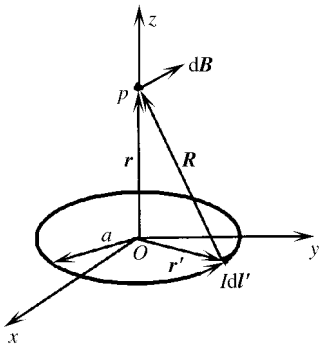


图 1－13　线电流圆环轴线上的磁感应强度

在圆环的中心 $z=0$ 处，磁感应强度最大

$$\boldsymbol{B}(0)=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 I}{2a}$$

例 1.9　在均匀的静态电磁场中，有一个电量 $q=1.5\times10^{-6}\,\mathrm{C}$ 的点电荷。当 q 静止时，受力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_e=\boldsymbol{e}_x 15\times10^{-6}\,\mathrm{N}$；当 q 以速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_z 2\,\mathrm{m/s}$ 运动时，受力与静止时相同；当 q 以速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_y 2.5\,\mathrm{m/s}$ 运动时，受力 $\boldsymbol{F}=0$。试求电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

解：当 q 静止时，由 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_e=q\boldsymbol{E}$，得电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}_e}{q}=\boldsymbol{e}_x 10\quad(\mathrm{V/m})$$

当 q 以速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_z 2\,\mathrm{m/s}$ 运动时，$\boldsymbol{F}_m=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0$，所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z B_0$$

其中 B_0 为未知常数。当 q 以速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_y 2.5\,\mathrm{m/s}$ 运动时，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x 2.5qB_0$。又 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_e+\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}=0$，所以 $\boldsymbol{F}_m=-\boldsymbol{F}_e$。由此可得到

$$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_z 4\quad(\mathrm{T})$$

练　习　题

1.3－1　三根长度均为 l，均匀线电荷密度分别为 ρ_{l0}、$2\rho_{l0}$ 和 $3\rho_{l0}$ 的线电荷构成等边三角形。计算三角形中心处的电场强度。

1.3－2　设有一个外接圆半径为 a 的正 n 边形线圈，其中的电流为 I。试证明线圈中心的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2\pi a}\tan\frac{\pi}{n}$$

并讨论 $n\to\infty$ 时的极限情况。

1.3－3　一个点电荷 q 以速度 v 沿直角坐标系的 z 轴运动，如果在 x 轴方向有一均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{e}_x B_0$，问应加一个什么样的电场才能使此点电荷继续沿 z 轴运动？

1.4 电磁场中媒质的电磁特性

所有物质都是由带正电荷和负电荷的粒子组成，如果将它们放入电磁场中，带电粒子因受到电磁力的作用而改变其状态。从宏观效应看，物质对电磁场的响应可分为极化、磁化和传导三种状态，并可分别用表征其电磁特性的电磁参量来描述。一般说来，任何物质对电磁场的三种响应状态是同时存在的，但不同的物质对这些响应的程度可能存在较大的差异。以极化或磁化为主的物质通常称为电介质或磁介质，以传导为主的物质通常称为导体。

1.4.1 介质的极化·电位移矢量

1. 极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$

介质的分子一般有两种类型：一种分子的正负电荷中心重合，没有电偶极矩，称为无极分子；另一种分子的正负电荷中心不重合，形成固有电偶极矩，称为有极分子。当无外加电场时，分子作无规则热运动，宏观上不显示电特性。在宏观电场的作用下，无极分子正负电荷的中心相对位移，形成分子电偶极矩，而有极分子的固有电偶极矩的取向将趋向于与电场方向一致，这种现象称为介质的极化。

描述介质的极化程度及其极化效应的物理量是极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$，它定义为单位体积内的电偶极矩的矢量和，即

$$\boldsymbol{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V} \tag{1.4.1}$$

式中，$\boldsymbol{p}_i$ 为小体积 ΔV 中的第 i 个分子的电偶极矩。极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 单位是 $\mathrm{C/m^2}$。

2. 极化电荷和极化电流

介质未极化时，由于无规则热运动，不会出现宏观的电荷分布。介质产生极化以后，由于电偶极矩的有序排列，在介质内部和表面会出现宏观电荷分布，这种由极化引起的宏观电荷称为极化电荷。介质中的极化电荷不能离开分子移动，所以又称为束缚电荷。极化电荷的分布用极化电荷体密度 ρ_P 或极化电荷面密度 ρ_{SP} 来表示。

在极化介质中，设每一个分子的正负电荷间的平均相对位移为 $\boldsymbol{l}$，则分子电偶极矩 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$。为了计算介质中任一闭合曲面 S 所包围的极化电荷，可先在曲面 S 上任取一个面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，计算从它穿出去的电荷。为方便计算，假定极化过程中负电荷不动，而正电荷有一位移 $\boldsymbol{l}$。显然，处于小体积 $\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 中的正电荷将从面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 穿出，如图 1－14 所示。设单位体积中的分子数为 n，则穿过面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的电荷量为

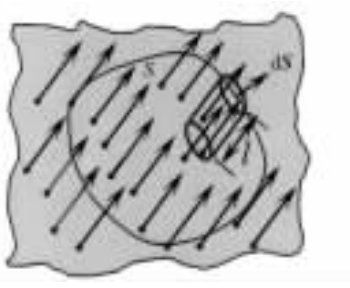


图 1－14 介质的极化

$$nq\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=n\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.4.2}$$

所以闭合曲面 S 穿出 V 的正电荷量为 $\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$。由电中性可知，留在闭合曲面 S 内的极化电荷量则为

$$q_{\mathrm{P}}=\int_{V}\rho_{\mathrm{P}}\mathrm{d}V=-\oint_{S}\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_{V}\nabla\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}V \tag{1.4.3}$$

由此可得介质体内的电荷体密度为

$$\rho_{\mathrm{P}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{1.4.4}$$

这是一个重要的结果，它反映了介质内部任意点的极化电荷分布与极化强度之间的关系，通常可用来求解介质内部的极化电荷分布。

为了计算介质表面上出现的极化电荷面密度 ρ_{sp}，则在介质体内紧贴表面取一个闭曲面，从这个闭曲面上穿出的极化电荷就是电介质表面上的极化面电荷。由式(1.4.2)可知，从面积元 ΔS 上穿出的极化电荷量为 $\Delta q_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\Delta S$，故极化电荷面密度 ρ_{SP} 为

$$\rho_{\mathrm{SP}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \tag{1.4.5}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为介质表面的外法向单位矢量。这就是极化电荷面密度与极化强度的关系，它通常被用来求解介质极化时产生的表面极化电荷分布。

当外加电场随时间发生改变时，极化强度 $\boldsymbol{P}$ 将随时间变化，极化电荷也会在一定的范围内运动，从而形成极化电流，极化电流密度用 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{P}}$ 表示。从式(1.4.2)可知，通过面积元 ΔS 的极化电流为

$$\Delta i_{\mathrm{P}}=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{S})=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

由此得到极化电流密度为

$$J_{\mathrm{P}}=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{1.4.6}$$

对式(1.4.6)取散度，并利用式(1.4.4)，可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{P}}+\frac{\partial\rho_{\mathrm{P}}}{\partial t}=0 \tag{1.4.7}$$

这表明极化电荷和极化电流也满足电荷守恒定律。

3. **电位移矢量**

当电介质在外加电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的作用下极化时，电介质中的极化电荷将在空间中产生附加电场 $\boldsymbol{E}'$。此附加电场 $\boldsymbol{E}'$有减弱电介质极化的趋势，通常称为退极化场。这时空间中任一点的电场 $\boldsymbol{E}$ 应为外加电场 $\boldsymbol{E}_0$ 与附加电场 $\boldsymbol{E}'$的合成电场，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}' \tag{1.4.8}$$

电介质的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 既与合成电场 $\boldsymbol{E}$ 有关，也与电介质的特性有关，也就是说，处于相同电场中的不同电介质，极化的程度不一定相同。若电介质中 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的大小满足线性关系且方向相同，则称之为线性和各向同性的电介质。在这种电介质中，$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系可以写成

$$\boldsymbol{P}=\chi_{\mathrm{e}}\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{1.4.9}$$

式中，χ_{e} 称为电介质的极化率(或称为极化系数)，是一个与电介质有关的无量纲系数。

在分析电介质中的电场时，引入了一个辅助矢量 $\boldsymbol{D}$，其定义为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{1.4.10}$$

式中，$\varepsilon_0\approx\frac{1}{36}\times10^{-9}\approx8.854\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$，称为真空中的介电常数；矢量 $\boldsymbol{D}$ 称为电位移矢量，单位为 $\mathrm{C/m^2}$。

对于线性和各向同性的电介质，将式(1.4.9)代入 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 中，得

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{1.4.11}$$

式中 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ 称为电介质的介电常数(或电介质的电容率)，单位与 ε_0 相同。$\varepsilon_r=1+\chi_e$ 称为电介质的相对介电常数，是无量纲常数。

例 1.10 在内外半径分别为 a 和 b 的空心极化介质球中，已知极化强度 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{e}_r\frac{P_0}{4\pi r^2}$，$P_0$ 为常数。求 ρ_P 和 ρ_{SP}。

解：由球坐标系中的散度计算公式(1.1.21)，得

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P_r)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{P_0}{4\pi r^2}\right)=0$$

在空心介质球的外表面上，$r=b$、$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_r$，于是

$$\rho_{SP}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_r\Big|_{r=b}=\frac{P_0}{4\pi b^2}$$

在空心介质球的内表面上，$r=a$、$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{e}_r$，于是

$$\rho_{SP}=-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_r\Big|_{r=a}=-\frac{P_0}{4\pi a^2}$$

例 1.11 在线性和各向同性的均匀介质中，已知电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的 z 分量 $D_z=20\mathrm{nC/m^2}$，极化强度 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{e}_x9-\boldsymbol{e}_y21+\boldsymbol{e}_z15n\mathrm{C/m^2}$。求介质中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位移矢量 $\boldsymbol{D}$。

解：由 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\frac{1}{\varepsilon_r}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{P}$，有 $\boldsymbol{P}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\boldsymbol{D}$，于是 $\frac{P_z}{D_z}=1-\frac{1}{\varepsilon_r}$，由此得到

$$\varepsilon_r=\frac{D_z}{D_z-P_z}=4$$

故

$$\boldsymbol{D}=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r-1}\boldsymbol{P}=\frac{4}{3}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{e}_x12-\boldsymbol{e}_y28+\boldsymbol{e}_z20\quad(\mathrm{nC/m^2})$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}_x0.34-\boldsymbol{e}_y0.79+\boldsymbol{e}_z0.57\quad(\mathrm{kV/m})$$

1.4.2 磁介质的磁化·磁场强度矢量

1. 磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$

介质分子或原子内的电子不停地绕核运动及自旋运动，形成分子电流。与电介质中的电荷要产生微观电场一样，分子电流会产生微观磁场，分子电流的磁特性可用分子磁矩 $\boldsymbol{m}=i\Delta\boldsymbol{S}$ 表示，其中 i 为分子的电流，$\Delta\boldsymbol{S}$ 为分子电流环的面积矢量。在外加磁场的作用下，分子磁矩的取向沿磁场方向趋于一致，因而磁介质将出现宏观磁效应，这就是磁介质的磁化现象。

磁介质的磁化程度用磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 来描述，它定义为单位体积内分子磁矩的矢量

和，即

$$\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_i \boldsymbol{m}_i}{\Delta V} \tag{1.4.12}$$

式中，$\boldsymbol{m}_i$ 为第 i 个分子的磁矩。磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 的单位为 A/m。

2. 磁化电流

磁介质被磁化后，其内部和表面可能会出现附加的宏观电流分布，这就是磁化电流。介质内部的磁化电流分布用体电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{M}}$ 表示，介质表面的磁化电流分布用面电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{SM}}$ 表示。磁化电流是与分子拴系在一起的，不能像传导电流那样随意流动，故也称束缚电流。

为了计算磁介质内的磁化电流分布，只需在介质内部任取一个边界为回路 C 的曲面 S，计算穿过曲面 S 的磁化电流 I_{M}。由图 1－15 可见，只有与回路 C 交链的分子电流才对 I_{M} 有贡献，其余的分子电流不是在 S 以外，就是穿入、穿出曲面 S 各一次，对 I_{M} 无影响。在回路 C 上任取一个线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，则只有中心处于体积为 $\Delta\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的柱体内的分子电流才与回路 C 交链，如图 1－16 所示。若单位体积内的分子数为 n，则与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 交链的磁化电流为

$$\mathrm{d}I_{\mathrm{M}}=ni\Delta\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=n\boldsymbol{m}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.4.13}$$

所以

$$I_M=\oint_C ni\Delta\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_C n\boldsymbol{m}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_C \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_S \nabla\times\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.4.14}$$

又因为 $I_{\mathrm{M}}=\int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{M}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，故有

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{M}}=\nabla\times\boldsymbol{M} \tag{1.4.15}$$

这是一个重要的结果，它描述了介质受到磁化以后，其内部产生的磁化电流与磁化强度之间的关系，通常被用来求解介质内部的磁化电流分布。

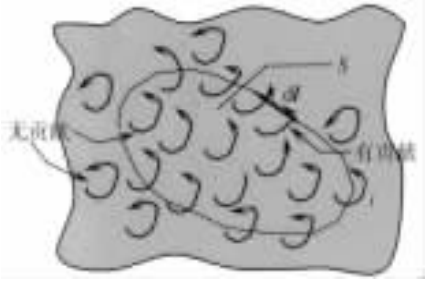


图 1－15　介质的磁化

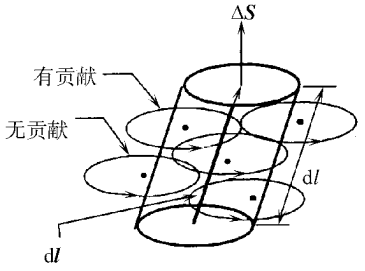


图 1－16　与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 交链的磁化电流

为了计算磁介质表面上出现的磁化电流面密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{SM}}$，在介质体内紧贴表面取一个线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_t\mathrm{d}l$，这里 $\boldsymbol{e}_t$ 是磁介质表面上的切向单位矢量。由式(1.4.13)可知，与线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 交链的磁化电流 $\mathrm{d}I_{\mathrm{M}}=\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_t\mathrm{d}l$，故磁化电流面密度为

$$J_{\mathrm{SM}}=M_t \quad \text{或} \quad \boldsymbol{J}_{SM}=\boldsymbol{n}\times M \tag{1.4.16}$$

式中，M_t 为 $\boldsymbol{M}$ 的切向分量；$\boldsymbol{n}$ 为磁介质表面上的法向单位矢量。这就是磁化强度与表面磁化电流密度的关系，通常用来求解磁介质表面的磁化电流分布。

3. **磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$**

当磁介质在外加磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的作用下被磁化时，磁介质中的磁化电流将在空间中产生附加磁场 $\boldsymbol{B}'$。这时空间中任一点的磁场 $\boldsymbol{B}$ 应为外加磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 与附加磁场 $\boldsymbol{B}'$ 的合成磁场，即

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}' \tag{1.4.17}$$

在分析磁介质中的磁场时，引入了一个辅助矢量 $\boldsymbol{H}$，其定义为

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{1.4.18}$$

称为磁场强度矢量，单位为 A/m。

磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 之间的关系同磁介质的性质有关，一般情况下比较复杂。在线性和各向同性的磁介质中，$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的关系可以写成

$$\boldsymbol{M} = \chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H} \tag{1.4.19}$$

式中，χ_{m} 称为介质的磁化率（或称为磁化系数），是一个与介质有关的无量纲系数。将式(1.4.19)代入 $\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$ 中，可得到

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}})\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_{\mathrm{r}}\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \tag{1.4.20}$$

式中，$\mu=\mu_0\mu_{\mathrm{r}}$ 称为磁介质的磁导率，单位与 μ_0 相同；$\mu_{\mathrm{r}}=1+\chi_{\mathrm{m}}$ 称为相对磁导率，是无量纲系数。在真空中，相对磁导率 $\mu_{\mathrm{r}}=1$。

例 1.12 半径为 a 的磁化介质球，球心在坐标原点，磁化强度为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}_z(Az^2 + B)$$

其中 A 和 B 为常数，求磁化电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{M}}$ 和 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{SM}}$。

解： 由式(1.4.15)，可得磁化电流体密度

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{M}} = \nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}(Az^2 + B) = 0$$

在球面上 $z=a\cos\theta$、$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta$，所以磁化电流面密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{SM}} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M}\Big|_{r=a} = \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_z(Aa^2\cos^2\theta + B) =$$

$$-\boldsymbol{e}_\phi(Aa^2\cos^2\theta + B)\sin\theta$$

1.4.3 导电媒质的传导特性

1. **欧姆定律**

导电媒质是指含有能做宏观运动的自由带电粒子的一类物质。当存在电场时，这些自由带电粒子在电场力的作用下运动，从而形成电流，通常称之为传导电流。导电媒质中电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系同媒质的性质有关，一般情况下比较复杂。在线性和各向同性的导电媒质中，$\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系可以写成

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{1.4.21}$$

式中，σ 称为媒质的电导率，单位为 S/m。式(1.4.21)就是欧姆定律的微分形式。

2. **焦耳定律**

在导电媒质中，电场力对运动电荷要做功。设体密度为 ρ 的电荷以速度 v 运动，则在

Δt 时间内，电场力对体积元 ΔV 内的运动电荷所做的功为

$$\Delta W=\rho\Delta V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\Delta t=\boldsymbol{E}\cdot\rho\boldsymbol{v}\Delta V\Delta t=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\Delta V\Delta t$$

所以体积元 ΔV 内的损耗功率为

$$\Delta P=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\Delta V$$

单位体积内的损耗功率，即损耗功率密度为

$$p=\frac{\Delta P}{\Delta V}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \tag{1.4.22}$$

这就是焦耳定律的微分形式。体积为 V 的导电媒质内的损耗功率为

$$P=\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V \tag{1.4.23}$$

练　习　题

1.4－1　一个半径为 a 的介质半球，其平面部分位于坐标面 $z=0$，球心位于坐标原点。介质的极化强度 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{e}_zP_0$，$P_0$ 为常量。(1)求极化电荷体密度 ρ_{P} 和面密度 ρ_{SP}；(2)分别计算半球面及平面上的总极化电荷，并求和。

1.4－2　在 $\chi_{\mathrm{e}}=3$ 的介质中，某点的电场强度 $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_x50+\boldsymbol{e}_y220-\boldsymbol{e}_z85\mathrm{V/m}$。求介质中该点的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和电位移矢量 $\boldsymbol{D}$。

1.4－3　磁化介质圆柱的半径为 a、高为 h，其轴线与 z 轴一致，底面在 xy 平面上，磁化强度 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{e}_xM_0$，其中 $\boldsymbol{M}_0$ 为常数。求磁化电流体密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{M}}$ 和面密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{SM}}$。

1.4－4　同轴电缆的内导体半径 $a_1=1.25\mathrm{cm}$，外导体的内半径 $a_4=2\mathrm{cm}$。内外导体之间有三层介质，分界面半径分别为 $a_2=1.4\mathrm{cm}$ 和 $a_3=1.6\mathrm{cm}$。设介质漏电，内外导体间的漏电流密度 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{A}{r}$，$A$ 为常量。已知第一层介质的电导率 $\sigma_1=10^{-9}\mathrm{S/m}$，且各层介质中损耗功率相等。求另外两层介质的电导率。

1.5　静态场的基本规律

在讨论矢量分析时已经指出，一个矢量场具有什么样的性质，必须由它的散度和旋度(或通量和环量)来决定。不随时间变化的电磁场称为静态场。在静态场的情况下，电场与磁场是相互独立的。电场仅由电荷产生，而磁场则仅由电流所产生。

1.5.1　静电场的基本规律

由静止电荷产生的电场不随时间变化，称为静电场。静电场的基本规律由环路定律和高斯定律描述。

1. 环路定律

在静电场中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿任意闭合路径 C 的环量恒为零，即

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{1.5.1}$$

这就是静电场的环路定律的积分形式。应用斯托克斯定理，可得到微分形式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.5.2}$$

2. 高斯定律

在静电场中，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 穿过任意闭合曲面 S 的通量等于曲面 S 包围的总电荷，即

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q \tag{1.5.3}$$

这就是高斯定律的积分形式。

对体密度为 ρ 的分布电荷，则有

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{1.5.4}$$

利用散度定理，由式(1.5.4)可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.5.5}$$

这就是静电场高斯定律的微分形式。

式(1.5.2)和式(1.5.5)就是静电场的基本方程(微分形式)。它们表明：静电场是有源无旋场，是一种保守场。

当电场分布具有对称性时，利用高斯定律求解电场分布是非常简便的方法。

例 1.13 球形电子云的半径为 a，电子云的体电荷密度 $\rho = -\rho_0 (0 \leqslant r \leqslant a)$，电子云外的电荷密度为零。电子云内、外介质的介电常数都是 ε_0，如图 1－17 所示。(1)试求电子云内、外的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$；(2)验证所得结果满足静电场的两个基本方程 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 和 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$。

解：(1) 由于电子云的电荷分布具有球对称性，因此电子云内、外的电场分布也是球对称的，可以用高斯定律计算 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$。以电子云的中心为球心，作一个半径为 r 的球面 S，则在此球面上 $\boldsymbol{D}$ 的大小处处相同，其方向与球面的法向一致。根据高斯定律的积分式(1.5.3)，在 $r < a$ 的区域，有

$$4\pi r^2 D_i = \frac{4\pi r^3}{3}(-\rho_0)$$

所以电子云内的电位移矢量和电场强度分别为

$$\boldsymbol{D}_i = -\boldsymbol{e}_r \frac{\rho_0}{3} r$$

和

$$\boldsymbol{E}_i = -\boldsymbol{e}_r \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r$$

在 $r > a$ 的区域，有

$$4\pi r^2 D_0 = \frac{4\pi a^3}{3}(-\rho_0)$$

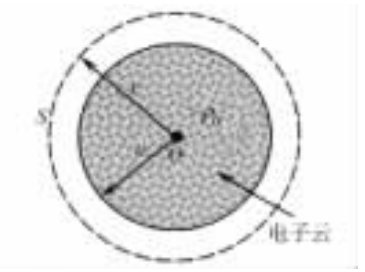


图 1－17 球形电子云

所以电子云外的电位移矢量和电场强度分别为

$$\boldsymbol{D}_0 = -\boldsymbol{e}_r \frac{\rho_0 a^3}{3r^2}$$

$$\boldsymbol{E}_0 = -\boldsymbol{e}_r \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 因在电子云内、外的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都只有 $\boldsymbol{e}_r$ 分量且只是坐标 r 的函数，根据球面坐标系中的散度公式(1.1.21)和旋度公式(1.1.31)，有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r)$$

所以，当 $r<a$ 时，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}_i = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\frac{\rho_0}{3}r\right)\right] = -\rho_0$$

当 $r>a$ 时，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\frac{\rho_0 a^3}{3r^2}\right)\right] = 0$$

因 $r>a$ 的区域中 $\rho=0$，可见 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 满足静电场的两个基本方程。

1.5.2 静磁场的基本规律

静磁场由恒定电流产生，故又称为恒定磁场。静磁场的基本规律有安培环路定律和磁通连续性定律。

1. 安培环路定律

在静磁场中，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿任意闭合路径 C 的环量等于与路径 C 交链的电流之和，即

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_k I_k \tag{1.5.6}$$

这就是安培环路定律的积分形式。

对于密度 $\boldsymbol{J}$ 的体分布电流，则有

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.5.7}$$

这里 S 是以路径 C 边界的任意曲面。利用斯托克斯定理，由式(1.5.7)可得到

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{1.5.8}$$

这就是安培环路定律的微分形式。

2. 磁通连续性定律

在静磁场中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 穿过任意闭合曲面 S 的通量等于零，即

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.5.9}$$

这就是磁通连续性定律的积分形式。利用散度定理，可得到微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.5.10}$$

式(1.5.8)和式(1.5.10)就是静磁场的基本方程(微分形式)。它们表明：静磁场是无源有旋场，电流是产生静磁场的旋涡源，是非保守场。

当磁场分布具有对称性时，利用安培环路定律求解磁场分布是非常简便的方法。

例 1.14 矢量函数 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x(-ay)+\boldsymbol{e}_y ax$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ 是否是磁场的场矢量？如果是，求其源变量 $\boldsymbol{J}$。

解：根据恒定磁场的基本性质，满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$ 的矢量函数才可能是磁场的场矢量，否则，不是磁场的场矢量。若是磁场的场矢量，则可由 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}$ 求出源分布。由于

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{H} = \mu_0\left[\frac{\partial}{\partial x}(-ay)+\frac{\partial}{\partial y}(ax)\right]=0$$

所以该矢量是磁场的场矢量，其源分布为

$$\boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -ay & ax & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_z 2a$$

例 1.15 已知内、外半径分别为 a 和 b 的无限长中空导体圆柱，沿轴向有恒定的均匀传导电流，其体密度为 J_0，导体的磁导率为 μ。求空间各点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

解：建立如图 1－18 所示的圆柱坐标系。很明显，电流分布具有轴对称性且与 z 坐标无关，所以磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 将是沿 ϕ 方向的，且以 z 轴为中心、半径为 ρ 的任何圆形路径 C 上的 B 为常量。根据积分形式的安培环路定理(1.5.7)，在 $\rho<a$ 的区域，有

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi\rho B_\phi = 0$$

所以

$$\boldsymbol{B} = 0 (\rho < a)$$

在 $a<\rho<b$ 的区域，有

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi\rho B_\phi = \mu\pi(\rho^2 - a^2)J_0$$

所以

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_\phi B_\phi = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\mu(\rho^2 - a^2)}{2\rho} J_0 \quad (a < \rho < b)$$

在 $\rho>b$ 的区域，有

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi\rho B_\phi = \mu\pi(b^2 - a^2)J_0$$

所以

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_\phi B_\phi = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\mu_0(b^2 - a^2)}{2\rho} J_0 \quad (\rho > b)$$

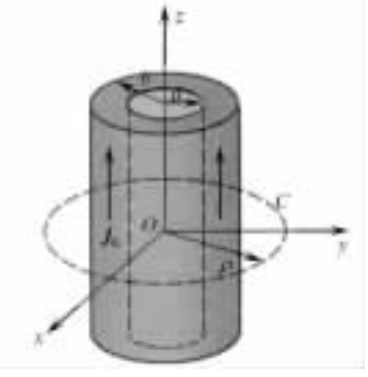


图 1－18 载有电流的空心导体

练 习 题

1.5－1　在半径为 a 的球形区域内、外的电场为

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\boldsymbol{e}_r\dfrac{A}{3\varepsilon_0}\left(r-\dfrac{r^3}{a^2}\right) & (r<a)\\ \boldsymbol{e}_r\dfrac{Ba^2}{\varepsilon_0 r^2} & (r>a)\end{cases}$$

式中，A 和 B 均为常数，求此电场中的电荷分布。

1.5－2　1911 年卢瑟福在实验中使用的是半径为 r_a 的球体原子模型，其球体内均匀分布有总电荷量为 $-Ze$ 的电子云，在球心有一正电荷 Ze（Z 是原子序数，e 是质子电荷量）。通过实验得到球体内的电通量密度表达式为 $\boldsymbol{D}_0=\boldsymbol{e}_r\dfrac{Ze}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{r}{r_a^3}\right)$，试证明之。

1.5－3　半径为 a 的无限长直圆柱导体中，电流 I 沿轴线方向流动，且均匀分布在导体的横截面上，计算导体内、外的磁感应强度。

1.5－4　下面的矢量函数中哪些可能是磁场？如果是，求其源变量 $\boldsymbol{J}$。

（1）$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x ax-\boldsymbol{e}_y ay$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$；

（2）$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\rho a\rho$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$（圆柱坐标）；

（3）$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\theta ar$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$（球坐标系）。

1.6　电磁感应定律和位移电流

当场随时间变化时，电场与磁场相互激励，形成统一的电磁场，表征这一重要电磁现象的基本规律就是电磁感应定律和位移电流的假说。

1.6.1　电磁感应定律

实验表明，当穿过导体回路的磁通量发生变化时，回路中就会出现感应电流，这就是电磁感应现象。导体回路中出现感应电流表明回路中存在感应电动势。法拉弟通过对电磁感应现象的研究，总结出电磁感应的规律：当穿过导体回路的磁通量发生变化时，回路中的感应电动势与穿过此回路的磁通量 Ψ 的时间变化率成正比。若规定回路中感应电动势的参考方向与穿过该回路的磁通 Ψ 的参考方向符合右旋关系，则电磁感应定律可表示为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{1.6.1}$$

式中，负号表示回路中感应电动势的作用总是要阻止回路中磁通量的改变。

设任意导体回路 C 围成的曲面为 S，则穿过回路的磁通 $\Psi=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$。于是式(1.6.1)可以写成

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.6.2}$$

从一般意义上讲，电流是电荷的定向运动形成的，而电荷的定向运动往往是电场力对其作用的结果。当磁通量发生变化时，导体回路中产生感应电流，预示着导体回路中存在电场。显然，这个电场不是电荷激发的，而是由于回路的磁通量发生变化而引起的，称为感应电场，记作 $\boldsymbol{E}_{\text{in}}$。回路 C 中的感应电动势 $\mathscr{E}$ 应等于感应电场 $\boldsymbol{E}_{\text{in}}$ 沿此回路的积分，即

$$\mathscr{E}=\oint_C \boldsymbol{E}_{\text{in}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.6.3}$$

于是式(1.6.2)可表示为

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\text{in}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.6.4}$$

由此可见，感应电场不同于静电场，它是一种非保守场。

由式(1.6.2)可知，回路中的感应电动势的大小与导体的性质无关，所以感应电场也与导体的性质无关。因此，感应电场不仅存在于导体内，在导体外的空间中也存在感应电场，式(1.6.4)对磁场中的任意回路(不一定是导体回路)都成立。

一般情况下，空间中可能既存在静电场 $\boldsymbol{E}_{\text{c}}$ 又存在感应电场 $\boldsymbol{E}_{\text{in}}$，则总电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\text{c}}+\boldsymbol{E}_{\text{in}}$。由于$\oint_C \boldsymbol{E}_{\text{c}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，有

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.6.5}$$

这就是推广的法拉第电磁感应定律的积分形式。

在式(1.6.5)中穿过曲面 S 的磁通变化可以是由于磁场随时间变化引起的，也可以是由于回路运动引起的，是普遍适用的公式。如果回路是静止的，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

于是得到

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.6.6}$$

应用斯托克斯定理，可得

$$\nabla\times \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.6.7}$$

这就是法拉第电磁感应定律的微分形式。它揭示了随时间变化的磁场产生电场这一重要的概念，是电磁场的基本方程之一。

当导体回路 C 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动时，可以证明

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint_C (\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.6.8}$$

上式右端的两个积分分别对应着磁场变化和导体运动的贡献。当磁场不随时间变化时，有

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_C (\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.6.9}$$

例 1.16 一个 $a\times b$ 的单匝矩形线圈，置于时变磁场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_y B_0\sin\omega t$ 中。初始时刻，线

圈平面的法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴成 α_0 角，如图 1－19 所示。求：(1)线圈静止时的感应电动势；(2)线圈以角速度 ω 绕 x 轴旋转时的感应电动势。

解：(1)线圈静止时，穿过线圈的磁通为

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_y B_0 \sin(\omega t) \cdot \boldsymbol{n} ab = B_0 ab \sin(\omega t) \cos\alpha_0$$

故感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -\omega ab B_0 \cos(\omega t) \cos\alpha_0$$

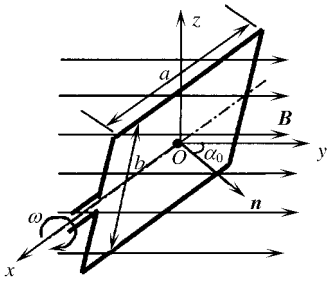


图 1－19　时变磁场中旋转的矩形线框

(2) 线圈以角速度 ω 绕 x 轴旋转时，法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向随时间变化。在 t 时刻，$\boldsymbol{n}$ 与 y 轴的夹角 $\alpha = \alpha_0 + \omega t$，所以

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_y B_0 \sin(\omega t) \cdot \boldsymbol{n} ab = B_0 ab \sin(\omega t) \cos(\alpha_0 + \omega t)$$

故感应电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -\omega ab B_0 \cos(\alpha_0 + 2\omega t)$$

1.6.2　位移电流

随时间变化的磁场会产生电场，那么随时间变化的电场是否能产生磁场呢？麦克斯韦发现将恒定磁场中的安培环路定律应用于时变电磁场时出现的矛盾，提出了位移电流的假说，对安培环路定律做了修正，揭示了随时间变化的电场也要产生磁场这一重要的物理事实。

在非静态情况下，电荷分布将随时间变化，即有 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$，由电荷守恒定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$，得 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} \neq 0$。另一方面，若假定非静态情况下方程 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ 仍然成立，对方程的两端取散度，则有 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$。由于 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = 0$，故得到 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$。显然，这与电荷守恒定律相矛盾。然而电荷守恒定律是大量实验总结出的普遍规律，不仅适用于静态场，也适用于时变场。这就表明，在非静态情况下，不仅仅是电流能够产生磁场，必须对安培环路定理加以修正。

麦克斯韦认为，在非静态情况下 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ 仍然适用，将其代入电荷守恒定律，得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$$

即

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0 \tag{1.6.10}$$

式中，$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 是电位移矢量随时间的变化率，它的量纲与电流密度相同，麦克斯韦将其称为位移电流密度，并用 $\boldsymbol{J}_\mathrm{d}$ 表示，即

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.6.11}$$

式(1.6.10)表明,在时变电磁场中,只有包括位移电流在内的全电流才是连续的。

麦克斯韦认为,位移电流也能产生磁场,而且与传导电流产生的磁场具有相同性质。因此,对于时变电磁场,在安培环路定律(1.5.8)的右边应加上位移电流密度,即

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.6.12}$$

这就是在时变场中推广的安培环路定律,又称为全电流定律。它包含了随时间变化的电场能够产生磁场这样一个重要概念,也是电磁场的基本方程之一。

例 1.17 海水的电导率 $\sigma=4\mathrm{S/m}$,相对介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{r}}=81$。当正弦电磁场的频率 $f=1\mathrm{MHz}$ 时,求位移电流与传导电流的振幅值之比。

解:设正弦电磁场的电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_m\cos\omega t$$

则位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=-\boldsymbol{e}_x\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 E_m\cos\omega t$$

其振幅值为

$$J_{\mathrm{d}m}=\omega\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 E_m=$$

$$2\pi\times10^6\times81\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}E_m=4.5\times10^{-3}E_m$$

传导电流的振幅值为

$$J_{cm}=\sigma E_m=4E_m$$

故得到

$$\frac{J_{\mathrm{d}m}}{J_{cm}}=1.125\times10^{-3}$$

练 习 题

1.6-1 如图 1-20 所示,在磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z B_0\cos(kx)\cos(\omega t)$ (T)的磁场中,矩形线框以匀速 v 沿 x 方向运动。试求矩形线框中的感应电动势。设 $t=0$ 时,$x=x_0$。

1.6-2 有一典型的金属导体,电导率 $\sigma=5\times10^7\mathrm{S/m}$,$\varepsilon_r=1$。若导体中的传导电流密度为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_x10^6\sin[117.1(3.22t-z)]\quad(\mathrm{A/m^2})$$

求位移电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$。

1.6-3 当电场强度 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_m\cos\omega t$,$\omega=1000\mathrm{rad/s}$ 时,计算下列导电媒质中传导电流密度与位移电流密度的振幅之比:

(1) 铜:$\sigma=5.7\times10^7\mathrm{S/m}$,$\varepsilon_r=1$。

(2) **蒸馏水**：$\sigma=2\times10^{-4}\,\mathrm{S/m}$，$\varepsilon_r=80$。

(3) **聚苯乙烯**：$\sigma=10^{-16}\,\mathrm{S/m}$，$\varepsilon_r=2.53$。

1.6－4　**导电媒质的电导率为** σ、**相对介电常数** $\varepsilon_r=1.5$、**磁导率** $\mu_r=1$。**已知其中的电场强度** $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x 60\cos 10^5 t$ (V/m)。**求**：(1)**传导电流密度** $\boldsymbol{J}$；(2)**位移电流密度** $\boldsymbol{J}_d$；(3)σ **的值等于多少时，电媒质中传导电流密度与位移电流密度的振幅相等。**

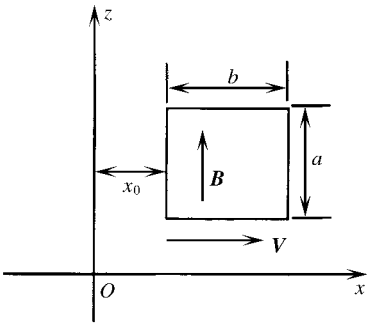


图 1－20　时变磁场中运动的矩形线框

1.7　麦克斯韦方程组

由前两节的讨论可以看到，静电场和静磁场分别由静止电荷和稳恒电流产生，它们相互独立，分别满足各自的方程。当电荷、电流分布随时间变化时，电场和磁场也会随时间变化，形成时变电磁场。在时变场情况下，电场和磁场不再是相互独立的，它们会相互激发、相互影响，形成一个统一的电磁场。既然电场和磁场是相互联系在一起的，它们所满足的方程也就应该构成一个统一体，这就是著名的麦克斯韦方程组。

麦克斯韦方程组的建立，是对电磁理论、对物理学和人类科学技术进步的重大贡献。以麦克斯韦方程组为核心的经典电磁理论，是研究宏观电磁现象和现代工程电磁问题的理论基础。

1.7.1　麦克斯韦方程组的微分形式

在时变场的情况下，方程式(1.5.2)和(1.5.8)分别修正为方程式(1.6.7)和(1.6.12)。也就是说，方程式(1.6.7)和(1.6.12)是电磁场中普遍适用的方程。此外，实践也已证明，方程式(1.5.5)和(1.5.10)可直接推广到时变电磁场。这样，便得到一组描述时变电磁场的方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.7.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.7.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{1.7.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{1.7.4}$$

这就是麦克斯韦方程组的微分形式。习惯上，将上述方程依次称为麦克斯韦第一、第二、第三、第四方程。

麦克斯韦方程组是描述宏观电磁现象的普遍规律，静电场和恒定磁场的基本方程都是麦克斯韦方程组的特殊情况。实际上，当场不随时间变化时，场矢量对时间的偏导数等于零，即可得到静电场和恒定磁场的基本方程。

此外，电流连续性方程也可以由式(1.7.1)和式(1.7.4)导出。对式(1.7.1)两边取散度，有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$$

由于$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = 0$,所以

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0$$

将式(1.7.4)代入上式,即得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

此即为电流连续性方程。

在麦克斯韦方程组(1.7.1)～(1.7.4)中,没有限定场矢量 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 之间的关系,它们适用于任何媒质,所以通常又称为麦克斯韦方程组的非限定形式。实际上,场矢量 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 之间的关系与媒质的电磁特性有关,这种关系称为媒质的本构关系。在线性和各向同性的媒质中,本构关系为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{1.7.5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1.7.6}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.7.7}$$

利用这些关系,可得出只含有两个场矢量的麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \boldsymbol{E}) \tag{1.7.8}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \boldsymbol{H}) \tag{1.7.9}$$

$$\nabla \cdot (\mu \boldsymbol{H}) = 0 \tag{1.7.10}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) = \rho \tag{1.7.11}$$

称为麦克斯韦方程组的限定形式。

例 1.18 在无源的空间中,已知调频广播电台辐射的电磁场的电场强度

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{e}_y 10^{-2} \cos(6.28 \times 10^9 t - 20.9z) \quad (\mathrm{V/m})$$

求空间中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}(z,t)$。

解: 由麦克斯韦第二方程(1.7.2),有

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E}(z,t) = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\boldsymbol{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} = \boldsymbol{e}_x 20.9 \times 10^{-2} \sin(6.28 \times 10^9 t - 20.9z)$$

将上式对时间 t 积分,若不考虑静态场,则有

$$\boldsymbol{B}(z,t) = \int \frac{\partial \boldsymbol{B}(z,t)}{\partial t} \mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_x \int 20.9 \times 10^{-2} \sin(6.28 \times 10^9 t - 20.9z) \mathrm{d}t =$$

$$\boldsymbol{e}_x 3.33\times10^{-11}\cos(6.28\times10^{9}t-20.9z)\quad(\mathrm{T})$$

1.7.2 麦克斯韦方程组的积分形式

与式(1.7.1)～(1.7.4)相对应的积分形式为

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\left(J+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.7.12}$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.7.13}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{1.7.14}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=q \tag{1.7.15}$$

这就是麦克斯韦方程组的积分形式。

1.7.3 麦克斯韦方程组的复数形式

在时变电磁场中,场源和场量都随时间作正弦变化是最常见也是最重要的一种形式。这种以一定频率作正弦变化的电磁场,称为正弦电磁场。

1. 正弦电磁场的复数表示法

分析正弦电磁场的有效工具就是采用复数方法。在三维空间中,随时间作正弦变化的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=&\boldsymbol{e}_x E_{xm}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t+\phi_x(\boldsymbol{r})]+\\&\boldsymbol{e}_y E_{ym}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t+\phi_y(\boldsymbol{r})]+\\&\boldsymbol{e}_z E_{zm}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t+\phi_z(\boldsymbol{r})]\end{aligned}$$

在上式中,ω 是角频率;$E_{xm}(\boldsymbol{r})$、$E_{ym}(\boldsymbol{r})$、$E_{zm}(\boldsymbol{r})$ 分别表示三个坐标分量的振幅,$\phi_x(\boldsymbol{r})$、$\phi_y(\boldsymbol{r})$、$\phi_z(\boldsymbol{r})$ 分别表示三个坐标分量的初相位,它们仅是空间坐标的函数。上式可改写为复数取实部形式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{1.7.16}$$

式中

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_x E_{xm}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_x(\boldsymbol{r})}+\boldsymbol{e}_y E_{ym}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_y(\boldsymbol{r})}+\boldsymbol{e}_z E_{zm}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_z(\boldsymbol{r})} \tag{1.7.17}$$

称为电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的复数形式或复矢量。为了区别复数形式与实数形式,这里用打“·”的符号表示复数形式。

2. 麦克斯韦方程的复数形式

正弦电磁场矢量对时间的导数可用复数表示为

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\right\}=\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

用上述运算规律,可将式(1.7.1)～式(1.7.4)写成

$$\nabla\times\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{H}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{J}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]+\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\nabla \times \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[-\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{B}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\nabla \cdot \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{B}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = 0$$

$$\nabla \cdot \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{D}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{\rho}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

将微分算子“∇”与取实部符号“Re”交换顺序，有

$$\mathrm{Re}[\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{J}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] + \mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\mathrm{Re}[\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[-\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{B}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\mathrm{Re}[\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = 0$$

$$\mathrm{Re}[\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{D}}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{\rho}_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

由于只考虑含有时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的正弦电磁场，所以上式意味着相应的复数相等，于是可得

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}}_m(\boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{J}}_m(\boldsymbol{r}) + \mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}_m(\boldsymbol{r}) \tag{1.7.18}$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{B}}_m(\boldsymbol{r}) \tag{1.7.19}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}}_m(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.7.20}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{D}}_m(\boldsymbol{r}) = \dot{\rho}_m(\boldsymbol{r}) \tag{1.7.21}$$

这就是正弦电磁场的复矢量所满足的麦克斯韦方程。

由于复数形式的场方程与实数形式的场方程有明显的区别，为了简便，通常将复数形式的“·”和下标 m 去掉，故将麦克斯韦方程的复数形式写成

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{D} \tag{1.7.22}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B} \tag{1.7.23}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.7.24}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.7.25}$$

例1.19　已知空间区域中电场强度的瞬时矢量

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{e}_x E_{xm}\cos(\omega t - kz + \phi_x) + \boldsymbol{e}_y E_{ym}\sin(\omega t - kz + \phi_y)$$

写出电场强度的复矢量。

解：由于

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{e}_x E_{xm}\cos(\omega t - kz + \phi_x) + \boldsymbol{e}_y E_{ym}\cos\left(\omega t - kz + \phi_y - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_x E_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz + \phi_x)} + \boldsymbol{e}_y E_{ym}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz + \phi_y - \frac{\pi}{2})}]$$

根据式(1.7.16)，可知电场强度的复矢量为

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_x E_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-kv + \phi_x)} + \boldsymbol{e}_y E_{ym}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-kz + \phi_y - \frac{\pi}{2})} =$$

$$[\boldsymbol{e}_x E_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_x} - \boldsymbol{e}_y \mathrm{j}E_{ym}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_y}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

例 1.20　已知电场强度复矢量 $\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_x \mathrm{j}E_{xm}\cos(k_z z)$，其中 E_{xm} 和 k_z 为实常数。写出电场强度的瞬时矢量。

解：根据式(1.7.16)，可得电场强度的瞬时矢量为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_x \mathrm{j}E_{xm}\cos(k_z z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] =$$

$$\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_x E_{xm}\cos(k_z z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}\right]=$$

$$\boldsymbol{e}_x E_{xm}\cos(k_z z)\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

练　习　题

1.7－1　已知正弦电磁场的电场强度瞬时值为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_1(z,t)+\boldsymbol{E}_2(z,t)$$

式中

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1(z,t)=\boldsymbol{e}_x 0.03\sin(10^8\pi\times t-kz)\\ \boldsymbol{E}_2(z,t)=\boldsymbol{e}_x 0.04\sin\left(10^8\pi\times t-kz-\dfrac{\pi}{3}\right)\end{cases}$$

试求：(1)电场强度复矢量；(2)磁场强度复矢量和瞬时矢量。

1.7－2　已知无源的空气中的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times 10^9 t-kz)\quad(\mathrm{V/m})$$

利用麦克斯韦方程求相应的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 以及常数 k 的值。

1.7－3　在均匀的非导电媒质($\sigma=0$)中，已知时变电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x 300\pi\cos\left(\omega t-\frac{4}{3}z\right)\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y 10\cos\left(\omega t-\frac{4}{3}z\right)\quad(\mathrm{A/m})$$

且媒质的 $\mu_r=1$。由麦克斯韦方程求出 ω 和 ε_r。

1.8　电磁场的边界条件

在实际问题中，经常遇到两种不同媒质的分界面。例如，海水的表面即是海水与空气的分界面。由于在分界面两侧的媒质的特性参数发生突变，导致场矢量也发生突变。在不同媒质的分界面上，场矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足的关系称为电磁场的边界条件。

由于在媒质分界面上场矢量不连续，麦克斯韦方程组的微分形式失去意义，但麦克斯韦方程组的积分形式仍然适用。因此，利用麦克斯韦方程组的积分形式，可导出分界面上电磁场的边界条件。

1.8.1　边界条件的一般形式

1. 磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的边界条件

如图 1－21 所示为两种不同媒质的分界面，媒质①的参数为 ε_1、μ_1 和 σ_1，媒质②的参数为 ε_2、μ_2 和 σ_2，取分界面的法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 由媒质②指向为媒质①。

在媒质分界面上任取一点 P，围绕点 P 任作一个跨越分界面的狭小矩形回路 C，其长为 Δl、宽为 Δh，法向单位矢量为 $\boldsymbol{N}$(与回路 C 成右旋关系)。将麦克斯韦第一方程的积分形式(1.7.12)应用于回路 C 上，并令 Δh 趋于零，得到

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{H}_1\cdot\Delta\boldsymbol{l}-\boldsymbol{H}_2\cdot\Delta\boldsymbol{l}=$$

$$\lim_{\Delta h\to 0}\left[\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right]$$

由于$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$为有限值，上式右端第二项等于零。设分界面上的电流面密度为 $\boldsymbol{J}_S$，则上式右端第一项等于 $\boldsymbol{J}_S\cdot\boldsymbol{N}\Delta l$。所以

$$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot\Delta\boldsymbol{l}=\boldsymbol{J}_S\cdot\boldsymbol{N}\Delta l \qquad (1.8.1)$$

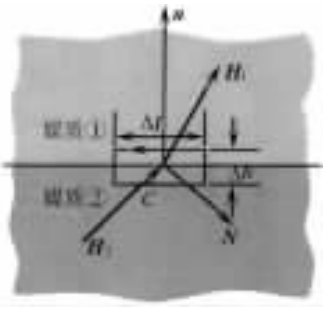


图 1－21　$\boldsymbol{H}$ 的边界条件

由于矢量 $\Delta\boldsymbol{l}$ 可以写成

$$\Delta\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{n})\Delta l$$

于是式(1.8.1)变为

$$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{n})\Delta l=\boldsymbol{J}_S\cdot\boldsymbol{N}\Delta l$$

由于$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{n})=[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)]\cdot\boldsymbol{N}$，所以有

$$[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)]\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{J}_S\cdot\boldsymbol{N}$$

由于回路 C 是任取的，所以 $\boldsymbol{N}$ 也是任意的，故得到

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_S \qquad (1.8.2)$$

这表明，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 在不同媒质的分界面两侧的切向分量是不连续的，其差值恰好等于分界面上的电流面密度 $\boldsymbol{J}_S$。

若分界面上不存在面电流分布，即 $\boldsymbol{J}_S=0$，则有

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0 \qquad (1.8.3)$$

可见，分界面上不存在面电流分布时，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量是连续的。

2. 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的边界条件

将麦克斯韦第二方程的积分形式(1.7.13)应用于如图 1－21 所示的回路 C 上，并令 Δh 趋于零，同理可得

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \qquad (1.8.4)$$

这表明，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在不同媒质的分界面两侧的切向分量是连续的。

3. 磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的边界条件

在媒质分界面上任取一点 P，围绕点 P 任作一个跨越分界面的扁平圆柱曲面 S，其底面积为 ΔS、高为 Δh，如图 1－22 所示。将麦克斯韦第三方程的积分形式(1.7.14)应用于曲面 S 上，并令 Δh 趋于零，即可得到

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0 \qquad (1.8.5)$$

这表明，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 在不同媒质的分界面两侧的法向分量是连续的。

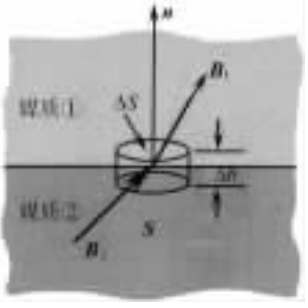


图 1－22　$\boldsymbol{B}$ 的边界条件

4. 电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的边界条件

将麦克斯韦第四方程的积分形式(1.7.15)应用于如图 1－22 所示的曲面 S 上，并令

Δh 趋于零，同理可得

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_S \tag{1.8.6}$$

这表明，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 在不同媒质的分界面两侧的法向分量是不连续的，其差值恰好等于分界面上的电荷面密度 ρ_S。

若分界面上不存在面电荷分布，即 $\rho_S=0$，则有

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=0 \tag{1.8.7}$$

可见，分界面上不存在面电荷分布时，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量是连续的。

1.8.2 理想导体表面上的边界条件

在实际问题中，经常遇到电导率很大的导体（如银、铜、铝等）边界的情形。为了简化问题的分析，可近似将其看作是电导率为无限大的理想导体。由于理想导体的电导率为无限大，电磁场不可能进入理想导体的内部，但在理想导体的表面上常常存在面电流与面电荷分布。设媒质①为电介质，媒质②视为理想导体，则 $\boldsymbol{E}_2=0$、$\boldsymbol{D}_2=0$、$\boldsymbol{B}_2=0$、$\boldsymbol{H}_2=0$。因此，理想导体表面的边界条件成为

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{J}_S \tag{1.8.8}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1=0 \tag{1.8.9}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1=0 \tag{1.8.10}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_1=\rho_S \tag{1.8.11}$$

由此可见，一般情况下，理想导体表面存在面电流分布和面电荷分布，可分别由式(1.8.8)和式(1.8.11)求出。

例 1.21 设区域①($z<0$)的介质参数 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$、$\mu_1=\mu_0$、$\sigma_1=0$，区域②($z>0$)的介质参数 $\varepsilon_2=5\varepsilon_0$、$\mu_2=20\mu_0$、$\sigma_2=0$。区域①中的电场强度

$$\boldsymbol{E}_1(z,t)=\boldsymbol{e}_x[60\cos(15\times10^8t-5z)+20\cos(15\times10^8t+5z)]\quad(\mathrm{V/m})$$

区域②中的电场强度

$$\boldsymbol{E}_2(z,t)=\boldsymbol{e}_xA\cos(15\times10^8t-50z)\quad(\mathrm{V/m})$$

试求：(1)常数 A 的值；(2)磁场强度 $\boldsymbol{H}_1(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}_2(z,t)$；(3)验证 $\boldsymbol{H}_1(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}_2(z,t)$ 满足边界条件。

解：(1)在两种介质的分界面 $z=0$ 处，有

$$\boldsymbol{E}_1(0,t)=\boldsymbol{e}_x[60\cos(15\times10^8t)+20\cos(15\times10^8t)]=$$

$$\boldsymbol{e}_x80\cos(15\times10^8t)\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{E}_2(0,t)=\boldsymbol{e}_xA\cos(15\times10^8t)\quad(\mathrm{V/m})$$

代入边界条件(1.8.4)，可得到

$$A=80\mathrm{V/m}$$

(2)由麦克斯韦第二方程(1.7.2)，有

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}_1(z,t)}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\boldsymbol{E}_1(z,t)=-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_1}{\partial z}=$$

$$-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\mu_0}[300\sin(15\times10^8t-5z)-100\sin(15\times10^8t+5z)]$$

由此得到

$$\boldsymbol{H}_1(z,t)=\boldsymbol{e}_y[0.159\cos(15\times10^8t-5z)-0.053\cos(15\times10^8t+5z)]\quad(\mathrm{A/m})$$

同理，由$\nabla\times\boldsymbol{E}_2(z,t)=-\mu_2\dfrac{\partial\boldsymbol{H}_2(z,t)}{\partial t}$，可得

$$\boldsymbol{H}_2(z,t)=\boldsymbol{e}_y0.106\cos(15\times10^8t-50z)\quad(\mathrm{A/m})$$

(3)令$z=0$，可得到

$$\boldsymbol{H}_1(0,t)=\boldsymbol{e}_y0.106\cos(15\times10^8t)\quad(\mathrm{A/m})$$

$$\boldsymbol{H}_2(0,t)=\boldsymbol{e}_y0.106\cos(15\times10^8t)\quad(\mathrm{A/m})$$

显而易见，$\boldsymbol{H}_1(0,t)$和$\boldsymbol{H}_2(0,t)$满足边界条件(1.8.3)。这表明，两种无损耗介质的分界面上不存在面电流分布，即$\boldsymbol{J}_S=0$。

例 1.22 如图1－23所示，两块无限大理想导体平板分别位于$z=0$和$z=d$处。已知其间电磁波的电场强度和磁场强度分别为

$$\boldsymbol{E}(x,z,t)=\boldsymbol{e}_yE_0\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\cos(\omega t-k_xx)\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}(x,z,t)=\boldsymbol{e}_x\frac{\pi E_0}{\omega\mu_0 d}\cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)\sin(\omega t-k_xx)+$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{k_xE_0}{\omega\mu_0}\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\cos(\omega t-k_xx)\quad(\mathrm{A/m})$$

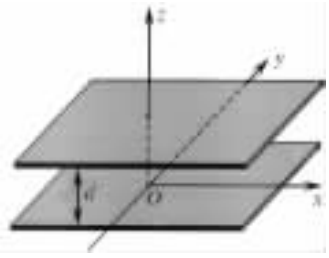


图 1－23 无限大平行理想导体平板

式中，k_x和E_0为常数。试求两导体表面上的电流面密度$\boldsymbol{J}_S$和电荷面密度ρ_S。

解：导体表面的电流与电荷分布在两导体的内表面上。因此，在$z=0$的表面上，法向单位矢量$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_z$，故

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\Big|_{z=0}=\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{H}\Big|_{z=0}=$$

$$\boldsymbol{e}_y\frac{\pi E_0}{\omega\mu_0 d}\sin(\omega t-k_xx)\quad(\mathrm{A/m})$$

$$\rho_S=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}\Big|_{z=0}=\varepsilon_0\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{E}\Big|_{z=0}=0$$

在$z=d$的表面上，法向单位矢量$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{e}_z$，故

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\Big|_{z=0}=-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{H}\Big|_{z=0}=$$

$$\boldsymbol{e}_y\frac{\pi E_0}{\omega\mu_0 d}\sin(\omega t-k_xx)\quad(\mathrm{A/m})$$

$$\rho_S=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}\Big|_{z=0}=-\varepsilon_0\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{E}\Big|_{z=0}=0$$

练 习 题

1.8－1 两种电介质的相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}=2$ 和 $\varepsilon_{r2}=3$，其分界面为 $z=0$ 平面。如果已知介质 1 中的电场

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_x 2y-\boldsymbol{e}_y 3x+\boldsymbol{e}_z(5+z)$$

那么对于介质 2 中的 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$，我们可得到什么结果？能否求出介质 2 中任意点的 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$？

1.8－2 已知 $y<0$ 的区域为均匀磁介质，其相对磁导率 $\mu_r=5000$，$y>0$ 的区域为空气。

(1)当空气中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{e}_x 0.5-\boldsymbol{e}_y 10$ (mT)，求磁介质中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$；

(2)当磁介质中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x 10+\boldsymbol{e}_y 0.5$ (mT)，求空气中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$。

1.8－3 在横截面为 $a\times b$ 的矩形波导中，电磁场的复矢量为

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_y \mathrm{j}\omega\mu\,\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \quad (\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}=\left[\boldsymbol{e}_x \mathrm{j}\beta\,\frac{\pi}{a}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\boldsymbol{e}_z H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \quad (\mathrm{A/m})$$

式中，H_0、ω、μ 和 β 都是实常数。设波导的内壁为理想导体。求：(1)波导内壁上的面电荷密度；(2)波导内壁上的面电流密度。

1.9 电磁能量守恒定律

电场和磁场都具有能量，其能量密度分别为

$$w_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \tag{1.9.1}$$

和

$$w_m=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.9.2}$$

在时变电磁场中，电磁场能量密度 w 等于电场能量密度 w_e 与磁场能量密度 w_m 之和，即

$$w=w_e+w_m=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.9.3}$$

当场随时间变化时，空间各点的电磁场能量密度也要随时间改变，从而引起电磁能量流动。在此过程中，电磁场的能量要遵循能量守恒定律。下面将讨论表征电磁场能量守恒定律的坡印廷定理，以及描述电磁能量流动的坡印廷矢量。

1.9.1 坡印廷定理和坡印廷矢量

坡印廷定理可由麦克斯韦方程组推导出来。用 $\boldsymbol{E}$ 点乘式(1.7.1)、$\boldsymbol{H}$ 点乘式(1.7.2)，得

$$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

将以上两式相减，得

$$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

在线性和各向同性的媒质，若参数 ε、μ 和 σ 都不随时间变化，则上式中

$$\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial(\mu\boldsymbol{H})}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial(\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H})}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\right)$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)$$

于是得

$$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$$

再利用矢量恒等式

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})$$

可得

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\tag{1.9.4}$$

在任意闭曲面 S 所包围的体积 V 上，对式(1.9.4)两端积分，并应用散度定理，即可得

$$-\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)\mathrm{d}V+\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V\tag{1.9.5}$$

这就是电磁场的能量守恒定律，通常称为坡印廷定理。

在式(1.9.5)中，右端第一项$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right)$是在单位时间内体积 V 中所增加的电磁场能量；右端第二项$\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$是在单位时间内电场对体积 V 中的电流所作的功，在导电媒质中，$\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V=\int_V\sigma\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V$即为体积 V 内总的损耗功率。根据能量守恒关系，式(1.9.5)左端的$-\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$则是通过曲面 S 进入体积 V 的电磁功率，所以被积函数 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 是一个与通过单位面积的功率相关的矢量。我们将 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 定义为电磁功率流密度矢量，并用矢量 $\boldsymbol{S}$ 来表示，即

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\tag{1.9.6}$$

该矢量又称为坡印廷矢量，单位为 $\mathrm{W/m^2}$（瓦/米^2）。

坡印廷矢量是描述时变电磁场中电磁能量传输的一个重要物理量，它表示通过垂直于能量传输方向的单位面积的电磁功率，其方向就是电磁能量传输的方向。

1.9.2 正弦电磁场的平均坡印廷矢量

前面讨论的坡印廷矢量是瞬时值矢量，表示瞬时功率流密度。在正弦电磁场中，一个周期内的平均功率流密度矢量 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}$（即平均坡印廷矢量）更有意义。式(1.9.6)的平均值为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{S}\mathrm{d}t=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t \tag{1.9.7}$$

$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}$ 也可以直接由场矢量的复数形式来计算。对于正弦电磁场，坡印廷矢量可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\times\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\\&\frac{1}{2}[E\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+(\boldsymbol{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})^*]\times\frac{1}{2}[\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+(\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})^*]=\\&\frac{1}{4}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}+\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega t}]+\frac{1}{4}[\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\\&\frac{1}{4}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}+(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t})^*]+\frac{1}{4}[(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)^*+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\\&\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]\end{aligned}$$

代入式(1.9.7)，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}&=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]\right\}\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]\end{aligned} \tag{1.9.8}$$

式中，“$*$”表示取共轭复数。

例 1.23 已知无源($\rho=0$，$\boldsymbol{J}=0$)的自由空间中，电磁场的电场强度复矢量

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_yE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\quad(\mathrm{V/m})$$

式中，k 和 E_0 为常数。求：(1) 磁场强度复矢量 $\boldsymbol{H}(z)$；(2) 瞬时坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$；(3) 平均坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}$。

解：(1) 由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(z)&=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\times\boldsymbol{e}_yE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\\&-\boldsymbol{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\quad(\mathrm{A/m})\end{aligned}$$

(2) 电场、磁场的瞬时值为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\boldsymbol{e}_yE_0\cos(\omega t-kz)\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=-\boldsymbol{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)\quad(\mathrm{A/m})$$

所以，瞬时坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y E_0\cos(\omega t-kz)\times\left[-\boldsymbol{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)\right]=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)\quad(\mathrm{W/m^2})$$

(3) **由式**(1.9.8),**可得平均坡印廷矢量**

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_y E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\times\left(-\boldsymbol{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right)^*\right]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\right]=\boldsymbol{e}_z\frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0}\quad(\mathrm{W/m^2})$$

或由式(1.9.7)**计算**

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\boldsymbol{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)\right]\mathrm{d}t=\boldsymbol{e}_z\frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0}\quad(\mathrm{W/m^2})$$

练　习　题

1.9－1　**已知自由空间中的电磁场为**

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x 100\cos(\omega t-kz)\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_y 2.65\cos(\omega t-kz)\quad(\mathrm{A/m})$$

式中 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=0.42\mathrm{rad/m}$ **求**:(1)**瞬时坡印廷矢量**;(2)**平均坡印廷矢量**;(3)**任一时刻流入如图** 1－24 **所示的平行六面体**(**长** 1m,**横截面积为** $0.25\mathrm{m}^2$)**中的净功率**。

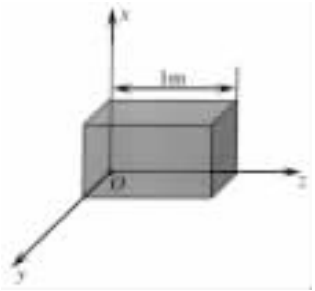


图 1－24　**平行六面体**

1.9－2　**已知某电磁场的复矢量为**

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}E_0\sin(k_0 z)\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}(z)=\boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\cos(k_0 z)\quad(\mathrm{A/m})$$

式中,$k_0=\dfrac{2\pi}{\lambda_0}=\dfrac{\omega}{c_0}$,$c_0$ **为真空中的光速**,λ_0 **是波长。求**:(1)$z=0$、$\dfrac{\lambda_0}{8}$、$\dfrac{\lambda_0}{4}$**各点处的瞬时坡印廷矢量**;(2)**以上各点处的平均坡印廷矢量。**

1.9－3　**在横截面为** $a\times b$ **的矩形金属波导中,电磁场的复矢量为**

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_y\mathrm{j}\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}=\left[\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}\beta\frac{\pi}{a}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\boldsymbol{e}_z H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\quad(\mathrm{A/m})$$

式中,H_0、ω、μ **和** β **都是实常数。求**:(1)**瞬时坡印廷矢量**;(2)**平均坡印廷矢量。**

习　题

1－1　设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{k}$ 为常矢量。

(1) 求 $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$，$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)$，$\nabla f(r)$；

(2) 求 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$，$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$，$\nabla\cdot(r\boldsymbol{k})$；

(3) 证明：$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}$，$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

1－2　已知矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x x^2+\boldsymbol{e}_y x^2 y^2+\boldsymbol{e}_z 24x^2 y^2 z^3$。(1) 计算 $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V$，其中 V 是中心在原点的单位正方体 $\left(|x|\leqslant\frac{1}{2},|y|\leqslant\frac{1}{2},|z|\leqslant\frac{1}{2}\right)$；(2) 计算 $\boldsymbol{E}$ 在此立方体的表面 S 上的积分 $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，并验证散度定理。

1－3　设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{k}$ 为常矢量。证明：

(1) $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$，$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$，$\nabla\times[f(r)\boldsymbol{r}]=0$；

(2) $\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{k}}{r}\right)=\frac{1}{r^3}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}$，$\nabla\times(\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

1－4　已知矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y x^2+\boldsymbol{e}_z y^2 z$。(1) 计算 $\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 S 为正方形：$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$；(2) 计算 $\boldsymbol{A}$ 在此曲面 S 的边界 C 上的积分 $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，并验证斯托克斯定理。

1－5　地球及其大气层可看作一个泄漏球形电容器。晴朗天气，地球表面有恒定电场 $E(r_0)$，指向地球中心，其值约为 $100\mathrm{V/m}$。大气层的电导率 $\sigma(r)=\sigma_0+\alpha(r-r_0)^2$ $(\mathrm{S/m})$，已知 $\sigma_0=3\times10^{-14}\mathrm{S/m}$，$\alpha\approx0.5\times10^{-20}\mathrm{S/m^3}$，地球半径 $r_0=6\times10^6\mathrm{m}$。求：

(1) 流向地球的总电流 I。

(2) 大气层中的电荷体密度 $\rho(r)$ 和地球表面的电荷面密度 ρ_S。

1－6　一个很薄的无限大导电带电面，电荷面密度为 ρ_S。证明：垂直于平面的 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度 E 中，有一半是由平面上半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生的。

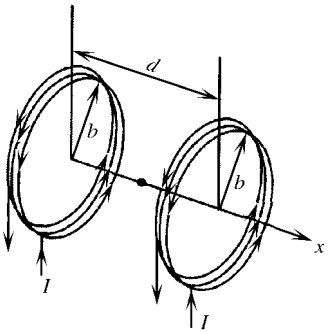
1－7　一个半径为 a 的导体球带电荷量为 Q，当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转，求球心处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

1－8　两个半径为 b、同轴的相同线圈，各有 N 匝，相互隔开距离为 d，如题 1－8 图所示。电流 I 以相同的方向流过这两个线圈。

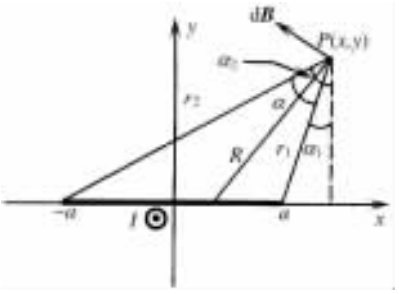
(1) 求这两个线圈中心点处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x B_x$；

(2) 证明：在中点处 $\mathrm{d}B_x/\mathrm{d}x$ 等于零；

(3) 求出 b 与 d 之间的关系，使中点处 $\mathrm{d}^2B_x/\mathrm{d}x^2$ 也等于零。



题 1－8 图



题 1－9 图

1－9　一条扁平的直导体带，宽为 $2a$，中心线与 z 轴重合，通过的电流为 I。证明在第一象限内的磁感应强度为

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\alpha,\quad B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

式中，α、r_1 和 r_2 如题 1－9 图所示。

1－10　一个半径为 a、介电常数为 ε 的均匀介质球内的极化强度 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{K}{r}$，其中 K 为一常数。(1) 计算束缚电荷体密度和面密度；(2) 计算自由电荷密度；(3) 计算球内、外的电场。

1－11　在半径为 a 的导体球外，有一层非均匀介质球壳，其内、外半径分别为 a 和 b，介电常数 ε 是 r 的函数。当导体球带电量 q 时，已知介质中的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(r)=\boldsymbol{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\quad (a<r<b)$$

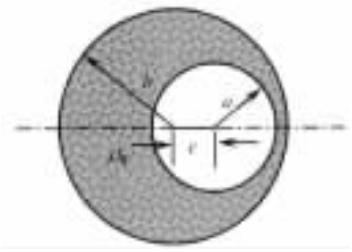
求：(1) 介质的介电常数 $\varepsilon(r)$；(2) 介质中的极化电荷分布。

1－12　一个半径为 a 的薄导体球壳内表面涂覆了一薄层绝缘膜，球内充满总电荷量为 Q 的体电荷，球壳上又另充有电荷量 Q。已知球内部的电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\left(\dfrac{r}{a}\right)^4$，设球内介质为真空。计算：(1) 球内的电荷分布；(2) 球壳外表面的电荷面密度。

1－13　半径为 a 的磁化介质球，球心在坐标原点，磁化强度 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{e}_r M_1(r)+\boldsymbol{M}_0$，其中 $M_1(r)$ 是坐标 r 的函数，而 $\boldsymbol{M}_0$ 为常矢量。证明磁化介质球产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与 $M_1(r)$

无关。

1－14　电荷均匀分布于两圆柱面间的区域中，体密度为 ρ_0(C/m³)，两圆柱面半径分别为 a 和 b，轴线相距为 $c(c<b-a)$，如题 1－14 图所示。求空间各部分的电场。



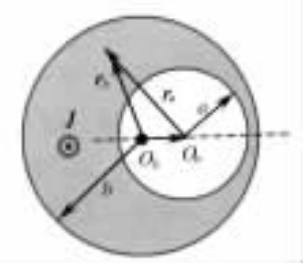
题 1－14 图



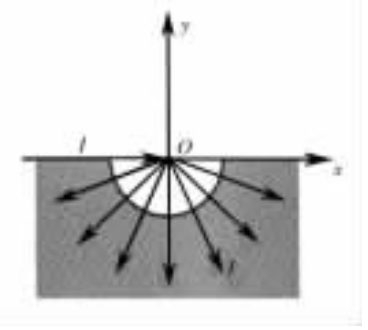
题 1－15 图

1－15　如题 1－15 图所示，无限长直导体圆柱由电导率不相同的两层导体构成，内层导体的半径 $a_1=2\text{mm}$，电导率 $\sigma_1=10^7\text{S/m}$；外层导体的外半径 $a_2=3\text{mm}$，电导率 $\sigma_2=4\times10^7\text{S/m}$。导体圆柱中沿轴线方向流过的电流为 $I=100\text{A}$，求导体圆柱内、外的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

1－16　通有电流密度为 $\boldsymbol{J}$ 的均匀电流的长圆柱导体中有一平行的圆柱形空腔，如题 1－16 图所示。计算各部分的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，并证明腔内的磁场是均匀的。



题 1－16 图



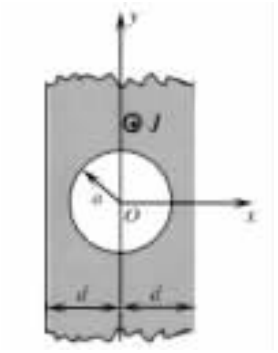
题 1－17 图

1－17　如题 1－17 图所示，自无限远处沿 x 轴向半球形接地器引入电流 I。在土壤中，电流 I 均匀地沿径向流向无限远处。试求 xOy 平面上任一点 $P(x,y,0)$ 处的磁感应强度。设土壤的磁导率为 μ_0。

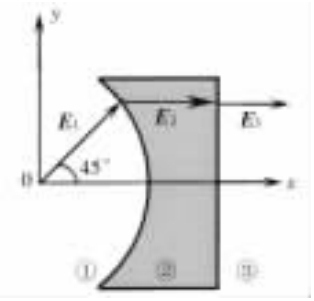
1－18　真空中有一厚度为 $2d$ 的无限大载流块，电流密度为 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_z J_0$，在其中心位置有一半径为 $a(a<d)$ 的圆柱形空腔，如题 1－18 图所示。求空腔内的磁感应强度。

1－19　电介质透镜可以用来使电场平直化。如题 1－19 图所示的透镜的左表面为圆柱面，右表面为平面。若区域①中的点 $P(r_0,45°,z)$ 处 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_\rho 5-\boldsymbol{e}_\phi 3$，为了使区域③中的电场 $\boldsymbol{E}_3$ 平行于 x 轴，透镜的相对介电常数应为多少？

1－20　空气与介质的分界面为一平面，介质的介电常数 $\varepsilon\approx2\varepsilon_0$，已知空气中的均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 与分界面法线的夹角为 θ_0。(1)计算以分界面上一点为球心、R 为半径的球面 S

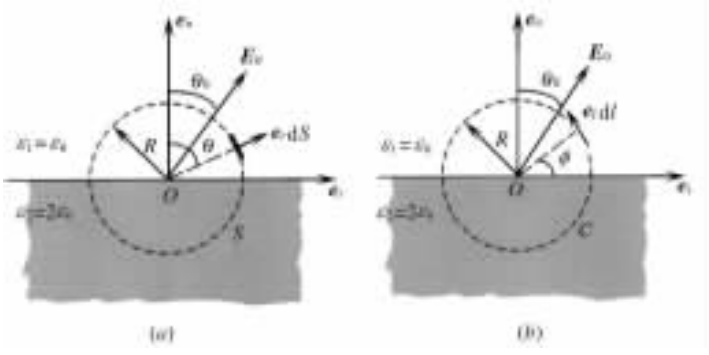


题 1－18 图



题 1－19 图

(见题 1－20 图(a))上电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的通量;(2)计算半径为 R 的圆形回路 C 上电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的环量,圆形回路 C 的轴线位于分界平面上(见图(b))。

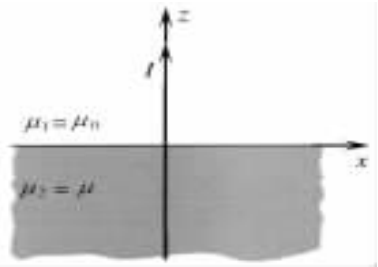


题 1－20 图

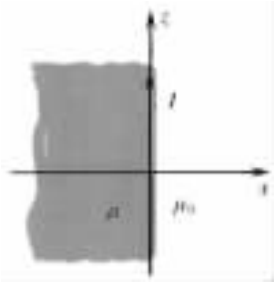
1－21　如题 1－21 图所示,无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面,试求:(1)两种磁介质中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$;(2)磁化电流分布。

1－22　如题 1－22 图所示,无限长直线电流 I 位于磁导率为 μ 的磁介质与空气的分界面上。试求:(1)磁介质内外的磁场分布;(2)磁化电流分布。

1－23　已知一个平面电流回路在真空中产生的磁场强度为 $\boldsymbol{H}_0$,若此平面电流回路位于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种均匀磁介质的分界平面上,试求两种磁介质中的磁场强度 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$。



题 1－21 图



题 1－22 图

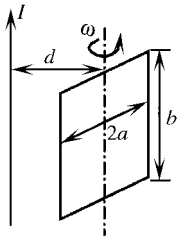
1－24　如题 1－24 图所示，矩形线圈平行于无限长直导线，导线中电流为 I。当线圈以角速度 ω 旋转时，求线圈中的感应电动势。设 $t=0$ 时，矩形线圈与直导线共面。

1－25　如题 1－25 图所示，无限长直导线中电流为 i，一矩形线圈置于其近旁，两边与直导线平行，且与直导线共面。

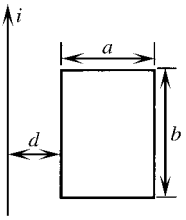
(1)设 $i=I_m\cos\omega t$，求线圈中的感应电动势；

(2)设 $i=I_0$，线圈以速度 v_0 向右平行移动，求线圈中的感应电动势；

(3)设 $i=I_m\cos\omega t$，且线圈以速度 v_0 向右平行移动，求线圈中的感应电动势。



题 1－24 图



题 1－25 图

1－26　在时变电磁场中的导体内部，设 $t=0$ 分布有体密度为 ρ_0 的电荷。(1)证明电荷随时间的变化规律为

$$\rho(t)=\rho_0 e^{-t/\tau}$$

式中，$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$(单位：s)为电荷密度减小到初始值的 $\frac{1}{e}$ 时所经过的时间，称为弛豫时间；(2)试分别计算：铜 $\sigma=5.7\times10^7$ S/m，$\varepsilon_r=1$；石墨 $\sigma=0.12$S/m，$\varepsilon_r=5$ 的弛豫时间。

1－27　同轴电缆的内导体半径 $a=1$mm，外导体内半径 $b=4$mm，内外导体间为空气介质，且电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_{\rho}\frac{100}{\rho}\cos(10^{8}t-0.5z)\quad(\mathrm{V/m})$$

求：(1)磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的表达式；(2)内导体表面的电流密度；(3)计算 $0\leqslant z\leqslant 1\mathrm{m}$ 中的位移电流 i_d。

1－28　若 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 是无源($\boldsymbol{J}=0$，$\rho=0$)、无损耗媒质($\sigma=0$)中麦克斯韦方程的解，试证明：

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}\cos\phi+\eta\boldsymbol{H}\sin\phi$$

$$\boldsymbol{H}_1=-\frac{1}{\eta}\boldsymbol{E}\sin\phi+\boldsymbol{H}\cos\phi$$

也是麦克斯韦方程的解(式中，ϕ 为任意角度，$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$)。

1－29　已知无源的空气中的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_{y}2\cos(15\pi x)\sin(6\pi\times10^{9}t-kz)\quad(\mathrm{A/m})$$

利用由麦克斯韦方程求相应的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 以及常数 k 的值。

1－30　在球坐标系中，已知电磁场的瞬时值为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_{\theta}\frac{E_0}{r}\sin\theta\sin(\omega t-k_0 r)\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_{\phi}\frac{E_0}{\eta_0 r}\sin\theta\sin(\omega t-k_0 r)\quad(\mathrm{A/m})$$

式中，E_0 为常数；$\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$；$k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$。试计算通过以坐标原点为球心、$r_0$ 为半径的球面 S 的总功率。

1－31　已知无源的真空中电磁波的电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_{z}E_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)\quad(\mathrm{V/m})$$

证明：$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\boldsymbol{e}_{z}w_{\mathrm{av}}c$，其中 w_{av} 是电磁场能量密度的时间平均值，$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ 为电磁波在真空中的传播速度。

第二章　平面电磁波在无界媒质中的传播

麦克斯韦方程组完整而严密地描述了电磁场的全部特性，包括电磁场与电荷、电流分布之间的关系以及变化的电磁场量之间的关系。麦克斯韦方程组的解给出了所有电磁场问题的解答。当然，在一般情况下，直接求解麦克斯韦方程组是困难的。

本章将集中讨论无源、无界媒质中的电磁场。麦克斯韦方程表明变化的电场产生磁场、变化的磁场又产生电场，如此延续下去导致电磁能量的流动。我们首先根据麦克斯韦方程导出场矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的波动方程，在特定条件下求解波动方程，进而讨论平面电磁波的传播特性。

平面波是很多实际电磁波的很好近似。在距离波源很远的有限区域内，实际的球面波就可近似为平面波。在某种意义上说，平面波是所有电磁波问题的基本构成模块，更复杂的电磁波可认为是很多平面波的叠加。

均匀平面波又是平面波中最简单的一类，它是指在与波传播方向垂直的无限大平面内，波的场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的振幅、相位和方向都相同的电磁波。在这种条件下，大大简化了对波的传播特性的分析。因此，对均匀平面波的讨论在理论和实践上都有其重要意义。

2.1　波 动 方 程

在研究电磁波的传播问题时，应着重考虑的是无源区域（该区域内不存在产生电磁场的电荷和电流）内的电磁波传播特性。假设该无源区域内充满均匀、线性和各向同性的非导电媒质，其参数 $\mu=\mu_r\mu_0$、$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ 皆为常数，且电导率 $\sigma=0$。此时，麦克斯韦方程组为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.1.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2.1.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{2.1.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{2.1.4}$$

据此可导出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程。对式(2.1.2)取旋度，得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla\times\left(-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right) \tag{2.1.5}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

并将式(2.1.4)代入上式，得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{2.1.6}$$

将式(2.1.6)代入式(2.1.5)，并变换对空间变量和对时间变量的微分顺序，得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H}) \tag{2.1.7}$$

将式(2.1.1)代入式(2.1.7),即得场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1.8}$$

同样可导出场矢量 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1.9}$$

式(2.1.8)和式(2.1.9)是齐次矢量波动方程。在给定坐标系中,每个方程都可分解为三个齐次标量波动方程,这些方程全面地描述了无源非导电媒质中的电磁场。

对于时谐电磁场,应用复数形式的麦克斯韦方程组可导出复数形式的波动方程。在无源的非导电媒质中,复数形式的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \tag{2.1.10}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H} \tag{2.1.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{2.1.12}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.1.13}$$

根据式(2.1.10)～式(2.1.13)即可导出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的二阶偏微分方程组:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.1.14}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{H} = 0 \tag{2.1.15}$$

它们是在无源的非导电媒质中,场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 满足的复矢量波动方程,又称齐次亥姆霍兹方程。

练　习　题

2.1－1　推导式(2.1.9)表示的磁场矢量 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程。

2.1－2　推导式(2.1.14)表示的电场复矢量 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程。

2.2　非导电媒质中的均匀平面波

2.2.1　一维波动方程的解

2.1 节提到的非导电媒质,其典型特征是电导率 $\sigma=0$,因而不存在传导电流。这种媒质也称为无损耗媒质。

本节将求解已导出的波动方程,根据方程的解来讨论波的传播特性。满足波动方程的时间函数的具体形式取决于波源的性质。在工程应用上,随时间作简谐变化的函数有着重要的意义。这不仅是因为正弦波易于激励,且任意的周期函数可展开为正弦函数的傅里叶级数。因此,我们不必去求用一般函数表示的解,而是集中讨论时谐电磁场的齐次亥姆霍兹方程及其解。

对于均匀平面波,如果我们假定波的传播方向为 $+z$ 轴方向,按均匀平面波的含义,在 $z=$常数的横向平面内,场量的振幅、相位和方向都是不变的。因此,对于沿 $+z$ 轴方向

传播的均匀平面波，电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 都不是 x，y 的函数。即 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 应满足

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}=\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x}=\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y}=0$$

此时，亥姆霍兹方程(2.1.14)和(2.1.15)可简化为标量形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2E_x(z)}{\mathrm{d}z^2}+\omega^2\mu\varepsilon E_x(z)=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2E_y(z)}{\mathrm{d}z^2}+\omega^2\mu\varepsilon E_y(z)=0\end{cases}\tag{2.2.1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2H_x(z)}{\mathrm{d}z^2}+\omega^2\mu\varepsilon H_x(z)=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2H_y(z)}{\mathrm{d}z^2}+\omega^2\mu\varepsilon H_y(z)=0\end{cases}\tag{2.2.2}$$

且 $E_z=0$，$H_z=0$。

可见，四个场分量满足相同形式二阶常微分方程。在均匀媒质中传播单一频率的波时，$\omega^2\mu\varepsilon=$常数，若取 $\gamma^2=-\omega^2\mu\varepsilon$，则有

$$\gamma=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\mathrm{j}k\text{，称为传播常数}$$

式中

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\tag{2.2.3}$$

则方程(2.2.1)和(2.2.2)有指数形式的通解：

$$\begin{cases}E_x(z)=A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+A_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\\ E_y(z)=B_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+B_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\\ H_x(z)=C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+C_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\\ H_y(z)=D_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+D_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\end{cases}\tag{2.2.4}$$

式中 A_1、B_1、C_1、D_1 和 A_2、B_2、C_2、D_2 都是待定常数，且一般为复常数。通解中的第一项含因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$，代表沿 $+z$ 轴方向传播的波，称为正向行波；第二项含因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$，代表沿 $-z$ 轴方向传播的波，称为反向行波。对于无界的均匀媒质只存在沿一个方向传播的波，我们取

$$\begin{cases}E_x(z)=A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=E_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\ E_y(z)=B_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=E_{ym}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\end{cases}\tag{2.2.5}$$

$$\begin{cases}H_x(z)=C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=H_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi'_x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\ H_y(z)=D_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=H_{ym}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi'_y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\end{cases}\tag{2.2.6}$$

应该注意，式中的 A_1、B_1、C_1、D_1 并不是彼此独立的，这是因为电磁场量还必须满足麦克斯韦方程。将式(2.2.5)和式(2.2.6)代入式(2.1.10)和式(2.1.11)可得

$$E_x(z)=\frac{k}{\omega\varepsilon}H_y(z)=\frac{\omega\mu}{k}H_y(z)=\eta H_y(z)\tag{2.2.7}$$

$$E_y(z)=-\frac{k}{\omega\varepsilon}H_x(z)=-\frac{\omega\mu}{k}H_x(z)=-\eta H_x(z)\tag{2.2.8}$$

式中

$$\eta = \frac{k}{\omega\varepsilon} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(\Omega) \tag{2.2.9}$$

称为媒质中的本征阻抗，也称波阻抗，由媒质参数确定。将式(2.2.7)和式(2.2.8)代入式(2.2.5)和式(2.2.6)，并写为矢量形式

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(z) &= \boldsymbol{e}_x E_x(z) + \boldsymbol{e}_y E_y(z) \\ \boldsymbol{H}(z) &= \frac{1}{\eta}[-\boldsymbol{e}_x E_y(z) + \boldsymbol{e}_y E_x(z)] = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.2.10}$$

上式表明沿$+z$轴方向传播的均匀平面波可存在两组分量波：E_x和H_y构成一组分量波，E_y和$-H_x$构成另一组分量波，这两组分量波彼此独立。又据式(2.2.10)，可得

$$\boldsymbol{E}(z) \cdot \boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{E}(z) \cdot \frac{1}{\eta}[\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}(z)] = 0 \tag{2.2.11}$$

表明均匀平面波的电场$\boldsymbol{E}$和磁场$\boldsymbol{H}$相互垂直，且垂直于波的传播方向；矢量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$和$\boldsymbol{e}_z$之间符合右手螺旋关系。

2.2.2 均匀平面波的传播特性

沿$+z$方向传播的均匀平面波的电场和磁场之间有式(2.2.10)表示的关系，所以讨论均匀平面波的传播特性时，只需选择其中的一个场量，例如电场$\boldsymbol{E}$，且只讨论一组分量波。

选用余弦函数$\cos\omega t$为基准，电场分量E_x的瞬时值形式为

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \mathrm{Re}[E_x(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[E_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \\ & E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

可见，电场分量E_x既是时间的周期函数，又是空间坐标的周期函数。

在z=常数的平面内，E_x以角频率ω随时间按余弦规律变化。图2－1表示$z=0$的平面上，E_x随时间变化的图形。在这里取初相位$\varphi_x=0$，故有$E_x(0,t)=E_{xm}\cos\omega t$。周期$T$由$\omega T=2\pi$确定，有$T=2\pi/\omega$，它表示在给定位置上，时间相位相差$2\pi$的两平面间的时间间距。频率$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$，由波源确定。

在t=常数时，E_x随空间坐标z的周期变化如图2－2所示。在这里取$t=0$，且$\varphi_x=0$，故有$E_x(z,0)=E_{xm}\cos kz$。

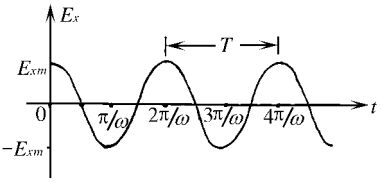


图2－1 $z=0$的平面上，$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz)$的图形

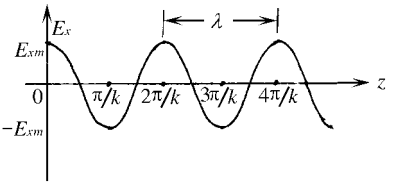


图2－2 $t=0$时，$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz)$的图形

波长由$k\lambda=2\pi$确定，有

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (\mathrm{m}) \tag{2.2.13}$$

它表征在给定时刻，空间相位相差 2π 的两平面间的距离。k 表示波传播单位距离的相位变化，称其为相位常数，单位是 rad/m。式(2.28)的逆关系为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\mathrm{rad/m}) \tag{2.2.14}$$

它也表示一个周期内所含有的波长数，故又称其为波数。

图 2－3 按式(2.2.12)绘出取初相位 $\varphi_x = 0$ 时，在几个不同时刻 E_x 随 z 变化的图形。在 $t=0$ 时，$E_x(z,0) = E_{xm}\cos kz$ 是振幅为 E_{x0} 的余弦曲线。随着时间的推移，此曲线沿＋z 轴方向匀速前进，此即正向行波。

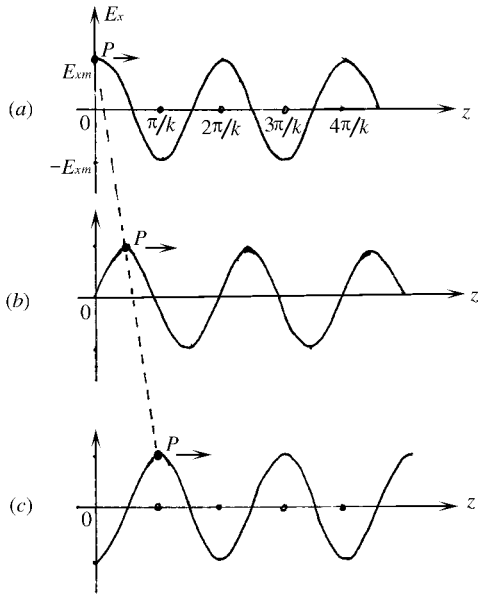


图 2－3　在三个时刻：(a) $t=0$，(b) $t=T/4$，(c) $t=T/2$ 时，$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - kz)$ 的图形

从前面的讨论中看出，对于任意给定的时刻，当空间坐标 z 增加一个波长时，$kz = k\lambda = 2\pi$，波形恢复到原来的大小和相位。然而时间是不断变化的，因此波也是不固定的。现在，让我们将观察点固定在恒定相位点，例如图 2－3 中的波峰点 P，该点相应于

$$\omega t - kz = \text{常数} \tag{2.2.15}$$

此式表明随着时间 t 的增加，空间坐标 z 也必须增加，以保证相位恒定，即 $\omega t - kz =$ 常数。

由式(2.2.15)得相位为常数的平面移动的速度，称为相速：

$$v_\mathrm{p} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{2.2.16}$$

由于 ω 和 k 都是正数，故相速 $v_\mathrm{p} > 0$，波沿＋z 轴方向转动。这也证明了 $E_x = E_{x0}\cos(\omega t - kz)$ 代表沿＋z 轴方向传播的波。

式(2.2.16)表明相速 v_p 是媒质参数 μ 和 ε 的函数。在自由空间，$\mu = \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m，$\varepsilon = \varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi\times9\times10^9}$ F/m，故相速

$$v_{p0}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8\,\mathrm{m/s}=\text{光速}\ c$$

应用麦克斯韦第二方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$或直接由关系式(2.2.10)可求出与电场$\boldsymbol{E}$相伴的磁场

$$\boldsymbol{H}(z)=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z)=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_xE_x(z)=\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\eta}E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_x)}\tag{2.2.17}$$

其瞬时值形式为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\mathrm{R_e}[\boldsymbol{H}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\eta}E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_x)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\boldsymbol{e}_y\frac{E_{xm}}{\eta}\cos(\omega t-kz+\varphi_x)\tag{2.2.18}$$

可见,电场与磁场的振幅相差一个因子$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$,而相位相同。图2-4绘出$t=0$时刻,$E_x$和$H_y$的图形。电场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_x$在$xz$平面上,磁场$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_yH_y$在$yz$平面上,两者同相位。

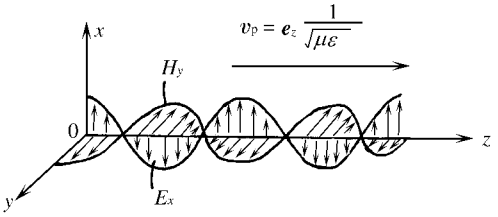


图2-4　沿$+z$方向传播的均匀平面波的电场和磁场

非导电媒质中,沿$+z$方向传播的均匀平面波传输的平均功率流密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\text{平均}}&=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}(z)\times\boldsymbol{H}^*(z)]=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}(z)\times(\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}^*(z))]=\\&\frac{1}{2\eta}\mathrm{R_e}[(\boldsymbol{E}(z)\cdot\boldsymbol{E}^*(z))\boldsymbol{e}_z-(\boldsymbol{E}(z)\cdot\boldsymbol{e}_z)\boldsymbol{E}^*(z)]=\\&\frac{1}{2\eta}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{E}(z)\cdot\boldsymbol{E}^*(z))]=\\&\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2\eta}E^2=\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2\eta}(E_x^2+E_y^2)\end{aligned}\tag{2.2.19}$$

在这里应用了矢量恒等式$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$,且考虑到$\boldsymbol{E}(z)\cdot\boldsymbol{e}_z=0$以及$\boldsymbol{E}(z)\cdot\boldsymbol{E}^*(z)=E^2$。

考虑到$\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$和$v_p=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$,式(2.2.19)可表示为

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\boldsymbol{v}_p\tag{2.2.20}$$

上式表明,在无界均匀媒质中,均匀平面波的电磁能量传播速度等于相速。

例2.1　频率$f=100\mathrm{MHz}$的均匀平面波在非导电媒质中沿$+z$轴方向传播,设其电场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_x$。已知该媒质的相对介电常数$\varepsilon_r=4$,相对磁导率$\mu_r=1$,且当$t=0$,$z=\frac{1}{8}\mathrm{m}$

时，电场为其振幅值$+10^{-4}$ V/m。(1)求相速、相位常数及波长；(2)写出电场和磁场的瞬时表示式；(3)确定当 $t=10^{-8}$ s 时，电场为正振幅值的位置。

解： (1)相速 $v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\dfrac{3\times10^8}{\sqrt{4}}=1.5\times10^8$ m/s

相位常数 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}=$

$$\frac{2\pi f}{c}\sqrt{4}=\frac{2\pi\times10^8}{3\times10^8}\sqrt{4}=\frac{4\pi}{3}\quad \text{rad/m}$$

波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{2\pi\times3}{4\pi}=1.5$m

(2) 以余弦为基准，电场的瞬时表示式为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{E}_x(z,t)=\boldsymbol{e}_x10^{-4}\cos(2\pi\times10^9t-kz+\varphi_x)$$

据题给条件应有 $t=0,z=\dfrac{1}{8}$m 时

$$2\pi\times10^8t-\frac{4\pi}{3}z+\varphi_x=0,E_x=+10^{-4}\quad \text{V/m}$$

故得

$$\varphi_x=\frac{4\pi}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{\pi}{6}\quad (\text{rad})$$

则电场的瞬时表示式

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x10^{-4}\cos(2\pi\times10^8t-\frac{4\pi}{3}z+\frac{\pi}{6})\quad (\text{V/m})$$

与之相伴的磁场瞬时表示式为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z,t)=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_xE_x(z,t)=\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\eta}E_x(z,t)$$

式中

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\eta_0=\frac{1}{\sqrt{4}}120\pi=60\pi\quad (\Omega)$$

故

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_y\frac{10^{-4}}{60\pi}\cos(2\pi\times10^8t-\frac{4\pi}{3}z+\frac{\pi}{6})\quad (\text{A/m})$$

(3) 当 $t=10^{-8}$ s 时，为使 E_x 为正振幅值，应有

$$2\pi\times10^8\times10^{-8}-\frac{4\pi}{3}z+\frac{\pi}{6}=\pm2n\pi,n=0,1,2\cdots$$

故得

$$z=\frac{13}{8}\pm\frac{3}{2}n\quad (\text{m})$$

例2.2 电场 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x10\cos(2\pi\times10^9t-10\pi z)$ (V/m)的均匀平面波在某种非导电媒质(设其参数为 $\mu=\mu_0,\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0,\sigma=0$)中传播，试求：(1)该媒质的相对介电常数 ε_r；(2)波的相速 v_p 和波长 λ；(3)与电场 $\boldsymbol{E}$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}$；(4)波的平均功率流密度矢量 $\boldsymbol{S}_{平均}$。

解： (1) 由题给的电场表示式知角频率 $\omega=2\pi\times10^9$ rad/s，相位常数 $k=10\pi$ rad/m，而

$$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}$$

故

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{k}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{10\pi}{2\pi \times 10^9} \times 3 \times 10^8 = 1.5$$

则所求媒质的相对介电常数为

$$\varepsilon_r = 2.25$$

也可从给定的 $\boldsymbol{E}$ 必须满足波动方程(2・1・8)出发来确定 ε_r。

波动方程的第一项为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x \nabla^2 E_x = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} =$$

$$-\boldsymbol{e}_x 10^3 \pi^2 \cos(2\pi \times 10^9 t - 10\pi z)$$

波动方程的第二项中的

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\boldsymbol{e}_x 10 \times (2\pi \times 10^9)^2 \cos(2\pi \times 10^9 - 10\pi z)$$

故式(2.1.8)可表示为

$$-\boldsymbol{e}_x 10^3 \pi^2 \cos(2\pi \times 10^9 t - 10\pi z) + \boldsymbol{e}_x \mu\varepsilon \times 10 \times$$

$$(2\pi \times 10^9)^2 \cos(2\pi \times 10^9 t - 10z) = 0$$

必须

$$10^3 \pi^2 = \mu\varepsilon \times 10 \times (2\pi \times 10^9)^2$$

则得

$$\varepsilon_r = \frac{10^3 \pi^2}{10\mu_0 \varepsilon_0 (2\pi \times 10^9)^2} = \frac{9}{4} = 2.25$$

(2) 波的相速为

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} c =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2.25}} \times 3 \times 10^8 = 2 \times 10^8 \quad \text{m/s}$$

波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0.2\text{m}$$

(3) 由题给定的电场表示式知,该均匀平面波沿 $+z$ 轴方向传播,故与电场 $\boldsymbol{E}$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}$ 可直接利用关系式(2.2.10)求得

$$\boldsymbol{H}(z,t) = \frac{1}{\eta} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}(z,t) = \frac{1}{\eta} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x 10\cos(2\pi \times 10^9 t - 10\pi z) =$$

$$\frac{1}{\eta} \boldsymbol{e}_y 10\cos(2\pi \times 10^9 t - 10\pi z)$$

$$\boldsymbol{e}_y \frac{10}{251.33} \cos(2\pi \times 10^9 t - 10\pi z) =$$

$$\boldsymbol{e}_y 39.78 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^9 t - 10\pi z) \quad (\text{A/m})$$

式中的本征阻抗 η 为

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{2.25}}377=251.33\ \Omega$$

(4)电场、磁场的复数形式分别为

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_x 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\pi z}\quad(\mathrm{V/m})$$

和

$$\boldsymbol{H}(z)=\boldsymbol{e}_y 39.78\times10^{-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\pi z}\quad(\mathrm{A/m})$$

故平均功率流密度为

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}(z)\times\boldsymbol{H}^*(z)]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_x 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\pi z}\times\boldsymbol{e}_y 39.78\times10^{-3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10\pi z}]=$$

$$\boldsymbol{e}_z 19.89\times10^{-2}\quad(\mathrm{W/m^2})$$

例2.3 已知自由空间中传播的均匀平面波的电场表示式为 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x 50\cos(6\pi\times10^8 t-kz)$ (V/m),试求在 $z=z_0$ 处垂直穿过半径 $R=2.5\mathrm{m}$ 的圆平面的平均功率。

解:电场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_x 50\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\quad(\mathrm{V/m})$$

而自由空间的本征阻抗 η_0 为

$$\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\Omega$$

故磁场表示式为

$$\boldsymbol{H}(z)=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_y\frac{50}{377}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\quad(\mathrm{A/m})$$

于是平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}(z)\times\boldsymbol{H}^*(z)]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_x 50\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\times\boldsymbol{e}_y\frac{50}{377}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}]=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\times50\times\frac{50}{377}\quad(\mathrm{W/m^2})$$

故垂直穿过半径 $R=2.5\mathrm{m}$ 的圆平面的平均功率为

$$P=\int_s\boldsymbol{S}_{\text{平均}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_{\text{平均}}\times\pi R^2=$$

$$\frac{50\times50}{2\times377}\times\pi\times2.5^2=65.11\mathrm{W}$$

2.2.3 沿任意方向传播的均匀平面波

前面讨论了沿 $+z$ 方向传播的一组分量波,其电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_x$,与之相伴的磁场 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_y H_y$。$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 相互垂直,又都在与传播方向垂直的横向平面内,且场量的复数表示式仅只是 z 坐标的函数,这是横电磁波(TEM 波)的一种特殊情况。若无特殊需要,把波的传播方向定为 $+z$ 方向是方便的。此时,电场的复数形式可写为

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\qquad(2.2.21)$$

式中，$\boldsymbol{E}_0$ 是一个常矢量。

若均匀平面波是沿用单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 表示的任意方向传播，则式(2.2.21)可表示为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x-\mathrm{j}k_y y-\mathrm{j}k_z z} \tag{2.2.22}$$

式中

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$

将式(2.2.22)直接代入齐次亥姆霍兹方程 $\nabla^2 \boldsymbol{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E} = 0$ 可验证它是满足方程的。

引入波矢量

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_n k = \boldsymbol{e}_x k_x + \boldsymbol{e}_y k_y + \boldsymbol{e}_z k_z \tag{2.2.23}$$

以及空间任一点的矢径

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z \tag{2.2.24}$$

得

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{e}_x k_x + \boldsymbol{e}_y k_y + \boldsymbol{e}_z k_z) \cdot (\boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z) = k_x x + k_y y + k_z z$$

则式(2.2.22)可表示为

$$\boldsymbol{E}(r) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.2.25}$$

式(2.2.23)和式(2.2.24)的几何关系如图 2－5 所示，可见

$$\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{r} = OP_0 = \text{常数}$$

表示垂直于传播方向 $\boldsymbol{e}_n$ 的平面。正如图 2－6 中，z＝常数的平面表示沿＋z 方向传播的均匀平面波的等相位面一样，$\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{r}$＝常数的平面也是表示沿 $\boldsymbol{e}_n$ 方向传播的等相位面。

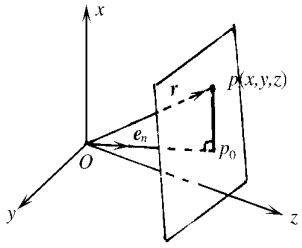


图 2－5　沿任意方向 $\boldsymbol{e}_n$ 传播的平面波的等相位面

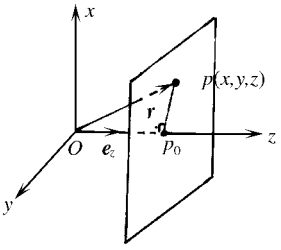


图 2－6　沿＋z 方向传播的平面波的等相位面

此外，式(2.2.25)在无源区域还应满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$。将式(2.2.25)代入 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$，可以证明 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ 成立的条件为

$$\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0 \tag{2.2.26}$$

此结果表明式(2.2.25)的解答形式已隐含着电场常矢量 $\boldsymbol{E}_0$ 与波的传播方向 $\boldsymbol{e}_n$ 相垂直。

与电场 $\boldsymbol{E}(r)$ 相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}(r) = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E}(r) = \frac{1}{\eta}(\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.2.27}$$

此关系式同样表明沿任意方向传播的均匀平面波是 TEM 波的一个特例，电场与磁场相

互垂直，且垂直于传播方向，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{e}_n$ 三者符合右手螺旋关系。

通过前面的讨论，我们可将非导电媒质中均匀平面波的基本传播特性归纳如下：

(1) 均匀平面波在传播方向上没有电场、磁场分量，是一种横电磁波(TEM 波)。例如，沿$+z$ 轴方向传播的均匀平面波，$E_z=0$，$H_z=0$，只有由 E_x 和 H_y 构成的一组分量波以及由 E_y 和$-H_x$ 构成的另一组分量波。电场和磁场都在与 z 轴垂直的横向平面内，且 E_x、H_y；E_y、$-H_x$ 都只是 z 坐标的函数。

(2) 均匀平面波的电场 $\boldsymbol{E}$、磁场 $\boldsymbol{H}$ 和波的传播方向三者相互垂直，且符合右手螺旋关系。

(3) 均匀平面波的相速 $v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$，仅与媒质参数有关。

(4) 均匀平面波的电场 $\boldsymbol{E}$ 与磁场 $\boldsymbol{H}$ 同相位，在任一瞬时，电场值等于磁场值的 η 倍，即 $|\boldsymbol{E}|=\eta|\boldsymbol{H}|$。

练　习　题

2.2－1　根据关系式 $\boldsymbol{H}(z)=\dfrac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z)$、$\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$，证明 $\boldsymbol{E}(z)$和 $\boldsymbol{H}(z)$相互垂直。

2.2－2　应用式(2.2.25)和$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(z)=0$，证明 $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{E}_0=0$。

2.2－3　某种非导电媒质中的电场 $\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{e}_y E_{ym}\cos(\omega t-kx)$，式中的 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，试证明：$\boldsymbol{E}(x,t)$满足波动方程，且它是表征沿$+x$ 方向传播的均匀平面波。

2.3　导电媒质中的均匀平面波

导电媒质的典型特征是电导率 $\sigma\neq0$，当其中存在电磁波时，必然就有传导电流 $\boldsymbol{J}_c=\sigma\boldsymbol{E}$，同时伴随着电磁能量损耗，因而电磁波的传播特性就不同了。

本节讨论单一频率的正弦均匀平面波在导电媒质中的传播特性。

2.3.1　导电媒质中的波动方程及其解

在导电媒质中的无源区域，麦克斯韦方程组的复数形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\sigma\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{2.3.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{2.3.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{2.3.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{2.3.4}$$

其中式(2.3.1)可改写为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\left(\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_c\boldsymbol{E} \tag{2.3.5}$$

式中

$$\varepsilon_c=\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega} \tag{2.3.6}$$

称为媒质的复介电常数，可表示为

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon''$$

这里的 $\varepsilon' = \varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ 是媒质的介电常数，$\varepsilon'' = \dfrac{\sigma}{\omega}$ 与媒质的电导率有关。比值 $\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ 表征媒质中传导电流与位移电流的振幅之比，即

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \tan\delta_c \tag{2.3.7}$$

称为损耗正切，它是导电媒质中热损耗的一种量度。δ_c 称为损耗正切角。

重新写出引入复介电常数后的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_c\boldsymbol{E} \tag{2.3.8}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{2.3.9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{2.3.10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.3.11}$$

将此方程组与式(2.1.10)～式(2.1.13)对比，可看出只需用导电媒质的复介电常数 ε_c 替代 ε，两个方程组的形式就完全相同。由式(2.3.8)～式(2.3.11)可导出导电媒质中的齐次亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + \omega^2\mu\varepsilon_c\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.3.12}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H} + \omega^2\mu\varepsilon_c\boldsymbol{H} = 0 \tag{2.3.13}$$

将这两个方程与非导电媒质中的方程(2.1.14)和(2.1.15)比较，其差别在用 ε_c 替代 ε。因此，前节中关于非导电媒质中的均匀平面波的讨论，对于导电媒质也是适用的，只需用 ε_c 替代 ε 就行了。

同样取 $\gamma^2 = -\omega^2\mu\varepsilon_c$，则有

$$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} = \mathrm{j}k_c$$

式中，k_c 称复波数。

引入传播常数 γ，式(2.3.12)变为

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \gamma^2\boldsymbol{E} = 0$$

由此方程得对应于沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波的电场解为

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_x\boldsymbol{E}_x = \boldsymbol{e}_x\boldsymbol{E}_{xm}\mathrm{e}^{-\gamma z} = \boldsymbol{e}_x\boldsymbol{E}_{xm}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{2.3.14}$$

式中，α 和 β 分别是传播常数 $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta$ 的实部和虚部，它们都是实数。式(2.3.14)中的第一个因子 $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ 随传播距离 z 的增加而按指数规律减小，它表征波的振幅衰减特性，称为衰减因子，α 称为衰减常数。在国际单位制中，α 的单位是 Np/m(奈培/米)。若 $\alpha = 1\mathrm{Np/m}$，则表明波传播 1m 后，场量的单位振幅衰减至 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$(即 36.8%)。第二个因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$ 表征波传播单位距离的相移量，β 称为相位常数，其单位是 rad/m(弧度/米)。弧度(rad)和奈培(Np)均无量纲，因而传播常数 γ 的单位通常表示为 1/m。

写出与式(2.3.14)对应的电场瞬时值形式为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{R_e}\left[\boldsymbol{E}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{R_e}\left[\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{E}_{xm}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] =$$

$$\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{E}_{xm}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta t) \tag{2.3.15}$$

此式表明它是一个以相速 $v_p=\dfrac{\omega}{\beta}$ 沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波，其振幅将随传播距离 z 的增加而按指数规律衰减。

与电场 $\boldsymbol{E}$ 相伴的磁场可由方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$ 或直接利用关系式(2.2.10)求得

$$\boldsymbol{H}(z)=\frac{1}{\eta_c}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\eta_c}E_{xm}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}=$$

$$\boldsymbol{e}_y\frac{1}{|\eta_c|}E_{xm}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta z+\varphi)} \tag{2.3.16}$$

式中

$$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega}}}=|\eta_c|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{2.3.17}$$

称为导电媒质的本征阻抗，它由媒质参数和电磁波的频率确定，是一个复数。

写出与式(2.3.16)对应的瞬时值形式为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\mathrm{R_e}[\boldsymbol{H}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=$$

$$\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_y\frac{1}{|\eta_c|}\boldsymbol{E}_{xm}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta z+\varphi)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=$$

$$\boldsymbol{e}_y\frac{E_{xm}}{|\eta_c|}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta t-\varphi) \tag{2.3.18}$$

比较式(2.3.15)和式(2.3.18)可见，在导电媒质中，电场和磁场在空间同一位置不再同相，而是存在相位差 φ。图 2－7 给出 $t=0$ 时刻 E_x 和 H_y 的图形，它们的振幅随传播距离 z 的增加而连续衰减，且磁场比电场滞后一个相位角 φ。

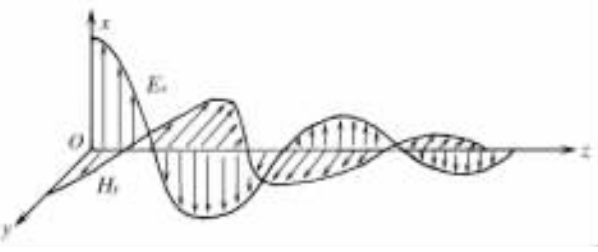


图 2－7　导电媒质中沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波的电场和磁场

导电媒质中的平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{平均}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}(z)\times\boldsymbol{H}^*(z)]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_xE_{xm}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\times\boldsymbol{e}_y\frac{E_{xm}}{|\eta_c|}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta z+\varphi)}]=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\frac{E_{xm}^2}{|\eta_c|}\mathrm{e}^{-2\alpha z}\cos\varphi \tag{2.3.19}$$

可见，由于导电媒质的电导率 $\sigma\neq0$ 而引入衰减常数 $\alpha\neq0$，使得平面波传播过程中伴随着电磁能量的损耗，表现为电磁场量振幅的不断减小。平均功率密度的减小速率为 2α。

最后再讨论传播常数 γ 的意义。由设定的 $\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta$，得

$$\gamma^2=(\alpha+\mathrm{j}\beta)^2=(\alpha^2-\beta^2)+\mathrm{j}2\alpha\beta=-\omega^2\mu\left(\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

故

$$\alpha^2-\beta^2=-\omega^2\mu\varepsilon$$

$$2\alpha\beta=\omega\mu\sigma$$

联立求解以上二式，得

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]} \tag{2.3.20}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]} \tag{2.3.21}$$

可见，衰减常数 α 和相位常数 β 不仅与媒质参数 ε、μ、σ 有关，还与波的频率有复杂的关系。所以，导电媒质中电磁波的相速 $v_\mathrm{p}=\dfrac{\omega}{\beta}$ 是频率的函数。这就导致在同一导电媒质中，不同频率的波将以不同的相速传播，这种现象称为色散，相应地称导电媒质为色散媒质。

通过以上讨论，可将导电媒质中均匀平面波的传播特性归纳如下：

(1) 仍然是横电磁波，但电场、磁场的振幅随传播距离的增加而按指数规律减小，且磁场的相位滞后于电场一个 φ 角。

(2) 是色散波。波的相速不仅与媒质参数有关，还与波的频率有关。

(3) 随着传播距离的增加，电磁波的功率密度将以速率 2α 逐渐减小。

例 2.4 已知潮湿土壤的相对介电常数 $\varepsilon_\mathrm{r}=10$ 电导率 $\sigma=10^{-2}\,\mathrm{S/m}$，磁导率 $\mu=\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$。频率 $f=100\mathrm{MHz}$ 的均匀平面电磁波在其中传播时，设其电场为 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x 0.2\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)\quad(\mathrm{V/m})$；试计算传播常数、相速、本征阻抗以及平均功率密度。

解：

$$\omega=2\pi f=2\pi\times100\times10^6=2\pi\times10^8\quad\mathrm{rad/s}$$

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\frac{10^{-2}}{2\pi\times10^8\times10\times\dfrac{1}{4\pi\times9\times10^9}}=0.18$$

$$\frac{\mu\varepsilon}{2}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times10\times\dfrac{1}{4\pi\times9\times10^9}}{2}=\frac{5}{9}\times10^{-16}$$

故衰减常数

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]}=$$

$$2\pi\times10^8\sqrt{\frac{5}{9}\times10^{-16}\left[\sqrt{1+(0.18)^2}-1\right]}=0.592\mathrm{Np/m}$$

相位常数

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}=$$

$$2\pi\times10^{8}\sqrt{\frac{5}{9}\times10^{-16}\left[\sqrt{1+(0.18)^{2}}+1\right]}=6.65\quad \text{rad/m}$$

则传播常数

$$\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta=0.592+\mathrm{j}6.65\quad 1/\text{m}$$

相速

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2\pi\times10^{8}}{6.65}=0.94\times10^{8}\quad \text{m/s}$$

本征阻抗

$$\eta_{\mathrm{c}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{\mathrm{c}}}}=\sqrt{\mu_{0}/\left(\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right)}=$$

$$\sqrt{4\pi\times10^{-7}/\left(10\times\frac{1}{4\pi\times9\times10^{9}}-\mathrm{j}\frac{10^{-2}}{2\pi\times10^{8}}\right)}=$$

$$118\mathrm{e}^{\mathrm{j}5.1^{\circ}}=117.5+\mathrm{j}10.49\quad(\Omega)$$

平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}\left[\boldsymbol{E}(z)\times\boldsymbol{H}^{*}(z)\right]=$$

$$\boldsymbol{e}_{z}\frac{E_{xm}^{2}}{2\mid\eta_{\mathrm{c}}\mid}\mathrm{e}^{-2\alpha z}\cos\varphi=\boldsymbol{e}_{z}\frac{0.2^{2}}{2\times118}\mathrm{e}^{-2\times0.592z}\cos5.1^{\circ}=$$

$$\boldsymbol{e}_{z}1.69\times10^{-4}\mathrm{e}^{-1.184z}\quad(\mathrm{W/m^{2}})=\boldsymbol{e}_{z}169\mathrm{e}^{-1.184z}\quad(\mu\mathrm{W/m^{2}})$$

2.3.2 良导体中的波

良导体是指$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg1$**的媒质。例如,铜、银、铝等金属导体,其电导率都在**10^{7}**量级,在整个无线电频率范围内部满足**$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg10^{2}$**,此时媒质中的传导电流较位移电流占绝对优势。**

利用条件$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg1$**,有**

$$\gamma=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2}\approx$$

$$\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{\sigma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}}=\sqrt{\mathrm{j}}\sqrt{\omega\mu\sigma}=\frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}=\sqrt{\omega\mu\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^{\circ}}\qquad(2.3.22)$$

或

$$\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta\approx(1+\mathrm{j})\sqrt{\pi f\mu\sigma}\qquad(2.3.23)$$

注意,这里应用了以下关系式:

$$\sqrt{\mathrm{j}}=\sqrt{\frac{\mathrm{j}2}{2}}=\sqrt{\frac{1+\mathrm{j}2-1}{2}}=\sqrt{\frac{(1+\mathrm{j})^{2}}{2}}=\frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^{\circ}}$$

$$\omega=2\pi f$$

式(2.3.23)**表明,在良导体中,衰减常数**α**和相位常数**β**的值大致相等,且都随**$\sqrt{f}$**和**$\sqrt{\sigma}$**成正比地增加,即**

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f \mu \sigma} \tag{2.3.24}$$

利用条件$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$可得良导体的本征阻抗为

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \approx \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi f\mu}{\sigma}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} \tag{2.3.25}$$

它的相角45°表明良导体中磁场强度的相位滞后于电场强度45°。

良导体中电磁波的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{\omega}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \tag{2.3.26}$$

良导体中，电磁波的波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \tag{2.3.27}$$

式(2.3.24)表明高频电磁波在良导体中的衰减是很快的，频率越高、电导率越高，衰减系数就越大。因此，电磁波只能存在于良导体的表面层内，这种现象称为趋肤效应。我们用趋肤深度(或穿透深度)来表征良导体中趋肤效应的程度。

趋肤深度的定义：良导体中的波，在其振幅下降为表面处振幅的$\frac{1}{\mathrm{e}}$(即36.8%)时所传播的距离。若用δ表示，则有$E_m \mathrm{e}^{-\alpha\delta} = \frac{E_m}{e}$，故趋肤深度

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \tag{2.3.28}$$

图2－8表示在导电媒质中沿$+z$方向传播的均匀平面波的电场振幅随趋肤深度的变化。可见，当传播距离为5δ时，电场振幅就降低至1%以下，就可认为波已衰减完了。

作为例子，我们给出金属材料铜在几个特定频率下的趋肤深度。铜的参数：$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m，$\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m，由式(2.3.28)得

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{6.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{f}}$$

$f = 50\mathrm{Hz}$时

$$\delta = \frac{6.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{50}} = 9.33 \times 10^{-3} \quad \mathrm{m}$$

$f = 1\mathrm{MHz}$时

$$\delta = \frac{6.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{10^6}} = 6.6 \times 10^{-5} \quad \mathrm{m}$$

$f = 10\mathrm{GHz}$时

$$\delta = \frac{6.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{10 \times 10^9}} = 6.6 \times 10^{-7} \quad \mathrm{m}$$

可见，频率越高，趋肤深度越小。$f = 10\mathrm{GHz}$的波，趋肤深度仅为$0.66\mu\mathrm{m}$。此频率的电磁波在铜中传播$5\delta = 3.3\mu\mathrm{m}$时，电场振幅就下降到1%以下。

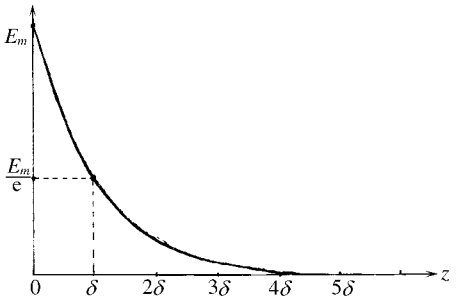


图 2－8　电场振幅随 δ 的变化

2.3.3　低损耗媒质中的波

低损耗媒质是指 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ll 1$ 的媒质。媒质的电导率很低，或电磁波的频率很高都可能满足此条件。例如，云母、聚乙烯、聚苯乙烯等电介质材料的电导率都非常低，在超高频范围内，均满足 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ll 10^{-2}$，此时媒质中的位移电流较传导电流占压倒优势。在此条件下，传播常数 γ 可用二项式展开来近似为

$$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1+\frac{\sigma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\right)^{1/2}\approx$$

$$\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1+\frac{\sigma}{\mathrm{j}2\omega\varepsilon}+\frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2+\cdots\right]\approx$$

$$\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}+\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

故得

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{2.3.29}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{2.3.30}$$

以上两式表明低损耗媒质的相位常数与非导电媒质中的相位常数大致相同，但电磁波在低损耗媒质中传播时确实是要衰减的，尽管衰减很小。

低损耗媒质的本征阻抗为

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\frac{\sigma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\right)^{-1/2}\approx$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\mathrm{j}\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \tag{2.3.31}$$

即低损耗媒质的本征阻抗也是复数，表明电场和磁场的相位是不同的。

例 2.5　海水的参数为：电导率 $\sigma=4$　S/m，相对介电常数 $\varepsilon_r=81$，相对磁导率 $\mu_r=1$。

（1）试分别计算频率 $f=100\mathrm{kHz}$、$1\mathrm{MHz}$、$100\mathrm{MHz}$ 的电磁波在海水中的衰减常数、相位常数和本征阻抗。

（2）若频率 $f=100\mathrm{MHz}$ 时的电场可表示为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x 10\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)\quad(\mathrm{V/m})$$

试求出与之相伴的磁场表示式，并计算平均功率密度。

解： (1) $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\dfrac{\sigma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0}=\dfrac{4}{2\pi f\times 81\times\dfrac{1}{4\pi\times 9\times 10^9}}=\dfrac{8.89}{f}\times 10^8$

可见，当 $f\leqslant 10^7\ \mathrm{Hz}$ **时满足** $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg 1$ **条件，可视海水为良导体。此时**

$$\alpha\approx\sqrt{\pi f\mu_0\sigma}$$

$$\beta\approx\sqrt{\pi f\mu_0\sigma}$$

$$\eta_c\approx\sqrt{\frac{2\pi f\mu}{\sigma}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}$$

对于频率 $f=100\ \mathrm{kHz}$**时**

$$\alpha\approx\sqrt{\pi\times 100\times 10^3\times 4\pi\times 10^{-7}\times 4}=1.26\quad\mathrm{Np/m}$$

$$\beta\approx 1.26\quad\mathrm{rad/m}$$

$$\eta_c\approx\sqrt{\frac{2\pi\times 100\times 10^3\times 4\pi\times 10^{-7}}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}=0.44\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}\quad(\Omega)$$

对于频率 $f=1\mathrm{MHz}$ **时**

$$\alpha\approx\sqrt{\pi\times 10^6\times 4\pi\times 10^{-7}\times 4}=3.97\quad\mathrm{Np/m}$$

$$\beta\approx 3.97\quad\mathrm{rad/m}$$

$$\eta_c\approx\sqrt{\frac{2\pi\times 10^6\times 4\pi\times 10^{-7}}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}=1.41\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}\quad(\Omega)$$

当 $f=100\mathrm{MHz}$ **时，**$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\dfrac{8.89\times 10^8}{100\times 10^6}=8.89$**，不满足** $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg 1$ **条件。因此，海水不再呈现良导体性质，而应作为一般导电媒质处理。此时**

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]}=$$

$$2\pi\times 10^8\sqrt{\frac{81\mu_0\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+8.89^2}-1\right]}=37.55\quad\mathrm{Np/m}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}=$$

$$2\pi\times 10^8\sqrt{\frac{81\mu_0\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+8.89^2}+1\right]}=40.02\quad\mathrm{rad/m}$$

$$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega}}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{81\varepsilon_0-\mathrm{j}\dfrac{4}{2\pi\times 10^8}}}=13.99\mathrm{e}^{\mathrm{j}41.8^\circ}$$

利用已得数据可计算出 $f=100\mathrm{kHz}$ **时的趋肤深度** $\delta=\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{1.26}=0.794\mathrm{m}$；$f=$

100MHz 时，$\delta=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{37.55}=0.036\text{m}$。此结果表明，由于海水的趋肤效应，只有选用低频才有利于水下无线电通信。

(2) $f=100\text{MHz}$ 时，电场表示式为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x 10\text{e}^{-37.55z}\cos(2\pi\times100\times10^6 t-40.02z)\quad(\text{V/m})$$

表示为复数形式

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_x 10\text{e}^{-37.55z}\text{e}^{-\text{j}40.02z}\quad(\text{V/m})$$

与之相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}(z)=\frac{1}{\eta_c}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z)=$$

$$\boldsymbol{e}_y\frac{10}{13.99\text{e}^{\text{j}41.8^\circ}}\text{e}^{-37.55z}\text{e}^{-\text{j}40.02z}=$$

$$\boldsymbol{e}_y 0.715\text{e}^{-37.55z}\text{e}^{-\text{j}(40.02z+41.8^\circ)}\quad(\text{A/m})$$

故

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\text{R}_\text{e}[\boldsymbol{H}(z)\text{e}^{\text{j}\omega t}]=$$

$$\text{R}_\text{e}[\boldsymbol{e}_y 0.715\text{e}^{-37.55z}\text{e}^{-\text{j}(40.02z+41.8^\circ)}\text{e}^{\text{j}\omega t}]=$$

$$\boldsymbol{e}_y 0.715\text{e}^{-37.55z}\cos(2\pi\times10^8 t-40.02z-41.8^\circ)\quad(\text{A/m})$$

平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\text{R}_\text{e}[\boldsymbol{E}(z)\times\boldsymbol{H}^*(z)]=$$

$$\frac{1}{2}\text{R}_\text{e}[\boldsymbol{e}_x 10\text{e}^{-37.55z}\text{e}^{-\text{j}40.02z}\times\boldsymbol{e}_y 0.715\text{e}^{-37.55z}\times\text{e}^{\text{j}(40.02z+41.8^\circ)}]=$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\times10\times0.715\text{e}^{-2\times37.55z}\cos41.8^\circ=\boldsymbol{e}_z 2.67\text{e}^{-75.1z}\quad(\text{W/m}^2)$$

例2.6 为了让室内的电子设备不受外界电磁场的干扰，可采用金属铜板构造屏蔽室。若要求屏蔽的电磁干扰的频率范围是 10kHz～100MHz，试计算至少需要多厚的铜板才能达到要求。

解： 铜的电参数是 $\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\sigma=5.8\times10^7$ S/m

对于频率范围低端 10kHz，则

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\frac{5.8\times10^7}{2\pi\times10\times10^3\times\varepsilon_0}=104.4\times10^{12}$$

对于频率范围高端 100MHz，则

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\frac{5.8\times10^7}{2\pi\times100\times10^6\times\varepsilon_0}=104.4\times10^8$$

可见，在要求的频率范围内均可视铜为良导体，故

$$\delta_1=\frac{1}{\sqrt{\pi f_1\mu\sigma}}=\frac{1}{\sqrt{\pi\times10\times10^3\times\mu_0\times5.8\times10^7}}=0.66\text{ mm}$$

$$\delta_2=\frac{1}{\sqrt{\pi f_2\mu\sigma}}=\frac{1}{\sqrt{\pi\times100\times10^6\times\mu_0\times5.8\times10^7}}=6.6\ \mu\text{m}$$

通常取铜板厚度 $d=5\delta$ 就能满足要求，故铜板的厚度应为

$$d = 5\delta_1 = 5 \times 0.66 = 3.3 \text{ mm}$$

2.3.4 色散现象和群速

前面定义的相速 v_p 是指单一频率的平面电磁波的等相位面移动的速度，有

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad \text{或} \quad v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

在非导电媒质中，相位常数是角频率的线性函数，$k=\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，故相速 $v_p=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 是一个与频率无关的常数，仅与媒质的电参数 μ、ε 有关。

在导电媒质中，相位常数 β 不再是角频率 ω 的线性函数，而是有式(2.3.21)所表示的那种复杂的关系。因此，相速将随频率而变化，这种现象称为色散，导电媒质是色散媒质。

另外，单一频率的正弦电磁波是不载有任何信息的，能携带信息的电磁波是由许许多多频率的正弦波叠加而成，这些不同频率的波分量在传播过程中，相速、衰减常数都不同，传播到接收点时，必然发生了畸变。

在色散媒质中，不同频率的分量波以不同的相速传播，那么这些不同频率分量的波叠加而成的电磁波将以什么速度传播呢？我们现在从一种最简单的情况来讨论这个问题。假设在色散媒质中同时存在两个传播方向相同、电场振幅相等、电场取向相同，但频率不同的正弦波，频率分别为

$$\omega_0 + \Delta\omega \quad \text{和} \quad \omega_0 - \Delta\omega$$

式中的 $\Delta\omega \ll \omega_0$，相应的相位常数为

$$\beta_0 + \Delta\beta \quad \text{和} \quad \beta_0 - \Delta\beta$$

电场表示式为

$$\boldsymbol{E}_1(z,t) = \boldsymbol{e}_x E_m \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z]$$
$$\boldsymbol{E}_2(z,t) = \boldsymbol{e}_x E_m \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z]$$

合成电场表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t) &= \boldsymbol{E}_1(z,t) + \boldsymbol{E}_2(z,t) = \\ &\boldsymbol{e}_x E_m \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z] + \\ &\boldsymbol{e}_x E_m \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z] = \\ &\boldsymbol{e}_x 2E_m \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cdot \cos(\omega_0 t - \beta_0 z)\end{aligned}$$

这一表达式可以看成是角频率为 ω_0、振幅按 $\cos(\Delta\omega t-\Delta\beta z)$ 随角频率 $\Delta\omega$ 缓慢变化、沿 $+z$ 方向传播的波，是一个调幅波，调制频率为 $\Delta\omega$。

对于波的某恒定相位点，由 $\omega_0 t-\beta_0 z=$常数，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0}{\beta_0} = v_p \tag{2.3.32}$$

根据振幅调制因子 $\cos(\Delta\omega t-\Delta\beta z)$ 可导出波的包络上某恒定相位点移动的速度，由 $\Delta\omega t-\Delta\beta z=$常数，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{1}{\dfrac{\Delta\beta}{\Delta\omega}}$$

在 $\Delta\omega\to 0$ 的极限情况下，得

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} \tag{2.3.33}$$

称为群速，它是调制波的包络的相速。它相当于窄频带信号的传播速度，这是因为宽频谱信号的包络形状在传播过程中要发生很大的畸变，此时群速就失去意义了。

从式(2.3.32)和式(2.3.33)可以看出，相速是角频率为 ω_0 的高频振荡波的恒定相位点移动的速度，而群速则是调制该高频波振幅的包络上恒定相位点移动的速度。群速和相速的区别还可以用一个形象的例子来说明：坦克车的履带爬行时，履带背部上的顶点以相速朝前运动，而履带作为一个整体则是以群速前进。

群速与相速之间的关系可由式(2.3.32)和式(2.3.33)导出。

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d(\beta v_p)}{d\beta} = v_p + \beta\frac{dv_p}{d\beta} =$$

$$v_p + \beta\frac{dv_p}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\beta} = v_p + \frac{\omega}{v_p}\cdot\frac{dv_p}{d\omega}\cdot v_g$$

故

$$v_g = \frac{v_p}{1-\frac{\omega}{v_p}\cdot\frac{dv_p}{d\omega}} \tag{2.3.34}$$

从上式可看到存在以下三种可能情况：

(1) $\frac{dv_p}{d\omega}=0$ 时，即相速与频率无关。此时 $v_g=v_p$，群速等于相速，称为无色散情况。无损耗媒质和自由空间都是无色散媒质。

(2) $\frac{dv_p}{d\omega}<0$ 时，即相速随频率的增高而减小，此时 $v_g<v_p$，群速小于相速，称为正常色散。

(3) $\frac{dv_p}{d\omega}>0$ 时，即相速随频率的增高而增加，此时 $v_g>v_p$，群速大于相速，称为反常色散。

例 2.7 载频为 $f=100\text{kHz}$ 的窄频带信号在海水中传播，试求群速。

解： 海水的电参数为：电导率 $\sigma=4\text{S/m}$，相对介电常数 $\varepsilon_r=81$，相对磁导率 $\mu_r=1$，据例 2.5 的分析知，$f=100\text{kHz}$ 时，海水可视为良导体，此时的相位常数 $\beta\approx 1.26\ \text{rad/m}$，相速 $v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2\pi f}{\beta}\approx\frac{2\pi\times 100\times 10^3}{1.26}=5\times 10^5\ \text{m/s}$。

而良导体中，相速作为频率的函数关系如式(2.3.26)为

$$v_p(\omega)\approx\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}}=\sqrt{\frac{2\omega}{4\pi\times 10^{-7}\times 4}}=631\sqrt{\omega}$$

得

$$\frac{dv_p}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}(631\sqrt{\omega})=\frac{631}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

故群速为

$$v_g = \frac{v_p}{1-\frac{\omega}{v_p}\cdot\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega}} = \frac{v_p}{1-\frac{\omega}{v_p}\cdot\frac{631}{2}\frac{1}{\sqrt{\omega}}} =$$

$$\frac{5\times10^5}{1-\frac{2\pi\times10^5}{5\times10^5}\cdot\frac{631}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\times10^5}}} = 10^6\ \mathrm{m/s}$$

可见，对于 $f=100\mathrm{kHz}$ 的电磁波，海水是一种反常色散媒质，此时的群速大于相速。

练 习 题

2.3－1 根据式(2.3.1)～式(2.3.4)推导波动方程(2.3.12)和(2.3.13)。

2.3－2 铜的电导率 $\sigma=5.8\times10^7\ \mathrm{s/m}$，试比较频率 $f_1=50\mathrm{Hz}$ 和 $f_2=100\mathrm{MHz}$ 时的趋肤深度。

2.3－3 什么叫群速？试比较群速和相速的不同之处。

2.3－4 什么叫色散？试举出一种色散媒质的实例。

2.4 波的极化

波的极化是指空间给定点处电场强度矢量的端点随时间变化的轨迹。如果该轨迹是一条直线，就称为线极化；轨迹是圆，称为圆极化；轨迹是椭圆，称为椭圆极化。

波的极化取决于波源(发射电磁波的天线)。例如，中波广播发射天线架设与地面垂直，发射垂直极化波(电场矢量始终垂直于地面)；电视发射天线与地面平行，发射水平极化波(电场矢量始终平行于地面)。垂直极化和水平极化都属于线极化。

为了方便，我们仍然假设均匀平面波沿 $+z$ 方向传播。一般情况下存在两组分量波，其电场强度包括频率和传播方向均相同的 E_x 和 E_y 两个分量，即

$$E_x(z,t) = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \tag{2.4.1}$$

$$E_y(z,t) = E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \tag{2.4.2}$$

式(2.4.1)表示的电场分量在 $z=$常数时随时间 t 变化的轨迹是沿 x 轴的直线，是沿 x 方向的线极化波。式(2.4.2)表示的电场分量则是沿 y 方向的线极化波。E_x 分量和 E_y 分量合成的电场矢量 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_xE_x(z,t)+\boldsymbol{e}_yE_y(z,t)$ 的端点在 $z=$常数时随时间 t 变化的轨迹就不一定是直线，而是由其振幅和相位关系来定。

2.4.1 线极化

为了简化讨论，取空间给定点为 $z=0$ 的平面上的点。此时，式(2.4.1)和式(2.4.2)简化为

$$E_x(0,t) = E_{xm}\cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$E_y(0,t) = E_{ym}\cos(\omega t + \varphi_y)$$

若 $\varphi_x-\varphi_y=0$，即 E_x 和 E_y 同相，取 $\varphi_x=\varphi_y=0$，则在 $z=0$ 的平面上，合成电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的模为

$$E = \sqrt{E_x^{\ 2} + E_y^{\ 2}} = \sqrt{E_{xm}^{\ 2} + E_{ym}^{\ 2}}\cos\omega t$$

合成电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 与 $+x$ 轴的夹角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctan\left(\frac{E_{ym}}{E_{xm}}\right) = \text{常数}$$

可见，合成电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 与 $+x$ 轴的夹角 α 保持不变，其模则随时间作正弦变化，矢端轨迹是位于第一、第三象限的一条直线，如图 2－9(a)所示。

若 $\varphi_x - \varphi_y = \pi$，即 E_x 和 E_y 反相。取 $\varphi_x = \pi$，$\varphi_y = 0$，则夹角 α 为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \arctan\left(-\frac{E_{ym}}{E_{xm}}\right) = \text{常数}$$

此时的合成电场矢端轨迹是位于第二、第四象限的一条直线，如图 2－9(b)所示。

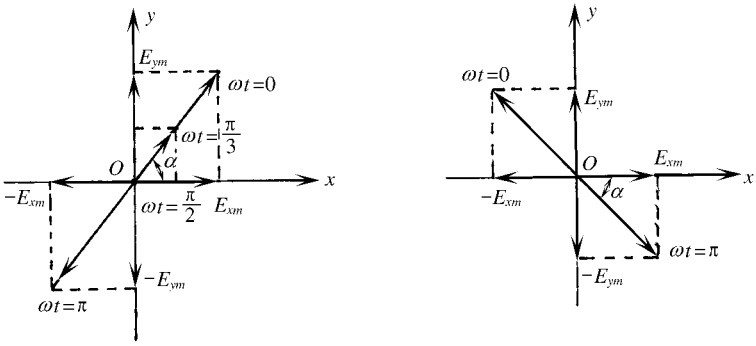


图 2－9　线极化波

(a)$\varphi_x - \varphi_y = 0$；　($b$)$\varphi_x - \varphi_y = \pi$。

($z=0$ 平面上)　　($z=0$ 平面上)

结论：若两个频率相等，传播方向相同的电场分量同相或反相，则合成电场表征一个线极化波。

2.4.2　圆极化

当 $E_{xm} = E_{ym} = E_m$ 且 $\varphi_x - \varphi_y = \pm\frac{\pi}{2}$，即两个电场分量的振幅相等，相位差为 $\pi/2$ 时，在 $z=0$ 的平面上，式(2.4.1)和式(2.4.2)变为

$$E_x(0,t) = E_m\cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$E_y(0,t) = E_m\cos(\omega t + \varphi_x \mp \frac{\pi}{2}) = \pm E_m\sin(\omega t + \varphi_x)$$

合成电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的模为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_m$$

合成电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 与 $+x$ 轴的夹角 α 有以下关系：

$$\tan\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\pm E_m\sin(\omega t + \varphi_x)}{E_m\cos(\omega t + \varphi_x)} = \pm\tan(\omega t + \varphi_x)$$

即

$$\alpha = \pm(\omega t + \varphi_x)$$

可见，合成电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的大小恒为 E_m，但 $\boldsymbol{E}$ 与 $+x$ 轴的夹角 α 则以角频率 ω 随时间作旋转变化。因此合成电场矢量端点的轨迹是一个圆，称为圆极化。

根据 E_x 和 E_y 的相位超前或落后的不同，合成电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的旋转方向是不同的。

若 E_x 分量的相位超前 E_y 分量 $90°$，即 $\varphi_x-\varphi_y=\pi/2$，例如，取 $\varphi_x=0$，$\varphi_y=-\pi/2$。此时，$E_x(0,t)=E_m\cos\omega t$，$E_y(0,t)=E_m\sin\omega t$，$\alpha=\omega t$，故合成电场矢量逆时针方向旋转。此旋转方向与波的传播方向（$+z$ 轴方向）构成右手螺旋关系，称为右旋圆极化波，如图 2－10(a)所示。

若 E_x 分量的相位落后 E_y 分量 $90°$，即 $\varphi_x-\varphi_y=-\dfrac{\pi}{2}$，例如，取 $\varphi_x=0$，$\varphi_y=\pi/2$。此时 $E_x(0,t)=E_m\cos\omega t$，而 $E_y(0,t)=-E_m\sin\omega t$，$\alpha=-\omega t$，故合成电场矢量顺时针方向旋转。此旋转方向与波的传播方向（$+z$ 轴方向）构成左手螺旋关系，称为左旋圆极化波，如图 2－10(b)所示。

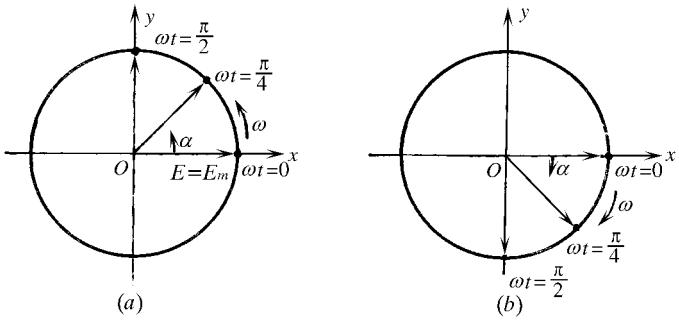


图 2－10　圆极化波

(a)$\varphi_x-\varphi_y=\dfrac{\pi}{2}$；　($b$)$\varphi_x-\varphi_y=-\pi/2$。

（$z=0$ 平面上）　（$z=0$ 平面上）

结论：若两个频率相等，传播方向相同的电场分量的振幅相等且相位差为 $\pi/2$，则合成电场表征一个圆极化波。

2.4.3　椭圆极化

最一般的情况是两个电场分量的振幅和相位是任意的，如式(2.4.1)和式(2.4.2)所示。此时，合成电场矢量 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_xE_x(z,t)+\boldsymbol{e}_yE_y(z,t)$ 表征一个椭圆极化波。直线极化和圆极化都是椭圆极化的特例。

为了使分析简单，但又不失一般性，我们取 $\dfrac{E_{ym}}{E_{xm}}=A=2$，$\varphi_x-\varphi_y=\varphi=\dfrac{\pi}{2}$。则式(2.4.1)和式(2.4.2)变为

$$E_x(z,t)=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_x)$$

$$E_y(z,t)=2E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_x-\frac{\pi}{2})=2E_{xm}\sin(\omega t-kz+\varphi_x)$$

在 $z=0$ 平面上，以上两式简化为

$$E_x(0,t)=E_{xm}\cos(\omega t+\varphi_x) \tag{2.4.3}$$

$$E_y(0,t) = 2E_{xm}\sin(\omega t + \varphi_x) \tag{2.4.4}$$

由式(2.4.3),得

$$\cos^2(\omega t + \varphi_x) = \left(\frac{E_x(0,t)}{E_{xm}}\right)^2$$

由式(2.4.4),得

$$\sin^2(\omega t + \varphi_x) = \left(\frac{E_y(0,t)}{2E_{xm}}\right)^2$$

将以上两式相加,得

$$\left(\frac{E_x(0,t)}{E_{xm}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(0,t)}{2E_{xm}}\right)^2 = 1$$

这是一个长半轴为 $2E_{xm}$,短半轴为 E_{xm} 的椭圆方程。故在此条件下,合成电场矢量端点随时间变化的轨迹是一个椭圆,如图2－11所示,这是一个右旋椭圆极化波。

结论:若两个频率相等,传播方向相同的电场分量的振幅和相位是任意的,则合成电场表征一个椭圆极化波。

从上面的讨论可以看出:两个线极化波可以合成其它极化形式的波,如椭圆极化波、圆极化波,或新的线极化波;任意一个椭圆极化波或圆极化波可以分解为两个线极化波。也容易证明,一个线极化波,可以分解为两个振幅相等、但旋向相反的圆极化波。

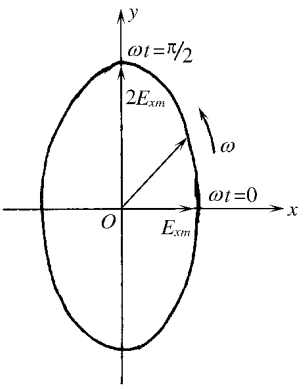


图 2－11　椭圆极化波

波的极化是电磁波的一个重要特性,不同极化的波有着不同的工程应用领域。除前面已提到的中波调幅广播发射垂直线极化波,电视发射水平线极化波;相应的接收中波调幅广播要用垂直线极化天线,接收电视节目要用水平线极化天线,这样才能得到最佳效果,叫做极化匹配。又例如,电子战中的侦察和干扰,利用圆极化接收天线总是可以监听敌方的信号,利用圆极化发射天线发射信号,总是可以对敌方造成干扰。火箭等飞行器在飞行过程中,其位置和状态不断发生变化,因此火箭上的天线方位也不断改变,若地面测控站用线极化天线发射信号来控制火箭飞行状态,势必会出现在某些情况下火箭上的接收天线收不到控制信号(极化失配)而造成失控。若测控站采用圆极化发射,则可避免此现象。

例 2.8　根据以下电场表示式说明它们所表征的波的极化形式。

(1) $\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_x \mathrm{j}E_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} + \boldsymbol{e}_y \mathrm{j}E_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$

(2) $\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{e}_x E_m \sin(\omega t - kz) + \boldsymbol{e}_y E_m \cos(\omega t - kz)$

(3) $\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_x E_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - \boldsymbol{e}_y \mathrm{j}E_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$

(4) $\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{e}_x E_m \sin(\omega t - kz) + \boldsymbol{e}_y E_m \cos(\omega t - kz + 40^\circ)$

解:(1)E_x 分量和 E_y 分量的初相位都是 90°,即 E_x 和 E_y 同相。故 $\boldsymbol{E}(z)$ 表征一个线极化波,传播方向为 $-z$ 轴方向。

(2) E_x 和 E_y 的振幅相等,相位差为 90°,故 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 表征一个圆极化波。

因 $\boldsymbol{E}_x = E_m \sin(\omega t - kz) = E_m \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})$,可见 E_x 的相位滞后于 $E_y 90^\circ$,而波的传播方向为 $+z$ 轴方向,故 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 表征一个左旋圆极化波。

(3) E_x 和 E_y 的振幅相等，E_x 的相位超前于 $E_y 90°$，而波的传播方向为 $+z$ 轴方向，故 $\boldsymbol{E}(z)$ 表征一个右旋圆极化波。

(4) E_x 和 E_y 的振幅虽然相等，但 E_x 的初相位为 $-90°$，E_y 的初相位为 $40°$，且传播方向为 $+z$ 轴方向，故 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 表征一个左旋椭圆极化波。

例 2.9 在某种无界导电媒质中传播的均匀平面波的电场表示式为

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_x 4\mathrm{e}^{-0.2z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.2z} + \boldsymbol{e}_y 4\mathrm{e}^{-0.2z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.2z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$$

试说明波的极化状态。

解：由给定的电场强度表示式看出，这是在良导体中沿 $-z$ 轴方向传播的均匀平面波。两个电场分量的振幅相等，即 $E_{x0}=E_{y0}=4\ \mathrm{V/m}$；而 E_x 的初相位 $\varphi_x=0$，E_y 的初相位 $\varphi_y=\dfrac{\pi}{2}$，即 E_x 的相位落后于 E_y $90°$。由于波的传播方向是 $-z$ 轴方向，故题给的 $\boldsymbol{E}(z)$ 表征一个右旋圆极化波。

下面将此结果用图形表示出来，先写出电场瞬时表示式为

$$E_x(z,t) = \mathrm{R_e}[E_x(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{R_e}[4\mathrm{e}^{-0.2z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.2z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] =$$

$$4\mathrm{e}^{-0.2z}\cos(\omega t + 0.2z)$$

$$E_y(z,t) = \mathrm{R_e}[E_y(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{R_e}[4\mathrm{e}^{-0.2z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.2z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] =$$

$$4\mathrm{e}^{-0.2z}\cos(\omega t + 0.2z + \pi/2)$$

在 $z=0$ 平面上，有

$$E_x(0,t) = 4\cos\omega t$$

$$E_y(0,t) = 4\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -4\sin\omega t$$

据此可知，合成电场矢量 $\boldsymbol{E}(0,t)=\boldsymbol{e}_x E_x(0,t)+\boldsymbol{e}_y E_y(0,t)$ 端点随时间以角频率 ω 顺时针旋转变化，如图 2－12 所示。注意到波的传播方向是 $-z$ 轴方向(垂直于纸面向里)，因此矢端旋转方向与波的传播方向两者正好构成右手螺旋关系，故 $\boldsymbol{E}(z)$ 表征一个右旋圆极化波。

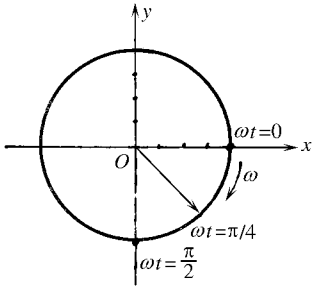


图 2－12 沿 $-z$ 方向传播的右旋圆极化波

练 习 题

2.4－1 两个相互垂直的线极化波叠加，试说明在什么条件下将分别形成：(1)新的线极化波；(2)圆极化波；(3)椭圆极化波。

2.4－2 试证明任一个线极化波可分解为两个振幅相同、旋向相反的圆极化波。

2.4－3 若 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x E_m \sin(\omega t-kz+\frac{\pi}{4})+\boldsymbol{e}_y E_m \cos(\omega t-kz-\pi/4)$，试说明它表征什么极化波？

2.5 各向异性媒质中的平面波

以上我们讨论了平面电磁波在各向同性媒质中的传播，本节将讨论在各向异性媒质中平面电磁波的传播情况。等离子体和铁氧体在恒定磁场的作用下都具有各向异性的特征，在实际应用中具有重要意义。

2.5.1 等离子体中的平面波

等离子体指的是电离了的气体，它由带负电的电子、带正电的离子和中性粒子组成。其基本特征之一是带负电的电子和带正电的离子具有相等的电量，因而就整体而言，等离子体是中性的。自然界中有很多等离子体，例如地球上空 60km～2000km 处的电离层就是等离子体，它是太阳的紫外线辐射使大气电离而形成的。火箭喷出的废气也是等离子体的例子。

分析等离子体中电磁波传播问题的方法是，把等离子体等效为介质，先确定其等效介电常数，进而分析电磁波在其中的传播特性。

当电磁波在等离子体中传播时，电磁场将对电子和正离子产生作用力，从而形成运流电流。由于一般离子的质量比电子大得多，故运流电流主要是由电子运动形成的。为了简化分析，只讨论电子的运动，忽略正离子的运动，也不考虑电子与正离子、中性粒子间的相互碰撞。

若以 N 表示等离子体每单位体积内的电子数目，V 表示在外场作用下电子运动的平均速度，则 Nv 为每秒钟通过单位面积的平均电子数，故由此形成的运流电流密度为

$$\boldsymbol{J}_v = -Ne\boldsymbol{v} \tag{2.5.1}$$

式中，$e=1.602\times10^{-19}\mathrm{C}$ 是一个电子的电荷量。

当电磁场作正弦变化时，麦克斯韦第一方程的复数形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_v+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{2.5.2}$$

若把等离子体中运流电流的作用等效为介电常数，则式(2.5.2)的右端可写为

$$\boldsymbol{J}_v+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}=-Ne\boldsymbol{v}+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\mathrm{j}\omega\|\varepsilon\|\cdot\boldsymbol{E} \tag{2.5.3}$$

式中的 $\|\varepsilon\|$ 是一张量，表示等离子体的等效介电常数。

如果在电磁波传播的方向上(设为 $+z$ 方向)有纵向恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{e}_z B_0$，则在电磁波的电场、磁场和外加恒定磁场作用的电子运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_0)] \tag{2.5.4}$$

式中，$m=9.109\times10^{-31}$ kg 是电子的质量。一般 $\mathrm{e}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 很小，可以忽略。式(2.5.4)简化为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0] \tag{2.5.5}$$

对于正弦电磁场，上式可表示为三个标量式

$$\mathrm{j}\omega v_x=-\frac{e}{m}E_x-\omega_\mathrm{c}v_y \tag{2.5.6a}$$

$$\mathrm{j}\omega v_y=-\frac{e}{m}E_y+\omega_\mathrm{c}v_x \tag{2.5.6b}$$

$$\mathrm{j}\omega v_z=-\frac{e}{m}E_z \tag{2.5.6c}$$

式中，$\omega_\mathrm{c}=\frac{e}{m}\boldsymbol{B}_0$ 称为回旋角频率。联解式(2.5.6)，得

$$v_x=\frac{e}{m}\cdot\frac{-\mathrm{j}\omega E_x+\omega_\mathrm{c}E_y}{\omega_\mathrm{c}^2-\omega^2} \tag{2.5.7a}$$

$$v_y=\frac{e}{m}\cdot\frac{-\mathrm{j}\omega E_y-\omega_\mathrm{c}E_x}{\omega_\mathrm{c}^2-\omega^2} \tag{2.5.7b}$$

$$v_z=-\frac{e}{m}\cdot\frac{E_z}{\mathrm{j}\omega} \tag{2.5.7c}$$

从式(2.5.7a)和式(2.5.7b)可见，当 $\omega\to\omega_\mathrm{c}$ 时，v_x 和 v_y 均趋向无限大，这将导致电子与周围中性粒子或正离子的碰撞次数加大，从而使电磁波产生很大的损耗。

将式(2.5.3)写成分量形式为

$$-Ne(\boldsymbol{e}_xv_x+\boldsymbol{e}_yv_y+\boldsymbol{e}_zv_z)+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0(\boldsymbol{e}_xE_x+\boldsymbol{e}_yE_y+\boldsymbol{e}_zE_z)=$$

$$\mathrm{j}\omega\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&\varepsilon_{13}\\\varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}\\\varepsilon_{31}&\varepsilon_{32}&\varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{bmatrix} \tag{2.5.8}$$

它的 x 分量为

$$-Nev_x+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0E_x=\mathrm{j}\omega(\varepsilon_{11}E_x+\varepsilon_{12}E_y+\varepsilon_{13}E_z)$$

将式(2.5.7a)中的 v_x 代入上式，得

$$-Ne\frac{e}{m}\cdot\frac{-\mathrm{j}\omega E_x+\omega_\mathrm{c}E_y}{\omega_\mathrm{c}^2-\omega^2}+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0E_x=\mathrm{j}\omega(\varepsilon_{11}E_x+\varepsilon_{12}E_y+\varepsilon_{13}E_z)$$

令上式两边 E_x、E_y、E_z 的系数相等，得

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_0\left[1+\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega_\mathrm{c}^2-\omega^2}\right] \tag{2.5.9}$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{\mathrm{j}\omega_\mathrm{p}^2\left(\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right)\varepsilon_0}{\omega_\mathrm{c}^2-\omega^2} \tag{2.5.10}$$

$$\varepsilon_{13}=0 \tag{2.5.11}$$

式中，$\omega_\mathrm{p}^2=\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$，$\omega_\mathrm{p}$ 称为等离子体频率。

同样，可根据式(2.5.8)中的另外两个分量求得

$$\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12} \tag{2.5.12}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} \tag{2.5.13}$$

$$\varepsilon_{23} = 0 \tag{2.5.14}$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0 \tag{2.5.15}$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_0\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] \tag{2.5.16}$$

因此，等离子体的等效介电常数为

$$\| \varepsilon \| = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{2.5.17}$$

我们看到，当不存在外加恒定磁场时，即 $B_0 = 0$ 时 $\omega_c = \frac{e}{m}B_0 = 0$，此时 $\varepsilon_{12} = 0$，$\varepsilon_{21} = 0$，且 $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}$。即式(2.5.17)中对角线上的各元素相等，对角线外的各元素皆为零。此时，等离子体的等效介电常数为一标量，等离子体呈各向同性特征。所以，外加恒等磁场是使等效介电常数变为张量的原因。

下面讨论等离子体内电磁波的传播问题，这里只讨论横电磁波，且在均匀平面电磁波的传播方向(设为 $+z$ 方向)有外加恒定磁场 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_z B_0$。

仿照以前的方法，由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega \| \varepsilon \| \cdot \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$$

导出 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \omega^2 \mu_0 \| \varepsilon \| \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.5.18}$$

写成矩阵形式为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + \omega^2\mu_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \tag{2.5.19}$$

若假设电场只有 E_x 分量，即 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_x$，是 x 方向的直线极化波。将式(2.5.19)展开，可得

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2\mu_0\varepsilon_{11}E_x = 0 \tag{2.5.20}$$

$$0 + \omega^2\mu_0\varepsilon_{21}E_x = 0 \tag{2.5.21}$$

欲使式(2.5.21)成立，ε_{21} 或 E_x 应为零。但 ε_{21} 不为零，必须 $E_x = 0$。这说明在磁化等离子体内不存在直线极化波的解，即 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_x$ 的假设是不能成立的。

再来考察一下有没有圆极化波的解？对于右旋圆极化波，电场为

$$\boldsymbol{E}_+ = E_+ (\boldsymbol{e}_x - \mathrm{j}\boldsymbol{e}_y) e^{-\gamma_+ z} \tag{2.5.22}$$

将它代入式(2.5.19)，得

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{bmatrix} E_+ \, \mathrm{e}^{-\gamma_+ z} \\ -\mathrm{j}E_+ \, \mathrm{e}^{-\gamma_+ z} \\ 0 \end{bmatrix} + \omega^2\mu_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_+ \, \mathrm{e}^{-\gamma_+ z} \\ -\mathrm{j}E_+ \, \mathrm{e}^{-\gamma_+ z} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

它的 x 分量为

$$\gamma_+^2 E_+ \mathrm{e}^{-\gamma_+ z} + \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_{11} - \mathrm{j}\varepsilon_{12}) E_+ \mathrm{e}^{-\gamma_+ z} = 0$$

由此得

$$\gamma_+^2 = -\omega^2 \mu_0 (\varepsilon_{11} - \mathrm{j}\varepsilon_{12})$$

将式(2.5.9)和式(2.5.10)代入上式,得

$$\gamma_+^2 = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2/\omega}{\omega_\mathrm{c} - \omega}\right)$$

故得

$$\gamma_+ = \mathrm{j}\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \left(1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2/\omega}{\omega_\mathrm{c} - \omega}\right)^{1/2} \tag{2.5.23}$$

此式表明右旋圆极化波的传播常数 γ_+ 是一个虚数,因而右旋圆极化波可以在磁化等离子体中传播,式(2.5.22)表示的解是成立的。

同样,对于左旋圆极化波,电场为

$$\boldsymbol{E}_- = E_- (\boldsymbol{e}_x + \mathrm{j}\boldsymbol{e}_y) \mathrm{e}^{-\gamma_- z}$$

可解得

$$\gamma_-^2 = -\omega^2 \mu_0 (\varepsilon_{11} + \mathrm{j}\varepsilon_{12})$$

故

$$\gamma_- = \mathrm{j}\omega \sqrt{\mu_0} (\varepsilon_{11} + \mathrm{j}\varepsilon_{12})^{1/2} = \mathrm{j}\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2/\omega}{\omega_\mathrm{c} + \omega}\right)^{1/2} \tag{2.5.24}$$

可见,左旋圆极化波的传播常数 γ_- 也是一个虚数,因而左旋圆极化波也可在磁化等离子体中传播。

由式(2.5.23)和式(2.5.24)可以看出,两个圆极化波的相速是不相同的。因为任何一个直线极化波都可分解为振幅相等、但旋转方向相反的圆极化波,而在磁化等离子体中,两个旋转方向相反的圆极化波的相速是不相等的。因此在传播同一段距离后的相移也不相等,使得合成电场矢量的方向(即直线极化的方向)已不在原来的位置。即电磁波的极化面在磁化等离子体内以传播方向为轴而不断旋转,这就是所谓的法拉弟旋转效应。

当 $B_0 = 0$ 时,回旋角频率 $\omega_\mathrm{c} = \dfrac{e}{m} B_0 = 0$,右旋和左旋两个圆极化的相速相等,不存在法拉弟旋转效应。此时

$$\gamma_+ = \gamma_- = \mathrm{j}\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)} = \mathrm{j}\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{er}} \tag{2.5.25}$$

式中

$$\varepsilon_\mathrm{er} = 1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0 \omega^2}$$

称为等离子体的等效相对介电常数。

从式(2.5.25)可以看出,当 $\omega < \omega_\mathrm{p}$ 时,传播常数为实数,电磁波不能传播。表明在非磁化等离子体内不能传播频率低于等离子体频率的波。当 $\omega > \omega_\mathrm{p}$ 时,传播常数为虚数,电磁波可以传播,其相速为

$$v_\mathrm{p} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \left(1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = c \left(1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} > c$$

可见，非磁化等离子体就像一个高通滤波器。高于等离子体频率的频带是通带，低于等离子体频率的频带是阻带。

2.5.2 铁氧体中的平面波

铁氧体又称磁性瓷，是一种特殊的铁磁材料，是由 Fe_2O_3 与其它金属氧化物混合经高温烧结而成。铁氧体具有极高的磁导率（$\mu_r = 10^2 \sim 10^4$）和很小的电导率（$\sigma=1\sim10^{-6}\,S/m$），其相对介电常数 $\varepsilon_r=5\sim25$。

铁氧体在恒定磁场作用下呈现各向异性，其磁导率是张量。

与其它物质一样，铁氧体内原子核周围的电子也有公转（电子围绕原子核作轨道运动）和自转（绕自己的一个轴作自旋）运动。这两种运动都要产生磁矩。公转磁矩因电子各循不同方向旋转而相互抵消；自转磁矩对于一般物质也是相互抵消的，但对铁磁物质将会在许多极小区域内相互平行，自发磁化而形成磁畴。在没有外磁场作用时，这些磁畴的磁矩相互抵消，因而铁氧体不显现磁性。当有外磁场作用时，每个磁畴的方向将转动到与外磁场方向接近平行，产生很强的磁性。因此，研究自转电子在外磁场作用下产生的物理现象是研究铁氧体物理特性的基础。为简化分析，先讨论一个电子在自转运动中受到的影响。

电子自转时相当于有电流沿着与自转方向相反的方向流动，因而产生磁矩 $\boldsymbol{P}_m$。又因电子有一定的质量，自转时有一定的动量矩 $\boldsymbol{J}$。两者之间有正比关系。

$$\boldsymbol{P}_m = -\gamma_e \boldsymbol{J} \tag{2.5.26}$$

式中的负号表示 $\boldsymbol{P}_m$ 和 $\boldsymbol{J}$ 方向相反，而 $\gamma_e=\dfrac{e}{m}$ 称为回磁比，e 为电子电荷的绝对值，m 为电子的质量。

当把这一电子放在外加恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中时，若 $\boldsymbol{P}_m$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 之间的夹角为 θ，则外加磁场对电子所施加的力矩将使电子围绕 $\boldsymbol{B}_0$ 方向以角速度 ω_c 作进动（电子一方面自转，一方面又绕 $\boldsymbol{B}_0$ 方向旋转）。外加磁场对电子磁矩产生的转矩为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}_m \times \boldsymbol{B}_0 \tag{2.5.27}$$

而转矩将使旋转物体的动量矩发生变化，且转矩等于动量矩的时变率，即

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} \tag{2.5.28}$$

根据式(2.5.26)、式(2.5.27)、和式(2.5.28)，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_m}{\mathrm{d}t} = -\gamma_e \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = -\gamma_e \boldsymbol{P}_m \times \boldsymbol{B}_0 \tag{2.5.29}$$

上式表明磁矩增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}_m$ 与矢量（$-\gamma_e \boldsymbol{P}_m \times \boldsymbol{B}_0$）的方向一致，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}_m$ 与 $\boldsymbol{P}_m$ 垂直。磁矩 $\boldsymbol{P}_m$ 将沿着与本身垂直的方向变化。

设每单位体积内的自转电子数为 N，则在线性、均匀铁氧体内每单位体积的总磁矩为 $\boldsymbol{M}=N\boldsymbol{P}_m$，则对应于式(2.5.29)的方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma_e \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B}_0 = -\gamma_e \mu_0 \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}_0 \tag{2.5.30}$$

称为兰道方程。

下面讨论铁氧体除受外加恒定磁场作用外，其内还有电磁波通过的情形。

设铁氧体被 z 轴方向的恒定磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 磁化到饱合，其中另外还有比 $\boldsymbol{H}_0$ 小得多的时变磁场 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{e}_x h_x+\boldsymbol{e}_y h_y+\boldsymbol{e}_z h_z$。铁氧体内的总磁场为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{h}=\boldsymbol{e}_x h_x+\boldsymbol{e}_y h_y+\boldsymbol{e}_z(h_z+H_0) \tag{2.5.31}$$

相应的磁化强度为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_0+\boldsymbol{m}=\boldsymbol{e}_x m_x+\boldsymbol{e}_y m_y+\boldsymbol{e}_z(m_z+M_0) \tag{2.5.32}$$

式中，$\boldsymbol{M}_0$ 是恒定磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 对应的磁化强度；$\boldsymbol{m}$ 是时变磁场 $\boldsymbol{h}$ 对应的磁化强度。

对于在恒定磁场和时变磁场共同作用下的铁氧体，用式(2.5.31)的 $\boldsymbol{H}$ 和式(2.5.32)的 $\boldsymbol{M}$ 代替式(2.5.30)中的 $\boldsymbol{H}_0$ 和 $\boldsymbol{M}$，并在展开时注意到 $h\ll H$。和 $m\ll M_0$，则得

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}\omega m_x &= -\gamma_e\mu_0(m_y H_0-M_0 h_y)\\
\mathrm{j}\omega m_y &= -\gamma_e\mu_0(-m_x H_0+M_0 h_y)\\
\mathrm{j}\omega m_z &= 0
\end{aligned}$$

联立求解，得

$$m_x=\frac{(\mu_0{}^2\gamma_e{}^2 M_0 H_0)h_x+(\mathrm{j}\omega\mu_0\gamma_e M_0)h_y}{\mu_0^2\gamma_e{}^2 H_0{}^2-\omega^2} \tag{2.5.33}$$

$$m_y=\frac{(\mu_0{}^2\gamma_e{}^2 M_0 H_0)h_y-(\mathrm{j}\omega\mu_0\gamma_e M_0)h_x}{\mu_0^2\gamma_e{}^2 H_0{}^2-\omega^2} \tag{2.5.34}$$

$$m_z=0 \tag{2.5.35}$$

取 $\omega_c=\mu_0\gamma_e H_0=\dfrac{e}{m}B_0$ 并令 $\omega_m=\mu_0\gamma_e M_0=\dfrac{e}{m}\mu_0 M_0$，则式(2.5.33)、式(2.5.34)和式(2.5.35)可写为

$$m_x=\frac{\omega_c\omega_m}{\omega_c{}^2-\omega^2}h_x+\mathrm{j}\frac{\omega\omega_m}{\omega_c{}^2-\omega^2}h_y \tag{2.5.36}$$

$$m_y=\frac{\omega_c\omega_m}{\omega_c{}^2-\omega^2}h_y-\mathrm{j}\frac{\omega\omega_m}{\omega_c{}^2-\omega^2}h_x \tag{2.5.37}$$

$$m_z=0 \tag{2.5.38}$$

可见，时变磁场 h_x 分量不仅产生 x 方向的磁化强度，还产生 y 方向的磁化强度。同样，h_y 分量不仅产生 y 方向的磁化强度，还产生 x 方向的磁化强度。这就是铁氧体中的交叉磁化效应。此外，由式(2.5.36)和式(2.5.37)还可以看出，当时变磁场的角频率 ω 等于电子进动角频率 ω_c(也称拉莫进动角频率)时，m_x 和 m_y 都将趋于无限大。此时，很小的时变磁场 h_x 和 h_y 将产生很强的磁化强度，这就是磁共振现象。

若用 b 表示时变磁场 $\boldsymbol{h}$ 对应的磁感应强度，则有

$$\boldsymbol{b}=\mu_0(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{m})=\|\mu\|\cdot\boldsymbol{h} \tag{2.5.39}$$

式中的 $\|\mu\|$ 为铁氧体的张量磁导率。将式(2.5.39)展开，并利用式(2.5.36)、式(2.5.37)和式(2.5.38)，可得

$$\|\mu\|=\begin{bmatrix}\mu_{11}&\mu_{12}&\mu_{13}\\ \mu_{21}&\mu_{22}&\mu_{23}\\ \mu_{31}&\mu_{32}&\mu_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu_{11}&\mu_{12}&0\\ \mu_{21}&\mu_{22}&0\\ 0&0&\mu_{33}\end{bmatrix} \tag{2.5.40}$$

式中

$$\mu_{11}=\mu_{22}=\mu_0\left(1+\frac{\omega_c\omega_m}{\omega_c{}^2-\omega^2}\right) \tag{2.5.41}$$

$$\mu_{12} = -\mu_{21} = \mathrm{j}\mu_0 \frac{\omega\omega_m}{\omega_c^2 - \omega^2} \tag{2.5.42}$$

$$\mu_{33} = \mu_0 \tag{2.5.43}$$

当 $\omega_m = 0$，即无外磁场时，$\|\mu\|$ 变为标量。

电磁波在铁氧体的传播特性仍由麦克斯韦方程组出发进行分析。此时的麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \|\mu\| \cdot \boldsymbol{H}$$

对于沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波，磁场 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} + \omega^2\varepsilon \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \tag{2.5.44}$$

仿照对等离子体中电磁波的分析方法，以圆极化波

$$\boldsymbol{H}_+ = H_+ (\boldsymbol{e}_x - \mathrm{j}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{-\gamma_+ z}$$

$$\boldsymbol{H}_- = H_- (\boldsymbol{e}_x + \mathrm{j}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{-\gamma_- z}$$

代入式(2.5.44)，并应用式(2.5.41)、式(2.5.42)和式(2.5.43)，得两种圆极化波的传播常数为

$$\gamma_+ = \mathrm{j}\omega\sqrt{\varepsilon}(\mu_{11} - \mathrm{j}\mu_{12})^{1/2} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_c - \omega}\right)^{1/2} \tag{2.5.45}$$

和

$$\gamma_- = \mathrm{j}\omega\sqrt{\varepsilon}(\mu_{11} + \mathrm{j}\mu_{12})^{1/2} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_c + \omega}\right)^{1/2} \tag{2.5.46}$$

与电磁波通过等离子体相似，电磁波通过铁氧体时，右旋和左旋两个圆极化波的相速是不相同的，因而传播同一段距离后的相移不相等。这样就使得合成波的极化面不断旋转，产生法拉第旋转效应。因为任何一个直线极化波都可分解为两个振幅相等、旋转方向相反的圆极化波。故可以为直线极化波在磁化铁氧体中传播时，极化方向将随传播距离连续偏转。

当没有外加磁场，即 $B_0 = 0$ 时，$\omega_m = 0$，此时两个圆极化波的相速相等，没有法拉第效应。

练　习　题

2.5－1　分析均匀平面波在等离子体中的传播时，我们是假定波的传播方向与外加恒定磁场方向平行。若波的传播方向与外加磁场垂直，情况又如何呢？

2.5－2　试推导公式(2.5.45)。

习　题

2－1　在空气中传播的电磁波的电场表示式为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{e}_y 37.7\cos(6\pi\times10^8 t + 2\pi z) \quad (\mu\mathrm{V/m})$$

(1) 说明 $\boldsymbol{E}(z,t)$所表示的是否为均匀平面波？

(2) 求此波的频率、波长、相位常数、相速、并指出此波的传播方向。

(3) 求出与 $\boldsymbol{E}(z,t)$相伴的磁场 $\boldsymbol{H}(z,t)$。

2－2　某一均匀平面波在空气中传播时的波长为 $\lambda_0=12\mathrm{cm}$，当使平面波进入到另一种非导电媒质中传播时，波长减小为 $\lambda=8\mathrm{cm}$，且已知在媒质中电场和磁场的振幅分别为 $E_m=50\mathrm{V/m}$、$H_m=0.1\mathrm{A/m}$。

试求：(1) 均匀平面波的频率；

(2) 非导电媒质的相对介电常数 ε_r 和相对磁导率 μ_r。

2－3　在某种非导电媒质(其参数为 $\mu=\mu_0$，$\varepsilon=4\varepsilon_0$、$\sigma=0$)中，均匀平面波的电场 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_m\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{6})$。若已知该平面波的频率 $f=150\mathrm{MHz}$，任意点处的平均功率密度为 $|\boldsymbol{S}_{平均}|=0.265\mu\mathrm{W/m^2}$。试求：

(1) 平面波的波数 k、相速 v_p、波长 λ 和波阻抗 η；

(2) $t=0$、$z=0$ 时的电场 $|\boldsymbol{E}(0,0)|=$？

(3) 经过 $t=0.1\ \mu\mathrm{s}$ 后，电场 $|\boldsymbol{E}(0,0)|$值的点移动到什么位置？

2－4　在空气中沿 $+y$ 方向传播的均匀平面波，其磁场的瞬时表示式为

$$\boldsymbol{H}(y,t) = \boldsymbol{e}_z 4\cos(10^7\pi t - ky + \frac{\pi}{4}) \quad (\mu\mathrm{A/m})$$

(1) 求 $k=$？并确定 $t=3\ \mathrm{ms}$ 时，$H_z=0$ 的位置；

(2) 写出与 $\boldsymbol{H}(y,t)$相伴的电场 $\boldsymbol{E}(y,t)$的表示式。

2－5　一种非导电媒质的参数为：$\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$，$\sigma=0$，已知在该媒质中传播的均匀平面波的电场为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{e}_x 5\cos(2\pi\times10^8 t - 2\pi z) \quad (\mathrm{V/m})$$

(1) 计算该媒质的相对介电常数 ε_r；

(2) 求与 $\boldsymbol{E}(z,t)$相伴的磁场 $\boldsymbol{H}(z,t)$。

2－6　正弦均匀平面波在空气中传播时的电场可表示为 $\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}12z}$，试确定该波的频率。在以下四种情况下，分别求出 $t=0$ 时原点处的电场值：(1)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x(100-\mathrm{j}60)$；(2)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x 100\mathrm{e}^{\mathrm{j}35^\circ}$；(3) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x 100+\boldsymbol{e}_y 80$；(4)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x 100e^{\mathrm{j}35^\circ}+\boldsymbol{e}_y 90e^{\mathrm{j}52^\circ}$。

2－7　试证明在任何无损耗(其电导率 $\sigma=0$)的非铁磁性媒质(其相对磁导率 $\mu_r=1$)中，以下关系式成立：$k=k_0\sqrt{\varepsilon_r}$；$\lambda=\dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$；$v_p=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$；$\eta=\dfrac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$。式中的 ε_r 为媒质的相对介电常数，k_0、λ_0、c 和 η_0 分别为平面波在真空中传播时的波数、波长、相速和波阻抗。

2－8　在空气中传播的均匀平面波的电场瞬时值表示式为

$$\boldsymbol{E}(t) = 2\pi(-\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y 3.5 + \boldsymbol{e}_z 5)\cos\left[\omega t - (-\pi x + \pi y + \frac{\pi}{2}z)\right] \quad (\mathrm{V/m})$$

(1) 求波的传播方向单位矢量；

(2) 求波的频率；

(3) 写出与 $\boldsymbol{E}(t)$相伴的磁场瞬时值表示式；

(4) 计算穿过与波的传播方向垂直的单位面积的平均功率。

2－9　在空气中传播的均匀平面波的磁场复数表示式为

$$\boldsymbol{H}=(-\boldsymbol{e}_x A+\boldsymbol{e}_y 2+\boldsymbol{e}_z 4)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(4\pi x+3\pi z)}\quad(\mu\mathrm{A/m})$$

式中的 A 为常数。

（1）求波矢量 $\boldsymbol{k}$；

（2）求波长和频率；

（3）确定常数 A 的值；

（4）写出与 $\boldsymbol{H}$ 相伴的电场复数表示式；

（5）计算平均坡印廷矢量。

2－10　频率 $f=500\mathrm{kHz}$ 的正弦均匀平面波在某种无损耗媒质（其参数为 $\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ 以及 $\sigma=0$）中传播，已知电场矢量 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_x 4-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z 2\quad\mathrm{kV/m}$，磁场矢量 $\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{e}_x 6+\boldsymbol{e}_y 18-\boldsymbol{e}_z 3\quad\mathrm{A/m}$。

（1）确定波传播方向的单位矢量；

（2）计算出媒质的相对介电常数 ε_r；

（3）求波长；

（4）写出电场和磁场的复数表示式。

2－11　在空气中传播的均匀平面波的电场复数表示式为

$$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{e}_x 3+\boldsymbol{e}_y 4+\boldsymbol{e}_z(3-\mathrm{j}4)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(0.8x-0.6y)}\quad(\mathrm{V/m})$$

（1）求波的相位常数和角频率；

（2）确定波传播方向的单位矢量；

（3）写出相应的磁场强度瞬时值表示式。

2－12　在 $z=0$ 平面内，均匀平面波的电场复振幅为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}20\quad(\mathrm{mV/m})$，波的角频率 $\omega=2\times10^6\ \mathrm{rad/s}$，媒质的参数为 $\mu_r=10$，$\varepsilon_r=2.5$，$\sigma=10^{-4}\ \mathrm{S/m}$；求（1）衰减常数、相位常数、相速、本征阻抗；（2）$t=6\mu\mathrm{s}$、$z=10\mathrm{m}$ 时的电场。

2－13　试证明均匀平面波在良导体中传播时，每波长内场强的衰减为 55dB。

2－14　有损耗媒质的参数为 $\varepsilon=20\ \mathrm{PF/m}$，$\mu=5\ \mu\mathrm{H/m}$，$\sigma=10\mu\mathrm{S/m}$，其内有角频率 $\omega=10^8\ \mathrm{rad/s}$，电场的复数表示式为 $\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_x 7000\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\beta)z}(\mathrm{V/m})$ 的均匀平面波传播。

（1）计算衰减常数，相位常数和本征阻抗；

（2）写出相应的磁场瞬时值表示式。

2－15　在频率 $f=10\mathrm{GHz}$ 时，铁氧体的相对介电常数 $\varepsilon_r=9$，相对磁导率 $\mu_r=4$，电导率 $\sigma=10^{-2}\mathrm{S/m}$。求波的衰减常数 α、相位常数 β、相速 v_p、波长 λ 以及波阻抗。

2－16　海水的电参数为 $\varepsilon_r=81$，$\mu_r=1$，$\sigma=5\ \mathrm{S/m}$，若要求进入海水的电磁波功率至少有 90% 能到达 1m 以下深度，电磁波的频率应取多少？

2－17　在空气中沿 x 方向直线极化的均匀平面波的波长 $\lambda_0=60\mathrm{m}$，当其进入海平面垂直向下传播时，距海平面 $z=1\mathrm{m}$ 处的电场为 $E=\cos\omega t\ \mathrm{V/m}$。已知海水的电参数 $\varepsilon_r=80$，$\mu_r=1$，$\sigma=4\ \mathrm{S/m}$，试求：

（1）海水的衰减常数 α、相位常数 β 和本征阻抗 η_c；

（2）写出海水中的电场、磁场瞬时值表示式。

2－18　已知某有损耗媒质的电参数为 $\sigma=10^6\ \mathrm{S/m}$，$\mu_r=2$，$\varepsilon_r=1$，分别计算频率为

50Hz、2MHz、3GHz 时的趋肤深度及振幅减小到$\frac{1}{100}$的传播距离。

2－19　频率 $f=3\text{GHz}$、y 方向极化的均匀平面波，在 $\varepsilon_r=2.5$、损耗角正切值$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=10^{-2}$的非铁磁性媒质中沿$+x$ 方向传播。

(1) 求衰减常数、相位常数和本征阻抗；

(2) 求波的振幅衰减一半时，传播了多少距离？

(3) 设 $x=0$ 处的电场 $\boldsymbol{E}(0,t)=\boldsymbol{e}_y 5\cos(6\pi\times10^9 t+\frac{\pi}{3})$ V/m，写出 $\boldsymbol{E}(x,t)$和 $\boldsymbol{H}(x,t)$的表示式。

2－20　有一直线极化的均匀平面波在海水($\varepsilon_r=80$、$\mu_r=1$，$\sigma=4$ S/m)中沿$+y$ 方向传播，已知在 $y=0$ 处的磁场为

$$\boldsymbol{H}(o,t)=\boldsymbol{e}_x 0.1\cos(10^{10}\pi t-\frac{\pi}{3})\quad(\text{A/m})$$

(1)求衰减常数、相位常数、本征阻抗、趋肤深度；

(2) 写出 $\boldsymbol{E}(y,t)$和 $\boldsymbol{H}(y,t)$的表示式。

2－21　在空气中传播的均匀平面波的电场复数表示式为

$$\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{e}_x 10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20\pi z}+\boldsymbol{e}_y 10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(20z-\pi/2)}\quad(\text{V/m})$$

(1)求该平面波的频率；

(2) 指出波的极化方式；

(3) 写出与 $\boldsymbol{E}(z,t)$相伴的磁场的瞬时值表示式 $\boldsymbol{H}(z,t)$。

2－22　试证明：(1) 一个椭圆极化波可分解为不等振幅的一个左旋圆极化波和一个右旋圆极化波之和；(2) 一个圆极化波可由振幅相等的两个相互垂直的线极化波迭加而成。

2－23　一个线极化波的两个电场分量分别为

$$E_x(z,t)=6\cos(\omega t-kz-30^\circ)$$

和

$$E_y(z,t)=8\cos(\omega t-kz-30^\circ)$$

试将它分解为振幅相等、旋向相反的两个圆极化波。

2－24　一个右旋圆极化波的波矢量 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)$，已知 $t=0$ 时，在原点处的电场为 $\boldsymbol{e}_x E_0$。试求此右旋圆极化波的电场、磁场的瞬时值表示式。

2－25　在空气中沿$+z$ 方向传播的均匀平面波的电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$，式中 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_R+\mathrm{j}\boldsymbol{E}_I$，且 $E_R=2E_I=A$ 为实常量。设矢量 $\boldsymbol{E}_R$ 沿 x 方向，$\boldsymbol{E}_I$ 的方向与 x 轴的夹角为 60°。试求 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的瞬时值表示式，并讨论该平面波的极化。

第三章　平面电磁波在分界面上的反射和透射

前一章讨论了均匀平面波在无界媒质中的传播。在电磁波的传播过程中总要遇到不同媒质的分界面，由于分界面两侧媒质的本征阻抗不同，因此当平面电磁波从一种媒质中传播到分界面时，在分界面处将产生波的反射和透射现象。即一部分波在分界面处被反射，形成反射波；另一部分将透过分界面并继续在另一种媒质中传播，形成透射波。故在分界面一侧的媒质中同时存在入射波和反射波，在分界面另一侧的媒质中则只有透射波。

为了简化讨论，假设分界面是无限大平面。本着从简单到复杂的认识论，本章先讨论垂直入射的情况，随后再讨论斜入射。

3.1　均匀平面波对分界面的垂直入射

本节讨论单一频率的均匀平面波从半无界的一种媒质中垂直传入另一种半无界媒质的情况，两种媒质的分界面为 $z=0$ 的无限大平面。设第一种媒质的参数为 ε_1、μ_1、σ_1，第二种媒质的参数为 ε_2、μ_2、σ_2，如图 3－1 所示。为简化讨论但又不失一般性，假定入射波为 x 方向的线极化波。以下分为三种情况讨论。

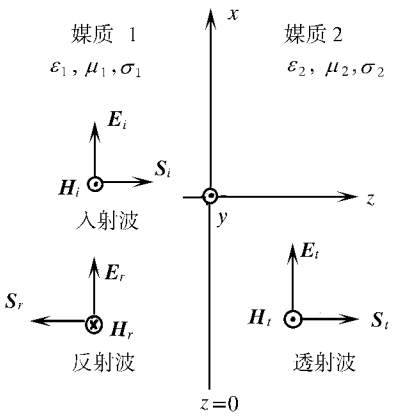


图 3－1　均匀平面波垂直入射到 $z=0$ 平面上

3.1.1　完纯介质与完纯导体的分界面

$z=0$ 平面的左侧是完纯介质，其电导率 $\sigma_1=0$；右侧是完纯导体，其电导率 $\sigma_2=\infty$。这是一种特殊的却又是常遇到的情况，例如空气与金属导体的分界面就可近似为这种情况。

在媒质 1 中沿 $+z$ 方向传播的正弦均匀平面波的电场和磁场可分别表示为

$$\boldsymbol{E}_i(z) = \boldsymbol{e}_x E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} \tag{3.1.1}$$

$$\boldsymbol{H}_i(z) = \boldsymbol{e}_y \frac{E_{im}}{\eta} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} \tag{3.1.2}$$

式中，$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$ 是媒质 1 的相位常数；$\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$ 是媒质 1 的本征阻抗；E_{im} 是入射波电场振幅。

媒质 2 是完纯导体，其电导率 $\sigma_2 = \infty$，本征阻抗 $\eta_c = 0$，电磁场不能存在于完纯导体内。因此，入射电磁波不能透过完纯导体界面，而是在分界面上全部反射，形成沿 $-z$ 方向传播的反射波。若假设反射波电场仍是沿 x 方向的线极化波，则反射波的电场和磁场分别表示为

$$\boldsymbol{E}_r(z) = \boldsymbol{e}_x E_{rm} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \tag{3.1.3}$$

和

$$\boldsymbol{H}_r(z) = -\boldsymbol{e}_y \frac{E_{rm}}{\eta_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \tag{3.1.4}$$

式中，E_{rm} 是反射波电场振幅。

媒质 1 中的入射波和反射波叠加而成为合成波，其总电场为

$$\boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{E}_i(z) + \boldsymbol{E}_r(z) = \boldsymbol{e}_x E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \boldsymbol{e}_x E_{rm} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}$$

在 $z=0$ 处，根据完纯导体表面电场切向分量为零的边界条件，得

$$\boldsymbol{E}_1(0) = \boldsymbol{e}_x (E_{im} + E_{rm}) = 0$$

即

$$E_{rm} = -E_{im} \tag{3.1.5}$$

于是媒质 1 中的总电场为

$$\boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{e}_x E_{im} (\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}) = -\boldsymbol{e}_x \mathrm{j}2E_{im} \sin\beta_1 z \tag{3.1.6}$$

总磁场为

$$\boldsymbol{H}_1(z) = \boldsymbol{H}_i(z) + \boldsymbol{H}_r(z) = \boldsymbol{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} - \boldsymbol{e}_y \frac{E_{rm}}{\eta_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} =$$

$$\boldsymbol{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1} (\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}) = \boldsymbol{e}_y \frac{2E_{im}}{\eta_1} \cos\beta_1 z \tag{3.1.7}$$

上述结果表明在媒质 1 不存在电场的法向分量，这意味着此时完纯导体表面上没有感应电荷。但是，磁场的切向分量将在完纯导体表面感应面电流。应用完纯导体的磁场边界条件可得出完纯导体表面上的面电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_1(z) = -\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y \frac{2E_{im}}{\eta_1} \cos\beta_1 z \Big|_{z=0} = \boldsymbol{e}_x \frac{2E_{im}}{\eta_1} \tag{3.1.8}$$

下面讨论媒质 1 中合成波的时空特性。媒质 1 中的总电场和总磁场的瞬时值表示式为

$$\boldsymbol{E}_1(z,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_1(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \boldsymbol{e}_x 2E_{im} \sin\beta_1 z \cdot \sin\omega t \tag{3.1.9}$$

和

$$\boldsymbol{H}_1(z,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{H}_1(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \boldsymbol{e}_y \frac{2E_{im}}{\eta_1} \cos\beta_1 z \cdot \cos\omega t \tag{3.1.10}$$

可见，在任意时刻 t、$\boldsymbol{E}_1(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}_1(z,t)$ 都在距完纯导体表面的某些固定位置具有零值或

最大值：

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{E}_1(z,t)\text{ 的零值}\\ \boldsymbol{H}_1(z,t)\text{ 的最大值}\end{array}\right\}\text{出现在 }\beta_1 z=-n\pi\text{ 或 }z=-n\frac{\lambda}{2}\text{ 处，}\quad n=0,1,2\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{E}_1(z,t)\text{ 的最大值}\\ \boldsymbol{H}_1(z,t)\text{ 的零值}\end{array}\right\}\text{出现在 }\beta_1 z=-(2n+1)\frac{\pi}{2}\text{ 或 }z=-(2n+1)\frac{\lambda}{4}\text{ 处，}\quad n=0,1,2\cdots$$

这说明两个传播方向相反振幅相等的行波（入射波和反射波）叠加的结果形成了驻波。图 3－2 根据式(3.1.9)和式(3.1.10)画出了不同 ωt 值时，$\boldsymbol{E}_1(z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}_1(z,t)$ 的图形。由这些图形可以看出，虽然电场、磁场都随时间脉动，但已不是传播的波（行波），而是纯驻波。场的最大点称为波腹，场的零点称为波节。

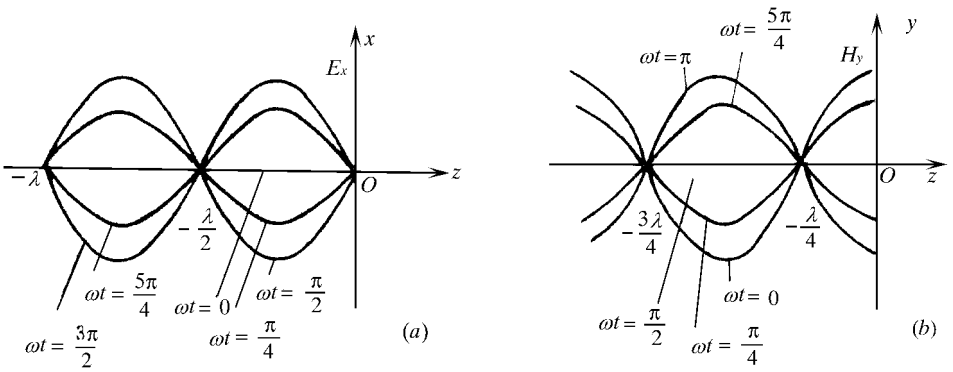


图 3－2　对完纯导体垂直入射时，合成电场、磁场的时空关系

由图 3－2 可以看出，E_1 和 H_1 的驻波的时间和空间相位都相差 $\pi/2$（即在时间上有 $\frac{\pi}{2}$ 的相移，在空间位置上错开 $\frac{\lambda}{4}$），电场的波腹点正好对应于磁场的波节点，且在导体边界上 $E_1=0$。

对于媒质 1 中的合成波，平均坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}_{1\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_1(z)\times\boldsymbol{H}_1^*(z)]=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}\left[-\boldsymbol{e}_z\mathrm{j}\frac{4E_{im}^2}{\eta_1}\sin\beta_1 z\cos\beta_1 z\right]=0$$

即纯驻波的平均功率流密度为零，不发生电磁能量的传输过程，仅在两个波节之间进行电场能量和磁场能量的转换。

例 3.1　频率 $f=100$ MHz 的均匀平面波，从空气中垂直入射到 $x=0$ 处的完纯导体表面。假设入射波电场的振幅 $E_{im}=6$ mV/m，沿 y 方向极化。

（1）写出入射波电场、磁场的复数表示式和瞬时值表示式；

（2）写出反射波电场、磁场的复数表示式和瞬时值表示式；

（3）写出空气中合成波电场、磁场的复数表示式和瞬时值表示式；

（4）确定距导体平面最近的合成波电场为零的位置。

解：对于给定的频率 $f=100\quad \mathrm{MHz}$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\times 10^{8}\quad \mathrm{rad/s}$$

$$\beta_1 = k_1 = \frac{\omega}{v_p} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\times 10^{8}}{3\times 10^{8}} = \frac{2}{3}\pi\quad (\mathrm{rad/m})$$

$$\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377\quad \Omega$$

(1) **由题给条件知，入射波的传播方向为** $+x$ **方向，故**

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_i(x) = \boldsymbol{e}_y E_{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 x} = \boldsymbol{e}_y 6\times 10^{-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}x}\quad (\mathrm{V/m}) \\ \boldsymbol{H}_i(x) = \dfrac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{E}_i(x) = \boldsymbol{e}_z\dfrac{10^{-4}}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}x}\quad (\mathrm{A/m}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_i(x,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_i(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \\ \qquad\qquad \boldsymbol{e}_y 6\times 10^{-3}\cos(2\pi\times 10^{8}t - \dfrac{2\pi}{3}x)\quad (\mathrm{V/m}) \\ \boldsymbol{H}_i(x,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{H}_i(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \\ \qquad\qquad \boldsymbol{e}_z\dfrac{1}{2\pi}\times 10^{-4}\cos(2\pi\times 10^{8}t - \dfrac{2\pi}{3}x)\quad (\mathrm{A/m}) \end{cases}$$

(2) **反射波的传播方向为** $-x$ **方向，电场振幅** $E_{rm}=-E_{im}$ **故**

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_r(x) = -\boldsymbol{e}_y 6\times 10^{-3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}x}\quad (\mathrm{V/m}) \\ \boldsymbol{H}_r(x) = \dfrac{1}{\eta_1}[-\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{E}_r(x)] = \boldsymbol{e}_z\dfrac{1}{2\pi}\times 10^{-4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}x}\quad (\mathrm{A/m}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_r(x,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_r(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \\ \qquad\qquad -\boldsymbol{e}_y 6\times 10^{-3}\cos(2\pi\times 10^{8}t + \dfrac{2\pi}{3}x)\quad (\mathrm{V/m}) \\ \boldsymbol{H}_r(x,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{H}_r(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \\ \qquad\qquad \boldsymbol{e}_z\dfrac{1}{2\pi}\times 10^{-4}\cos(2\pi\times 10^{8}t + \dfrac{2\pi}{3}x)\quad (\mathrm{A/m}) \end{cases}$$

(3) **参照式**(3.1.6)**和式**(3.1.7)**，空气中的合成波电场、磁场分别为**

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_1(x) = \boldsymbol{E}_i(x) + \boldsymbol{E}_r(x) = -\boldsymbol{e}_y\mathrm{j}12\times 10^{-3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}x\right)\quad (\mathrm{V/m}) \\ \boldsymbol{H}_1(x) = \boldsymbol{H}_i(x) + \boldsymbol{H}_r(x) = \boldsymbol{e}_z\dfrac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}x\right)\quad (\mathrm{A/m}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_1(x,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \\ \qquad\qquad \boldsymbol{e}_y 12\times 10^{-3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}x\right)\sin(2\pi\times 10^{8}t)\quad (\mathrm{V/m}) \\ \boldsymbol{H}_1(x,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{H}_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \\ \qquad\qquad \boldsymbol{e}_z\dfrac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}x\right)\cos(2\pi\times 10^{8}t)\quad (\mathrm{A/m}) \end{cases}$$

(4) **完纯导体的表面处**($x=0$ **处**)，$E_1=0$。**在空气中，第一个电场零点出现在** $x=-\dfrac{\lambda_1}{2}=-\dfrac{\pi}{\beta_1}=-1.5\mathrm{m}$ **处**。

例 3.2　沿 $+z$ **方向传播的右旋圆极化波垂直入射到位于** $z=0$ **处的完纯导体板上，**

已知其电场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}_i(z) = \boldsymbol{E}_{im}(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y \mathrm{j})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}$$

(1) 确定反射波的极化形式；

(2) 求导体板上的感应面电流密度。

解：(1) 设反射波电场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}_r(z) = (\boldsymbol{e}_x E_{rxm} + \mathrm{j}\boldsymbol{e}_y E_{rym})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \quad (\mathrm{V/m})$$

利用完纯导体表面切向电场为零的边界条件，得

$$\boldsymbol{E}_{im} + \boldsymbol{E}_{rxm} = 0 \quad \text{和} \quad -\boldsymbol{E}_{im} + \boldsymbol{E}_{rym} = 0$$

故

$$\boldsymbol{E}_{rxm} = -\boldsymbol{E}_{im} \quad , \quad \boldsymbol{E}_{rym} = \boldsymbol{E}_{im}$$

则反射波电场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}_r(z) = \boldsymbol{E}_{im}(-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{a}_y \mathrm{j})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \quad (\mathrm{V/m})$$

可见，反射波是沿$-z$方向传播的左旋圆极化波。这就是圆极化反射后的旋向反转，有重要的意义。

(2) 入射波的磁场为

$$\boldsymbol{H}_i(z) = \frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}_i(z) = \frac{E_{im}}{\eta_1}(\boldsymbol{e}_x \mathrm{j} + \boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} \quad (\mathrm{A/m})$$

而反射波的磁场为

$$\boldsymbol{H}_r(z) = \frac{1}{\eta_1}(-\boldsymbol{e}_z) \times \boldsymbol{E}_r(z) = \frac{E_{im}}{\eta_1}(\boldsymbol{e}_x \mathrm{j} + \boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \quad (\mathrm{A/m})$$

于是得合成波的磁场为

$$\boldsymbol{H}_1(z) = \boldsymbol{H}_i(z) + \boldsymbol{H}_r(z)$$

则导体板上的感应面电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s = -\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{H}(z)\big|_{z=0} = \frac{2E_{im}}{\eta_1}(\boldsymbol{e}_x \mathrm{j} + \boldsymbol{e}_y) \quad (\mathrm{A/m})$$

3.1.2 完纯介质与完纯介质的分界面

$z=0$平面的两侧都是完纯介质，其电导率$\sigma_1=0$、$\sigma_2=0$，都是无损耗媒质。媒质的相位常数$\beta_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$、$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$，本征阻抗$\eta_1=\sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$、$\eta_2=\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$都是实量。

由于两种媒质的本征阻抗不同，当均匀平面波在媒质1中，沿$+z$方向传播入射到$z=0$的分界面时，将发生反射和透射。透射波在媒质2中，继续沿$+z$方向传播。

设入射波的电场、磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_i(z) = \boldsymbol{e}_x E_{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} \tag{3.1.11}$$

和

$$\boldsymbol{H}_i(z) = \boldsymbol{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} \tag{3.1.12}$$

反射波的电场、磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_r(z) = \boldsymbol{e}_x E_{rm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \tag{3.1.13}$$

和

$$\boldsymbol{H}_r(z) = -\boldsymbol{e}_y \frac{E_{rm}}{\eta_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \tag{3.1.14}$$

而在媒质 2 中的透射波的电场、磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_t(z) = \boldsymbol{E}_2(z) = \boldsymbol{e}_x E_{tm} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z} \tag{3.1.15}$$

和

$$\boldsymbol{H}_t(z) = \boldsymbol{H}_2(z) = \boldsymbol{e}_y \frac{E_{tm}}{\eta_2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z} \tag{3.1.16}$$

利用完纯介质分界面上，电场和磁场的切向分量都必须连续的边界条件，可求出反射波电场振幅 E_{rm}、透射波电场振幅 E_{tm} 与入射波电场振幅 E_{im} 的关系。

媒质 1 中，合成波的电场和磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{E}_i(z) + \boldsymbol{E}_r(z) = \boldsymbol{e}_x (E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + E_{rm} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}) \tag{3.1.17}$$

$$\boldsymbol{H}_1(z) = \boldsymbol{H}_i(z) + \boldsymbol{H}_r(z) = \boldsymbol{e}_y (\frac{E_{im}}{\eta_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} - \frac{E_{rm}}{\eta_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}) \tag{3.1.18}$$

在 $z=0$ 处，应有 $E_1 = E_2$，故由式(3.1.15)和式(3.1.17)，得

$$\boldsymbol{E}_1(0) = E_{im} + E_{rm} = E_2(0) = E_{tm} \tag{3.1.19}$$

在 $z=0$ 处，还应有 $H_1 = H_2$，故由式(3.1.16)和式(3.1.18)，得

$$\boldsymbol{H}_1(0) = \frac{E_{im}}{\eta_1} - \frac{E_{rm}}{\eta_1} = H_2(0) = \frac{E_{tm}}{\eta_2} \tag{3.1.20}$$

联立求解式(3.1.19)和式(3.1.20)，得

$$E_{rm} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{im} \tag{3.1.21}$$

$$E_{tm} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{im} \tag{3.1.22}$$

把反射波电场振幅与入射波电场振幅的比值，定义为反射系数，用 Γ 表示，由式(3.1.21)得

$$\Gamma = \frac{E_{rm}}{E_{im}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{3.1.23}$$

把透射波电场振幅与入射波电场振幅的比值，定义为透射系数，用 τ 表示，由式(3.1.22)得

$$\tau = \frac{E_{tm}}{E_{im}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{3.1.24}$$

把反射系数和透射系数分别代入式(3.1.17)和式(3.1.15)，则在媒质 1 中的合成电场为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{E}_i(z) + \boldsymbol{E}_r(z) &= \boldsymbol{e}_x E_{im} (\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}) = \\ &\boldsymbol{e}_x E_{im} [(1+\Gamma) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \Gamma(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z})] = \\ &\boldsymbol{e}_x E_{im} [(1+\Gamma) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \Gamma \mathrm{j}2\sin\beta_1 z] \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

而在媒质 2 中的透射波电场为

$$\boldsymbol{E}_t(z) = \boldsymbol{e}_x \tau E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z} \tag{3.1.26}$$

从式(3.1.25)可以看出，媒质 1 中的合成电场包括两部分：前一项包含因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}$，是振幅为 $(1+\Gamma)E_{im}$、沿 $+z$ 方向传播的行波；后一项是振幅为 $2\Gamma E_{im}$ 的驻波，我们将这类波称为行驻波(或混合波)。这类波的电场最大值和最小值分布在空间固定位置上，即仍有

固定的波腹点和波节点，但因存在行波分量，波节点的场强不再为零。式(3.1.26)表示的透射波电场是一单向行波，不必再讨论。

下面讨论在媒质 1 中，合成波电场 $\boldsymbol{E}_1(z)$ 的最大值和最小值以及它出现的位置。将 $\boldsymbol{E}_1(z)$ 表示为

$$\boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{e}_x E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}(1+\Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}) \tag{3.1.27}$$

对于完纯介质，η_1 和 η_2 都是实数，因而 Γ 和 τ 也是实数。但从式(3.1.23)可以看出，Γ 可以是正数或负数，就分别讨论这两种情况。

(1)$\Gamma>0$ 即 $\eta_2>\eta_1$ 时，电场最大值为

$$|\boldsymbol{E}_1(z)|_{\max} = E_{im}(1+\Gamma) \tag{3.1.28}$$

它出现在 $2\beta_1 z=-2n\pi$ 处，即

$$Z_{\max} = -\frac{n\pi}{\beta_1} = -n\frac{\lambda_1}{2}, \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{3.1.29}$$

电场最小值为

$$|\boldsymbol{E}_1(z)|_{\min} = E_{im}(1-\Gamma) \tag{3.1.30}$$

它出现在 $2\beta_1 z=-(2n+1)\pi$ 处，即

$$Z_{\min} = -\frac{(2n+1)\pi}{2\beta_1} = -(2n+1)\frac{\lambda_1}{4}, \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{3.1.31}$$

(2) $\Gamma<0$ 即 $\eta_2<\eta_1$ 时，电场最大值出现的位置如式(3.1.31)所示，而电场最小值出现的位置加式(3.1.29)所示。就是说，当 $\Gamma>0$ 和 $\Gamma<0$ 时，$|\boldsymbol{E}_1(z)|_{\max}$ 与 $|\boldsymbol{E}_1(z)|_{\min}$ 的位置正好对调。

同样可以将媒质 1 中，合成波的磁场表示为

$$\boldsymbol{H}_1(z) = \boldsymbol{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} - \Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}) = \boldsymbol{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}(1-\Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}) \tag{3.1.32}$$

将式(3.1.32)与式(3.1.27)比较可见，$|\boldsymbol{H}_1(z)|$ 和 $|\boldsymbol{E}_1(z)|$ 的最大值与最小值的出现位置正好互换。

在讨论行驻波特性时，通常引入驻波系数(或驻波比)，其定义是驻波电场强度的最大值与最小值的比值，表示为

$$S = \frac{|\boldsymbol{E}|_{\max}}{|\boldsymbol{E}|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{3.1.33}$$

由上式可得用驻波系数 S 来表示反射系数 Γ 的式子为

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} \tag{3.1.34}$$

最后，看一看电磁功率关系。入射波、反射波和透射波的平均功率密度分别为

$$\boldsymbol{S}_{i\text{平均}} = \frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_i \times \boldsymbol{H}_i{}^*] =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_x E_{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} \times \boldsymbol{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}] = \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2\eta_1}E_{im}^2 \tag{3.1.35}$$

$$\boldsymbol{S}_{r\text{平均}} = \frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_r \times \boldsymbol{H}_r{}^*] =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}\left[\boldsymbol{e}_x \Gamma E_{im}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \times (-\boldsymbol{e}_y \frac{\Gamma E_{im}}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z})\right] = -\boldsymbol{e}_z \frac{1}{2\eta_1}\Gamma^2 E_{im}^2 \tag{3.1.36}$$

$$\boldsymbol{S}_{i\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_t\times\boldsymbol{H}_t{}^*]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}\left[\boldsymbol{e}_x\tau E_{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\times\boldsymbol{e}_y\frac{\tau E_{im}}{\eta_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 z}\right]=\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2\eta_2}\tau^2E_{im}^2 \tag{3.1.37}$$

因此，在媒质 1 沿$+z$方向传输的平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{1\text{平均}}=\boldsymbol{S}_{i\text{平均}}+\boldsymbol{S}_{r\text{平均}}=\boldsymbol{e}_z\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}(1-\Gamma^2) \tag{3.1.38}$$

由式(3.1.36)和式(3.1.37)得反射波和透射波的平均功率密度之和为

$$\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}\Gamma^2+\frac{E_{im}^2}{2\eta_2}\tau^2$$

将式(3.1.23)和式(3.1.24)代入上式，得

$$\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\right)^2+\frac{E_{im}^2}{2\eta_2}\left(\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}\right)^2=$$

$$\frac{E_{im}^2}{2\eta_1\eta_2(\eta_2+\eta_1)^2}[\eta_2(\eta_2-\eta_1)^2+\eta_1(2\eta_2)^2]=\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}$$

此结果表明，反射功率与透射功率之和等于入射波的功率，这是符合能量守恒定律的。

例 3.3 频率 $f=1$ GHz 的均匀平面波在空气中沿$+z$方向传播，在 $z=0$ 处入射到 $\varepsilon_2=2.1\varepsilon_0$ 的非铁磁性介质。设电场沿 x 轴取向，且在分界面处入射波电场振幅值为 100 V/m。

(1) 求反射系数和透射系数；

(2) 写出媒质 1(空气)和媒质 2($\varepsilon=2.1\varepsilon_0$ 的非铁磁性介质)的电场、磁场表示式；

(3) 求入射波、反射波和透射波的平均功率密度。

解：在媒质 1 中，有

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi=377\ \Omega$$

$$\beta_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=2\pi\times10^9\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=20.94\ \text{rad/m}$$

在媒质 2 中，有

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{2.1\varepsilon_0}}=260.2\ \Omega$$

$$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=2\pi f\sqrt{\mu_0\times2.1\varepsilon_0}=30.34\ \text{rad/m}$$

(1)反射系数和透射系数分别为

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{260.2-377}{260.2+377}=-0.183$$

和

$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=\frac{2\times260.2}{260.2+377}=0.817$$

(2)媒质 1 中有入射波和反射波分别为

入射波：

$$\boldsymbol{E}_i(z,t)=\boldsymbol{e}_x100\cos(2\pi\times10^9t-20.94z)\ (\text{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}_i(z,t)=\frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_i(z,t)=$$

$$\boldsymbol{e}_y 0.265\cos(2\pi\times10^9 t-20.94z)\ (\mathrm{A/m})$$

反射波：

$$\boldsymbol{E}_r(z,t)=\boldsymbol{e}_x\Gamma E_{1m}\cos(2\pi ft+\beta_1 z)=$$
$$-\boldsymbol{e}_x 18.3\cos(2\pi\times10^9 t+20.94z)\ (\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}_r(z,t)=\frac{1}{\eta_1}[-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_r(z,t)]=$$
$$\boldsymbol{e}_y 0.049\cos(2\pi\times10^9 t+20.94z)\ (\mathrm{A/m})$$

故媒质 1 中的总电场和总磁场为

$$\boldsymbol{E}_1(z,t)=\boldsymbol{E}_i(z,t)+\boldsymbol{E}_r(z,t)=$$
$$\boldsymbol{e}_x 100\cos(2\pi\times10^9 t-20.94z)-$$
$$\boldsymbol{e}_x 18.3\cos(2\pi\times10^9 t+20.94z)$$

和

$$\boldsymbol{H}_1(z,t)=\boldsymbol{H}_i(z,t)+\boldsymbol{H}_r(z,t)=$$
$$\boldsymbol{e}_y 0.265\cos(2\pi\times10^9 t-20.94z)+$$
$$\boldsymbol{e}_y 0.049\cos(2\pi\times10^9 t+20.94z)$$

在媒质 2 中只有透射波，即

$$\boldsymbol{E}_2(z,t)=\boldsymbol{e}_x E_{2m}\cos(\omega t-\beta_2 z)=\boldsymbol{e}_x 0.817\times100\cos(2\pi\times10^9 t-30.34z)$$

$$\boldsymbol{H}_2(z,t)=\frac{1}{\eta_2}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_2(z,t)=\boldsymbol{e}_y 0.314\cos(2\pi\times10^9 t-30.34z)$$

(3) $$\boldsymbol{S}_{i\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_i(z)\times\boldsymbol{H}_i^{\,*}(z)]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_x 100\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20.94z}\times\boldsymbol{e}_y 0.265\mathrm{e}^{\mathrm{j}20.94z}]=\boldsymbol{e}_z 13.25\ (\mathrm{W/m^2})$$

$$\boldsymbol{S}_{r\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_r(z)\times\boldsymbol{H}_r^{\,*}(z)]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[-\boldsymbol{e}_x 18.3\mathrm{e}^{\mathrm{j}20.94z}\times\boldsymbol{e}_y 0.049\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20.94z}]=-\boldsymbol{e}_z 0.45\ (\mathrm{W/m^2})$$

$$\boldsymbol{S}_{t\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_t(z)\times\boldsymbol{H}_t^{\,*}(z)]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_x 81.7\mathrm{e}^{-\mathrm{j}30.34z}\times\boldsymbol{e}_y 0.314\mathrm{e}^{\mathrm{j}30.34z}]=\boldsymbol{e}_z 12.8\ (\mathrm{W/m^2})$$

例 3.4 $z=0$ **平面的左侧是空气(参数为** $\varepsilon_1=\varepsilon_0,\mu_1=\mu_0,\sigma_1=0$**)，右侧是另一种无损耗媒质(参数为** $\varepsilon_2=\varepsilon_{2\mathrm{r}}\varepsilon_0,\mu_2=\mu_{2\mathrm{r}}\mu_0,\sigma_2=0$**)。入射波从空气中垂直入射到分界面上时，产生反射波和透射波。若已知媒质 1 中，合成波的驻波系数** $S=3$**，媒质 2 中透射波的波长** $\lambda_2=\frac{\lambda_1}{6}=\frac{\lambda_0}{6}$**，且** $z=0$ **的分界面上得行驻波电场的最小值。试求媒质 2 的相对介电常数** $\varepsilon_{2\mathrm{r}}$ **和相对磁导率** $\mu_{2\mathrm{r}}$**。**

解：据式(3.1.34)计算出反射系数的模为

$$|\Gamma|=\frac{S-1}{S+1}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$$

因在分界面上得到行驻波电场的最小值，故反射系数应取负值，即 $\Gamma=-\frac{1}{2}$**。**

而反射系数

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

式中 $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$；$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_{2r}}{\varepsilon_{2r}}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$；$\Gamma = -\frac{1}{2}$ 则得

$$\sqrt{\frac{\mu_{2r}}{\varepsilon_{2r}}} = \frac{1}{3}$$

即

$$\frac{\mu_{2r}}{\varepsilon_{2r}} = \frac{1}{9}$$

又据 $\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{2r}\varepsilon_{2r}}} = \frac{\lambda_0}{6}$ 得 $\mu_{2r}\varepsilon_{2r} = 36$

联立求解

$$\frac{\mu_{2r}}{\varepsilon_{2r}} = \frac{1}{9} \quad \text{和} \quad \mu_{2r}\varepsilon_{2r} = 36$$

得

$$\varepsilon_{2r} = 18 \quad , \quad \mu_{2r} = 2$$

3.1.3 一般导体与一般导体的分界面

“一般导体”是指电导率既不是零，也不是无限大的导电媒质。媒质 1 的电导率 σ_1 为有限值，媒质 2 的电导率 σ_2 也是有限值。此时，媒质 1 和媒质 2 的传播常数和本征阻抗都是复量，分别为

$$\gamma_1 = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_{1c}} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_1\left(\varepsilon_1 - \mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega}\right)} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\left(1 - \mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1}\right)^{1/2}$$

$$\gamma_2 = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_{2c}} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_2\left(\varepsilon_2 - \mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega}\right)} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\left(1 - \mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^{1/2}$$

$$\eta_{1c} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_{1c}}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1}\right)^{1/2}} = |\eta_{1c}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$$

$$\eta_{2c} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{2c}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^{1/2}} = |\eta_{2c}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$$

当入射波在媒质 1 中传播时，电场、磁场的振幅要衰减，且存在相位差。当它入射到分界面时，产生的反射波和透射波也同样是衰减的，电场、磁场也不同相位。仍然按图 3－1 所示的假设，且引用前面已定义过的反射系数 Γ 和透射系数 τ，可以分别写出入射波、反射波和透射波的电场、磁场表示式。

入射波：

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_i(z)=\boldsymbol{e}_x E_{im}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}\\ \boldsymbol{H}_i(z)=\boldsymbol{e}_y\dfrac{E_{im}}{\eta_{1c}}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}=\boldsymbol{e}_y\dfrac{E_{im}}{|\eta_{1c}|}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_1}\end{cases}$$

反射波：

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_r(z)=\boldsymbol{e}_x\Gamma E_{im}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}\\ \boldsymbol{H}_r(z)=-\boldsymbol{e}_y\dfrac{\Gamma E_{im}}{\eta_{1c}}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}=-\boldsymbol{e}_y\dfrac{\Gamma E_{im}}{|\eta_{1c}|}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_1}\end{cases}$$

故得媒质 1 中合成波的总电场和总磁场为

$$\boldsymbol{E}_1(z)=\boldsymbol{E}_i(z)+\boldsymbol{E}_r(z)=\boldsymbol{e}_x E_{im}(\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}+\Gamma\mathrm{e}^{\gamma_1 z}) \tag{3.1.39}$$

和

$$\boldsymbol{H}_1(z)=\boldsymbol{H}_i(z)+\boldsymbol{H}_r(z)=\boldsymbol{e}_y\frac{E_{im}}{\eta_{1c}}(\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}-\Gamma\mathrm{e}^{\gamma_1 z}) \tag{3.1.40}$$

透射波：

$$\boldsymbol{E}_t(z)=\boldsymbol{E}_2(z)=\boldsymbol{e}_x\tau E_{im}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z} \tag{3.1.41}$$

$$\boldsymbol{H}_t(z)=\boldsymbol{H}_2(z)=\boldsymbol{e}_y\frac{\tau E_{im}}{\eta_{2c}}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}=\boldsymbol{e}_y\frac{\tau E_{im}}{|\eta_{2c}|}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_2} \tag{3.1.42}$$

利用分界面 $z=0$ 处电场切向分量应连续的边界条件，由式(3.1.39)**和式**(3.1.41)**，得**

$$1+\Gamma=\tau \tag{3.1.43}$$

因为两种媒质的电导率 σ_1 和 σ_2 皆为有限值，$z=0$ 的分界面上不可能存在表面电流(**即** $J_S=0$)。**故在 $z=0$ 处，磁场切向分量也是连续的。由式**(3.1.40)**和式**(3.1.42)**，得**

$$\frac{1}{\eta_{1c}}(1-\Gamma)=\frac{\tau}{\eta_{2c}} \tag{3.1.44}$$

联解式(3.1.43)**和式**(3.1.44)**，得**

$$\Gamma=\frac{\eta_{2c}-\eta_{1c}}{\eta_{2c}+\eta_{1c}} \tag{3.1.45}$$

$$\tau=\frac{2\eta_{1c}}{\eta_{2c}+\eta_{1c}} \tag{3.1.46}$$

可见，式(3.1.45)**、式**(3.1.46)**与式**(3.1.23)**、式**(3.1.24)**的形式完全相同，区别在于此处的反射系数 Γ 和透射系数 τ 皆为复数。表明入射波在媒质分界面上产生反射和透射后，反射波、透射波的大小和相位都要发生变化。**

在讨论了一般情况后，我们不妨审视一下前面讨论过的两种情况，可以看出它们实际上是两种特例。

若 $\sigma_1=0$，$\sigma_2=0$，则媒质的本征阻抗皆为实数，式(3.1.45)**和式**(3.1.46)**就变为式**(3.1.23)**和式**(3.1.24)**，Γ 和 τ 都为实数。**

若 $\sigma_1=0$，而 $\sigma_2=\infty$，则 η_1 为实数，$\eta_2=0$。此时 $\Gamma=-1$，$\tau=0$，即产生全反射。这就是最先讨论的完纯介质与完纯导体分界面的情况。

例 3.5　媒质 1 是一种非铁磁性导电媒质(参数为 $\varepsilon_1=16\varepsilon_0$，$\mu_1=\mu_0$，$\sigma_1=2\times10^{-2}$ S/m)，媒质 2 是另一种非铁磁性导电媒质(参数为 $\varepsilon_2=25\varepsilon_0$，$\mu_2=\mu_0$，$\sigma_2=0.2$ S/m)，分界面为 $z=0$ 的平面。今有频率 $f=50$ MHz，电场振幅为 10V/m，x 方向极化的正弦均匀平面波由媒质 1 中垂直入射到分界面上，

(1) **求反射波的电场和磁场;**

(2) **求透射波的电场和磁场。**

解:先根据题给数据计算出相关的参数,对媒质 1,有

$$\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1}=\frac{0.02}{2\pi\times50\times10^6\times16\times\dfrac{1}{4\pi\times9\times10^9}}=0.45$$

传播常数

$$\gamma_1=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1}\right)^{1/2}=$$

$$\mathrm{j}2\pi\times50\times10^6\sqrt{16\mu_0\varepsilon_0}(1-\mathrm{j}0.45)^{1/2}=$$

$$\mathrm{j}2\pi\times50\times10^6\times4\times\frac{1}{3\times10^8}(1.1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}24.23^\circ})^{1/2}=0.92+\mathrm{j}4.3$$

即

$$\alpha_1=0.92\ \mathrm{Np/m}\quad,\quad\beta_1=4.1\ \mathrm{rad/m}$$

本征阻抗

$$\eta_{1c}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_{1c}}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{16\varepsilon_0}}\cdot\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$\frac{1}{4}\times120\pi(1-\mathrm{j}0.45)^{-\frac{1}{2}}=89.76\mathrm{e}^{\mathrm{j}12.12^\circ}=$$

$$87.75+\mathrm{j}18.85\ (\Omega)$$

对于媒质 2,有

$$\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}=\frac{0.2}{2\pi\times50\times10^6\times25\times\dfrac{10^{-9}}{4\pi\times9}}=2.88$$

传播常数

$$\gamma_2=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^{1/2}=$$

$$\mathrm{j}2\pi\times50\times10^6\sqrt{25\mu_0\varepsilon_0}(1-\mathrm{j}2.88)^{1/2}=5.3+\mathrm{j}7.45$$

即

$$\alpha_2=5.3\ \mathrm{Np/m}\quad,\quad\beta_2=7.45\ \mathrm{rad/m}$$

本征阻抗

$$\eta_{2c}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{2c}}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{25\varepsilon_0}}\cdot\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$\frac{1}{5}\times120\pi(1-\mathrm{j}2.88)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$43.18\mathrm{e}^{\mathrm{j}35.43^\circ}=35.19+\mathrm{j}25.03\ (\Omega)$$

(1) **先写出入射波的电场表示式**

$$\boldsymbol{E}_i(z)=\boldsymbol{e}_xE_{im}\mathrm{e}^{-\alpha_1z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1z}=\boldsymbol{e}_x10\mathrm{e}^{-0.92z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4.3z}\quad(\mathrm{V/m})$$

而反射系数为

$$\Gamma=\frac{\eta_{2c}-\eta_{1c}}{\eta_{2c}+\eta_{1c}}=\frac{(35.19+\mathrm{j}25.03)-(88.75+\mathrm{j}18.85)}{35.19+\mathrm{j}25.03+88.75+\mathrm{j}18.85}=$$

$$\frac{-52.56+\mathrm{j}6.18}{122.75+\mathrm{j}43.88}=\frac{52.92\angle 180^\circ-6.6^\circ}{130.54\angle 19.64^\circ}=0.405\mathrm{e}^{\mathrm{j}153.66^\circ}$$

故反射波的电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_r(z)&=\boldsymbol{e}_x\Gamma E_{im}\mathrm{e}^{\alpha_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}=\\&\boldsymbol{e}_x 0.405\mathrm{e}^{\mathrm{j}153.66^\circ}\times 10\mathrm{e}^{0.92z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4.3z}=\\&\boldsymbol{e}_x 4.05\mathrm{e}^{0.92z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4.3z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}153.66^\circ z}\quad(\mathrm{V/m})\end{aligned}$$

磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_r(z)&=-\boldsymbol{e}_y\frac{\Gamma E_{im}}{\eta_{1c}}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}\\&-\boldsymbol{e}_y\frac{0.405\mathrm{e}^{\mathrm{j}153.66^\circ}\times 10}{89.76}\mathrm{e}^{0.92z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}12.12^\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4.3z}=\\&-\boldsymbol{e}_y 45.12\times 10^{-3}\mathrm{e}^{0.92z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}4.3z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}141.54^\circ}\quad(\mathrm{A/m})\end{aligned}$$

(2)**透射系数为**

$$\tau=\frac{2\eta_{2c}}{\eta_{2c}+\eta_{1c}}=\frac{2\times 43.18\angle 35.43^\circ}{35.19+\mathrm{j}25.03+87.75+\mathrm{j}18.85}=\frac{86.36\angle 35.43^\circ}{130.54\angle 19.64^\circ}=0.662\mathrm{e}^{\mathrm{j}15.79^\circ}$$

故媒质 2 中透射波的电场和磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2(z)&=\boldsymbol{E}_t(z)=\boldsymbol{e}_x\tau E_{im}\mathrm{e}^{-\alpha_2 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}=\\&\boldsymbol{e}_x 0.662\mathrm{e}^{\mathrm{j}15.79^\circ}\times 10\mathrm{e}^{-5.3z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}7.45z}=\\&\boldsymbol{e}_x 6.62\mathrm{e}^{-5.3z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}7.45z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}15.79^\circ}\quad(\mathrm{V/m})\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_2(z)&=\boldsymbol{H}_t(z)=\boldsymbol{e}_y\frac{\tau E_{im}}{\eta_{2c}}\mathrm{e}^{-\alpha_2 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}=\\&\boldsymbol{e}_y\frac{6.62}{43.18\angle 35.43^\circ}\mathrm{e}^{-5.3Z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}7.45z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}15.79^\circ}=\\&\boldsymbol{e}_y 0.153\mathrm{e}^{-5.3z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}7.45z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}19.64^\circ}(\mathrm{A/m})\end{aligned}$$

例 3.6　电场为 $\boldsymbol{E}_i(z,t)=\boldsymbol{e}_x 10\cos(2\pi\times 3\times 10^5 t-\beta_1 z)$ (V/m)**的均匀平面波从空气中垂直入射到参数为** $\varepsilon_2=18\varepsilon_0$，$\mu_2=\mu_0$，$\sigma_2=0.6\times 10^{-3}$ S/m **的有损耗媒质。设空气与有损耗媒质的分界面是** $z=0$ **平面。**

(1) **求反射系数，并写出反射波的电场、磁场表示式；**

(2) **求透射系数，写出透射波的电场、磁场表示式，并说明透射波在媒质 2 中传播多少距离后就可认为已衰减完了。**

解：先由题中已给数据计算出相关参数。

对于媒质 1(空气)：

$$\gamma_1=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=\mathrm{j}2\pi\times 3\times 10^5\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\mathrm{j}2\pi\times 3\times 10^5\times\frac{1}{3\times 10^8}=\mathrm{j}6.283\times 10^{-3}$$

即 $\beta_1 = 6.283\times10^{-3}$ rad/m

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ \Omega$$

对于媒质 2(**一般导体**)：

$$\gamma_2 = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^{1/2} =$$

$$\mathrm{j}2\pi\times3\times10^5\sqrt{18\mu_0\varepsilon_0}\left(1-\mathrm{j}\frac{0.6\times10^{-3}}{2\pi\times3\times10^5\times18\varepsilon_0}\right)^{1/2} =$$

$$0.021+\mathrm{j}0.034$$

即 $\alpha_2 = 0.021$ Np/m，$\beta_2 = 0.034$ rad/m

$$\eta_{2c} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{2c}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{18\varepsilon_0}}\left(1-\mathrm{j}\frac{0.6\times10^{-3}}{2\pi\times3\times10^5\times18\varepsilon_0}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$59.43\mathrm{e}^{\mathrm{j}31.7^\circ} = 50.56+\mathrm{j}31.23\ (\Omega)$$

(1) $$\Gamma = \frac{\eta_{2c}-\eta_1}{\eta_{2c}+\eta_1} = \frac{50.56+\mathrm{j}31.23-377}{50.56+\mathrm{j}31.23+377} = 0.765\mathrm{e}^{\mathrm{j}170.36^\circ}$$

故反射波的电场和磁场分别为

复数形式：

$$\boldsymbol{E}_r(z) = \boldsymbol{e}_x\Gamma E_{im}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} = \boldsymbol{e}_x 0.765\mathrm{e}^{\mathrm{j}170.36^\circ}\times10\mathrm{e}^{\mathrm{j}6.283\times10^{-3}z} =$$

$$\boldsymbol{e}_x 7.65\mathrm{e}^{\mathrm{j}6.283\times10^{-3}z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}170.36^\circ}\ (\mathrm{V/m})$$

瞬时值形式：

$$\boldsymbol{E}_r(z,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] =$$

$$\boldsymbol{e}_x 7.65\cos(2\pi\times3\times10^5 t+6.283\times10^{-3}z+170.36^\circ)\ (\mathrm{V/m})$$

复数形式：

$$\boldsymbol{H}_r(z) = \frac{1}{\eta_1}[-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z)] = -\boldsymbol{e}_y\frac{\Gamma E_{im}}{\eta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} =$$

$$-\boldsymbol{e}_y\frac{7.65\mathrm{e}^{\mathrm{j}170.36^\circ}}{377}\mathrm{e}^{\mathrm{j}6.283\times10^{-3}z}$$

瞬时值形式：

$$\boldsymbol{H}_r(z,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{H}_r(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] =$$

$$-\boldsymbol{e}_y\frac{7.65}{377}\cos(2\pi\times3\times10^5 t$$

$$+6.283\times10^{-3}z+170.36^\circ)\ (\mathrm{A/m})$$

(2) $$\tau = \frac{2\eta_{2c}}{\eta_{2c}+\eta_1} = \frac{2(50.56+\mathrm{j}31.23)}{50.56+\mathrm{j}31.23+377} = 0.277\mathrm{e}^{\mathrm{j}27.52^\circ}$$

故透射波的电场、磁场分别为

复数形式：

$$\boldsymbol{E}_t(z) = \boldsymbol{e}_x\tau E_{im}\mathrm{e}^{-\alpha_2 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z} =$$

$$\boldsymbol{e}_x 0.277\mathrm{e}^{\mathrm{j}27.52^\circ}\times 10\mathrm{e}^{-0.021z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.034z}=$$
$$\boldsymbol{e}_x 2.77\mathrm{e}^{-0.021z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.034z}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}27.52^\circ}(\mathrm{V/m})$$

瞬时值形式：

$$\boldsymbol{E}_t(z,t)=\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_t(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=$$
$$\boldsymbol{e}_x 2.77\mathrm{e}^{-0.021z}\cos(2\pi\times 3\times 10^5 t-$$
$$0.034z+27.52^\circ)\ (\mathrm{V/m})$$

复数形式：

$$\boldsymbol{H}_t(z)=\frac{1}{\eta_{2c}}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_t(z)=$$
$$\boldsymbol{e}_y\frac{2.77}{59.43}\mathrm{e}^{-0.021z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.034z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}27.52^\circ}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}31.7^\circ}=$$
$$\boldsymbol{e}_y 46.6\times 10^{-3}\mathrm{e}^{-0.021z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.034z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4.18^\circ}\ \mathrm{A/m}$$

瞬时值形式：

$$\boldsymbol{H}_t(z,t)=\mathrm{R_e}[\boldsymbol{H}_t(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=$$
$$\boldsymbol{e}_y 46.6\times 10^{-3}\mathrm{e}^{-0.021z}\cos(2\pi\times 3\times 10^5 t$$
$$-0.034z-4.18)\ (\mathrm{A/m})$$

电磁波在媒质 2 中的趋肤深度为

$$\delta=\frac{1}{\alpha_2}=\frac{1}{0.021}=47.62\ \mathrm{m}$$

通常认为电磁波在有损耗媒质中传播距离为 5δ 时就几乎衰减完了，故 $z=5\delta=238.1$ m。

练　习　题

3.1－1　**设空气和完纯导体的分界面是 $z=0$ 平面，若将空气中（$z<0$ 的区域）任意点上的驻波电场复振幅与磁场复振幅之比定义为等效波阻抗 η_{ef}，试证明：**

$$\eta_{\mathrm{ef}}=\frac{E_1(z)}{H_1(z)}=-\mathrm{j}\eta_0\tan\beta_0 z$$

3.1－2　**根据例 3.3 给定的参数，分别计算该均匀平面波在媒质 1 和媒质 2 中的相速 v_{p1}、v_{p2} 和波长 λ_1、λ_2；验证例题中的计算结果满足式（3.1.38）。**

3.1－3　**例 3.6 是均匀平面波从媒质 1（无损耗媒质）入射到媒质 2（有损耗媒质）的情况。阅读该例题之后，你对媒质 1 和媒质 2 中的电场、磁场关系有何认识？**

3.2　均匀平面波对多层媒质分界面的垂直入射

本节以三种媒质为例，讨论均匀平面波垂直入射时产生的反射和透射问题。三种媒质从左至右依次平行排列，两个分界平面相互平行。分界平面（1）在 $z=0$ 处，分界平面（2）在 $z=\alpha$ 处。假设媒质 1 中的入射波沿 $+z$ 方向传播，电场只有 x 分量，磁场也就只有 y 分量，如图 3－3 所示。

3.2.1　多层媒质的场量关系和等效波阻抗

当一均匀平面波从媒质 1 中垂直入射时，在分界平面（1）上一部分被反射回媒质 1，

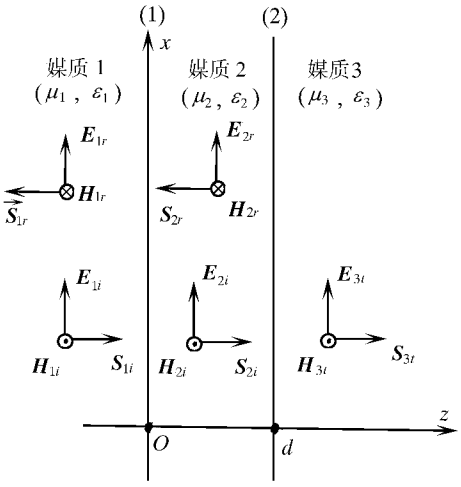


图 3－3　对多层媒质分界平面的垂直入射

另一部分透过分界平面(1)进入媒质 2。透射到媒质 2 中的波继续沿$+z$方向传播，在分界平面(2)上一部分被反射回媒质 2，另一部分透过分界平面(2)进入媒质 3。因而，在媒质 1 中有入射波和反射波，在媒质 2 中也有入射波和反射波，在媒质 3 中只有透射波。

在媒质 1 中：

入射波

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{1i}(z) = \boldsymbol{e}_x E_{1im}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} \\ \boldsymbol{H}_{1i}(z) = \boldsymbol{e}_y \dfrac{1}{\eta_1} E_{1im}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\end{cases}$$

反射波

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{1r}(z) = \boldsymbol{e}_x E_{1rm}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} \\ \boldsymbol{H}_{1r}(z) = -\boldsymbol{e}_y \dfrac{1}{\eta_1} E_{1rm}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\end{cases}$$

合成波

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{e}_x (E_{1im}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + E_{1rm}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}) \\ \boldsymbol{H}_1(z) = \boldsymbol{e}_y \dfrac{1}{\eta_1} (E_{1im}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} - E_{1rm}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z})\end{cases} \tag{3.2.1}$$

在媒质 2 中：

入射波

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{2i}(z) = \boldsymbol{e}_x E_{2im}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 (z-d)} \\ \boldsymbol{H}_{2i}(z) = \boldsymbol{e}_y \dfrac{1}{\eta_2} E_{2im}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 (z-d)}\end{cases}$$

反射波

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{2r}(z) = \boldsymbol{e}_x E_{2rm}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 (z-d)} \\ \boldsymbol{H}_{2r}(z) = -\boldsymbol{e}_y \dfrac{1}{\eta_2} E_{2rm}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 (z-d)}\end{cases}$$

合成波

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_2(z) = \boldsymbol{e}_x(E_{2im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2(z-d)} + E_{2rm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2(z-d)}) \\ \boldsymbol{H}_2(z) = \boldsymbol{e}_y\dfrac{1}{\eta_2}(E_{2im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2(z-d)} - E_{2rm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2(z-d)}) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

在媒质 3 中：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_3(z) = \boldsymbol{E}_t(z) = \boldsymbol{e}_x E_{3tm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_3(z-d)} \\ \boldsymbol{H}_3(z) = \boldsymbol{H}_t(z) = \boldsymbol{e}_y\dfrac{1}{\eta_3}E_{3tm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_3(z-d)} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

利用两种不同媒质分界面上，电场切向分量连续和磁场切向分量也连续的边界条件，可求得两个分界面处的反射系数。

在分界面(2)处($z=d$)，由式(3.2.2)、式(3.2.3)，得

$$\begin{cases} E_{2im} + E_{2rm} = E_{3tm} \\ \dfrac{1}{\eta_2}(E_{2im} - E_{2rm}) = \dfrac{1}{\eta_3}E_{3tm} \end{cases} \tag{3.2.4}$$

据上式可求得分界面(2)处的反射系数为

$$\Gamma_2 = \frac{E_{2rm}}{E_{2im}} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \tag{3.2.5}$$

在分界面(1)处($z=0$)，由式(3.2.1)和式(3.2.2)，得

$$\begin{cases} E_{1im} + E_{1rm} = E_{2im}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d} + E_{2rm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d} = \\ \qquad\qquad E_{2im}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d} + \Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}) \\ \dfrac{1}{\eta_1}(E_{1im} - E_{1rm}) = \dfrac{1}{\eta_2}(E_{2im}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d} - E_{2rm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}) = \\ \qquad\qquad \dfrac{E_{2im}}{\eta_2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d} - \Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}) \end{cases} \tag{3.2.6}$$

将与分界平面平行的任意平面上的总电场和总磁场的比值定义为等效波阻抗(也称总场波阻抗)，表示为

$$\eta_{\mathrm{ef}} = \frac{\text{总 } E(z)}{\text{总 } H(z)} \tag{3.2.7}$$

因此，在 $z=0$ 平面上的等效波阻抗为

$$\eta_{\mathrm{ef}} = \frac{E_{1im} + E_{1rm}}{H_{1im} - H_{1rm}} = \frac{E_{1im} + E_{1rm}}{\dfrac{1}{\eta_1}(E_{1im} - E_{1rm})} \tag{3.2.8}$$

将式(3.2.6)代入上式，得

$$\eta_{\mathrm{ef}} = \eta_2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d} + \Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d} - \Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}} \tag{3.2.9}$$

再将式(3.2.5)代入上式，并应用欧拉公式整理后，得

$$\eta_{\mathrm{ef}} = \eta_2\frac{\eta_3\cos\beta_2 d + \mathrm{j}\eta_2\sin\beta_2 d}{\eta_2\cos\beta_2 d + \mathrm{j}\eta_3\sin\beta_2 d} \tag{3.2.10}$$

又由式(3.2.8)得

$$\eta_{\mathrm{ef}} = \frac{E_{1im}(1+\Gamma_1)}{\dfrac{1}{\eta_1}E_{1im}(1-\Gamma_1)} = \eta_1\frac{1+\Gamma_1}{1-\Gamma_1}$$

故

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_{ef} - \eta_1}{\eta_{ef} + \eta_1} \tag{3.2.11}$$

此式的含义可理解为将媒质 2 和媒质 3 对分界平面(1)处的反射系数的贡献，用一种等效媒质来代替，此等效媒质的本征阻抗满足式(3.2.10)。

通常，入射波的各个参量是已知的。若给定各层媒质的参数 ε_1、μ_1、ε_2、μ_2、ε_3、μ_3 以及媒质 2 的厚度 d，则可先利用式(3.2.10)求得 $z=0$ 处的等效波阻抗 η_{ef}，再利用式(3.2.11)求得 $z=0$ 处的反射系数 Γ_1。又利用式(3.2.5)求得 $z=d$ 处的反射系数 Γ_2。这样，各层媒质中的电场，磁场就是完全确定的了。

对于 n 层媒质的垂直入射，也可采用与此类似的方法来分析。设平面波从第一层媒质中自左向右垂直入射，则可先从最右边的一个分界面$(n-1)$入手，求出该处的反射系数 Γ_{n-1}；再求出它的左邻分界面$(n-2)$处的等效波阻抗和反射系数。如此继续下去，直到得出最左边的第一个分界面处的等效波阻抗和反射系数。这样，就可得到各媒质层中的电场、磁场解。

3.2.2 两个有重要意义的特例

1. 四分之一波长匹配层

如图 3－4 所示，取媒质 2 的厚度 $d=\frac{\lambda_2}{4}$，此时 $\beta_2 d=\frac{2\pi}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{4}=\frac{\pi}{2}$。由式(3.2.10)得分界平面(1)处的等效波阻抗为

$$\eta_{ef} = \eta_2^{\,2}/\eta_3$$

将上式代入式(3.2.11)，得到分界面(1)处的反射系数为

$$\Gamma_1 = \frac{\frac{\eta_2^{\,2}}{\eta_3} - 1}{\frac{\eta_2^{\,2}}{\eta_3} + 1} = \frac{\eta_2^{\,2} - \eta_1\eta_3}{\eta_2^{\,2} + \eta_1\eta_3}$$

通过选择媒质 2 的参数 ε_2、μ_2，使其波阻抗 $\eta_2=\sqrt{\eta_1\eta_3}$，则此时的反射系数 $\Gamma_1=0$，即在分界面(1)处不产生反射。

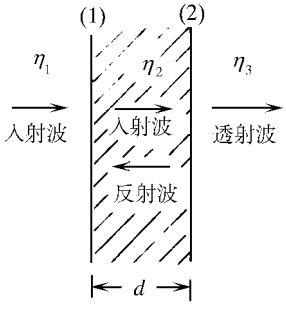


图 3－4 $\frac{\lambda}{4}$匹配层($d=\frac{\lambda_2}{4}$，$\eta_2=\sqrt{\eta_1\eta_3}$)

把厚度 $d=\frac{\lambda_2}{4}$、本征阻抗 $\eta_2=\sqrt{\eta_1\eta_3}$ 的介质层称为“$\frac{\lambda}{4}$匹配层”。这一匹配层夹在两种本征阻抗不同的介质层之间，有阻抗变换作用。通过它将 η_3 变换为分界面(1)的 $\eta_{ef}=\eta_1$，达到阻抗匹配。这种匹配层也用在光学器件上，例如在摄像机镜头上加这样的匹配层就可消除反射。

2. 半波长介质窗

取媒质 2 的厚度 $d=\frac{\lambda_2}{2}$，此时 $\beta_2 d=\frac{2\pi}{\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2}{2}=\pi$。若媒质 1 和媒质 3 是相同的媒质(例如，媒质 2 放在空气中就属这种情况)，即 $\eta_1=\eta_3$，则据式(3.2.10)，得

$$\eta_{ef} = \eta_3 = \eta_1$$

故此时分界面(1)处的反射系数 $\Gamma_1=0$。即对于给定的工作频率,当媒质 2 的厚度 $d=\frac{\lambda_2}{2}$ 时,电磁波投射到分界面(1)时将不产生反射。

另外,将 $\beta_2 d=\pi$ 时 $\Gamma_1=0$ 的结果代入式(3.2.6),得

$$E_{1im} = -E_{2im}(1+\Gamma_2)$$

又据式(3.2.4),得

$$E_{2im}(1+\Gamma_2) = E_{3tm}$$

则得

$$E_{3tm} = -E_{1im}$$

此结果表明电磁波通过半波长介质层时无损失,故称之为"$\frac{\lambda}{2}$介质窗"。雷达天线罩就是根据这一原理设计的,此时的 $\eta_1=\eta_3=\eta_0\approx 377\Omega$。

例 3.7 频率 $f=1\text{GHz}$ 的均匀平面波从空气中垂直入射到 $\varepsilon_r=3.5$,$\mu_r=1$,$\sigma=0$ 的半无限介质平面。今采用"$\frac{\lambda}{4}$匹配层"来消除波的反射,试求:

(1)匹配层介质的相对介电常数;

(2)匹配层的厚度。

解:据题意知 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$,$\mu_1=\mu_0$;$\varepsilon_3=3.5\varepsilon_0$,$\mu_3=\mu_0$。

(1) 匹配层的本征阻抗应满足

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_1\eta_3}$$

式中

$$\eta_1 = \eta_0 = 377\ \Omega$$

$$\eta_3 = \sqrt{\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{3.5\varepsilon_0}} = 201.5\ \Omega$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{2r}\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{2r}}}\times 377$$

故得

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{2r}}}\times 377 = \sqrt{377\times 201.5} = \sqrt{75965.5} = 275.6$$

则得匹配层介质的相对介电常数 $\varepsilon_{2r}=1.87$。

(2) 匹配层的厚度

$$d = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_{2r}}} = \frac{0.3}{4\sqrt{1.87}} = 0.0548\text{m} = 54.8\text{mm}$$

例3.8 一种非导电的铁氧体类吸收材料,以铝板作基片,如图 3－5 所示,频率 $f=100\ \text{MHz}$ 时,该铁氧体材料的参数为 $\mu_r=60(2-\text{j})$,$\varepsilon_r=60(2-\text{j})$,厚度 $d=10\text{mm}$。当频率为 100MHz 的均匀平面波垂直入射到边界面上时,经铝板反射后的反射波相对于入射波衰减了多少分贝?讨论此计算结果的意义。

解:由题给参数知入射波的波长 $\lambda_0=\frac{c}{f}=\frac{3\times 10^8}{100\times 10^6}=3\text{m}$,铁氧体的本征阻抗为

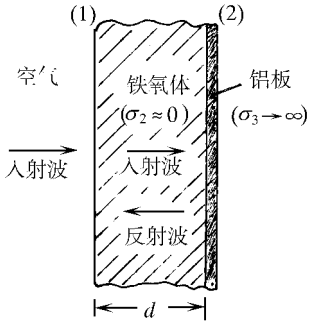


图 3－5　对吸收材料的入射

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{60(2-\mathrm{j})\mu_0}{60(2-\mathrm{j})\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

与空气的本征阻抗相同，故在分界面(1)处不会产生反射。

铁氧体中，平面波的传播常数为

$$\gamma_2 = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_r\varepsilon_r(\mu_0\varepsilon_0)} =$$
$$\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{60(2-\mathrm{j})\times 60(2-\mathrm{j})} =$$
$$\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\times 60(2-\mathrm{j}) = \alpha_2 + \mathrm{j}\beta_2$$

故衰减常数为

$$\alpha_2 = 60\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{60\times 2\pi f}{c} = \frac{60\times 2\pi\times 100\times 10^6}{3\times 10^8}$$
$$= 125.66\ \mathrm{Np/m}$$

则平面波在铁氧体中传播距离 $d=10\mathrm{mm}$ 的衰减为

$$\alpha_2 d = 125.66\times 10\times 10^{-3} = 1.26\mathrm{Np} \approx 11\ \mathrm{dB}$$

平面波在铁氧体中传播到铝板边界(2)产生反射，返回到分界面(1)时同样又衰减 11dB。**故经铝板反射后的反射波相对于入射波的衰减是** 22dB，**用功率表示就是反射波功率约为入射波功率的** 1/160。

本例的计算结果表明，反射虽然没被完全消除，但其衰减量对某些工程应用已达到足够满意的效果。在军用飞机的机身上涂吸收材料以降低被雷达发现的可能(即隐形)，就是利用这一原理。

练　习　题

3.2－1　**简述研究多层媒质中波的反射和透射特性的意义。**

3.2－2　**图** 3－6 **表示平面波对** $n=5$ **层媒质的垂直入射。试根据图中给出的参数，验证在分界面(1)处无反射。**

3.3　均匀平面波对分界面的斜入射

在讨论均匀平面波对分界平面的垂直入射时，波的极化和传播方向如何并不是特别

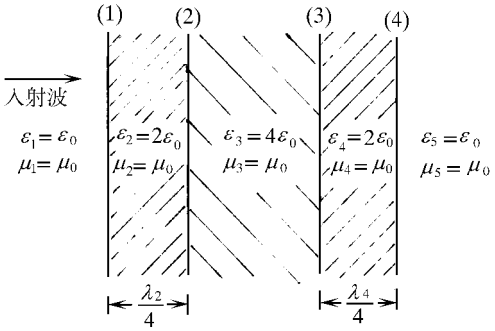


图 3－6　对 5 层媒质的垂直入射

重要的。这是因为沿任意方向传播的均匀平面波总是可以分解为具有相互垂直的电场的两个线极化波，电场、磁场都位于与传播方向垂直的平面内，总是可以设定平面波的传播方向为 z 轴方向，而分界平面的法线方向与之相同。

但当均匀平面波以任意角度入射到平面边界时（称为斜入射），波的极化和传播方向就必须注意了。因为在这种情况下，平面波的传播方向不再与分界平面的法线方向相同，电场、磁场所在的平面也就不与分界平面平行。

先定义一个入射平面：由分界平面的法线 n 和入射波的射线构成的平面，称为入射平面。n 与入射波射线之间的锐角，称为入射角，如图 3－7 所示。

入射波的电场矢量位于与入射线垂直的平面内，但电场矢量与入射平面一般成任意角度。我们可以将其分解与入射平面垂直的分量和与入射平面平行的分量。把电场分量与入射平面垂直的平面波，称为垂直极化波；把电场分量与入射平面平行的平面波，称为平行极化波。因此，可以分别讨论垂直极化波和平行极化波对分界平面的斜入射，再通过叠加的方法就得到一般情况的解答。

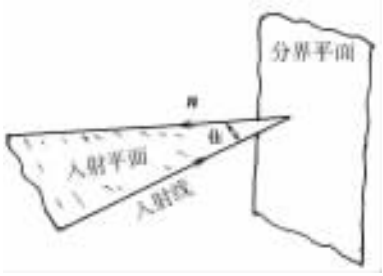


图 3－7　入射平面和入射角

3.3.1　垂直极化波对完纯介质表面的斜入射

两种媒质均匀完纯介质，其参数分别为 $\varepsilon_1,\mu_1,\sigma_1=0$；$\varepsilon_2,\mu_2,\sigma_2=0$。两种介质的分界面为 $z=0$ 平面，z 轴为分界面的法线。入射平面是 xOz 平面（即纸面），如图 3－8 所示。入射波是垂直极化波，即图中所示的 y 方向线极化波。反射波和透射波也是 y 方向线极化波，θ_i 是入射角，θ_r 是反射角，θ_t 是透射角。

设入射波的传播方向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_i$，则入射波的波矢量为 $\boldsymbol{k}_i=\boldsymbol{e}_i k_i=\boldsymbol{e}_i k_1$。应用上一

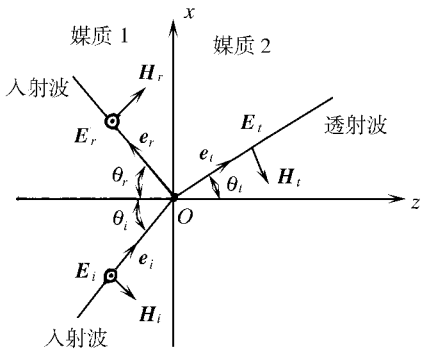


图 3－8　垂直极化波对介质分界平面的斜入射

章已导出的沿任意方向传播的均匀平面波的电场表示式，可写出此处的入射波电场表示式为

$$\boldsymbol{E}_i(r) = \boldsymbol{e}_y E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{r}}$$

式中

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \text{ 是媒质 1 中的波数}$$

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{e}_x \sin\theta_i + \boldsymbol{e}_z \cos\theta_i) \cdot (\boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_z z) = x\sin\theta_i + z\cos\theta_i$$

故入射波电场可写为

$$\boldsymbol{E}_i(x,z) = \boldsymbol{e}_y E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{3.3.1}$$

与之相伴的磁场可由麦克斯韦第二方程 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H}$ 求出，或直接由下式求出：

$$\boldsymbol{H}_i(x,z) = \frac{1}{\eta_1} \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{E}_i(x,z) =$$

$$\frac{1}{\eta_1} E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} [-\boldsymbol{e}_x \cos\theta_i + \boldsymbol{e}_z \sin\theta_i] \tag{3.3.2}$$

设反射波的传播方向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_r$，则反射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_r = \boldsymbol{e}_r k_r = \boldsymbol{e}_r k_1$。分界面上的反射系数为 $\Gamma_\perp$，则反射波的电场表示式为

$$\boldsymbol{E}_r(r) = \boldsymbol{e}_y \Gamma_\perp E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{r}}$$

式中

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{e}_x \sin\theta_r - \boldsymbol{e}_z \cos\theta_r) \cdot (\boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_z z) = x\sin\theta_r - z\cos\theta_r$$

故反射波电场可写为

$$\boldsymbol{E}_r(x,z) = \boldsymbol{e}_y \Gamma_\perp E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{3.3.3}$$

与之相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}_r(x,z) = \frac{1}{\eta_1} \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{E}_r(x,z) =$$

$$\frac{1}{\eta_1} \Gamma_\perp E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} (\boldsymbol{e}_x \cos\theta_r + \boldsymbol{e}_z \sin\theta_r) \tag{3.3.4}$$

同样设透射波的传播方向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_t$，则透射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_t = \boldsymbol{e}_t k_t = \boldsymbol{e}_t k_2$。分界面上的透射系数为 $\tau_\perp$，则透射波的电场表示为

$$\boldsymbol{E}_t(r) = \boldsymbol{e}_y \tau_\perp E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{r}}$$

式中

$k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$ 是媒质 2 中的波数

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{e}_x \sin\theta_t + \boldsymbol{e}_z \cos\theta_t) \cdot (\boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_z z) = x\sin\theta_t + z\cos\theta_t$$

故透射波电场可写为

$$\boldsymbol{E}_t(x,z) = \boldsymbol{e}_y \tau_\perp E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{3.3.5}$$

与之相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}_t(x,z) = \frac{1}{\eta_2}\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{E}_t(x,z) =$$

$$\frac{1}{\eta_2}\tau_\perp E_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}(-\boldsymbol{e}_x\cos\theta_t - \boldsymbol{e}_z\sin\theta_t) \tag{3.3.6}$$

利用介质分界面上，电场的切向分量连续的边界条件，由式(3.3.1)、式(3.3.3)和式(3.3.5)，当 $z=0$ 时，得

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i} + \Gamma_\perp \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_r} = \tau_\perp \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x\sin\theta_t} \tag{3.3.7}$$

此式对分界面上任意的 x 值(包括 $x=0$)都应满足。而对于 $x=0$，上式变为

$$1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp \tag{3.3.8}$$

因此，要保证式(3.3.7)对分界面上任意 x 值都满足，必须

$$k_1\sin\theta_i = k_1\sin\theta_r = k_2\sin\theta_t \tag{3.3.9}$$

上式可写为

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

此式表明，在分界面上，波矢量的切向分量连续，通常称之为相位匹配条件。

据式(3.3.9)中的第一个等式，得

$$\theta_r = \theta_i \tag{3.3.10}$$

表明反射角等于入射角，与光学中的斯耐尔反射定律完全相同。

据式(3.3.9)中的第二个等式，得

$$k_1\sin\theta_i = k_2\sin\theta_t \tag{3.3.11}$$

这是斯耐尔折射定律。

再利用介质分界面，磁场的切向分量连续的边界条件，由式(3.3.2)、式(3.3.4)和式(3.3.6)，当 $z=0$ 时，得

$$-\frac{1}{\eta_1}\cos\theta_i + \frac{\Gamma_\perp}{\eta_1}\cos\theta_r = -\frac{\tau_\perp}{\eta_2}\cos\theta_t$$

即

$$1 - \Gamma_\perp = \frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}\tau_\perp \tag{3.3.12}$$

联立求解式(3.3.8)和(3.3.12)，得

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{3.3.13}$$

$$\tau_\perp = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{3.3.14}$$

以上两式称为垂直极化波的菲涅耳公式。根据这个公式，就可用入射场来表示反射场和透射场，只要给出入射场，反射场和透射场就是确定的了。

对于非铁磁性介质，$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$，故

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

而斯耐尔折射定律，即式(3.3.11)又可写为

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\sin\theta_i=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}\sin\theta_t$$

故得

$$\sin\theta_t=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i\text{，则}$$

$$\cos\theta_t=\sqrt{1-\sin^2\theta_t}=\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i}$$

这样，式(3.3.13)和式(3.3.14)可写为

$$\Gamma_\perp=\frac{\cos\theta_i-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{3.3.15}$$

$$\tau_\perp=\frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{3.3.16}$$

例3.9 在 $\varepsilon_r=4,\mu_r=1$ 的半无限介质中，有一正弦均匀平面波斜入射到与空气相交的分界平面上，如图 3－9 所示。已知入射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_i(r)=\boldsymbol{e}_y 3\times10^{-4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(x+\sqrt{3}z)}\ (\mathrm{V/m})$$

(1) 求入射波的波长、相速、频率和磁场 $\boldsymbol{H}_i(r)$；

(2) 求入射角、反射角和透射角；

(3) 求反射波的电场 $\boldsymbol{E}_r(r)$和磁场 $\boldsymbol{H}_r(r)$；

(4) 求透射波的平均功率密度。

解：(1)由题给的入射波电场表示式知：

$$k_i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{r}=x+\sqrt{3}z$$

故入射波的波矢量 $\boldsymbol{k}_i=\boldsymbol{e}_i k_i=\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_z\sqrt{3}$，可见

$$k_{ix}=1,k_{iz}=\sqrt{3},k_i=\sqrt{k_{ix}^2+k_{iz}^2}=2$$

则入射波的波长为

$$\lambda_i=\frac{2\pi}{k_i}=\frac{2\pi}{2}=3.142\ \mathrm{m}$$

相速为

$$v_{ip}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}=\frac{c}{\sqrt{4}}=1.5\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

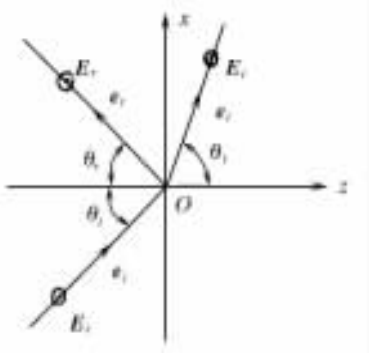


图 3－9　斜入射例题($\varepsilon_1=4\varepsilon_0$，$\mu_1=\mu_0$；$\mu_2=\mu_0$，$\varepsilon_2=\varepsilon_0$)

频率为

$$f=\frac{v_{ip}}{\lambda_i}=\frac{1.5\times10^8}{3.142}=47.75\times10^6\ \mathrm{Hz}$$

磁场为

$$\boldsymbol{H}_i(r)=\frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{E}_i(r)=$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{4}}\times 120\pi}\times\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_z\sqrt{3})\times\boldsymbol{e}_y 3\times10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(x+\sqrt{3}z)}=$$

$$\frac{10^{-4}}{40\pi}(-\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}+\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(x+\sqrt{3}z)}(\mathrm{A/m})$$

(2)**由** $k_{ix}=k_i\sin\theta_i=1$**,得**

$$\sin\theta_t=\frac{1}{2}$$

故 $\theta_i=30^\circ$**,**$\theta_r=\theta_i=30^\circ$

据折射定律 $k_1\sin\theta_i=k_2\sin\theta_t$**,得**

$$\sin\theta_t=\frac{k_1}{k_2}\sin\theta_i=\frac{\omega\sqrt{\mu_0\times4\varepsilon_0}}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\sin30^\circ=1$$

故透射角 $\theta_t=90^\circ$

(3) **据式**(3.3.15)**,得反射系数为**

$$\Gamma_\perp=\frac{\cos30^\circ-\sqrt{\frac{1}{4}-(\sin30^\circ)^2}}{\cos30^\circ+\sqrt{\frac{1}{4}-(\sin30^\circ)^2}}=1$$

故由式(3.3.3)**得反射波的电场为**

$$\boldsymbol{E}_r(r)=\boldsymbol{e}_y 3\times10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(x-\sqrt{3}z)}$$

由式(3.3.4)**得反射波的磁场为**

$$\boldsymbol{H}_r(r)=\frac{10^{-4}}{40\pi}(\boldsymbol{e}_x\sqrt{3}+\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(x-(\sqrt{3}z)}(\mathrm{A/m})$$

(4) $k_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=1$

由式(3.3.16)**得透射系数为**

$$\tau_\perp=\frac{2\cos30^\circ}{\cos30^\circ+\sqrt{\frac{1}{4}-(\sin30^\circ)^2}}=2$$

据式(3.3.5)**和式**(3.3.6)**,得**

$$\boldsymbol{E}_t(r)=\boldsymbol{e}_y 6\times10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}_t(r)=\boldsymbol{e}_z\frac{10^{-4}}{20\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}(\mathrm{A/m})$$

故透射波的平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_t(r)\times\boldsymbol{H}_t^*(r)]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_y 6\times10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}\times\boldsymbol{e}_z\frac{10^{-4}}{20\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}]=$$

$$\boldsymbol{e}_x 4.77\times10^{-10}(\mathrm{W/m^2})$$

此结果表明，在题给条件下的透射波功率是沿分界平面传播的。

3.3.2 平行极化波对完纯介质表面的斜入射

如图 3－10 所示，入射波的电场与入射平面平行，入射波的磁场必然垂直于入射平面。分析方法与垂直极化时完全类似，不同的是这里以入射波磁场为已知量。

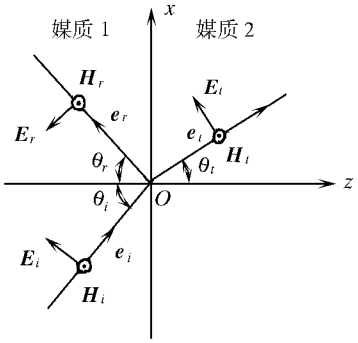


图 3－10 平行极化波对介质分界平面的斜入射

设入射波的磁场振幅为 H_{im}，则入射波磁场的表示式为

$$\boldsymbol{H}_i(r) = \boldsymbol{e}_y H_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}_y H_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \tag{3.3.17}$$

与它相伴的电场由麦克斯韦第二方程 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}$ 求出，或直接由下式求出：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_i(r) &= \eta_1 \boldsymbol{H}_i(r) \times \boldsymbol{e}_i = \\ &\eta_1 H_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \ \boldsymbol{e}_y \times (\boldsymbol{e}_x \sin\theta_i + \boldsymbol{e}_z \cos\theta_i) = \\ &\eta_1 H_{im} (\boldsymbol{e}_x \cos\theta_i - \boldsymbol{e}_z \sin\theta_i) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

设分界面上的反射系数为 $\Gamma_{/\!/}$，透射系数为 $\tau_{/\!/}$，则反射波和透射波的各场量分别为

$$\boldsymbol{E}_r(r) = \Gamma_{/\!/} \ \eta_1 H_{im} (-\boldsymbol{e}_x \cos\theta_r - \boldsymbol{e}_z \sin\theta_r) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{3.3.19}$$

$$\boldsymbol{H}_r(r) = \boldsymbol{e}_y \Gamma_{/\!/} \ H_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \tag{3.3.20}$$

$$\boldsymbol{E}_t(r) = \tau_{/\!/} \ \eta_1 H_{im} (\boldsymbol{e}_x \cos\theta_t - \boldsymbol{e}_z \sin\theta_t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{3.3.21}$$

$$\boldsymbol{H}_t(r) = \boldsymbol{e}_y \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau_{/\!/} H_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \tag{3.3.22}$$

利用分界面上，磁场的切向分量连续的边界条件，由式(3.3.17)、式(3.3.20)和式(3.3.22)，当 $z=0$ 时，得

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i} + \Gamma_{/\!/} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_r} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau_{/\!/} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x\sin\theta_t} \tag{3.3.23}$$

上式对 $x=0$ 也应满足，此时

$$1 + \Gamma_{/\!/} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau_{/\!/} \tag{3.3.24}$$

欲使式(3.3.23)对分界面的任意 x 值都满足，必须

$$k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r = k_2 \sin\theta_t$$

故得

$$\theta_r = \theta_i \tag{3.3.25}$$

$$k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t \tag{3.3.26}$$

这就是斯耐尔反射定律和折射定律。

再利用分界面上，电场的切向分量连续的边界条件，由式(3.3.18)、式(3.3.19)和式(3.3.21)，当 $z=0$ 时，得

$$1-\Gamma_{/\!/} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\tau_{/\!/} \tag{3.3.27}$$

联解式(3.3.24)和式(3.3.27)可得到平行极化波的反射系数和透射系数，即平行极化波的菲涅耳公式

$$\Gamma_{/\!/} = \frac{\eta_1\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \tag{3.3.28}$$

$$\tau_{/\!/} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \tag{3.3.29}$$

对于非铁磁性介质，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，故 $\frac{\eta_1}{\eta_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$。又由斯耐尔折射定律，得

$$\sin^2\theta_t = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i$$

故

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i}$$

因此，式(3.3.28)和式(3.3.29)此时可写为

$$\Gamma_{/\!/} = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{3.3.30}$$

$$\tau_{/\!/} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_i}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}} \tag{3.3.31}$$

前面导出的菲涅耳公式(3.3.13)和式(3.3.14)；(3.3.28)和式(3.3.29)表明了反射波、透射波和入射波的电场强度的振幅及相位关系。不论是垂直极化波，还是平行极化波，透射系数 τ 总是正值，这说明透射波的电场与入射波的电场相位相同。而反射系数 Γ 可为正值，也可为负值。当它为负值时，说明反射波电场与入射波电场相位相反，相当于“损失”了半个波长，故称存在半波损失。但应该注意，垂直极化波的反射系数 $\Gamma_\perp$ 与平行极化波的反射系数 $\Gamma_{/\!/}$ 是不同的，透射系数 $\tau_\perp$ 与 $\tau_{/\!/}$ 也是不同的，它们与极化有关。

3.3.3 全反射和临界角

对于非铁磁性媒质，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，此时折射定律为

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

当 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$，即平面波从稠密媒质 1 入射到稀疏媒质 2 时，$\theta_t>\theta_i$，随着入射角 θ_i 的增大，折

射角 θ_t 也增大。当 θ_i 增大到某一角度 θ_c 时，就出现 $\theta_t=\frac{\pi}{2}$。在这一角度入射时，折射波将贴着分界平面传播，如图 3－11 所示。

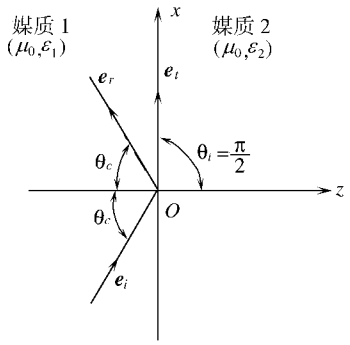


图 3－11　当 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ 时，波以临界角入射

此时的反射系数为

$$\Gamma_{\perp}=\frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_c}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_c}=1$$

$$\Gamma_{/\!/}=\frac{\eta_1\cos\theta_i-\eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i+\eta_2\cos\theta_t}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_c}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_c}=1$$

可见，$\varepsilon_1>\varepsilon_2$，且当 $\theta_i=\theta_c$ 时，媒质 1 中的入射波将被分界面完全反射回到媒质 1 中，这种现象称为全反射。使折射角 $\theta_t=90°$ 的入射角，称为临界角，记为 θ_c。由折射定律可求出临界角

$$\theta_c=\arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) \tag{3.3.32}$$

虽然，只有 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ 时，临界角 θ_c，才有实数解，也才可能产生全反射。

当入射角 θ_i 大于临界角 θ_c 时，又会怎样呢？由折射定律可以看出，当 $\theta_i>\theta_c$ 时

$$\sin\theta_t=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i>1$$

此时

$$\cos\theta_t=\sqrt{1-\sin^2\theta_t}=-\mathrm{j}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i-1}$$

故反射系数为

$$\Gamma_{\perp}=\frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}=\frac{\eta_2\cos\theta_i+\mathrm{j}\eta_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i-1}}{\eta_2\cos\theta_i-\mathrm{j}\eta_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i-1}}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\varphi_{\perp}}$$

式中 $\varphi_{\perp}$ 是垂直极化反射系数的相角

$$\varphi_{\perp}=\arctan\left(\frac{\eta_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i-1}}{\eta_2\cos\theta_i}\right)=\arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\cos\theta_i}\right)$$

而

$$\Gamma_{/\!/}=\frac{\eta_1\cos\theta_i-\eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i+\eta_2\cos\theta_t}=\frac{\eta_1\cos\theta_i+\mathrm{j}\eta_2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i-1}}{\eta_1\cos\theta_i-\mathrm{j}\eta_2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i-1}}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\varphi_{/\!/}}$$

式中 $\varphi_{/\!/}$ 是平行极化反射系数的相角

$$\varphi_{/\!/}=\arctan\left(\frac{\eta_2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i-1}}{\eta_1\cos\theta_i}\right)=\arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i}\right)$$

可见，当 $\theta_i>\theta_c$ 时，皆有 $|\Gamma_\perp|=|\Gamma_{/\!/}|=1$，但 $\varphi_\perp\neq\varphi_{/\!/}$，表明此时也出现全反射现象。

从上面的分析得到的结论是：当均匀平面波从稠密媒质 1 入射到稀疏媒质 2，即 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ 时，不管是垂直极化波，还是平行极化波，只要 $\theta_i\geqslant\theta_c$，都会产生全反射。

下面再进一步讨论 $\theta_i>\theta_c$ 时透射波的情况。由折射定律得 $\theta_i>\theta_c$ 时，$\sin\theta_t=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\times\sin\theta_i>1$，故折射角 θ_t 没有实数解。若折射角 θ_t 取复数值，则 $\sin\theta_t=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i$ 仍然成立设

$$\sin\theta_t=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i=N$$

得

$$\cos\theta_t=\sqrt{1-\sin^2\theta_t}=-\mathrm{j}\sqrt{N^2-1}$$

则垂直极化波入射到分界平面时产生的透射波电场为

$$\boldsymbol{E}_x(x,z)=\boldsymbol{e}_y\tau_\perp E_{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t+z\cos\theta_t)}=$$

$$\boldsymbol{e}_y\mid\tau_\perp\mid\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi_\perp}E_{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2Nx}\mathrm{e}^{-k_2(\sqrt{N^2-1})z}$$

此结果说明：当 $\theta_i>\theta_c$ 时，媒质 2 中仍然有透射波存在，但其传播方向是沿分界面上的 $+x$ 方向，且振幅沿分界面法线方向按指数规律衰减。这种被分界平面紧紧束缚着的波，称为表面波。显然它是非均匀平面波，其等振幅面是 $z=$常数的平面，等相位面则是 $x=$常数的平面。

电磁波在介质与空气的分界面上的全反射现象，是实现表面波传输的物理基础，有重要的工程应用价值。例如，在介质线内的电磁波发生全反射时，就可使电磁波沿介质线传播，这就是介质波导，光纤也是一种介质波导。

例 3.10 图3－12所示为光纤的剖面示意图。图中，光纤的芯线材料的相对折射率 $n_1=\sqrt{\varepsilon_{r1}}$，包层材料的相对折射率 $n_2=\sqrt{\varepsilon_{r2}}$。现要求光波从空气（相对折射率 $n_0=1$）中进入光纤相对后，能在芯线和包层的分界面上发生全反射，从而使光波像图中所示那样被约束在芯线内传至另一端。试确定最大的入射角 θ_i。

解：在芯线和包层的分界面上产生全反射的条件为

$$\theta_1\geqslant\theta_c=\arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)=\arcsin\left(\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\right)，即$$

$$\sin\theta_1\geqslant\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}$$

由图中的几何关系知 $\theta_1=90^\circ-\theta_t$

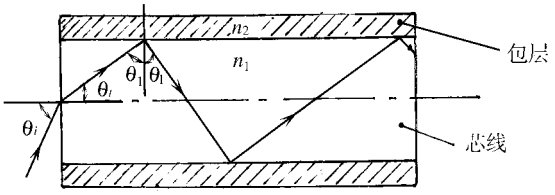


图 3－12　光纤内的全反射

故 $\sin\theta_1=\sin(90^\circ-\theta_t)=\cos\theta_t$ **则得**

$$\cos\theta_t \geqslant \sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

据式(3.3.11)**所示的折射定律，有** $n_0\sin\theta_i=n_1\sin\theta_t$，**故**

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{n_1}\right)^2\sin^2\theta_i} \geqslant \frac{n_2}{n_1}$$，**即**

$$1-\left(\frac{1}{n_1}\right)^2\sin^2\theta_i \geqslant \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$，**得**

$$\sin^2\theta_i \leqslant (n_1{}^2-n_2{}^2)$$

故

$$\theta_i \leqslant \arcsin(n_1{}^2-n_2{}^2)^{1/2}$$

若取 $n_1=1.5$，$n_2=1.485$，**则得**

$$\theta_i \leqslant \arcsin(1.5^2-1.485^2)^{1/2} = 12.22^\circ$$

此结果表明，在上述条件下，只要光波的入射角 $\theta_i\leqslant 12.22^\circ$，**就可确保光波被约束在光纤内传播。** $\sin\theta_i=\mathrm{NA}$ **称为光纤数值孔径，是光纤的重要参数之一。**

例 3.11　一圆极化波以入射角 $\theta_i=60^\circ$ **从媒质 1(参数为** $\mu_1=\mu_0$，$\varepsilon_1=4\varepsilon_0$)**斜入射至空气，试求临界角，并指出此时的反射波是什么极化？**

解：临界角为

$$\theta_c = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\varepsilon_0}}\right) = 30^\circ$$

可见以 $\theta_i=60^\circ$ **入射时将产生全反射。此时，圆极化入射波中的垂直极化分量和平行极化分量都产生全反射，反射系数的模为 1，即** $|\Gamma_\perp|=|\Gamma_{/\!/}|=1$。**反射系数的幅角分别为**

$$\varphi_\perp = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\cos\theta_i}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2 60^\circ-\frac{1}{4}}}{\cos 60^\circ}\right) = 54.74^\circ$$

和

$$\varphi_{/\!/} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2 60^\circ-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}\cos 60^\circ}\right) = 75.96^\circ$$

可见，$\varphi_\perp\neq\varphi_{/\!/}$，**故反射波变成椭圆极化。**

3.3.4　全透射和布儒斯特角

若平面电磁波从媒质 1 入射到媒质 2 时，在媒质分界平面上不产生反射，电磁功率将

全部透射到媒质 2 中，这种现象称为全透射。

设媒质 1 和 2 均为非铁磁性媒质（$\mu_1=\mu_2=\mu_0$），则平行极化波对分界面斜入射时的反射系数如式(3.3.30)所示，即

$$\Gamma_{/\!/}=\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}$$

欲使 $\Gamma_{/\!/}=0$，必须 $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}$，即

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2\cos^2\theta_i=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i \tag{3.3.33}$$

或

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2(1-\sin^2\theta_i)=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i$$

故

$$\theta_i=\theta_B=\arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\right) \tag{3.3.34}$$

将 $\Gamma_{/\!/}=0$ 时的入射角记为 θ_B，称为布儒斯特角。当平行极化波以此特定的角度入射到非铁磁性媒质分界面时，反射为零，全部电磁功率透入媒质 2 中。

应用三角函数的基本关系 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$，$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$，可由式(3.3.33)导出

$$\theta_i=\theta_B=\arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) \tag{3.3.35}$$

式(3.3.34)和式(3.3.35)是完全等效的。

对于垂直极化波，从式(3.3.15)看出，除非 $\varepsilon_2=\varepsilon_1$ 否则反射系数 $\Gamma_\perp$ 不可能为零。也就是说，垂直极化波入射时不存在布儒斯特角。因此，对任意极化（线极化，圆极化或椭圆极化波）的均匀平面波，当它以布儒斯特角 θ_B 入射到非铁磁性媒质分界面时，它的平行极化分量产生全透射，反射波中就只剩下垂直极化分量了。好像起到一个极化滤波的作用，因此，又将 θ_B 称为极化角。

例 3.12 一圆极化在空气中以布儒斯特角入射到参数为 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=5$，$\sigma=0$ 的介质表面上。(1)求反射系数，并说明反射波的极化；(2)求透射系数，并说明透射波的极化。

解：一圆极化波可以分解为振幅相等的垂直极化波和平行极化波的叠加，因而其入射问题可作为垂直极化入射和平行极化入射来分别处理。

布儒斯特角 θ_B 为

$$\theta_B=\arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)=\arctan\left(\sqrt{\frac{5\varepsilon_0}{\varepsilon_0}}\right)=65.91^\circ$$

(1)求反射系数：

对垂直极化分量，据公式(3.3.15)，得

$$\Gamma_\perp=\frac{\cos65.91^\circ-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2 65.91^\circ}}{\cos65.91^\circ+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2 65.91^\circ}}=-0.667$$

对平行极化分量，$\Gamma_{/\!/}=0$

此结果表明，当圆极化波以 $\theta_i=\theta_B$ 入射时，它的平行极化分量无反射，故反射波中只有垂直极化分量，是线极化波。

(2) 求透射系数：

对垂直极化分量，据公式(3.3.16)，得

$$\tau_{\perp}=\frac{2\cos 65.91^{\circ}}{\cos 65.91^{\circ}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2 65.91^{\circ}}}=0.333$$

对平行极化分量，据公式(3.3.31)，得

$$\tau_{/\!/}=\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos 65.91^{\circ}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos 65.91^{\circ}+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2 65.91^{\circ}}}=0.447$$

此结果表明，当圆极化波以 $\theta_i=\theta_B$ 入射时，其平行极化分量和垂直极化分量都要产生透射。因 $\tau_{\perp}\neq\tau_{/\!/}$，故透射波变成椭圆极化波。

3.3.5 垂直极化波对完纯导体表面的斜入射

如图 3－13 所示，媒质 1 是完纯介质，其参数为 $\mu_1,\varepsilon_1,\sigma_1=0$；媒质 2 为完纯导体，其参数为 $\mu_2,\varepsilon_2,\sigma_2\to\infty$。垂直极化的均匀平面波从媒质 1 中以入射角 θ_i 斜入射到两种媒质的分界平面上。

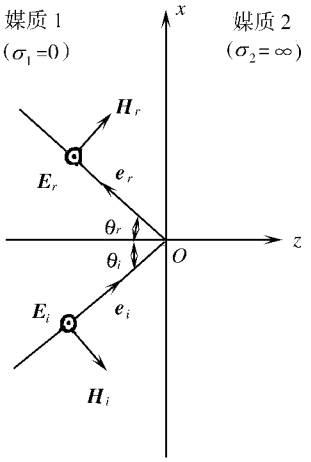


图 3－13 垂直极化波对完纯导体的斜入射

因完纯导体的电导率 $\sigma_2\to\infty$，故其本征阻抗 $\eta_2\to 0$。则由式(3.3.13)和式(3.3.14)得 $\Gamma_{\perp}=-1,\tau_{\perp}=0$。即产生全反射。媒质 2 中无透射场。此时，媒质 1 中的电场为

$$\boldsymbol{E}_i(x,z)=\boldsymbol{e}_y E_{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}$$

$$\boldsymbol{E}_r(x,z)=-\boldsymbol{e}_y E_{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}$$

故合成波的总电场为

$$\boldsymbol{E}_1(x,z)=\boldsymbol{E}_i(x,z)+\boldsymbol{E}_r(x,z)=$$

$$\boldsymbol{e}_y E_{im}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z\cos\theta_i}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 z\cos\theta_i})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i}=$$
$$-\boldsymbol{e}_y \mathrm{j}2E_{im}\sin(k_1 z\cos\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i} \tag{3.3.36}$$

媒质 1 中的磁场为

$$\boldsymbol{H}_i(x,z)=\frac{1}{\eta_1}E_{im}(-\boldsymbol{e}_x\cos\theta_i+\boldsymbol{e}_z\sin\theta_i)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}$$
$$\boldsymbol{H}_r(x,z)=-\frac{E_{im}}{\eta_1}(\boldsymbol{e}_x\cos\theta_i+\boldsymbol{e}_z\sin\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}$$

故合成波的总磁场为

$$\boldsymbol{H}_1(x,z)=\boldsymbol{H}_i(x,z)+\boldsymbol{H}_r(x,z)=$$
$$-\boldsymbol{e}_x\frac{E_{im}}{\eta_1}\cos\theta_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)})$$
$$+\boldsymbol{e}_z\frac{E_{im}}{\eta_1}\sin\theta_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)})$$

即媒质 1 中的磁场有两个分量

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{1x}(x,z)&=-\frac{2E_{im}}{\eta_1}\cos\theta_i\cdot\cos(k_1 z\cos\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i}\\ \text{和}\qquad\\ \boldsymbol{H}_{1z}(x,z)&=\frac{\mathrm{j}2E_{im}}{\eta_1}\sin\theta_i\cdot\sin(k_1 z\cos\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i}\end{aligned}\right\} \tag{3.3.37}$$

从式(3.3.36)和式(3.3.37)可以看出，垂直极化波斜入射到完纯导体平面边界时，有如下特性：

(1) 在垂直于导体边界的方向上即 z 方向，合成波呈驻波分布，此方向上传播的平均功率为零。

(2) 因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i}$ 表明合成波沿 $+x$ 方向传播，此方向上的相位常数为 $\beta=k_{1x}=k_1\sin\theta_i$，故相速为

$$v_{px}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{\omega}{k_1\sin\theta_i}=\frac{v_{p1}}{\sin\theta_i}>v_{p1}$$

在传播方向上没有电场分量，但有磁场分量；称这种波为电波(TE 波)。

(3) 波的等振幅面是 $z=$常数的平面，等相位面是 $x=$常数的平面，故合成波是非均匀平面波。

(4) 由总电场表示式(3.3.36)可以看出，当 $\sin(k_1 z\cos\theta_i)=0$ 时，无论 x 为何值，$\boldsymbol{E}_1$ 总是零值。由 $\sin(k_1 z\cos\theta_i)=0$，得

$$k_1 z\cos\theta_i=\frac{2\pi}{\lambda_1}z\cos\theta_i=-n\pi,n=1,2,3,\cdots$$

故在 $z=-\dfrac{n\lambda_1}{2\cos\theta_i}$ 处装上一块与边界平行的导体板，原先的场分布并不会改变。这样，电场就在 $z=0$ 平面和 $z=-\dfrac{n\lambda_1}{2\cos\theta_i}$ 平面之间来回反射，形成了沿 $+x$ 方向传播的波。这就是平行板波导，此时传播的是 TE 波。

例 3.13 有一正弦均匀平面波从空气中入射到位于 $z=0$ 处的完纯导体平面上，已知其电场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}_i(x,z) = \boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}\ (\mathrm{V/m})$$

(1)求平面波的频率和波长；

(2) 写出入射波的电场和磁场的瞬时值表示式；

(3) 求入射角；

(4) 求反射波的电场和磁场；

(5) 求空气中的平均功率密度。

解：(1)这是垂直极化波对完纯导体斜入射的情况，利用图 3－13，据已知的入射波电场表示式，知

$$k_1\sin\theta_i = 6 \quad , \quad k_1\cos\theta_i = 8$$

故 $k_1 = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ 而 $k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，则频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k_1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{10}{2\pi}\times 3\times 10^8 = 4.78\times 10^8\ \mathrm{Hz}$$

波长为

$$\lambda_1 = \frac{v_\mathrm{p}}{f} = \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{4.78\times 10^8} = 0.63\ \mathrm{m}$$

(2) 入射波的磁场为

$$\boldsymbol{H}_i(x,z) = \frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{E}_i(x,z)$$

式中的 $\boldsymbol{e}_i$ 是入射波的传播方向单位矢量，有

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1} = \frac{\boldsymbol{e}_x 6 + \boldsymbol{e}_z 8}{10}$$

故

$$\boldsymbol{H}_i(x,z) = \frac{1}{120\pi}(\boldsymbol{e}_x 6 + \boldsymbol{e}_z 8)\ \frac{1}{10}\times \boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)} =$$

$$\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 8 + \boldsymbol{e}_z 6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}$$

则入射波的电场、磁场瞬时值表示式为

$$\boldsymbol{E}_i(x,z,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_i(x,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] =$$

$$\boldsymbol{e}_y 10\cos(3\times 10^9 t - 6x - 8z)\ (\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}_i(x,z,t) = \mathrm{R_e}[\boldsymbol{H}_i(x,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] =$$

$$\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 8 + \boldsymbol{e}_z 6)\cos(3\times 10^9 t - 6x - 8z)\ (\mathrm{A/m})$$

(3) 由 $k_i\sin\theta_i = 6$，得入射角为

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{6}{k_1}\right) = \arcsin\left(\frac{6}{10}\right) = 38.87^\circ$$

(4) 在完纯导体边界上，反射系数 $\Gamma_\perp = -1$，故反射波的电场和磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_r(x,z) = -\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x-8z)}\ (\mathrm{V/m})$$

和

$$\boldsymbol{H}_r(x,z) = \frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{E}_r(x,z) =$$

$$\frac{1}{120\pi}(\boldsymbol{e}_x 6-\boldsymbol{e}_z 8)\ \frac{1}{10}\times(-\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x-8z)})=$$

$$\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 8-\boldsymbol{e}_z 6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x-8z)}(\mathrm{A/m})$$

(5) **空气中有入射波和反射波,故平均功率密度为**

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}_1(x,z)\times\boldsymbol{H}_1^*(x,z)]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}[(\boldsymbol{E}_i(x,z)+\boldsymbol{E}_r(x,z))\times(\boldsymbol{H}_i^*(x,z)+\boldsymbol{H}_r^*(x,z))]$$

式中

$$\boldsymbol{E}_1(x,z)=\boldsymbol{E}_i(x,z)+\boldsymbol{E}_r(x,z)=\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}6x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}8z}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}8z})=$$

$$-\boldsymbol{e}_y \mathrm{j}20\sin 8z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}6x}$$

$$\boldsymbol{H}_1^*(x,z)=\boldsymbol{H}_i^*(x,z)+\boldsymbol{H}^*(x,z)=$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{8}{120\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}6x}(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}8z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}8z})+\boldsymbol{e}_z\frac{6}{377}\mathrm{e}^{\mathrm{j}6x}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}8z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}8z})=$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{8}{120\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}6x}(-2\cos 8z)+\boldsymbol{e}_z\frac{6}{120\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}6x}(\mathrm{j}2\sin 8z)$$

故

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_x 20\sin 8z\times\frac{6}{377}\times 2\sin 8z)=$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{1}{\pi}\sin^2 8z\quad(\mathrm{W/m^2})$$

可见,合成波的电磁功率是沿$+x$方向传播的。

3.3.6 平行极化波对完纯导体表面的斜入射

分析方法与垂直极化的情况一样。如图 3－14 **所示,因** $\sigma_2\to\infty$**,故** $\eta_2\to 0$ **则由式**(3.3.28)**和式**(3.3.29)**,得** $\Gamma_{/\!/}=1,\tau_{/\!/}=0$**。即产生全反射,媒质** 2 **中无透射场。**

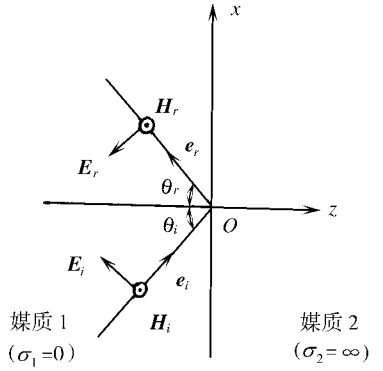


图 3－14 **平行极化波对完纯导体的斜入射**

入射波的传播方向单位矢量 $\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_x\sin\theta_i+\boldsymbol{e}_z\cos\theta_i$ **故入射波的电场、磁场可写为**

$$\boldsymbol{E}_i(x,z)=(\boldsymbol{e}_x\cos\theta_i-\boldsymbol{e}_z\sin\theta_i)\eta_1 H_{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}$$

和

$$\boldsymbol{H}_i(x,z) = \boldsymbol{e}_y H_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

反射波的传播方向单位矢量 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x \sin\theta_r - \boldsymbol{e}_z \cos\theta_r$，故反射波的电场、磁场可写为

$$\boldsymbol{E}_r(x,z) = (-\boldsymbol{e}_x \cos\theta_r - \boldsymbol{e}_z \sin\theta_r)\eta_1 H_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

和

$$\boldsymbol{H}_r(x,z) = \boldsymbol{e}_y H_{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

考虑到 $\theta_r = \theta_i$，媒质 1 中的合成波的总电场和总磁场分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1(x,z) &= \boldsymbol{E}_i(x,z) + \boldsymbol{E}_r(x,z) = \\ &2\eta_1 H_{im}[-\boldsymbol{e}_x \mathrm{j}\cos\theta_i \cdot \sin(k_1 z\cos\theta_i) - \boldsymbol{e}_z \sin\theta_i \cdot \\ &\cos(k_1 z\cos\theta_i)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i} \qquad (3.3.38)\end{aligned}$$

和

$$\boldsymbol{H}_1(x,z) = \boldsymbol{H}_i(x,z) + \boldsymbol{H}_r(x,z) = \boldsymbol{e}_y 2H_{im}\cos(k_1 z\cos\theta_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i} \qquad (3.3.39)$$

从式(3.3.38)和式(3.3.39)可以看出，平行极化波斜入射到完纯导体平面边界时，有如下特性：

(1) 在垂直于导体边界的方向上(即 z 方向)，合成波呈驻波分布，此方向上的平均功率为零。

(2) 因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_i}$ 表明合成波沿 $+x$ 方向传播，相速为 $v_{px} = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{\omega}{k_1\sin\theta_i} = \dfrac{v_{p1}}{\sin\theta_i} > v_{p1}$。在传播方向上没有磁场分量，但有电场分量，称这种波为横磁波(TM 波)。

(3) 合成波是非均匀平面波。

(4) 若在 $z = -\dfrac{n\lambda_1}{2\cos\theta_i}$ 处安装一块与边界平行的导体板，原先的场分布并不会改变。这样，$z=0$ 平面与 $z = -\dfrac{n\lambda_1}{2\cos\theta_i}$ 构成了另一种平行板波导，其中传播的是 TM 波。

例 3.14 频率 $f = 100\mathrm{MHz}$ 的平行极化正弦均匀平面波，在空气中以 $\theta_i = 60°$ 入射角入射到 $z=0$ 处的完纯导体表面。设入射波磁场的振幅为 $0.1\mathrm{A/m}$，方向为 y 方向。

(1) 写出入射波、反射波的电场、磁场表示式；

(2) 求完全导体表面上感应面电流密度；

(3) 求空气中的平均功率密度。

解：此时 $\Gamma_{/\!/} = 1$，$\tau_{/\!/} = 0$，只在空气中存在入射波和反射波。空气的本征阻抗 $\eta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$，而

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 100 \times 10^6 = 2\pi \times 10^8 (\mathrm{rad/s})$$

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2\pi \times 10^8 \times \frac{1}{3\times 10^8} = \frac{2\pi}{3}\ (\mathrm{rad/m})$$

(1) 入射波的电场、磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_i(x,z) = (\boldsymbol{e}_x \cos 60° - \boldsymbol{e}_z \sin 60°)377 \times 0.1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}(x\sin 60° + z\cos 60°)} =$$

$$(\boldsymbol{e}_x 0.5 - \boldsymbol{e}_z 0.866)37.7\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}(0.866x + 0.5z)}$$

和

$$\boldsymbol{H}_i(x,z)=\boldsymbol{e}_y 0.1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}(0.866x+0.5z)}$$

反射波的电场、磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_r(x,z)=(-\boldsymbol{e}_x\cos 60^\circ-\boldsymbol{e}_z\sin 60^\circ)377\times 0.1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}(x\sin 60^\circ-z\cos 60^\circ)}=$$

$$(-\boldsymbol{e}_x 0.5-\boldsymbol{e}_z 0.866)37.7\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}(0.866x-0.5z)}$$

和

$$\boldsymbol{H}_r(x,z)=\boldsymbol{e}_y 0.1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}(0.866x-0.5z)}$$

(2) **空气中,合成波的总电场和总磁场分别为**

$$\boldsymbol{E}_1(x,z)=\boldsymbol{E}_i(x,z)+\boldsymbol{E}_r(x,z)=$$

$$2\times 377\times 0.1\left[-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}\cos 60^\circ\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\times 0.5z\right)-\right.$$

$$\left.\boldsymbol{e}_z\sin 60^\circ\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\times 0.5z\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\times 0.866x}=$$

$$75.4\left[-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}0.5\sin\left(\frac{\pi}{3}z\right)-\boldsymbol{e}_z 0.866\cos\left(\frac{\pi}{3}z\right)\right]\times$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\times 0.866x}\quad(\mathrm{V/m})$$

和

$$\boldsymbol{H}_1(x,z)=\boldsymbol{H}_i(x,z)+\boldsymbol{H}_r(x,z)=$$

$$\boldsymbol{e}_y 2\times 0.1\cos\left(\frac{2\pi}{3}z\times\cos 60^\circ\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}x\sin 60^\circ}=$$

$$\boldsymbol{e}_y 0.2\cos\left(\frac{\pi}{3}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\times 0.866x}\quad(\mathrm{A/m})$$

故完纯导体表面上的面电流密度为

$$\boldsymbol{J}_S(x,z)=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1(x,z)\big|_{z=0}=$$

$$-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y 0.2\cos\left(\frac{\pi}{3}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\times 0.866x}\big|_{z=0}=$$

$$\boldsymbol{e}_x 0.2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\times 0.866x}\quad(\mathrm{A/m})$$

(3) **平均功率密度为**

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{R_e}\left[\boldsymbol{E}_1(x,z)\times\boldsymbol{H}_1^{\,*}(x,z)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{R_e}\left[75.4\left(-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}0.5\sin\frac{\pi}{3}z-\boldsymbol{e}_z 0.866\cos\frac{\pi}{3}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\times 0.866x}\right.$$

$$\left.\times\boldsymbol{e}_y 0.2\cos\frac{\pi}{3}z\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\times 0.866x}\right]=$$

$$\boldsymbol{e}_x 6.53\cos^2\left(\frac{\pi}{3}z\right)\quad(\mathrm{W/m^2})$$

可见,电磁功率是沿 x 方向流动的。

练　习　题

3.3－1　**例题 3.9 中,临界角 $\theta_c=$?计算入射波和反射波的平均功率密度,并验证满**

足能量守恒。

3.3－2　在“平行极化波对完纯介质表面的斜入射”的分析中，若用反射波电场的切向分量与入射波电场的切向分量的比值定义反射系数 $\Gamma'_{/\!/}$；用透射波电场的切向分量与入射波电场的切向分量的比值定义透射系数 $\tau'_{/\!/}$。试推导出 $\Gamma'_{/\!/}$ 和 $\tau'_{/\!/}$ 的表示式，并与式(3.3.28)和式(3.3.29)比较。

3.3－3　媒质 1(参数为 μ_1，ε_1；$\sigma_1=0$)和媒质 2(参数为 μ_2，ε_2；$\sigma_2=0$)都是非铁磁性媒质($\mu_1=\mu_2=\mu_0$)，均匀平面波从媒质 1 中斜入射到媒质分界面上。试判断在什么条件下存在临界角 θ_c？

(1) $\varepsilon_1>\varepsilon_2$；(2) $\varepsilon_1<\varepsilon_2$；(3)$\varepsilon_1>\varepsilon_2$ 或 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 皆可。

3.3－4　什么叫布儒斯特角？试判断在什么条件下在媒质 1(参数为 μ_0，ε_1；$\sigma_1=0$)和媒质 2(参数为 μ_0，ε_2；$\sigma_2=0$)的分界面上存在布儒斯特角？

(1) 入射波为平行极化波；

(2) 入射波为垂直极化波；

(3) 对入射波的极化无要求，但需 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$。

3.3－5　对于平行极化波，在两种非铁磁性媒质的分界面上，临界角 θ_c 和布儒斯特角 θ_B 之间有什么关系？

习　题

3－1　沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波的电场为

$$\boldsymbol{E}_i(z,t)=\boldsymbol{e}_x 100\sin(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_y 200\cos(\omega t-\beta z)\quad(\mathrm{V/m})$$

(1) 根据麦克斯韦方程求出与 $\boldsymbol{E}_i(z,t)$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}_i(z,t)$；

(2) 该均匀平面波垂直入射到 $z=0$ 处的完纯导体表面，求 $z<0$ 区域中合成波的总电场 $\boldsymbol{E}_{总}$ 和总磁场 $\boldsymbol{H}_{总}$。

(3) 求完纯导体表面上感生的面电流密度。

3－2　有一频率 $f=100\mathrm{MHz}$、y 方向极化的正弦均匀平面波，从空气中垂直入射到 $x=0$ 处的完纯导体平面上，设 $x=0$ 处的电场振幅为 $6\mathrm{V/m}$。

(1) 确定距导体平面最近的合成波的总电场为零的位置；

(2) 确定距导体平面最近的合成波的总磁场为零的位置。

3－3　频率为 16GHz 的正弦均匀平面波，在聚苯乙烯中沿 $+z$ 方向传播，在 $z=0.82\mathrm{cm}$ 处，投射到完纯导体表面上。已知聚苯乙烯的相对介电常数 $\varepsilon_r=2.55$，求：

(1) 合成波的总电场为零的位置；

(2) 聚苯乙烯中，$E_{\max}/H_{\max}=$？

3－4　媒质 1 的参数为 $\varepsilon_1=4\varepsilon_0$，$\mu_1=\mu_0$，$\sigma_1=0$；媒质 2 的参数为 $\varepsilon_2=10\varepsilon_0$，$\mu_2=4\mu_0$，$\sigma_2=0$。媒质分界面 $z=0$ 处的电场振幅为 $2.4\mathrm{V/m}$。角频率 $\omega=5\times10^8\,\mathrm{rad/s}$ 的正弦均匀平面波，从媒质 1 中垂直入射到 $z=0$ 的分界面上，求：

(1) 媒质 1 和媒质 2 中的相位常数；

(2) 反射系数；

(3) 媒质 1 中的合成波的总电场；

(4) 媒质 2 中的透射波电场。

3－5　角频率 $\omega=300\times10^6\,\mathrm{rad/s}$ 的正弦均匀平面波，在 $\varepsilon_1=9\varepsilon_0$ 的介质中沿 $+z$ 方向传播，在 $z=0$ 处垂直入射到 $\varepsilon_2=4\varepsilon_0$ 的另一种介质。已知入射波的电场振幅为 0.1V/m，求：

(1) 反射系数；

(2) 透射系数；

(3) 入射波、反射波和透射波的平均功率密度，并验证满足能量守恒。

3－6　正弦均匀平面波从本征阻抗为 η_1 的媒质 1 垂直入射到本征阻抗为 η_2 的媒质 2，试证明：两种媒质中的平均功率密度相等。

3－7　试证明：均匀平面波垂直入射到两种无损耗媒质的分界平面时，若反射系数和透射系数的大小相等，则驻波系数为 3。

3－8　电场为 $\boldsymbol{E}_i(z,t)=\boldsymbol{e}_x10\cos(3\pi\times10^9t-10\pi z)$　(V/m) 的均匀平面波，从空气 ($z<0$ 区域) 中垂直入射到 $z=0$ 的平面边界上。$z>0$ 区域的参数为 $\mu_2=\mu_0$，$\varepsilon_2=4\varepsilon_0$，$\sigma_2=0$，试求 $z>0$ 区域中的电场和磁场。

3－9　媒质 1 为空气 ($\mu_1=\mu_0$，$\varepsilon_1=\varepsilon_0$，$\sigma_1=0$)，媒质 2 为有损耗媒质 ($\mu_2=5\mu\mathrm{H/m}$，$\varepsilon_2=20\mathrm{pF/m}$，$\sigma_2=0.004\mathrm{S/m}$)，分界面为 $z=0$ 的平面，电场为 $\boldsymbol{E}_i(z,t)=\boldsymbol{e}_x100\mathrm{e}^{-d_1z}\times\cos(10^8t-\beta_1z)$ (V/m) 均匀平面波垂直入射到分界面上，求：

(1) 衰减常数 α_1 和相位常数 β_1；

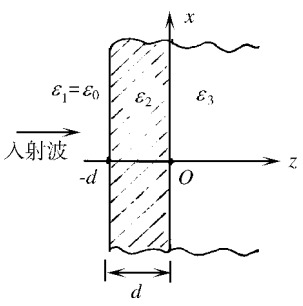
(2) 反射系数和反射波的电场；

(3) 衰减常数 α_2 和相位常数 β_2；

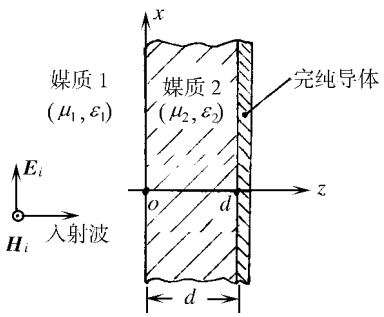
(4) 透射波的电场。

3－10　频率 $f=5\mathrm{GHz}$ 的均匀平面波，从媒质 1 中垂直入射到媒质 2，两种媒质的分界面为 $z=0$ 的平面。已知媒质 1 的参数为 $\varepsilon_1=4\varepsilon_0$，$\mu_1=\mu_0$，$\sigma_1=0$；媒质 2 的参数为 $\varepsilon_2=2\varepsilon_0$，$\mu_2=50\mu_0$，$\sigma_2=20\mathrm{S/m}$。设入射波的磁场为 $\boldsymbol{H}_i(z,t)=\boldsymbol{e}_y\cos(\omega t-\beta_1z)$ (A/m)，求进入媒质 2 的平均功率密度。

3－11　如题 3－11 图所示，在 $z>0$ 区域，媒质的介电常数为 $\varepsilon_3=\varepsilon_{3r}\varepsilon_0$，在此媒质的表面放置厚度为 d，介电常数为 $\varepsilon_2=\varepsilon_{2r}\varepsilon_0$ 的介质层。对于由左边垂直投射过来的均匀平面波，试证明：当 $\varepsilon_{2r}=\sqrt{\varepsilon_{3r}}$ 且 $d=\dfrac{d}{4\sqrt{\varepsilon_{2r}}}$ 时，在 $z=-d$ 的界面上不产生反射。



题 3－11 图



题 3－12 图

3－12　电场为 $\boldsymbol{E}_i(z,t)=\boldsymbol{e}_x E_{im}\cos(\omega t-\beta_1 z)$ 的均匀平面波，从媒质 1（参数为 μ_1,ε_1）中垂直入射到一块以完纯导体板为基片、厚度为 d 的无损耗介质（参数为 μ_2,ε_2）板上，如题 3－12 图所示。

（1）求媒质 1 中的反射波 $\boldsymbol{E}_r(z,t)$；

（2）求媒质 1 中，合成波的总电场 $\boldsymbol{E}_1(z,t)$；

（3）求媒质 2 中，合成波的总电场 $\boldsymbol{E}_2(z,t)$；

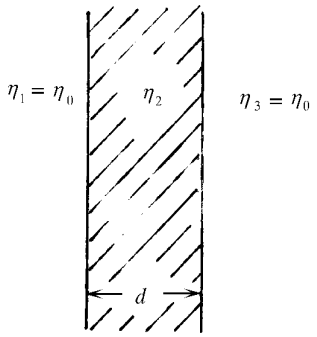
（4）求媒质 1 和媒质 2 中的平均功率密度；

（5）欲使 $\boldsymbol{E}_1(z,t)$ 与无损耗介质板不存时相同，厚度 d 应为多少？

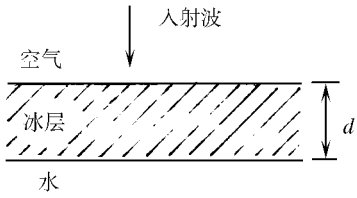
3－13　工作波长 $\lambda_0=3\text{cm}$ 的均匀平面波从空气中垂直入射到天线罩平面上，该天线罩材料的参数为 $\mu_r=1,\varepsilon_r=4.9,\sigma=0$，如题 3－13 图所示。

（1）天线罩的厚度为多少时才没有反射？

（2）当入射波频率降低 10% 时，有多少入射功率透过天线罩？



题 3－13 图



题 3－14 图

3－14　从卫星或飞机上对地球进行微波遥感时，用辐射计测量湖上冰层的厚度，如题 3－14 图所示。设冰层的介电常数 $\varepsilon=3.2(1+\text{j}0.01)\varepsilon_0$，冰层的下面是水。若将水视为理想的反射体，试找出用空气中的波长来表示辐射计能测量的冰层厚度。

3－15　已知均匀平面波的电场复数表示式为

$$\boldsymbol{E}(y,z)=\boldsymbol{e}_x 377\text{e}^{\text{j}0.5y}\text{e}^{-\text{j}0.866z}(\text{V/m})$$

当该平面波以入射角 $\theta_i=30°$ 从空气中入射到无损耗媒质（$\varepsilon_r=9$）表面上时。

（1）计算该平面波的频率；

（2）写出空气中和无损耗媒质中的电场和磁场表示式；

（3）计算无损耗媒质中的平均功率密度。

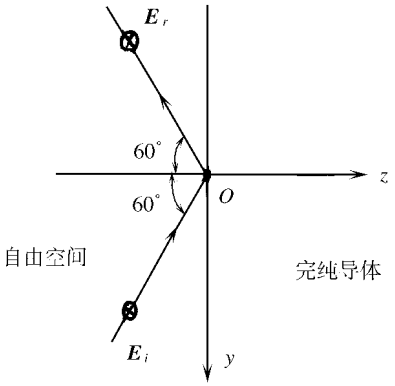
3－16　自由空间的正弦均匀平面波以导体平面的法线成 60° 的角入射到完纯导体表面，入射波的电场垂直于入射平面，在 $t=0$ 和 $z=0$ 时电场的振幅为 37.7 V/m，如题 3－16 图所示。若波的角频率 $\omega=3\times10^9\,\text{rad/s}$。

（1）写出自由空间的入射波、反射波以及合成波的场量表示式；

（2）求出自由空间的平均功率密度，指出电磁功率流动方向。

3－17　垂直极化的均匀平面波，从水下的发射源以入射角 $\theta_i=20°$ 投射到水与空气的水界平面上。对于淡水，其参数为 $\mu_r=1,\varepsilon_r=81,\sigma=0$。求：

（1）临界角；



题 3－16 图

(2) 分界面上的反射系数 $\Gamma_\perp$ 和透射系数 $\tau_\perp$；

(3) 透射波在空气中传播距离为一个波长时的衰减量(以 dB 表示)。

3－18　均匀平面波从空气斜入射到 $\varepsilon_r=2.5,\mu_r=0$ 的无损耗介质板上。

(1) 欲使入射波的电场矢量平行于入射平面时不产生反射，入射角应为多少？

(2) 若该平面波是从无损耗介质斜入射到空气，要产生全反射，入射角应取多少？

3－19　一直线极化波从自由空间斜入射到无损耗介质平面，该介质的参数为 $\varepsilon_r=4$，$\mu_r=1$。已知入射波的电场矢量与入射平面的夹角为 $45°$。

(1) 要使反射波中只有垂直极化波，应以多大角度入射？

(2) 在此情况下，反射波的平均功率密度是入射波的百分之几？

3－20　一平行极化波斜入射到两种非铁磁无损耗介质的分界平面上，入射角为 θ_i。设入射波的归一化电场值为 $E_i=1$，反射波的归一化电场值则为 Γ。试求透射波电场矢量与分界平面平行的分量 E_{tp} 以及与分界平面垂直的分量 E_{tn}，并根据能量平衡关系求出反射系数 Γ。

3－21　频率 $f=300\text{MHz}$ 的均匀平面波，从 $\varepsilon_r=4,\mu_r=1$ 的无损耗媒质中斜入射到与空气的分界平面上。

(1) 求该均匀平面波在两种媒质中的波长；

(2) 求临界角；

(3) 若该平面是圆极化波，欲在空气中得到单一线极化波，应以什么角度入射？

3－22　一垂直极化波从介质($\mu_1=\mu_0,\varepsilon_1=\varepsilon_0$)斜入射到铁磁材料($\mu_2=\mu_r\mu_0,\varepsilon_2=\varepsilon_0$)，试证明也存在一个无反射的布儒斯特角。

3－23　一右旋圆极化波以 $\theta_i=45°$ 从空气中入射到：(1) 完纯导体平面；(2) 聚苯乙烯($\varepsilon_r=2.7$)平面。试求两种情况下反射波的极化状态。

第四章　导行电磁波

在第二章中我们讨论了电磁波在无界空间的传播特点，而前一章研究了电磁波的反射与透射。当存在两种不同媒质分界面时，在一定的条件下，电磁波的能量将被束缚在此表面上，而沿表面传播。这时电磁波可称为被导波，而此表面则构成一个波导。在微波系统中，这种能把电磁波能量从一处传送到另一处的装置称为导波系统。

常用的导波系统可分为以下三类。

1. 波导管

由单根封闭的柱形导体空管构成，电磁波在管内传播，简称为波导，如图 4－1(a)所示的矩形波导。

2. 传输线

由两根或两根以上平行导体构成，通常工作在其主模(TEM)或准横电磁波，故称 TEM 波传输线，如图 4－1(b)所示的平行双线和同轴线。

3. 表面波波导

由单根介质或敷介质层的导体构成，电磁波沿其表面传播，如图 4－1(c)所示的微带线。

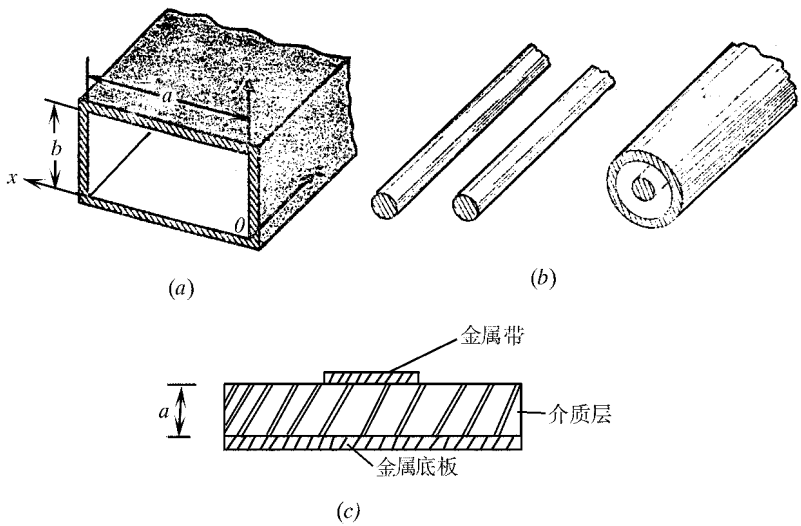


图 4－1　常用导波系统

(a)矩形波导；(b)双线及同轴线；(c)微带线。

对导波系统的讨论可采用“场”和“路”的两种分析方法。

1.“场”分析法

(1)由麦克斯韦方程组得到导波系统内电磁场各分量间的关系。

(2)由波动方程及相应的边界条件求出导波系统内的电磁场分布。

(3)由得到的场分布可讨论导波系统内电磁波的传播特性。

2.“路”分析法

在一定的条件下,以上“场”问题中的电场、磁场可用“路”问题中的电压、电流等效,这时:

(1)引入分布参数,得到等效电路。

(2)利用基尔霍夫定律求出电压、电流。

(3)讨论传播特点。

本章我们将用“场”的方法讨论矩形波导、圆柱形波导及同轴线波导中的电磁场分布、传播特性以及功率传输、损耗问题。除此之外,这一章中还将介绍谐振腔。对矩形谐振腔和圆柱形谐振腔内的不同模式、场分布、谐振频率及品质因数进行分析和讨论。而在下一章中,我们将用“路”的方法讨论传输线的问题。

4.1 均匀波导的一般特性

4.1.1 横向场分量与纵向场分量的关系

在这一节中,我们将讨论电磁波沿均匀导波系统传播的一般特性,其中包括场结构及传播特性。为使讨论简单而又不失一般性,设:

(1)波导的横截面沿 z 方向是均匀的,电磁波沿 $+z$ 方向传播。

(2)波导壁由理想导体构成,即 $\sigma=\infty$。

(3)波导内填充的媒质为完纯介质,即 $\sigma=0$,且各向同性。

(4)所讨论的波导区域内没有源分布,即 $\rho=0$,$\boldsymbol{J}=0$。

(5)波导内的场随时间作简谐变化。

考虑如图 4-2 所示的沿 z 轴方向放置的任意横截面形状的波导。由假设(1)和

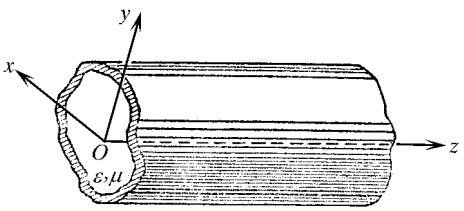


图 4-2 任意截面的均匀波导

(5)可将波导内的电场和磁场的复矢量表示为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.1.1}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z)=\boldsymbol{H}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.1.2}$$

式中,γ 为传播常数。由假设条件(4),区域内没有源分布,根据亥姆霍兹方程,波导内电磁场分别满足下列方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0 \tag{4.1.3}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=0 \tag{4.1.4}$$

式中,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是三维矢量,k 是波数,且有

$$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \tag{4.1.5}$$

由于电场和磁场都是三维矢量，故两个矢量亥姆霍兹方程式(4.1.3)和式(4.1.4)可化为 6 个标量方程，以直角坐标为例，即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_x + \boldsymbol{e}_y E_y + \boldsymbol{e}_z E_z$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_x H_x + \boldsymbol{e}_y H_y + \boldsymbol{e}_z H_z$$

则由亥姆霍兹方程，得

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0 \tag{4.1.6a}$$

$$\nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0 \tag{4.1.6b}$$

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \tag{4.1.6c}$$

和

$$\nabla^2 H_x + k^2 H_x = 0 \tag{4.1.7a}$$

$$\nabla^2 H_y + k^2 H_y = 0 \tag{4.1.7b}$$

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \tag{4.1.7c}$$

因为以上各分量不是完全独立的，故勿需全部求解所有的 6 个方程。我们可以利用麦克斯韦方程得到电磁场 6 个分量的关系，从而就能简化整个求解过程。

由 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$，得

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -\mathrm{j}\omega\mu H_x \tag{4.1.8a}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x = \mathrm{j}\omega\mu H_y \tag{4.1.8b}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mathrm{j}\omega\mu H_z \tag{4.1.8c}$$

由 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$，得

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = \mathrm{j}\omega\varepsilon E_x \tag{4.1.9a}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma H_x = -\mathrm{j}\omega\varepsilon E_y \tag{4.1.9b}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \mathrm{j}\omega\varepsilon E_z \tag{4.1.9c}$$

其中，由于假设条件 $\boldsymbol{E}(x,y,z) = \boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}$，$\boldsymbol{H}(x,y,z) = \boldsymbol{H}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}$，故场量 E 和 H 对 z 的偏微分已通过将相应的场量乘以 $(-\gamma)$ 因子来代替，且以上各式中已略去了共同的因子 $\mathrm{e}^{-\gamma z}$。将这些方程做适当的运算即可得到波导中横向场分量 E_x、E_y。H_x、H_y 和纵向场分量 E_z、H_z 的关系式，即

$$H_x = \frac{1}{\gamma^2 + k^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \tag{4.1.10a}$$

$$H_y = \frac{-1}{\gamma^2 + k^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \tag{4.1.10b}$$

$$E_x = \frac{-1}{\gamma^2 + k^2}\left(\mathrm{j}\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \tag{4.1.10c}$$

$$E_y = \frac{1}{\gamma^2 + k^2}\left(\mathrm{j}\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \tag{4.1.10d}$$

由式(4.1.10)可知：

(1)只需由标量亥姆霍兹方程式(4.1.6c)和式(4.1.7c)求解出 E_z 和 H_z，代入式(4.1.10)即可求出其余的场分量。

(2)由标量亥姆霍兹方程式(4.1.6c)或式(4.1.7c)求解 E_z 或 H_z 的同时，也可求出传播常数 γ，从而可对波导中电磁波的传播特性进行讨论。

(3)可根据 E_z 和 H_z 的存在情况，将波导中传播的电磁波分为三种类型，即 TEM 波、TE 波和 TM 波。

4.1.2 TEM 波

如果波导中传播的电磁波不存在 E_z 分量和 H_z 分量，这种波称为横电磁波，即 TEM 波。由式(4.1.10)可知，若 $E_z=0$，$H_z=0$，除非 $k^2+\gamma^2=0$，否则式(4.1.10)只有零解。因此，在波导中存在 TEM 的条件是

$$\gamma^2 + k^2 = 0 \tag{4.1.11}$$

得

$$\gamma = \mathrm{j}k = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

TEM 波的传播常数为

$$\gamma_{\mathrm{TEM}} = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{4.1.12}$$

这与无界空间无耗媒质中均匀平面波的传播常数的表示式完全相同。

TEM 波的相速度为

$$v_{\mathrm{p(TEM)}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4.1.13}$$

该相速度与频率无关，可见在波导中传播的 TEM 波不存在色散。

由式(4.1.8b)和式(4.1.9a)，且令 E_z 和 H_z 为零，得 TEM 波的波阻抗为

$$Z_{\mathrm{TEM}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma_{\mathrm{TEM}}} = \frac{\gamma_{\mathrm{TEM}}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \tag{4.1.14}$$

由式(4.1.12)，得

$$Z_{\mathrm{TEM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta \tag{4.1.15}$$

波导中 TEM 波的波阻抗等于介质的本征阻抗。同理由式(4.1.8a)和式(4.1.9b)，且令 E_z 和 H_z 为零，则

$$\frac{E_y}{H_x} = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma_{\mathrm{TEM}}} = -Z_{\mathrm{TEM}} \tag{4.1.16}$$

由式(4.1.14)和式(4.1.16)，可以得到在波导中沿 $+z$ 方向传播的 TEM 波的电场和磁场的关系为

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{Z_{\mathrm{TEM}}}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E} \tag{4.1.17}$$

单导体波导不能支承 TEM 波，这是因为 TEM 波的 $H_z=0$，故其磁力线应在横截面内闭合，这就要求波导内有纵向的电流——传导电流或位移电流。而单导体波导内没有导体，故不存在传导电流。又因为 TEM 波的 $E_z=0$，故没有纵向的位移电流。因此，单

导体波导不能传播 TEM 波。反之，对于含有内导体的同轴线，双导体的带状线或双线传输线则可以支承 TEM 波。

4.1.3 TM 波

如果波导中传播的电磁波不存在 H_z 分量，这种波称为横磁波，即 TM 波又称 E 波。TM 波的特点是 $\gamma^2+k^2\neq 0$，为此可令

$$k_c^2=\gamma^2+k^2 \tag{4.1.18}$$

式中，k_c 称为截止波数。

由式(4.1.10)可知，对于 TM 波，只要知道 E_z，其余的场分量即可求出。而 E_z 满足

$$\nabla^2 E_z+k^2E_z=0$$

而

$$E_z(x,y,z)=E_z(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$\nabla^2=\nabla_t^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式中，∇_t^2 在直角坐标系中可表示为

$$\nabla_t^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

于是 E_z 满足的方程变为

$$\nabla_t^2E_z+(\gamma^2+k^2)E_z=0$$

或

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_z+k_c^2E_z=0 \tag{4.1.19}$$

这是一个二阶偏微分方程，在具体的问题中，利用 E_z 满足的边界条件，即可求得满足边界条件和方程的解 $k_{c(mn)}$ 和 $E_{z(mn)}$。求出 E_z 后，再考虑 $H_z=0$，利用(4.1.10)可得到 TM 波的场分量为

$$H_x=\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{4.1.20a}$$

$$H_y=-\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{4.1.20b}$$

$$E_x=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{4.1.20c}$$

$$E_y=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{4.1.20d}$$

TM 波在波导中的传播特性，由传播常数 γ 的取值范围决定。由式(4.1.18)，传播常数 γ 为

$$\gamma=\sqrt{k_c^2-k^2}=\sqrt{k_c^2-\omega^2\mu\varepsilon} \tag{4.1.21}$$

我们知道，只有当 γ 为纯虚数时，波才能在波导中传播，反之，γ 为实数时，波在波导中呈衰减状态。因此，波在波导中究竟是传播还是截止，其分界点是 $\gamma=0$，而此时

$$k=k_c$$

即

$$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=k_{\mathrm{c}}$$

$$\omega=\omega_{\mathrm{c}}=\frac{k_{\mathrm{c}}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4.1.22}$$

称为波导的截止角频率。

$$f_{\mathrm{c}}=\frac{\omega_{\mathrm{c}}}{2\pi}=\frac{k_{\mathrm{c}}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4.1.23}$$

则称为波导的截止频率。

$$\lambda_{\mathrm{c}}=\frac{v}{f_{\mathrm{c}}}=\frac{2\pi}{k_{\mathrm{c}}} \tag{4.1.24}$$

称为波导的截止波长。

(1)$f>f_{\mathrm{c}}$ 即工作频率高于截止频率时，$k_{\mathrm{c}}<k$，γ 为纯虚数，波导内可以传播电磁波。此时有关波传播的特性参数：

传播常数为

$$\gamma=\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}k\sqrt{1-\left(\frac{k_{\mathrm{c}}}{k}\right)^2}=\mathrm{j}k\sqrt{1-\left(\frac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2} \tag{4.1.25}$$

相位常数为

$$\beta=k\sqrt{1-\left(\frac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2} \tag{4.1.26}$$

波导波长(电磁波在波导中相应的波长)为

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2}}>\lambda \tag{4.1.27}$$

式中

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{v}{f}$$

是频率为 f 的均匀平面波在无界空间(μ,ε)中传播时的波长。

相速度为

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{\mathrm{c}}}{f}\right)^2}}>v \tag{4.1.28}$$

式中

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

为无界空间(μ,ε)电磁传播的相速度。

由式(4.1.28)可见，在波导内，电磁波传播的相速度与频率有关，因此，波导是一种色散系统。

群速度

利用式(2.3.33)可得到波导系统中的群速为

$$v_g = \frac{1}{\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega} = v\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < v$$

上式表明群速同样与频率有关,且小于无界空间的传播速度。

波阻抗

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}$$

由式(4.1.20)得

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \tag{4.1.29}$$

将式(4.1.25)中的 γ 表达式代入上式,得

$$Z_{TM} = \eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < \eta \tag{4.1.30}$$

式中

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

为媒质(ε,μ)的本征阻抗。

沿$+z$方向传播的 TM 的电场和磁场的关系为

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{Z_{TM}}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E})$$

(2)$f<f_c$ 即工作频率低于截止频率时,$k_c>k$,γ 为实数,即

$$\gamma = \alpha = k_c\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \tag{4.1.31}$$

传播常数变为衰减常数。由此可见,在波导中只能传播电磁波的频率高于某一截止频率的电磁波。因此,波导具有高通滤波器的特性。

将式(4.1.31)代入式(4.1.29),得出 $f<f_c$ 时 TM 波的波阻抗为

$$Z_{TM} = -\mathrm{j}\frac{k_c}{\omega\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \tag{4.1.32}$$

此时的波阻抗是纯电抗,这表明没有有功功率与衰减模相伴。

对于前面的结论,我们可由图 4-3(a)和图 4-3(b)直观地看出:

(1)当 $\lambda_c=\infty$时,$\lambda_g=\lambda$,$v_p=v$,λ_g、v_p 与频率无关,这是一种特殊情况。

(2)当 $\lambda=\lambda_c$ 时,$\lambda_g=\infty$,$v_p=\infty$,此时电磁波的相移 $\beta=\frac{2\pi}{\lambda_g}=0$,表明电磁波不能传播。

(3)当 $\lambda/\lambda_c<1$ 时,v_p 和 λ_g 是频率的函数。

4.1.4 TE 波

如果波导中传播的电磁波不存在 E_z 分量,这种波称为横电波,即 TE 波,又称 H 波。TE 波的特点仍然是 $\gamma^2+k^2\neq 0$,同样可令

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2$$

式中,k_c 称为截止波数。

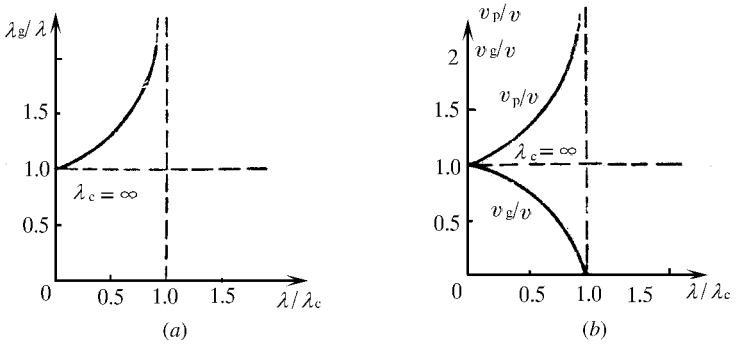


图 4－3　λ_g/λ **与** λ/λ_c **的关系曲线**(a)，
v_p/v、v_g/v **与** λ/λ_c **的关系曲线**(b)

由式(4.1.10)**可知，对于** TE **波，只要知道** H_z**，其余的场分量即可求出，而** H_z **满足**

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0$$

将

$$H_z(x,y,z) = H_z(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

和

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

代入上式，得

$$\nabla_t^2 H_z + (\gamma^2 + k^2) H_z = 0$$

在直角坐标下：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) H_z + k_c^2 H_z = 0 \tag{4.1.33}$$

和 TM **波类似，在具体的问题中，利用** H_z **满足的边界条件，即可求得满足边界条件和方程的解** $k_{c(mn)}$ **和** $H_{z(mn)}$**。求出** H_z **后，再考虑** $E_z=0$**，利用式**(4.1.10)**可得到** TE **波的场分量为**

$$H_x = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{4.1.34a}$$

$$H_y = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{4.1.34b}$$

$$E_x = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{4.1.34c}$$

$$E_y = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{4.1.34d}$$

对于 TE **波的传播特性，由于其传播常数**

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$$

与 TM **波所满足的关系式相同，因此，可进行相同的分析：**

(1) $f > f_c$ **即工作频率大于截止频率时，**$k_c < k$**，**γ **为纯虚数，波导内可以传播电磁波。此时有关波传播的特性参数如下：**

传播常数为

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}k\sqrt{1-\left(\frac{k_c}{k}\right)^2} = \mathrm{j}k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{4.1.35}$$

相位常数为

$$\beta = k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{4.1.36}$$

波导波长为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > \lambda \tag{4.1.37}$$

相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > v \tag{4.1.38}$$

群速度为

$$v_g = \frac{1}{\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega} = v\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < v \tag{4.1.39}$$

以上 5 个式子与 TM 波的有关参数表示式完全相同。

波阻抗为

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} \tag{4.1.40}$$

由式(4.1.34),得

$$Z_{TE} = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma} \tag{4.1.41}$$

再将 γ 的表达式代入,得

$$Z_{TE} = \eta\Big/\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} > \eta \tag{4.1.42}$$

此式与式(4.1.30)表示的 Z_{TM} 不同。

沿 $+z$ 方向 TE 波的电磁场关系

$$\boldsymbol{E} = -Z_{TE}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{H})$$

(2) $f < f_c$ 即工作频率小于截止频率时,$k_c > k$,γ 为实数

$$\gamma = \alpha = k_c\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{4.1.43}$$

波阻抗为纯电抗为

$$Z_{TE} = \mathrm{j}\frac{\omega\mu}{k_c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{4.1.44}$$

同样说明在 $f < f_c$ 的情况下,波导中是不能传播电磁波的。

例 4.1 波长的计算。

当工作频率为截止频率的两倍时,试求波导中 TEM、TM 和 TE 模的波长。

解:当 $f = 2f_c$ 时,工作频率高于截止频率,所以电磁波在波导中可以传播。

当 $f=2f_c$ 时，$\left(\frac{f_c}{f}\right)^2=\frac{1}{4}$，$\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$

因此

$$\lambda_{TEM}=\lambda=\frac{c}{f}$$

$$\lambda_{TM}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}=\frac{\lambda}{0.866}=1.155\lambda>\lambda$$

$$\lambda_{TE}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}=\frac{\lambda}{0.866}=1.155\lambda>\lambda$$

例4.2　波阻抗的计算。

当工作频率为截止频率的两倍时，试求波导中 TEM、TM 和 TE 模的波阻抗。

解：$f=2f_c$ 时，工作频率高于截止频率，所以电磁波可以在波导中传播。

当 $f=2f_c$ 时，$\left(\frac{f_c}{f}\right)^2=\frac{1}{4}$，$\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}=0.866$

因此

$$Z_{TEM}=\eta$$

$$Z_{TM}=\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}=0.866\eta<\eta$$

$$Z_{TE}=\eta\Big/\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}=\frac{\eta}{0.866}=1.155\eta>\eta$$

例4.3　波阻抗的计算。

当工作频率为截止频率的 $\frac{1}{2}$ 时，试求波导中 TEM、TM 和 TE 模的波阻抗。

解：$f=\frac{1}{2}f_c$ 时，工作频率低于截止频率，所以波导中的模式是截止的或称为迅衰模。此时除 TEM 模外，TM 和 TE 模的波阻抗是纯电抗。

$$Z_{TEM}=\eta$$

$$Z_{TM}=\mathrm{j}\frac{k_c}{\omega\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}=-\mathrm{j}0.276\frac{k_c}{f_c\varepsilon}$$

$$Z_{TE}=\mathrm{j}\frac{\omega\mu}{\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}=\mathrm{j}3.63\frac{f_c\mu}{k_c}$$

通过前面的讨论，我们知道在均匀导波系统中的电磁波传播具有以下特性：

(1)一般均匀导波系统可以传播三种波型，即 TEM 波、TE 波和 TM 波。但是单导体波导不能支承 TEM 波。

(2)TEM 波不呈现截止性，其传播特性参数与相同媒质无界空间中传播的均匀平面波的传播特性参数的表示式完全相同。

(3)TM 波和 TE 波呈现截止性，当 $f>f_c$ 时，波导中可以传播相应的 TM 波或 TE 波模式，但其传播特性参数与无界空间均匀平面波的传播特性参数的表示式则不相同。

而当 $f<f_c$ 时，波导中不能传播 TM 波和 TE 波，相应的传播常数为实数，而相应的波阻抗呈现为纯虚数。

练 习 题

4.1－1　试写出电场强度的纵向分量 E_z 和磁场强度的纵向分量 H_z 所满足的矢量亥姆霍兹方程在圆柱坐标系下的表达式。

4.1－2　一个给定尺寸的导波系统，其截止频率只有一个吗？波导的截止频率取决于什么因素？

4.1－3　写出圆柱坐标系下，电磁场的横向分量和纵向分量之间的关系。

4.1－4　判断下列说法是否正确：

(1)自由空间传播的均匀平面波电场和磁场及传播方向总是相互垂直的。

(2)导波系统中传播的 TEM 波的电场和磁场及传播方向总是相互垂直的。

(3)导波系统中传播的电磁波的电场和磁场及传播方向总是相互垂直的。

4.2 矩形波导

矩形波导的形状如图 4－4 所示，其宽边尺寸为 a，窄边尺寸为 b，波导内填充了参数为 ε 和 μ 的完纯介质，波导管壁为理想导体。设电磁波沿 $+z$ 方向传播，相应的电磁场为时谐场，其复数形式为

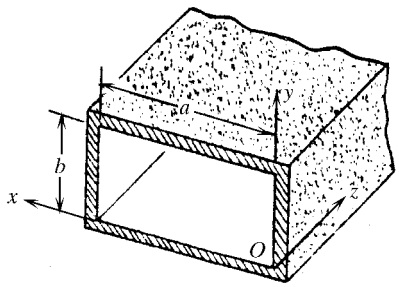


图 4－4　矩形波导

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.2.1}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z) = \boldsymbol{H}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.2.2}$$

瞬时值形式(令 $\gamma=\mathrm{j}\beta$)为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z;t) = \boldsymbol{E}(x,y)\cos(\omega t-\beta z) \tag{4.2.3}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z;t) = \boldsymbol{H}(x,y)\cos(\omega t-\beta z) \tag{4.2.4}$$

下面我们将分别讨论矩形波导中的 TM 波和 TE 波。由于矩形波导是单导体波导，所以不能支承 TEM 波。

4.2.1 矩形波导中的 TM 波

对于 TM 波，由于 $H_z=0$，故波导中的场量由 E_z 确定。由式(4.1.19)得到 TM 波的

E_z 分量满足的方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z+\frac{\partial^2}{\partial y^2}E_z+k_c^2E_z=0$$

由于波导壁是理想导体构成，依照电磁场的边界条件，在理想导体表面上，电场的切向分量应为零，即

$$E_z(x=0)=0 \tag{4.2.5a}$$

$$E_z(x=a)=0 \tag{4.2.5b}$$

$$E_z(y=0)=0 \tag{4.2.5c}$$

$$E_z(y=b)=0 \tag{4.2.5d}$$

下面利用分离变量法，求解式(4.1.19)和式(4.2.5)构成的亥姆霍兹方程的边值问题。

设方程式(4.1.19)具有分离变量形式的解，即

$$E_z(x,y)=f(x)g(y) \tag{4.2.6}$$

将上式代入式(4.1.19)，得

$$f''(x)g(y)+f(x)g''(y)+k_c^2f(x)g(y)=0 \tag{4.2.7}$$

上式两边同除以 $f(x)g(y)$，得

$$\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{g''(y)}{g(y)}+k_c^2=0 \tag{4.2.8}$$

式(4.2.8)左边第一项仅为 x 的函数，第二项仅为 y 的函数，而第三项为常数，因此，要使其相加为零，只有

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=-k_x^2 \tag{4.2.9}$$

$$\frac{g''(y)}{g(y)}=-k_y^2 \tag{4.2.10}$$

且

$$k_x^2+k_y^2=k_c^2 \tag{4.2.11}$$

式(4.2.9)的通解为

$$f(x)=A\sin k_xx+B\cos k_xx \tag{4.2.12}$$

考虑边界条件式(4.2.5a)，有

$$E_z(x=0)=0$$

即

$$f(x)g(y)\Big|_{x=0}=0$$

得

$$f(0)=0 \tag{4.2.13}$$

将式(4.2.13)代入式(4.2.12)中，得

$$B=0 \tag{4.2.14}$$

由边界条件式(4.2.5b)，有

$$E_z(x=a)=0$$

即

$$f(x)g(y)\Big|_{x=a}=0$$

得

$$f(a)=0 \tag{4.2.15}$$

将式(4.2.15)代入式(4.2.12)中,得

$$A\sin k_x a=0$$

即

$$k_x=\frac{m\pi}{a}\quad(m=1,2,3,\cdots) \tag{4.2.16}$$

于是有

$$f(x)=A\sin\frac{m\pi}{a}x \tag{4.2.17}$$

同理

$$g(y)=C\sin\frac{n\pi}{b}y \tag{4.2.18}$$

$$k_y=\frac{n\pi}{b}\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{4.2.19}$$

所以我们得到矩形波导中 TM 波的纵向场分量

$$E_z(x,y)=f(x)g(y)=E_0\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \tag{4.2.20}$$

式中 $E_0=AC$ 为常数,通常由初始条件(激励源)决定。而决定传播特性的截止波数为

$$k_c^2=k_x^2+k_y^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{4.2.21}$$

将式(4.2.20)代入式(4.1.20a)～式(4.1.20d),可求得矩形波导中 TM 波的横向场分量为

$$E_x(x,y,z)=-\frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.2.22a}$$

$$E_y(x,y,z)=-\frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.2.22b}$$

$$H_x(x,y,z)=\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.2.22c}$$

$$H_y(x,y,z)=-\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.2.22d}$$

由式(4.2.21)得到矩形波导中 TM 波的截止波数

$$k_c=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

对于矩形波导中 TM 波有以下结论:

(1)m 和 n 可以有不同的取值,因此,对于 m、n 的每一种组合即为一种可能的传播模式,称为 TM_{mn} 模。

(2)由其场分布可知,波导中的电磁波沿 x、y 方向为驻波分布,沿 z 方向为行波分布(当 $\gamma=-\mathrm{j}\beta$ 时)。

(3)TMmn 模的传播特性参数:

截止频率为

$$f_{cmn}=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4.2.23}$$

截止波长为

$$\lambda_{cmn}=\frac{2\pi}{k_c}=\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \tag{4.2.24}$$

当工作频率大于某一模式的截止频率($f>f_{cmn}$)**时,在矩形波导中,可以传播该模式** TMmn**,相应的传播特性参数为**

传播常数

$$\gamma=\sqrt{k_c^2-\omega^2\mu\varepsilon}=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2-\omega^2\mu\varepsilon} \tag{4.2.25}$$

相位常数

$$\beta=\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-k_c^2}=\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{4.2.26}$$

波导波长

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \tag{4.2.27}$$

相速度

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \tag{4.2.28}$$

群速度

$$v_g=\frac{1}{\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega}=\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\Big/\omega\mu\varepsilon \tag{4.2.29}$$

波阻抗

$$Z_{TM}=\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}=\frac{\beta}{\omega\varepsilon}=\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\Big/\omega\varepsilon \tag{4.2.30}$$

对于矩形波导中的 TM **模,由于** m **和** n **都不能为零(否则导致场分量只有零解),所以** TM **模式中其截止频率最低的为** TM_{11} **模。**

当工作频率小于某一模式的截止频率($f<f_{cmn}$)**时,在矩形波导中不能传播该模式的波,此时,相应的传播常数为实数,成为衰减因子,而波阻抗为纯电抗。**

例 4.4　矩形波导中 TM **模的瞬时值。**

已知边长分别为 a **和** b **的矩形波导,其内填充介电常数和磁导率分别为** ε **和** μ **的完纯介质,试给出该波导中** TM_{11} **模的电磁场瞬时值表达式。**

解:将 TM **波的复数表示式**(4.2.22)**乘以** $e^{j\omega t}$**,然后取其实部,并令其中** $m=1$,$n=1$**,则得到** TM_{11} **模的瞬时值表示式。**

因为式(4.2.22)**中**

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

于是式(4.2.22)乘 $e^{j\omega t}$ 取实部，得

$$E_x(x,y,z;t) = \frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\sin(\omega t - \beta z)$$

$$E_y(x,y,z;t) = \frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\sin(\omega t - \beta z)$$

$$E_z(x,y,z;t) = E_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_x(x,y,z;t) = -\frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_y(x,y,z;t) = \frac{\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_z(x,y,z;t) = 0$$

式中 $k_c = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$。

例 4.5 矩形波导中 TM 波的传播特性参数。

已知矩形波导的尺寸为 $a \times b$，信号源的工作频率为 f。波导内填充媒质参数为 ε、μ。试求 TM_{11} 模的传播常数、相位常数、截止波长、波导波长、相速度、群速度及波阻抗。

解：TM_{11} 模的截止波数为

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

则截止波长

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}$$

由信号源的工作频率 f 得工作波长为

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

若 $\lambda > \lambda_c$（即 $f < f_c$），TM_{11} 被截止，不能在波导中传播。此时

传播常数

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\varepsilon} = \alpha$$

为一实数，对波来说成为衰减因子。

其它的传播特性参数，如相位常数、波导波长、相速度、群速度将没有意义，波阻抗为一纯虚数即纯电抗。

若 $\lambda < \lambda_c$（即 $f > f_c$），TM_{11} 波可在波导中传播，此时

传播常数

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

相位常数

$$\beta=\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

波导波长

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}$$

相速度

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}$$

群速度

$$v_g=\frac{1}{\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega}=\frac{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}}{\omega\mu\varepsilon}$$

波阻抗

$$Z_{TM}=\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}=\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}\Big/\omega\varepsilon$$

例4.6　矩形波导中 TM 波的场图。

已知尺寸为 $a\times b$ 的矩形波导，画出在 xy 平面和 yz 平面内 TM_{11} 模的电力线和磁力线。

解：根据 TM_{11} 波的场分布，在 xy 平面内，电力线和磁力线的斜率为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_E=\frac{a}{b}\tan\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cot\left(\frac{\pi}{b}y\right)\tag{4.2.31}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_H=-\frac{b}{a}\cot\left(\frac{\pi}{a}x\right)\tan\left(\frac{\pi}{b}y\right)\tag{4.2.32}$$

利用以上两式，可画出如图 4－5(a)所示的电场线和磁场线。由以上两式还可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_E\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_H=-1\tag{4.2.33}$$

这说明在 xy 平面电场 E 和磁场 H 是相互垂直的，再由理想导体的边界条件知道，E 线是垂直于波导壁，而 H 线则与波导壁平行。

同样，在 yz 平面，对特定的 x 值，比如 $x=\frac{a}{2}$ 处，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)_E=\frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)\cot\left(\frac{\pi}{b}y\right)\tan(\omega t-\beta z)$$

而 H 只有 x 分量，图 4－5(b)中，画出了 $t=0$ 时的 E 线和 H 线。

4.2.2　矩形波导中的 TE 波

对于 TE 波，由于 $E_z=0$，故波导中的场量由 H_z 确定，由式(4.1.32)得到 TE 波的 H_z 分量满足的方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_z+\frac{\partial^2}{\partial y^2}H_z+k_c^2H_z=0$$

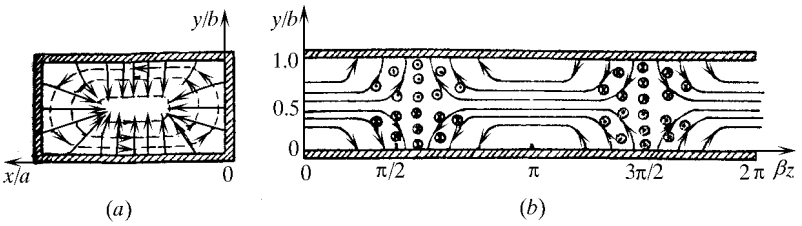


图 4－5　矩形波导中 TM_{11} 模的场图

——电场线；－－－－磁场线。

由于波导壁是理想导体构成，依照电磁场的边界条件，在理想导体表面上，电场的切向分量为零，即

$$E_y(x=0)=0 \tag{4.2.34a}$$

$$E_y(x=a)=0 \tag{4.2.34b}$$

$$E_x(y=0)=0 \tag{4.2.34c}$$

$$E_x(y=b)=0 \tag{4.2.34d}$$

由于我们要求的是 H_z，因此，对以上的边界条件需要将其转化为用 H_z 表示，根据 TE 波横向场分量与 H_z 的关系式(4.1.33c)和式(4.1.33d)，可将式(4.2.34)表示的边界条件变为

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \tag{4.2.35a}$$

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{x=a}=0 \tag{4.2.35b}$$

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \tag{4.2.35c}$$

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial y}\right|_{y=b}=0 \tag{4.2.35d}$$

应用分离变量法求解亥姆霍兹方程(4.1.32)在式(4.2.35)条件下的边值问题。

同样设方程式(4.1.32)具有分离变量形式的解

$$H_z(x,y)=f(x)g(y) \tag{4.2.36}$$

将上式代入式(4.1.32)，并依照对 TM 的相同讨论方法，可得到 $f(x)$和 $g(y)$满足的两个常微分方程为

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=-k_x^2 \tag{4.2.37}$$

和

$$\frac{g''(y)}{g(y)}=-k_y^2 \tag{4.2.38}$$

且

$$k_x^2+k_y^2=k_c^2 \tag{4.2.39}$$

同样，式(4.2.37)的通解为

$$f(x)=A\cos k_x x+B\sin k_x x \tag{4.2.40}$$

由边界条件式(4.2.35a),**即**

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

得

$$\left.f'(x)g(y)\right|_{x=0}=0$$

即

$$\left.f'(x)\right|_{x=0}=0 \tag{4.2.41}$$

由边界条件式(4.2.35b)

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{x=a}=0$$

得

$$\left.f'(x)g(y)\right|_{x=a}=0$$

即

$$\left.f'(x)\right|_{x=a}=0 \tag{4.2.42}$$

将式(4.2.41)**和式**(4.2.42)**代入通解式**(4.2.40),**可得**

$$B=0$$

$$k_x=\frac{m\pi}{a}\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{4.2.43}$$

于是 $f(x)$**的解为**

$$f(x)=A\cos\frac{m\pi}{a}x \tag{4.2.44}$$

同理 $g(y)$**的解为**

$$g(y)=D\cos\frac{n\pi}{b}y \tag{4.2.45}$$

$$k_y=\frac{n\pi}{b}\qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{4.2.46}$$

所以

$$H_z(x,y)=H_0\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y \tag{4.2.47}$$

$H_0=AD$ **为常数,通常由激励源确定。截止波数**

$$k_c^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{4.2.48}$$

将 H_z **的表达式**(4.2.47)**代入** TE **波的场结构关系式**(4.1.33a)~**式**(4.1.33d),**可求得矩形波导中** TE **波的横向场分量为**

$$E_x(x,y,z)=\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.2.49a}$$

$$E_y(x,y,z)=-\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.2.49b}$$

$$H_x(x,y,z) = \frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z} \tag{4.2.49c}$$

$$H_y(x,y,z) = \frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z} \tag{4.2.49d}$$

对于 TE 波，其中 m 和 n 也可以有不同的取值，对于 m、n 的每一种组合，定义为一种可能的模式，称为 TE_{mn} 模。与 TM_{mn} 不同的是，在 TM 模式中，m 和 n 不能为零，而对于 TE 模，m 和 n 都可以为零（但是不能同时为零，否则导致场解为零），因此对 TE 波存在 TE_{10} 模和 TE_{01} 模。

TE_{mn} 的场结构由式(4.2.49)确定，相应的截止频率为

$$f_{cmn} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4.2.50}$$

$$\lambda_{cmn} = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \tag{4.2.51}$$

$$\lambda_{c10} = 2a \tag{4.2.52}$$

因此，TE_{10} 模是矩形波导（$a>b$）中截止波长最长（截止频率最低）的模式，称其为矩形波导中的主模。

当工作频率高于某一模式的截止频率（$f>f_{cmn}$）时，矩形波导中可以传播该模式的 TE_{mn} 波。由于其截止波数 k_{cmn} 的表示式与相应 TM_{mn} 模的截止波数相同，因此，TE_{mn} 模的传播特性参数：传播常数 γ、相位常数 β、波导波长 λ_g、相速度 v_p、群速度 v_g 的表示式与 TM_{mn} 的相应参数完全相同，分别由式(4.2.25)、式(4.2.26)、式(4.2.27)、式(4.2.28)和式(4.2.29)给出。而波阻抗为

$$Z_{TE} = \eta\Big/\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \tag{4.2.53}$$

当 $f<f_{cmn}$ 时，在矩形波导中则不能传播相应的 TE_{mn} 模的波。此时相应的传播常数为实数，成为衰减因子，而波阻抗为纯电抗。

例 4.7　矩形波导中 TE_{10} 模的场分布。

写出尺寸为 $a\times b$ 的矩形波导中 TE_{10} 模的瞬时场表示式。

解：将 TE 模的场分量表示式(4.2.49)乘以 $e^{j\omega t}$，取其实部（注意式中 $\gamma=j\beta$），并设 $m=1$，$n=0$，则得到 TE_{10} 模的场量的瞬时值表达式。

$$E_x(x,y,z;t) = 0$$

$$E_y(x,y,z;t) = \frac{\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(\omega t-\beta z)$$

$$E_z(x,y,z;t) = 0$$

$$H_x(x,y,z;t) = -\frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(\omega t-\beta z)$$

$$H_y(x,y,z;t) = 0$$

$$H_z(x,y,z;t) = H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - \beta z)$$

其中

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_c^2} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

例4.8 矩形波导中 TE_{10} 模的传播特性。

一空气填充的矩形波导，尺寸为 $a\times b = 6\text{cm}\times 4\text{cm}$，信号源频率是 3GHz，试计算 TE_{10} 波的截止波长，波导波长，相移常数，群速和波阻抗。

解：截止波长

$$\lambda_{c10} = 2a = 12\text{cm}$$

因为工作频率 $f=3\text{GHz}$，则相应的工作波长为

$$\lambda = 10\text{cm} < \lambda_{c10}$$

该波导中可以传播 TE_{10} 波，相应的传播特性参数为

截止频率

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\Bigg|_{\substack{m=1\\n=0}} =$$

$$\frac{3\times 10^8}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{a} = 0.25\times 10^{10}\,\text{Hz}$$

波导波长

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{10\times 10^{-2}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.25\times 10^{10}}{3\times 10^9}\right)^2}} = 18.09\text{cm}$$

相位常数

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{18.09\times 10^{-2}} = 34.7\ \text{rad/m}$$

相速度

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi\times 3\times 10^9}{34.7} = 5.43\times 10^8\ \text{m/s}$$

群速度

$$v_g = \frac{c^2}{v_p} = \frac{(3\times 10^8)^2}{5.43\times 10^8} = 5.52\times 10^7\ \text{m/s}$$

波阻抗

$$Z_{TE_{10}} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{120\pi}{0.553} = 681.74\Omega$$

例4.9 传播模与截止模。

在上例所给的波导中($a\times b=6\text{cm}\times 4\text{cm}$)，信号源的频率仍为 3GHz，试分析该波导中可能传播的波的模式。

解：根据波导的截止条件，只有当工作波长小于该模式的截止波长时，该模式才可以

在波导中传播。

由题意 $f=3\text{GHz}$，则

$$\lambda = 10\text{cm}$$

而截止波长由大到小排列的几个模式的截止波长为

$$\lambda_{c10} = 2a = 12\text{cm}$$

$$\lambda_{c01} = 2b = 8\text{cm}$$

$$\lambda_{c20} = a = 6\text{cm}$$

$$\lambda_{c11} < \lambda_{c01}$$

由以上结论可知，只有 $\lambda_{c10}>\lambda$，故该波导中只能传播 TE_{10} 模式的波。

4.2.3 矩形波导中的主模

1. 主模与单模传输

由前面的讨论我们知道，在横截面尺寸为 $a\times b$ 的矩形波导中，可以传播 TM_{mn} 模和 TE_{mn} 模，它们的截止波长 λ_{cmn} 可以用一个相同的式子表示为

$$\lambda_{cmn} = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \tag{4.2.54}$$

设波导尺寸 $a>2b$（即宽边为 a，窄边为 b），对于式(4.2.54)，截止波长最长的为 TE_{10} 模的截止波长为

$$\lambda_{c10} = 2a$$

我们称该模式为矩形波导中的主模。

由于 TM_{mn} 模和 TE_{mn} 模的截止波长相同，而只要截止波长大于工作波长的模式都可以传播，因此，对给定的工作波长，波导中可能存在多种传播模式。图 4－6 为矩形波导中截止波长分布图，它分为以下三个区：

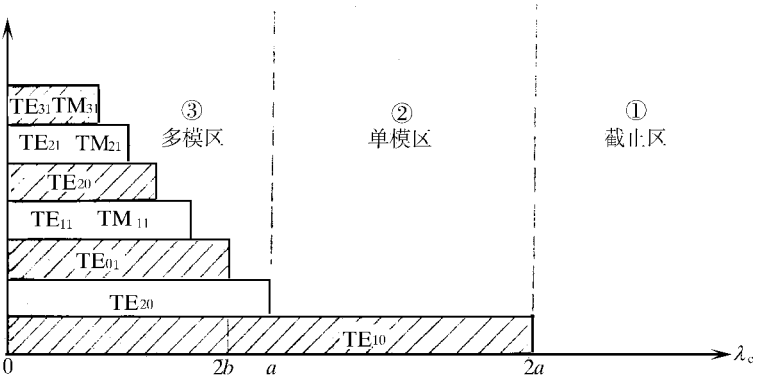


图 4－6　模式分布图

Ⅰ区：工作波长 $\lambda\geqslant 2a$，波导中不能传播任何模式的波，称为“截止区”。

Ⅱ区：工作波长 $a<\lambda<2a$，波导中只能传播 TE_{10} 模，称为“单模区”。

Ⅲ区：工作波长 $0<\lambda<a$，波导中可以传播至少两种以上的波型，称为“多模区”。

在使用波导传输能量时，通常要求工作在单模状态，因此，当波导尺寸给定的情况下，选择电磁波的工作波长 λ 满足

$$2a > \lambda > \begin{cases} a \\ 2b \end{cases}$$

一般情况 $b=(0.4\sim0.5)a$。

例 4.10　矩形波导的尺寸设计。

有一内充空气，截面尺寸为 $a\times b(b<a<2b)$ 的矩形波导，以主模工作在 3GHz。若要求工作频率至少高于主模截止频率的 20% 和至少低于最相近的高次模截止频率的 20%。给出尺寸 a 和 b 的设计方案。

解：截止频率

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

由题意 $b<a<2b$，得主模为 TE_{10} 模，最相近的高次模为 TE_{01}，且

$$f_{cTE_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$f_{cTE_{01}} = \frac{1}{2b\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

于是得

$$\frac{3\times10^9 - f_{cTE_{10}}}{f_{cTE_{10}}} \geqslant 20\%$$

$$\frac{f_{cTE_{01}} - 3\times10^9}{f_{cTE_{01}}} \geqslant 20\%$$

解得 $a\geqslant0.06\text{m}$，$b\leqslant0.04\text{m}$，且 $a<2b$

2. 主模的场结构

在例 4.7 中，我们已经求出了矩形波导中 TE_{10} 模的场分布瞬时表示式为

$$H_z(x,y,z;t) = H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t-\beta z) \tag{4.2.55a}$$

$$E_x(x,y,z;t) = 0 \tag{4.2.55b}$$

$$E_y(x,y,z;t) = \frac{\omega\mu a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(\omega t-\beta z) \tag{4.2.55c}$$

$$H_x(x,y,z;t) = \frac{-a\beta}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(\omega t-\beta z) \tag{4.2.55d}$$

$$H_y(x,y,z;t) = 0 \tag{4.2.55e}$$

$$E_z(x,y,z;t) = 0 \tag{4.2.55f}$$

由式(4.2.55a)～式(4.2.55f)可见，TE_{10} 模只有三个非零的场分量，即 E_y、H_z 和 H_x。在 xy 平面内，当 $\sin(\omega t-\beta z)=1$ 时，E_y 和 H_x 按 $\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ 变化，与 y 无关，如图 4－7(a)所

示。

在 yz 平面内，当 $x=\frac{a}{2}$ 时，只有 E_y 和 H_x 分量且都随 βz 作正弦变化。图 4－7(b)给出了 $t=0$ 时的 E_y 和 H_x 的分布曲线。

在 xz 平面内，给出的曲线描述了三个非零的场分量 E_y、H_x 和 H_z，如图 4－7(c)所示。

图 4－7(d)给出了 TE_{10} 模电磁场结构的立体模型。

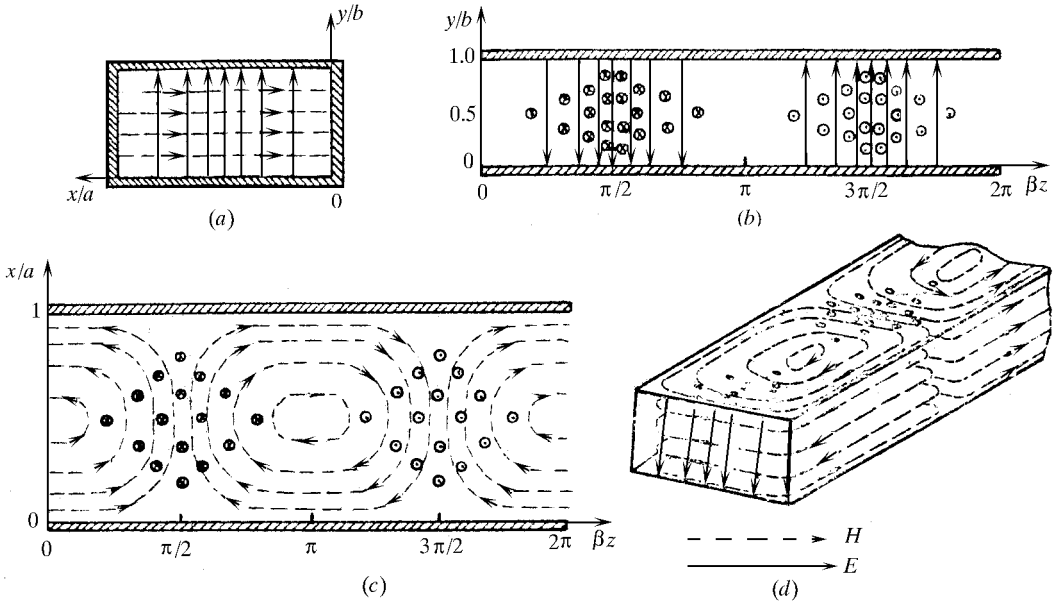


图 4－7　TE_{10} 模 xy 平面、yz 平面，xz 平面场线及其立体场图

(a)矩形波导中 TE_{10} 模 xy 平面场线；(b)TE_{10} 模 yz 平面场线；

(c)TE_{10} 模 xz 平面场线；(d)TE_{10} 模立体场图。

3. 主模的管壁电流

在波导中存在电磁波时，由于磁场的感应，在波导壁上会产生高频电流，这个电流就是波导的传导电流。设波导壁是由理想导体构成，因此，该电流只存在于波导壁的表面，称为管壁电流。表面电流是由磁场感应产生的，所以它的分布取决于传播波型的磁场分布。

由理想导体表面的边界条件可知，波导壁上的面电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{H} \tag{4.2.56}$$

式中，$\boldsymbol{a}_n$ 为壁面的法线方向单位矢量，$\boldsymbol{H}$ 为壁上的磁场强度。在 $t=0$ 时，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_s(x=0) &= \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{H}\Big|_{x=0} = \\ &\boldsymbol{e}_x \times (\boldsymbol{e}_x H_x + \boldsymbol{e}_z H_z)\Big|_{x=0} = \\ &-\boldsymbol{e}_y H_z(0,y,z;0) = -\boldsymbol{e}_y H_0 \cos\beta z \end{aligned} \tag{4.2.57a}$$

$$\boldsymbol{J}_s(x=a) = -\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{H}\Big|_{x=a} =$$

$$-\boldsymbol{e}_x\times(\boldsymbol{e}_xH_x+\boldsymbol{e}_zH_z)\Big|_{x=a}=$$

$$\boldsymbol{e}_yH_z(a,y,z;0)=$$

$$-\boldsymbol{e}_yH_0\cos\beta z=\boldsymbol{J}_s(x=0) \tag{4.2.57b}$$

$$\boldsymbol{J}_s(y=0)=\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{H}\Big|_{y=0}=$$

$$\boldsymbol{e}_y\times(\boldsymbol{e}_xH_x+\boldsymbol{e}_zH_z)\Big|_{y=0}=$$

$$\boldsymbol{e}_xH_z(x,0,z;0)-\boldsymbol{e}_zH_x(x,0,z;0)=$$

$$\boldsymbol{e}_xH_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\beta z-\boldsymbol{e}_z\frac{\beta a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\beta z \tag{4.2.57c}$$

$$\boldsymbol{J}_s(y=b)=-\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{H}\Big|_{y=b}=$$

$$-\boldsymbol{e}_y\times(\boldsymbol{e}_xH_x+\boldsymbol{e}_zH_z)\Big|_{y=b}=$$

$$-\boldsymbol{e}_xH_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\beta z+\boldsymbol{e}_z\frac{\beta a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\beta z=$$

$$-\boldsymbol{J}_s(y=0) \tag{4.2.57d}$$

根据以上的计算结果，可将波导内壁的电流分布绘于图 4－8 中。

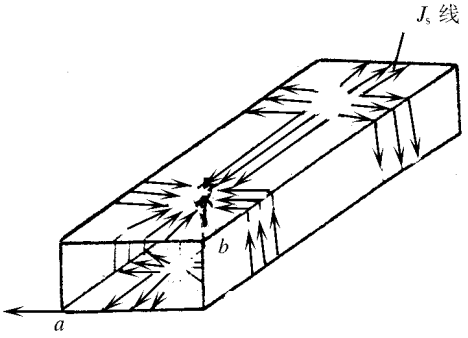


图 4－8　矩形波导中 TE_{10} 模的管壁电流

研究波导管的管壁电流的实际意义在于：在实际应用中，波导往往需要进行连接，在连接处应保证管壁电流能够畅通无阻。而在测量波导的传播特性，又往往需要在波导壁上开槽，这些槽口将不能破坏管壁电流，否则会引起波导内场的改变，使得测量失去意义，因而这些槽的位置就应开在不切断管壁电流的地方。根据上面对管壁电流的分析，并结合图 4－8，在波导壁中央（$x=\frac{a}{2}$）处纵向开槽，将不会切断管壁电流，如图 4－9 所示。但在另一种情况下，若需从一个波导中耦合出一定能量激励另一波导时，或将波导开口作为天线使用时，则应把槽开在最大限度切断管壁电流的位置，如图 4－10 所示。

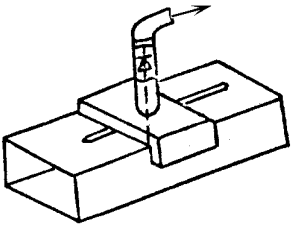


图 4－9　波导管壁中央开槽用作测量线的示意图

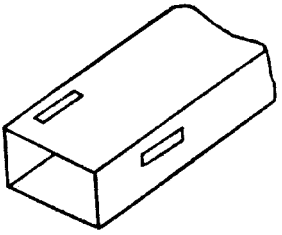


图 4－10　在波导管壁上开槽切断管壁电流的示意图

例 4.11　管壁电流分布。

矩形波导的截面尺寸为 $a\times b$，试求出 TM_{11} 模的管壁电流。

解：TM_{11} 模的场结构表示式为

$$E_x(x,y,z)=-\frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$E_y(x,y,z)=-\frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$E_z(x,y,z)=E_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$H_x(x,y,z)=\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$H_y(x,y,z)=-\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$H_z(x,y,z)=0$$

式中

$$k_c^2=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2$$

$$\gamma=\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

管壁电流为

$$\boldsymbol{J}_s\Big|_{x=0}=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{H}\Big|_{x=0}=-\boldsymbol{e}_z\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\pi}{a}E_0\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$$\boldsymbol{J}_s\Big|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{H}\Big|_{x=a}=-\boldsymbol{e}_z\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\pi}{a}E_0\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$$\boldsymbol{J}_s\Big|_{y=0}=\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{H}\Big|_{y=0}=-\boldsymbol{e}_z\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$$\boldsymbol{J}_s\Big|_{y=b}=-\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{H}\Big|_{y=b}=-\boldsymbol{e}_z\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

场线分布如图 4－11 所示。

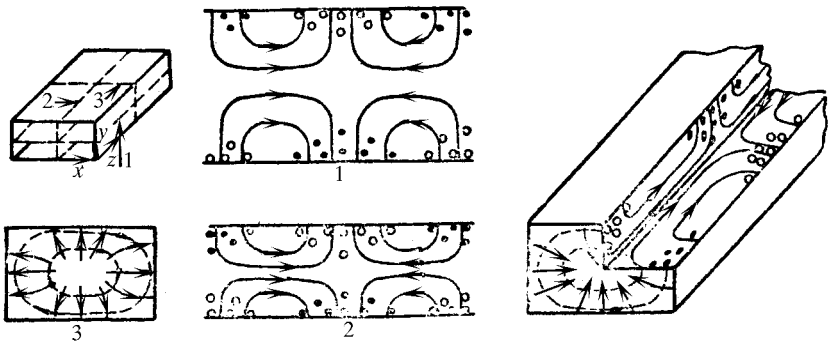


图 4－11　矩形波导中 TM_{11} 模的场结构

4. 主模的功率传输

在矩形波导中传播 TE_{10} 波时，其平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{\text{平}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*}] \tag{4.2.58}$$

将 TE_{10} 模的场分量

$$H_z(x,y,z)=H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$$E_x(x,y,z)=0$$

$$E_y(x,y,z)=\frac{-\mathrm{j}\omega\mu a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$$H_x(x,y,z)=\frac{\mathrm{j}a\beta}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$$H_y(x,y,z)=0$$

$$E_z(x,y,z)=0$$

代入式(4.2.58)，得

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[(\boldsymbol{e}_yE_y)\times(\boldsymbol{e}_xH_x+\boldsymbol{e}_zH_z)^{*}]=\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_yH_x^{*})=$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_z\frac{\omega\mu\beta a^2}{\pi^2}H_0^2\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \tag{4.2.59}$$

说明波导只有沿 z 方向传输的能量，对于尺寸为 $a\times b$ 的矩形波导，其沿 z 方向传输的平均功率为

$$P=\int_0^a\int_0^b\boldsymbol{S}_{\text{平均}}\cdot\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\int_0^b\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_yH_x^{*})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b|E_yH_x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为对于 TE 波，由波阻抗的定义式(4.1.3a)，得

$$E_y=-Z_{\text{TE}}H_x$$

所以

$$P=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left|\frac{E_0^2}{Z_{\text{TE}_{10}}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{ab}{4\eta}E_0^2\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{\text{c}})^2}=$$

$$\frac{ab}{480\pi}E_0^2\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \tag{4.2.60}$$

式中，$|E_0|=\frac{\omega\mu a H_0}{\pi}$为激励源的电场强度。

由式(4.2.60)可知：

(1)波导横截面尺寸 $a\times b$ 越大，波导所传输的功率就越大。

(2)对给定工作频率的电磁波，波导尺寸受单模传输条件的限制。

(3)对给定尺寸的矩形波导，工作频率越高(工作波长越小)，波导所传输的功率越大。但同样受单模传输条件限制。

(4)激励源强度 E_0 越大，波导中传输的功率越大。但当 E_0 大于某一值时($E_0\geqslant E_{br}$)，波导将被击穿，E_{br}称为击穿场强，相应的功率为击穿功率 P_{br}。

$$P_{br}=\frac{1}{480\pi}abE_{br}^2\sqrt{1-\left(\frac{a}{2a}\right)^2} \tag{4.2.61}$$

因此，为了在传输大功率时波导不会被击穿，常常选择

$$P\approx\left(\frac{1}{3}\sim\frac{1}{5}\right)P_{br} \tag{4.2.62}$$

作为波导容许传输的功率值。

例 4.12　击穿功率。

试计算 BJ－100($a\times b=22.86\text{mm}\times10.16\text{mm}$)波导传播电磁波频率为 $f=10\text{GHz}$ 时的击穿功率(设波导内充以干燥空气)。

解：击穿功率由式(4.2.61)，得

$$P_{br}=\frac{1}{480\pi}abE_{br}^2\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

干燥空气的击穿电场为

$$E_{br}=30\text{kV/cm}$$

工作波长 λ 为

$$\lambda=\frac{c}{f}=3\text{cm}$$

将相应的数据代入 P_{br}的计算公式，得

$$P_{br}=1.046\times10^6\text{ W}$$

练　习　题

4.2－1　在填充介质为 $\varepsilon_r=9$ 的矩形波导($a\times b=7\text{cm}\times3.5\text{cm}$)中传输 TE_{10} 波，试求它的截止频率；当工作频率为 $f=2\text{GHz}$ 时，相速度和波导波长各为多少？

4.2－2　已知一空气填充的矩形波导，尺寸为 $a\times b=6\text{cm}\times4\text{cm}$，传输 TE_{10} 波，若测得电场强度最大值与最小值之间的距离为 4.47cm，求信号源的频率。

4.2－3　今用 BJ－32 矩形波导($a\times b=72.14\text{mm}\times34.04\text{mm}$)做馈线，设波导中传输 TE_{10} 模。测得相邻两波节之间的距离为 10.9cm，求工作波长 λ 和截止波长 λ_c。

4.2－4　已知矩形波导尺寸为 $a\times b=72.14\text{mm}\times34.04\text{mm}$，传播 TE_{10} 模，工作波长为 λ

$=10\text{cm}$，求相速 v_p、波导波长 λ_g 和截止波长 λ_c。

4.2－5　有一空气填充的矩形波导，其尺寸为 $a\times b=2.25\text{cm}\times 1\text{cm}$，工作于 TE_{10} 模，频率为 10GHz。问该波导允许传输的功率值为多少？（空气击穿场强为 30kV/cm）

4.3　圆柱形波导

除矩形波导外，圆柱形波导也是应用较多的一种。由一段圆柱形波导构成的微波元件在微波技术中经常碰到，例如圆柱形谐振腔、雷达发射机到天线之间的旋转关节、微波管的输出窗、旋转式衰减器和移相器等。

圆柱形波导的形状如图 4－12 所示。波导的半径为 a，波导内填充了参数为 ε 和 μ 的完纯介质，波导管壁由理想导体构成。设电磁波沿 $+z$ 方向传播，相应的场为时谐场，其复数形式为

$$\boldsymbol{E}(r,\phi,z)=\boldsymbol{E}(r,\phi)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.3.1}$$

$$\boldsymbol{H}(r,\phi,z)=\boldsymbol{H}(r,\phi)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.3.2}$$

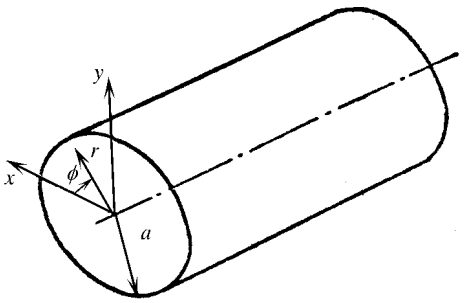


图 4－12　圆形截面波导

由于圆柱形波导是单导体波导，所以不能支承 TEM 波。我们将仍以纵向场分量和横向场分量的关系，得到圆柱形波导中 TM 波和 TE 波的场表示式，进而讨论传播特性。

4.3.1　纵向场分量与横向场分量的关系

在柱坐标系中，将 ∇ 算符分解为横向矢量与纵向矢量之和，即

$$\nabla=\nabla_t+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

其中

$$\nabla_t=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

同时也可将场量分解为横向和纵向，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t+\boldsymbol{e}_zE_z$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{e}_zH_z$$

于是由麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

得

$$(\nabla_t+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z})\times(\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{e}_zH_z)=\mathrm{j}\omega\varepsilon(\boldsymbol{E}_t+\boldsymbol{e}_zE_z) \tag{4.3.3}$$

展开后，得

$$\nabla_t\times\boldsymbol{H}_t+\nabla_t\times\boldsymbol{e}_zH_z+\boldsymbol{e}_z\times\frac{\partial\boldsymbol{H}_t}{\partial z}+\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z\frac{\partial H_z}{\partial z}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_t+\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{e}_zE_z$$

故得

$$\nabla_t\times\boldsymbol{H}_t=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{e}_zE_z \tag{4.3.4}$$

$$\nabla_t\times\boldsymbol{e}_zH_z+\boldsymbol{e}_z\times\frac{\partial\boldsymbol{H}_t}{\partial z}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_t \tag{4.3.5}$$

同理由麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$

得

$$\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{e}_zH_z \tag{4.3.6}$$

$$\nabla_t\times\boldsymbol{e}_zE_z+\boldsymbol{e}_z\times\frac{\partial\boldsymbol{E}_t}{\partial z}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_t \tag{4.3.7}$$

利用式(4.3.4)～式(4.3.7)，并考虑到$\frac{\partial}{\partial z}\leftrightarrow-\gamma$，得

$$\boldsymbol{E}_t=\frac{1}{\gamma^2+k^2}(-\gamma\nabla_tE_z+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{e}_z\times\nabla_tH_z) \tag{4.3.8a}$$

$$\boldsymbol{H}_t=\frac{1}{\gamma^2+k^2}(-\gamma\nabla_t\boldsymbol{H}_z-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{e}_z\times\nabla_tE_z) \tag{4.3.8b}$$

这就是柱形系统中各个横向分量与纵向分量的关系。

4.3.2 圆柱形波导中的 TM 波

对于 TM 波，由于 $H_z=0$，故波导中的场量由 E_z 完全确定，由波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0$$

可得 E_z 满足的波动方程

$$\nabla^2E_z+k^2E_z=0 \tag{4.3.9}$$

即

$$(\nabla_t^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2})E_z+k^2E_z=0$$

考虑到

$$E_z(r,\phi,z)=E_z(r,\phi)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

故

$$\nabla_t^2E_z+(\gamma^2+k^2)E_z=0 \tag{4.3.10}$$

令

$$\gamma^2+k^2=k_c^2$$

k_c 称为截止波数，于是式(4.3.10)变为

$$\nabla_t^2E_z+k_c^2E_z=0 \tag{4.3.11}$$

在柱坐标系下，式(4.3.11)为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2}+k_c^2 E_z=0 \tag{4.3.12}$$

利用分离变量法求解上式，令

$$E_z(r,\phi)=R(r)\varphi(\phi) \tag{4.3.13}$$

将式(4.3.13)代入式(4.3.12)中，得

$$\varphi R''+\frac{1}{r}\varphi R'+\frac{1}{r^2}R\varphi''+k_c^2 R\varphi=0$$

上式两端同乘以$\frac{r^2}{R\phi}$，得

$$\frac{r^2}{R}R''+\frac{r}{R}R'+k_c^2 r^2=-\frac{1}{\varphi}\varphi''$$

上式左边仅为 r 的函数，而右边仅为 ϕ 的函数，因此，其成立的条件是：

$$-\frac{1}{\varphi}\varphi''=m^2$$

$$\frac{r^2}{R}R''+\frac{r}{R}R'+k_c^2 r^2=m^2$$

即得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2\varphi=0 \tag{4.3.14}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+(k_c^2 r^2-m^2)R=0 \tag{4.3.15}$$

式(4.3.14)的通解为 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$ 的线性组合

$$\phi=A\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases} \tag{4.3.16}$$

为满足场量沿 ϕ 的变化具有 2π 周期性，m 的取值应为整数，即

$$m=0,1,2,\cdots$$

式(4.3.15)为 m 阶的贝塞尔方程，其解为贝塞尔函数

$$R(r)=B_1\mathrm{J}_m(k_c r)+B_2\mathrm{Y}_m(k_c r) \tag{4.3.17}$$

式中，$\mathrm{J}_m(k_c r)$称为 m 阶第一类贝塞尔函数；$\mathrm{Y}_m(k_c r)$为 m 阶第二类贝塞尔函数。图 4－13(*a*)、(*b*)分别表示第一类贝塞尔函数和第二类贝塞尔函数的变化曲线。

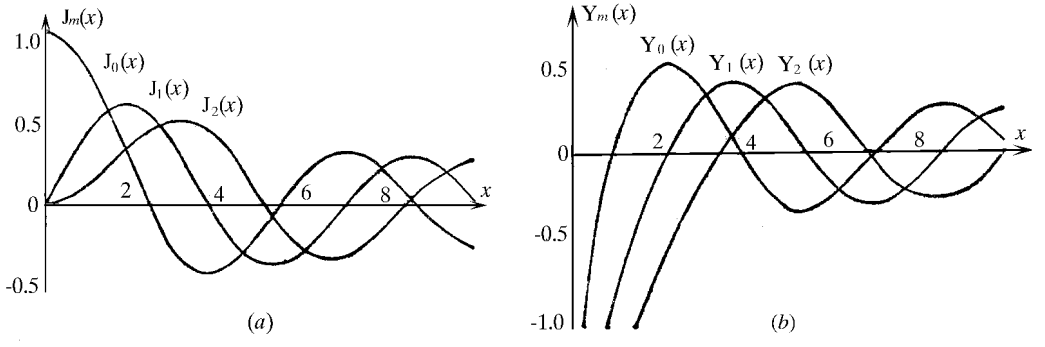


图 4－13　第一类贝塞尔函数(*a*)与第二类贝塞尔函数(*b*)

根据第二类贝塞尔函数的性质

$$Y_m(0)\to\infty$$

而波导中心处场量为有限值，则要求式(4.3.17)中

$$B_2=0$$

于是得到

$$E_z(r,\varphi)=E_0 J_m(k_c r)\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}e^{-\gamma z} \tag{4.3.18}$$

$$E_0=AB_1(\text{由激励源确定})$$

再根据理想导体的边界条件

$$E_z\Big|_{r=a}=0 \tag{4.3.19}$$

即

$$R(a)\varphi=0$$

得

$$R(a)=0 \tag{4.3.20}$$

将其代入式(4.3.17)，得

$$J_m(k_c a)=0 \tag{4.3.21}$$

满足以上条件的 $k_c a$ 的值称为贝塞尔函数的零点。由图 4－13(a)可知，贝塞尔函数有无穷多个分立的零点。用 p_{mn} 表示 m 阶贝塞尔函数的第 n 个零点，则

$$k_c a=p_{mn}$$

于是我们可以得到相应 TM 波的截止波数为

$$k_{cEmn}=\frac{p_{mn}}{a} \tag{4.3.22}$$

表 4－1 列出了 p_{mn} 的前几个值。

表 4－1　贝塞耳函数 $J_n(p_{mn})=0$ 的根 p_{mn}

n \ m	0	1	2	3	4	5
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016	7.58834	8.77148
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102	11.06471	12.33860
3	8.65373	10.17347	11.61984	13.01520	14.37254	15.70017
4	11.79153	13.32369	14.79595	16.22347	17.61597	18.98013

根据式(4.3.8a)和式(4.3.8b)可得到圆波导中 TM 波的场分量：

$$E_z(r,\varphi,z)=E_0 J_m(k_c r)\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}e^{-\gamma z} \tag{4.3.23a}$$

$$E_r(r,\phi,z)=-\frac{\gamma}{k^2+\gamma^2}E_0 J'_m(k_c r)\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}e^{-\gamma z} \tag{4.3.23b}$$

$$E_\phi(r,\phi,z)=-\frac{\gamma m}{(k^2+\gamma^2)r}E_0 J_m(k_c r)\begin{cases}\sin m\phi\\ -\cos m\phi\end{cases}e^{-\gamma z} \tag{4.3.23c}$$

$$H_r=-\frac{1}{Z_{TM}}E_\phi \tag{4.3.23d}$$

$$H_{\varphi}=\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}}E_r \tag{4.3.23e}$$

式中

$$Z_{\mathrm{TM}}=\frac{E_r}{H_{\phi}}=-\frac{E_{\phi}}{H_r}$$

为圆柱形波导中 TM 波的波阻抗。

由此可见：

(1)圆柱形波导中的 TM 波存在不同的模式 TM_{mn} 模。

(2)不同模式的截止波数为 $k_{\mathrm{cE}mn}$，由式(4.3.23)确定。

(3)由于我们对贝塞尔函数的根 p_{mn} 的编号从 $n=1$ 开始，所以不存在 TM_{m0} 模，但是存在 TM_{0n} 模。

4.3.3 圆柱形波导中的 TE 波

对于 TE 波，由于 $E_z=0$，故波导中的场量由 H_z 完全确定。而 H_z 满足的波动方程

$$\nabla^2 H_z+k^2 H_z=0$$

在柱坐标下为

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2}+k_{\mathrm{c}}^2 E_z=0 \tag{4.3.24}$$

式中

$$k_{\mathrm{c}}^2=r^2+k^2$$

与讨论 TM 模类似，式(4.3.24)的解为

$$H_z(r,\phi,z)=H_0 \mathrm{J}_m(k_{\mathrm{c}}r)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.3.25}$$

式中

$$m=0,1,2,\cdots$$

H_0 为常数，由激励源强度确定。

但对于 TE 波，其边界条件

$$E_{\varphi}\Big|_{r=a}=0 \tag{4.3.26}$$

由式(4.3.8a)，上式可写成

$$\frac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r=a}=0 \tag{4.3.27}$$

将其代入式(4.3.25)，得

$$\mathrm{J}'_m(k_{\mathrm{c}}a)=0 \tag{4.3.28}$$

满足上述条件的 $k_{\mathrm{c}}a$ 的值为 m 阶贝塞尔函数导数的零点，即图 4－13(a)的 $\mathrm{J}_m(x)$ 曲线上斜率为零的点。它们也有无穷多个分立值，记为 q_{mn}，则

$$k_{\mathrm{c}}a=q_{mn}$$

于是我们可以得相应 TE 波的截止波数为

$$k_{\mathrm{cH}mn}=\frac{q_{mn}}{a} \tag{4.3.29}$$

q_{mn}的值见表 4－2。

表 4－2　$J'_m(q_{mn})=0$ 的根 q_{mn}

n \ m	0	1	2	3	4	5
1	3.83171	1.84118	3.05424	4.20119	5.31755	6.41562
2	7.01559	5.33144	6.70613	8.01524	9.28240	10.51986
3	10.17347	8.53632	9.96947	11.34592	12.68191	13.98719
4	13.32369	11.70600	13.17037	14.58585	15.96411	17.31282

根据式(4.3.8a)和式(4.3.8b)可得圆波导中 TE 波的场分量：

$$H_z(r,\phi,z)=H_0 J_m(k_c r)\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}e^{-\gamma z} \tag{4.3.30a}$$

$$H_r(r,\phi,z)=-\frac{1}{k^2+\gamma^2}H_0 J'_m(k_c r)\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}e^{-\gamma z} \tag{4.3.30b}$$

$$H_\phi(r,\phi,z)=\frac{\gamma m}{k^2+\gamma^2}H_0 J_m(k_c r)\begin{cases}\sin m\phi\\ -\cos m\phi\end{cases}e^{-\gamma z} \tag{4.3.30c}$$

$$E_r=Z_{TE}H_\phi \tag{4.3.30d}$$

$$E_\phi=-Z_{TE}H_r \tag{4.3.30e}$$

式中

$$Z_{TE}=\frac{E_r}{H_\phi}=-\frac{E_\phi}{H_r} \tag{4.3.31}$$

为圆柱形波导中 TE 波的波阻抗。

4.3.4　圆柱形波导中波的传播特性

和矩形波导相同，给定了圆波导的尺寸(半径 a)，对于一定的模式(TE_{mn}模和 TM_{mn}模)可以根据式(4.3.29)和式(4.3.22)求出其截止波数 k_c。

1. TM_{mn}模

截止频率

$$f_c=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{p_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4.3.32}$$

截止波长

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{k_c}=\frac{2\pi a}{p_{mn}} \tag{4.3.33}$$

相位常数

$$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{k^2-\left(\frac{p_{mn}}{a}\right)^2} \tag{4.3.34}$$

波导波长

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-\left(\frac{p_{mn}}{a}\right)^2}}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{p_{mn}\lambda}{2\pi a}\right)^2}} \tag{4.3.35}$$

相速度

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{p_{mn}\lambda}{2\pi a}\right)^2}} \tag{4.3.36}$$

波阻抗

$$Z_{TM}=\eta\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}=\eta\sqrt{1-\left(\frac{p_{mn}\lambda}{2\pi a}\right)^2} \tag{4.3.37}$$

2. TE_{mn} 模

TE_{mn} 模的截止频率、截止波长、相位常数、波导波长、相速度的公式与相应 TM_{mn} 模的参数公式相同，只是将其中的 p_{mn} 换成 q_{mn}。

波阻抗

$$Z_{TE}=\eta\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}=\eta\Big/\sqrt{1-\left(\frac{q_{mn}\lambda}{2\pi a}\right)^2} \tag{4.3.38}$$

与矩形波导一样，我们可以根据不同模式截止波长的大小，绘出圆波导中截止波长的分布图，如图 4－14 所示。表 4－3 为圆波导中一些模式的截止波长。

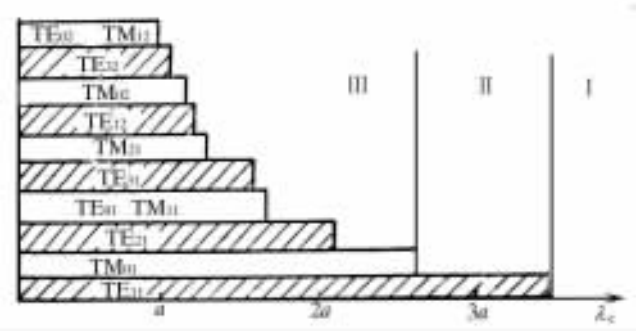


图 4－14　圆波导中截止波长分布图

由以上对圆波导的分析，可以看出：

(1)圆柱形波导中存在无穷多个 TM_{mn} 模和 TE_{mn} 模。

(2)圆柱形波导中最低频率模式为 TE_{11} 模，其截止波长为 $3.41a$，它是圆柱形波导中的主模。

(3)圆柱形波导中存在双重简并：

①由于模式的截止波长相同，因而两种波型同时存在。例如 $(\lambda_c)_{TE_{0n}}=(\lambda_c)_{TM_{1n}}$，因此，$TE_{0n}$ 模、TM_{1n} 模存在简并现象，这和矩形波导中模式的简并相同。

②“极化简并”。从场分量方程可以看出，对于 $m\neq 0$ 的模式，场沿 φ 方向的分布存在着 $\sin m\varphi$ 和 $\cos m\varphi$ 两种可能性，对于同一个 TM_{mn} 模或 TE_{mn} 模，它们结构有两个，是简并的。

表 4－3　圆波导中一些模式的截止波长

波　型	TE°_{11}	TM°_{01}	TE°_{21}	TE°_{01} TM°_{11}	TE°_{31}	TM°_{21}	TE°_{12}	TM°_{02}	TE°_{32}

q_{mn} 或 p_{mn}	1.841	2.405	3.054	3.832	4.201	5.135	5.332	5.520	6.705
λ_c	$3.41a$	$2.62a$	$2.06a$	$1.64a$	$1.50a$	$1.22a$	$1.18a$	$1.14a$	$0.94a$

4.3.5 圆柱形波导中的几个主要模式

1. 主模 TE_{11}

由于在圆柱形波导中 TE_{11} 模具有最长的截止波长，$\lambda_c=3.41a$，因此，TE_{11} 模是圆柱形波导中的主模，其场分量

$$H_z=H_0J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix}e^{-\gamma z} \tag{4.3.39a}$$

$$H_r=-\mathrm{j}\frac{\beta a}{1.841}H_0J_1'\left(\frac{1.841}{a}r\right)\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix}e^{-\gamma z} \tag{4.3.39b}$$

$$H_\phi=\mathrm{j}\frac{\beta a^2}{(1.841)^2 r}H_0J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\begin{Bmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\end{Bmatrix}e^{-\gamma z} \tag{4.3.39c}$$

$$E_r=Z_{TE_{11}}H_\phi=-\mathrm{j}\frac{\omega\mu a^2}{(1.841)^2 r}H_0J_1\left(\frac{1.841}{a}r\right)\begin{Bmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{Bmatrix}e^{-\gamma z} \tag{4.3.39d}$$

$$E_\phi=-Z_{TE_{11}}H_r=\mathrm{j}\frac{\omega\mu a}{1.841}H_0J_1'\left(\frac{1.841}{a}r\right)\begin{Bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{Bmatrix}e^{-\gamma z} \tag{4.3.39e}$$

$$E_z=0 \tag{4.3.39f}$$

其场结构如图 4－15(a)、(b)所示。

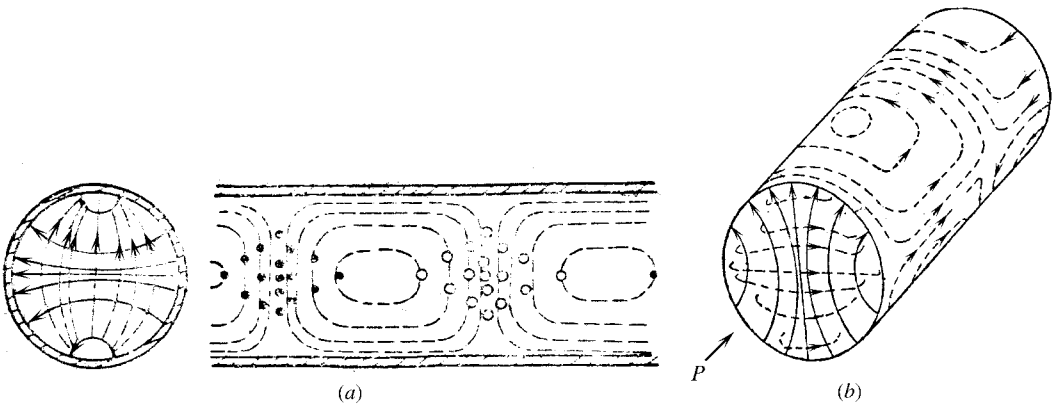


图 4－15　圆波导中 TE_{11} 模的场结构(a)及其场结构立体分布(b)

对于给定尺寸 a 的圆波导，即使将工作波长限制在 $2.62a<\lambda<3.41a$ 之间，并且波导中只有 TE_{11} 模，但由于存在简并，也不能实现单模传输，所以一般不用圆波导传输信号。

2. TE_{01} 模

TE_{01} 模是圆柱形波导中的高次模，由于 $m=0$，其场结构是轴对称的(波导中的 TE_{0n} 和 TM_{01} 模都是轴对称的)。

场分量：

$$H_z = H_0 \mathrm{J}_0\left(\frac{3.832}{a}r\right)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.3.40a}$$

$$H_r = -\mathrm{j}H_0\,\frac{\beta a}{3.832}\mathrm{J}_1\left(\frac{3.832}{a}r\right)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.3.40b}$$

$$H_\phi = 0 \tag{4.3.40c}$$

$$E_\phi = -Z_{\mathrm{TE}_{01}} H_r = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu a}{3.832}H_0\mathrm{J}_1\left(\frac{3.832}{a}r\right)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{4.3.40d}$$

$$E_r = 0 \tag{4.3.40e}$$

$$E_z = 0 \tag{4.3.40f}$$

其场结构如图 4－16(a)、(b)所示。

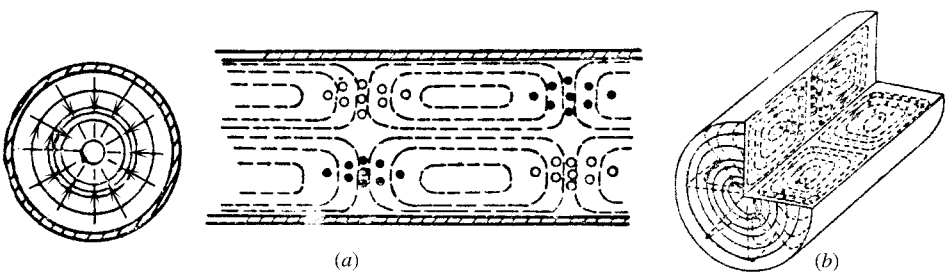


图 4－16　圆波导中 TE_{01} 模场结构(a)与圆波导中 TE_{01} 模立体场结构(b)

从场分量可知，TE_{01} 模的电场只有 E_ϕ 分量，因而电力线在横截面内是闭合的。而磁场只有 H_r 及 H_z 分量，由电磁场边界条件可知，只有 H_z 分量才能在管壁上感应产生管壁电流，且产生的管壁电流只有 e_ϕ 分量，如图 4－17 所示。

图 4－18 给出了在铜质圆波导管中三种重要模式的衰减特性。

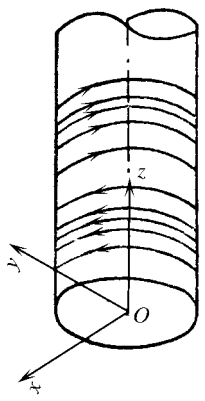


图 4－17　圆波导中 TE_{01} 模管壁电流

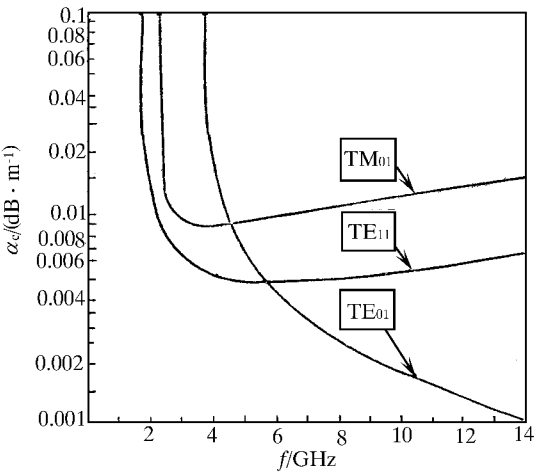


图 4－18　圆波导管中的衰减特性

由图 4－18 可知，只有 TE_{01} 模的衰减常数 α_c 随着工作频率的增加而单调下降。因此，管壁电流的热损耗也将单调下降。由于 TE_{01} 模的这一特点，使它特别适合于作高 Q 值谐振腔的工作模式，以及用于微波长距离传输。

TE_{01}模是轴对称的，所以没有极化简并，但它与 TM_{11}模式简并。因此若将其用作传输模时，需采取一些措施阻止其它波型的出现。如在波导管内壁上加上一层薄薄的有耗介质，它对 TE_{01}模的衰减不大，因为它在波导壁附近的电场很小，而对有 E_r 分量的那些波型将会大量吸收。另外，把波导做成螺旋结构（图 4－19）或周期螺旋结构，这样就会使一切有纵向电流的波型大大衰减。

3. TM_{01}模

TM_{01}模是圆波导中 TM 波的最低次模式，而且没有简并，截止波长 $\lambda_c=2.62a$。

场分量为

$$E_z=E_0\mathrm{J}_0(k_c r)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$E_r=\frac{\mathrm{j}\beta}{k_c}E_0\mathrm{J}_1(k_c r)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$E_\varphi=0$$

$$H_r=0$$

$$H_\varphi=\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c}E_0\mathrm{J}_1(k_c r)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$H_z=0$$

其中

$$k_c=\frac{2.405}{a}$$

场结构如图 4－20 所示。

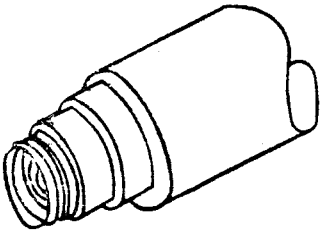
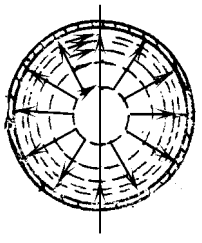


图 4－19　螺旋波导



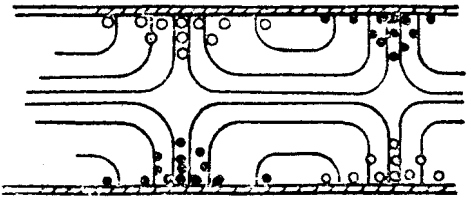


图 4－20　圆波导中 TM_{01}模的场结构

TM_{01}模是圆波导中最低次轴对称模，它没有极化简并，故常用它制成雷达设备中固定发射机和旋转天线之间的旋转关节。

例 4.13　圆柱形波导的波导波长。

一空气填充的圆柱形波导中传输 TE_{01}模，已知 $\lambda/\lambda_c=0.7$，工作频率 $f=3000\mathrm{MHz}$，求波导波长。

解：

$$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}=$$

$$2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1-0.7^2}=4.49\times10^{-2}\ \mathrm{rad/m}$$

故

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{4.49\times10^{-2}}=0.14\mathrm{cm}$$

例 4.14　圆柱形波导中的传播模式。

一空气填充的圆柱形波导，周长为 25.1cm，**其工作频率为** 3GHz，**问该波导内可能的传播模式有哪些？**

解：工作波长为

$$\lambda=\frac{c}{f}=10\text{cm}$$

截止波长 $\lambda<\lambda_r$ **的模式可以传播。**

该波导的半径为

$$a=\frac{l}{2\pi}=\frac{25.1}{2\times3.14}\approx4\text{cm}$$

TE_{11} **模的截止波长为**

$$\lambda_{cTE_{11}}=3.41a\approx13.6\text{cm}$$

TE_{01} **模和** TM_{11} **模的截止波长**

$$\lambda_{cTE_{01}}=1.64a=6.56\text{cm}$$

TM_{01} **模的截止波长为**

$$\lambda_{cTM_{01}}=2.62a=10.48\text{cm}$$

TE_{21} **模的截止波长为**

$$\lambda_{cTE_{21}}=2.06a=8.24\text{cm}$$

其余模式的截止波长都将小于 8.24cm，**所以该圆波导可能传播的模式为** TE_{11} **模和** TM_{01} **模。**

练　习　题

4.3－1　**试计算内径为** 2cm **的圆柱形波导工作在** TE_{01}、TM_{01} **和** TM_{11} **模式时的截止频率以及** $\lambda=1$cm **时的** λ_g、v_p、v_g **和波阻抗。**

4.3－2　**一空气填充的圆柱形波导，传播** TE_{01} **模，当** $\lambda/\lambda_c=0.7$、$f_0=3$GHz **时，求** λ_c、β。**当波导半径增大** 1 **倍时，**$\beta=$ **？**

4.3－3　**何谓波导的简并模？矩形波导和圆波导中的简并有何相同和不同之处？**

4.3－4　**圆柱形波导中的** TE_{11}、TE_{01} **和** TM_{01} **模的特点是什么？**

4.4　同轴波导

同轴波导的形状如图 4－21 **所示，其内导体外径为** a，**外导体内径为** b，**内外导体之间填充参数为** ε、μ **的完纯介质，内外导体为理想导体。当工作波长大于** 10cm **时，通常采用同轴线作传输线。由于同轴线为双导体波导，因此它既可以传播无色散的** TEM **波，也可以传播有色散的** TE **波和** TM **波。**

设电磁波沿 $+z$ **方向传播，相应的场为时谐场，其复数形式为**

$$\boldsymbol{E}(r,\varphi,z)=\boldsymbol{E}(r,\varphi)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

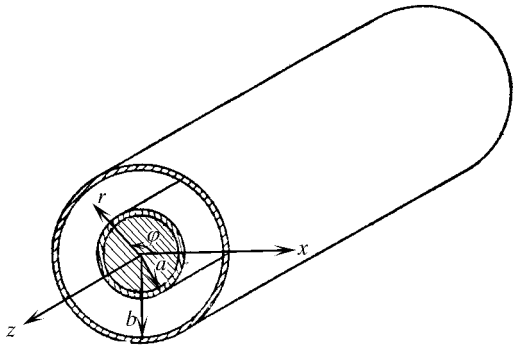


图 4－21　同轴线波导

$$\boldsymbol{H}(r,\varphi,z)=\boldsymbol{H}(r,\varphi)\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

4.4.1　同轴波导中的 TEM 波

TEM 波是无色散波，其截止波数 $k_c=0$，即 $\lambda_c=\infty$。因此，同轴线中的主模是 TEM 模。

1. 场结构

由麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$

在柱坐标系下，此方程可写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}+\gamma E_\phi=-\mathrm{j}\omega\mu H_r \tag{4.4.1a}$$

$$-\gamma E_r-\frac{\partial E_z}{\partial r}=-\mathrm{j}\omega\mu H_\phi \tag{4.4.1b}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\phi}=-\mathrm{j}\omega\mu H_z \tag{4.4.1c}$$

由麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

在柱坐标系下，此方程可写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}+\gamma H_\varphi=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_r \tag{4.4.2a}$$

$$-\gamma H_r-\frac{\partial H_z}{\partial r}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_\phi \tag{4.4.2b}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\phi}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z \tag{4.4.2c}$$

对于 TEM 波，$E_z=0$，$H_z=0$，电场和磁场都在横截面内。又因为磁力线是闭合曲线，故磁场只有 H_φ 分量，因而电场只有 E_r 分量。于是式(4.4.1)和式(4.4.2)变为

$$-\gamma E_r=-\mathrm{j}\omega\mu H_\phi \tag{4.4.3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\phi}=0 \tag{4.4.4}$$

$$\gamma H_\phi=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_r \tag{4.4.5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}=0 \tag{4.4.6}$$

考虑到 $\gamma=-\mathrm{j}\beta$,以上四式可写为

$$\beta E_r=\omega\mu H_\phi \tag{4.4.7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \phi}=0 \tag{4.4.8}$$

$$\beta H_\phi=\omega\varepsilon E_r \tag{4.4.9}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}=0 \tag{4.4.10}$$

式(4.4.10)的解为

$$H_\phi=\frac{H_0}{r} \tag{4.4.11}$$

考虑沿$+z$方向的传播因子 $\mathrm{e}^{-\gamma z}$,于是

$$H_\phi=\frac{H_0}{r}e^{-\gamma z} \tag{4.4.12}$$

式中,H_0 为常数,由激励源强度确定。

由式(4.4.7),有

$$E_r=\frac{\omega\mu}{\beta}H_\phi=\frac{\omega\mu}{\beta}\frac{H_0}{r}e^{-\gamma z} \tag{4.4.13}$$

图 4－22 为同轴线中 TEM 波的场分布图。

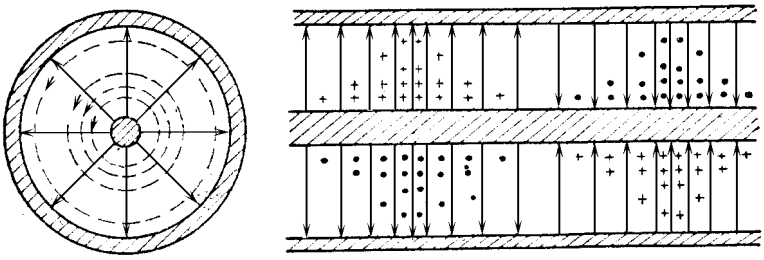


图 4－22　同轴线中 TEM 波的场图

由于 TEM 波的截止波数 $k_c=0$,这表明任何频率的电磁波都可以 TEM 波形式在同轴线中传播。

2. 传播特性

传播常数

$$\gamma=\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{4.4.14}$$

相位常数

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{4.4.15}$$

波导波长

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\lambda \tag{4.4.16}$$

表明波长等于相应介质中的波长。

相速度

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v \tag{4.4.17}$$

表明相速度等于相应介质中的速度。

波阻抗

$$Z_{TEM}=\frac{|E_r|}{|E_\phi|}=\frac{\beta}{\omega\varepsilon}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\eta \tag{4.4.18}$$

等于介质的本征阻抗。

4.4.2 同轴波导中的 TM 波

同轴线中 TM 波的分析方法和圆波导类似，其纵向场分量和横向场分量的关系也可由式(4.3.8a)和式(4.3.8b)确定。而 E_z 满足波动方程的解

$$E_z(r,\phi)=R(r)\phi(\varphi)e^{-\gamma z} \tag{4.4.19}$$

其中 $\phi(\varphi)$和 $R(r)$满足的常微分方程仍为式(4.3.14)和式(4.3.15)，即

$$\frac{d^2\varphi}{d\phi^2}+m^2\varphi=0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(k_c^2r^2-m^2)R=0$$

$\phi(\varphi)$的通解为

$$\varphi(\phi)=A\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}$$

在同轴线问题中，仍要求满足场量沿 ϕ 的变化具有 2π 的周期性，故 m 的取值应为整数，即 $m=0,1,2,\cdots$。

$R(r)$的通解为

$$R(r)=B_1J_m(k_cr)+B_2Y_m(k_cr)$$

对于同轴线，电磁波是在内外导体之间传播，因此，求解区域不包含 $r=0$。于是，第二类贝塞尔函数 $Y_m(k_cr)$应存在于解中。

此时的边界条件为

$$E_z\Big|_{r=a}=0 \tag{4.4.20}$$

$$E_z\Big|_{r=b}=0 \tag{4.4.21}$$

将其代入通解中，得

$$B_1J_m(k_ca)+B_2Y_m(k_ca)=0 \tag{4.4.22a}$$

和

$$B_1J_m(k_cb)+B_2Y_m(k_cb)=0 \tag{4.4.22b}$$

方程组式(4.4.22)有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix}J_m(k_ca) & Y_m(k_ca)\\ J_m(k_cb) & Y_m(k_cb)\end{vmatrix}=0$$

即

$$\frac{\mathrm{J}_m(k_c a)}{\mathrm{J}_m(k_c b)}=\frac{\mathrm{Y}_m(k_c a)}{\mathrm{Y}_m(k_c b)} \tag{4.4.23}$$

式(4.4.23)是一个超越方程，它有无穷多个独立的根，每个根决定一个 k_c 值，即确定一个截止波数。找出式(4.4.23)的解以后，将其代入式(4.4.22)即可求出 B_1 和 B_2，从而得到 $R(r)$，即确定 E_z。式(4.4.23)严格求解十分困难，但对于当 $k_c a$ 和 $k_c b$ 很大时，可采用近似方法求解，因为这时

$$\mathrm{J}_m(k_c a)\approx\sqrt{\frac{2}{k_c a\pi}}\cos\left(k_c a-\frac{2m+1}{4}\pi\right)$$

$$\mathrm{Y}_m(k_c a)\approx\sqrt{\frac{2}{k_c a\pi}}\sin\left(k_c a-\frac{2m+1}{4}\pi\right)$$

$$\mathrm{J}_m(k_c b)\approx\sqrt{\frac{2}{k_c b\pi}}\cos\left(k_c b-\frac{2m+1}{4}\pi\right)$$

$$\mathrm{Y}_m(k_c b)\approx\sqrt{\frac{2}{k_c b\pi}}\sin\left(k_c b-\frac{2m+1}{4}\pi\right)$$

代入式(4.4.23)，整理后，得

$$\frac{\sin\left(k_c a-\frac{2m+1}{4}\pi\right)}{\cos\left(k_c a-\frac{2m+1}{4}\pi\right)}=\frac{\sin\left(k_c b-\frac{2m+1}{4}\pi\right)}{\cos\left(k_c b-\frac{2m+1}{4}\pi\right)}$$

设

$$x=k_c b-\frac{2m+1}{4}\pi$$

$$y=k_c a-\frac{2m+1}{4}\pi$$

得

$$\sin x\cos y-\cos x\sin y=0$$

即

$$\sin(x-y)=\sin k_c(b-a)\approx 0$$

得同轴线中的截止波数为

$$k_c\approx\frac{n\pi}{b-a}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

截止波长为

$$\lambda_{c\mathrm{TM}_{mn}}\approx\frac{2}{n}(b-a)$$

由此可见，TM 模的最低模式为 TM_{01} 模，其截止波长为

$$\lambda_{c\mathrm{TM}_{01}}\approx 2(b-a) \tag{4.4.24}$$

由 $\lambda_{c\mathrm{TM}_{mn}}$ 的表达式还可以知道，在大宗量近似情况下，同轴线内 TM 波的截止波长与 m 无关。这说明，在 TM_{01} 出现的同时，有可能出现 TM_{11}、TM_{21}、TM_{31} 等，这是我们所不希望出现的，故在设计和使用同轴线时，应避免 TM 波的出现。

4.4.3 同轴波导中的 TE 波

同轴线中 TE 波的分析方法和圆波导类似。所不同的仍是此时求解区域不包含 $r=$

0。因此，第二类贝塞尔函数 $Y_m(k_c r)$ 应出现在 H_z 的解中

$$H_z(r,\phi,z)=[C_1 J_m(k_c r)+C_2 Y_m(k_c r)]\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix} e^{-\gamma z} \tag{4.4.25}$$

该问题的边界条件为

$$E_\phi\Big|_{r=a}=0 \tag{4.4.26}$$

$$E_\phi\Big|_{r=b}=0 \tag{4.4.27}$$

由圆柱坐标系中纵向场与横向场的关系式(4.3.8a)，并考虑 $E_z=0$，则得

$$E_\phi=\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

于是边界条件式(4.4.26)和式(4.4.27)变为

$$\frac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r=a}=0 \tag{4.4.28}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r=b}=0 \tag{4.4.29}$$

将其代入 H_z 的通解式(4.4.25)，得

$$C_1 J'_m(k_c a)+C_2 Y'_m(k_c a)=0$$
$$C_1 J'_m(k_c b)+C_2 Y'_m(k_c b)=0$$

得

$$\frac{J'_m(k_c a)}{J'_m(k_c b)}=\frac{Y'_m(k_c a)}{Y'_m(k_c b)} \tag{4.4.30}$$

与式(4.4.23)一样，上式也是一个超越方程，严格求解十分困难，一般采用数值解法，用近似方程可求得 $n=1, m\neq 0$ 时的 TE_{m1} 模的截止波长

$$\lambda_{cTE_{m1}}\approx\frac{\pi(a+b)}{m}\qquad(m=1,2,3,\cdots) \tag{4.4.31}$$

对于最低的 TE_{11} 模

$$\lambda_{cTE_{11}}\approx\pi(a+b) \tag{4.4.32}$$

对于 $m=0$ 的情况，若假设 $k_c a$ 和 $k_c b$ 很大，可采用三角函数近似法得到

$$\lambda_{c(TE_{01})}\approx 2(b-a) \tag{4.4.33}$$

由式(4.4.24)、式(4.4.32)和式(4.4.33)可见，同轴中最低型的高次模为 TE_{11} 模。

图 4－23 给出了 TE_{11}、TE_{01} 和 TM_{01} 模的场结构图形。

例 4.15 同轴线的尺寸选择。

已知信号源工作波长为 λ，若要使同轴线中只存在 TEM 模，则同轴线的尺寸 a 和 b 应满足什么关系？

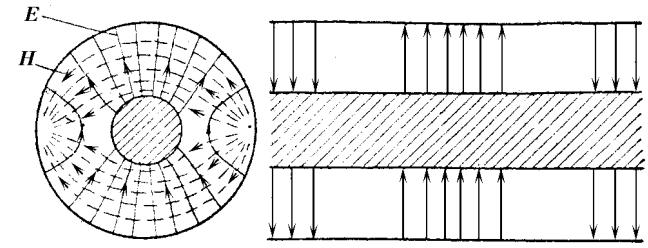
解：因为同轴线中的最低型高次模为 TE_{11}，其截止波长为

$$\lambda_{c(TE_{11})}=\pi(a+b)$$

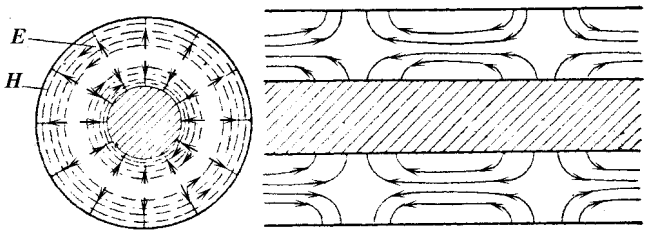
于是，应保证工作波长满足

$$\lambda>\lambda_{c(TE_{11})}$$

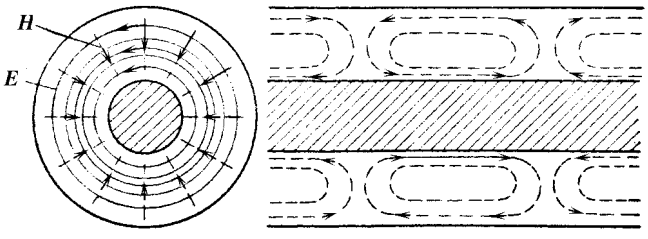
所以



(*a*)



(*b*)



(*c*)

图 4－23　同轴线中 TE_{11}、TM_{01}、TE_{01} 模的场图

(*a*) TE_{11} 模；(*b*) TM_{01} 模；(*c*) TE_{01} 模。

$$(a+b)<\frac{\lambda}{\pi}$$

为最后确定尺寸，还需决定 a 与 b 之比值，此关系可根据功率容量最大来确定，或由损耗最小来确定。

功率容量最大要求

$$\frac{b}{a}=1.65$$

最小衰减条件要求

$$\frac{b}{a}=3.59$$

例 4.16　同轴线中波的相速度。

空气同轴线的尺寸为 $a=1\text{cm}$，$b=4\text{cm}$，若工作波长为 10cm，求 TE_{11} 模和 TEM 模的相速度。

解:因为 TE_{11} 模的截止波长为

$$\lambda_{c(TE_{11})}=\pi(a+b)=3.14(1+4)=15.7\text{cm}$$

所以 TE_{11} 模相速度为

$$v_p=\frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{1-\left(\frac{10}{15.7}\right)^2}}\approx3.9\times10^8\text{m/s}$$

TEM 模的相速度为

$$v_p=v=3\times10^8\text{m/s}$$

练　习　题

4.4－1　空气同轴线的尺寸为 $a=1\text{cm}$,$b=4\text{cm}$,计算前三种高次模的截止波长。为保证只传输 TEM 模,工作波长至少应为多少?

4.5　微波谐振器

在微波技术中,微波谐振器有着非常广泛的用途。它主要分为两大类:传输线型微波谐振器和非传输线型微波谐振器。

传输线型谐振器主要包括矩形空腔谐振器、圆柱形空腔谐振器、同轴线型谐振器及微带谐振器等。

在微波波段,采用微波谐振器作谐振回路而不采用集中参数 LC 谐振回路,这主要是因为:

(1)在微波波段,由于波长与谐振回路尺寸相近,故对于"开放式"的 LC 谐振回路存在较强的电磁辐射损耗,辐射损耗的能量与频率的平方或四次方成正比。

(2)由于频率增高,趋肤效应引起的损耗将急剧增加。

(3)在微波波段,LC 谐振回路中的电容和电感很小,难于制做。

(4)由于损耗增大,谐振回路的品质因数会降低。

由于这些缺点,在分米波段将不再采用 LC 集中参数谐振回路。这时可采用双导体短路线或开路线作谐振回路(下一章将讨论)。但是若频率继续增加到 1GHz 时,将采用下面介绍的空腔谐振器作谐振回路。

4.5.1　矩形谐振腔

矩形谐振腔是由一段两端用导体封闭起来的矩形波导构成,如图 4－24 所示。

1. 场分量

因为 TM 模和 TE 模都能存在于矩形波导内,所以,TM 模和 TE 模也同样存在于矩形谐振腔内。由于在谐振腔内存有不惟一的纵向(矩形波导中的传播方向),因此,TM 模和 TE 模的名称不惟一。我们以下的讨论选择 z 轴为参考的"传播"方向。

(1)TE 振荡模式

在矩形波导 $z=0$ 和 $z=l$ 处放置两块导体板,则该谐振腔中的 TE 模可以看成矩形

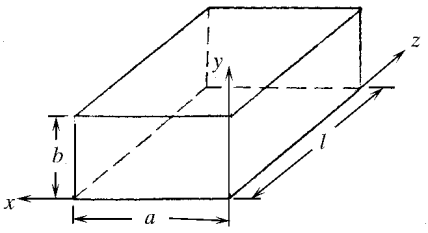


图 4－24　矩形空腔谐振器

波导中沿$+z$方向和沿$-z$方向传播的 TE 模的叠加。由式(4.2.47),得

$$H_z = H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + H'_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{j}\beta z} \tag{4.5.1}$$

由电磁场边界条件

$$H_z\Big|_{z=0} = 0$$

得

$$H'_0 = -H_0$$

则式(4.5.1)变为

$$H_z = -\mathrm{j}2H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\beta z \tag{4.5.2}$$

由电磁场边界条件

$$H_z\Big|_{z=l} = 0$$

得

$$\beta = \frac{p\pi}{l} \qquad (p = 1,2,3,\cdots) \tag{4.5.3}$$

于是

$$H_z = -\mathrm{j}2H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.4}$$

根据麦克斯韦方程,TE 模的 x 和 y 场分量可用 E_z 和 H_z 表示,且此时 $E_z=0$,得

$$H_x = \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_z}{\partial z}\right) \tag{4.5.5a}$$

$$H_y = \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_z}{\partial z}\right) \tag{4.5.5b}$$

$$E_x = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{4.5.5c}$$

$$E_y = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{4.5.5d}$$

式中 $k_c^2 = k^2 - \beta^2$,在矩形谐振腔中

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{4.5.6}$$

矩形谐振腔 TE 振荡模式的场分量

$$E_x = \frac{2\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.7a}$$

$$E_y=-\frac{2\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{b}\right)H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.7b}$$

$$E_z=0 \tag{4.5.7c}$$

$$H_x=\mathrm{j}\,\frac{2}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{p\pi}{l}\right)H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.7d}$$

$$H_y=\mathrm{j}\,\frac{2}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left(\frac{p\pi}{l}\right)H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.7e}$$

$$H_z=-\mathrm{j}2H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.7f}$$

(2)TM 振荡模式

同样将矩形谐振腔中的 TM 模看作矩形波导中沿 $+z$ 方向和沿 $-z$ 方向传播的 TM 模的叠加。由式(4.2.20)得

$$E_z=E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+E'_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \tag{4.5.8}$$

根据麦克斯韦方程,并考虑 $H_z=0$,得

$$E_x=\frac{1}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \tag{4.5.9a}$$

$$E_y=\frac{1}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \tag{4.5.9b}$$

$$H_x=\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{4.5.9c}$$

$$H_y=-\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon_1}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{4.5.9d}$$

将式(4.5.8)代入式(4.5.9a),得

$$E_x=\mathrm{j}\,\frac{\beta}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left[-E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+E'_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right]$$

在 $z=0$ 和 $z=l$ 的边界面上,由边界条件

$$E_x\Big|_{z=0}=0$$

得

$$E'_0=E_0$$

故

$$E_x=-\frac{\partial\beta}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\beta z$$

将边界条件 $E_x\Big|_{z=l}=0$ 代入上式,得

$$\beta=\frac{p\pi}{l}\qquad(p=0,1,2,3,\cdots) \tag{4.5.10}$$

将 $E'_0=E_0$,$\beta=\frac{p\pi}{l}$ 代入式(4.5.8),再由式(4.5.9)得矩形谐振腔中 TM 振荡模的场分量

$$E_x=-\frac{2}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{p\pi}{l}\right)E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.11a}$$

$$E_y=-\frac{2}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left(\frac{p\pi}{l}\right)E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.11b}$$

$$E_z=2E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.11c}$$

$$H_x=\mathrm{j}\frac{2\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.11d}$$

$$H_y=-\mathrm{j}\frac{2\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.11e}$$

$$H_z=0 \tag{4.5.11f}$$

式中

$$k_c^2=k_x^2+k_y^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

由以上的讨论可知：

(1)矩形谐振腔中可能存在无穷多个振荡模式，即 TE_{mnp} 模和 TM_{mnp} 模。

(2)下标 m、n、p 为整数，分别表示电场和磁场沿 x、y、z 方向变化的半驻波数。

(3)对 TE 振荡模式，$p\neq0$，否则导致整个腔内场解为零，m 和 n 可以为零(但不能同时为零)。

(4)对 TM 振荡模式，p 可以为零，此时虽然 E_x 和 E_y 为零，但 $E_z\neq0$。但 m、n 不能为零。

(5)以上矩形谐振腔的 TE 模和 TM 模是针对 z 轴来区分的。因此，同一场分布若选择不同的参考轴，其模式可能不同。例如，TE_{101} 模，若选择 y 方向为参考轴，则为 TM_{110} 模。

2. **谐振频率 f**

由

$$k_c^2=k^2-\beta^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

而

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

$$\beta=\frac{p\pi}{l}$$

故谐振角频率为

$$\omega=\omega_{mnp}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \tag{4.5.12}$$

谐振频率为

$$f_{mnp}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2} \tag{4.5.13}$$

谐振波长为

$$\lambda_{mnp}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2}} \tag{4.5.14}$$

由此可见，矩形谐振腔的谐振波长不仅与腔体的尺寸 a、b、l 有关，而且与振荡模式的 m、n、p 有关。当空腔尺寸一定时，存在无穷多个谐振频率，具有相同的谐振频率的不同谐振模式叫做简并模。对于给定的腔体尺寸，谐振频率最低的模式称为主模。

例 4.17　矩形谐振腔中的主模。

有一填充空气的矩形谐振腔，当其腔体尺寸为(1)$a>b>l$；(2)$a>l>b$；(3)$a=b=l$ 时，求相应的主模和谐振频率。

解：根据前面的分析，矩形谐振腔中可能的主模为 TM_{110}、TE_{011}、TE_{101}。

(1)当 $a>b>l$ 时，最低谐振频率为

$$f_{110}=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

式中 c 为自由空间的光速，故 TM_{110} 模为主模。

(2)当 $a>l>b$ 时，最低谐振频率为

$$f_{101}=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{l^2}}$$

故 TE_{101} 为主模。

(3)当 $a=b=c$ 时，有

$$f_{110}=f_{101}=f_{011}=\frac{c}{\sqrt{2}a}$$

此时 TM_{110} 模、TE_{101} 模和 TE_{011} 模的谐振频率相等。

3. 品质因数 Q

品质因数 Q 是微波谐振器另一个重要参数，它描述了谐振器选择性的优劣和能量损耗的程度，其定义为：在谐振频率时谐振器的储能与一周期内谐振器中损耗能量之比的 2π 倍，即

$$Q=2\pi\frac{W}{W_T}=2\pi\frac{W}{P_lT}=\omega\frac{W}{P_l} \tag{4.5.15}$$

式中，W 为谐振器的储能；W_T 为一周期内谐振器中损耗的能量；P_l 为损耗功率；ω 为谐振角频率。

我们假定谐振器中能量的损耗不影响腔内场的分布，这时谐振腔中储能等于电场能量与磁场能量之和。设某一时刻腔内电场为零，这时储能等于此时磁场的能量，即

$$W=\frac{1}{2}\mu\int_V|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}V \tag{4.5.16}$$

式中，V 为谐振腔的体积。

对于损耗能量，一般包括导体损耗、介质损耗和辐射损耗。对于腔体闭合的谐振腔，其辐射损耗不存在。设介质是无耗的，因此，谐振腔的损耗为腔壁的热损耗，即

$$P_l=\frac{1}{2}\oint_S|\boldsymbol{J}_S|^2R_S\mathrm{d}S=\frac{1}{2}R_S\oint_S|\boldsymbol{H}_t|^2\mathrm{d}S \tag{4.5.17}$$

式中，S 为空腔内表面面积；R_S 是腔壁表面电阻率；$\boldsymbol{J}_s$ 是表面电流；$\boldsymbol{H}_t$ 是表面切向磁场。

由式(4.5.16)和式(4.5.17)得品质因数为

$$Q=\frac{\omega\mu\int_V|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}V}{R_S\oint_S|\boldsymbol{H}_t|^2\mathrm{d}S} \tag{4.5.18}$$

又因为

$$R_s=\frac{1}{\sigma\delta}$$

式中,σ 为腔壁电导率,$\delta=\sqrt{2/\sigma\omega\mu}$为趋肤深度。于是

$$\frac{\omega\mu}{R_S}=\omega\mu\sqrt{\frac{2\sigma}{\omega\mu}}=\frac{2\mu}{\mu}\sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}}=\frac{2}{\delta}$$

所以

$$Q=\frac{2}{\delta}\frac{\int_V|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}V}{\oint_S|\boldsymbol{H}t|^2\mathrm{d}S} \tag{4.5.19}$$

为了大概估计空腔谐振器的 Q 值,我们可以假设,$|\boldsymbol{H}|\approx|\boldsymbol{H}_t|=$常数,得

$$Q\approx\frac{2}{\delta}\frac{V}{S} \tag{4.5.20}$$

由此可知,谐振器的 Q 值近似地与腔体体积 V 成正比,与腔体内表面积 S 成反比。一般情况下,$V\propto\lambda_0^3$,$S\propto\lambda_0^2$,由上式还可知

$$Q\propto\frac{\lambda_0}{\delta} \tag{4.5.21}$$

说明 Q 值与谐振波长 λ_0 成正比。在厘米波段,腔体的趋肤深度 δ 为几微米,此时 Q 值约为 $10^4\sim10^5$ 数量级。

若腔体内介质存在损耗,这时 p_l 中还应包括介质损耗。

对于矩形谐振腔中各种振荡模式的 Q 值,可利用式(4.5.18)计算。下面以 TE_{101} 模为例,计算其 Q 值。由式(4.5.7)得 TE_{101} 的场分量,代入式(4.5.18),得

$$\int_V|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}V=\int_V(|H_x|^2+|H_z|^2)\mathrm{d}V=$$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^l 4H_0^2\left[\frac{a^2}{l^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{l}z\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{l}z\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$\frac{H_0^2(a^2+l^2)ab}{l} \tag{4.5.22}$$

对 $z=0$,$z=l$

$$|H_t|^2=|H_x|^2=4H_0^2\frac{a^2}{l^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

对 $x=0$,$x=a$

$$|H_t|^2=|H_z|^2=4H_0^2\sin^2\left(\frac{\pi}{l}z\right)$$

对 $y=0$,$y=b$

$$|H_t|^2=|H_x|^2+|H_z|^2=$$

$$4H_0^2\left[\frac{a^2}{l^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{l}z\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{l}z\right)\right]$$

于是

$$\oint_S |H_t|^2\mathrm{d}S = 2\left[\int_0^a\int_0^b |H_x|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^b\int_0^l |H_z|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int_0^a\int_0^l (|H_x|^2+|H_z|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right]=\frac{2H_0^2}{l^2}[2b(a^3+l^3)+al(a^2+l^2)] \tag{4.5.23}$$

由式(4.5.22)和式(4.5.23)、式(4.5.19),得

$$Q=\frac{abl}{\delta}\cdot\frac{a_2+l^2}{2b(a^3+l^3)+al(a^2+l^2)} \tag{4.5.24}$$

对于正方形谐振腔,$a=b=l$,由上式可得

$$Q=\frac{a}{3\delta}$$

又由于正方形谐振腔的谐振波长 $\lambda_0=\sqrt{2}a$,代入上式,得

$$Q=\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\lambda_0}{\delta}=0.236\frac{\lambda_0}{\delta} \tag{4.5.25}$$

由此可见,谐振频率越高,品质因数 Q 越低。因此在毫米波波段,空腔谐振器不易得到高品质因数,这时将采用微波干涉谐振器。

例 4.18　正方形谐振腔的尺寸及 Q 值。

一只用铜($\sigma=5.8\times10^7$ S/m)的正方形空心谐振腔,欲使其在 10GHz 时谐振于主模,则其尺寸应为多少?并求该频率时的 Q 值。

解:对于正方形谐振腔,$a=b=l$,由例 4.17 可知 TM_{110}、TE_{011}、TE_{101} 是谐振频率相同的简并主模。

$$f_{101}=\frac{c}{\sqrt{2}a}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{2}a}=10^{10}\quad \mathrm{Hz}$$

因此

$$a=\frac{3\times10^8}{\sqrt{2}\times10^{10}}=2.12\times10^{-2}\quad \mathrm{m}$$

其品质因数由式(4.5.25),有

$$Q=0.236\frac{\lambda_0}{\delta}=0.236\frac{c}{f_{101}}\frac{1}{\sqrt{\pi f_{101}\mu\sigma}}=0.236\frac{3\times10^8}{10\times10^9}\frac{1}{\sqrt{3.14\times10\times10^9\times(4\pi\times10^{-7})\times5.8\times10^7}}=10700$$

4.5.2　圆柱形谐振腔

圆柱形波导是由一段两端用导体封闭起来的圆柱形波导构成,如图 4－25 所示。

1. 场分布

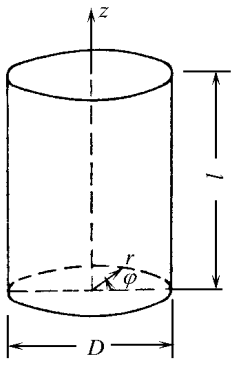


图 4－25　圆柱形谐振腔

与矩形谐振腔相同，在圆柱形谐振腔中也可以存在 TE 振荡模式和 TM 振荡模式。1）TE 振荡模式

在圆柱形波导 $z=0$ 和 $z=l$ 处放置两块导体板，则该谐振腔中的 TE 模可以看成圆柱形波导中沿 $+z$ 和 $-z$ 方向传播的 TE 模的叠加。由式(4.3.30a)，有

$$H_z=H_0\mathrm{J}_m(k_c r)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+H'_0\mathrm{J}_m(k_c r)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}$$

为讨论简单，以“$\cos m\phi$”为例，而相应地极化简并模“$\sin m\phi$”的讨论是相同的。这时

$$H_z=H_0\mathrm{J}_m(k_c r)\cos m\phi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+H'_0\mathrm{J}_m(k_c r)\cos m\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \tag{4.5.26}$$

由电磁场边界条件

$$H_z\Big|_{z=0}=0$$

得

$$H'_0=-H_0$$

则式(4.5.26)变为

$$H_z=-\mathrm{j}2H_0\mathrm{J}_m(k_c r)\cos m\phi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.27}$$

利用麦克斯韦方程得到式(4.3.8a)和式(4.3.8b)，并考虑到 TE 模式中 $E_z=0$，得

$$E_r=-\mathrm{j}\frac{\omega\mu}{k_c^2 r}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} \tag{4.5.28a}$$

$$E_\phi=\mathrm{j}\frac{\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{4.5.28b}$$

$$E_z=0 \tag{4.5.28c}$$

$$H_r=\frac{1}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right) \tag{4.5.28d}$$

$$H_\varphi=\frac{1}{k_c^2 r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\right) \tag{4.5.28e}$$

将式(4.5.27)代入式(4.5.28)，得

$$E_r=\frac{2\omega\mu m}{k_c^2 r}H_0\mathrm{J}_m(k_c r)\sin m\phi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.29a}$$

$$E_\phi=\frac{2\omega\mu}{k_c}H_0\mathrm{J}'_m(k_c r)\cos m\phi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.29b}$$

$$E_z=0 \tag{4.2.29c}$$

$$H_r=-\mathrm{j}\frac{2}{k_c}\left(\frac{p\pi}{l}\right)H_0\mathrm{J}'_m(k_c r)\cos m\phi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.29d}$$

$$H_\phi=\mathrm{j}\frac{2m}{k_c^2 r}\left(\frac{p\pi}{l}\right)H_0\mathrm{J}_m(k_c r)\sin m\phi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.29e}$$

$$H_z=-\mathrm{j}2H_0\mathrm{J}_m(k_c r)\cos m\phi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.29f}$$

式中 $k_c=\frac{q_{mn}}{a}$，q_{mn} 为第一类贝塞尔函数一阶导数 $\mathrm{J}'_m(k_c a)=0$ 的第 n 个根。

2）TM 振荡模式

对于 TM 模式，$H_z=0$，$E_z\neq 0$，与 TE 模式求法相似，其场分量为

$$E_r=-\frac{2}{k_c}\left(\frac{p\pi}{l}\right)E_0\mathrm{J}'_m(k_c r)\cos m\phi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.30a}$$

$$E_\phi=\frac{2m}{k_c^2 r}\left(\frac{p\pi}{l}\right)E_0\mathrm{J}_m(k_c r)\sin m\phi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.30b}$$

$$E_z=2E_0\mathrm{J}_m(k_c r)\cos m\phi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.30c}$$

$$H_r=-\mathrm{j}\,\frac{2m\omega\varepsilon}{k_c^2 r}E_0\mathrm{J}_m(k_c r)\sin m\phi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.30d}$$

$$H_\phi=-\mathrm{j}\,\frac{2\omega\varepsilon}{k_c}E_0\mathrm{J}'_m(k_c r)\cos m\phi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{4.5.30e}$$

$$H_z=0 \tag{4.5.30f}$$

式中 $k_c=\frac{p_{mn}}{a}$，p_{mn} 为第一类贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(k_c a)=0$ 的第 n 个根。

由以上的讨论可知：

（1）圆柱形谐振腔中可能存在无穷多个振荡模式，即 TE_{mnp} 和 TM_{mnp}。

（2）对 TE_{mnp} 振荡模式：$m=0,1,2,\cdots$；$n=1,2,\cdots$；$p=1,2,\cdots$ 的场都存在。

（3）对 TM_{mnp} 振荡模式：$m=0,1,2,\cdots$；$n=1,2,\cdots$；$p=0,1,2,\cdots$ 的场都存在。

（4）不同的 mnp 值组合代表不同的振荡模式。

2. 谐振频率

由

$$k_c^2=k^2-\beta^2=\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2$$

故谐振角频率为

$$\omega=\omega_{mnp}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{k_c^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \tag{4.5.31}$$

1）对于 TE_{mnp} 振荡模式

$$\omega_{mnp}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{q_{mn}}{a}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}$$

q_{mn} 为 $\mathrm{J}'_m(k_c a)=0$ 的第 n 个根。

谐振频率为

$$f_{mnp}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{q_{mn}}{a}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \tag{4.5.32}$$

谐振波长

$$\lambda_{mnp}=\frac{v}{f}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{q_{mn}}{2\pi a}\right)^2+\left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \tag{4.5.33}$$

2）对于 TM_{mnp} 振荡模式

谐振波长为

$$\lambda_{mnp}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p_{mn}}{2\pi a}\right)^2+\left(\frac{p}{2l}\right)^2}} \tag{4.5.34}$$

式中 p_{mn} 为 $J_m(k_c a)=0$ 的第 n 个根。

由此可见，与矩形谐振腔一样，圆柱形谐振腔的谐振波长也由空腔尺寸与工作模式决定。

下面是圆柱形谐振腔中几个最低振荡模式谐振波长。

(1) TE_{111} 振荡模式：

$$\lambda_{TE_{111}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3.41a}\right)^2+\left(\frac{1}{2l}\right)^2}} \tag{4.5.35}$$

(2) TM_{010} 振荡模式：

$$\lambda_{TM_{010}}=2.62a \tag{4.5.36}$$

该谐振波长与圆柱形波导中 TM_{01} 模的截止波长相等，且与空腔长度 l 无关。

(3) 圆柱形谐振腔中另一个常用模式为 TE_{01p} 模，其中 $p=1$ 时即 TE_{011} 模的谐振波长为

$$\lambda_{TE_{011}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1.64a}\right)^2+\left(\frac{1}{2l}\right)^2}} \tag{4.5.37}$$

3. 品质因数

圆柱形谐振腔的品质因数 Q 仍可以式(4.5.20)求得，即

$$Q=\frac{2}{\delta}\frac{\int_V |H|^2 \mathrm{d}V}{\oint_S |H_t|^2 \mathrm{d}S}$$

对于 TM_{010} 振荡模式：

$$Q_{TM_{010}}=\frac{\lambda_0}{\delta}\frac{2.405}{2\pi\left(1+\frac{a}{l}\right)}$$

例 4.19 圆柱形谐振腔的最低振荡模式。

一半径为 $a=5\mathrm{cm}$、长度 $l=15\mathrm{cm}$ 的圆柱形谐振腔，其最低振荡模式是什么？

解：由式(4.5.35)、式(4.5.36)、式(4.5.37)，有

$$\lambda_{TE_{111}}\approx 13.91\mathrm{cm}$$

$$\lambda_{TM_{010}}=13.1\mathrm{cm}$$

$$\lambda_{TE_{011}}\approx 7.94\mathrm{cm}$$

由此可见，其最低振荡模式为 TE_{111} 模。

练 习 题

4.5－1 有一空气填充和尺寸为 $a=4\mathrm{cm}$、$b=3\mathrm{cm}$、$l=5\mathrm{cm}$ 的矩形谐振腔，腔体材料为铜(ε_0，μ_0，$\sigma=5.8\times10^7\ \mathrm{S/m}$)。(a)确定其主模及谐振频率；(b)计算 Q 值。

4.5－2　有一填充空气的铜质矩形谐振腔，(a)若尺寸为 $a=l=1.8b=3.6\text{cm}$，求 TE_{101} 模的 Q 值；(b)欲使 Q 值提高 20%，则 b 应增加多少？

习　题

4－1　在一空气填充的矩形波导中，已知尺寸为 $a\times b=22.86\text{mm}\times 10.16\text{mm}$，传输 TE_{10} 波，工作频率为 10GHz。

(a)求截止波长 λ_c，波导波长 λ_g 及 TE_{10} 波的波阻抗 $Z_{\text{TE}_{10}}$；

(b)若波导的宽边尺寸增大一倍，上述各参数将如何变化？还能传输什么模式的波；

(c)若波导的窄边尺寸增大一倍，上述各参数又将如何变化？还能传输什么模式的波。

4－2　频率为 30GHz 的 TE_{10} 波在 BJ—320($a\times b=7.112\text{mm}\times 3.556\text{mm}$)波导中传输，波导长度为 10cm。

(a)当波导中充以空气时，电磁波经过该波导后的相移是多少(与开始比较)？

(b)当波导中充以 $\varepsilon_r=4$ 的介质后，电磁波通过波导后的相移量又是多少？

4－3　试设计一根传输 $\lambda=2\text{cm}$ 的矩形波导管，当波导中的介质为空气时，它满足 $\lambda_{c(\text{TE}_{10})}=1.3\lambda$ 和 $\lambda=1.3\lambda_{c(\text{TE}_{01})}$。

4－4　在一个无损耗的矩形波导 $a\times b$ 中，某模式的电场强度为 $E_y=E_0\sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$，当 $f>f_c$ 时，计算磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和截止频率。

4－5　试证明：在矩形波导中工作波长 λ、截止波长 λ_c 和波导波长 λ_g 之间存在下列关式：

$$\lambda=\sqrt{\frac{\lambda_g^2\lambda_c^2}{\lambda_g^2+\lambda_c^2}}$$

4－6　今用 BJ—32 矩形波导($a\times b=72.14\text{mm}\times 34.04\text{mm}$)做馈线，设波导中传输 TE_{10} 模。

(a)测得相邻两波节之间的距离为 10.9cm，求 λ_g 和 λ_c。

(b)设工作波长为 $\lambda_0=10\text{cm}$，求 v_p、λ_g 和 λ_c。

4－7　空气填充的矩形波导的截面尺寸为 $a\times b=7\text{cm}\times 3\text{cm}$。

(a)计算 TE_{10}、TE_{20} 模的截止波长。

(b)如果工作频率为 $f=3\times 10^9\,\text{Hz}$，$\varepsilon_r=4$，这时波导中存在哪些波型？

(c)若要求波导中只传输 TE_{10} 模，波导尺寸应如何变化？

4－8　矩形波导中 TM 模的纵向电场

$$E_z=E_0\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{3}\right)$$

式中 x、y、z 的单位是 cm，如果这是 TM_{32} 模，求波导的尺寸。

4－9　有一空气填充和尺寸为 $a=4\text{cm}$，$b=3\text{cm}$，$l=5\text{cm}$ 的无耗矩形谐振腔，试求头三个最低阶模式和它们的谐振频率。

4－10　当传输信号的频率逐渐降低而接近临界频率时，TE 模的波阻抗趋于∞，而 TM 的波阻抗趋于零。因此在接近临界状态时，TE 波以电场为主，而 TM 波以磁场为主。这种说法对不对？为什么？

4－11　**半径为** $a=15\text{mm}$ **的圆波导输入频率** $f=10\text{GHz}$ **的信号，问非截止模式有几种，它们各是什么模式？**

4－12　**圆波导中最低阶模式是什么模？旋转对称模式中最低阶模式又是什么模？**

4－13　**已知圆波导中** TM_{01} **模的磁场为**

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_{\phi}H_{m}\text{J}_{1}\left(\frac{2.405r}{a}\right)\text{e}^{-\text{j}\beta z}$$

求电场强度 $\boldsymbol{E}$。

第五章　传输线理论

前一章，我们用场分析法讨论了导波系统中的波及传播特性。本章我们将在准静态条件下采用路分析法讨论多导体导波系统（例如双线、同轴线）中波的传播特性。

5.1　传输线方程

这一节主要讨论传输线中 TEM 波的传播特性。我们首先分析在 TEM 波的条件下电场 $\boldsymbol{E}$、磁场 $\boldsymbol{H}$ 和它们的积分量电压 U 及电流 I 的关系，从而导出均匀传输线的方程。

5.1.1　传输线中“场”与“路”的关系

以同轴线为例，如图 5－1 所示。设该同轴线中传播 TEM 波。

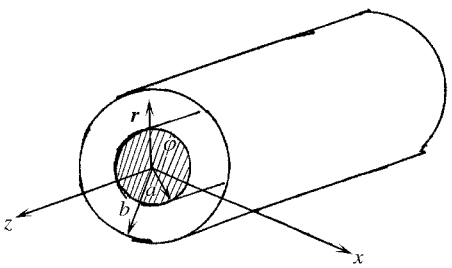


图 5－1　同轴线

考虑到 TEM 波的电场和磁场只有横向分量，用 $\boldsymbol{E}_t$ 和 $\boldsymbol{H}_t$ 表示。由复数形式的麦克斯韦方程，有

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_t = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H}_t \tag{5.1.1a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_t = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}_t \tag{5.1.1b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_t = 0 \tag{5.1.1c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}_t = 0 \tag{5.1.1d}$$

设 $\nabla = \nabla_t + \nabla_z = \nabla_t + \boldsymbol{e}_z \dfrac{\partial}{\partial z}$，因为电磁场只有横向分量，所以

$$\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t = 0$$

$$\nabla_t \times \boldsymbol{H}_t = 0$$

于是由式(5.1.1a)和式(5.1.1b)，得

$$\boldsymbol{e}_z \times \frac{\partial \boldsymbol{E}_t}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H}_t \tag{5.1.2a}$$

$$\boldsymbol{e}_z \times \frac{\partial \boldsymbol{H}_t}{\partial z} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\mu \boldsymbol{E}_t \tag{5.1.2b}$$

$$\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t = 0 \tag{5.1.2c}$$

$$\nabla_t \times \boldsymbol{H}_t = 0 \tag{5.1.2d}$$

由式(5.1.2c)可知，此时的电场可用一标量函数的梯度表示为

$$\boldsymbol{E}_t = -\nabla_t \varphi(x,y) \tag{5.1.3}$$

由式(5.1.1c)，得

$$\nabla_t^2 \varphi(x,y) = 0 \tag{5.1.4}$$

这表明 ϕ 满足二维拉普拉斯方程，正如静电场所满足的方程一样。由此可见，TEM 波的电场结构与二维静电场的场结构是一样的，而相应的磁场 $\boldsymbol{H}_t$ 通过式(5.1.2a)与电场 $\boldsymbol{E}_t$ 相联系，因此传输线上 TEM 波的问题基本上是解二维静电场问题。

根据这一特点，可以将传输线的电压、电流与其电场和磁场联系起来，得到用电压和电流表示的传输线方程，而不直接讨论其电磁场，从而可将电路中的有关概念引入到传输线中。

在给定 z 值的任意平面内，由于该截面的电场和静电场满足相同的方程，内外导体之间的电压仍有意义，定义为

$$U(z) = \int_a^b \boldsymbol{E}_t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.1.5}$$

由安培环路定理，传输线上给定 z 值处的电流 I 为

$$I(z) = \oint_c \boldsymbol{H}_t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.1.6}$$

用 $\boldsymbol{e}_z \dfrac{\partial}{\partial z}$ 叉乘式(5.1.2a)，再利用式(5.1.2b)，得

$$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_t}{\partial z^2} - \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E}_t = 0$$

$$\boldsymbol{e}_z \left(\boldsymbol{e}_z \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_t}{\partial z^2} \right) - (\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_t}{\partial z^2} - \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E}_t = 0$$

得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_t}{\partial z^2} + k^2 \boldsymbol{E}_t = 0 \tag{5.1.7}$$

式中

$$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$$

同理

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_t}{\partial z^2} + k^2 \boldsymbol{H}_t = 0 \tag{5.1.8}$$

利用式(5.1.5)，考虑

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} + k^2 U(z) = \frac{\partial^2 \int_a^b \boldsymbol{E}_t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\partial z^2} + k^2 \int_a^b \boldsymbol{E}_t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由于积分是横向的，因此上式

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2}+k^2U(z)=\int_a^b\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_t}{\partial z^2}+k^2\boldsymbol{E}_t\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

故

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2}+k^2U(z)=0 \tag{5.1.9}$$

同理

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2}+k^2I(z)=0 \tag{5.1.10}$$

以上为电压波方程和电流波方程。由上面分析可知，相应于传输线中传播的 TEM 波的电场 $\boldsymbol{E}_t$ 有一确定的电压波，而相应于磁场 $\boldsymbol{H}_t$ 有一确定的电流波。这就是说，对于传输线上 TEM 波的分析可采用电压、电流来代替。

5.1.2 等效电路及传输线方程

由式(5.1.9)、式(5.1.10)可知，传输线上的电压和电流沿线有变化。从电路的观点来看，前者是由于沿线存在电阻及电感，而电流沿线的变化是由于存在电导和电容。于是可得到传输线的电路模型，如图 5－2 所示。

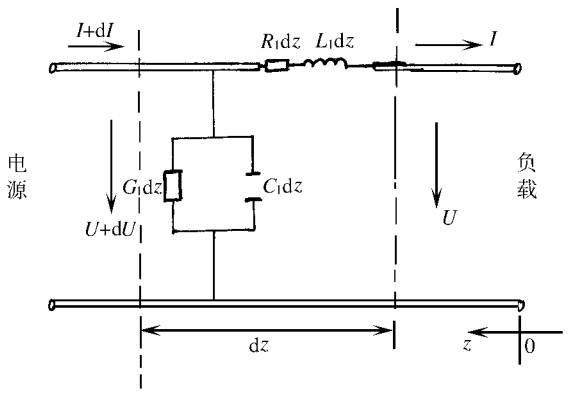


图 5－2　传输线的等效电路

因为电压、电流是沿线变化的，故有关电路的参数应为沿线分布，称为分布参数。根据克希霍夫定律，在线元 $\mathrm{d}z$ 上电压和电流的变化为(设电流、电压随时间作简谐变化)

$$\mathrm{d}U(z)=(R_1\,\mathrm{d}z+\mathrm{j}\omega L_1\,\mathrm{d}z)I(z) \tag{5.1.11a}$$

$$\mathrm{d}I(z)=(G_1\,\mathrm{d}z+\mathrm{j}\omega C_1\,\mathrm{d}z)U(z) \tag{5.1.11b}$$

式中，R_1、L_1、G_1、C_1 分别为传输线上单位长度的电阻、电感、电导和电容，其大小和传输线的几何形状及材料有关。

由式(5.1.11)得

$$\frac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z}=(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)I(z) \tag{5.1.12a}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = (G_1 + \mathrm{j}\omega C_1)U(z) \tag{5.1.12b}$$

上式为传输线方程式电报方程。将式(5.1.12a)两边再对 z 微分,得

$$\frac{\mathrm{d}^2U(z)}{\mathrm{d}z^2} = (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$$

将式(5.1.12b)代入上式,得

$$\frac{\mathrm{d}^2U(z)}{\mathrm{d}z^2} = \gamma^2 U(z) \tag{5.1.13}$$

式中

$$\gamma = \sqrt{(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)(G_1 + \mathrm{j}\omega C_1)} \tag{5.1.14}$$

称为传播常数。

将式(5.1.13)与式(5.1.9)比较,利用表 5-1,可以证明对于无耗同轴线和平行双线,$\gamma^2 = -k^2$,则由场分析得到的电压方程和电路分析法得到的电压方程完全相同。

表 5-1　平行双线和同轴线的分布参数

传输线形式 / 分布参数	平行双线	同轴线	备　注
分布电容 $C_1/(\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1})$	$\dfrac{\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{2D}{d}}$	$\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{D}{d}}$	$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$
分布电感 $L_1/(\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1})$	$\dfrac{\mu}{\pi}\ln\dfrac{2D}{d}$	$\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{D}{d}$	$\mu=\mu_r\mu_0$
分布电阻 $R_1/(\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1})$	$\dfrac{2}{\pi d}\sqrt{\dfrac{\pi f\mu_r}{\sigma_e}}$	$\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi f\mu_r}{\sigma_e}}\left(\dfrac{1}{D}+\dfrac{1}{d}\right)$	μ_r 为导体的相对磁导率 σ_e 为导体的电导率
分布电导 $G_1/(\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1})$	$\dfrac{\pi\sigma}{\ln\dfrac{2D}{d}}$	$\dfrac{2\pi\sigma}{\ln\dfrac{D}{d}}$	σ 为导体间媒质的漏电导率

5.1.3　传输线方程的解

式(5.1.13)的解为

$$U(z) = A_1\mathrm{e}^{\gamma z} + A_2\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{5.1.15a}$$

将其代入式(5.1.12a),得

$$I(z) = \frac{1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}\frac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\gamma}{(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)}(A_1\mathrm{e}^{\gamma z} - A_2\mathrm{e}^{-\gamma z}) =$$

$$\frac{1}{Z_0}(A_1\mathrm{e}^{\gamma z} - A_2\mathrm{e}^{-\gamma z}) \tag{5.1.15b}$$

式中

$$Z_0 = \frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}{\gamma} = \sqrt{\frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}{G_1 + \mathrm{j}\omega C_1}} \tag{5.1.16}$$

由式(5.1.15)可知:

(1)传输线上的电压和电流以波的形式存在,且都由正向行波和反向行波叠加而成。

(2)正向行波又叫入射波,由电源到负载,在我们的坐标系中即沿 $-z$ 方向传播,由因

子 $e^{+\gamma z}$ 表示。

(3)反向行波又叫反射波,由负载到电流,即沿 $+z$ 方向传播,由因子 $e^{-\gamma z}$ 表示。

(4)电压电流的关系

入射波电压

$$U^{+} = A_1 e^{\gamma z} \tag{5.1.17}$$

入射波电流

$$I^{+} = \frac{A_1}{Z_0} e^{\gamma z} \tag{5.1.18}$$

反射波电压

$$U^{-} = A_2 e^{-\gamma z} \tag{5.1.19}$$

反射波电流

$$I^{-} = \frac{A_2}{Z_0} e^{-\gamma z} \tag{5.1.20}$$

于是

$$Z_0 = \frac{U^{+}}{I^{+}} = -\frac{U^{-}}{I^{-}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} \tag{5.1.21}$$

称为传输线的特性阻抗,等于行波电压与行波电流之比。

而总电压

$$U = U^{+} + U^{-} \tag{5.1.22}$$

总电流

$$I = I^{+} + I^{-} \tag{5.1.23}$$

式(5.1.15)中的常数 A_1 和 A_2 由给定点的电压电流确定。设 $z=0$ 处即负载的电压为 U_2,电流为 I_2,则由式(5.1.15a)、(5.1.15b),得

$$\begin{cases} U_2 = A_1 + A_2 \\ I_2 = \dfrac{1}{Z_0}(A_1 - A_2) \end{cases}$$

联立求解,得

$$A_1 = \frac{1}{2}(U_2 + I_2 Z_0)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(U_2 - I_2 Z_0)$$

于是

$$U = \frac{1}{2}(U_2 + I_2 Z_0)e^{\gamma z} + \frac{1}{2}(U_2 - I_2 Z_0)e^{-\gamma z} = U_2 \mathrm{ch}\gamma z + I_2 Z_0 \mathrm{sh}\gamma z \tag{5.1.24}$$

同理

$$I = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2Z_0} e^{\gamma z} - \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2Z_0} e^{-\gamma z} = I_2 \mathrm{ch}\gamma z + \frac{U_2}{Z_0} \mathrm{sh}\gamma z \tag{5.1.25}$$

例 5.1 传输线的设计。

在构造均匀传输线时,用聚乙烯($\varepsilon_r = 2.25$)作为电介质,假设忽略损耗。

(a)对于 300Ω 的双线传输线,若导线的半径为 0.6mm,则线间距应选取多少?

(b)对于 75Ω 的同轴线,若内导体的半径为 0.6mm,则外导体的内半径应选取多少?

解： (a)**对于无损耗双线传输线**

$$Z_0=\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}=300\Omega$$

而

$$L_1=\frac{\mu}{\pi}\ln\frac{2D}{2a}=\frac{\mu}{\pi}\ln\frac{D}{a}$$

$$C_1=\frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{2D}{2a}}=\frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{D}{a}}$$

故

$$Z_0=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{(\ln\frac{D}{a})^2}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{D}{a}=\frac{120}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{D}{a}=300\Omega$$

则

$$\frac{D}{a}=42.52$$

$$D=42.52\times0.6=25.5\text{mm}$$

(b)**对于同轴线**

$$L_1=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$C_1=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}$$

故

$$Z_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)=75\Omega$$

则

$$\frac{b}{a}=6.52$$

$$b=6.52\times0.6=3.91\text{mm}$$

例 5.2　传输线上的电压、电流分布。

已知传输线输入端(z=l)**的电压** U_1 **和电流** I_1 **以及线的传播常数** γ **和特性阻抗** Z_0，**试求线上任一点的电压分布** U(z)**和电流分布** I(z)。

解：　传输线上任一点的电压、电流满足

$$U(z)=A_1e^{\gamma z}+A_2e^{-\gamma z}$$

$$I(z)=\frac{1}{Z_0}(A_1e^{\gamma z}-A_2e^{-\gamma z})$$

由题意，当 $z=l$ **时，**$U(l)=U_1$，$I(l)=I_1$，**得**

$$U_1=A_1e^{\gamma l}+A_2e^{-\gamma l}$$

$$I_1=\frac{1}{Z_0}(A_1e^{\gamma l}-A_2e^{-\gamma l})$$

联立求解以上二式，得

$$A_1 = \frac{U_1 + I_1 Z_0}{2} e^{\gamma l}$$

$$A_2 = \frac{U_1 - I_1 Z_0}{2} e^{-\gamma l}$$

于是得

$$U(z) = \frac{U_1 + I_1 Z_0}{2} e^{\gamma(l-z)} + \frac{U_1 - I_1 Z_0}{2} e^{-\gamma(l-z)}$$

$$I(z) = \frac{U_1 + I_1 Z_0}{2Z_0} e^{\gamma(l-z)} - \frac{U_1 - I_1 Z_0}{2Z_0} e^{-\gamma(l-z)}$$

练　习　题

5.1－1　**不计边缘效应，证明沿两平行板，向** $+z$ **方向传播、沿** y **方向极化的** TEM **波具有下列性质：**

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \qquad \text{及} \qquad \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0$$

5.2　电压波和电流波的传输特性参数

5.2.1　传播常数

由电压波和电流波的表达式(5.1.15a)**和**(5.1.15b)**可知，传播常数为** γ。**式**(5.2.14)**已给出** γ **的表达式为**

$$\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = \alpha + j\beta$$

据此可求出其实部 α **和虚部** β **分别为**

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1)^2} - (\omega^2 L_1 C_1 - R_1 G_1)\right]} \tag{5.2.1}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2)} + (\omega^2 L_1 C_1 - R_1 G_1)\right]} \tag{5.2.2}$$

α **称为衰减常数，**β **称为相位常数。**

两种特殊情况：

(1)**无损耗线，**$R_1 = 0, G_1 = 0$

此时

$$\alpha = 0 \tag{5.2.3a}$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1} \tag{5.2.3b}$$

(2)**低损耗线，**$R_1 \ll \omega L_1, G_1 \ll \omega C_1$

此时

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left(R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + G_1\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\right) \tag{5.2.4a}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_1 C_1} \tag{5.2.4b}$$

5.2.2 相速度

相速度是沿一个方向传播的行波(入射波或反射波)前进的速度,定义为波的等相位面移动的速度,即

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{5.2.5}$$

对于一般的传输线,$v_p = v_p(\omega)$即相速度是频率的函数。说明当传输信号包含不同频率分量时,其沿线的传播速度不同,信号将产生色散。

对于无损耗线,有

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5.2.6}$$

对于低损耗线,有

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5.2.7}$$

这时相速度是与频率无关的。

5.2.3 特性阻抗

前面已定义了传输线的特性阻抗,即等于行波电压与行波电流之比。由式(5.1.21),有

$$Z_0 = \frac{U^+}{I^+} = -\frac{U^-}{I^-} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}$$

两种特殊情况:

(1)**无损耗线**:$R_1 = 0, G_1 = 0$

此时

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \tag{5.2.8}$$

(2)**低损耗线**:$R_1 \ll \omega L_1, G_1 \ll \omega C_1$

此时

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \tag{5.2.9}$$

在以上两种特殊情况下,特性阻抗仅与 L_1、C_1 有关,与频率无关。微波传输线属于低损耗线。

例 5.3 平行板传输线的特性参数。

无损耗平行板传输线,板间距为 $d = 0.4\text{mm}$,宽度为 $w = 2\text{mm}$,填充相对介电常数为 $\varepsilon_r = 2.25$ 的介质,若信号源频率为 100MHz。求传输线的特性阻抗 Z_0,传播常数 γ 及相速度 v_p。

解: 对于平行板传输线:

$$C_1 = \frac{\varepsilon w}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r w}{d} = \frac{10^{-9} \times 2.25}{36\pi} \times \frac{2}{0.4} = 99.5 \times 10^{-12} \quad \text{F/m}$$

而

$$L_1C_1=\mu\varepsilon$$

则

$$L_1=\frac{\mu\varepsilon}{C_1}=\frac{M_0\varepsilon_0\varepsilon_r}{C_1}=$$
$$\frac{4\pi\times10^{-7}\times10^{-9}\times2.25}{36\pi\times99.5\times10^{-12}}=2.51\times10^{-7}\quad \mathrm{H/m}$$

得特性阻抗

$$Z_0=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\approx50\quad\Omega$$

传播常数为

$$\gamma=\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}\omega\sqrt{L_1C_1}=\mathrm{j}2\pi f\sqrt{\mu\varepsilon_1}=\mathrm{j}3.14\times10^{-3}\quad\mathrm{rad/m}$$

相速度为

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=2\times10^8\quad\mathrm{m/s}$$

练　习　题

5.2－1　设有一无损耗平行双线传输线，长 10m，线间导体的电容为 600pF。设电缆一端短路，另一端接有一脉冲发送器和示波器，测得一脉冲信号来回一次的时间为0.1μs，求该传输线的特性阻抗 Z_0。

5.3　传输线的阻抗

5.3.1　定义

如图 5－3 所示为终端接负载的传输线。根据欧姆定律，定义传输线上任一点的电压与电流之比为该点（沿负载端）的输入阻抗。

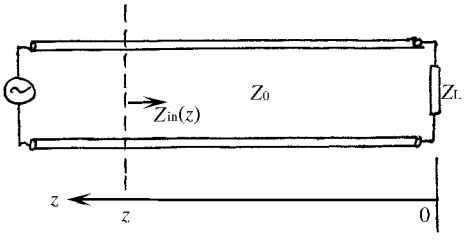


图 5－3　终端接负载的传输线

由式(5.1.24)和式(5.1.25)给出了传输线上任一点的电压和电流，则该点的阻抗为

$$Z_{in}(z)=\frac{U(z)}{I(z)}=\frac{U_2\mathrm{ch}\gamma z+I_2Z_0\mathrm{sh}\gamma z}{I_2\mathrm{ch}\gamma z+\frac{U_2}{Z_0}\mathrm{sh}\gamma z}\qquad(5.3.1)$$

由式(5.3.1)可得

$$Z_{in}(z) = Z_0 \frac{Z_L \mathrm{ch}\gamma z + Z_0 \mathrm{sh}\gamma z}{Z_0 \mathrm{ch}\gamma z + Z_L \mathrm{sh}\gamma z} = Z_0 \frac{Z_L + \mathrm{th}\gamma z}{Z_0 + Z_L \mathrm{th}\gamma z} \tag{5.3.2}$$

式中 $Z_L = \dfrac{U_2}{I_2}$ 为传输线终端的负载阻抗。

对于无损耗线($\alpha = 0$，$\gamma = \mathrm{j}\beta$)，式(5.3.2)变为

$$Z_{in}(z) = Z_0 \frac{Z_L + \mathrm{j}Z_0 \tan\beta z}{Z_0 + \mathrm{j}Z_L \tan\beta z} \tag{5.3.3}$$

由上式可知，传输线的输入阻抗与负载阻抗 Z_L、特性阻抗 Z_0 以及距终端的位置 z 有关，而且随位置的变化具有周期性，每增加 $\lambda/2$，Z_{in} 重复出现一次，即

$$Z_{in}\left(z + \frac{n\lambda}{2}\right) = Z_{in}(z)$$

5.3.2 几种特殊情况下的输入阻抗

1. ■终端短路

此时 $Z_L = 0$，由式(5.3.3)得

$$Z_{ins} = \mathrm{j}Z_0 \tan\beta z \tag{5.3.4}$$

由此可见，终端短路的无损耗传输线的输入阻抗为纯电抗，其性质和大小随 z 的变化而改变，如图 5－4 所示。

$z = 0$：$Z_{ins} = 0$　　串联谐振

$0 < z < \lambda/4$：$\tan\beta z > 0$　Z_{ins} 呈感性

$z = \lambda/4$：$Z_{ins} \to \infty$　　并联谐振

$\dfrac{\lambda}{4} < z < \dfrac{\lambda}{2}$：$\tan\beta z < 0$　Z_{ins} 呈容性

$z = \dfrac{\lambda}{2}$：$Z_{ins} = 0$　　串联谐振

线长每增加 $\dfrac{\lambda}{2}$，输入阻抗的性质重复一次。

2. ■终端开路

此时 $Z_L \to \infty$，由式(5.3.3)得

$$Z_{ino} = -\mathrm{j}Z_0 \cot\beta z \tag{5.3.5}$$

这时输入阻抗仍为纯电抗，可以是电感性的，也可以是电容性的，视 βz 的值而定。图 5－5 给出了 Z_{ino} 随 z 的变化曲线。比较图 5－4 和图 5－5 可见，z 处的开路线输入阻抗等于 $z + \dfrac{\lambda}{4}$ 处的短路线的输入阻抗，即

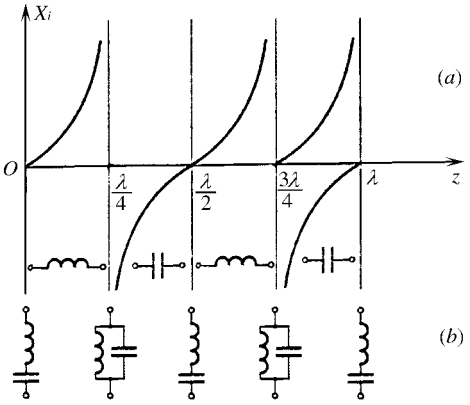


图 5－4　终端短路线的输入阻抗

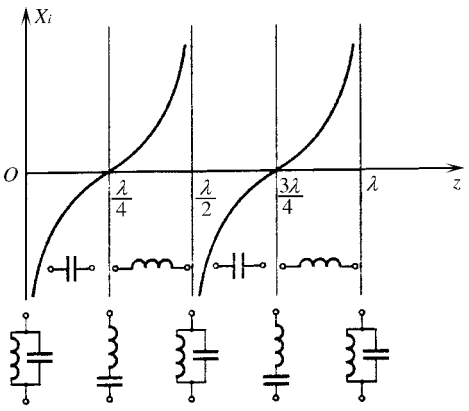


图 5－5　终端开路线的输入阻抗

$$Z_{\mathrm{ino}}(z) = Z_{\mathrm{ins}}\left(z+\frac{\lambda}{4}\right) \tag{5.3.6}$$

3. ■终端负载等于特性阻抗

此时 $Z_{\mathrm{L}}=Z_0$，**由式**(5.3.3)**得**

$$Z_{\mathrm{in}}(z) = Z_0 \tag{5.3.7}$$

可见此时的输入阻抗与 z **无关，沿传输线上任意处的阻抗都等于特性阻抗** Z_0，**这种情况称为匹配。**

4. ■ $\frac{\lambda}{4}$**线的输入阻抗**

此时 $z=\lambda/4$ **或** $z=(2n-1)\lambda/4$，**由式**(5.3.3)**得**

$$Z_{\mathrm{in}}\left(\frac{\lambda}{4}\right)=\frac{Z_0^2}{Z_{\mathrm{L}}} \tag{5.3.8}$$

即负载阻抗经 $\frac{\lambda}{4}$**波长的无损耗线变换到输入端后，等于其倒数与特性阻抗平方的乘积。利用** $\frac{\lambda}{4}$**线的这一特点可作为** $\frac{\lambda}{4}$**阻抗变换器。**

5. ■ $\frac{\lambda}{2}$**线的输入阻抗**

此时 $z=\frac{\lambda}{2}$ **或** $z=\frac{n\lambda}{2}$，**由式**(5.3.3)**得**

$$Z_{\mathrm{in}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)=Z_{\mathrm{L}}$$

即负载经 $\frac{\lambda}{2}$**的无损耗线变换到输入端后仍等于其原来的值，即阻抗具有** $\frac{\lambda}{2}$**还原性。**

例 5.4　传输线特性阻抗的确定。

已知一无损耗传输线其开路阻抗为 $150\angle 25^\circ\Omega$、**短路阻抗为** $37.5\angle -35^\circ\Omega$，**试确定该线的特性阻抗。**

解：

$$Z_{\mathrm{ins}}=\mathrm{j}Z_0\tan\beta z$$

$$Z_{ino} = -jZ_0 \cot\beta z$$

故

$$Z_0 = \sqrt{Z_{ins} Z_{ino}} = \sqrt{150 \angle 25^\circ \times 37.5 \angle -35^\circ} =$$

$$\sqrt{150 \times 37.5 \angle -10^\circ} = 75 \angle -5^\circ = 74.7 - j6.54\Omega$$

例 5.5　传输线的输入阻抗。

一根特性阻抗为 50Ω、长度为 2m 的无损耗传输线，工作频率为 200MHz，终端接有负载阻抗 $Z_L = 40 + j30(\Omega)$，试求其输入阻抗。

解：　设该传输线周围是空气，故

$$v_p = c = 3 \times 10^8 \quad \text{m/s}$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^8} = 1.5 \quad \text{m}$$

所以

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1.5} = \frac{4}{3}\pi \text{ rad/m}$$

$$\beta z = \frac{4}{3}\pi \times 2 = \frac{8}{3}\pi \text{ rad}$$

$$\tan\beta z = \tan\frac{8}{3}\pi = -1.732$$

则

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta z}{Z_0 + jZ_L \tan\beta z} = 50 \frac{40 + j30 + j50(-1.732)}{50 + j(40 + j30)(-1.732)} =$$

$$28.1 e^{-j20.55} = 26.3 - j9.864 \quad \Omega$$

例 5.6　确定电压波节点和电压波腹点的位置。

一特性阻抗为 500Ω 的无损耗传输线，工作频率为 1.5MHz，终端负载为 200pF 的电容，试求终端到最近的电压波腹点和电压波节点的距离。

解：　可用一段开路线或短路线来代替终端所接的 200pF 的电容负载，如图 5－6 所示。

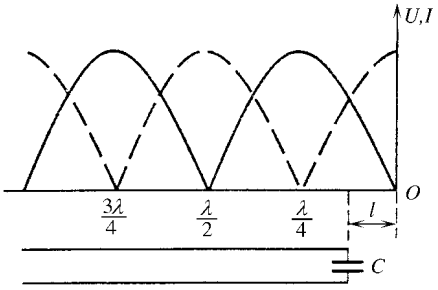


图 5－6

设采用开路线，则由式(5.3.5)开路线的长度 l 满足：

$$-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}=-\mathrm{j}Z_0\cot\beta l$$

得

$$l=\frac{1}{\beta}\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\omega CZ_0}\right)=\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\omega CZ_0}\right)=\frac{v}{2\pi f}\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2\pi fCZ_0}\right)=$$

$$\frac{3\times10^8}{2\pi\times1.5\times10^6}\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2\pi\times1.5\times10^6\times200\times10^{-12}\times500}\right)=24.058\quad\mathrm{m}$$

终端开路线距负载最近的第一个电压波腹点应在距终端$\frac{\lambda}{2}$处，故要求的电压波腹点位置为

$$l_1=\frac{\lambda}{2}-l=\frac{v}{2f}-l=100-24.058=75.942\quad\mathrm{m}$$

终端开路线第一个电压波节点应在距终端$\frac{\lambda}{4}$处，故要求的电压波节点位置为

$$l_2=\frac{\lambda}{4}-l_1=\frac{v}{4f}-l_1=50-24.058=25.942\quad\mathrm{m}$$

例 5.7　分布参数电路的输入阻抗。

求如图 5－7 所示的分布参数电路的输入阻抗。

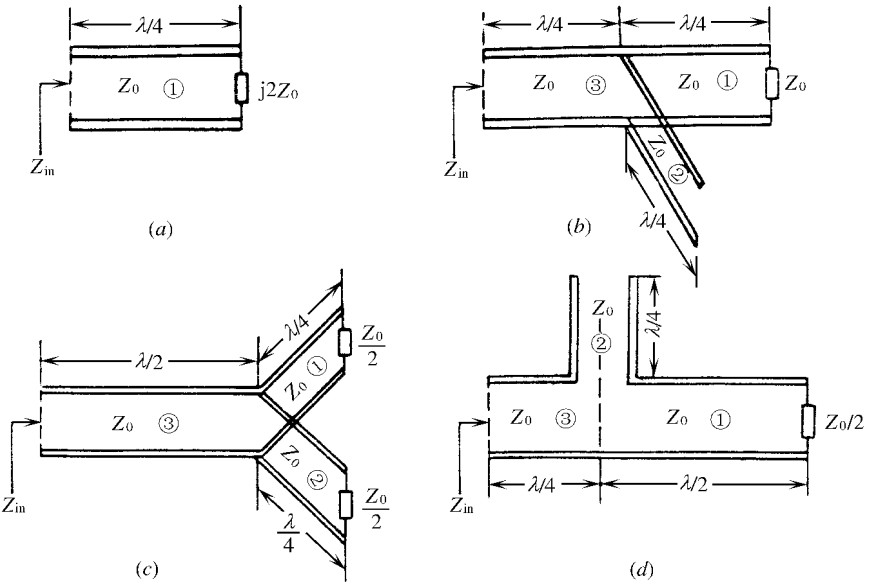


图 5－7

解：　(a)　$$Z_{\mathrm{in}}=\frac{Z_0^2}{Z_{\mathrm{L}}}=\frac{Z_0^2}{\mathrm{j}2Z_0}=-\mathrm{j}\frac{1}{2}Z_0$$

(b)　$$Z_{\mathrm{in1}}=\frac{Z_0^2}{Z_0}=Z_0$$

$$Z_{\mathrm{in2}}=\frac{Z_0^2}{\infty}=0$$

第三段的负载为

$$Z_{L3}=Z_{in1}//Z_{in2}=0$$

故

$$Z_{in3}=\frac{Z_0^2}{Z_{L3}}=\infty$$

(c)

$$Z_{in1}=\frac{Z_0^2}{Z_0/2}=2Z_0$$

$$Z_{in2}=\frac{Z_0^2}{Z_0/2}=2Z_0$$

$$Z_{L3}=Z_{in1}//Z_{in2}=Z_0$$

故

$$Z_{in3}=\frac{Z_0^2}{Z_{L3}}=Z_0$$

(d)

$$Z_{in1}=Z_{L1}=\frac{Z_0}{2}$$

$$Z_{in2}=0$$

$$Z_{L3}=Z_{in1}+Z_{in2}=\frac{Z_0}{2}$$

故

$$Z_{in3}=\frac{Z_0^2}{L_3}=2Z_0$$

练　习　题

5.3－1　有一段特性阻抗 $Z_0=500\Omega$ 的无损耗传输线，当其终端短路时，测得始端的阻抗为 250Ω 的感抗，求该传输线的最小长度。如果该线为终端开路，长度 l 为多少？

5.3－2　测得一段长为 1.5m 的低损耗传输线输入端的开路和短路阻抗分别为 $-j54.6\ (\Omega)$及 $j103\ (\Omega)$，试求：

(1)传输线的特性阻抗 Z_0 及传播常数 γ；

(2)若工作频率不变，线长增加 1 倍后短路线的输入阻抗变为多少？

(3)为使输入端呈现开路，短路线的长度应为多少？

5.4　传输线的反射系数

由传输线方程的解可知，传输线上的电压波和电流波一般由入射波(从电源到负载)和反射波(从负载到电源)叠加而成。为分析传输线的反射特性，引入反射系数。

5.4.1　定义

传输线上某点的反射波电压(或电流)与入射波电压(或电流)之比，称为该点的反射系数，即

$$\Gamma(z)=\frac{U^-(z)}{U^+(z)}=-\frac{I^-(z)}{I^+(z)} \tag{5.4.1}$$

式中，$U^-(z)$为反射波电压；$U^+(z)$为入射波电压；$I^-(z)$为反射波电流；$I^+(z)$为入射波电流。

由式(5.1.24)和式(5.1.25)，传输线上任一点的电压电流为

$$U=\frac{1}{2}(U_2+I_2Z_0)\mathrm{e}^{\gamma z}+\frac{1}{2}(U_2-I_2Z_0)\mathrm{e}^{-\gamma z}=U^+(z)+U^-(z) \tag{5.4.2}$$

$$I=\frac{1}{2Z_0}(U_2+I_2Z_0)\mathrm{e}^{\gamma z}-\frac{1}{2Z_0}(U_2-I_2Z_0)\mathrm{e}^{-\gamma z}=I^+(z)+I^-(z) \tag{5.4.3}$$

由此得

$$U^+(z)=\frac{1}{2}(U_2+I_2Z_0)\mathrm{e}^{+\gamma z} \tag{5.4.4a}$$

$$U^-(z)=\frac{1}{2}(U_2-I_2Z_0)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{5.4.4b}$$

$$I^+(z)=\frac{1}{2Z_0}(U_2+I_2Z_0)\mathrm{e}^{\gamma z} \tag{5.4.5a}$$

$$I^-(z)=-\frac{1}{2Z_0}(U_2-I_2Z_0)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{5.4.5b}$$

当 $z=0$ 即终端负载处的入射波和反射波电压为

$$U^+(0)=\frac{1}{2}(U_2+I_2Z_0)=U_2^+ \tag{5.4.6}$$

$$U^-(0)=\frac{1}{2}(U_2-I_2Z_0)=U_2^- \tag{5.4.7}$$

同理，终端的入射波和反射波电流为

$$I^+(0)=\frac{1}{2Z_0}(U_2+I_2Z_0)=I_2^+ \tag{5.4.8}$$

$$I^-(0)=\frac{-1}{2Z_0}(U_2-I_2Z_0)=I_2^- \tag{5.4.9}$$

于是

$$\begin{aligned}U^+(z)&=U_2^+\mathrm{e}^{\gamma z}\\U^-(z)&=U_2^-\mathrm{e}^{-\gamma z}\\I^+(z)&=I_2^+\mathrm{e}^{\gamma z}\\I^-(z)&=-I_2^-\mathrm{e}^{-\gamma z}\end{aligned}$$

所以

$$\Gamma(z)=\frac{U^-(z)}{U^+(z)}=\frac{U_2^-\mathrm{e}^{-\gamma z}}{U_2^+\mathrm{e}^{\gamma z}}=\Gamma_2\mathrm{e}^{-2\gamma z} \tag{5.4.10}$$

式中

$$\Gamma_2=\frac{U_2^-}{U_2^+} \tag{5.4.11}$$

称为终端反射系数，且有

$$\Gamma_2=\frac{U_2-I_2Z_0}{U_2+I_2Z_0}=\frac{Z_\mathrm{L}-Z_0}{Z_\mathrm{L}+Z_0}=\left|\frac{Z_\mathrm{L}-Z_0}{Z_\mathrm{L}+Z_0}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}=|\Gamma_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} \tag{5.4.12}$$

则

$$\Gamma(z)=\Gamma_2\mathrm{e}^{-2\gamma z}=|\Gamma_2|\mathrm{e}^{-2\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$$

对于无损耗线($\alpha=0$)，则

$$\Gamma(z) = |\Gamma_2| e^{-j2\beta z} e^{j\varphi_2} \tag{5.4.13}$$

由此可见，对无损耗线任意点的反射系数 $\Gamma(z)$ 和终端反射系数 Γ_2 只相差 $2\beta z$ 的相位。

5.4.2 反射系数与电压、电流的关系

$$U(z)=U^+(z)+U^-(z)=$$

$$U^+(z)\left[1-\frac{U^-(z)}{U^+(z)}\right]=U^+(z)[1+\Gamma(z)] \tag{5.4.14}$$

$$I(z)=I^+(z)+I^-(z)=$$

$$I^+(z)\left[1+\frac{I^-(z)}{I^+(z)}\right]=I^+(z)[1-\Gamma(z)] \tag{5.4.15}$$

可见，传输线上任一点的电压、电流也可通过反射系数来计算。

5.4.3 反射系数与输入阻抗的关系

由输入阻抗的定义式(5.3.1)，有

$$Z_{in}(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U^+(z)[1+\Gamma(z)]}{I^+(z)[1-\Gamma(z)]} = Z_0 \frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)} \tag{5.4.16}$$

可见，传输线上任一点的阻抗，可由该点的反射系数来计算，这给传输线阻抗的测量和求解带来极大的方便。

5.4.4 反射系数与负载阻抗的关系

由式(5.4.12)，令 $z=0$ 即得终端负载阻抗为

$$Z_{in}(0) = Z_L = Z_0 \frac{1+\Gamma(0)}{1-\Gamma(0)} = Z_0 \frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2} \tag{5.4.17}$$

由上式也可得

$$\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \tag{5.4.18}$$

这是前面已给出的式(5.4.12)，它可以由已知负载阻抗求出反射系数。下面讨论几种情况。

1. ■负载阻抗等于特性阻抗

当 $Z_L=Z_0$，由式(5.4.18)，得

$$\Gamma_2 = 0$$

即反射系数为零，传输线上不存在反射波，称为行波工作状态。

2. ■终端短路线

当 $Z_L=0$，由式(5.4.18)，得

$$\Gamma_2 = -1$$

即反射系数的模为 1，传输线上出现全反射，且入射波和反射波相位相反，称为全驻波状态。

3. ■终端开路线

当 $Z_L=\infty$，由式(5.4.18)，得

$$\Gamma_2 = 1$$

即反射系数的模为 1，传输线上出现全反射，称为全驻波状态。

4. ■终端负载为纯电抗

当 $Z_L=\pm jX_L$，由式(5.4.18)，得

$$|\Gamma_2|=1$$

仍出现全反射。

5. ■终端为任意负载

当 $Z_L=R_L\pm jX_L$，由式(5.4.18)得反射系数的模为

$$|\Gamma_2|=\left[\frac{(R_L^2-Z_0^2+X_L^2)^2+(2X_LZ_0)^2}{(R_L+Z_0)^2+X_L^2}\right]^{1/2}$$

相位

$$\varphi_2=\arctan\left[\frac{2X_LZ_0}{R_L^2+X_L^2-Z_0^2}\right]$$

由此可见，$|\Gamma_2|<1$，传输线上出现部分反射，称为混合波状态。

例 5.8　传输线上的电压、电流。

一无损耗传输线的特性阻抗 $Z_0=75\Omega$，终端接负载 $Z_L=(100-j50)\ \Omega$，求传输线上的电压、电流表示式。

解：　传输线的任一点的电压由式(5.4.14)，有

$$U(z)=U^+(z)[1+\Gamma(z)]=$$

$$\frac{1}{2}(U_2+I_2Z_0)e^{j\beta z}[1+|\Gamma_2|e^{-j(2\beta z-\varphi_2)}]$$

而

$$\Gamma_2=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\frac{25-j50}{175-j50}=0.31e^{-j47.5^\circ}$$

故

$$|\Gamma_2|=0.31$$
$$\varphi_2=-47.5^\circ$$

于是

$$U(z)=\frac{1}{2}(U_2+I_2Z_0)e^{j\beta z}[1+0.31e^{-j(2\beta z+47.5^\circ)}]$$

同理传输线上任一点的电流为

$$I(z)=\frac{1}{2Z_0}(U_2+I_2Z_0)e^{j\beta z}[1-|\Gamma_2|e^{-j(2\beta z-\varphi_2)}]=$$

$$\frac{1}{2Z_0}(U_2+I_2Z_0)e^{+j\beta z}[1-0.31e^{-j(2\beta z+47.5^\circ)}]$$

练　习　题

5.4－1　当负载阻抗为 $Z_L=400\Omega$ 时，特性阻抗为 75Ω，求其终端反射系数。

5.4－2　当负载阻抗为 $Z_L=(40-j30)\Omega$ 时，欲使线上驻波比最小，求相应的反射系数。

5.5 传输线的工作状态

根据上一节的分析，由于终端负载阻抗不同，传输线存在三种不同的工作状态，即行波状态、驻波状态和行驻波（混合波）状态。以下的分析都是对无损耗线进行的。

5.5.1 行波状态

所谓行波状态即是指传输线上的电压、电流只有入射波而没有反射波。

1. ■无反射条件

由反射波电压和反射波电流的表示式可知

$$U^{-}(z)=\frac{U_2-I_2Z_0}{2}\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$I^{-}(z)=-\frac{U_2-I_2Z_0}{2Z_0}\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

若要 $U^{-}(z)$ 和 $I^{-}(z)$ 为零，只有两种情况：

(1) $z\to\infty$ 即传输线为无限长；

(2) $U_2-I_2Z_0=0$，即 $\dfrac{U_2}{I_2}=Z_L=Z_0$，传输线的负载阻抗等于其特性阻抗。这就是我们前面提到的匹配状态。

2. ■沿线的电压、电流分布

当出现行波状态时，

$$U(z)=U^{+}(z)=\frac{U_2+I_2Z_0}{2}\mathrm{e}^{\gamma z}=U_2^{+}\mathrm{e}^{\gamma z} \tag{5.5.1}$$

$$I(z)=I^{+}(z)=\frac{U_2+I_2Z_0}{2Z_0}\mathrm{e}^{\gamma z}=I_2^{+}\mathrm{e}^{\gamma z} \tag{5.5.2}$$

设 U_2^{+} 的初相为 θ_2，即

$$U_2^{+}=|U_2^{+}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} \tag{5.5.3}$$

由于 $Z_L=Z_0$ 为纯电阻，则 I_2^{+} 的初相也为 θ_2，即

$$I_2^{+}=|I_2^{+}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} \tag{5.5.4}$$

对于无损耗线 $\gamma=\mathrm{j}\beta$，于是式(5.5.1)和式(5.5.2)变为

$$U(z)=|U_2^{+}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \tag{5.5.5}$$

$$I(z)=|I_2^{+}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \tag{5.5.6}$$

表示为瞬时值形式为

$$u(z,t)=|U_2^{+}|\cos(\omega t+\beta z+\theta_2) \tag{5.5.7}$$

$$i(z,t)=|I_2^{+}|\cos(\omega t+\beta z+\theta_2) \tag{5.5.8}$$

图 5－8 给出行波状态下沿传输线的电压和电流分布。

可见对于无损耗线，行波状态下：

(1) 沿线各点电压和电流的振幅不变；

(2) 沿线各点电压和电流的相位相同，且随 z 的减小相位连续滞后；

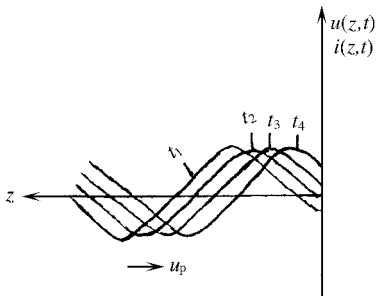


图 5－8　行波状态下沿传输线的电压(或电流)分布

(3)对于有损耗线($\alpha\neq0$),沿线电压和电流振幅将按指数规律 $e^{-\alpha z}$ 衰减。

3. ■阻抗特性

当 $Z_L=Z_0$ 时,传输线上任一点的阻抗

$$Z_{in}=Z_0$$

即沿线各点的阻抗等于特性阻抗,与频率和位置无关。

通过以上的分析可以得到结论:当无损耗传输线负载匹配($Z_L=Z_0$)时,传输线处于行波工作状态,其特点是:

(1)沿线各点电压和电流振幅不变;

(2)电压和电流的相位随 z 减小连续滞后;

(3)沿线各点的阻抗等于其特性阻抗。

5.5.2　驻波状态

1. ■驻波产生的条件

由式(5.4.12)可以看出,在下列三种情况下,传输线工作于全驻波状态。

(1)$Z_L=0$

(2)$Z_L=\infty$

(3)$Z_L=\pm jX_L$

以上三种情况下,$|\Gamma_2|=1$,即将产生全反射,反射波与入射波叠加形成驻波。

2. ■沿线的电压、电流分布

以下仅以 $Z_L=0$ 即终端短路线为例,分析传输线工作于全驻波状态下的特性。这是因为,不论终端短路或开路或接纯电抗负载,线上的驻波特性是相同的,区别只是在于驻波波节和波腹在线上的位置和大小不同。

由式(5.4.12),当 $Z_L=0$ 时

$$\Gamma_2=-1$$

于是得

$$U_2^-=\Gamma_2U_2^+=-U_2^+=|U_2^+|\,e^{j(\theta_2+\pi)}$$

由

$$U(z)=U_2^+e^{j\beta z}+U_2^-e^{-j\beta z}$$

得

$$U(z)=U_2^+(e^{j\beta z}-e^{-j\beta z})=j2U_2^+\sin\beta z=j2|U_2^+|\,e^{j\theta_2}\sin\beta z \qquad (5.5.9)$$

同理

$$I(z) = \frac{2 \mid U_2^+ \mid}{Z_0} e^{j\theta_2} \cos\beta z \tag{5.5.10}$$

表示为瞬时值形式为

$$u(z,t) = 2 \mid U_2^+ \mid \sin\beta z \cos(\omega t + \theta_2 + \frac{\pi}{2}) \tag{5.5.11}$$

$$i(z,t) = \frac{2 \mid U_2^+ \mid}{Z_0} \cos\beta z \cos(\omega t + \theta_2) \tag{5.5.12}$$

根据以上两式可画出沿线电压、电流的瞬时分布曲线和振幅分布曲线，如图 5－9 所示（图中取 $\theta_2 = 0$）。

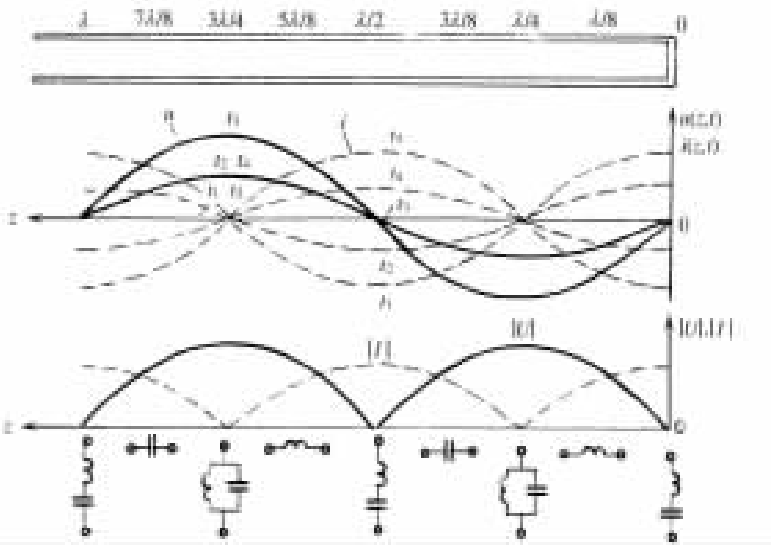


图 5－9　终端短路线上的驻波电压与电流

由式(5.5.9)和式(5.5.10)得电压、电流的大小为

$$\mid U(z) \mid = 2 \mid U_2^+ \mid \mid \sin\beta z \mid$$

$$\mid I(z) \mid = 2 \left| \frac{U_2^+}{Z_0} \right| \mid \cos\beta z \mid$$

可知：

①当 $\beta z = n\pi$，即 $z = n\frac{\lambda}{2}$ 处（$n = 0,1,2,\cdots$）

$$\mid U(z) \mid = U_{\min} = 0$$

$$\mid I(z) \mid = I_{\max} = 2 \left| \frac{U_2^+}{Z_0} \right|$$

称为电压的波节点或电流的波腹点。

②当 $\beta z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$，即 $z = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ 处（$n = 0,1,2,\cdots$）

$$\mid U(z) \mid = U_{\max} = 2 \mid U_2^+ \mid$$

$$\mid I(z) \mid = I_{\min} = 0$$

称为电压的波腹点或电流的波节点。

3. ■阻抗特性

对于无耗短路线其沿线的输入阻抗分布

$$Z_{\text{ino}}=\text{j}Z_0\tan\beta z$$

可见短路线的阻抗为纯电抗，且随频率和长度而变化。当 $z=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$ 或 $z=n\frac{\lambda}{2}$ 时，可等效为一个谐振电路。

通过以上的讨论，可见全驻波状态有以下特点：

(1)全驻波是在满足全反射条件下，由两个相向传输的行波叠加而成。它不具有行波的传输特性，而是在线上作简谐振荡。表现为相邻两波节点之间的电压(或电流)相位相同，而波节点两侧的电压(或电流)相位相反。

(2)传输线上电压和电流的振幅是位置的函数，出现最大值(波腹点)和零值(波节点)。

(3)传输线上各点的电压和电流在时间上有 90°的相位差，在空间位置上也有 90°的相位差，因此传输线在全驻波状态下没有有功功率传输。

(4)传输线的输入阻抗为纯电抗，其性质与频率和线长有关。

5.5.3 行驻波状态

1. ■行驻产生的条件

当传输线终端所接的负载不等于特性阻抗($Z_{\text{L}}\neq Z_0$)，也不是短路($Z_{\text{L}}\neq 0$)或开路($Z_{\text{L}}\neq\infty$)或接纯电抗负载($Z_{\text{L}}\neq\pm\text{j}X_{\text{L}}$)，而是接任意阻抗负载时，线上将同时存在入射波和反射波。由于此时$|\Gamma_2|<1$，二者叠加形成混合波状态，这时线上既有行波分量，也有驻波分量。

2. ■沿线电压、电流分布

对于无损耗线($\gamma=\text{j}\beta$)，传输线上的电压、电流分布可由式(5.4.2)和式(5.4.3)，得

$$\begin{aligned}U(z)&=U_2^+\,\text{e}^{\text{j}\beta z}+U_2^-\,\text{e}^{-\text{j}\beta z}=U_2^+\,\text{e}^{\text{j}\beta z}+\Gamma_2U_2^+\,\text{e}^{-\text{j}\beta z}=\\&U_2^+\,\text{e}^{\text{j}\beta z}+2\Gamma_2U_2^+\,\frac{\text{e}^{\text{j}\beta z}+\text{e}^{-\text{j}\beta z}}{2}-\Gamma_2U_2^+\,\text{e}^{\text{j}\beta z}=\\&U_2^+(1-\Gamma_2)\text{e}^{\text{j}\beta z}+2\Gamma_2U_2^+\cos\beta z\end{aligned}\tag{5.5.13}$$

$$\begin{aligned}I(z)&=I_2^+\,\text{e}^{\text{j}\beta z}+I_2^-\,\text{e}^{-\text{j}\beta z}=\\&I_2^+(1-\Gamma_2)\text{e}^{\text{j}\beta z}+\text{j}2\Gamma_2I_2^+\sin\beta z\end{aligned}\tag{5.5.14}$$

由以上表达式可以看出，线上的电压(或电流)由两项构成，第一项为行波分量，含有行波因子 $\text{e}^{\text{j}\beta z}$；第二项为驻波分量，含有驻波因子 $\cos\beta z$(或 $\sin\beta z$)。

在行驻波状态下，由于仍存在反射波，因此线上的合成波电压或电流的振幅分布依然与位置有关。由式(5.4.2)和式(5.4.3)可知：

$$\begin{aligned}U(z)&=U_2^+\,\text{e}^{\text{j}\beta z}+U_2^-\,\text{e}^{-\text{j}\beta z}=U_2^+\left[1+\Gamma_2\,\text{e}^{-2\text{j}\beta z}\right]\text{e}^{\text{j}\beta z}=\\&U_2^+\left[1+|\Gamma_2|\,\text{e}^{\text{j}\varphi_2}\,\text{e}^{-2\text{j}\beta z}\right]\text{e}^{\text{j}\beta z}\end{aligned}\tag{5.5.15}$$

可得电压的大小为

$$|U(z)|=|U_2^+|\,|(1+|\Gamma_2|\,\text{e}^{\text{j}(\varphi_2-2\beta z)})|$$

所以

①当 $\varphi_2-2\beta z=\pm 2n\pi \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$|U(z)|=|U|_{\max}=|U_2^+|\,|1+|\Gamma_2||\tag{5.5.16}$$

②当 $\varphi_2-2\beta z=\pm(2n+1)\pi \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$|U(z)|=|U|_{\min}=|U_2^+|\,|1-|\Gamma_2||\tag{5.5.17}$$

以上分别是电压最大值、最小值及出现的位置。

同理

$$I(z)=\frac{U_2^+}{Z_0}[1-|\Gamma_2|\,e^{j\varphi_2}e^{-2j\beta z}]e^{j\beta z}\tag{5.5.18}$$

$$|I(z)|=\left|\frac{U_2^+}{Z_0}\right||1-|\Gamma_2|\,e^{j(\varphi_2-2\beta z)}|$$

所以

①当 $\varphi_2-2\beta z=\pm(2n+1)\pi \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$|I(z)|=|I|_{\max}=\left|\frac{U_2^+}{Z_0}\right||1+|\Gamma_2||\tag{5.5.19}$$

②当 $\varphi_2-2\beta z=\pm 2n\pi \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$|I(z)|=|I|_{\min}=\left|\frac{U_2^+}{Z_0}\right||1-|\Gamma_2||\tag{5.5.20}$$

以上分别是电流最大值、最小值及出现的位置。

根据上面的讨论还可以得到，在行驻波状态下，电压的最大值点($\varphi_2-2\beta z)=\pm 2n\pi$ 正是电流的最小值点，而电压最小值点($\varphi_2-2\beta z)=\pm(2n+1)\pi$ 正是电流最大值点，如图 5－10 所示。

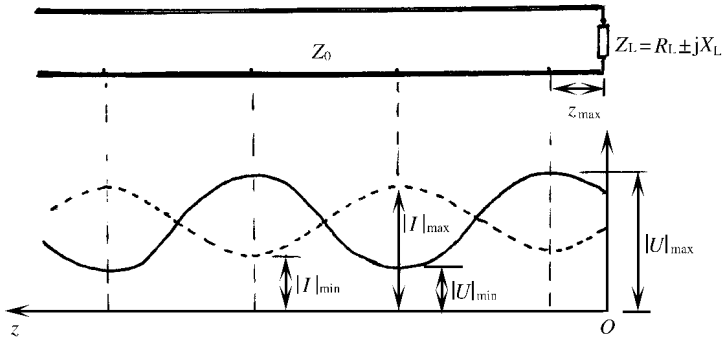


图 5－10　行驻波状态下的电压、电流振幅分布

3. ■行波系数与驻波系数

当负载为复阻抗时，传输线上既有行波成分，又有驻波成分。为了定量描述线上所载行波的程度，我们引入行波系数和驻波系数。

定义：传输线上电压(或电流)最大值与电压(或电流)最小值的比值，称为驻波系数或驻波比，表示为

$$\rho=\frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}}=\frac{|I|_{\max}}{|I|_{\min}}\tag{5.5.21}$$

由式(5.5.16)和式(5.5.17)，得

$$\rho = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma_2|}{1-|\Gamma_2|} \tag{5.5.22}$$

而行波系数定义为驻波系数的倒数，即

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{1-|\Gamma_2|}{1+|\Gamma_2|} \tag{5.5.23}$$

联系到前面关于反射系数的讨论可以看出：

① $|\Gamma_2|=0$，即行波状态下

$$\rho=1, K=1$$

② $|\Gamma_2|=1$，即全驻波状态下

$$\rho=\infty, K=0$$

③ $|\Gamma_2|<1$，即行驻波状态下

$$1<\rho<\infty, 0<K<1$$

工程上对传输线的驻波特性都有相应的要求，即 ρ 越接近于 1 越好，但理想的行波状态不易达到。电视发射天线与馈线系统，要求 $\rho \leqslant 1.05$；雷达天线与馈线系统，要求 $\rho \leqslant 1.5$。

4. ■阻抗特性

终端接任意负载时，传输线任意点的输入阻抗

$$Z_{\text{in}}(z) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta z}{Z_0 + jZ_L \tan\beta z}$$

一般情况下，$Z_{\text{in}}(z)$ 是一复值，但是在电压（或电流）的最大值点或最小值点，该输入阻抗则为一纯电阻。

在电压最大值点，$\varphi - 2\beta z = \pm 2n\pi$，由式(5.5.15)和式(5.5.18)，得

$$U(z) = U_2^+ [1 + |\Gamma_2| e^{j(\varphi_2 - 2\beta z)}] e^{j\beta z} = U_2^+ [1 + |\Gamma_2|] e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} [1 - |\Gamma_2| e^{j(\varphi_2 - 2\beta z)}] e^{j\beta z} = \frac{U_2^+}{Z_0} [1 - |\Gamma_2|] e^{j\beta z}$$

于是该点的输入阻抗为

$$Z_{\text{in}}(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{1+|\Gamma_2|}{1-|\Gamma_2|} = Z_0 \rho \tag{5.5.24}$$

在电压最小值点，$\varphi - 2\beta z = \pm(2n+1)\pi$，这时

$$U(z) = U_2^+ [1 - |\Gamma_2|] e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} [1 + |\Gamma_2|] e^{j\beta z}$$

该点的输入阻抗为

$$Z_{\text{in}}(z) = \frac{Z_0}{\rho} \tag{5.5.25}$$

例 5.9　传输线电压最大值点和最小值点的确定。

一无损耗传输线的特性阻抗 $Z_0 = 75\Omega$，终端接负载 $Z_L = (100 - j50)\Omega$，求距负载第一个电压最小值点和电压最大值点的距离 $l_{\min}$ 和 $l_{\max}$。

解：　由式(5.5.17)，得电压最小值点 $l_{\min}$ 满足

$$\varphi_2-2\beta l_{\min}=\pm(2n+1)\pi$$

式中 φ_2 为终端反射系数的幅角。

而

$$\Gamma_2=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\frac{25-j50}{175-j50}=0.31e^{-j47.5^\circ}$$

即

$$\varphi_2=-47.5^\circ$$

于是

$$2\beta l_{\min}+47.5^\circ=(2n+1)\pi$$

第一个电压最小值点($n=0$)满足

$$2\beta l_{\min}=180^\circ-47.5^\circ=2.31\text{rad}$$

所以

$$l_{\min}=\frac{2.31}{2\beta}=0.184\lambda$$

同理,电压最大值点 $l_{\max}$ 满足

$$\varphi_2-2\beta l_{\max}=\pm 2n\pi$$

于是

$$2\beta l_{\max}=360^\circ-47.5^\circ=5.45\text{rad}$$

$$l_{\max}=\frac{5.45}{2\beta}=0.434\lambda$$

例 5.10　负载阻抗实部与虚部的关系。

一根 75Ω 的无损耗线,终端接有负载阻抗 $Z_L=R_L+jX_L$,欲使驻波比等于 3,则 R_L 与 X_L 的关系是什么?

解:　因为

$$\rho=\frac{1+|\Gamma_2|}{1-|\Gamma_2|}$$

所以

$$|\Gamma_2|=\frac{\rho-1}{\rho+1}=\left|\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}\right|=\left|\frac{\frac{Z_L}{Z_0}-1}{\frac{Z_L}{Z_0}+1}\right|=\left|\frac{\frac{R_L}{Z_0}-1+j\frac{X_L}{Z_0}}{\frac{R_L}{Z_0}+1+j\frac{X_L}{Z_0}}\right|=\left|\frac{r_L-1+jx_L}{r_L+1+jx_L}\right|=\frac{\sqrt{(r_L-1)^2+x_L^2}}{\sqrt{(r_L+1)^2+x_L^2}}$$

式中

$$r_L=\frac{R_L}{Z_0}\qquad x_L=\frac{x_L}{Z_0}$$

得

$$x_L=\pm\left[\frac{\left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right)^2(r_L+1)^2-(r_L-1)^2}{1-\left(\frac{\rho-1}{\rho+1}\right)^2}\right]^{1/2}$$

当 $\rho=3$ 时，得

$$x_{\mathrm{L}}=\pm\sqrt{(10r_L-3r_{\mathrm{L}}^2-3)/3}$$

则

$$X_{\mathrm{L}}=\pm Z_0\sqrt{\left[10\frac{R_{\mathrm{L}}}{Z_0}-3\left(\frac{R_{\mathrm{L}}}{Z_0}\right)^2-3\right]/3}$$

例 5.11　传输线的特性阻抗及驻波系数。

已知一无损耗传输线，终端负载为 $Z_{\mathrm{L}}=40-\mathrm{j}30\ (\Omega)$，欲使线上的驻波系数最小，则传输线的特性阻抗 Z_0 应为多少？此时的驻波系数为多少？

解：
$$|\Gamma_2|^2=\left|\frac{Z_{\mathrm{L}}-Z_0}{Z_{\mathrm{L}}+Z_0}\right|^2=\left|\frac{R_{\mathrm{L}}-Z_0+\mathrm{j}X_{\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{L}}+Z_0+\mathrm{j}X_{\mathrm{L}}}\right|^2=\frac{(R_{\mathrm{L}}-Z_0)^2+X_{\mathrm{L}}^2}{(R_{\mathrm{L}}+Z_0)^2+X_{\mathrm{L}}^2}$$

又

$$\rho=\frac{1+|\Gamma_2|}{1-|\Gamma_2|}$$

欲使 ρ 最小，只要 $|\Gamma_2|$ 最小。

由 $\dfrac{\partial|\Gamma_2|^2}{\partial Z_0}=0$，得 $|\Gamma_2|$ 的最小值。由此解得

$$Z_0=\sqrt{R_{\mathrm{L}}^2+X_{\mathrm{L}}^2}=\sqrt{40^2+30^2}=50\ \Omega$$

此时

$$|\Gamma_2|_{\min}=\sqrt{\frac{(R_{\mathrm{L}}-Z_0)^2+X_{\mathrm{L}}^2}{(R_{\mathrm{L}}+Z_0)^2+X_{\mathrm{L}}^2}}=\sqrt{\frac{(40-50)^2+30^2}{(40+50)^2+30^2}}=\frac{1}{3}$$

而
$$\rho_{\min}=\frac{1+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=2$$

例 5.12　传输线的终端反射系数及负载阻抗。

已知特性阻抗为 300Ω 的无损耗线上的驻波比等于 2.0，距负载最近的电压最小值点距终端为 0.3λ，试求终端反射系数 Γ_2 及负载阻抗 Z_{L}。

解：
$$|\Gamma_2|=\frac{\rho-1}{\rho+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

第一个电压最小值点 $l_{\min}$ 满足

$$\varphi_2-2\beta l_{\min}=-\pi$$

故

$$\varphi_2=2\beta l_{\min}-\pi=0.6\beta\lambda-\pi=0.6\times2\pi-\pi=0.2\pi=36^\circ$$

所以

$$\Gamma_2=|\Gamma_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}36^\circ}$$

而

$$Z_{\mathrm{L}}=Z_0\left(\frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2}\right)=Z_0\left(\frac{1+|\Gamma_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}}{1-|\Gamma_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}}\right)=$$

$$300\,\frac{1+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}36^\circ}}{1-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}36^\circ}}=465+\mathrm{j}203\ (\Omega)$$

例 5.13　确定负载阻抗。

图 5－11 所示为测得的无损耗传输线的电压分布，线的特性阻抗为 $Z_0=50\Omega$，试确定负载阻抗。

解：　由图 5－11 可知：

$U_{\max}=8.4$，$U_{\min}=2.1$，**第一个电压波节点位置** $l_{\min}=0.092\lambda$。**故驻波系数为**

$$\rho=\frac{U_{\max}}{U_{\min}}=\frac{8.4}{2.1}=4$$

终端反射系数为

$$|\Gamma_2|=\frac{\rho-1}{\rho+1}=\frac{4-1}{4+1}=0.6$$

电压最小值点满足

$$\varphi_2-2\beta l_{\min}=-\pi$$

则

$$\varphi_2=2\beta l_{\min}-\pi=2\times\frac{2\pi}{\lambda}\times0.092\lambda-\pi=-1.99\mathrm{rad}$$

于是

$$\Gamma_2=|\Gamma_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}=0.6\mathrm{e}^{-\mathrm{j}1.99}=-0.24-\mathrm{j}0.55$$

于是得

$$Z_{\mathrm{L}}=Z_0\left(\frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2}\right)=50\left(\frac{0.76-\mathrm{j}0.55}{1.24+\mathrm{j}0.55}\right)=17.4-\mathrm{j}30\ (\Omega)$$

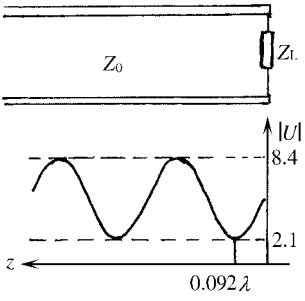


图 5－11　无损耗传输线的电压分布

练　习　题

5.5－1　**求如图 5－7 所示分布参数电路中各段的反射系数及驻波系数。**

5.5－2　**一特性阻抗为 75Ω 的无损耗线，终端负载为** $Z_{\mathrm{L}}=150+\mathrm{j}96.8\ (\Omega)$，**求距终端最近的电压最小点位置。**

5.5－3　**一特性阻抗为 50Ω 的无损耗线，其驻波比为 3.0。相邻电压最小值之间距离为 20cm，且第一个电压最小值点距负载 5cm，求负载阻抗。**

5.6 传输功率与效率

5.6.1 传输功率的计算

对于无损耗线，通过线上任一点的平均功率是相同的。如图 5－12 所示，负载吸收的功率 P_l 等于输入端的输入功率 P_{in}，也等于线上任一点通过的功率 $P(z)$，即 $P_l = P_{\text{in}} = P(z)$。

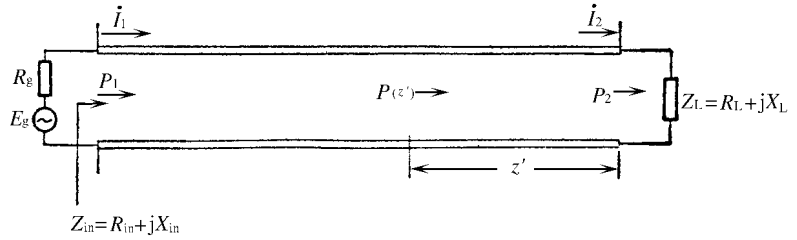


图 5－12　传输功率的计算

由图 5－12 可知：

$$P_l = \frac{1}{2} I_2^2 R_L \tag{5.6.1}$$

$$P_{\text{in}} = \frac{1}{2} I_1^2 R_{\text{in}} \tag{5.6.2}$$

$$P(z) = \frac{1}{2} \mid U(z) \mid \mid I(z) \mid \cos\varphi \tag{5.6.3}$$

其中 φ 为 z 点处电压与电流的相位差。由于波节点和波腹点的输入阻抗为纯电阻，故其电压与电流的相位差 $\varphi = 0$，故有

$$P(z) = \frac{1}{2} \mid U \mid_{\max} \mid I \mid_{\min} = \frac{1}{2} \mid U \mid_{\min} \mid I \mid_{\max} \tag{5.6.4}$$

由式(5.5.16)和式(5.5.19)，有

$$\frac{\mid U \mid_{\max}}{\mid I \mid_{\max}} = \frac{\mid U \mid_{\min}}{\mid I \mid_{\min}} = Z_0 \tag{5.6.5}$$

由式(5.5.21)和式(5.5.22)，有

$$\frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{|I|_{\max}}{|I|_{\min}} = \rho$$

于是得到

$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{\mid U \mid_{\max}^2}{Z_0 \rho} = \frac{1}{2} \frac{\mid U \mid_{\max}^2}{Z_0} K =$$

$$\frac{1}{2} \mid I \mid_{\max} Z_0 K \tag{5.6.6}$$

由此可见，当传输线的耐压一定或所能载的电流一定时，行波系数 K 越大，所能传输的功率就越大。

另一方面由式(5.5.16)和式(5.5.20)，有

$$P_l=\frac{1}{2}|U|_{\max}|I|_{\min}=$$

$$\frac{1}{2}|U_2^+|(1+|\Gamma_2|)|I_2^+|(1-|\Gamma_2|)=$$

$$\frac{1}{2}|U_2^+||I_2^+|(1-|\Gamma_2|^2)=$$

$$\frac{1}{2}|U_2^+||I_2^+|-\frac{1}{2}|\Gamma_2||U_2^+||\Gamma_2||I_2^+|=$$

$$\frac{1}{2}|U_2^+||I_2^+|-\frac{1}{2}|U_2^-||I_2^-|=P^+-P^- \tag{5.6.7}$$

式中

$$P^+=\frac{1}{2}|U_2^+||I_2^+|$$

为入射波传输到负载的平均功率。

$$P^-=\frac{1}{2}|U_2^-||I_2^-|$$

为负载反射的功率。因此，负载吸收的功率为入射波功率与反射波功率之差。

5.6.2 传输线的功率容量

传输线传输功率时，允许传输的最大功率将受到击穿电压的限制，即存在一个功率容量问题。所谓功率容量，是在不发生电压击穿条件下，传输线上能传输的最大功率。由式(5.6.6)，有

$$P_l=\frac{1}{2}\frac{|U|_{\max}^2}{Z_0\rho}=\frac{1}{2}\frac{|U|_{\max}^2}{Z_0}K$$

设 U_{br} 代表击穿电压，则功率容量为

$$P_{\mathrm{br}}=\frac{1}{2}\frac{U_{\mathrm{br}}^2}{Z_0\rho}=\frac{U_{\mathrm{br}}^2}{2Z_0}K \tag{5.6.8}$$

可见功率容量不仅与击穿电压有关(由电线的结构、材料等决定)，而且与传输线的工作状态有关。驻波系数 ρ 愈小(越接近于 1)，即传输线愈接近于行波状态，则功率容量愈大。因此，从功率容量的角度来说，传输线的最佳工作状态为行波状态。

5.6.3 传输线的传输效率

传输线的传输效率定义为负载吸收功率 P_l 与输入功率 P_{in} 之比，即

$$\eta=\frac{P_l}{P_{\mathrm{in}}} \tag{5.6.9}$$

根据前面的分析，对于无损耗线，由于 $P_l=P_{\mathrm{in}}$，则

$$\eta=\frac{P_l}{P_{\mathrm{in}}}=1 \tag{5.6.10}$$

而对于损耗线，传输功率由式(5.5.15)和式(5.5.18)得到

$$P_{\mathrm{in}}(z)=\mathrm{Re}\frac{1}{2}[U(z)I^*(z)]=$$

$$\frac{1}{2}Z_0 \mid I_2^+ \mid^2 (\mathrm{e}^{2\alpha z} - \mid \Gamma_2 \mid^2 \mathrm{e}^{-2\alpha z}) \tag{5.6.11}$$

而负载的吸收功率由式(5.6.7),有

$$P_l = \frac{1}{2}Z_0 \mid I_2^+ \mid^2 (1 - \mid \Gamma_2 \mid^2)$$

于是

$$\eta = \frac{P_l}{P_{\mathrm{in}}} = \frac{1 - \mid \Gamma_2 \mid^2}{\mathrm{e}^{2\alpha z} - \mid \Gamma_2 \mid^2 \mathrm{e}^{-2\alpha z}} \tag{5.6.12}$$

设传输线长为 l,则

$$\eta = \frac{1 - \mid \Gamma_2 \mid^2}{\mathrm{e}^{2\alpha l} - \mid \Gamma_2 \mid^2 \mathrm{e}^{-2\alpha l}} = \frac{1}{\mathrm{ch}2\alpha l + \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\mathrm{sh}2\alpha l} \tag{5.6.13}$$

当传输线的损耗很小时,即 $\alpha l \ll 1$,则式(5.6.13)变为

$$\eta \approx 1 - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\alpha l \tag{5.6.14}$$

可见传输线的效率与线的衰减常数 α、线长 l 及工作状态有关。当 αl 一定时,ρ 越小效率越高。当 $\rho = 1$ 时(即为行波工作状态),η 有最大值,即

$$\eta = \eta_{\max} \approx 1 - 2\alpha l \approx \mathrm{e}^{-2\alpha l} \tag{5.6.15}$$

例 5.14 传输线负载的吸收功率。

有一特性阻抗为 $Z_0 = 75\Omega$ 的传输线,其长度为 20cm,工作频率为 10GHz,终端负载为 $Z_{\mathrm{L}} = (75 - \mathrm{j}50)\ \Omega$,若传输线入射波的功率 $P^+(z=20) = 10\mathrm{W}$,求:

(1)无损耗时,负载的吸收功率是多少?

(2)设衰减常数 $\alpha = 0.01\mathrm{dB/cm}$ 时,负载的吸收功率又是多少?

解: (1)无损耗时,负载的吸收功率由式(5.6.7),得到

$$P_l(0) = \frac{1}{2} \mid U_2^+ \mid \mid I_2^+ \mid (1 - \mid \Gamma_2 \mid^2) = P^+(z=0)(1 - \mid \Gamma_2 \mid^2)$$

对于无损耗线,$P^+(z=0) = P^+(z=20) = 10\mathrm{W}$,故

$$P_l = 10(1 - \mid \Gamma_2 \mid^2)$$

式中

$$\Gamma_2 = \frac{Z_{\mathrm{L}} - Z_0}{Z_{\mathrm{L}} + Z_0} = \frac{-\mathrm{j}50}{150 - \mathrm{j}50} = 0.316\mathrm{e}^{-\mathrm{j}71.6^\circ}$$

所以

$$P_l = 10(1 - 0.316^2) = 9\mathrm{W}$$

(2)有损耗时

$$\alpha = 0.01\mathrm{dB/cm}, \alpha l = 0.2\mathrm{dB} = 0.023\mathrm{Np}$$

$$P^+(0) = P^+(20)\mathrm{e}^{-2\alpha l} = 10\mathrm{e}^{-0.046} = 9.55\mathrm{W}$$

负载吸收功率为

$$P_l(z=0) = P^+(0)(1 - \mid \Gamma_2 \mid^2) = 9.55(1 - 0.316^2) = 8.6\mathrm{W}$$

例 5.15 传输线的损耗功率和传输效率。

某传输线的特性阻抗为 50Ω,终端负载为 $Z_{\mathrm{L}} = 100 - \mathrm{j}50\ (\Omega)$,单位长度的衰减常数

为 0.120dB/m。求传输线长度为 10m 时损耗在传输线上的功率和传输线效率(设 $z=0$ 处的功率 P_2 为已知)。

解： 终端反射系数为

$$|\Gamma_2|=\left|\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}\right|=\left|\frac{50-(1-j)}{150-j50}\right|=0.447$$

负载吸收的功率为

$$P(z=0)=P_2=P^+(z=0)[1-|\Gamma_2|^2]=P^+(z=0)[1-0.447^2]$$

故负载处入射波的功率为

$$P^+(z=0)=\frac{P_2}{1-0.447^2}=\frac{P_2}{0.8}=1.25P_2$$

设输入端 $z=10$m 处的入射波功率为 $P^+(z=10)$,则

$$P^+(z=0)=P^+(z=10)e^{-2\alpha l}=1.25P_2$$

由上式得(注 $\alpha l=1.2$dB$=0.138$Np)

$$P^+(z=10)=1.25P_2e^{2\alpha l}=1.25P_2e^{0.276}=1.647P_2$$

输入端的功率

$$P(z=10)=P^+(z=10)-P^-(z=10)$$

式中:$P^+(z=10)$和 $P^-(z=10)$分别代表输入端入射波和反射波的功率,而

$$P^-(z=10)=P^-(z=10)e^{-2\alpha l}=P^+(z=0)|\Gamma_2|^2e^{-2\alpha l}=$$

$$P^+(z=10)e^{-2\alpha l}|\Gamma_2|^2e^{-2\alpha l}=P^+(z=10)|\Gamma_2|^2e^{-4\alpha l}$$

所以

$$P(z=10)=P^+(z=10)-P^-(z=10)=$$

$$P^+(z=10)[1-|\Gamma_2|^2e^{-4\alpha l}]=$$

$$1.647P_2[1-0.447^2e^{-0.55}]=1.46P_2$$

故损耗在传输线上的功率为

$$P(z=10)-P(z=0)=0.46P_2$$

效率为

$$\eta=\frac{P(z=0)}{P(z=10)}=\frac{P_2}{1.46P_2}=68.49\%$$

若由式(5.6.13)可直接求得效率为

$$\eta=\frac{1-|\Gamma_2|^2}{e^{2\alpha l}-|\Gamma_2|^2e^{-2\alpha l}}=\frac{1-0.447^2}{e^{0.276}-0.447^2e^{-0.276}}\approx 68.49\%$$

例 5.16 传输线的传输功率。

信号源的内阻 $Z_g=R_g=1\Omega$,开路电压 $U_g=0.3\cos(2\pi\times10^8t)$ V,将它与特性阻抗 $Z_0=50\Omega$ 的无损耗平行双线传输线相接,如图 5-13 所示。已知传输线长度 $l=4$m,终端负载阻抗 $Z_L=Z_0$,线上波的传播速度为 $v_p=2.5\times10^8$m/s。求由电源传输到负载端的功率。

解： 因为是无损耗线,故传输到负载端的功率等于输入端的功率,即

$$P_l=P_{in}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[U(z)I^*(z)]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[U_{in}I_{in}^*]$$

由题设条件可得到输入端的电压和电流分别为

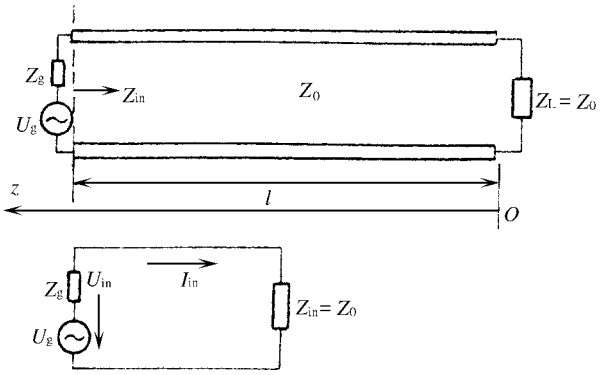


图 5－13　终端匹配及电源端的等效电路

$$U_{in}=\frac{Z_{in}}{Z_g+Z_{in}}U_g=\frac{50}{1+50}0.3e^{j0^\circ}=0.294e^{j0^\circ}$$

和

$$I_{in}=\frac{1}{Z_g+Z_{in}}U_g=\frac{1}{1+50}0.3e^{j0^\circ}=0.0059e^{j0^\circ}$$

于是得

$$P_l=\frac{1}{2}(0.294\times0.0059)=8.67\times10^{-4}\,\mathrm{W}$$

练　习　题

5.6－1　**特性阻抗为** $Z_0=100\Omega$，**长度为** $\lambda/8$ **的无损耗传输线，终端负载为** $Z_L=(200+j300)\ \Omega$，**输入端电源的内阻为** 100Ω，**开路电压为** $500e^{j0^\circ}$，**试求**：

(1)**传输线输入端的电压**；

(2)**终端电压**；

(3)**负载的吸收功率**。

5.7　传输线的阻抗匹配

根据前面的讨论知道，传输线处于行波工作状态时，其传输功率达到最大值，这就要求传输线的负载阻抗 Z_L **等于其特性阻抗** Z_0，**即达到匹配状态。此时对于信息传输而言的信号失真也可消除。本节讨论几种无损耗传输线的阻抗匹配方法。**

5.7.1　$\lambda/4$ 阻抗变换器

这是一种实现纯电阻负载 $Z_L=R_L$ **与无损耗传输线的特性阻抗** Z_0 **相匹配的简单方法。在负载与主传输线之间接入一段特性阻抗为** Z_{01} **的** $\lambda/4$ **线段作为阻抗变换器，并使**

$$Z_{01}=\sqrt{Z_0R_L} \tag{5.7.1}$$

这实际上就是前面讨论传输线输入阻抗时已得到的式(5.3.8)**的结果。两种常用的传输**

线接入 $\lambda/4$ 阻抗变换器，如图 5－14 所示。

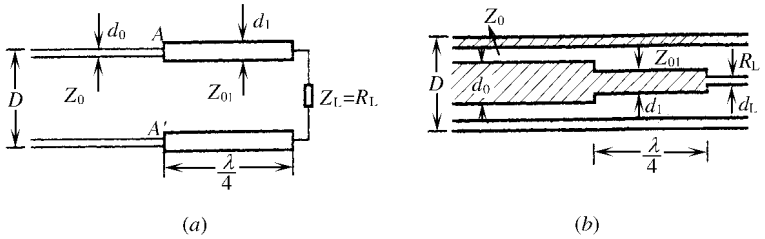


图 5－14　$\lambda/4$ 阻抗变换器

(a)平行双导线；(b)同轴线。

由于 $\lambda/4$ 的长度取决于波长，故这种匹配方法对频率十分敏感，它只对一个频率得到理想匹配。当频率变化时，匹配被破坏，主传输线上的反射系数将增大。

如图 5－14(a)所示，AA'端的输入阻抗当 $f=f_0$ 时，有

$$Z_{AA'}=\frac{Z_{01}^2}{R_L}=Z_0$$

当 $f\neq f_0$ 时，则为

$$Z_{AA'}=Z_{01}\frac{R_L+\mathrm{j}Z_{01}\tan\beta z}{Z_{01}+\mathrm{j}R_L\tan\beta z}=$$

$$Z_{01}\frac{R_L+\mathrm{j}Z_{01}\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda_0}{4}\right)}{Z_{01}+\mathrm{j}R_L\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda_0}{4}\right)}=Z_{01}\frac{R_L+\mathrm{j}Z_{01}\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right)}{Z_{01}+\mathrm{j}R_L\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right)}\tag{5.7.2}$$

由此可得到主传输线上在任意频率下的反射系数为

$$|\Gamma_{AA'}|=\left|\frac{Z_{AA'}-Z_0}{Z_{AA'}+Z_0}\right|=$$

$$\frac{\left|\frac{R_L}{Z_0}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{R_L}{Z_0}+1\right)^2+4\left(\frac{R_L}{Z_0}\right)\tan^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{f}{f_0}\right)}}\tag{5.7.3}$$

可见，当频率在给定范围内变化时，若反射系数或驻波系数增加较慢，则匹配的频率特性越好。另外，若阻抗变换系数$\left(\frac{R_L}{Z_0}\text{或}\frac{Z_0}{R_L}\right)$愈大，则满足给定的驻波系数的频带愈窄，频率特性愈差。因此，为了使匹配效果好，阻抗变换系数不宜过大，可采用两节或多节 $\lambda/4$ 线进行匹配。以两段 $\lambda/4$ 线为例讨论其频率特性，如图 5－15 所示。图中 Z_{01} 和 Z_{02} 应

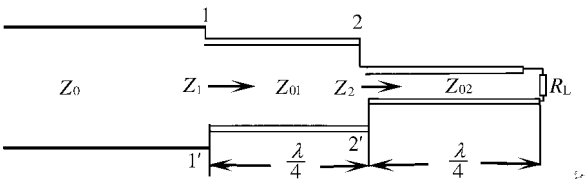


图 5－15　两节 $\lambda/4$ 匹配线

满足阻抗变换关系，即

$$Z_2 = \frac{Z_{02}^2}{R_L} \tag{5.7.4}$$

$$Z_0 = Z_1 = \frac{Z_{01}^2}{Z_2} \tag{5.7.5}$$

设两节 $\lambda/4$ 线变换比相同，即

$$\frac{Z_2}{R_L} = \frac{Z_0}{Z_2} \tag{5.7.6}$$

联立求解以上三个式子，得

$$Z_{01} = \sqrt[4]{Z_0^3 R_L} = \sqrt[4]{\frac{R_L}{Z_0}} Z_0 \tag{5.7.7}$$

$$Z_{02} = \sqrt[4]{Z_0 \cdot R_L^3} = \sqrt[4]{\frac{Z_0}{R_L}} \cdot R_L \tag{5.7.8}$$

当 $f \neq f_0$ 时，$22'$端的输入阻抗由式(5.7.2)，得

$$Z_2 = Z_{02} \cdot \frac{R_L + jZ_{02}\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right)}{Z_{02} + jR_L\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right)} \tag{5.7.9}$$

在 $11'$端的输入阻抗为

$$Z_1 = Z_{01}\frac{Z_2 + jZ_{01}\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right)}{Z_{01} + jZ_2\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right)} \tag{5.7.10}$$

将式(5.7.9)代入式(5.7.10)得 $11'$端以左的主传输线上的反射系数为

$$|\Gamma_{11'}| = \left|\frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}\right| =$$

$$\frac{\left|\frac{R_L}{Z_0} - 1\right| \cot^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{R_L}{Z_0}+1\right)\cot^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right) - 2\sqrt{\frac{R_L}{Z_0}}\right]^2 + 4\sqrt{\frac{R_L}{Z_0}\left(\sqrt{\frac{Z_L}{Z_0}}+1\right)^2\cot^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right)}}} \tag{5.7.11}$$

由式(5.7.3)和式(5.7.11)可绘出在不同$\frac{R_L}{Z_0}$值下主传输线的反射系数及驻波系数与$\frac{f}{f_0}$的关系曲线，如图 5－16 和图 5－17 所示。比较两图可以看出，用两段 $\lambda/4$ 线匹配时，满足一定驻波系数的工作频带比用一节 $\lambda/4$ 线时要宽得多。由此可以推断：如用三节、四节甚至更多节 $\lambda/4$ 线匹配时，可获得更宽的频带。

5.7.2 单短截线匹配器

对于负载阻抗为 $Z_L = R_L + jX_L$ 和主传输线特性阻抗为 Z_0 的匹配，可采用在主传输线上并联一段特性阻抗为 Z_0 的单短截线来实现，如图 5－18 所示，这种方法称为单短截线匹配法。为此，可调节单短截线距负载的位置 l_1 和单短截线的长度 l_2，匹配时的阻抗关系为

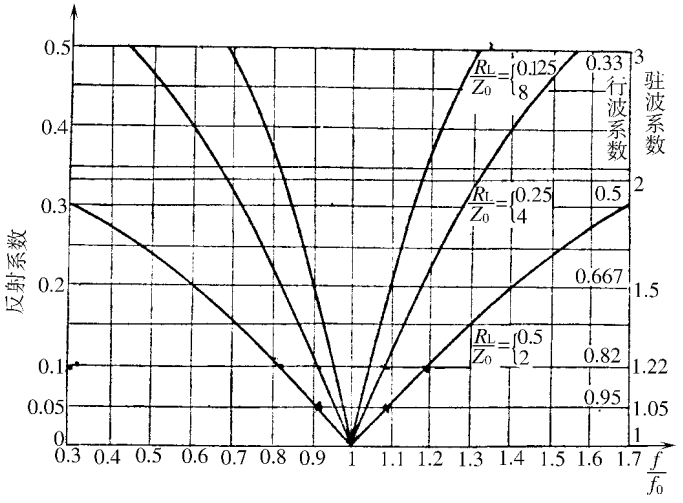


图 5－16　单节 $\lambda/4$ 匹配线的频率特性

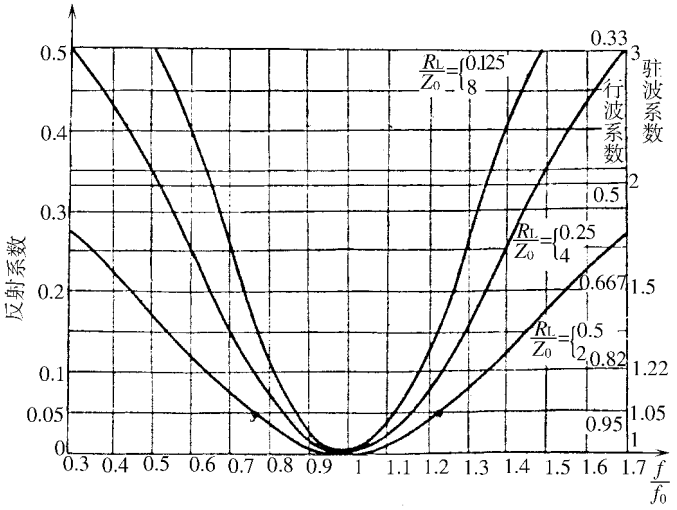


图 5－17　两节 $\lambda/4$ 匹配线的频率特性

$$\frac{1}{Z_0}=\frac{1}{Z_{in1}}+\frac{1}{Z_{in2}} \qquad (5.7.12)$$

为使上式满足，首先调节 l_1 的长度，使

$$\frac{1}{Z_{in1}}=\frac{1}{Z_0}+\mathrm{j}B_{in1} \qquad (5.7.13)$$

然后调节 l_2 的长度，使

$$\frac{1}{Z_{in2}}=\mathrm{j}B_{in2}=-\mathrm{j}B_{in1} \qquad (5.7.14)$$

这样式(5.7.12)成立，达到匹配目的。

单短截线阻抗匹配法实质是用接入短截线后

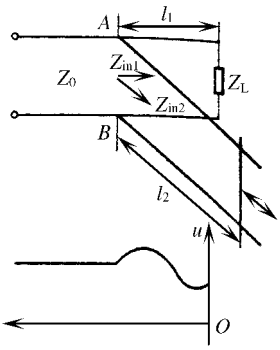


图 5－18　单短截线阻抗匹配

附加的反射波来抵消主传输线上原来的反射波，以实现匹配。这种方法同样对频率十分敏感，当频率变化时，l_1、l_2 都需要重新调节。在实际应用中，还有双短截线和多短截线匹配法。

例 5.17 $\lambda/4$ 阻抗变换。

一台信号发生器通过一特性阻抗 $Z_0=50\Omega$ 的传输线对两个电阻性负载 $Z_{L1}=R_{L1}=64\Omega$，$Z_{L2}=R_{L2}=25\Omega$ 进行等功率馈电，采用 $\lambda/4$ 线来实现与 50Ω 的主传输线匹配，如图 5－19 所示。试求：(1)$\lambda/4$ 线的特性阻抗 Z_{01} 和 Z_{02}；(2)匹配线上的反射系数和驻波系数。

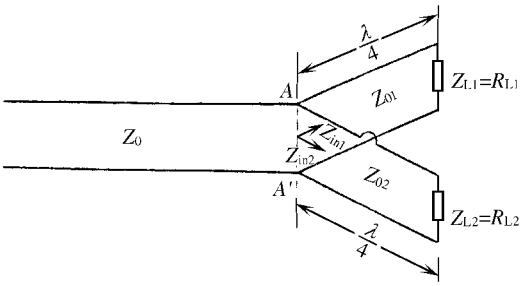


图 5－19

解： (1)为了实现对两个负载等功率馈电，在主传输线的输出端 AA' 向每个负载看去的输入阻抗必须相等，且

$$Z_{in1}=Z_{in2}=R_{in}=2Z_0=100\Omega$$

由式(5.7.1)，有

$$Z_{01}=R_{01}=\sqrt{R_{in}R_{L1}}=\sqrt{100\times 64}=80\Omega$$

$$Z_{02}=R_{02}=\sqrt{R_{in}R_{L2}}=\sqrt{100\times 25}=50\Omega$$

(2)达到阻抗匹配时，主传输线上不存在反射，但在两段分传输线上显然是不匹配的，存在反射。

在分传输线 1 上，有

$$\Gamma_1=\frac{Z_{L1}-Z_{01}}{Z_{L1}+Z_{01}}=\frac{R_{L1}-R_{01}}{R_{L1}+R_{01}}=\frac{64-80}{64+80}=-0.11$$

$$\rho_1=\frac{1+|\Gamma_1|}{1-|\Gamma_1|}=\frac{1+0.11}{1-0.11}=1.25$$

在分传输线 2 上，有

$$\Gamma_2=\frac{Z_{L2}-Z_{02}}{Z_{L2}+Z_{02}}=\frac{R_{L2}-R_{02}}{R_{L2}+R_{02}}=\frac{25-50}{25+50}=-0.33$$

$$\rho_2=\frac{1+|\Gamma_2|}{1-|\Gamma_2|}=\frac{1+0.33}{1-0.33}=1.99$$

例 5.18 单短截线阻抗变换器。

特性阻抗 $Z_0=300\Omega$ 的无损耗传输线，终端接负载 $Z_L=(73+j42)(\Omega)$。试设计一单短截线阻抗变换器使负载与主传输线匹配。

解： 由式(5.7.12)，得

$$\frac{1}{Z_0}=\frac{1}{Z_{in1}}+\frac{1}{Z_{in2}}$$

由式(5.3.13),有

$$\frac{1}{Z_{in1}}=\frac{1}{Z_0}\frac{Z_0+jZ_L\tan\beta l_1}{Z_L+jZ_0\tan\beta l_1}=\frac{1}{300}\left[\frac{300+j73\tan\beta l_1-42\tan\beta l_1}{(73+j42)+j300\tan\beta l_1}\right]=$$

$$\frac{1}{300}$$

$$\left[\frac{(300-42\tan\beta l_1)\times 73+73\tan\beta l_1(300\tan\beta l_1+42)}{73^2+(300\tan\beta l_1+42)^2}+\frac{j73^2\tan\beta l_1-j(300-42\tan\beta l_1)(300\tan\beta l_1+42)}{73^2+(300\tan\beta l_1+42)^2}\right]$$

令上式实部

$$\frac{1}{300}\left[\frac{(300-42\tan\beta l_1)73+73\tan\beta l_1(300\tan\beta l_1+42)}{73^2+(300\tan\beta l_1+42)^2}\right]=\frac{1}{Z_0}=\frac{1}{300}$$

则有

$$73(300-42\tan\beta l_1)+73\tan\beta l_1(300\tan\beta l_1+42)=73^2+(300\tan\beta l_1+42)^2$$

从上式中解得

$$\tan\beta l_1\approx 0.317$$

所以

$$l_1\approx 0.049\lambda$$

于是

$$\frac{1}{Z_{in1}}=\frac{1}{Z_0}+jB_{in1}$$

将 $\tan\beta l_1=0.317$ 代入上式虚部,得

$$B_{in1}=\frac{1}{300}\left(\frac{-1}{0.641}\right)$$

因为

$$\frac{1}{Z_{in2}}=\frac{1}{jZ_0\tan\beta l_2}=\frac{1}{j300\tan\beta l_2}$$

要实现匹配

$$\frac{1}{Z_{in2}}=-jB_{in1}$$

即

$$\frac{1}{j300\tan\beta l_2}=\frac{-j}{300\times 0.641}$$

由上式解得

$$\tan\beta l_2=-0.641$$

得

$$l_2\approx 0.409\lambda$$

例 5.19 用 $\lambda/4$ 阻抗变换器对复数型负载进行阻抗匹配。

一无损耗传输线的特性阻抗 $Z_0=75\Omega$,终端接负载阻抗 $Z_L=(100-j50)\ (\Omega)$,试用 $\lambda/4$ 将负载与主传输线匹配(见图 5-20)。

解: 由式(5.5.25)可知在电压最小值点的输入阻抗为一纯电阻,即

$$Z_{in}(z)=\frac{Z_0}{\rho}$$

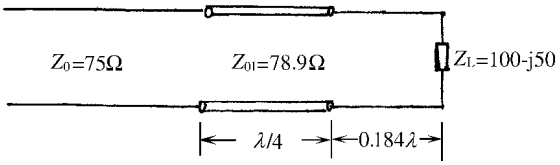


图 5－20

于是我们可将 $\lambda/4$ 接在其电压最小值点，如图 5－20 所示。其特性阻抗为

$$Z_{01}=\sqrt{Z_0 Z_{\text{in}}(z)}=\sqrt{Z_0\frac{Z_0}{\rho}}=\frac{Z_0}{\sqrt{\rho}}$$

由于

$$\rho=\frac{1+|\Gamma_2|}{1+|\Gamma_2|}$$

而

$$\Gamma_2=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\frac{25-\text{j}50}{175-\text{j}50}=0.31\text{e}^{-\text{j}47.5^\circ}$$

所以

$$\rho=\frac{1+|\Gamma_2|}{1-|\Gamma_2|}=\frac{1+0.31}{1-0.31}\approx 0.9$$

得

$$Z_{01}=\frac{Z_0}{\sqrt{\rho}}=\frac{Z_0}{\sqrt{1.9}}=\frac{75}{\sqrt{0.9}}\approx 78.9\Omega$$

而接入点的位置 $l_{\min}$ 满足

$$2\beta l_{\min}-\varphi_2=(2n+1)\pi$$

第一个电压最小点($n=0$)，有

$$2\beta l_{\min}=180^\circ-47.5^\circ=2.31\text{rad}$$

所以

$$l_{\min}=\frac{2.31}{2\beta}=0.184\lambda$$

由于电压最大值点的输入阻抗也为纯电阻，故也可将 $\lambda/4$ 接在电压最大值点处。但在实际应用中，由于击穿往往发生在电压最大值处，考虑到变换器的耐压情况，一般都将 $\lambda/4$ 阻抗变换器接在电压的最小值点处。

练　习　题

5.7－1　一个 200MHz 的信号源通过一根 300Ω 的双线传输线对输入阻抗为 73Ω 的偶极子天线馈电。设计一根 $\lambda/4$ 的双线传输线(周围介质为空气，间距为 2cm)以使天线与 300Ω 的传输匹配。

5.8　传输线谐振器

从前面的讨论中我们知道，对于终端短路线或终端开路线可设计成所需的电抗元件。

而当其长度为 $\lambda/4$ 或 $\lambda/2$ 时，还可构成谐振器。这种传输线谐振器在短波及超短波频段有着广泛的应用。下面以同轴线为例进行讨论。对于终端短路同轴线，如图 5－21 所示，

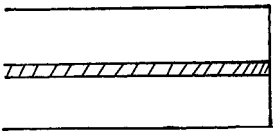


图 5－21　同轴线谐振器

其中电压和电流的分布由式(5.5.11)和式(5.5.12)，得

$$u(z,t)=U_0\sin\beta z\sin\omega t \tag{5.8.1}$$

$$i(z,t)=I_0\cos\beta z\cos\omega t \tag{5.8.2}$$

其中

$$U_0=Z_0 I_0$$

根据同轴线中电磁场和电压、电流的关系，同轴线谐振器中电磁场分布为

$$E_r(z,r,t)=\frac{U_0}{r\ln\dfrac{D}{d}}\sin\beta z\sin\omega t \tag{5.8.3}$$

$$H_\varphi(z,r,t)=\frac{I_0}{2\pi r}\cos\beta z\cos\omega t=\frac{U_0}{\eta r\ln\dfrac{D}{d}}\cos\beta z\cos\omega t \tag{5.8.4}$$

当谐振腔的长度 $l=\lambda/2$ 的整数倍时，在 $z=l$ 处的电磁场边界条件也得到满足，即 $E_t=E_r\Big|_{z=l}=0$，电磁场在同轴线中的分布及其随时间的变化如图 5－22 所示。由此可见，电磁场沿 z 方向的分布和随时间的变化规律是：电场和磁场的最大值(或零点)在空间相距 $\lambda/4$，即空间相位差为 $\pi/2$；同时，随时间变化也相差 $\pi/2$。因此在同轴线中电磁能量的变化规律是：磁场能量转化为电场能量，同时电磁能量从两侧向中间移动；半个周期后，电场能量转化为磁场能量，同时电磁能量从中间向两侧移动。

$\lambda/2$ 同轴线谐振器的长度和谐振波长之间具有简单的关系 $l=\lambda/2$，所以它可以用作绝对刻度的波长计。其固有品质因数 Q 由下面公式计算：

$$Q_0=\frac{2}{\delta}\frac{\int_V \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*\,\mathrm{d}V}{\oint_S \boldsymbol{H}_\tau\cdot\boldsymbol{H}_\tau^*\,\mathrm{d}S} \tag{5.8.5}$$

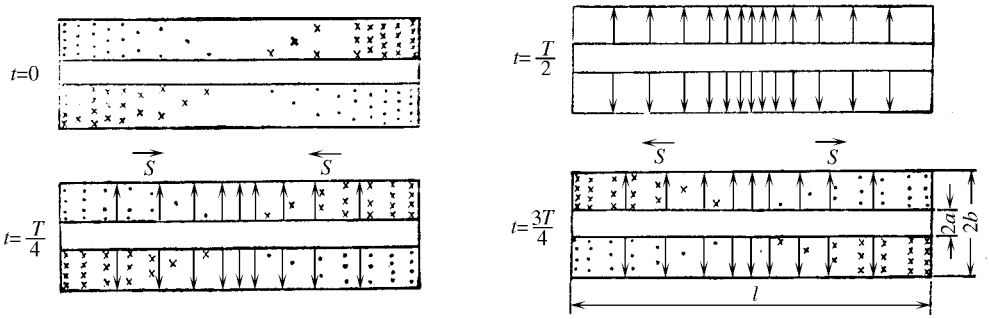


图 5－22　$\lambda/2$ 同轴线谐振器场分布

式中，δ 为趋肤深度。于是

$$Q_0 = \frac{2}{\delta}\frac{1}{\left[\frac{8}{\lambda}+\frac{1}{\ln\frac{D}{d}}\left(\frac{2}{d}+\frac{2}{D}\right)\right]} \tag{5.8.6}$$

由上式可知，增大内半径或外半径，或两者同时增大，都可以提高品质因数。但半径的增大受出现高次模的限制，即受$\frac{D+d}{2}<\frac{\lambda}{\pi}$的限制。这里 λ 是波长计允许工作的最短波长。另外$\frac{D}{d}$的值也影响到品质因数 Q_0，由式(5.8.6)求得 Q_0 值达最大值时的$\frac{D}{d}=3.59$。这和同轴线最小衰减系数的$\frac{D}{d}$相同，与之对应的同轴线的特性阻抗 $Z_0=60\ln\frac{D}{d}=60\ln3.59=76.7\Omega$。这就是说，当同轴线谐振器的内外半径不能再增大时，用一段衰减最小的同轴线(特性阻抗为 76.7Ω)做成的谐振器的品质因数最高。

若把 $\lambda/2$ 同轴线谐振器在 $z=\frac{l}{2}$处切成相等的两部分，则每一部分就构成 $\lambda/4$ 同轴线谐振器。但这种谐振器没有实际用处，因为开口端并非真正开路，电磁能量要从开口处辐射出去，因而其 Q 值很低。

例 5.20 用一段长为10cm 的同轴线构成 TEM 波谐振器，该同轴线中填充 $\varepsilon_r=2.55$ 的介质。问该段同轴线可以对哪些频率产生谐振？最低谐振频率是多少？

解： 若将该同轴线的一端短路，另一端开路，则 $l=10\text{cm}$ 的同轴线可作为$\frac{\lambda}{4}$谐振器，产生并联谐振，其谐振频率为

$$f_0=\frac{v}{\lambda_0}=\frac{1}{\frac{4}{2n-1}l}\cdot\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{2n-1}{4\times0.1}\frac{3\times10^8}{\sqrt{2.55}}=(2n-1)\times4.7\times10^8\,\text{Hz}$$

也可作为$\frac{\lambda}{2}$谐振器，产生串联谐振，其谐振频率为

$$f'_0=\frac{v}{\lambda'_0}=\frac{n}{2l}\cdot\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{n}{2\times0.1}\frac{3\times10^8}{\sqrt{2.55}}=2n\times4.7\times10^8\,\text{Hz}$$

取 $n=1$，则得

$$f_0=4.7\times10^8\,\text{Hz}\text{——最低谐振频率}$$
$$f'_0=9.4\times10^8\,\text{Hz}$$

练 习 题

5.8－1 电容负载式同轴线谐振腔的内外导体半径分别为 0.5cm 和 1.5cm，负载电容为 1nF，谐振频率为 3000MHz，求腔长。

5.8－2 铜同轴线谐振器，内外导体半径分别为 1mm 和 4mm。若谐振频率为 5GHz，试空气填充时的 Q 值。

习　题

5－1　求在极低频率时有损耗线的传播常数 γ 和特性阻抗 Z_0 的近似表示式。此时 $\omega L_1 \ll R_1$，$\omega C_1 \ll G_1$。

5－2　已测得一有损耗线在 100MHz 时的参数为 $Z_0 = 50 + j0\ (\Omega)$，$\alpha = 0.01\text{dB/m}$，$\beta = 0.8\pi\ (\text{rad/m})$，试求该线的 R_1、L_1、G_1 和 C_1。

5－3　一电压为 U_g、内阻为 R_g 的直流电源，与一单位长度电阻为 R_1、电导为 G_1 的有损耗线相连。

(a)写出支配电压、电流的传输线方程；

(b)求出 $U(z)$ 和 $I(z)$；

(c)由(b)的结果求出无限长传输线的特解；

(d)由(b)的结果求出长为 l 终端负载为 R_L 的有限长传输线的特解。

5－4　开路或短路的有损耗线的输入阻抗有电抗和电阻两个分量。试证明一根损耗甚小和长度 l 很短的传输线($\alpha l \ll 1$ 及 $\beta l \ll 1$)的输入阻抗近似为：

(a)$Z_{in} = (R_1 + j\omega L_1)l$　　(短路线)

(b)$Z_{in} = (G_1 - j\omega C_1)/[G_1^2 + (\omega C_1)^2]l$　　(开路线)

5－5　一根长度为 4m 的传输线，测得其开路和短路的输入阻抗分别为 $250\angle -50^\circ\Omega$ 和 $360\angle 20^\circ\Omega$，求：

(a)线的 Z_0、α 和 β；

(b)R_1、L_1、G_1 和 C_1。

5－6　利用单短截线匹配法使(25＋j25)(Ω)负载与 50Ω 无损耗传输线匹配。若短截线的特性阻抗为 50Ω。试求所需短截线的长度 l_2 和接入位置 l_1。

5－7　证明：一个内阻为 Z_g 的电源通过一无损耗线传送给负载阻抗 Z_L 的功率为最大时的条件是 $Z_{in} = Z_g^*$。最大的功率传输系数是多少？

5－8　设一无损耗传输线，其特性阻抗为 Z_0，当其终端接有负载阻抗 Z_L 时，测得线上的驻波系数为 ρ，由负载到第一个电压最小值点的距离为 l_{min}，证明负载阻抗可由下式计算：

$$Z_L = Z_0 \frac{\rho - j(\rho^2 - 1)\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

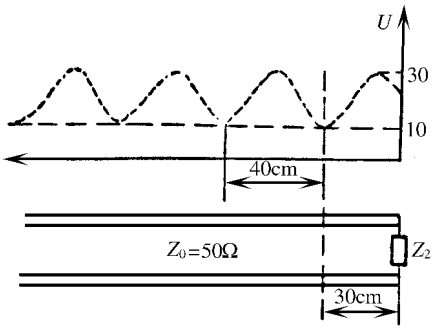
式中 $\varphi = \beta l_{min} = \dfrac{2\pi}{\lambda} l_{min}$

5－9　已测得一无损耗线的各项指标如题 5－9 图所示。试确定其负载阻抗 Z_L。

5－10　试比较传输线上的电压、电流波与均匀介质中传播的平面电磁波的特点有何异同？

5－11　已知一负载阻抗为 18.75Ω，传输线的特性阻抗 $Z_0 = 52\Omega$，工作波段为 $0.9\lambda_0 \sim 1.1\lambda_0$，要求在此波段内反射系数 $|\Gamma| \leqslant 0.05$，试设计 $\lambda/4$ 匹配线。

5－12　用两段 $\lambda/4$ 线使 400Ω 的负载和 100Ω 的主传输线实现匹配，两段 $\lambda/4$ 线的



题 5－9 图

阻抗分别为 141.4Ω 和 283Ω，试求驻波比 $\rho \leqslant 1.2$ 的带宽。

第六章　电磁波的辐射与天线

前几章分别讨论了平面电磁波在无界媒质中的传播特性、在不同媒质分界面上的反射和透射特性以及沿波导和传输线传播的特性，在这些讨论中都没有涉及电磁波是如何产生的。本章不仅要讨论电磁波的产生，还要讨论能将电磁波有效辐射的装置，即天线。

时变电荷和电流是产生电磁波的源。为了使电磁能量有效地沿指定方向辐射，时变电荷和电流必须按特殊方式分布，天线就是设计成这样一种能按规定方式有效地辐射电磁能量的装置。

分析电磁波辐射的理论依据是麦克斯韦方程组。应该说这是一个很困难的问题，这是因为天线上的时变电荷和电流往往是未知的，且又是很难确定的。天线上的电流激发电磁场，此电磁场反过来要影响天线上的电流分布，要严格求解方程组将遇到很大困难。因此，实际上常采用近似方法来求解，先近似提出天线上的场源分布，再计算由此近似场源分布产生的电磁场。

本章先介绍标量位函数和矢量位函数的波动方程及其解，根据矢量位函数来求基本辐射元的电磁场，再介绍一些常用的天线。

6.1　矢量位函数和标量位函数

6.1.1　矢量位和标量位的波动方程

分析电磁辐射时，引入辅助位函数（矢量位和标量位）可带来极大的方便。

在均匀、线性和各向同性的无损耗媒质中，麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{6.1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{6.1.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{6.1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{6.1.4}$$

本构关系为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

式中，$\boldsymbol{J}$ 是媒质中的时变电流密度；ρ 是媒质中的时变电荷密度。

根据方程式(6.1.3)和矢量恒等式$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$，可令

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{6.1.5}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 称为矢量位（也称磁矢位，或简称矢位）。

将式(6.1.5)代入式(6.1.2)，得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

即

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{6.1.6}$$

据式(6.1.6)和矢量恒等式$\nabla\times\nabla\phi=0$,可令

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

即

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi \tag{6.1.7}$$

式中,φ称为标量位(也称电标位,或简称标位)。

将$\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon\left(-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)$代入方程式(6.1.1),得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right) \tag{6.1.8}$$

利用矢量恒等式$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$,式(6.1.8)变为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{6.1.9}$$

根据亥姆霍兹定理,一个矢量场由它的旋度和散度惟一地确定。为了惟一地确定$\boldsymbol{A}$,已定义了$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,再定义

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{6.1.10}$$

此式称为洛伦兹条件。这样,式(6.1.9)就简化为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J} \tag{6.1.11}$$

这就是矢量位$\boldsymbol{A}$的非齐次波方程。

又将$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$和式(6.1.7)代入方程式(6.1.4),得

$$\nabla\cdot\left[\varepsilon\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)\right]=\rho$$

此处的ε=常数,故上式为

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\varphi\right]=\rho$$

将洛伦兹条件$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$代入上式,得

$$\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{6.1.12}$$

这就是标量位φ的非齐次波方程。

对于给定的时变电荷ρ和时变电流$\boldsymbol{J}$的分布,可先求解矢位$\boldsymbol{A}$和标位φ的非齐次波动方程式(6.1.11)和(6.1.12),在确定了$\boldsymbol{A}$和φ之后,就可由式(6.1.5)和式(6.1.7)通过微分运算来求得$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{E}$。

6.1.2 滞后位

式(6.1.11)和式(6.1.12)两个非齐次波动方程，实际上是四个相似的标量方程的集合，故只需求解一个标量方程。在这里我们不去严格求解，而是采用类比的方法求解方程式(6.1.12)。

对于一个位于坐标原点的时变点电荷元 $\rho(t)\Delta V'$，因为球对称关系，由它产生的标量位函数只是距离 r 和时间 t 的函数，而与球坐标的另两个变量极角 θ 和方位角 ϕ 无关。此时，除点电荷元所在的坐标原点之外的区域内某点(无电荷分布的点)，标量位 φ 的波动方程(6.1.12)在球坐标系中可表示为齐次方程：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{6.1.13}$$

引入一个新的函数 $U(r,t)$，使 $\varphi(r,t)=\frac{1}{r}U(r,t)$，则式(6.1.13)可变为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0 \tag{6.1.14}$$

这是众所周知的一维齐次波动方程。用直接代入法可证明任何以 $(t-r\sqrt{\mu\varepsilon})$ 为宗量的二次可微分函数都是方程式(6.1.14)的解，即得

$$U(r,t)=f(t-r\sqrt{\mu\varepsilon}) \tag{6.1.15}$$

此式表示一个以速度 $v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 沿 $+r$ 方向行进的波。故标量位函数为

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{r}f(t-\frac{r}{v}) \tag{6.1.16}$$

为了求函数 $f(t-\frac{r}{v})$ 的特定形式，将式(6.1.16)与同样位于坐标原点的准静态点电荷元 $\rho(t)\Delta V'$ 的电位

$$\Delta\varphi(r)=\frac{\rho(t)\Delta V'}{4\pi\varepsilon r}$$

类比，可以看出应取

$$\Delta f(t-\frac{r}{v})=\frac{\rho(t-\frac{r}{v})}{4\pi\varepsilon}\Delta V'$$

因此，位于坐标原点的点电荷元 $\rho(t)\Delta V'$ 所产生的标量位

$$\Delta\varphi(r,t)=\frac{\rho(t-\frac{r}{v})}{4\pi\varepsilon r}\Delta V'$$

对位于 $\boldsymbol{r}$ 处的点电荷元 $\rho(\boldsymbol{r},t)\Delta V'$，应将上式右端的 r 换成 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，即

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho(\boldsymbol{r},t-\frac{1}{v}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Delta V'$$

因此，分布在体积 V 内的电荷 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 产生的标量位为

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r},t-\frac{1}{v}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{6.1.17}$$

式中的$\frac{1}{v}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$代表响应函数(在此即是与电荷相距为$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$处的位函数)与源(在此即是位于$\boldsymbol{r}$处的时变电荷)之间的时延。即离开源为$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$处,在时刻$t$的标量位由稍早时刻$t-\frac{1}{v}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$的电荷密度所决定。或者说,时变源在时刻$t=t_0$的变化,要在$t=t_0+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}$时刻才会在位函数中引起响应。因此,称式(6.1.17)的位函数为标量滞后位。

矢量位方程可分解为三个标量位方程的叠加,故可仿照上述过程求出矢量滞后位的表示式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{6.1.18}$$

对于正弦电磁场,可将式(6.1.17)和式(6.1.18)表示为复数形式

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{6.1.19}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{6.1.20}$$

式中$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{2\pi}{\lambda}$为波数。

至此可以看出,根据天线上的电流分布来计算由其产生的电磁场的步骤是:先根据式(6.1.20),由给定的$\boldsymbol{J}$求出$\boldsymbol{A}$,再根据$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$求得$\boldsymbol{B}$,最后由$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$求得$\boldsymbol{E}$。

应该指出,考虑"滞后"并非总是必需的。"滞后"究竟是重要的还是可以忽略的,取决于时间延迟$\frac{r}{v}$的长短,这就要涉及到电磁现象本身的特性以及所要求的时间分辨率。如果延迟时间$\frac{r}{v}$足够短,则在所讨论的区域内就可忽略"滞后"。而对于研究电磁辐射问题,滞后位则是十分重要的。

练 习 题

6.1-1 根据式(6.1.13),推导出式(6.1.14)。

6.1-2 滞后位的含义是什么?滞后的时间和波传播的速度是以什么方式与媒质的参数相联系的?

6.2 电偶极子的辐射

电磁辐射系统最简单的型式是电偶极子和磁偶极子。本节讨论的电偶极子,实际上是一短载流线元,如图6-1所示。注意,这里的"短"是指其长度远小于波长,即$l\ll\lambda$。可将它看成两个相距为l,并用细导线相连的导体球。一个球上的电荷为$+q(t)$,另一个球上的电荷为$-q(t)$,细导线上的电流为$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$。这就是把短载流线元称为电偶极子的原因。

电偶极子产生的电磁场的分析计算是线形天线工程计算的基础，这是因为线形天线上的电流可看成是由首尾相接的一系列电偶极子的电流组成的。

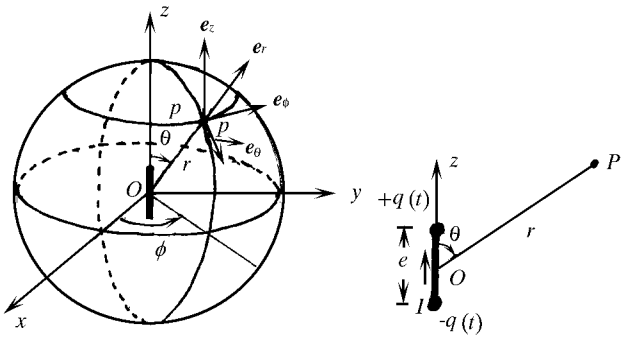


图 6－1　电偶极子

6.2.1　电偶极子的电磁场

设电荷 $q(t)$ 随时间作正弦变化，则电流为

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=I\cos\omega t=\mathrm{R_e}[I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

如图 6－1 所示，电偶极子沿 z 轴方向，且位于坐标原点。导线长为 l，横截面积为 ΔS，故短载流线元所占的体积为 $\mathrm{d}V'=l\Delta S$，则有

$$\boldsymbol{J}\mathrm{d}V'=\boldsymbol{e}_z\frac{I}{\Delta S}\cdot l\Delta S=\boldsymbol{e}_z Il$$

将 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V'$ 用 $\boldsymbol{e}_z I\mathrm{d}z$ 替换后，式(6.1.20)可表示为

$$\boldsymbol{A}(r)=\frac{\mu}{4\pi}\int_c\frac{\boldsymbol{e}_z I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\mathrm{d}z' \tag{6.2.1}$$

考虑到很短的电偶极子长度 l 上电流都相同，且观察点 P 又离得很远，故式(6.2.1)的积分可近似表示为

$$\boldsymbol{A}(r)=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu}{4\pi r}Il\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.2.2}$$

于是矢量位 $\boldsymbol{A}(r)$ 在球坐标系中的三个分量为

$$\begin{cases}A_r=A_z\cos\theta=\dfrac{\mu Il}{4\pi r}\cos\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\\ A_\theta=-A_z\sin\theta=-\dfrac{\mu Il}{4\pi r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\\ A_\phi=0\end{cases} \tag{6.2.3}$$

电偶极子在观察点 P 产生的磁场为

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu}\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\phi}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi\end{vmatrix}$$

将式(6.2.3)代入上式,得

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\phi = \dfrac{k^2 Il\sin\theta}{4\pi}\left[\dfrac{j}{kr}+\dfrac{1}{(kr)^2}\right]\mathrm{e}^{-jkr} \end{cases} \tag{6.2.4}$$

再将式(6.2.4)代入麦克斯韦方程$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$,得

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\phi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ H_r & rH_\theta & r\sin\theta H_\phi \end{vmatrix}=$$

$$\boldsymbol{e}_r E_r+\boldsymbol{e}_\theta E_\theta+\boldsymbol{e}_\phi E_\phi$$

式中

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{2Ilk^3\cos\theta}{4\pi\omega\varepsilon}\left[\frac{1}{(kr)^2}-\frac{j}{(kr)^3}\right]\mathrm{e}^{-jkr} \\ E_\theta &= \frac{Ilk^3\sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon}\left[\frac{j}{kr}+\frac{1}{(kr)^2}-\frac{j}{(kr)^3}\right]\mathrm{e}^{-jkr} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.2.5}$$

6.2.2 近区场和远区场

从式(6.2.4)和式(6.2.5)可以看出,电偶极子在观察点P产生的电场$\boldsymbol{E}$位于电偶极子所在平面(即子午面)内,磁场则位于与赤道面平行的平面内,二者相互垂直。电场和磁场的各分量中,都分别包含按$\frac{1}{r}$、$\frac{1}{r^2}$或$\frac{1}{r^3}$变化的项,随r的取值不同,它们对场量的贡献也不同。

1. ■近区场

观察点P与原点O的距离远小于波长,即$r\ll\lambda$的区域,称为近区。此时,$kr\ll1$,因此

$$\frac{1}{kr}\ll\frac{1}{(kr)^2}\ll\frac{1}{(kr)^3},\text{且 }\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\approx1$$

故在$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的各分量表示式(6.2.4)和式(6.2.5)中,起决定性作用的是含$\frac{1}{kr}$的高次幂项,其余项均可忽略,得

$$E_r=-\mathrm{j}\,\frac{Il\cos\theta}{2\pi\omega\varepsilon r^3} \tag{6.2.6a}$$

$$E_\theta=-\mathrm{j}\,\frac{Il\sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon r^3} \tag{6.2.6b}$$

$$H_\phi=\frac{Il\sin\theta}{4\pi r^2} \tag{6.2.7}$$

考虑到$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$的复数表示式$I=\mathrm{j}\omega q$,式(6.2.6a)和式(6.2.6b)可表示为

$$E_r = \frac{ql}{2\pi\varepsilon r^3}\cos\theta = \frac{p_e\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^3} \tag{6.2.8a}$$

$$E_\theta = \frac{ql}{4\pi\varepsilon r^3}\sin\theta = \frac{p_e\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^3} \tag{6.2.8b}$$

式中 $p_e = ql$ 是电偶极矩的复振幅。

从以上结果可以看出，在近区内，时变电偶极子的电场表示式与静电场中的静电偶极子的电场表示式相同；磁场表示式则与静磁场中用毕奥－沙伐定律计算出的短截电流元 Il 的磁场表示式相同。故把时变电偶极子产生的近区场称为准静态场。

由式(6.2.6)和式(6.2.7)计算近区场的平均功率密度为

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}} = \frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*] = 0$$

这表明电偶极子的近区场没有电磁能量向外辐射，电磁能量被束缚在电偶极子附近区域内。

2. ■远区场

观察点 P 与原点 O 的距离远大于波长，即 $r \gg \lambda$ 的区域，称为远区。此时，$kr \gg 1$，因此

$$\frac{1}{kr} \gg \frac{1}{(kr)^2} \gg \frac{1}{(kr)^3}$$

故在式(6.2.4)和式(6.2.5)中，起决定性作用的是含 $\frac{1}{kr}$ 的低次幂项，且必须考虑相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$。故远区的电场、磁场表示式可简化为

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{Ilk^2\sin\theta}{4\pi\omega\varepsilon r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} = \mathrm{j}\frac{Il}{2\lambda r}\eta\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.2.9}$$

$$H_\phi = \mathrm{j}\frac{Ilk\sin\theta}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} = \mathrm{j}\frac{Il}{2\lambda r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.2.10}$$

在上面两式的表示形式变换中考虑了 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$、$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 以及 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ 等关系式。

从式(6.2.9)和式(6.2.10)可以看出，电偶极子的远区场有如下特性：

(1)远区场是辐射场，电磁波沿径向辐射，即

$$\boldsymbol{S}_{\text{平均}} = \frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*] = \frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_\theta E_\theta \times \boldsymbol{e}_\phi H_\phi^*] = \frac{1}{2}\mathrm{R_e}[\boldsymbol{e}_r E_\theta H_\phi^*] =$$

$$\boldsymbol{e}_r\frac{|E_\theta|^2}{2\eta} = \boldsymbol{e}_r\frac{1}{2}\eta|H_\phi|^2 = \boldsymbol{e}_r\frac{1}{2}\eta\left|\frac{Il}{2\lambda r}\sin\theta\right|^2$$

可见，有电磁能量沿径向辐射。

(2)远区场是横电磁波(TEM 波)。远区的电场和磁场都只有横向分量($\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_\theta E_\theta$、$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_\phi H_\phi$)，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 相互垂直，且垂直于传播方向。

(3)远区场是球面波。相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$ 表明波的等相位面是 r = 常数的球面。在该等相位面上，电场(或磁场)的振幅不一定处处相等，所以又是非均匀球面波。

(4)远区场分布有方向性。方向性因子 $\sin\theta$ 表明在电偶极子的轴线方向上($\theta = 0°$)，

场量为零，在垂直于电偶极子轴线的方向上（$\theta=90°$），场量为最大值。

下面再讨论电偶极子在远区辐射的功率。通过半径为 r 的封闭球面的总功率为

$$P_r=\oint_S \boldsymbol{S}_{平均}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{e}_r\frac{1}{2}\eta\left(\frac{Il}{2\lambda r}\sin\theta\right)^2\cdot\boldsymbol{e}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=$$

$$\frac{1}{2}\eta\left(\frac{Il}{2\lambda}\right)^2 2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\pi\eta\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2$$

自由空间的波阻抗 $\eta=\eta_0=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\ (\Omega)$，故自由空间中电偶极子的辐射功率为

$$P_r=40\pi^2 I^2\left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2 \tag{6.2.11}$$

此辐射功率必须由与电偶极子相连的源供给。将辐射出去的功率用一个电阻上消耗的功率来模拟，此电阻称为辐射电阻。考虑到计算功率密度时用的是场量的振幅值，因此通过辐射电阻的电流也用振幅值。这样，辐射电阻上消耗的功率为

$$P_r=\frac{1}{2}I^2R_r$$

将式(6.2.11)代入上式，即得到电偶极子的辐射电阻为

$$R_r=80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2 \tag{6.2.12}$$

按辐射电阻的定义，它可用来衡量天线的辐射能力，是天线的电参数之一。若取 $l=0.01\lambda_0$，则 $R_r\approx 0.08\Omega$，这是一个很小的量值。因此，电偶极子是一个弱辐射器。

例 6.1 频率为10MHz的功率源馈送给电偶极子的电流为25A，设电偶极子的长度为50cm。

(1)分别求赤道平面上离原点50m处和10km处的电场和磁场；

(2)计算 $r=10\mathrm{km}$ 处的平均功率密度；

(3)计算辐射电阻。

解： 自由空间中波的相速 $v_p=c=3\times10^8\mathrm{m/s}$，故波长 $\lambda_0=\dfrac{c}{f}=\dfrac{3\times10^8}{10\times10^6}=30\mathrm{m}$

(1)在赤道平面上，$\theta=90°$，$r=50\mathrm{m}$ 处属近区，故据式(6.2.6a)、式(6.2.6b)和式(6.2.7)，得

$$E_r=0$$

$$E_\theta=-\mathrm{j}\frac{Il\sin90°}{4\pi\times2\pi f\varepsilon_0 r^3}=-\mathrm{j}\frac{25\times50\times10^{-2}}{8\pi^2\times10\times10^6\times50^3\times8.85\times10^{-12}}=-\mathrm{j}0.014\mathrm{V/m}$$

$$H_\phi=\frac{Il\sin90°}{4\pi\times50^2}=\frac{25\times50\times10^{-2}}{31415.93}=0.398\times10^{-3}\mathrm{A/m}$$

在赤道平面上，$r=10\mathrm{km}$ 处属远区，故据式(6.2.9)和式(6.2.10)，得

$$E_\theta=\mathrm{j}\frac{Il}{2\lambda_0 r}\eta_0\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}=\mathrm{j}\frac{25\times50\times10^{-2}}{2\times30\times10\times10^3}\times120\pi\sin90°\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{30}\times10\times10^3}=$$

$$\mathrm{j}7.854\times10^{-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.1\times10^3}\ (\mathrm{V/m})$$

$$H_\phi=\mathrm{j}\frac{Il}{2\lambda r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}=\mathrm{j}\frac{25\times50\times10^{-2}}{2\times30\times10\times10^3}\sin90°\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{30}\times10\times10^3}=$$

$$\mathrm{j}20.83\times10^{-6}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.1\times10^3}\ (\mathrm{A/m})$$

(2) $\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*}]=$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_{\theta}7.854\times10^{-3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.1\times10^{3}}\times\boldsymbol{e}_{\varphi}20.83\times10^{-6}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2.1\times10^{3}}]=$$

$$\boldsymbol{e}_{r}81.8\times10^{-9}(\mathrm{w/m^{2}})$$

(3) $$R_{\mathrm{r}}=80\pi^{2}\left(\frac{l}{\lambda_{0}}\right)^{2}=80\pi^{2}\left(\frac{50\times10^{-2}}{30}\right)=0.22\Omega$$

练　习　题

6.2－1　已知电偶极子的辐射功率 P_{r}，试求远区中任意点的电场强度的振幅值。

6.2－2　电偶极子的长度 $l=0.1\lambda$，求电流振幅为 2A 时的辐射电阻和辐射功率。

6.3　磁偶极子的辐射

一个半径为 a（注意 $a\ll\lambda$）、载有电流 $i(t)=I\cos\omega t$ 的细导线圆环，如图 6－2 所示，通常称为磁偶极子。此时可认为流过细导线圆环的电流的大小和相位处处相同，即与方位角 ϕ 无关。下面就采用与求解电偶极子的电磁场相类似的方法来求解磁偶极子的电磁场。

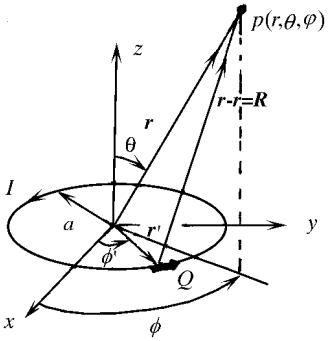


图 6－2　磁偶极子

6.3.1　磁偶极子的电磁场

在图 6－2 中，位于小圆环上点 $Q(a,\frac{2}{\pi},\phi')$ 处的电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 到观察点 $P(r,\theta,\phi)$ 的距离矢量为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，则矢量位为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_{c}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{6.3.1}$$

显然，要严格计算上式中的积分是相当困难的，这是因为小圆环上 $\mathrm{d}l'$ 的位置不同时，R 也要变化。考虑到 $r'=a\ll\lambda$，可作如下近似：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(R-r)}\approx\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}[1-jk(R-r)]$$

因此，式(6.3.1)可近似表示为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_c\frac{1}{R}(1-\mathrm{j}kR+\mathrm{j}kr)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

上式中的积分是对带“,”的源点坐标进行的,因而观察点 P 的坐标 r 可视为常量,故上式可变为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu I}{4\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left[(1+\mathrm{j}kr)\oint_c\frac{1}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{l}'-\mathrm{j}k\oint_c\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\right]\tag{6.3.2}$$

式中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=\boldsymbol{e}_{\phi'}a\,\mathrm{d}\phi'$$

这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 的单位矢量 $\boldsymbol{e}_{\phi}'$ 与观察点 P 的单位矢量 $\boldsymbol{e}_{\phi}$ 是不一样的,可将 $\boldsymbol{e}_{\phi'}$ 用点 $P(r,\theta,\phi)$ 的单位矢量表示为

$$\boldsymbol{e}_{\phi'}=\boldsymbol{e}_r\sin(\phi-\phi')+\boldsymbol{e}_{\phi}\cos(\phi-\phi')$$

故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=[\boldsymbol{e}_r\sin(\phi-\phi')+\boldsymbol{e}_{\phi}\cos(\phi-\phi')]a\mathrm{d}\phi'$$

而

$$R=[r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos(\phi-\phi')]^{1/2}$$

故

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2-\frac{2a}{r}\sin\theta\,\cos(\phi-\phi')\right]^{-\frac{1}{2}}$$

考虑到 $r\gg a$,故

$$\frac{1}{R}\approx\frac{1}{r}\left[1-\frac{2a}{r}\sin\theta\,\cos(\phi-\phi')\right]^{-\frac{1}{2}}$$

应用二项式公式展开,并略去含 $\left(\frac{a}{r}\right)$ 的高次幂项,得

$$\frac{1}{R}\approx\frac{1}{r}\left[1+\frac{a}{r}\sin\theta\,\cos(\phi-\phi')\right]$$

则式(6.3.2)右端第一项积分为

$$\oint_c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R}=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{a}{r}\sin\theta\,\cos(\phi-\phi')\right][\boldsymbol{e}_r\sin(\phi-\phi')+\boldsymbol{e}_{\phi}\cos(\phi-\phi')]a\mathrm{d}\phi'=$$

$$\boldsymbol{e}_{\phi}\frac{a}{r}\int_0^{2\pi}[\cos(\phi-\phi')+\frac{a}{r}\sin\theta\cos^2(\phi-\phi')]\mathrm{d}\phi'=$$

$$\boldsymbol{e}_{\phi}\left(\frac{a}{r}\right)^2\sin\theta\int_0^{2\pi}\cos^2(\phi-\phi')\mathrm{d}\phi'=\boldsymbol{e}_{\phi}\pi\left(\frac{a}{r}\right)^2\sin\theta$$

而右端的第二项积分

$$\oint_c\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=0$$

故式(6.3.2)的最终结果为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_{\phi}\frac{\mu I\pi a^2}{4\pi r^2}(1+\mathrm{j}kr)\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\tag{6.3.3}$$

再分别应用 $\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}$,可求得

$$H_r=\frac{\mathrm{j}\omega\mu I\pi a^2}{4\pi\eta}2k^2\cos\theta\left[\frac{1}{(kr)^2}-\frac{j}{(kr)^3}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\tag{6.3.4a}$$

$$H_\theta = \frac{\mathrm{j}\omega\mu I\pi a^2}{4\pi\eta}k^2\sin\theta\left[\frac{j}{kr}+\frac{1}{(kr)^2}-\frac{j}{(kr)^3}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.3.4b}$$

$$E_\phi = \frac{-\mathrm{j}\omega\mu I\pi a^2}{4\pi}k^2\sin\theta\left[\frac{j}{kr}+\frac{1}{(kr)^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.3.5}$$

其余场分量皆为零。

6.3.2 近区场和远区场

磁偶极子的电磁场同样也可划分成近区场和远区场来讨论。例如，对远区($kr\gg1$)，只保留场分量表示式中含$\frac{1}{kr}$的项，于是由式(6.3.4)和(6.3.5)，得

$$H_\theta = -\frac{\omega\mu IS}{4\pi r\eta}k\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.3.6}$$

$$E_\phi = \frac{\omega\mu IS}{4\pi r}k\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} = -\eta H_\theta \tag{6.3.7}$$

式中，$S=\pi a^2$ 是细导线圆环所包围的面积，$p_m=IS$ 是磁偶极矩的复振幅。

比较电偶极子的远区场表示式(6.2.9)和式(6.2.10)与磁偶极子的远区场表示式(6.2.6)和式(6.2.7)可以看出，它们的电场矢量和磁场矢量仍相互垂直，且垂直于波的传播方向。但它们的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的取向是互换了的，即磁偶极子的电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\phi E_\phi$ 在与赤道面平行的平面内，而磁场 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\theta H_\theta$ 在子午面内，与电偶极子的电场、磁场正好是互换的。这就是电偶极子与磁偶极子的电磁场具有对偶性。

磁偶极子远区场的平均功率密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\text{平均}} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]= \\ &\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_\phi\frac{\omega\mu IS}{4\pi r}k\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\times\boldsymbol{e}_\theta\left(-\frac{\omega\mu IS}{4\pi r\eta}k\sin\theta\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}\right]= \\ &\boldsymbol{e}_r\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\omega\mu kIS}{4\pi r}\right)^2\sin^2\theta\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

辐射功率为

$$\begin{aligned}P_\mathrm{r} &= \oint_S\boldsymbol{S}_{\text{平均}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{e}_r\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\omega\mu kIS}{4\pi r}\right)^2\sin^2\theta\cdot\boldsymbol{e}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi= \\ &\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\omega\mu kIS}{4\pi}\right)^2\times2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta= \\ &\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\omega\mu kIS}{4\pi}\right)^2\times2\pi\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\eta\pi^5I^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

与分析电偶极子的辐射功率一样，将它模拟为一个电阻上消耗的功率。由 $P_\mathrm{r}=\frac{1}{2}I^2R_\mathrm{r}$，得磁偶极子的辐射电阻为

$$R_\mathrm{r}=\frac{2P_\mathrm{r}}{I^2}=\frac{8}{3}\eta\pi^5\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4=320\pi^6\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \tag{6.3.10}$$

例 6.2 周长为 $l=62.832\mathrm{cm}$ 的细导线载流小圆环构成的磁偶极子，电流的复振幅为 $I=100\mathrm{e}^{-\mathrm{j}30^\circ}(\mathrm{A})$，角频率 $\omega=3\times10^8\,\mathrm{rad/s}$。

(1)求远区的电场和磁场的瞬时值表示式；

(2)求磁偶极子的辐射电阻。

解： 设磁偶极子置于自由空间，故

$$\eta = \eta_0 = 120\pi \quad (\Omega)$$

$$k = k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{3\times10^8}{3\times10^8} = 1 \quad \text{rad/m}$$

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = 6.2832 \quad \text{m}$$

而小圆环的半径 $a = l/2\pi = 62.832\times10^{-2}/2\pi = 10\times10^{-2}\,\text{m}$，$S = \pi a^2 = 0.01\pi \quad (\text{m}^2)$

(1)据式(6.3.6)和式(6.3.7)，得

$$H_\theta = -\frac{3\times10^8\times4\pi\times10^{-7}\times100\mathrm{e}^{-\mathrm{j}30^\circ}\times0.01\pi}{4\times120\pi\times r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} =$$

$$-\frac{0.25}{r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kr+30^\circ)}$$

$$E_\phi = -\eta_0 H_\theta = \frac{94.25}{r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kr+30^\circ)}$$

表示为瞬时值形式为

$$H_\theta(\theta,t) = \mathrm{R_e}[H_\theta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = -\frac{0.25}{r}\sin\theta\cos(\omega t - kr - 30^\circ) \quad (\text{A/m})$$

$$E_\phi(\theta,t) = \mathrm{R_e}[E_\phi\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \frac{94.25}{r}\sin\theta\cos(\omega t - kr - 30^\circ) \quad (\text{V/m})$$

(2)由式(6.3.10)得辐射电阻为

$$R_\mathrm{r} = 320\pi^6\left(\frac{0.1}{6.2832}\right)^4 = 19.74\times10^{-3} \quad \Omega$$

可见，磁偶极子的辐射电阻是很小的，表明其辐射能力很弱。

练 习 题

6.3－1 比较电偶极子和磁偶极子的远区场，指出它们的异同。

6.3－2 电偶极子的长度 $l = 0.1\lambda$，构成磁偶极子的小圆环周长 l 也等于 0.1λ，试比较两者的辐射电阻。

6.4 天线的电参数

天线的作用是发射或接收电磁波。为了评价一副天线技术性能的优劣，必须规定一些能表征其性能的参数。根据互易原理，同一副天线用作发射和用作接收时，其特性参数是相同的，只是具体含义有所不同。为了叙述方便，下面均作为发射天线来定义各参数。

6.4.1 辐射方向图

1. ■方向性函数和方向性图

在离开天线一定距离处，描述天线辐射的电磁场在空间的相对分布情况的数学表示式，称为天线的方向性函数。方向性图则是根据方向性函数绘制的图形。因为天线的辐

射场分布于整个空间，故天线的方向图通常是三维的立体图形。在球坐标系中，在一定距离 r 处，场强随 θ 和 ϕ 两个坐标变量变化。绘制这样的三维立体图形有一定难度，且不一定是非常必须的。通常用两个“主平面”上的方向图来表示。对于线形天线，两个主平面分别指包含天线导线轴的平面（称为 E 面）和垂直于天线导线轴的平面（称为 H 面）。对于面形天线，E 面是指天线口径面上与电场矢量相平行的平面，H 面是指天线口径面上与磁场矢量相平行的平面。这两个主平面上的方向图分别称为 E 面方向图和 H 面方向图，最有实用价值也正是这两个主平面上的方向性图。

通常是用场强的归一化量值来表示方向性函数，并绘制方向性图，方向性函数定义为

$$f(\theta,\phi)=\frac{|E(\theta,\phi)|}{|E_{\max}|} \tag{6.4.1}$$

例 6.3 绘制电偶极子的方向性图。

解： 电偶极子的辐射场表示式为式(6.2.9)和式(6.2.10)，电场 E_θ 和磁场 H_ϕ 是互成比例的，故只需考虑 E_θ。由式(6.2.9)得方向性函数

$$f(\theta,\phi)=\sin\theta$$

即在给定距离 r 处，E_θ 与方向角 ϕ 无关，据此绘出任意 ϕ 角时的 E 面方向方向图，如图 6－3(a)所示。

对于给定的距离 r 处，取 $\theta=\frac{\pi}{2}$（即在 H 面上），得 $\sin\theta=1$。故 H 面方向图为圆心在 z 轴上、半径为 1 的圆，如图 6－3(b)所示。

三维立体图形如图 6－3(c)所示。

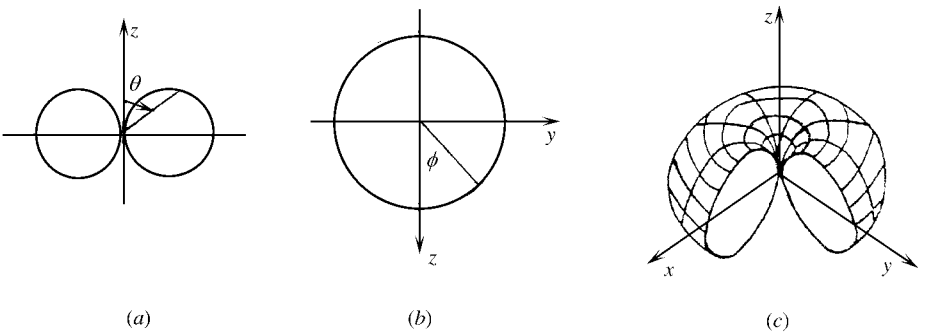


图 6－3 电偶极子的方向性图

(a)E 面方向图；(b)H 面方向图；(c)立体图。

实际天线的方向性图通常要比图 6－3 复杂。图 6－4 表示某天线的 E 面方向性图，它有很多波瓣，分别称为主瓣、副瓣和后瓣。主瓣是指包含最大辐射方向的波瓣，除主瓣外的其余波瓣统称为副瓣。把位于主瓣正后方的波瓣另称为后瓣。

除了在极坐标中绘制方向性图外，也可在直角坐标中绘制方向性图，如图 6－5 所示。

由于主瓣和副瓣的场强可以相差几个数量级，天线的方向图又常以对数刻度来绘制。这时主瓣电平为 0dB，副瓣电平则表示为低于主瓣电平的分贝数，如图 6－6 所示。

在对各种天线的方向图特性进行定量比较时，通常考虑以下几个参数。

1）主瓣宽度

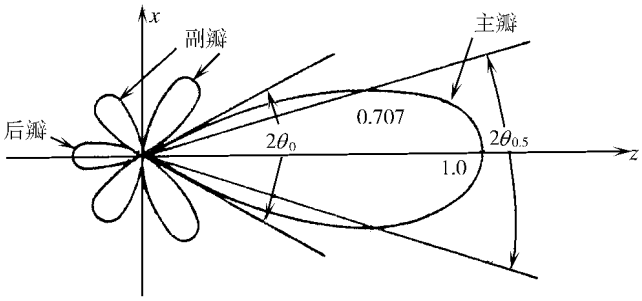


图 6－4　方向性图的波瓣

主瓣最大辐射方向两侧的两个半功率点(即功率密度下降为最大值的一半,或场强下降为最大值的 $1/\sqrt{2}$)的矢径之间的夹角,称为主瓣宽度,也称半功率角,表示为 $2\theta_{0.5}$(E 面)或 $2\phi_{0.5}$(H 面),如图 6－4 所示。主瓣宽度愈小,说明天线辐射的电磁能量愈集中,定向性愈好。电偶极子的主瓣宽度为 90°。

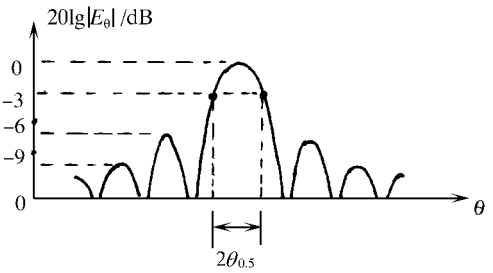


图 6－6　在直角坐标中,以 dB 刻度的方向图

2)副瓣电平

副瓣最大辐射方向上的功率密度 S_1 与主瓣最大辐射方向上的功率密度 S_o 之比的对数值,称为副瓣电平。表示为

$$P_{\text{sub}}=10\lg\frac{S_1}{S_o}\quad(\text{dB})$$

通常,离主瓣近的副瓣电平要比远的高,所以副瓣电平通常是指第一副瓣(它离主瓣最近,电平也最高)电平。一般要求副瓣电平尽可能低。另外,副瓣的位置有时也很重要。

3)前后比

主瓣最大辐射方向上的功率密度 S_o 与后瓣最大辐射方向上的功率密度 S_b 之比的对数值,称为前后比。表示为

$$P_{\text{Fb}}=10\lg\frac{S_o}{S_b}\quad(\text{dB})$$

前后比愈大,说明天线辐射的电磁能量愈集中于主辐射方向(前向)。作为定向接收天线,前后比愈大愈好。

方向性图形象地表示出天线的方向性,主瓣宽度在一定程度上半定量地描述了天线的方向性,但它们未能反映天线在全空间的辐射总效果。为了更精确地比较不同天线的方向性特性,还需引入一个能定量描述天线集中能量的电参数,这就是方向性系数。

2. ■方向性系数

在相等的辐射功率下,天线在其最大辐射方向上某点产生的功率密度与一理想的无方向性天线在同一点产生的功率密度的比值,定义为该天线的方向性系数。表示为

$$D=\left.\frac{S_{\max}}{S_o}\right|_{P_r\text{相等}}=\left.\frac{|E_{\max}|^2}{|E_o|^2}\right|_{P_r\text{相等}}\qquad(6.4.2)$$

天线的方向性系数也可定义为:在天线最大辐射方向上产生相等的电场强度的条件下,理

想的无方向性天线的辐射功率 P_{ro} 与某天线的辐射功率 P_r 的比值，即

$$D=\left.\frac{P_{ro}}{P_r}\right|_{E\text{相等}} \tag{6.4.3}$$

按上述定义可导出计算方向性系数的公式。对于被研究的天线，其辐射功率等于在半径为 r 的球面上对平均功率密度进行面积分，即

$$\begin{aligned}P_r&=\oint_S \boldsymbol{S}_{\text{平均}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S \frac{1}{2}\frac{|E(\theta,\phi)|^2}{\eta_0}\mathrm{d}S=\\&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{|E_{max}|^2 f^2(\theta,\phi)}{\eta_0}r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\\&\frac{|E_{max}|^2 r^2}{240\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f^2(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

对于理想的无方向性天线，因其在空间各个方向上具有相同的辐射，故其辐射功率为

$$P_{ro}=4\pi r^2\times S_o=4\pi r^2\times\frac{1}{2}\times\frac{|E_o|^2}{\eta_o}=\frac{|E_o|^2 r^2}{60} \tag{6.4.5}$$

由式(6.4.4)，得

$$|E_{max}|^2=\frac{240\pi P_r}{r^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f^2(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}$$

由式(6.4.5)，得

$$|E_o|^2=\frac{60P_{ro}}{r^2}$$

故

$$D=\left.\frac{|E_{max}|^2}{|E_o|^2}\right|_{P_r=P_{ro}}=\frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f^2(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi} \tag{6.4.6}$$

为讨论方向性系的物理意义，按式(6.4.2)，得

$$|E_{max}|^2=D|E_o|^2=D\times\frac{60P_{ro}}{r^2}$$

即

$$|E_{max}|=\frac{\sqrt{60DP_{ro}}}{r} \tag{6.4.7}$$

对于无方向性天线，$D=1$，则

$$|E_{max}|=\frac{\sqrt{60P_{ro}}}{r} \tag{6.4.8}$$

比较式(6.4.7)和式(6.4.8)可以看出：某天线的方向性系数，表征该天线在其最大辐射方向上比起无方向性天线来说把辐射功率增大的倍数。例如，为了在空间一定距离的 M 点产生一定的场强，若采用无方向性天线发射，需要馈送给天线的辐射功率是 10W。但若采用方向性系数 $D=10$ 的有方向性天线发射，并将天线最大辐射方向对准 M 点，就只需 1W 的辐射功率。

例 6.4 计算电偶极子的方向性系数。

解： 电偶极子的方向性函数为 $f(\theta,\phi)=\sin\theta$，故方向性系数为

$$D=\frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}=1.5$$

若用分贝表示，则为 $D=10\lg\ 1.5=1.76\mathrm{dB}$。

6.4.2 辐射效率

天线的辐射效率定义为天线的辐射功率与输入功率的比值，表示为

$$\eta_A=\frac{P_r}{P_{in}}=\frac{P_r}{P_r+P_L} \tag{6.4.9}$$

式中，P_L 为天线的总损耗功率，通常包括天线导体中的损耗、介质材料中的损耗，以及天线附近物体上的感应损耗等。

若把天线向外辐射的功率看作是被某个电阻所吸收，该电阻称为辐射电阻。与此相似，也把总损耗功率看作是被某个损耗电阻所吸收，则有

$$P_r=\frac{1}{2}I^2R_r,P_L=\frac{1}{2}I^2R_L$$

故天线的辐射效率可表示为

$$\eta_A=\frac{P_r}{P_r+P_L}=\frac{R_r}{R_r+R_L}=\frac{1}{1+R_L/R_r} \tag{6.4.10}$$

可见，要提高辐射效率，应尽可能提高辐射电阻和降低损耗电阻。

6.4.3 增益系数

方向性系数表征天线辐射电磁能量的集中程度，辐射效率则表征天线在转换能量上的效能。将两者结合起来就得到综合衡量天线的方向性特性和能量转换效能的一个参数——增益系数，其定义是：在相同的输入功率下，天线在其最大辐射方向上某点产生的功率密度与一理想的无方向性天线在同一点产生的功率密度的比值，表示为

$$G=\left.\frac{S_{max}}{S_o}\right|_{P_{in}\text{相同}}=\left.\frac{|E_{max}|^2}{|E_o|^2}\right|_{P_{in}\text{相同}} \tag{6.4.11}$$

增益系数也可定义为：在天线最大辐射方向上某点产生相等电场强度的条件下，理想的无方向性天线所需的输入功率 P_{ino} 与某天线所需的输入功率 P_{in} 的比值，即

$$G=\left.\frac{P_{ino}}{P_{in}}\right|_{E\text{相同}} \tag{6.4.12}$$

从上述定义可以看出，增益系数与方向性系数的计算是相似的，差别在于增益系数是用输入功率计算，方向性系数是用辐射功率计算。按天线辐射效率的定义，得

$$P_r=\eta_AP_{in}$$

若设定理想的无方向性天线的效率 $\eta_{Ao}=1$，则得

$$P_{ro}=P_{ino}$$

故

$$G=\frac{P_{ino}}{P_{in}}=\frac{P_{ro}}{P_r}\eta_A=\eta_AD \tag{6.4.13}$$

利用上式可得到某天线在其最大辐射方向上产生的场强为

$$|E_{\max}| = \frac{\sqrt{60GP_{\text{in}}}}{r} \tag{6.4.14}$$

对于理想的无方向性天线，$D=1$，$\eta_A=1$ 故 $G=1$，则

$$|E_{\max}| = \frac{\sqrt{60P_{\text{in}}}}{r} \tag{6.4.15}$$

比较式(6.4.14)和式(6.4.15)可以看出，天线的增益系数描述了该天线与理想的无方向性天线相比，在最大辐射方向上将输入功率增大的倍数。

6.4.4 输入阻抗

天线的输入阻抗定义为天线输入端的电压与电流的比值，表示为

$$Z_{\text{in}} = \frac{U_{\text{in}}}{I_{\text{in}}} \tag{6.4.16}$$

一般情况下，它包含输入电阻 R_{in} 和输入电抗 X_{in} 两部分，即

$$Z_{\text{in}} = R_{\text{in}} + \text{j}X_{\text{in}} \tag{6.4.17}$$

输入阻抗是天线的一个重要指标。要提高天线的效率，就必须使天线的输入阻抗与传输线的特性阻抗相等(即达到阻抗匹配)。

天线的输入阻抗与很多因素有关，包括天线的几何形状，激励方法以及与周围物体的距离等。由于关系复杂，所以只有少数较简单的天线才可能进行理论计算，大多数天线的输入阻抗是靠实验确定，或通过近似计算得到。

6.4.5 有效长度

有效长度是衡量天线辐射能力的又一个参数，它的定义是：在保持实际天线最大辐射方向上的场强不变的条件下，假设天线上的电流为均匀分布，电流大小等于实际天线的馈电点电流，此假想天线的长度 l_e 即称为实际天线的有效长度，如图 6－7 所示。有效长度越长，则说明天线的辐射能力越强。从定义可以看出，有效长度是将天线电流和天线在最大辐射方向上的场强联系起来的一个参数。有效长度这一概念通常只应用于天线单臂的电长度小于 $\frac{\lambda}{4}$ 的线形天线中。当天线为直立天线时，把有效长度称为有效高度，表示为 h_e。

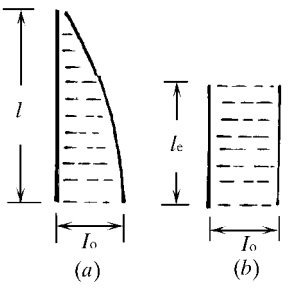


图 6－7 天线的有效长度

(a)实际天线；(b)假想天线。

6.4.6 极化特性

天线的极化特性是指天线在其最大辐射方向上电场矢量的取向随时间变化的规律。正如在波的极化中已讨论过的，极化就是在空间给定点上，电场矢量的端点随时间变化的轨迹。若该轨迹是直线，称为线极化；若轨迹是圆，称为圆极化；若轨迹是椭圆，称为椭圆极化。这样根据天线所辐射的电磁波的极化形式，将天线划分为线极化天线、圆极化天线和椭圆极化天线。线极化天线又可分为水平极化和垂直极化，圆极化和椭圆极化均可分

为左旋和右旋两大类。

6.4.7 频带宽度

天线的电参数都是与工作频率有关的。当工作频率偏离设计中心频率时，往往要引起天线电参数的变化。譬如，工作频率变化时，将会引起方向图畸变、增益系数降低、输入阻抗改变，等等。因此，天线的频带宽度的一般定义是：当频率变化时，天线的有关电参数能保持在规定的技术要求范围内的频率范围，称为天线的频带宽度，或简称为带宽。

由于不同用途的设备或系统对天线参数的要求不同，有时又根据各个电参数将其细分为方向图带宽（指方向图的变化不超过限定指标的频率范围）、增益带宽（指增益系数的下降不超过限定指标的频率范围）和阻抗带宽（指馈线上的驻波比增大不超过限定指标的频率范围）等。

练 习 题

6.4－1 试述天线的辐射方向图的定义，并说明与方向图相关的参数。

6.4－2 从接收的角度来看，你认为对天线的方向性有哪些要求？

6.5 线形天线

线形天线是指辐射体由横截面半径远小于波长的金属导线构成的天线。本节先讨论基本的对称振子天线和天线阵的概念，再介绍一些常用的线形天线。

6.5.1 对称振子天线

对称振子天线由两臂长各为 l、半径 $a \ll \lambda$ 的直导体或金属管构成，如图 6－8 所示。它的两个内端点为馈电点，振子臂受电源电压激励而产生电流，并在空间产生电磁场。

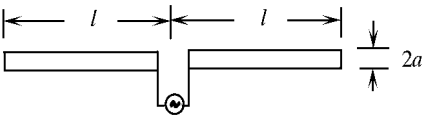


图 6－8 对称振子天线

对称振子天线是一种应用最广泛的基本线形天线，它既可单独使用，也可作为阵列天线的组成单元，还可作为某些微波天线的馈源。

1. ■对称振子上的电流分布

只要知道天线上的电流分布，就可求其空间辐射场。因此，确定天线上的电流分布是天线计算的基本问题。然而，这是一个很复杂的问题。因为天线上的电流、电荷分布和电磁场分布必须满足天线振子导体表面的边界条件，电磁场的严格计算需求解麦克斯韦方程组。即使像对称振子这样简单的天线，要精确计算出电流分布，也会遇到复杂的数学运算，这在工程上往往是不适用的。作为近似，我们将对称振子看成由终端开路的平行双线张开而成，且假定张开后的两臂上的电流分布保持不变，如图 6－9 所示。理论和实验均

表明，对于细对称振子而言，假设振子上的电流为正弦分布，据此计算振子的辐射场可得到满意的结果。设对称振子沿 z 轴放置，馈电中心在坐标原点，如图 6－10 所示，则振子的电流分布表示式为

$$I(z) = I\sin k(l-z), \quad 0 < z < l \tag{6.5.1a}$$

$$I(z) = I\sin k(l+z), \quad -l < z < 0 \tag{6.5.1b}$$

式中，I 为电流振幅值；k 为振子上电流传输的相位常数，可近似认为 $k \approx k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$，即近似等于自由空间的相位常数。

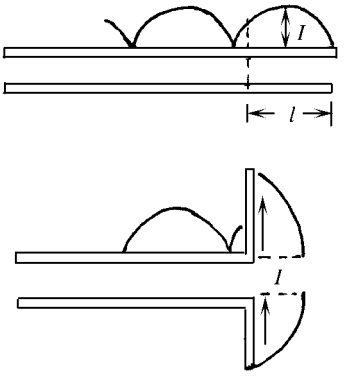


图 6－9　终端开路传输线张开成对称振子

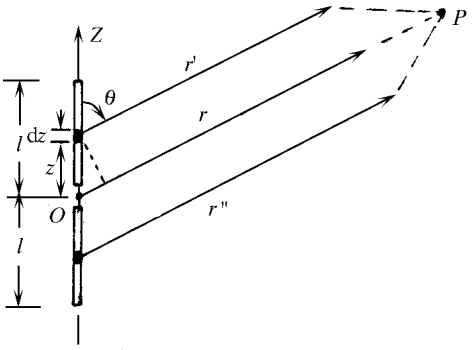


图 6－10　对称振子的辐射场计算

2. ■对称振子的辐射场

在确定了对称振子上的电流分布后，就可用叠加原理计算其辐射场。将对称振子分成许多个长为 $\mathrm{d}z$ 的微分段，每个微分段就可看成一个电偶极子，整个对称振子可看成由许许多多首尾相接的电偶极子的集合。根据叠加原理，对称振子在空间一点 P 处的辐射场就等于这些电偶极子在该点的辐射场的叠加。

参看图 6－10，在 $z>0$ 的上臂任取一微分段 $\mathrm{d}z$，其电流为 $I(z)$，根据电偶极子远区辐射场的公式(6.2.9)，得

$$\mathrm{d}E'_\theta = \mathrm{j}\frac{60\pi}{\lambda_0 r'}\sin\theta' \cdot I\sin k_0(l-z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r'}\mathrm{d}z \tag{6.5.2a}$$

在 $z<0$ 的下臂，有对应的微分段 $\mathrm{d}z$，故得

$$\mathrm{d}E''_\theta = \mathrm{j}\frac{60\pi}{\lambda_0 r''}\sin\theta'' \cdot I\sin k_0(l+z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r''}\mathrm{d}z \tag{6.5.2b}$$

这里的 $\mathrm{d}E'_\theta$ 和 $\mathrm{d}E''_\theta$ 分别是上、下两臂上对应的微分电流元 $I(z)\mathrm{d}z$ 在 θ' 和 θ'' 方向上产生的电场矢量。对于远区的点 P，每个微分段至点 P 的射线 r'、r'' 和 r 是相互平行的，故 $\theta' = \theta'' = \theta$。这样，各个电流元在 P 点产生的电场矢量都是同向的。因此，对称振子的辐射场就可由微分段的辐射场对整个天线长度的积分求得。另外，在式(6.5.2)中注意到：

振幅项

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r''} \approx \frac{1}{r}$$

相位项

$$k_0 r' \approx k_0(r - z\cos\theta)$$

$$k_0 r'' \approx k_0 (r - z\cos\theta)$$

则对称振子天线的辐射场为

$$E_\theta = \int_0^l \mathrm{d}E'_\theta + \int_{-l}^0 \mathrm{d}E''_\theta =$$

$$\int_0^l \mathrm{j}\frac{60\pi}{\lambda_0 r}\sin\theta \cdot I\sin k_0(l-z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(r-z\cos\theta)}\mathrm{d}z + \int_{-l}^0 \mathrm{j}\frac{60\pi}{\lambda_0 r}\sin\theta \cdot I\sin k_0(l+z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(r-z\cos\theta)}\mathrm{d}z =$$

$$\mathrm{j}\frac{60I}{r}\left[\frac{\cos(k_0 l\cos\theta) - \cos k_0 l}{\sin\theta}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r} \tag{6.5.3}$$

由式(6.2.10)**得**

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta_0} = \frac{E_\theta}{120\pi} = \mathrm{j}\frac{I}{2\pi r}\left[\frac{\cos(kl\cos\theta) - \cos k_0 l}{\sin\theta}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r} \tag{6.5.4}$$

根据方向性函数的定义,由式(6.5.3)**得对称振子天线的方向性函数为**

$$f(\theta,\phi) = \frac{\cos(k_0 l\cos\theta) - \cos k_0 l}{\sin\theta} \tag{6.5.5}$$

可见,对称振子天线的方向图与 $k_0 l$ **有关。图** 6－11 **绘出几种不同长度的对称振子的** E **面方向图。由于结构的对称性,方向图与** ϕ **无关,**H **面方向图是一个圆。**

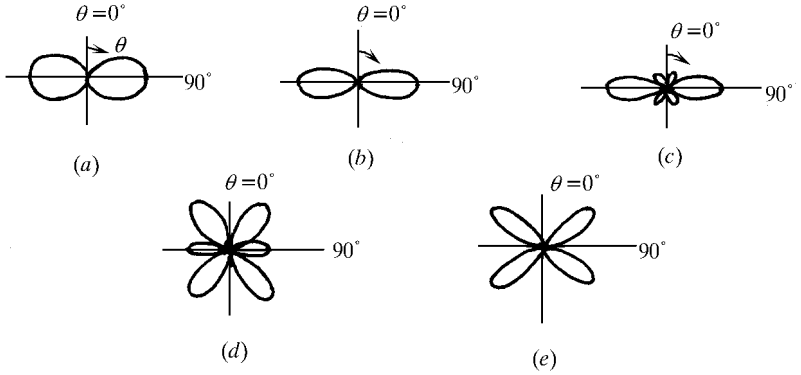


图 6－11　**对称天线的** E **面方向图**

(a)$2l=\frac{\lambda}{2}$; (b)$2l=\lambda$; (c)$2l=1.25\lambda$; (d)$2l=1.5\lambda$; (e)$2l=2\lambda$。

从图 6－11 **可以看出,对称振子天线的方向图是随振子长度变化的。这种现象可以用波的干涉概念来解释。前面的分析中把对称振子看作许多电偶极子首尾相接构成,其辐射场就等于这许多电偶极子的辐射场叠加。当** $2l \ll \lambda$ **时,各电偶极子至同一观察点** P **的波程差可以忽略,因而各辐射场是同相叠加,对称振子的方向图决定于电偶极子的方向图,且随着** l **的增大,使主瓣变窄。当** l **增大到与波长可以比拟时**($2l \leqslant \lambda$),**振子臂上的电流仍是同相的,因而赤道面**($\theta = 90°$)**上各辐射场是同相叠加,但在其它方向上因存在波程差已不再同相。故引起方向图的变化。当** $2l > \lambda$ **时,振子上出现反相电流,波程差随角度变化更快,因而出现副瓣,方向图发生巨大变化。图** 6－11 **中表示的结果可归纳为:当** $2l < 1.25\lambda$ **时,**l **增大的主要作用是使主瓣变窄,因而方向性随** l **增大而增强。当** $2l > 1.25\lambda$ **以后,**l **增大的主要作用转变为增大副瓣,因而方向性随** l **增大而减弱。**

3. ■对称半波天线

半波天线是对称振子中应用最为广泛的一类。将 $2l=\frac{\lambda}{2}$ 代入式(6.5.5)即得到半波天线的方向性函数

$$f(\theta,\phi)=\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}\right)}{\sin\theta}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \tag{6.5.6}$$

相应的方向图如图 6－11(a)所示,在 $\theta=90°$ 时有最大辐射,$\theta=0°$ 时无辐射。

半波天线的辐射场由式(6.6.2),得

$$E_\theta=\mathrm{j}\frac{60I}{r}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.5.7}$$

半波天线的辐射功率为

$$P_\mathrm{r}=\oint_S \boldsymbol{S}_{\text{平均}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{2\times120\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}E_0^2r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=$$

$$30I^2\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta=30I^2\times1.218=36.54I^2$$

由此得半波天线的辐射电阻为

$$R_\mathrm{r}=\frac{2P_\mathrm{r}}{I^2}=73.1\quad\Omega$$

半波天线的方向性系数为

$$D=\frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f^2(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}=$$

$$\frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}=1.64$$

用分贝表示为

$$D=10\lg1.64=2.15\mathrm{dB}$$

半波天线的主瓣宽度可由如下方程求得:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}=0.707,\quad 0°<\theta<180°$$

故

$$2\theta_{0.5}=\theta_2-\theta_1=129°-51°=78°。$$

6.5.2 阵列天线

阵列天线或天线阵是按一定规律排列的相同天线的组合。这种组合可以获得某些所期望的辐射特性,诸如期望得到更强的方向性、更高的增益,或所需要的方向性图。组成阵列天线的独立单元称为天线单元或阵元。将各天线单元排列在一条直线上或一个平面上,则称之为直线阵或平面阵。在阵列天线中还提出了所谓共形阵,它是将阵元配置在飞机或导弹等飞行器表面,与非平面的表面共形。

阵列天线的辐射性能取决于阵元的型式、数目、排列方式、间距以及阵元上的电流振幅和相位分布等。如果在阵列天线中采用控制每个阵元上激励的电流相位，则可使阵列天线的辐射主瓣在空间扫掠，这种阵列天线称为相控阵天线。

本节从最简单的二元阵出发，介绍阵列天线的基本原理，再讨论几种阵列天线。

1. ■方向图相乘原理

最简单的阵列天线是由两个相距较近、空间取向一致的辐射单元组成的二元阵。它是最简单但又是最有实际意义的阵列天线，例如考虑地面对天线的影响时，原天线与其镜像就构成二元阵；有源振子与无源反射器（或引向器）也构成二元阵。

这里以熟知的对称天线为例，如图 6－12 所示。图中的 1 和 2 是平行于 z 轴的等长对称天线，沿 x 轴排列，间隔距离为 d。设天线单元 1 的激励电流为 I_1，天线单元 2 的激励电流为

$$I_2 = mI_1 e^{j\xi}$$

式中，m 是两天线单元激励电流的振幅比；ξ 为 I_2 与 I_1 的相位差。

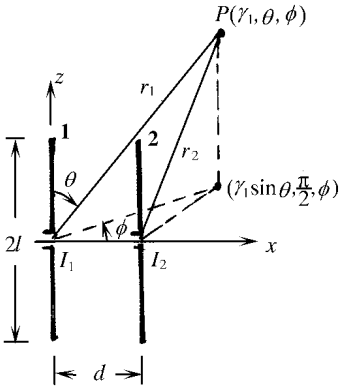


图 6－12　二元阵

这样，此二元阵的辐射场便等于两个天线单元的辐射场的矢量和。通常观察点 P 很远，因而可近似认为射线 r_1 和 r_2 是相互平行的，故天线单元 1 和 2 在观察点 P 产生的电场矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 近似为同方向的（都是沿 θ 方向），即

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{e}_\theta j\frac{60I_1}{r_1}f_1(\theta,\phi)e^{-jkr_1} \tag{6.5.8a}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{e}_\theta j\frac{60I_2}{r_2}f_2(\theta,\phi)e^{-jkr_2} \tag{6.5.8b}$$

由于两天线单元等长且平行，因此有相同的方向性函数，即

$$f_1(\theta,\phi) = f_2(\theta,\phi) = \frac{\cos(k_0 l\cos\theta) - \cos k_0 l}{\sin\theta}$$

另外，对于远区的观察点，射线 r_1 和 r_2 近似相互平行，故式(6.5.8)关于 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 的表示式中，可作如下近似：

振幅项

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r_2}$$

相位项

$$k r_2 \approx k(r_1 - d\sin\theta\cos\phi)$$

因此，式(6.5.8*b*)可表示为

$$E_2 = \mathrm{j}\frac{60mI_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\zeta}}{r_1} f_1(\theta,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(r_1 - d\sin\theta\cos\phi)} =$$

$$\mathrm{j}\frac{60mI_1}{r_1} f_1(\theta,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\zeta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kd\sin\theta\cos\phi} = mE_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$$

式中

$$\psi = \xi + kd\sin\theta\cos\phi$$

它是观察点 P 处电场 E_2 和 E_1 间的相位差，包含着激励电流的相位差以及波程差引起的相位差。

观察点 P 的合成电场为

$$E = E_1 + E_2 = E_1(1 + m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}) =$$

$$\mathrm{j}\frac{60I_1}{r_1} f_1(\theta,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr_1}(1 + m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}) \tag{6.5.9}$$

其模为

$$|E| = \frac{60I_1}{r_1} f_1(\theta,\phi)\,|1 + m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}| =$$

$$\frac{60I_1}{r_1} f_1(\theta,\phi)(1 + m^2 + 2m\cos\psi)^{1/2} =$$

$$\frac{60I_1}{r_1} f_1(\theta,\phi) \cdot f_{\mathrm{ar}}(\theta,\phi) \tag{6.5.10}$$

式中

$$f_{\mathrm{ar}}(\theta,\phi) = (1 + m^2 + 2m\cos\psi)^{1/2} =$$

$$[1 + m^2 + 2m\cos(\xi + kd\sin\theta\cos\phi)]^{1/2} \tag{6.5.11}$$

称为阵因子，表征阵的方向性。它仅与各单元天线在阵中的排列、激励电流的振幅和相位有关，而与单元天线本身的结构尺寸和取向无关。而 $f_1(\theta,\phi)$ 是单元天线的方向性函数，称为单元因子，它只决定于单元天线的结构尺寸和取向，与阵的排列方式无关。

式(6.5.10)表明二元阵的方向性函数等于单元因子与阵因子的乘积，或者说二元阵的方向图等于单元天线的方向图和阵因子的方向图的乘积，称为方向图相乘原理。应该注意，方向图相乘原理只适用于相似阵，即只适用于各天线单元的型式、尺寸相同，空间取向也相同的天线阵。方向图相乘原理也适用于 N 元相似阵。

例 6.5 由对称半波天线组成的二元相似阵，设激励电流振幅相等，相位差为 $90°$，单元天线间相距 $\frac{\lambda}{4}$，试求此二元阵的 E 面和 H 面方向图。

解： 利用图 6－12，据题给条件知 $l = \frac{\lambda}{4}$，$m = 1$，$\xi = -90°$，$d = \frac{\lambda}{4}$。

对 E 面(xz 平面)，$\phi = 0°$

单元因子为式(6.5.6)，即

$$f_1(\theta,0°) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

阵因子，据式(6.5.11)，得

$$f_{ar}(\theta,0^\circ)=\left[1+1+2\cos\left(-90^\circ+\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}\sin\theta\right)\right]^{1/2}=$$

$$\left[2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{1/2}=$$

$$\left[4\left(\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)\right]^{1/2}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

故

$$f(\theta,0^\circ)=f_1(\theta,0^\circ)\cdot f_{ar}(\theta,0^\circ)=$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

方向图如图 6－13(a)所示。

对 H 面(xy 平面)，$\theta=90^\circ$

单元因子 $f_1(90^\circ,\phi)=1$

阵因子

$$f_{ar}(90^\circ,\phi)=\left[1+1+2\cos\left(-90^\circ+\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}\cos\phi\right)\right]^{1/2}=$$

$$\left[2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi-90^\circ\right)\right]^{1/2}=$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi-\frac{\pi}{4}\right)$$

故

$$f(90^\circ,\phi)=f_1(90^\circ,\phi)\cdot f_{ar}(90^\circ,\phi)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi-\frac{\pi}{4}\right)$$

方向图如图 6－13(b)所示。

从 E 面方向图可见，在 $\theta=0^\circ$、180°方向上辐射为 0(因为单元因子为 0)，在 $\theta=270^\circ$方向上辐射也为 0(因为阵因子为 0)；在 $\theta=90^\circ$方向上辐射最强。对于 H 面方向图，在 $\phi=0$ 的方向上，由于激励电流相位差($\xi=-\frac{\pi}{2}$)和波程差引起的相互差($kd=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}=\frac{\pi}{2}$)相互补偿，$E_1$ 和 E_2 同相叠加，因而辐射最强。在 $\phi=180^\circ$的方向上则是 E_1 和 E_2 反相叠加，故辐射为零。

2. ■均匀直线阵

各天线单元排列在一直线上的阵列天线称为直线式天线阵。所谓均匀直线式天线阵(简称为均匀直线阵)，则是指各天线单元除了以相同的取向和相等的间距排列成一直线外，它们的激励电流振幅相等，而相位以相同的比例递增或递减，如图 6－14 所示，相邻单元的电流相位差为 ξ。

类似于二元阵的分析，相邻两天线单元在 xy 平面内辐射场的相位差为

$$\psi=\xi+kd\cos\phi \tag{6.5.12}$$

若以天线单元 1 为参考，则天线 2 的辐射场相位为 ψ，天线 3 的辐射场相位为 2ψ，……依次类推。于是天线阵的辐射场为

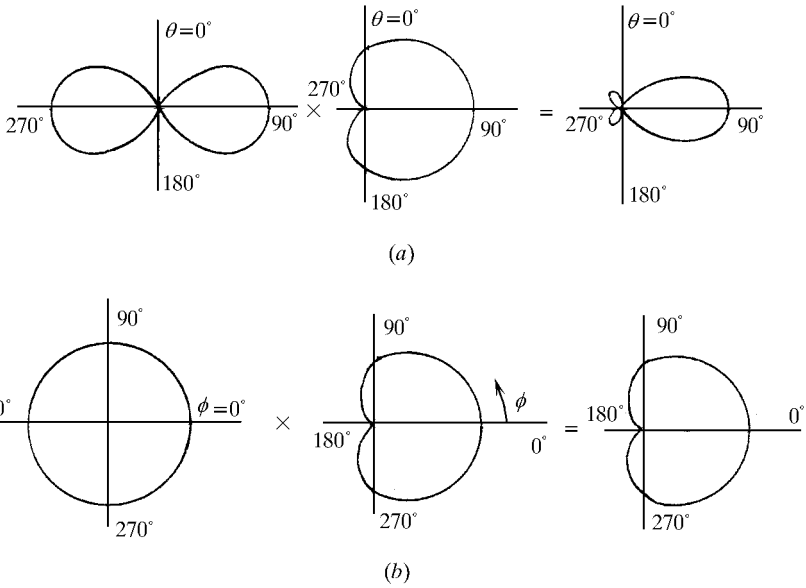


图 6－13　对称半波等幅二元阵的方向图

(*a*)E **面**；(*b*)H **面**。

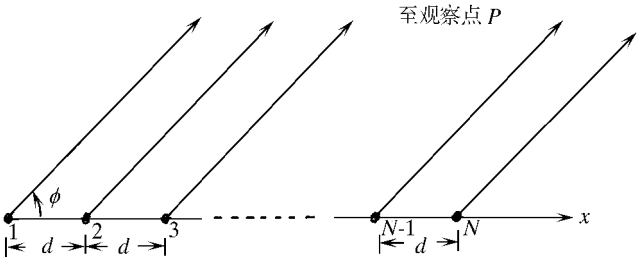


图 6－14　N 元均匀直线阵

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots \boldsymbol{E}_N = \boldsymbol{E}_1[1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\psi} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{j}(N-1)\psi}] \tag{6.5.13}$$

利用等比级数求和公式，由上式可得

$$|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{E}_1| \left|\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\psi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}\right| = |\boldsymbol{E}_1| \sqrt{\frac{(1-\cos N\psi)^2 + \sin^2 N\psi}{(1-\cos\psi)^2 + \sin^2\psi}} = |\boldsymbol{E}_1| \sqrt{\frac{2-2\cos N\psi}{2-2\cos\psi}} = |\boldsymbol{E}_1| \frac{\sin\frac{N\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} = |\boldsymbol{E}_1| f(\psi) \tag{6.5.14}$$

式中

$$f_N(\psi) = \frac{\sin\frac{N\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \tag{6.5.15}$$

是 N 元均匀直线阵的阵因子。

通常将阵因子归一化，应用洛彼塔法则，对式(6.5.15)取极限，得

$$f_{N\max}=\lim_{\psi\to 0}\frac{\sin\frac{N\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}=N$$

均匀直线阵的归一化阵因子为

$$F_N(\psi)=\frac{f_N(\psi)}{f_{N\max}}=\frac{1}{N}\frac{\sin\frac{N\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \tag{6.5.16}$$

另外，由式(6.5.13)知，$\psi=0$ 时各天线单元在观察点的电场同相叠加，得到最大值。由式(6.5.12)可得出最大值产生的方位，$\psi=0$ 即 $\xi+kd\cos\phi_m=0$，故

$$\cos\phi_m=-\frac{\xi}{kd} \tag{6.5.17}$$

下面讨论两种常见的均匀直线阵。

1)边射阵

最大辐射方向与阵轴线垂直，即 $\phi_m=\pm\frac{\pi}{2}$。据式(6.5.17)知 $\xi=0$，即均匀直线阵的各天线单元激励电流同相时，最大辐射方向在垂直于阵轴线的方向上。此时，归一化阵因子为

$$F_N(\phi)=\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{N\pi}{\lambda}d\cos\phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}d\cos\phi\right)} \tag{6.5.18}$$

若取 $N=4$，$d=\frac{\lambda}{2}$，可得四元边射阵的方向图，如图 6－15 所示。

2)端射阵

最大辐射方向在阵轴线方向上，即 $\phi_m=0$ 或 π，据式(6.5.17)知，激励电流相位差 $\xi=-kd$（$\phi_m=0$ 时）或 $\xi=kd$（$\phi_m=\pi$ 时）。此时，各天线单元的电流相位差与沿阵轴线方向的波程差所引起的相位差相互补偿，因而在沿阵轴线方向场强同相叠加，得到最大辐射，称为普通端射阵。将 $\xi=-kd$ 代入式(6.5.12)，得

$$\psi=kd(\cos\phi-1)$$

将上式代入式(6.5.16)，得端射阵的归一化阵因子为

$$F_N(\phi)=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left[\frac{N}{2}kd(\cos\phi-1)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}kd(\cos\phi-1)\right]} \tag{6.5.19}$$

若取 $N=4$，$d=\frac{\lambda}{4}$，可得四元端射阵的方向图如图 6－16 所示。

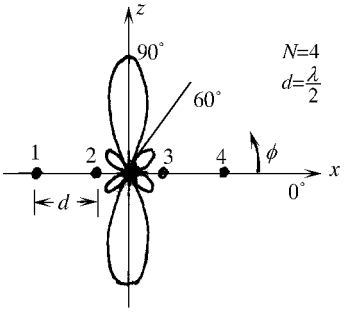


图 6－15　四元边射阵方向图

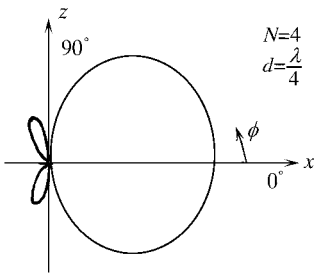


图 6－16　四元端射阵方向图

上述的普通端射阵的主瓣很宽，方向性系数不大。若增大天线单元间的激励电流相位差，使之大于普通端射阵天线单元间的激励电流相位差，当满足

$$\xi = \pm\left(kd + \frac{\pi}{N}\right) \tag{6.5.20}$$

时，则可在 $\phi = 0°$ 或 $180°$ 方向上得到最大的方向性系数，这种阵称为强方向性端射阵。式(6.5.20)称为汉森－伍德耶德(Hansen－Woodyard)条件。

6.5.3　单极天线

对称天线的一臂垂直架设地面或理想导电平面上，就构成单极天线或垂直接地天线，如图 6－17(a)所示。它广泛应用于长、中、短波及超短波波段，例如 T 形天线、伞形天线、铁塔天线、鞭形天线等。

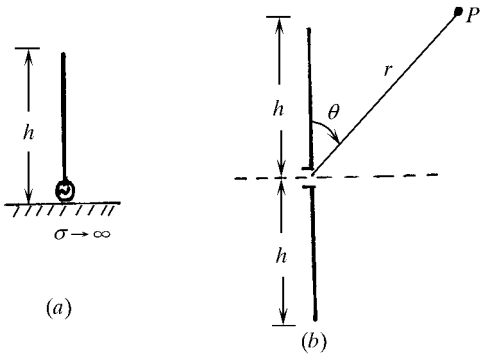


图 6－17　单极天线及其镜像

1. ■单极天线的辐射场

将地面视为理想导体，(电导率 $\sigma = \infty$)，则地面的效应可用天线的镜像来代替，如图 6－17(b)所示。这样，单极天线的辐射场，就可利用自由空间对称天线的辐射场公式来计算，即据式(6.5.3)得

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{60I}{r}\left[\frac{\cos(kh\cos\theta) - \cos kh}{\sin\theta}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.5.21}$$

式中，I 为波腹电流，工程应用上常以输入电流 I_0 表示，$I_0 = I\sin kh$。又以仰角 Δ 表示 θ，有 $\theta = 90° - \Delta$，则式(6.5.21)变为

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{60I_0}{r\sin kh}\left[\frac{\cos(kh\sin\Delta)-\cos kh}{\cos\Delta}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.5.22}$$

故归一化方向性函数为

$$F(\Delta) = \frac{1}{1-\cos kh}\cdot\frac{\cos(kh\sin\Delta)-\cos kh}{\cos\Delta} \tag{6.5.23}$$

当 $\Delta=0°$ 时，$F(\Delta)=1$，即水平面方向图是一圆，是全向的。垂直面方向图如图 6－18 所示。

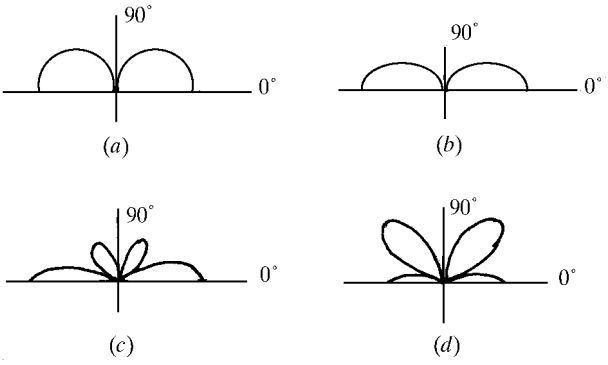


图 6－18　单极天线垂直面方向图

$(a)h=\frac{\lambda}{4}$；$(b)h=\frac{\lambda}{2}$；$(c)h=\frac{2\lambda}{3}$；$(d)h=\frac{3\lambda}{4}$。

由图 6－18 看出，当 $\frac{h}{\lambda}$ 逐渐增大时，波瓣变尖，当 $\frac{h}{\lambda}>0.5$ 时，出现副瓣，当 $\frac{h}{\lambda}=0.625$ 时，副瓣最大值出现在 $\Delta=60°$ 方向上，若继续增大 $\frac{h}{\lambda}$，由于天线上反相电流的作用，沿 $\Delta=0°$ 方向上的辐射减弱。因此，通常 $\frac{h}{\lambda}$ 应限制在 0.625 之内。

实际上，地面的电导率 σ 为有限值，上述分析计算就不再适用，应采用“地波传播”的方法来计算辐射场。

2. ■单极天线的电特性

1）有效高度

在上节中定义的“有效长度”，对于直立天线就是有效高度。

设天线上的电流分布为

$$I(z)=I\sin k(h-z)=\frac{I_0}{\sin kh}\sin k(h-z)$$

按天线有效高度的定义，单极天线归于输入电流 I_0 的有效高度为

$$h_e = \frac{1}{I_0}\int_0^h I(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{I_0}\int_0^h \frac{I_0}{\sin kh}\sin k(h-z)\mathrm{d}z = \frac{I}{\sin kh}\cdot\frac{I-\cos kh}{k} \tag{6.5.24}$$

当 $h\ll\lambda$ 时，$h_e=\frac{1}{k}\tan\frac{kh}{2}\approx\frac{h}{2}$；当 $h=\frac{\lambda}{4}$ 时，$h_e=\frac{2h}{\pi}$。

2）方向性系数

单极天线的方向性系数 D_v 约为相应的自由空间对称天线的方向性系数 D_d 的二倍，即

$$D_v = \frac{2}{\int_0^{\pi/2} F^2(\theta)\sin\theta d\theta} = \frac{2}{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} F^2(\theta)\sin\theta d\theta} = 2D_d$$

例如，$h=\frac{\lambda}{4}$ 的单极天线，其方向性系数 D_v 大约是对称半波天线的方向性系数 $D_d=1.64$ 的二倍。

3）辐射电阻

由于单极天线只向上半空间辐射，在波腹电流相同时，辐射功率只有相应的自由空间对称天线辐射功率的一半，故辐射电阻也只是对称天线辐射电阻的一半，即 $R_{rv}=\frac{R_{rd}}{2}$。

4）辐射效率

单极天线的高度低于 $\frac{\lambda}{4}$ 时，辐射电阻较低，效率不超过 50%。特别是在长、中波波段，天线的电高度很低，辐射电阻只有零点几欧到几欧，效率只有(10～30)%。即使在短波波段，在某些对天线高度有限制的场合，例如鞭形天线高度 $h\approx 0.1\lambda$，效率也是很低的。

3. ■提高单极天线辐射效率的方法

单极天线的电高度低，辐射电阻小，因而辐射效率低。通常，为提高单极天线的辐射效率，可以提高辐射电阻和降低损耗电阻两方面入手。

1）提高辐射电阻

单极天线高度 h 比波长小得多时，天线上的电流呈三角形分布。如果在天线顶端加负载，就可增大顶端对地的分布电容，使天线顶端的电流不再为零，这就等效于增加了天线的有效高度，达到提高辐射电阻的目的。

常见的加顶负载的单极天线如图 6－19 所示。

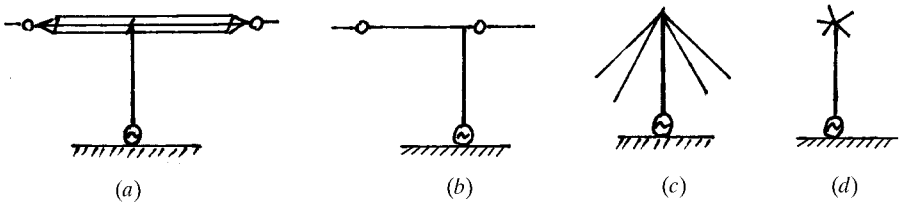


图 6－19　加顶负载的单极天线

(a)T 形天线；(b)倒 L 形天线；(c)伞形天线；(d)带辐射叶形天线。

另外，在短单极天线的中部某点接入一定量的感性负载，就可抵消该点以上线段在此点所呈现的一部分容抗，从而增大了加感点以下的天线电流，也等效于增大了天线的有效高度。

2）降低损耗电阻

单极天线的损耗有天线自身的铜损耗，支撑物的介质损耗，邻近物体的吸收以及大地的损耗等。其中主要的损耗是大地的损耗。通常的解决办法是在天线底部埋设辐射状金属条地网，它使地内电导率增加，进入地内的电流通过地网导体构成回路，减少了电流在

半导电媒质中的传播，因而减少了大地损耗。

6.5.4 引向天线

引向天线又称八木天线或波道天线，它广泛应用于米波、分米波的通信、雷达、电视及其它无线电设备中。引向天线的结构如图 6－20 所示，它由一个半波有源振子（又称主振子）、一个反射器（比主振子稍长）和若干个引向器（比主振子稍短）组成。除有源振子通过馈线与发射机（或接收机）连接外，反射器和引向器都是无源振子，它们的中点都直接固定在支撑杆上。适当调整各振子的长度及其间距，就可获得较好的端射方向图以及所期望的其它电参数。

引向天线的优点是结构简单牢固、重量轻、增益高，缺点是频带较窄，调整较困难。

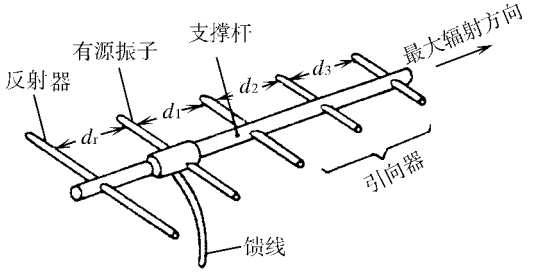


图 6－20 引向天线的结构示意

1. ■反射器和引向器的概念

设两个对称振子平行排列，间距 $d=\dfrac{\lambda}{4}$，如图 6－21(a)所示。振子 1 的激励电流为 I_1，振子 2 的激励电流为 $I_2=I_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$，即振子 2 的激励电流相位比振子 1 超前 90°。此时，在 $\theta=90°$方向上的某观察点 P_1，由振子 2 产生的辐射场比振子 1 产生的辐射场超前 90°；而振子 2 至 P_1 点又比振子 1 至 P_1 点少$\dfrac{\lambda}{4}$，此波程差引起的相位差为 90°。因此，振子 2 和振子 1 在 P_1 点的辐射场有 180°的相位差，故相互抵消，合成场为零。反之，在 $\theta=270°$方向上的某观察点 P_2，由振子 2 产生的辐射场比振子 1 的辐射场传播距离多 $\lambda/4$，此波程差引起的相位差为 $-90°$，正好抵消了其激励电流相位超前的 90°，故两振子在 P_2 点的辐射场同相叠加，合成场为最大。可见，此时振子 2 的作用好像是把振子 1 朝向它辐射的电磁能量“反射”回去，故把振子 2 称为振子 1 的反射器。

若设 $I_2=I_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$，即振子 2 的激励电流相位比振子 1 滞后 90°，如图 6－21(b)所示。此时，在 $\theta=90°$方向上的观察点 P_1，振子 2 的辐射场传播距离比振子 1 少 $\lambda/4$，波程差引起的相位超前 90°正好补偿了激励电流相位滞后的 90°，故两辐射场同相叠加，合成场为最大。但在 $\theta=270°$方向上的观察点 P_2，两辐射场则是反相叠加，合成场为零。可见，此时振子 2 的作用好像是把振子 1 辐射的电磁能量吸引到自己所在的方向上来，故把振子 2 称为引向器。

上述讨论显然是极端情况，想要说明的是，可通过调整两振子的间距以及激励电流的

相位关系，使在激励电流相位滞后的振子一侧辐射增强，在激励电流相位超前的振子一侧辐射减弱。

2. ■引向天线工作原理简释

实际的引向天线的反射器和引向器都是无源的，只有主振子是有源振子。图 6－22 表示一个最简单的三单元引向天线，反射器 2 和引向器 3 置于有源振子 1 的两侧，它们在有源振子的激励下产生感应电流。感应电流的幅度和相位取决于无源振子的长度及其与有源振子的间距，适当调节无源振子的长度和间距，就能使无源振子上感应电流的相位满足反射器、引向器所要求的条件。

为使反射器上的电流相位超前于有源振子的电流相位，必须使反射器上电流波腹处的输入阻抗呈电感性。而由传输线理论得知，终端开路线的长度在 $\left(\frac{\lambda}{4}\sim\frac{\lambda}{2}\right)$ 范围时，其输入阻抗呈电感性。所以，取无源振子 2 的长度 $2l_r>\frac{\lambda}{2}$，就可起反射器的作用。同理，为使引向器上的电流相位滞后于有源振子上的电流相位，必须使引向器上电流波腹处的输入阻抗呈电容性，为此应取无源振子 3 的长度 $2l_{d1}<\frac{\lambda}{2}$，即可起引向器的作用。有源振子的长度取为半波谐振长度，即 $2l_0=\frac{\lambda}{2}$。

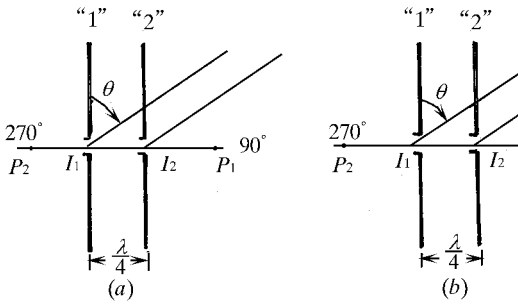


图 6－21　反射器和引向器的原理

$(a)\,I_2=I_1e^{j90^\circ}$；$(b)\,I_2=I_1e^{-j90^\circ}$。

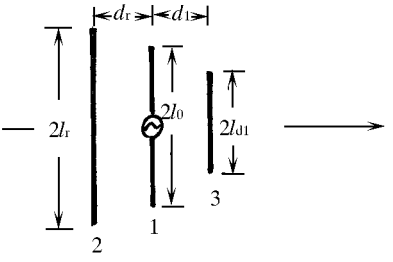


图 6－22　三单元引向天线

实际应用的引向天线由多个振子组成，影响各个无源振子与有源振子的电流相位关系的因素相当复杂，理论计算也非常繁琐。

3. ■引向天线的电参数

计算引向天线的电参数比较严格的方法是感应电势法。这种方法是把引向天线看成电流幅度和相位都不均匀的端射式离散元阵，根据耦合振子理论列出方程组，计算出各振子上的电流和有源振子的阻抗，进而计算出引向天线的辐射场和相关的电参数。不言而喻，分析计算的过程是非常难的，尤其是振子数较多时。工程应用上常采用一些经验公式或曲线来估算引向天线的电参数。

1)方向性系数和增益系数

引向天线的效率很高(可设为 $\eta_A\approx1$)，方向性系数和增益系数可按下式计算：

$$G=D=K_1\frac{L}{\lambda} \tag{6.5.25}$$

式中，L 是引向天线的轴向长度；K_1 是比例系数。图 6－23 绘出由实验得到的 K_1 与 $\frac{L}{\lambda}$ 关系曲线。由图可见，当 $\frac{L}{\lambda}$ 值较小时，K_1 值较大。随着引向器数目的增多，$\frac{L}{\lambda}$ 值增大，K_1 则下降。这就表明引向天线的方向性系数并不随 $\frac{L}{\lambda}$ 增大而线性增大。

2）主瓣宽度

引向天线的主瓣宽度按下式近似计算：

$$2\theta_{0.5} = 55^\circ \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \tag{6.5.26}$$

由上式得到的是 E 面和 H 面主瓣宽度的平均值，通常 E 面主瓣宽度较小，H 面主瓣宽度较大，图 6－24 绘出 $2\theta_{0.5}$ 与 $\frac{L}{\lambda}$ 曲线。

3）输入阻抗

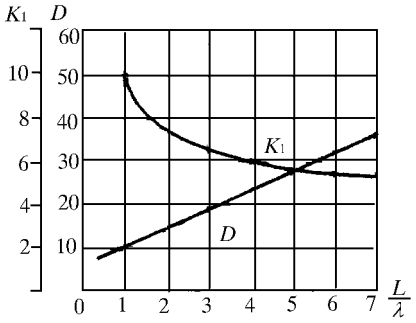


图 6－23　D、K_1 与 $\frac{L}{\lambda}$ 的关系

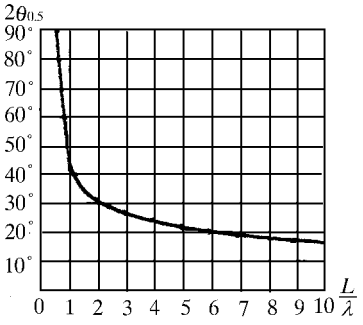


图 6－24　$2\theta_{0.5}$ 与 $\frac{L}{\lambda}$ 的关系

引向天线的输入阻抗主要由有源振子的自阻抗和与有源振子邻近的无源振子的互阻抗来决定。由于互阻抗的影响，使输入阻抗下降，不利于与馈线的匹配。

为提高引向天线的输入阻抗，通常采用半波折合振子做引向天线的有源振子。

折合振子是由两个放得很近、两个端点连接在一起的振子构成，在其中一个振子的中心馈电，如图 6－25(a)所示。可以粗略地把半波折合天线看成是一段 $\frac{\lambda}{2}$ 终端短路线由中间点 B、D 向两侧拉开而成，此时折合振了的两个端点 B、D 是电流波节点，中间的 C 点是电流波腹点，如图 6－25(b)所示。由于两振子间距 d 很小，对远区辐射场而言，半波折合振子等效为电流为 $2I$ 的半波振子，其方向性函数与普通半波振子相同。

半波折合振子的辐射功率为

$$P_r = \frac{1}{2}(2I)^2 R_r$$

式中，$R_r = 73.1\Omega$ 是半波振子的辐射电阻。

半波折合振子的输入功率为

$$P_{in} = \frac{1}{2} I^2 R_{in}$$

式中，R_{in} 是半波折合振子的输入电阻。若天线的效率等于 1，则 $P_{in} = P_r$，故得

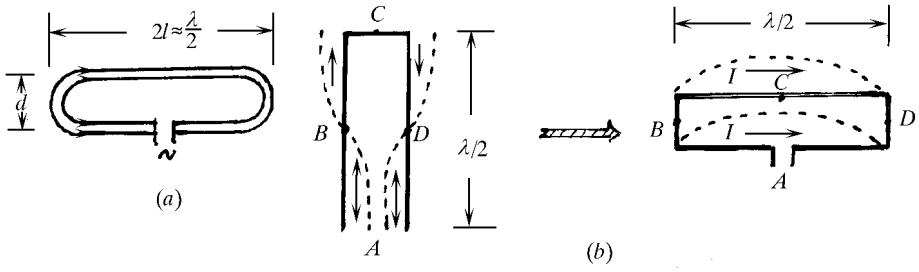


图 6－25　半波折合天线及其电流分布

$$R_{in}=4R_r\approx300\Omega$$

可见，采用半波折合振子作为引向天线的有源振子，提高了输入阻抗值，易于实现与馈线的匹配。此外，折合振子等效于增大了振子的直径，频率特性也稍好些。

4. ■引向天线的尺寸选择

根据所要求的增益、主瓣宽度、前后比等参数来设计制作引向天线时，应对单元数 N 以及有源振子、无源振子的相关尺寸进行适当选择。

1)单元数 N 的确定

引向天线的单元数主要是根据所要求的增益来确定。图 6－26 绘出的 $G-N$ 曲线，是经大量实验测试综合得出的有实用价值的曲线，可直接利用该曲线由指定的增益 G 查得所需的单元数。注意，图中的 G 是以半波振子为参考的。

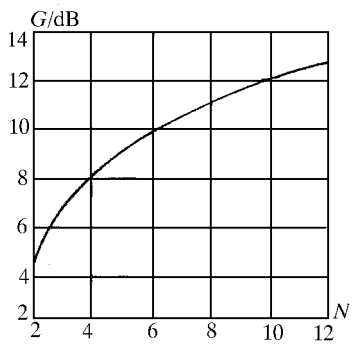


图 6－26　增益 G 与单元数 N 的关系

2)无源振子尺寸的选择

反射器的长度 $2l_r=(0.5\sim0.55)\lambda$，反射器与有源振子的间距 $d_r=(0.15\sim0.23)\lambda$。间距 d_r 对前后比和输入阻抗的影响较大，取较小的 d_r 值，可有效降低后向辐射，但会使输入阻抗降低，需折衷考虑。

引向器的长度 $2l_d=(0.42\sim0.46)\lambda$，理论计算和实验表明，振子数目越多，引向器的最佳长度越短。引向器的间距 $d=(0.15\sim0.4)\lambda$。各引向器的长度可以是相等的或不相等的，间距也可以是相等的或不相等的，两者各有优缺点。

3)有源振子结构和尺寸的选择

通常采用半波折合振子做有源振子，其长度取谐振长度 $2l_0\approx0.47\lambda$。

应该指出，实验调整是引向天线设计制作中的一个重要步骤。

6.5.5 螺旋天线

螺旋天线是将导线绕制螺旋形线圈而成，它通常带有金属接地板，用同轴线馈电，同轴线的内导体与螺旋形连接，外导体则与金属接地板连接在一起，如图 6－27 所示。金属接地板的直径 $D=(0.8\sim1.5)\lambda$，其作用是减小同轴线外表示的感应电流，改善辐射特性。

螺旋天线的几何参数有：螺旋的直径 d，螺距 S，螺距角 θ（又称螺旋上升角），螺旋线一圈的长度 l_0，螺旋圆柱体截面的周长 C，螺旋线的总长度 l_n，螺旋的圈数 N，螺旋天线的轴向长度 L。这些几何参数的关系为

$$\left.\begin{aligned} C &= \pi d \\ l_0^2 &= S^2 + C^2 \\ \theta &= \arctan\left(\frac{S}{C}\right) \\ l_n &= Nl_0 \\ L &= NS \end{aligned}\right\} \qquad (6.5.27)$$

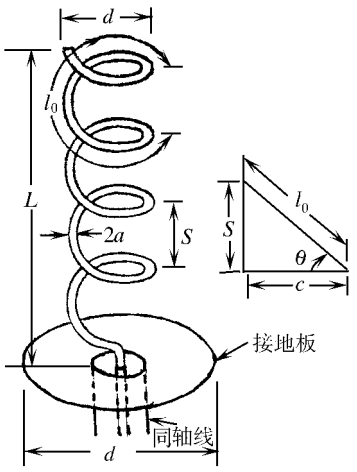


图 6－27　螺旋天线

螺旋天线是一种基本的圆极化天线，它可以作为独立的天线，也可作反射器天线的馈源，还可构成螺旋天线阵。

1. ■螺旋天线的三种工作状态

螺旋天线的特性主要决定于螺旋直径与波长的比值 $\frac{d}{\lambda}$，具有三种辐射状态，如图 6－28 所示。当 $\frac{d}{\lambda}<0.18$ 时，天线的最大辐射方向在与螺旋天线轴线垂直的平面内，称为法向模；当 $\frac{d}{\lambda}=0.25\sim0.46$ 时，天线的最大辐射方向在螺旋天线的轴线方向，称为轴向模；当 $\frac{d}{\lambda}>0.46$ 时，天线的最大辐射方向偏离轴线呈圆锥，称为圆锥模。

这三种辐射状态的出现，可以根据对螺旋慢波结构的详细理论分析结果作简要说明。螺旋天线上的电流可以用三种主要的传输模 T_0、T_1、T_2 的组合来表示，这些电流模式具有不同的相位分布和传播速度。T_0 模经过几圈螺旋线，相位才变化一个周期，T_1 模每经过一圈螺旋线，相位变化一个周期；T_2 模则在一圈螺旋线上有两个周期的相位变化。当 $\frac{d}{\lambda}<0.18$ 时，T_0 模占优势，而且几乎不衰减地传输，传至终端后发生反射，形成驻波分布。这样，各圈可视为基本的电流圆环（磁偶极子）和基本的电流元（电偶极子）的组合，如图6－29 所示。故其最大辐射方向在垂直于天线轴的法向，称为法向辐射状态。当 $\frac{d}{\lambda}$ 增大时，T_1 模占优势，而 T_0 模很快衰减。T_1 模传至终端后激励起 T_0 模反射波和 T_1 模反射波，当螺旋线总长度 l_n 很长时，前者很快衰减，后者幅度很小，因此天线上的电流接近行

波分布，天线的最大辐射方向在其轴线方向上，称为轴向辐射状态。当$\frac{d}{\lambda}$再增大时，T_2 模占优势，这时的方向图变成圆锥形，称为圆锥辐射状态。

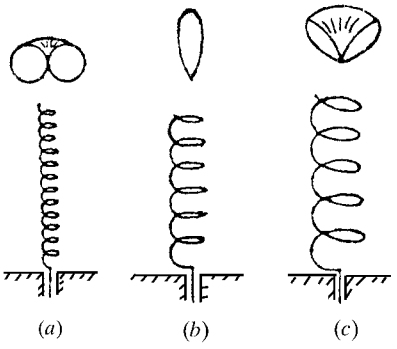


图 6－28　螺旋天线的三种辐射状态
(a)法向模；(b)轴向模；(c)圆锥模。

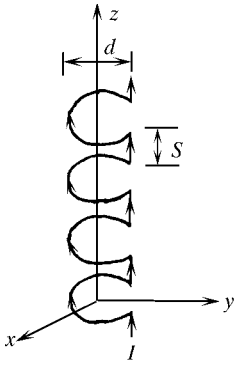


图 6－29　法向模螺旋天线示意图

这里只讨论应用较广泛的法向模螺旋天线和轴向模螺旋天线。

2. ■法向模螺旋天线

正如前面已提到的，对于法向模螺旋天线，T_0 模占优势，其辐射场可视为长度为 S、通过电流为 I 的基本电流元的辐射场和直径为 d、通过电流也为 I 的基本电流环的辐射场叠加。

据式(6.2.9)得基本电流元的辐射场为

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{I\omega\mu S}{4\pi r}\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

据式(6.3.7)得基本电流环的辐射场为

$$E_\phi = \frac{\omega\mu Ik\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{4\pi r}\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

故 N 圈法向模螺旋环天线的辐射场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_\theta E_\theta + \boldsymbol{e}_\phi E_\phi = \frac{N\omega\mu I}{4\pi r}\sin\theta\left[\mathrm{j}\boldsymbol{e}_\theta S + \boldsymbol{e}_\phi k\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{6.5.28}$$

可见，方向性函数为 $\sin\theta$，在 θ 为 $90°$、$270°$ 方向有最大辐射。若 $S = k\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$，则 $|E_\theta| = |E_\phi|$，且两者相位差为 $\pi/2$，此时的法向模螺旋天线为圆极化天线。

法向模螺旋天线广泛用于超短波波段的各类小型电台上，例如移动通信台用的螺旋鞭天线。

3. ■轴向模螺旋天线

当 $\frac{d}{\lambda} = 0.25 \sim 0.46$ 时，螺旋一圈的长度接近于某一频段的一个波长，T_1 模占优势，最大辐射方向在轴线方向上。

我们先讨论圈长 $l_0 = \lambda$ 的单个平面圆环(螺距角 $\theta = 0°$)的辐射。设某一瞬时 t_1 圆环上的电流分布如图 6－30(a)所示，在圆环上取对称的 A、B、C、D 四个点，其上的电流大

小相等，即 $|I_A|=|I_B|=|I_C|=|I_D|$，方向为圆弧的切线方向。研究圆环轴线方向上的辐射场时，可以把圆环上每一点的电流分解为 I_x 和 I_y 分量，从图上可看出：

$$\left.\begin{aligned} I_{Ax} &= -I_{Bx} \\ I_{Cx} &= -I_{Dx} \end{aligned}\right\} \tag{6.5.29}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{Ay} &= I_{By} \\ I_{Cy} &= I_{Dy} \end{aligned}\right\} \tag{6.5.30}$$

可见，在 t_1 时刻，x 方向的电流产生的辐射场相互抵消；y 方向的电流产生的辐射场相互叠加，此辐射场与 y 轴平行，即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y E_y$。

随着时间的变化，行波电流沿线移动。在另一时刻 $t_2=t_1+\dfrac{T}{4}$ 时，圆环上的电流分布如图 6－30(b)所示。此时，圆环上的 A、B、C、D 四个点的电流发生了变化，有以下关系：

$$\left.\begin{aligned} I_{Ay} &= -I_{By} \\ I_{Cy} &= -I_{Dy} \end{aligned}\right\} \tag{6.5.31}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{Ax} &= I_{Bx} \\ I_{Cx} &= I_{Dx} \end{aligned}\right\} \tag{6.5.32}$$

可见，在 t_2 时刻对轴向辐射场有贡献的是 I_x 分量，此辐射场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_x$。

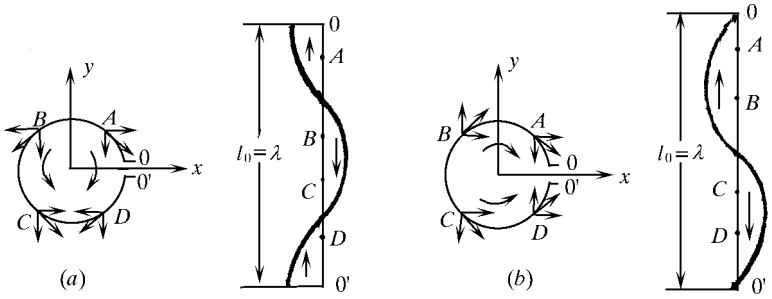


图 6－30　平面圆环上的瞬时电流

(a)$t=t_1$；(b)$t=t_1+\dfrac{T}{4}$。

从以上讨论可以看出，当时间经过 $\dfrac{T}{4}$ 后，圆环轴向辐射场由 E_y 变为 E_x，即电场矢量旋转了 $90°$，但振幅不变。如此延续下去，经过一个周期，电场将连续旋转 $360°$。由此得到的结论是：当圆环的周长为一个波长、环上载流行波电流时，圆环轴线上的辐射场是一个圆极化波，其旋转频率等于信号源的振荡频率。

计算螺旋天线轴向辐射场时，可近似地把它看成由 N 个圈长 $l_0=\lambda$ 的平面圆环组成的天线阵。但是，实际上每个螺旋线圆不在一个平面上(即螺距角实际不为 0)，故必须注意使每个圈的第一个线元与下一圈的第一个线元所产生的场的相位差为 2π，这样仍能保证螺旋线圈轴线方向上有最大辐射，且为圆极化波，即需满足

$$\psi=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{l_0}{k_1}-\frac{2\pi}{\lambda}S=2\pi$$

式中，$\dfrac{2\pi}{\lambda}S$ 是某一圈的起始单元与下一圈的起始单元产生的场的相位差，它是由射线的波

程差引起的；$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{l_0}{k_1}$是线上的电流相位差所引起的场的相位差，这里的 k_1 是电流波沿螺旋线的相速 v_p 与光速 c 的比值，即 $k_1=\frac{v_p}{c}=\frac{\pi d}{\lambda\cos\theta_0}$

在工程应用上，根据给定的天线增益来选择轴向模螺旋天线时，利用以下经验公式是很方便的。这些经验公式适用于螺距角 $\theta=12^\circ\sim16^\circ$，圈数 $N>3$ 的情形。

主瓣宽度

$$2\theta_{0.5}=\frac{52^\circ}{\frac{l_0}{\lambda}\sqrt{\frac{NS}{\lambda}}} \tag{6.5.33}$$

方向性系数

$$D=15\left(\frac{l_0}{\lambda}\right)^2\frac{NS}{\lambda} \tag{6.5.34}$$

输入阻抗

$$Z_{\text{in}}=R_{\text{in}}=140\,\frac{l_0}{\lambda} \tag{6.5.35}$$

轴向模螺旋天线作为一种基本的圆极化天线，广泛应用于通信、雷达、遥测遥控、卫视等无线电系统中。

6.5.6 对数周期天线

前面讨论的几种天线都属于窄带天线，频率改变时，天线的电参数也要发生变化。而在许多情况下，要求天线工作在很宽的频率范围内，即要求是宽带天线。在很宽的频率范围内，天线的阻抗、方向性等参数基本不变的天线，称非频变天线。

非频变天线分为两大类：等角螺旋天线和对数周期天线。它们都是按照相似原理设计的。把相似原理应用到同一副天线上可以这样叙述：若天线以任意比例尺变换后仍保持它原来的结构（称之为自相似结构），则其电性能将与工作频率无关。

对数周期天线是根据以下的“相似”概念构成的：当天线按照某一特定的比例因子 τ 变换后仍为它原来的结构，则出现在频率 f 和 τf 间的天线性能，将在频率 τf 和 $\tau^2 f$ 间重复出现。依此类推，天线的电性将在很宽的频率范围内周期性地重现。若能做到 $f\sim\tau f$ 频率范围内天线性能变化很小，就有可能达到非频变天线的要求。

对数周期天线有多种型式，目前应用最广的是对数周期偶极子天线（常表示为 LPDA），它结构简单、重量轻，频带宽度可达 $f_{\max}/f_{\min}\geqslant10$。本小节将以 LPDA 为例说明对数周期天线的特性。

对数周期偶极子天线的结构示意图如图 6－31(a)所示，它由 N 个对称振子组成，用双线传输线（称为集合线）馈电。馈源接在短振一端，相邻两振子交叉馈电。有时还在最长振子端接入一短路支节线，调整该短路线长度可减小集合线在终端的反射。图 6－31(b)表示各振子的尺寸、位置，按照结构周期 τ 组成，取

$$\frac{l_n}{l_{n+1}}=\frac{R_n}{R_{n+1}}=\frac{d_n}{d_{n+1}}=\tau<1 \tag{6.5.36}$$

式中，n 为振子序号，$n=1,2,3,\cdots,N$；d 为相邻两振子的间距；l 为振子的单臂长度；R 为

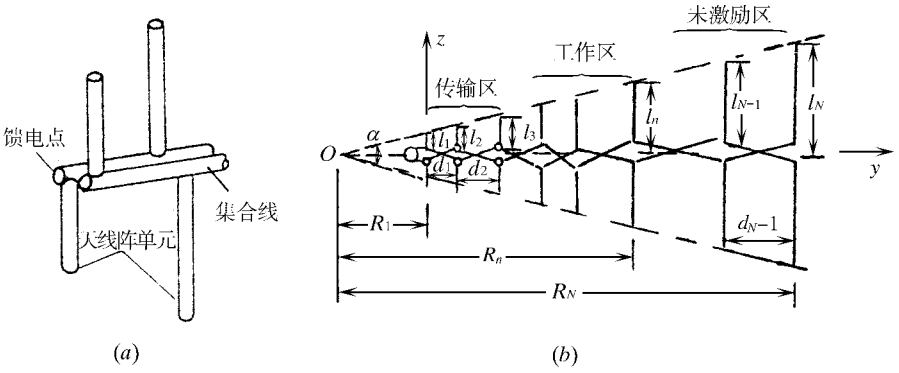


图 6－31　对数周期偶极子天线

天线的几何顶点 O 到振子的垂直距离。

随着振子序号的增加，振子长度及振子距顶点的距离依次增加 $\frac{1}{\tau}$ 倍，即

$$\ln l_n - \ln l_{n+1} = \ln R_n - \ln R_{n+1} = \ln\tau = \text{常数} \tag{6.5.37}$$

上式表明天线结构尺寸的对数以 $\ln\tau$ 为周期。

相应地，天线呈现相同性能时的频率也有同样的对数周期，即

$$\ln f_2 - \ln f_1 = \ln f_3 - \ln f_2 = \cdots = \ln\tau = \text{常数} \tag{6.5.38}$$

由于振子尺寸是跳变的，故在一个对数周期的范围内改变频率时，天线性能会有一些变化，但只要这种变化不超过某种指标规定的限度，就可认为是合用的。

应该指出，上述周期结构理论上应是无限结构，即对数周期天线向长振子方向延伸至无限远，在短振子方向也按比例系数 τ 一直缩到无限小。实际上，只要作到终端效应弱，有限尺寸的对数周期天线也可以满足要求。

当天线馈电后，由信号源供给的电磁能量沿集合线传输，依次激励各振子。只有长度接近谐振长度的这部分振子才能激励起较大的电流，向空间产生有效的辐射。远离谐振长度的那些或长或短的振子上的电流都很小，对远区辐射几乎没有贡献。这就是说，对于某一频率而言，各振子的电尺寸不同，因而起着不同的作用。通常将整个 LPDA 分成三个区域来阐述它们各自的作用。

1）传输区

包括馈电点和邻近的几个短振子。在这个区域内，振子的单臂长度远小于 $\frac{\lambda}{4}$，振子的输入阻抗很大且主要是电抗分量，所以振子上的电流很小，产生的辐射很弱。电磁能量在这区域的衰减很小，绝大部分通过集合线传输到后面的工作区。

2）工作区

它是由几个长度接近对应频率的谐振长度（即振子单臂长度接近 $\frac{\lambda}{4}$）的振子组成。在此区域内，振子的输入阻抗不大，故振子上电流较大而产生很强的辐射。整个天线的辐射主要由这部分振子产生，故也把工作区称为有效辐射区。

3）未激励区

它包括工作区之后直至天线的末端部分，此区域的振子长度显著地大于谐振长度。由于电磁能量在工作区已基本上全部辐射出去了，此区域的振子处于未激励状态，这正好保证天线满足“末端效应弱”的条件。

对于每个频率，都有确定的一部分振子构成天线的工作区。随着频率的变化，工作区在天线轴线上移动，当频率由高到低变化时，工作区就从短振向长振子方向移动。从电尺寸的观点来看，工作区的电尺寸不随频率而变。这就是对数周期天线的电性能与频率无关的根本原因。

对数周期天线的馈电方式对于保证其宽带特性也至关重要。在短振子一端馈电时，馈线上的相位滞后发生在较长的振子方向。但经过集合线的相位反转后，较长振子上的电流相位就超前于较短振子，于是天线的最大辐射方向指向馈电点方向。

对数周期天线广泛应用于要求宽频带的无线电设备，例如侦察接收、测控等设备。

6.5.7 平衡—不平衡变换器

大多数线形天线是对称的，因而天线上的电流也是对称分布的。例如，对称半波天线，中心馈电点为电流波腹，两端为电流波节，左右对称分布。当用同轴电缆馈电时，虽然同轴电缆传输的电流波也是平衡模式（内导体上的电流 I_1 和外导体上的电流 I_2 等值反相），但当此电流波到达对称半波天线输入端时，将有一部分电流从外导体的外表面流回，使得对称天线的左右两臂上对应点的电流不相等，破坏了天线的平衡或对称性，如图6－32所示。这是因为天线输入端两个端子上的电压 U_a 和 U_b 都要在同轴电缆外导体的外表面产生电流。由于天线的一个端子直接与同轴电缆外导体相接，其电压 U_b 产生的电流较大；电压 U_a 产生的电流较小，从而使外导体的外表面上的电流不为零，用 I_3 表示。由于 I_3 的存在，使得天线的对称性受到破坏，结果是天线的辐射方向图畸变，损耗增加。因此，在对称天线的馈电系统中，必须加入平衡－不平衡变换器，常称为巴伦（balun，是 balanced to unbalanced 的缩写）。下面介绍两种常用的平衡－不平衡变换器。

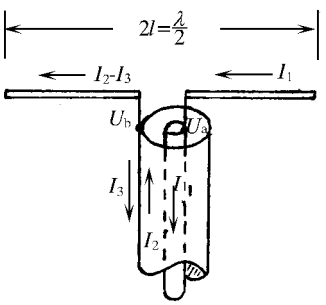


图 6－32 同轴电缆对半波天线馈电

1. ■四分之一波长扼流套

$\frac{\lambda}{4}$扼流套是在同轴电缆外导体的外面再加上一段长度为$\frac{\lambda}{4}$的金属套筒构成。金属套筒与同轴电缆外导体之间有不大的间隙，套筒的下端与电缆外导体连接在一起，如图 6－33 所示。这样，套筒的内表面和同轴电缆的外表面构成一段$\frac{\lambda}{4}$终端短路传输线，其输入阻抗很大（理论上为无限大），这就抑制了 I_3 的流通，即抑制了同轴电缆外导体的内表面上电流 I_2 的外溢，使 $I_3 \approx 0$，从而保证了对称天线两臂上的电流平衡。实践表明，金属套

筒的最佳长度是 0.23λ。

另一种型式的平衡变换器如图 6－34 所示，称为$\frac{\lambda}{4}$同轴线平衡器。取一段与同轴线外导体直径相同、长度为 λ/4 的导体棒，上端与天线振子的右臂及同轴线内导体相连，下端与同轴线外导体连接在一起，构成一段$\frac{\lambda}{4}$终端短路线。这种变换器的结构是对称的，天线的左、右两臂分别与外径相同的同轴线外导体、附加导体棒连接，这样就保证了两线两臂与地之间的分布参数几乎相同，从而使天线两臂上的电流相同。与$\frac{\lambda}{4}$扼流套相比，$\frac{\lambda}{4}$同轴线平衡器可工作在较宽的频带。

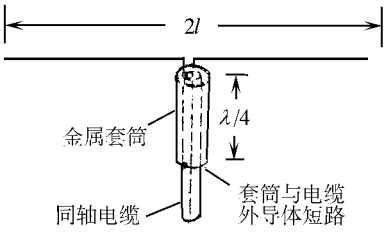


图 6－33　$\frac{\lambda}{4}$扼流套

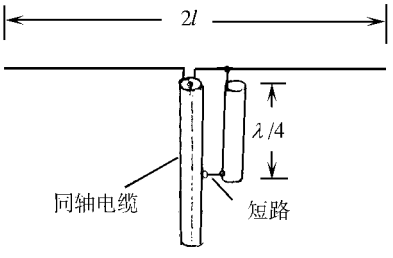


图 6－34　$\frac{\lambda}{4}$同轴线平衡器

2. ■半波长 U 形管

半波长 U 形管同时具有平衡变换和阻抗变换两种功能，其结构如图 6－35 所示。主馈线的内导体在 a 点直接与对称天线的左臂相接，然后由 a 点经过长度为$\frac{\lambda_g}{2}$（此处的 λ_g 是同轴线内的波长，与同轴线的填充介质有关）、弯成 U 字形的一段同轴线在 b 点与天线的右臂连接。根据传输线理论，线上相距$\frac{\lambda_g}{2}$的两点间的电压（或电流）是等幅反相的。设 a 点的对地电位为 φ_a，则 b 点的对地电位为 φ_b，且 $|\varphi_a|=|-\varphi_b|=U$，即 a、b 两端点对地是对称的。因此，同轴线通过半波长 U 形管向对称天线馈电时，对天线两臂上的电流分布是对称的。

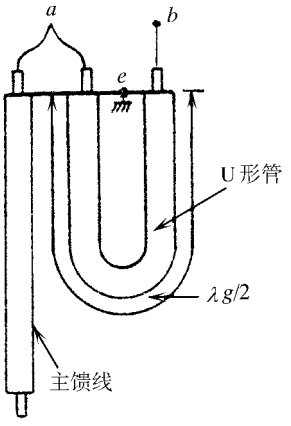


图 6－35　半波长 U 形管变换器

设天线的输入阻抗为 Z_{in}，输入端电压 $U_{ab}=\varphi_a-\varphi_b=2U$，则天线输入端电流为

$$I=\frac{2U}{Z_{in}}$$

而 a 点和 b 点的对地阻抗（也就是$\frac{\lambda}{2}$U 形管两端的负载阻抗）为

$$Z_{ae}=Z_{be}=\frac{U}{I}=\frac{Z_{in}}{2}$$

根据半波长传输线段的阻抗还原特性，Z_{be} 经过 $\frac{\lambda}{2}$U 形管到 a 点处的阻抗仍为 $\frac{Z_{in}}{2}$，它与 Z_{ae} 并联构成主馈线的负载阻抗。也就是说，使用 $\frac{\lambda}{2}$U 形管变换器，同轴线的负载阻抗为 $\frac{Z_{in}}{4}$，应选用特性阻抗 $Z_c=\frac{Z_{in}}{4}$ 的同轴线做主馈线。一个典型的例子是半波折合天线的输入阻抗 $Z_{in}\approx 300\Omega$，选用特性阻抗 $Z_c=75\Omega$ 的同轴线做主馈线，就可得到良好的匹配。

练 习 题

6.5－1　半波天线沿 z 轴放置，已知在 x 方向上 15km 处的电场为 0.1V/m，设工作频率 $f=300$MHz，试确定天线长度及天线的总辐射功率。

6.5－2　在图 6－12 所示的二元阵中，$d=\frac{\lambda}{4}$，$I_2=I_1 e^{j90^\circ}$，画出 E 面方向图。

6.5－3　单极天线的高度 $h=15$m，若工作频率 $f=1$MHz，求天线的有效高度。

6.5－4　某无线电台需配置增益 $G\geqslant 10$dB 的引向天线，你能确定至少需要多少个单元吗？

6.6 面 形 天 线

前节讨论的线形天线适用于长波、中波、短波和超短波波段，在微波波段则要采用面形天线。与线形天线不同，面形天线所载的电流是分布在构成天线的金属导体表面，且天线的口径尺寸远大于波长。面形天线广泛应用于微波中继通信、卫星通信、卫星电视广播以及雷达、导航等无线电系统中。

6.6.1 分析面形天线辐射场的方法

面形天线通常由初级辐射器和辐射口面两部分组成。初级辐射器又称为馈源，它的作用是把馈线中传输的电磁能量转换为由辐射口面向外辐射的电磁能量。用作初级辐射器的有终端开口波导、喇叭天线、对称振子等。辐射口面的作用是把从初级辐射器获得的电磁能量按所要求的方向性特性向空间辐射出去。

严格地分析，面天线的辐射是一个十分复杂的问题，通常采用以下两种近似方法。

1. ■感应电流法

这种方法是先求出构成天线的金属导体表面在初级辐射器照射下产生的感应面电流分布，然后计算此电流在外部空间产生的辐射场。

2. ■口面场法

这种方法包括两个部分：先作一个包围天线的封闭面，按给定的场源近似地求出此封闭面上的场（称为解内场问题）；然后根据惠更斯原理，利用该封闭面上的场求出空间的辐射场（称为解外场问题）。由于金属封闭面上无电磁场，故实际上只需考虑封闭面的开口部分的辐射作用，即口面场的作用。

以抛物面天线为例来简要说明上述两种近似分析方法。图 6－36 所示的抛物面天

线，初级馈源是振子天线。利用振子在自由空间的辐射场公式计算抛物面 S_0 上的感应面电流

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}$$

式中，$\boldsymbol{H}$ 是抛物面上的磁场强度；$\boldsymbol{n}$ 为抛物面内表面 S_0 的法向单位矢量。再根据 $\boldsymbol{J}_s$ 的分布计算外部辐射场，这就是“感应电流法”。

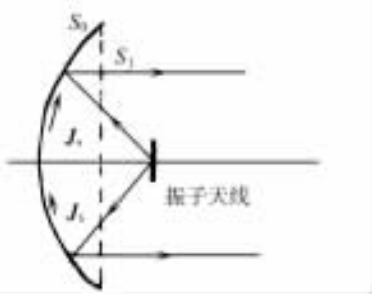


图 6－36　抛物面天线的辐射分析

如果是根据振子产生的入射场求出抛物面口径面 S_1 上的场，这就是内场问题的近似解，属于“口面场法”的第一部分，下一步就是由开口面 S_1 上的场计算外部空间辐射场，属于“口面场法”的第二部分。计算外部场问题的根据是惠更斯原理的数学表示式——克希霍夫公式：

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\right)\frac{\partial \psi}{\partial n}\right]\mathrm{d}s$$

因为电场 $\boldsymbol{E}$ 或磁场 $\boldsymbol{H}$ 都可分解为三个标量分量，例如在直角坐标系中分解为 E_x、E_y、E_z；H_x、H_y、H_z。这样，就可根据克希霍夫公式，根据口径面上的场分量和它们的导数分布，计算出外部空间的电场和磁场。

6.6.2　旋转抛物面天线

旋转抛物面天线广泛应用于通信、雷达、卫星电视等系统中，它由两部分构成：其一是旋转抛物反射面，通常用导电性能良好的金属材料制成；其二是置于旋转抛物面焦点上的馈源（初级辐射器）。

旋转抛物面是抛物线绕其轴旋转而形成的，旋转抛物面天线的基本特性是以抛物线的几何特征为基础的。图 6－37 表示旋转抛物面的一条剖面线，它的基本元素是：焦点 F、顶点 O、焦距 $f=OF$、主轴 Oz。在极坐标系中，抛物线的方程为

$$\rho = \frac{2f}{1+\cos\psi}$$

式中，ρ 为焦点 F 至抛物线上任一点 M 的距离。

下面从旋转抛物面的两个基本性质来简要解释旋转抛物面的工作原理。

第一，由焦点发出的任一条射线经抛物面反射后，射线都平行于主轴 Oz。因此，从置于焦点处的点源发出的射线，经抛物面反射后变成一束平行线；反之，当平行射线沿抛物面的主轴投向抛物面时，将被会聚于焦点 F 上。当抛物面尺寸远大于电磁波的波长时，上述几何光学性质适合于电磁波。

第二，由焦点发出并经抛物面反射的各条射线，到达垂直于主轴的任一平面的波程相等，即 $FM+MP=FM'+M'P'$。若如图 6－37 所示的那样，该平面正好通过焦点 F，则有 $FM+MP=FM'+M'P'=2f$。因此，垂直于主轴的平面是等相位面。这说明抛物面可将焦点处发出的球面波变为平面波；反之，当平面波沿主轴入射时，经抛物面反射后，将同相

位地会聚于焦点上。

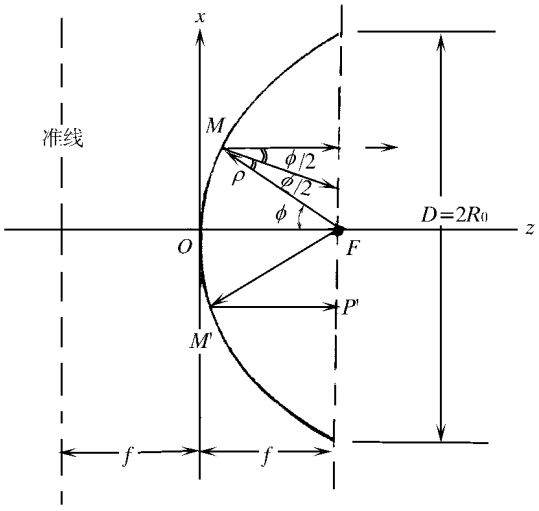


图 6－37　抛物线的几何关系

综合上述两点可知，置于焦点上的馈源辐射的球面波，经抛物面反射后变成平面波，波阵面是垂直于主轴的平面。由于抛物面尺寸远大于波长，故主轴方向有最强的辐射。

6.6.3　卡塞格伦天线

卡塞格伦天线又称双反射面天线，由三部分组成：

主反射面（主面），是旋转抛物面，其焦点在 F 点焦距为 f。

副反射面（副面），是旋转双曲面，它有两个焦点，虚焦点为 F_1，与抛物面焦点 F 重合；实焦点为 F_2，通常在抛物面顶点附近。

馈源，通常是喇叭天线，置于抛物面顶点附近，其相位中心与 F_2 重合。主面、副面、馈源三者共轴。

卡塞格伦天线的构成如图 6－38 所示。

与旋转抛物面天线相比，卡塞格伦天线有如下优点：

(1)由于有两个反射面，几何参数增多，使天线的电性能设计有相当的灵活性。

(2)可以采用短焦距抛物面作主反射面，从而减小了天线的纵向尺寸。

(3)由于采用了副反射面，馈源安装在主反射面的顶点附近。这样，馈线和接收机均可置于主反射面背后且紧靠馈源，从而大大缩短馈线长度，减少了损耗。

卡塞格伦天线的工作原理是以旋转双曲面的几何特性为基础的。位于双曲面的实焦点处的馈源发出的射线，经双曲面反射后，所有射线等效于从虚焦点 F_1 发出。而 F_1 与抛物面的焦点 F 重合，所以由双曲面反射到主面的射线就像是从抛物面的焦点 F 发出的一样，再经抛物面反射后，这些射线都平行于抛物面的主轴。因此，从双曲面和抛物面的几何特性可知，由馈源发出的任意射线经双曲面和抛物面反射后，不仅相互平行，而且到达抛物面口径面的路程相等。可见，卡塞格伦天线和旋转抛物面天线的工作原理是相似的。

卡塞格伦天线广泛用于雷达、卫星地球站等无线电系统。

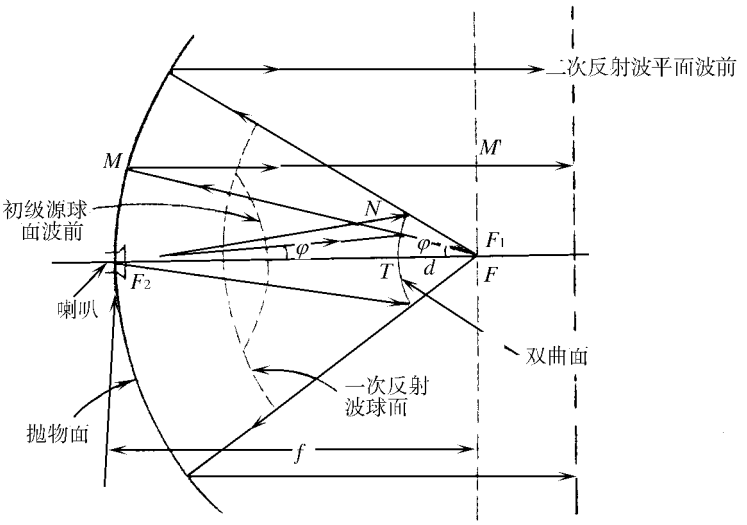


图 6－38　卡塞格伦天线的构成

练　习　题

6.6－1　简要说明分析面形天线辐射的近似方法。

6.6－2　简要说明旋转抛物面天线的构成特点和工作原理。

习　题

6－1　频率 $f=1\text{MHz}$，电流振幅 $I=1A$，电偶极子长度 $l=10\text{m}$。(1)计算在垂直于电偶极子轴线方向上，距离 $r=10\text{m}$ 和 100km 处的电场 $\boldsymbol{E}$ 和平均功率密度；(2)计该电偶极子的总辐射功率。

6－2　若波源频率为 1MHz，线长 $l=1\text{m}$ 的一段导线。(1)导线为一直线段，求其辐射电阻；(2)将导线弯成一圆环，再求其辐射电阻

6－3　为了在电偶极子的最大辐射方向上距离 100km 处得到 $100\mu\text{V/m}$ 的电场，该电偶极子必须辐射多大的功率？

6－4　已知某天线的辐射功率为 100W，方向性系数为 3。(1)求距离 $r=10\text{km}$ 处，最大辐射方向上的电场振幅；(2)若保持辐射功率不变，要使 $r=20\text{km}$ 处的电场等于原来 $r=10\text{km}$ 处的电场，应选择方向性系数为多少的天线？

6－5　半波天线上的电流振幅 $I=1\text{A}$，求离开天线 1km 处的最大电场强度。

6－6　有一副七单元引向天线，反射器与有源振子的间距 $d_r=0.17\lambda$，各引向器等间距排列，取 $d=0.2\lambda$。试估算该天线的方向性系数和主瓣宽度。

6－7　以对数周期偶极子天线(LPDA)为例，简要说明非频变天线的工作原理。

6－8　卡塞格伦天线由哪几部分构成？简要说明其工作原理。

第七章　静态电磁场

在一般的情况下，电场和磁场是互相联系的，是统一的电磁场的两个方面。但是，当场源（即电荷、电流）不随时间变化时，它们所激发的电磁场也不随时间变化，称为静态电磁场。由麦克斯韦方程组可以看出，当场量不随时间变化时，电场满足的方程与磁场满足的方程是相互独立的。这表明，在静态情况下，电场和磁场是独立存在的。

静态场是电磁场的特殊形式，由静止电荷产生的静电场、在导电媒质中恒定运动电荷形成的恒定电场以及恒定电流产生的恒定磁场属于静态场。在静态场的情况下，电场可以用一个标量电位来描述，磁场可以用一个矢量磁位来描述，在无源（$\boldsymbol{J}=0$）的区域中，磁场也可以用一个标量磁位来描述。本章主要分析静态场的基本规律，着重对静态场的标量电位、矢量磁位和标量磁位进行了分析；对工程实际中非常重要的电容、电阻和电感的计算进行了讨论；最后，讨论了静电能量和静磁能量的分布与计算，以及用虚位移法求静电力和静磁力。

7.1　静电场的标量电位

在 6.1 中指出，电磁场可用矢量位 $\boldsymbol{A}$ 和标量位 φ 来描述，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \end{cases} \tag{7.1.1}$$

对于不随时间变化的静态场，有 $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=0$，所以

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi \tag{7.1.2}$$

也就是说，在静态场的情况下，电场仅由标量位 φ 来确定，通常称 φ 为标量电位。这一结论既适用于静电场，也适用于恒定电场。

7.1.1　静电位的微分方程

静电场的标量电位 φ 又称为静电位。由于 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}=0$，由式（6.1.12）可知，静电位 φ 满足标量泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{7.1.3}$$

在无自由电荷分布的空间中，由于 $\rho=0$，则电位 φ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{7.1.4}$$

在静电场中，由于 $\omega=0$，则 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=0$。由式(6.1.19)可得到，在体积 V 内体密度为 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 的电荷分布产生的静电位为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V' \tag{7.1.5}$$

将式(7.1.5)中的 $\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$ 分别用 $\rho_S(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'$ 和 $\rho_l(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l'$ 代替，可得到面电荷和线电荷产生的电位分别为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S\frac{\rho_S(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}S' \tag{7.1.6}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_C\frac{\rho_l(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}l' \tag{7.1.7}$$

对位于 $\boldsymbol{r}'$ 处点电荷 q，由于 $\int_V\rho\mathrm{d}V'=q$，由式(7.1.5)可得

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon\,|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,|} \tag{7.1.8}$$

对于位于不同位置的 N 个点电荷 $q_1,q_2,\cdots,q_N$ 所组成的系统，在空间任意点产生的电位为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_i\,|} \tag{7.1.9}$$

式中 $\boldsymbol{r}'_i$ 是点电荷 $q_i(i=1,2,\cdots,N)$ 的位置矢量。

7.1.2 电位差

静电位具有明确的物理意义。将式(7.1.2)两端点乘 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，则有

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\partial\varphi}{\partial l}\mathrm{d}l=-\mathrm{d}\varphi$$

对上式两端从点 P 到点 Q 沿任意路径进行积分，则得到 P、Q 两点之间的电位差为

$$\varphi(P)-\varphi(Q)=-\int_P^Q\mathrm{d}\varphi=\int_P^Q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7.1.10}$$

由此可见，P、Q 两点之间的电位差 $\varphi(P)-\varphi(Q)$ 的物理意义为，把一个单位正电荷从 P 点沿任意路径移动到 Q 点的过程中，电场力所做的功。电位差 $\varphi(P)-\varphi(Q)$ 又称为 P、Q 两点之间的电压，常用 U 来表示。

应当注意，由式(7.1.2)定义的电位函数 φ 不是惟一确定的，可以加上一个任意常数，但仍保持电场强度 $\boldsymbol{E}$ 不变。为了使场中每一点的电位具有确定的值，必须选择场中某一固定点作为电位的参考点，即规定该点的电位值为零。电位参考点的选择具有一定的任意性，参考点的选择不同，场中每一点的电位值也不同，相差一个常量值。一般来说，电位参考点的选择应遵循以下原则：

(1) 应使电位的表达式有意义，除个别特殊的点外，不能出现无穷大的电位值。

(2) 同一个问题中只能选择一个电位参考点。

(3) 应使电位的表达式尽可能简单。当电荷分布在有限区域内时，通常选择无穷远处为电位参考点。

在式(7.1.10)中，若选择 Q 点为电位参考点，则 P 点的电位为

$$\varphi(P)=\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7.1.11}$$

若选择无穷远处为电位参考点，则场中任一点 P 的电位为

$$\varphi(P)=\int_P^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7.1.12}$$

7.1.3 静电位的边界条件

设 P_1 和 P_2 是介质分界面紧贴界面的相邻两点，其电位分别为 φ_1 和 φ_2。由于界面处的电场为有限值，当点 P_1 和点 P_2 间的距离 $\Delta l\to 0$ 时，$\varphi_1-\varphi_2=\boldsymbol{E}\cdot\Delta l\to 0$。因此，界面两侧的电位是相等的，即

$$\varphi_1=\varphi_2 \tag{7.1.13}$$

此外，由式 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_S$ 和 $\boldsymbol{D}=-\varepsilon\nabla\varphi$，可得

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\rho_S \tag{7.1.14}$$

式(7.1.13)和式(7.1.14)就是介质分界面上电位的边界条件。

若介质分界面上无自由电荷，即 $\rho_S=0$，则式(7.1.14)成为

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \tag{7.1.15}$$

在静电场中，导体内部的电场为零，导体是等位体。因此，在导体表面上，电位的边界条件为

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\rho_S \text{和}\ \varphi=\text{常数} \tag{7.1.16}$$

例 7.1 均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电位分布。

解：选择空间中的一点 o 为坐标原点，设任一点 P 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$。由式(7.1.10)可得

$$\varphi(P)-\varphi(O)=\int_P^O \boldsymbol{E}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_O^P \boldsymbol{E}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$$

由此可知，均匀电场的电位参考点不能选择为无穷远处。若选择点 O 为电位参考点，即 $\varphi(O)=0$，则

$$\varphi(P)=-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$$

在球面坐标系(r,θ,ϕ)中，取极轴与 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向一致，即 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_z E_0$，于是

$$\varphi(P)=-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{r}E_0=-E_0 r\cos\theta$$

在圆柱面坐标系(ρ,ϕ,z)中，取 x 轴与 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向一致，即 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_x E_0$，而 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_\rho\rho+\boldsymbol{e}_z z$，于是

$$\varphi(P)=-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{r}E_0=-E_0\rho\cos\phi$$

例 7.2 电偶极子的电位和电场强度。

解：真空中一对间距 l 很小的等值异号电荷 q 和 $-q$ 称为电偶极子，如图 7−1 所示。通

常把 $p=ql$ 称为电偶极子的电矩，或电偶极矩，这里规定 l 由负电荷指向正电荷。设电偶极子的中心位于坐标原点，两电荷位于 z 轴上。在球面坐标系中，空间任一点 $M(r,\theta,\phi)$ 的电位为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_+}-\frac{1}{R_-}\right]$$

其中，R_+ 和 R_- 分别为电荷 q 和 $-q$ 到场点 M 的距离，即

$$R_+ = \sqrt{r^2+(l/2)^2-rl\cos\theta}$$

$$R_- = \sqrt{r^2+(l/2)^2+rl\cos\theta}$$

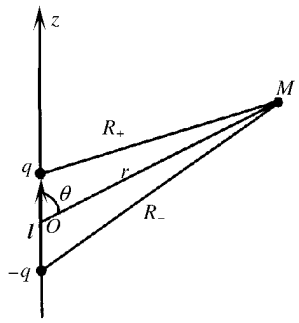


图 7－1　电偶极子

在实际中，感兴趣的是电偶极子的远区场，即场点至电偶极子中心的距离 $r \gg l$ 的情况。此时

$$\frac{1}{R_+} \approx \frac{1}{r\sqrt{1-(l/r)\cos\theta}} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{l}{2r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{R_-} \approx \frac{1}{r\sqrt{1+(l/r)\cos\theta}} \approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{l}{2r}\cos\theta\right)$$

于是得到电偶极子的远区电位

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{7.1.17}$$

应用球面坐标系中的梯度公式，可得到电偶极子的远区电场强度为

$$\boldsymbol{E}(r) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} =$$

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta) \tag{7.1.18}$$

由式(7.1.17)和式(7.1.18)可知，电偶极子的电位与距离的平方成反比，电场强度的大小与距离的三次方成反比，而且都与极角 θ 有关，但与方位角 ϕ 无关，具有轴对称性。图 7－2 是电偶极子的场图，其中实线为电力线，虚线为等位线。

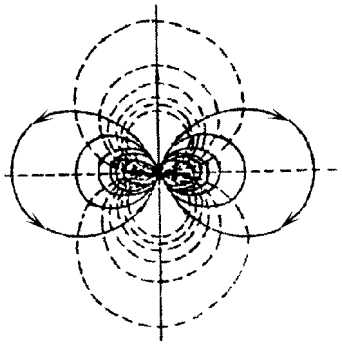


图 7－2　电偶极子的等位线和电力线

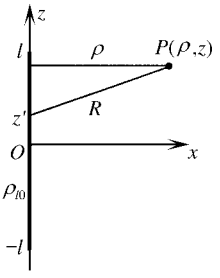


图 7－3　有限长直线电荷

例 7.3　均匀带电有限长直线的电位。

如图 7－3 所示，长度为 $2l$ 的直线段上分布着电荷线密度 ρ_{l0} 的均匀电荷，求此线电荷的电位。

解：采用圆柱面坐标系，令线电荷与 z 轴相重合，中点位于坐标原点。由于轴对称性，电位与 ϕ 无关。在带电线上位于 z' 处的线元 $\mathrm{d}l'=\mathrm{d}z'$，它到点 $P(\rho,z)$ 的距离为

$$R=\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}$$

由式(7.1.7)，得到

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\mathrm{d}z'=$$

$$\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[z'-z+\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}\right]\Big|_{-l}^{l}=$$

$$\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{\rho^2+(z-l)^2}-(z-l)}{\sqrt{\rho^2+(z+l)^2}-(z+l)}$$

在上式中若令 $l\to\infty$，则可得到无限长直线电荷的电位。当 $l\gg R$ 时，上式可写为

$$\varphi(\boldsymbol{r})\approx\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{\rho^2+l^2}+l}{\sqrt{\rho^2+l^2}-l}=$$

$$\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{\rho^2+l^2}+l}{\rho}\approx\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2l}{\rho}$$

当 $l\to\infty$ 时，上式变为无穷大，这是因为电荷不是分布在有限区域内，而将电位参考点选在无穷远点之故。这时可在上式中加上一个任意常数，则有

$$\varphi(r)=\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2l}{\rho}+C$$

并选择有限远处为电位参考点。例如，选择 $\rho=a$ 的点为电位参考点，可得到

$$C=-\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2l}{a}$$

故无限长直线电荷的电位为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{\rho}\tag{7.1.19}$$

练　习　题

7.1－1　已知 $y>0$ 的空间中没有电荷，下列几个函数中哪些是可能的电位的解？

(1) $\mathrm{e}^{-y}\cosh x$；

(2) $\mathrm{e}^{-y}\cos x$；

(3) $e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x$；

(4) $\sin x\sin y\sin z$。

7.1－2　在无限大真空中，已知电位 $\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{e}^{-r/\lambda}$，求对应的电场强度及电荷分布。

7.1－3　一个半径为 a 的半圆环上电荷均匀分布，其电荷线密度为 ρ_l，求半圆环的轴

线上的电位 $\varphi(z)$和电场强度 $\boldsymbol{E}(z)$。

7.1－4　半径为 a 的薄圆盘均匀带电，其电荷面密度为 ρ_{S0}。试求圆盘边缘上任一点 P 的电位。

7.2　恒定电场及其电位函数

7.2.1　恒定电场的基本方程

恒定电场也是电磁场的一种特殊情况，它满足的条件为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{场量}) = 0,\ \boldsymbol{J} \neq 0 \tag{7.2.1}$$

将上述条件代入麦克斯韦方程组，可得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{7.2.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.2.3}$$

可见，恒定电场所满足的方程与静电场相同，因而恒定电场具有与静电场相同的性质，也是有源无旋场。但与静电场不同的是，恒定电场是稳恒运动电荷产生的电场，它既存在于导体外部的介质中，也存在于恒定电流通过的导体内部。

在恒定电场中，由于电荷的分布不随时间变化，根据电荷守恒定律，得到恒定电流的连续性方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.2.4}$$

在导电媒质中，任一点的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与该点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间满足

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{7.2.5}$$

一般情况下，在导电媒质中存在电荷分布，而且电荷密度与电场的大小有关。所以，导电媒质中的电荷分布通常是未知的，难以由式(7.2.2)来求解导电媒质中的恒定电场。然而，由式(7.2.4)求解导电媒质中的电流分布却比较容易。因此，通常将式(7.2.3)和式(7.2.4)作为导电媒质中恒定电场的基本方程，相应的积分形式为

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{7.2.6}$$

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{7.2.7}$$

将式(7.2.5)代入式(7.2.4)，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \nabla \cdot (\sigma \boldsymbol{E}) = 0$$

由于 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$，有 $\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$，代入上式可得

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0$$

若导电媒质是均匀的，即 σ＝常数，则得

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{7.2.8}$$

由此可见，在均匀导电媒质中，电位函数满足拉普拉斯方程，与无源空间中的静电位所满

足的方程相同。

7.2.2 恒定电场的边界条件

由式(7.2.6)和式(7.2.7),可得到在两种不同导电媒质分界面上,恒定电流的边界条件为

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \tag{7.2.9}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{J}_1-\boldsymbol{J}_2)=0 \tag{7.2.10}$$

由于 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}=-\sigma\nabla\varphi$,因此,电位函数的边界条件为

$$\varphi_1=\varphi_2 \tag{7.2.11}$$

$$\sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \tag{7.2.12}$$

在两种不同导电媒质分界面上,通常存在电荷分布,其面电荷密度为

$$\rho_S=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\boldsymbol{n}\cdot(\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1-\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2)=$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\boldsymbol{J}_1-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\boldsymbol{J}_2\right)=\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)J_n \tag{7.2.13}$$

需要指出的是,由于导体内存在恒定电场,根据边界条件可知,在导体表面上的电场既有法向分量又有切向分量。电场并不垂直于导体表面,因而导体表面不是等位面。由边界条件式(7.2.9)和式(7.2.10)可导出场矢量在分界面上的折射关系,即

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{7.2.14}$$

式中 $\tan\theta_1=\dfrac{E_{1t}}{E_{1n}}$;$\tan\theta_2=\dfrac{E_{2t}}{E_{2n}}$,如图 7-4 所示。

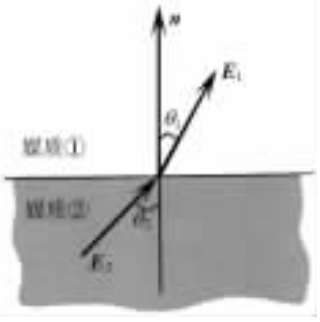


图 7-4 恒定电场的折射关系

如果媒质②是良导体,媒质①是不良导电媒质,即 $\sigma_2\gg\sigma_1$。由式(7.2.14)可知,只要 $\theta_2\neq90°$,那么,$\tan\theta_1=\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\tan\theta_2\approx0$,即 $\theta_1\approx0$。也就是说,在靠近分界面上,不良导电媒质内电力线近似与良导体表面垂直,因而可把良导体表面近似地看作为等位面。

若媒质②是导体,媒质①是理想介质($\sigma_1=0$),则由于理想介质中不存在恒定电流,即 $\boldsymbol{J}_1=0$,由式(7.2.10)可知 $J_{2n}=J_{1n}=0$,且 $E_{2n}=J_{2n}/\sigma_2=0$。这表明,在导体一侧只能存在沿切向的电流和切向的电场强度。因此,一根导线中通有恒定电流时,不论导体如何弯曲,导体中的电流线也将是同样的弯曲。

例 7.4 填充有两层介质的同轴电缆,内导体半径为 a,外导体内半径为 c,介质的分界面半径为 b。两层介质的介电常数为 ε_1 和 ε_2,电导率为 σ_1 和 σ_2。设内导体的电压为 U_0,外导体接地。求:(1)两导体之间的电流密度和电场强度分布;(2)介质分界面上的自由电荷面密度。

解:电流由内导体流向外导体,在分界面上只有法向分量,所以电流密度成轴对称分

布。可先假设电流为 I，由求出电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的表达式，然后求出 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$，再由 $U_0=\int_a^b \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_b^c \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 确定出电流 I。

(1) 设同轴电缆中单位长度的径向电流为 I，则由 $\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=I$，可得电流密度为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_\rho \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (a<\rho<c)$$

介质中的电场

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma_1}=\boldsymbol{e}_\rho \frac{I}{2\pi\sigma_1\rho} \qquad (a<\rho<b)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma_2}=\boldsymbol{e}_\rho \frac{I}{2\pi\sigma_2\rho} \qquad (b<\rho<c)$$

由于

$$U_0=\int_a^b \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_b^c \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{I}{2\pi\sigma_1}\ln\frac{b}{a}+\frac{I}{2\pi\sigma_2}\ln\frac{c}{b}$$

于是得到

$$I=\frac{2\pi\sigma_1\sigma_2U_0}{\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)}$$

故两种介质中的电流密度和电场强度分别为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_\rho \frac{\sigma_1\sigma_2U_0}{\rho[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]} \qquad (a<\rho<c)$$

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_\rho \frac{\sigma_2U_0}{\rho[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]} \qquad (a<\rho<b)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_\rho \frac{\sigma_1U_0}{\rho[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]} \qquad (b<\rho<c)$$

(2) 由 $\rho_S=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}$ 可得，介质 1 内表面的电荷面密度为

$$\rho_{S1}=-\varepsilon_1\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{E}_1\Big|_{\rho=a}=-\frac{\varepsilon_1\sigma_2U_0}{a[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]}$$

介质 2 外表面的电荷面密度为

$$\rho_{S2}=\varepsilon_2\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{E}_2\Big|_{\rho=c}=-\frac{\varepsilon_2\sigma_1U_0}{c[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]}$$

两种介质分界面上的电荷面密度为

$$\rho_{S12}=(\varepsilon_1\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{E}_1-\varepsilon_2\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{E}_2\Big|_{\rho=b}=\frac{(\varepsilon_1\sigma_2-\varepsilon_2\sigma_1)U_0}{b[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]}$$

练　习　题

7.2－1　同轴电缆的内导体半径为 a，外导体内半径为 b，其间填充有电导率为 σ 的

导电媒质。设内导体的电压为 U_0，外导体接地。求：(1)两导体之间的电流密度和电场强度分布；(2)此同轴电缆单位长度的功率损耗。

7.2－2　球形电容器的内导体半径为 a，外导体内半径为 b，其间填充有电导率为 σ 的导电媒质。设内导体的电压为 U_0，外导体接地。求两导体之间的电流密度和电场强度分布。

7.3　恒定磁场的矢量位和标量位

7.3.1　恒定磁场的矢量位

恒定磁场是由恒定电流所产生的磁场，也是电磁场的一种特殊情况。当场量不随时间变化时，由麦克斯韦方程组得到恒定磁场的基本方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.3.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.3.2}$$

因此，静磁场是无源有旋场。

1. 恒定磁场的矢量位的微分方程

根据式(7.1.1)，恒定磁场可用矢量位 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.3.3}$$

由于 $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=0$，由式(6.1.11)可知，矢量位 $\boldsymbol{A}$ 满足矢量泊松方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{7.3.4}$$

在无源区，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$，则矢量位 $\boldsymbol{A}$ 满足矢量拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.3.5}$$

在恒定磁场中，由于 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}=0$，根据洛伦兹条件(6.1.10)得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.3.6}$$

对于恒定磁场，由于 $\omega=0$，则 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=0$。由式(6.1.20)可得到，体积 V 内体密度为 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 的电流分布产生的矢量位为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{7.3.7}$$

对于面分布电流和细导线电流回路，其矢量位分别为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S' \tag{7.3.8}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\oint_C \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{7.3.9}$$

利用矢量位 $\boldsymbol{A}$ 也可以计算穿过任意曲面 S 的磁通，即

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}S = \int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7.3.10}$$

式中 C 为曲面 S 的边界。

2. 矢量位的边界条件

根据恒定磁场在不同媒质分界面上的边界条件

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S \tag{7.3.11}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{7.3.12}$$

以及 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，可得到不同媒质分界面上矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的边界条件为

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 \tag{7.3.13}$$

$$\boldsymbol{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \boldsymbol{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \boldsymbol{A}_2 \right) = \boldsymbol{J}_S \tag{7.3.14}$$

在一些特殊情况下，矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的边界条件可以得到简化：

(1) 边界面是与 z 轴平行的平面或柱面，且电流沿 z 轴方向流动，即 $\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{e}_z J_S$。在这种情况下，矢量位 $\boldsymbol{A}$ 也只有 z 轴方向的分量，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_z A_z$，则边界条件可写为

$$A_{1z} = A_{2z} \tag{7.3.15}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{1z}}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{2z}}{\partial n} = J_S \tag{7.3.16}$$

(2) 边界面是球面或圆柱面，且电流是环形流动的，即 $\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{e}_\phi J_S$，且 J_S 与坐标 ϕ 无关，则矢量位 $\boldsymbol{A}$ 也只有 ϕ 方向的分量，且与坐标 ϕ 无关，即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\phi A_\phi$。在这种情况下，边界条件可写为

$$A_{1\phi} = A_{2\phi} \tag{7.3.17}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial n}(rA_{1\phi}) - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial n}(rA_{2\phi}) \right] = J_S \tag{7.3.18}$$

例 7.5 小电流回路的远区矢量位与磁场。

如图 7－5 所示，小圆形回路的半径为 a，回路中的电流为 I。

解：采用球面坐标系，由于具有轴对称性，矢量位 $\boldsymbol{A}$ 与 ϕ 无关，为简化计算，只需求 $\phi = 0$ 平面上的矢量位与磁场。根据图 7－5，有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r r = r(\boldsymbol{e}_x \sin\theta + \boldsymbol{e}_z \cos\theta)$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{e}'_r a = a(\boldsymbol{e}_x \cos\phi' + \boldsymbol{e}_z \sin\phi')$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{e}'_\phi a \,\mathrm{d}\phi' = (-\boldsymbol{e}_x \sin\phi' + \boldsymbol{e}_y \cos\phi') a \,\mathrm{d}\phi'$$

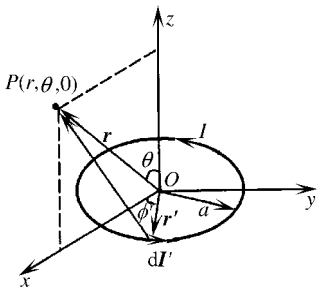


图 7－5 小圆环电流

所以

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = [(r\sin\theta - a\cos\phi')^2 + a^2 \sin^2\phi' + r^2\cos^2\theta]^{1/2} = [r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta\cos\phi']^{1/2}$$

对于远区，有 $r \gg a$，所以

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 - \frac{2a}{r}\sin\theta\cos\phi' \right]^{-1/2} \approx$$

$$\frac{1}{r}\left[1-\frac{2a}{r}\sin\theta\cos\phi'\right]^{-1/2}\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi'\right)$$

将上述表达式代入式(7.3.9),得到

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi'\right)\cdot(-\boldsymbol{e}_x\sin\phi'+\boldsymbol{e}_y\cos\phi')\mathrm{d}\phi'=$$

$$\boldsymbol{e}_y\frac{\mu_0 I\pi a^2}{4\pi r^2}\sin\theta$$

由于在 $\phi=0$ 面上 $\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_\phi$,所以上式可写成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I\pi a^2}{4\pi r^2}\sin\theta=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 IS}{4\pi r^2}\sin\theta \tag{7.3.19}$$

式中,$S=\pi a^2$ 是小圆环的面积。

利用球面坐标系中旋度的计算公式,可得到载流小圆环的远区磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)=$$

$$\frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3}(\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta) \tag{7.3.20}$$

由上式可见,载流小圆环的远区磁场分布与电偶极子的远区电场分布相似,图 7-6 是其 $\boldsymbol{B}$ 线分布。因此,又把载流小圆环看作为磁偶极子,并把 IS 称为磁偶极子的磁矩,或磁偶极矩,表示为

$$\boldsymbol{p}_m=I\boldsymbol{S} \tag{7.3.21}$$

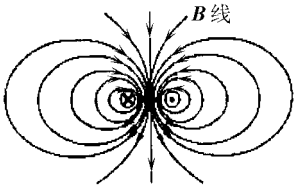


图 7-6 磁偶极子的 $\boldsymbol{B}$ 线

式(7.3.19)又可写成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^2}\sin\theta \tag{7.3.22}$$

或

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{r} \tag{7.3.23}$$

式(7.3.20)可写成

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3}(\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta) \tag{7.3.24}$$

例 7.6 有一电流分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_z\rho J_0(\rho\leqslant a)$,求矢量位 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$和磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$。

解:由于电流只有 $\boldsymbol{e}_z$ 分量,且仅为 ρ 的函数,故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$也只有 $\boldsymbol{e}_z$ 分量,且仅为 ρ 的函数,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}_z A_z(\rho)$。在圆柱坐标系中,由 $A_z(\rho)$满足的一维微分方程和边界条件,即可求解出 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$,然后由 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$可求出 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$。

记 $\rho\leqslant a$ 和 $\rho\geqslant a$ 的矢量磁位分别为 $\boldsymbol{A}_1(r)$和 $\boldsymbol{A}_2(r)$。由于在 $\rho\geqslant a$ 时电流为零,所以

$$\nabla^2 A_{z1}(\rho)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_{z1}}{\partial\rho}\right)=-\mu_0 J_0\rho\qquad(\rho\leqslant a)$$

$$\nabla^2 A_{z2}(\rho)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_{z2}}{\partial\rho}\right)=0\qquad(\rho\geqslant a)$$

由此可解得

$$A_{z1}(\rho) = -\frac{1}{9}\mu_0 J_0 \rho^3 + C_1 \ln\rho + D_1$$

$$A_{z2}(\rho) = C_2 \ln\rho + D_2$$

$A_{z1}(\rho)$和 $A_{z2}(\rho)$满足的边界条件为

① $\rho \to 0$ 时，$A_{z1}(\rho)$为有限值。

② $\rho = a$ 时，$A_{z1}(a) = A_{z2}(a)$，$\left.\frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \left.\frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho}\right|_{\rho=a}$

由条件①、②，有

$$C_1 = 0$$

$$-\frac{1}{9}\mu_0 J_0 a^3 = C_2 \ln a + D_2$$

$$-\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^2 = C_2 \frac{1}{a}$$

由此可解得

$$C_2 = -\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3$$

$$D_2 = -\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3 \left(\frac{1}{3} - \ln a\right)$$

故

$$A_{z1}(\rho) = -\frac{1}{9}\mu_0 J_0 \rho^3 + D_1$$

$$A_{z2}(\rho) = -\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3 \ln\rho - \frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3 \left(\frac{1}{3} - \ln a\right)$$

式中，常数 D_1 由参考点确定，若令 $\rho = 0$ 时，$A_{z1}(\rho) = 0$，则有 $D_1 = 0$。

空间的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_1(\rho) = \nabla \times \boldsymbol{A}_1(\rho) = \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{3}\mu_0 J_0 \rho^2 \qquad (\rho < a)$$

$$\boldsymbol{B}_2(\rho) = \nabla \times \boldsymbol{A}_2(\rho) = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\mu_0 J_0 a^3}{3\rho} \qquad (\rho < a)$$

7.3.2* 静磁场的标量磁位及其微分方程

前面已经指出，在一般的情况下，恒定磁场只能用矢量位 $\boldsymbol{A}$ 来描述。但是由于矢量位是一个矢量，求解起来往往很复杂。因此，在某些情况下可以考虑用标量磁位来描述磁场。

1. 标量磁位 φ_m 及其微分方程

若在所研究的空间中没有自由电流，即 $\boldsymbol{J} = 0$。那么，在此空间中，有 $\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$。因此，可以把 $\boldsymbol{H}$ 用一个标量函数的梯度来表示，即

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_m \tag{7.3.25}$$

式中，φ_m 称为标量磁位。

将 $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$ 和 $\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m$ 代入 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\mu_0(\nabla\cdot\boldsymbol{H}+\nabla\cdot\boldsymbol{M})=-\mu_0\nabla\cdot\nabla\varphi_m+\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M}=0$$

由此可得到 φ_m 满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0} \tag{7.3.26}$$

式中

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M} \tag{7.3.27}$$

称为磁介质体内的等效磁荷体密度。方程的一个特解为

$$\varphi_m(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\mu_0}\int_V\frac{\rho_m(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{7.3.28}$$

在均匀媒质中 $\nabla\cdot\boldsymbol{M}=0$，即 $\rho_m=0$。因此，φ_m 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi_m=0 \tag{7.3.29}$$

2. 标量磁位 φ_m 的边界条件

在两种不同媒质的分界面上，由 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0$ 和 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0$，可得到标量磁位 φ_m 的边界条件为

$$\varphi_{m1}=\varphi_{m2} \tag{7.3.30}$$

$$\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n} \tag{7.3.31}$$

此外，由 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0$ 及 $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$，又可将式(7.3.31)改写为

$$\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=-\rho_{mS} \tag{7.3.32}$$

式中

$$\rho_{mS}=-\mu_0\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1) \tag{7.3.33}$$

称为介质分界面上的等效磁荷面密度。

例 7.7 半径为 a、长为 l 的圆柱永磁体，沿轴向均匀磁化，其磁化强度为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{e}_zM_0$，如图 7－7 所示。求远区场的磁感应强度。

解：这是由永磁体所产生磁场的问题，可用等效磁荷来求磁场。因 $\boldsymbol{M}$ 是常矢量，$\rho_m=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}=0$。在永磁体的上下端面上有面磁荷分布：$\rho_{mS上}=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_z=M_0$，$\rho_{mS下}=-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_z=-M_0$，但在侧面上 $\rho_{mS}=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_\rho=0$。求远区磁场时，由于 $r\gg l$，可近似认为等效磁荷分别集中在上、下端面的中心，总磁荷分别为

$$q_{m上}=\pi a^2\rho_{mS上}=\pi a^2M_0$$

$$q_{m下}=\pi a^2\rho_{mS下}=-\pi a^2M_0$$

由磁荷 $q_{m上}$ 和 $q_{m下}$ 产生的标量磁位为

$$\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{q_{m上}}{R_1}+\frac{q_{m下}}{R_2}\right)$$

其中

$$R_1 = [r^2 + (l/2)^2 - rl\cos\theta]^{1/2}$$

$$R_2 = [r^2 + (l/2)^2 + rl\cos\theta]^{1/2}$$

对于远区磁场，$r \gg l$，则有

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{l}{2r^2}\cos\theta$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} - \frac{l}{2r^2}\cos\theta$$

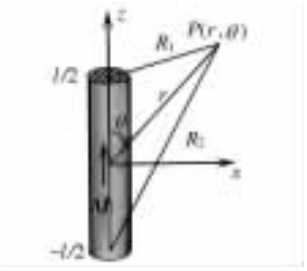


图 7－7　均匀磁化圆柱

故得

$$\varphi_m = \frac{a^2 M_0 l}{4r^2}\cos\theta$$

$$\boldsymbol{B} = -\mu_0 \nabla\varphi_m = -\frac{\mu_0 M_0 l a^2}{4}\nabla\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) =$$

$$\frac{\mu_0 M_0 l a^2}{4r^3}(\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta + \boldsymbol{e}_\theta \sin\theta)$$

练　习　题

7.3－1　在某一场域内，如果矢量磁位 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x 5x^3$，试求电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的分布。

7.3－2　在恒定磁场中，已知矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 在圆柱坐标系中的表达式为

$$A_x = \begin{cases} -\dfrac{\mu I}{4\pi\rho_0^2}\rho^2 & \rho \leqslant \rho_0 \\ \dfrac{\mu I}{2\pi}\left(\ln\dfrac{\rho}{\rho_0} - \dfrac{1}{2}\right) & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

试求磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的分布。

7.3－3　半径为 a 磁介质球，具有磁化强度为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}_z(Az^2 + B)$$

其中 A 和 B 为常数，求等效磁荷密度 ρ_m 和 ρ_{mS}。

7.4　电容与部分电容

7.4.1　电容

在静电场中，达到静电平衡时，导体是等位体。导体内部没有电荷，电荷只能分布在导体的表面上，且各点的电荷面密度 ρ_S 取决于导体表面的形状。假设一个孤立导体带电荷为 q，所产生的电位为 φ。若将导体上的总电荷增加 k 倍，则导体表面上各点的电荷面密度 ρ_S 也将增加 k 倍。由式(7.1.6)可知，导体的电位也将增加 k 倍，也就是说一个孤立导体的电位与它所带的总电荷成正比。我们把一个孤立导体所带的总电荷 q 与它的电位 φ 之比

$$C = \frac{q}{\varphi} \tag{7.4.1}$$

称为孤立导体的电容。

电容器是由两个导体构成的导体系统。当两导体之间加电压 U 时，一个导体带电荷为 $+q$，而另一个导体则带电荷 $-q$。电荷量 q 与两导体之间的电压 U 也成正比，我们把比值

$$C = \frac{q}{U} \tag{7.4.2}$$

称为电容器的电容。

电容是导体系统的一种物理属性，它只与导体的形状、尺寸、相互位置以及导体周围的介质有关，而与导体的电位和所带的电荷无关。

例 7.8 如图 7－8 所示的平行双线传输线，导线的半径为 a，两导线的轴线相距为 D，且 $D \gg a$。试求传输线单位长度的电容。

解：设两导线单位长度带电量分别为 $+\rho_l$ 和 $-\rho_l$。由于 $D \gg a$，在计算导线外的电场时，可近似地认为电荷是均匀分布在导线表面上。应用高斯定律和叠加原理，可得到两导线间的平面上任一点 P 的电场为

$$\boldsymbol{E}(x) = \frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)\boldsymbol{e}_x$$

两导线间的电压

$$U = \int_a^{D-a} \boldsymbol{E}(x) \cdot \boldsymbol{e}_x \mathrm{d}x = \frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D-a}{a}$$

于是得到平行双线传输线单位长度的电容为

$$C_1 = \frac{\rho_1}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{D-a}{a}} \approx \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{D}{a}}$$

例 7.9 计算同轴线单位长度的电容。

如图 7－9 所示，同轴线的内导体半径为 a，外导体的内半径为 b，内外导体间填充介电常数为 ε 的均匀电介质。

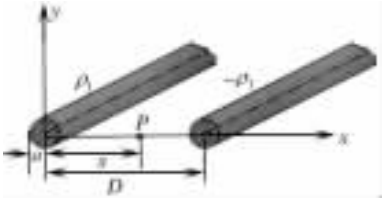


图 7－8　平行双线传输线

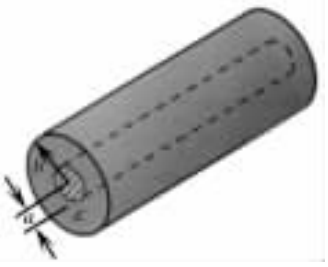


图 7－9　同轴线

解：设同轴线的内、外导体单位长度带电量分别为 ρ_1 和 $-\rho_1$，应用高斯定律，可得到内外导体间的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\rho) = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon\rho}$$

则内外导体间的电压为

$$U = \int_a^b \boldsymbol{E}(\rho) \cdot \boldsymbol{e}_\rho \mathrm{d}\rho = \frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho = \frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

故同轴线单位长度的电容为

$$C_1 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln b/a}$$

7.4.2 电介质击穿

电容器的性能规格不仅包括它的电容值，还有它所能承受的最大电压。电场使电容器中的电介质材料极化，如果电场很强，将把介质中的电子完全拉离分子，形成自由电子，使电介质成为导体，这种现象称为电介质击穿。电介质材料所能承受的最大电场强度，称为电介质的击穿场强或电介质强度。当电容器中的电场强度超过其电介质强度时，电介质被击穿，电容器发生短路或烧毁。

例 7.10 有一根同轴电缆，内导体半径 $a=1\mathrm{cm}$，外导体的内半径为 $b=1.8\mathrm{cm}$，内外导体间填充有两层不同的均匀电介质，其分界面半径 $c=1.5\mathrm{cm}$，如图 7－10 所示。内层电介质是 $\varepsilon_1=2.7\varepsilon_0$ 的聚苯乙烯，外层电介质是 $\varepsilon_2=4\varepsilon_0$ 的油纸。已知聚苯乙烯和油纸的电介质强度分别为 $E_{1M}=2\times10^5\,\mathrm{V/cm}$ 和 $E_{2M}=1.5\times10^5\,\mathrm{V/cm}$。当内外导体间的电压逐渐升高时，哪层电介质先被击穿？这根电缆能承受的最高电压是多少？

解：设同轴电缆的内、外导体单位长度带电量分别为 ρ_1 和 $-\rho_1$，应用高斯定律，可得到内外导体间的电场强度。在介质 1 中，电场强度为

$$\boldsymbol{E}_1(\rho) = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_1\rho} \qquad (a < \rho < c)$$

在介质 2 中，电场强度为

$$\boldsymbol{E}_2(\rho) = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_2\rho} \qquad (c < \rho < b)$$



不同介质的同轴电缆

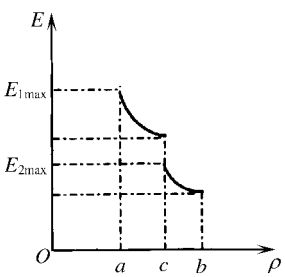


图 7－11 同轴电缆中 E 的变化曲线

图 7－11 是 E_1 和 E_2 随 ρ 变化的曲线，可以看出，两层电介质都是在各自内表面上电场强度最大。在介质 1 中，最大电场强度为

$$E_{1\max}=\frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_1 a}$$

在介质 2 中，最大电场强度为

$$E_{2\max}=\frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_2 a}$$

于是有

$$\frac{E_{1\max}}{E_{2\max}}=\frac{\varepsilon_2 c}{\varepsilon_1 a}=2.22$$

又由于

$$\frac{E_{1M}}{E_{2M}}=1.33$$

因此

$$\frac{E_{1\max}}{E_{2\max}}>\frac{E_{1M}}{E_{2M}} \quad \text{或} \quad \frac{E_{1\max}}{E_{1M}}>\frac{E_{2\max}}{E_{2M}}$$

由此可见，随着内外导体间的电压逐渐升高，$E_{1\max}$ 先达到电介质强度 E_{1M}，所以内层电介质先被击穿。

当 $E_{1\max}$ 达到电介质强度 E_{1M} 时，有

$$\rho_{lM}=2\pi\varepsilon_1 a E_{1M}$$

因此，这根电缆所能承受的最高电压为

$$U_{\max}=\int_a^c \frac{\rho_{lM}}{2\pi\varepsilon_1\rho}\mathrm{d}\rho+\int_c^b \frac{\rho_{lM}}{2\pi\varepsilon_2\rho}\mathrm{d}\rho=$$

$$aE_{1M}\left(\ln\frac{c}{a}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{b}{c}\right)=1.06\times10^5\ \mathrm{V}$$

7.4.3* 部分电容

在实际工作中，经常遇到由三个或更多的导体组成的多导体系统。在多导体系统中，任何两个导体间的电压都要受到其余导体上的电荷的影响。因此，研究多导体系统时，必须把电容的概念加以推广，引入部分电容的概念。

1. 电位系数

在由 N 个位置、形状及周围介质不变的导体组成的系统中，每一个导体的电位（电位参考点为大地或无穷远处）不仅与自身所带的电荷有关，而且与其它各导体所带的电荷有关。由于电位与各导体所带的电荷之间成线性关系，所以，各导体的电位为

$$\varphi_i=\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}q_j \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{7.4.3}$$

式中 $\alpha_{ij}(i,j=1,2,\cdots,N)$ 称为电位系数。下标相同的 α_{ii} 称为自电位系数，下标不同的 α_{ij} $(i\neq j)$ 称为互电位系数。电位系数 α_{ij} 具有以下特点：

(1) α_{ij} 在数值上等于第 j 个导体上的总电量为一个单位、而其余导体上的总电量都

为零时，第 i 个导体上的电位，即

$$\alpha_{ij} = \left.\frac{\varphi_i}{q_j}\right|_{q_1=\cdots=q_{j-1}=q_{j+1}\cdots=q_N=0} \quad (i,j=1,2,\cdots,N) \tag{7.4.4}$$

(2) α_{ij} 只与各导体的形状、尺寸、相互位置以及导体周围的介质参数有关，而与各导体的电位和带电量无关；

(3) 所有电位系数 $\alpha_{ij}>0$，且具有对称性，即 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$。

2. 电容系数

若已知各导体的电位，从式(7.4.3)可解出各导体的电量，得到

$$q_i = \sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}\varphi_j \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{7.4.5}$$

式中，β_{ij} 称为电容系数或感应系数。下标相同的系数 $\beta_{ii}(i=1,2,\cdots,N)$ 称为自电容系数或自感应系数；下标不同的系数 $\beta_{ij}(i\neq j)$ 称为互电容系数或互感应系数。电容系数 β_{ij} 具有以下特点：

(1) β_{ij} 在数值上等于第 j 个导体的电位为一个单位、而其余导体接地时，第 i 个导体上的电量，即

$$\beta_i = \left.\frac{q_i}{\varphi_j}\right|_{\varphi_1=\cdots=\varphi_{j-1}=\varphi_{j+1}\cdots=\varphi_N=0} \quad (i,j=1,2,\cdots,N) \tag{7.4.6}$$

(2) β_{ij} 只与各导体的形状、尺寸、相互位置以及导体周围的介质参数有关，而与各导体的电位和带电量无关；

(3) β_{ij} 具有对称性，即 $\beta_{ij}=\beta_{ji}$；互电容系数 $\beta_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$，自电容系数 $\beta_{jj}>0$；

(4) 电容系数 β_{ij} 与电位系数 α_{ij} 的关系为

$$\beta_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{M_{ij}}{\Delta}$$

式中 Δ 是方程组(7.4.3)的电位系数 α_{ij} 组成的行列式 $|\alpha_{ij}|$，M_{ij} 是行列式 $|\alpha_{ij}|$ 的余子式。

3. 部分电容

为了引入部分电容的概念，将式(7.4.5)改写为

$$q_i = \sum_{j=1}^{N}(\beta_{ij}\varphi_j-\beta_{ij}\varphi_i+\beta_{ij}\varphi_i) = -\sum_{j\neq i}^{N}\beta_{ij}(\varphi_i-\varphi_j)+\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}\varphi_i =$$

$$\sum_{j\neq i}^{N}C_{ij}(\varphi_i-\varphi_j)+C_{ii}\varphi_i \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{7.4.7}$$

式中

$$C_{ij} = -\beta_{ij} \quad (i\neq j) \tag{7.4.8}$$

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^{N}\beta_{ij} \tag{7.4.9}$$

由式(7.4.7)可知，任何一个导体上的电荷都是由 N 部分电荷量组成，其中 $q_{ii}=C_{ii}\varphi_i$ 与导体 i 的电位 φ_i 成正比，比值 $C_{ii}=\frac{q_{ii}}{\varphi_i}$ 是导体 i 与地之间的部分电容，称为导体 i 的自有部

分电容；$q_{ij}=C_{ij}(\varphi_i-\varphi_j)(i\neq j)$与导体 i 和导体 j 之间的电位差成正比，比值 $C_{ij}=\dfrac{q_{ii}}{\varphi_i-\varphi_j}$ $(i\neq j)$是导体 i 与导体 j 之间的部分电容，称为导体 i 与导体 j 间的互有部分电容。部分电容有如下特点：

(1) C_{ii}在数值上等于全部导体的电位都为一个单位时，第 i 个导体上总电荷的大小；

(2) $C_{ij}(i\neq j)$在数值上等于第 j 个导体上的电位为一个单位、其余导体都接地时，第 i 个导体上感应电荷的大小；

(3) 所有部分电容都大于零，即 $C_{ij}>0$；

(4) 部分电容具有对称性，即 $C_{ij}=C_{ji}$。

由 N 个导体构成的系统共有 $N(N-1)$个部分电容，这些部分电容形成一个电容网络，图 7－12 示出三个导体及其与大地的部分电容。

例 7.11 如图 7－13(a)所示的对称三芯电缆。当三根芯线用细导线连接在一起时，测得它与外壳的电容为 0.054μF；当其中两根芯线与外壳相连接时，测得另一根芯线与外壳的电容为 0.036μF。试求各部分电容。

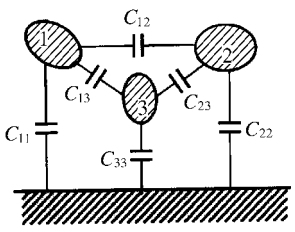


图 7－12 三个导体与地的部分电容

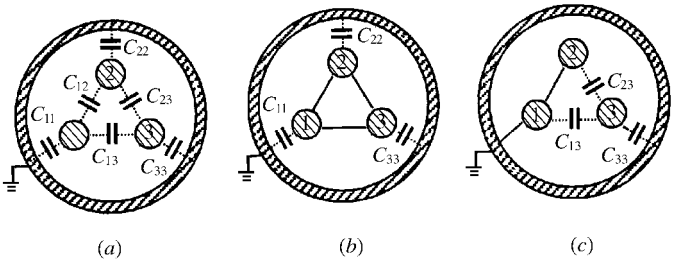


图 7－13 三芯电缆的部分电容

解：三芯电缆是由四个导体构成的系统，有六个部分电容。由于对称性，有

$$\begin{cases}C_{11}=C_{22}=C_{33}\\ C_{12}=C_{23}=C_{13}\end{cases}$$

当三根芯线用细导线连接在一起时，它与外壳之间等效为 C_{11}、C_{22}和 C_{33}与外壳形成的并联电容网络，如图 7－13(b)所示，所以

$$C_{11}+C_{22}+C_{33}=0.054\mu\text{F}$$

由此得到

$$C_{11}=C_{22}=C_{33}=0.018\mu\text{F}$$

当导体 1 和 2 与外壳连接在一起时，导体 3 与外壳之间等效为 C_{13}、C_{23}和 C_{33}与外壳形成的并联电容网络，如图 7－13(c)所示，所以

$$C_{13}+C_{23}+C_{33}=0.036\mu\text{F}$$

由此得到

$$C_{13}=C_{23}=C_{12}=\frac{0.036-C_{33}}{2}=0.009\mu\text{F}$$

7.4.4 静电屏蔽

在工程上，常常把不可受外界电场影响的设备或不希望去影响外界的设备用一个接地金属壳罩起来，以隔绝有害的静电影响，这就是静电屏蔽作用。应用部分电容可以说明静电屏蔽作用。设有如图 7－14 所示的三导体系统，导体 0 接地，导体 1 被导体 0 完全包围。由式(7.4.7)，应有

$$q_1 = C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{11}\varphi_1 \qquad (7.4.10)$$

$$q_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\varphi_2 \qquad (7.4.11)$$

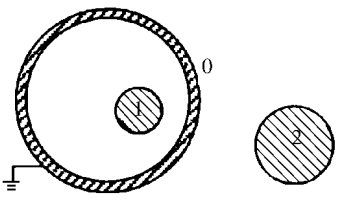


图 7－14　静电屏蔽

令 $q_1 = 0$，这时导体 0 内无电场，所以 $\varphi_1 = 0$。由式(7.4.10)，可得到 $C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$，但 $\varphi_1 - \varphi_2 = -\varphi_2 \neq 0$，故必有 $C_{12} = 0$。因此，在导体 0 接地的情况下，有

$$q_1 = C_{11}\varphi_1$$

$$q_2 = C_{22}\varphi_2$$

即 q_1 只与 φ_1 有关，q_2 只与 φ_2 有关，这表明导体 1 与导体 2 之间无静电联系，起到了静电屏蔽作用。

练　习　题

7.4－1　半径为 a 的导体球的表面上有一层厚度为 d、介电常数为 ε 的均匀介质球壳，求此导体球的电容。

7.4－2　两个半径均为 $a = 1\text{cm}$ 的小球，位于空气中，相距为 $D = 20\text{cm}$。

(1) 若已知 $\varphi_1 = 1\text{V}$，$\varphi_2 = 2\text{V}$，求 q_1 和 q_2；

(2) 若已知 $\varphi_1 = 1\text{V}$，$q_2 = 10^{-6}\text{C}$，求 q_1 和 q_2；

(3) 欲使小球 2 带电荷 $q_2 = 10^{-8}\text{C}$，小球 1 不带电荷，问该采用什么方法？

7.5　电　阻

7.5.1　电阻

工程上常常需要计算两电极之间填充的导电媒质的电阻，这是恒定电场的一个重要问题。在导电媒质中，电流 I 从一个电极流向另一个电极，我们把两电极间的导电媒质中的电流 I 与两电极的电压 U 之比称为电导，即

$$G = \frac{I}{U} \qquad (7.5.1)$$

电导的倒数即为电阻 R，即

$$R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I} \qquad (7.5.2)$$

对于形状较为规则的导电媒质，可先假设两电极间流过的电流 I，然后按 $I \rightarrow \boldsymbol{J} \rightarrow \boldsymbol{E} \rightarrow$

$U \to R$ 的步骤求得电阻。也可先假设两电极的电压 U，然后按 $U \to \phi \to \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{J} \to I \to R$ 的步骤求得电阻。

例 7.12 同轴电缆的内导体半径为 a，外导体的内半径为 b。内、外导体之间填充有导电媒质，其电导率为 σ，如图 7－15 所示。求同轴电缆单位长度的漏电阻。

解：在每单位长度的同轴电缆上，设由内导体流向外导体的径向电流为 I。由于具有轴对称性，所以内、外导体之间电流密度为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}_\rho \frac{I}{2\pi\rho}$$

由 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，得到电场强度

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} = \boldsymbol{e}_\rho \frac{I}{2\pi\sigma\rho}$$

所以内、外导体之间电压为

$$U = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} = \int_a^b \frac{I}{2\pi\sigma\rho}\mathrm{d}\rho = \frac{I}{2\pi\sigma}\ln\frac{b}{a}$$

故同轴电缆单位长度的漏电阻为

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma}\ln\frac{b}{a}$$

例 7.13 在一块厚度为 h 的导电板上，由两个半径为 r_1 和 r_2 的圆弧和夹角为 ϕ_0 的两半径割出的一段环形导电媒质，如图 7－16 所示。计算沿 ϕ 方向的两电极之间的电阻。设导电媒质的电导率为 σ。

解：设在沿 ϕ 方向的两电极之间外加电压 U_0，则电流沿 ϕ 方向流动，而且电流密度是随 ρ 变化的。但容易判定电位 φ 只是变量 ϕ 的函数，因此电位函数 φ 满足一维拉普拉斯方程：

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0 \qquad (0 < \phi < \phi_0)$$



质的同轴电缆的横截面

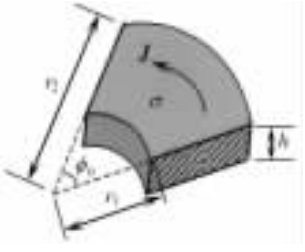


图 7－16 环形导电媒质块

由此可解得

$$\varphi = C_1\phi + C_2$$

由 $\varphi\big|_{\phi=0} = U_0$ 和 $\varphi\big|_{\phi=\phi_0} = 0$，可以得到

$$C_1 = -U_0/\phi_0, \quad C_2 = U_0$$

所以电位函数

$$\varphi = U_0 - \frac{U_0}{\phi_0}\phi \quad (0 < \phi < \phi_0)$$

电流密度为

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} = -\sigma \nabla \varphi = -\boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \phi} = \boldsymbol{e}_\phi \frac{U_0}{\rho \phi_0}$$

两电极间的电流

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{e}_\phi \mathrm{d}S = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma U_0}{\phi_0 \rho} h \, \mathrm{d}\rho = \frac{\sigma h U_0}{\phi_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故得到沿 ϕ 方向的两电极之间的电阻为

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{\phi_0}{\sigma h \ln(r_2/r_1)}$$

7.5.2 接地电阻

在电子与电气工程中，为了保障人员和设备的安全，要求电子设备与大地有良好的电接触。为此，通常将设备通过导线与埋入地下的金属体连接，这种埋入地下的导体系统称为接地器。电流经接地器流散到大地中所遇到的电阻称为接地电阻，它包括导线与接地器本身的电阻、接地器与大地的接触电阻，以及两个接地器之间的土壤的电阻和接地器到无限远处的大地电阻。其中前三部分的电阻值通常比最后部分要小得多，因此，这里所讨论的接地电阻主要是大地电阻。

计算接地电阻时，必须研究大地中的电流分布。电流经接地器流散到大地时，在接地器周围的电流密度最大，所遇到的接地电阻也就主要集中在接地器附近。因此，当接地器深埋入地下时，可以不考虑大地表面对接地电阻的影响。

例 7.14　球形接地器的接地电阻。

一半径为 a 的金属导体球，深埋入地下，如图 7－17 所示。设土壤的电导率为 σ，求接地电阻。

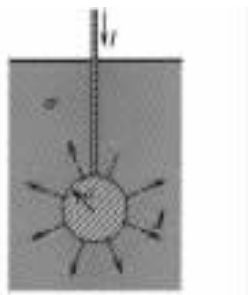


图 7－17　深埋球形接地器

解：由于金属导体球深埋入地下，可以不考虑大地表面对接地电阻的影响。设经接地器流散到大地中的电流为 I，则大地中任一点的电流密度为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{e}_r \frac{I}{4\pi r^2}$$

电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} = \boldsymbol{e}_r \frac{I}{4\pi\sigma r^2}$$

接地器至无限远处的电压为

$$U = \int_a^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_a^\infty \frac{1}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{I}{4\pi\sigma a}$$

由此得到接地电阻为

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma a}$$

为了使设备与大地有良好的电接触，要求接地电阻愈小愈好。从上式可以看出，增大接地器的表面积和在接地器附近的土壤中渗入电导率高的物质，都可以减小接地电阻。

7.5.3 电阻率法测井

在进行石油勘探中，当一口井钻到一定深度时，必须将探测仪放入井中进行测井。根据探测到的一系列数据，估计油层中的石油储量。

电阻率法测井是一种最基本的测井方法，使用的测井仪器是一种测量井壁周围的电阻率的探测器。因为含油层的地质结构通常是由多孔的砂岩组成，孔中流动的液体通常为导电性良好的盐水或电阻率很高的石油。因此，当探测器通过含油层时会出现很高的电阻率读数。下面介绍电阻率探测器测井的基本工作原理。

如图 7－18 所示，恒定电流通过绝缘电缆从地面输送到电极 A 上，整个大地作为电流返回的电极。为简化分析，设井中流体的电阻率与井壁的电阻率相同，这样可认为电极 A 是放在无限大的均匀导电媒质中。因此，电极 A 周围的电位函数为

$$\varphi(r)=\frac{I}{4\pi\sigma r}$$

式中，r 为球坐标变量；σ 为媒质的电导率。设电极 B 距电极 A 为 d，则电极 B 上的电位为

$$\varphi_B=\frac{I}{4\pi\sigma d}$$

测出电极 B 的电压，即可得出媒质的电导率为

$$\sigma=\frac{I}{4\pi d\varphi_B}$$

其电阻率为

$$\rho_R=\frac{1}{\sigma}=4\pi\mathrm{d}\,\frac{\varphi_B}{I}$$

将此电阻率作为井深的函数记录下来，电阻率的尖峰值所对应的井深处即为油气层。图 7－19 是某一油井的电阻率随井深变化的记录曲线，它表明在 1540m 深处为油气层。

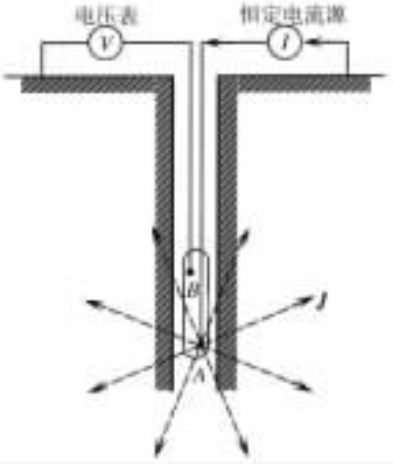


图 7－18　电阻率探测器测井原理

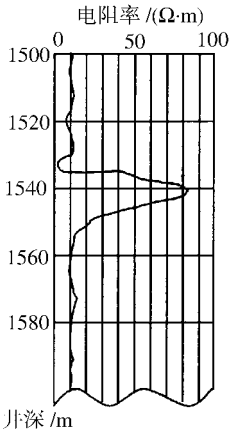


图 7－19　电阻率随井深变化的曲线

练 习 题

7.5－1 如图 7－16 所示的电阻片，求：(1)沿厚度方向的电阻；(2)两圆弧面间的电阻。

7.5－2 一半径为 0.5m 的导体球当作接地电极深埋地下，土壤的电导率为 10^{-2}S/m，求此接地器的接地电阻。

7.6 电 感

在各向同性的线性媒质中，电流回路在空间产生的磁场与回路中的电流成正比。因此，穿过回路的磁通量也与回路中的电流成正比。在恒定磁场中，把穿过回路的磁通量与回路中的电流的比值称为电感系数，简称电感。电感可分为自感和互感。

7.6.1 自感

设回路 C 中的电流为 I，所产生的磁场与回路 C 交链的自感磁链为 Ψ，则磁链 Ψ 与回路 C 中的电流 I 有正比关系，其比值

$$L = \frac{\Psi}{I} \tag{7.6.1}$$

称为回路 C 的自感系数，简称自感。在 SI 中，自感的单位为 H(亨)。自感仅与回路的几何形状、尺寸及周围媒质的磁导率有关，而与回路中电流的大小无关。

在计算粗导体回路的自感时，通常将自感表示为内自感 L_i 与外自感 L_o 之和。导体内部的磁场仅与部分电流相交链，相应的磁链称为内磁链，用 Ψ_i 表示，则内自感为

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} \tag{7.6.2}$$

完全在导体外部闭合的磁链称为外磁链，用 Ψ_o 表示，则外自感为

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} \tag{7.6.3}$$

回路的总自感 L 则为

$$L = L_i + L_o \tag{7.6.4}$$

例 7.15 同轴电缆单位长度的自感。

如图 7－20 所示，同轴电缆的内导体半径为 a，外导体的厚度可忽略不计，其半径为 b，构成电缆的所有材料的磁导率均为 μ_0。

解：设电缆中的电流为 I，根据安培环路定律，可得到内导体中的磁感应强度为

$$B_i = \frac{\mu_0}{2\pi\rho}\frac{\pi\rho^2}{\pi a^2}I = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2} \qquad (\rho < a)$$

穿过由轴向为单位长度、宽为 $\mathrm{d}\rho$ 构成的矩形面积元 $\mathrm{d}S = 1 \cdot \mathrm{d}\rho$ 的磁通为

$$\mathrm{d}\Phi_i = B_i \mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\mathrm{d}\rho$$

由于与 $\mathrm{d}\Phi_i$ 相交链的电流不是 I，而是 I 的一部分，即

$$I' = \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} I$$

所以，与 $\mathrm{d}\Phi_i$ 相应的磁链为

$$\mathrm{d}\Psi_i = \frac{I'}{I}\mathrm{d}\Phi_i = B_i \mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I\rho^3}{2\pi a^4}\mathrm{d}\rho$$

内导体中单位长度的自感磁链总量为

$$\Psi_i = \int \mathrm{d}\Psi_i = \int_0^a \frac{\mu_0 I\rho^3}{2\pi a^4}\mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

由此得到单位长度的内自感为

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

在内外导体之间，由安培环路定律，可得到磁感应强度为

$$B_o = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \qquad (a < \rho < b)$$

此时

$$\mathrm{d}\Psi_o = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathrm{d}\rho$$

$$\Psi_o = \int \mathrm{d}\Psi_o = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

由此得到单位长度的外自感为

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

故同轴电缆单位长度的自感为

$$L = L_i + L_o = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

例 7.16 如图 7－21 所示的平行双线传输线，导线的半径为 a，两导线的轴线相距为 D，且 $D \gg a$。试求传输线单位长度的电感。



图 7－20 同轴电缆的横截面

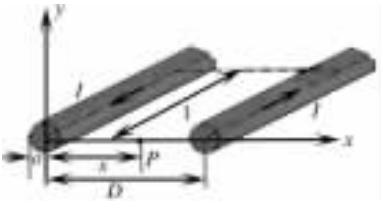


图 7－21 平行双线传输线

解：设两导线中分别流过大小相同、方向相反的电流 I。由于 $D \gg a$，在计算导线外的磁场时，可近似地认为电流均匀分布在导线中。应用安培环路定理和叠加原理，可得到两导线间的平面上任一点 P 的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)\boldsymbol{e}_y$$

穿过两导线之间轴线方向为单位长度的面积的外磁链为

$$\boldsymbol{\Psi}_o = \int_a^{D-a} \boldsymbol{B}(x) \cdot \boldsymbol{e}_y \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}$$

于是得到平行双线传输线单位长度的外自感为

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D-a}{a} \approx \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$$

两根导体单位长度的内自感为

$$L_i = 2 \times \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

故平行双线传输线单位长度的电感为

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$$

7.6.2 互感

如图 7－22 所示，两个彼此靠近的回路 C_1 和 C_2，回路 C_1 中的电流 I_1 产生的磁场与回路 C_2 交链的磁通量 Ψ_{21}，称为回路 C_1 与回路 C_2 间的互感磁通。比值

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \tag{7.6.5}$$

称为回路 C_1 对回路 C_2 的互感系数，简称互感。同理，回路 C_2 对回路 C_1 的互感为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \tag{7.6.6}$$

互感具有以下特点：

（1）互感只与回路的几何形状、尺寸、两回路的相对位置以及周围磁介质有关，而与回路中的电流无关。

（2）互感具有互易关系，即 $M_{21} = M_{12}$。因而，可略去下标，用 M 表示两回路间的互感。

（3）当与回路交链的互感磁通与自感磁通具有相同的符号时，互感系数 M 为正值；反之，则互感系数 M 为负值。

例 7.17 如图 7－23 所示，长直导线与三角形导体回路共面，求它们之间的互感。

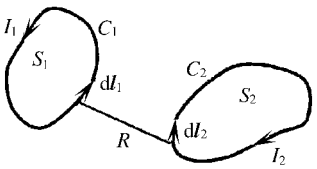


图 7－22　回路 C_1 和 C_2

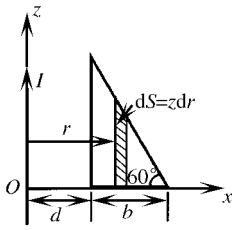


图 7－23　长直导线与三角形回路

解：设长直导线中通过的电流为 I，根据安培环路定律，得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_{\phi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

穿过三角形回路面积的磁通为

$$\Psi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+b}\left[\frac{1}{r}\int_0^z \mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{z}{r}\mathrm{d}r$$

由图 7－23 可知，$z=[(b+d)-r]\tan\dfrac{\pi}{3}$，因此

$$\Psi=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{1}{r}[(b+d)-r]\mathrm{d}r=$$

$$\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\left[(b+d)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)-b\right]$$

故长直导线与三角形导体回路的互感为

$$M=\frac{\Psi}{I}=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\left[(b+d)\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)-b\right]$$

7.6.3　纽曼公式

如图 7－24 所示的两个回路 C_1 和 C_2，回路 C_1 中的电流 I_1 在回路 C_2 上的任一点产生的矢量磁位为

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}_2)=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\tag{7.6.7}$$

由 $\Psi=\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}l$ 得到与回路 C_2 交链的磁通量为

$$\Psi_{21}=\oint_2 \boldsymbol{A}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2=\frac{\mu I_1}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}$$

代入式(7.6.5)，得到

$$M_{21}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\tag{7.6.8}$$

同理，可得

$$M_{12}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|}\tag{7.6.9}$$

由式(7.6.8)和式(7.6.9)即知 $M_{12}=M_{21}=M$,故有

$$M=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|} \tag{7.6.10}$$

上式称为纽曼公式。

例 7.18 如图 7−24 所示,两个互相平行且共轴的圆形线圈 C_1 和 C_2,中心相距为 d,半径分别为 a_1 和 a_2,求它们之间的互感。

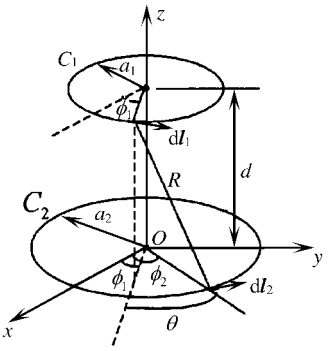


图 7−24 两个平行且共轴的线圈

解:利用纽曼公式(7.6.10)来计算,则有

$$M=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mathrm{d}l_2\,\mathrm{d}l_1\cos\theta}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|}$$

式中,θ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 之间的夹角。由图 7−24 可知,$\mathrm{d}l_1=a_1\mathrm{d}\phi_1$,$\mathrm{d}l_2=a_2\mathrm{d}\phi_2$,$\theta=\phi_2-\phi_1$,且

$$R=[d^2+a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos(\phi_2-\phi_1)]^{1/2}$$

于是有

$$M=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_1a_2\cos(\phi_2-\phi_1)\mathrm{d}\phi_2\mathrm{d}\phi_1}{[d^2+a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos(\phi_2-\phi_1)]^{1/2}}=\frac{\mu_0a_1a_2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{[d^2+a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\theta]^{1/2}}$$

一般情况下,上述积分只能用椭圆积分来表示。但是若 $d\gg a_1$,或 $d\gg a_2$ 时,可进行近似计算。如若 $d\gg a_1$,则

$$[d^2+a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\theta]^{-1/2}\approx[d^2+a_2^2]^{-1/2}\left[1-\frac{2a_1a_2\cos\theta}{d^2+a_2^2}\right]^{-1/2}\approx[d^2+a_2^2]^{-1/2}\left[1+\frac{a_1a_2\cos\theta}{d^2+a_2^2}\right]$$

于是

$$M\approx\frac{\mu_0a_1a_2}{2\sqrt{d^2+a_2^2}}\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{a_1a_2\cos\theta}{d^2+a_2^2}\right]\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0\pi a_1^2a_2^2}{2[d^2+a_2^2]^{3/2}}$$

练 习 题

7.6−1 已知内、外半径分别为 a 和 b 的无限长中空导体圆柱,导体的磁导率为 μ,求导体圆柱单位长度的内自感 L_i。

7.6−2 如图 7−25 所示,一环形螺线管的平均半径 $r_0=15\mathrm{cm}$,其圆形截面的半径 $a=2\mathrm{cm}$,铁心的相对磁导率 $\mu_r=1400$,环上绕 $N=1000$ 匝线圈,通过电流 $I=0.7A$。

(1) 计算螺旋管的电感;

(2) 在铁心上开一个 $l_0=0.1\mathrm{cm}$ 的空气隙,再计算电感(假设开口后铁心的 μ_r 不变)。

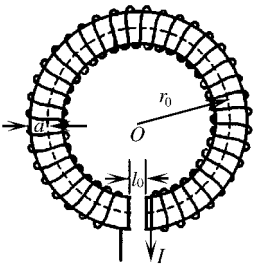


图 7－25

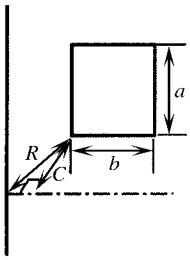


图 7－26

7.6－3　长直导线附近有一矩形回路，回路与导线不共面，如图 7－26 所示。证明：直导线与矩形回路间的互感为

$$M=-\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{R}{\left[2b(R^2-C^2)^{1/2}+b^2+R^2\right]^{1/2}}$$

7.7　静电能量和静电力

7.7.1　静电场能量

前面已经指出，电场的能量密度为

$$w_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \tag{7.7.1}$$

它既适合于随时间变化的电磁场，也适合于静电场。在电场存在的整个空间对式(7.7.1)进行积分，就得到电场的总能量为

$$W_e=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \tag{7.7.2}$$

静电场的总能量又可用电位和电荷分布来计算。设电荷分布在有限区域 V 内，体密度为 ρ，在场空间中产生的电位为 φ。由

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \quad \text{和} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

并利用矢量恒等式 $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi$，可得

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=(-\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{D}=-\left[\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})-\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}\right]=$$
$$-\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})+\varphi\rho$$

将上式代入式(7.7.2)，并利用散度定理，得到

$$W_e=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\oint\varphi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式右端的面积分在限定整个场空间的闭合曲面上进行。由于电荷分布在有限区域 V 内，当 $R\to\infty$ 时，$\varphi\propto\frac{1}{R}$、$D\propto\frac{1}{R^2}$，而 $\mathrm{d}S\propto R^2$，所以面积分项等于零。于是得到

$$W_e=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}V \tag{7.7.3}$$

由于在区域 V 外的场空间中没有电荷分布，电荷体密度 $\rho=0$，所以式(7.7.3)可写成

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi \mathrm{d}V \tag{7.7.4}$$

对于面分布电荷，则有

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \rho_S\varphi \mathrm{d}S \tag{7.7.5}$$

在静电的情况下，式(7.7.2)和式(7.7.4)是一致的，它们都表示静电场的总能量。但式(7.7.4)只适用于静电场，而式(7.7.2)既适用于静电场，也适用于时变场。式(7.7.2)的积分区域是存在电场的整个空间，被积函数是电场的能量密度。它表明静电能量存在于电场中，电场所在空间中的任何地方，都具有电场能量；而式(7.7.4)是在电荷密度不为零的区域内积分，但不能认为静电能量仅存在于带电体内，其被积函数并不表示电场能量密度。

对于带电导体系统，由于每一个导体都是等位体，且电荷只分布在导体的表面上，所以

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{S_i} \rho_{Si}\varphi_i \mathrm{d}S = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \rho_{Si}\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i \tag{7.7.6}$$

式中，q_i 是第 i 个导体所带的电荷；φ_i 是所有电荷(包括第 i 个导体本身所带的电荷 q_i)在第 i 个导体上产生的电位。

带电导体系统的能量也可用电位系数和电容系数表示为

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}q_iq_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\beta_{ij}\varphi_i\varphi_j \tag{7.7.7}$$

若电荷系统是由 N 个点电荷 $q_i(i=1,2,\cdots,N)$ 组成的，则在式(7.7.6)中的 φ_i 不能计及第 i 个电荷 q_i 在自身位置产生的电位，即 φ_i 是除第 i 个点电荷 q_i 之外的其余所有电荷 $q_j(j\neq i)$ 在点电荷 q_i 处所产生的电位之和。因此对于由点电荷构成的电荷系统，式(7.7.6)给出的是点电荷之间的相互作用能。

例 7.19 设原子核是一个带正电的点电荷，其电荷量为 q，周围均匀分布有带负电荷的球形电子云。电子云半径为 r_0，总电荷量为 $-q$。试求原子模型的结合能。

解：原子核与电子云之间有相互作用，电子云自身的电荷之间也有相互作用。因此，原子模型的结合能由两部分组成，一是电子云的自能，另一是电子云与原子核之间的相互作用能。

由高斯定律，得到电子云产生的电场为

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} -\boldsymbol{e}_r \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} & (r < r_0) \\ -\boldsymbol{e}_r \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > r_0) \end{cases}$$

则电子云的自能为

$$W_{自} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2 \mathrm{d}V = \int_0^{r_0}\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_{r_0}^{\infty}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r =$$

$$\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 r_0}$$

电子云在原子核产生的电位为

$$\varphi(0)=\int_0^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_0^{r_0}\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\mathrm{d}r-\int_{r_0}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=-\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

因此,电子云与原子核的相互作用能为

$$W_{互}=q\varphi(0)=-\frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

故得到原子模型的结合能为

$$W_{合}=W_{自}+W_{互}=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 r_0}-\frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}=-\frac{9q^2}{40\pi\varepsilon_0 r_0}$$

例 7.20 半径为 a 的导体球外,有一极薄的同心导体球壳,半径为 b。如果内导体维持恒定电位 U_0,外导体带电荷 q_2。则当内导体的半径由 a 变化为 $a'(a'<b)$ 时,此系统的静电能量如何变化?

解:当导体球半径为 a 时,设球上的电荷为 q_1,则

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_r\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad(a<r<b)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_r\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad(r>b)$$

由

$$\varphi_1=U_0=\int_a^b E_1\mathrm{d}r+\int_b^{\infty}E_2\mathrm{d}r=$$

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

得到

$$q_1=4\pi\varepsilon_0 aU_0-\frac{a}{b}q_2$$

又因为

$$\varphi_2=\int_b^{\infty}E_2\mathrm{d}r=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

故系统的静电能量

$$W_e=\frac{1}{2}(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2)=\frac{1}{2}\left[q_1U_0+\frac{q_2(q_1+q_2)}{4\pi\varepsilon_0 b}\right]$$

当导体球的半径由 a 变化为 a' 时,球面上的电荷则由 q_1 变化为

$$q'_1=4\pi\varepsilon_0 a'U_0-\frac{a'}{b}q_2$$

此时电荷系统的静电能量为

$$W'_e=\frac{1}{2}\left[q'_1U_0+\frac{q_2(q'_1+q_2)}{4\pi\varepsilon_0 b}\right]$$

故电荷系统所改变的静电能量为

$$\Delta W_e = W'_e - W_e = \frac{1}{2}\left[(q'_1 - q_1)U_0 + \frac{q_2(q'_1 - q_1)}{4\pi\varepsilon_0 b}\right] =$$

$$2\pi\varepsilon_0(a' - a)\left[U_0 - \left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}\right)^2\right]$$

7.7.2 静电力

当已知静电场的能量时，利用虚位移法很容易计算带电体之间的电场力。在由 N 个带电导体组成的系统中，假设第 i 个带电导体在电场力 F_i 的作用下发生位移 δx_i，则电场力做功 $\delta A = F_i \delta x_i$，系统的静电能量改变为 δW_e。根据能量守恒定律，该系统的功能关系为

$$\delta W_S = F_i \delta x_i + \delta W_e \tag{7.7.8}$$

式中，δW_S 是与各带电体相连接的外电源所提供的能量。具体计算中，可假定各带电导体的电荷不变，或假定各带电导体的电位不变。

1. 各带电导体的电荷不变

这种情况下，所有带电体都不和外电源相连接，则 $\delta W_S = 0$。因此由式(7.7.8)，有

$$F_i \delta x_i = -\delta W_e$$

从而得到

$$F_i = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right|_{q\text{不变}} \tag{7.7.9}$$

式中的“－”号，是因为没有外源提供能量，电场力做功是靠减少系统的静电能量来实现的。

2. 各带电导体的电位不变

这种情况下，各带电导体应分别与外电压源连接。此时，外电压源向系统提供的能量为

$$\delta W_S = \sum_{i=1}^{N} \delta(q_i \varphi_i) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \delta q_i$$

由式(7.7.6)可得到系统所改变的静电能量为

$$\delta W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \delta(q_i \varphi_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \varphi_i \delta q_i$$

由此可见，外电压源向系统提供的能量是系统所改变的静电能量的两倍，即 $\delta W_S = 2\delta W_e$。代入式(7.7.8)，有

$$2\delta W_e = F_i \delta x_i + \delta W_e$$

从而得到

$$F_i = \left.\frac{\partial W_e}{\partial x_i}\right|_{\varphi\text{不变}} \tag{7.7.10}$$

式(7.7.9)和式(7.7.10)中 x_i 是广义坐标，F_i 是广义力。若 x_i 是距离(即长度)，则 F_i 是静电力；若 x_i 是角度，则 F_i 是力矩。

应当注意，由式(7.7.9)和式(7.7.10)计算的结果是一致的。因为，在静电平衡下，带

电体实际上并没有移动，所以受到的电场力并不会因假设条件不同而不同。

例 7.21 有一平行金属板电容器，极板面积为 $l\times b$，板间距离为 d，用一块介质片（介电常数为 ε，宽度为 b，厚度为 d）部分填充在两极板之间，如图 7－27 所示。设极板间外加电压为 U_0，忽略边缘效应，求介质片所受的静电力。

解：平行板电容器的电容为

$$C=\varepsilon_0\frac{(l-x)b}{d}+\varepsilon\frac{bx}{d}$$

所以电容器内的电场能量为

$$W_e=\frac{1}{2}CU_0^2=\frac{bU_0^2}{2d}[\varepsilon_0(l-x)+\varepsilon x]$$

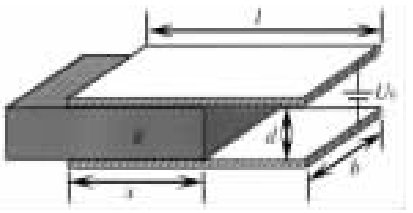


图 7－27 部分填充介质的平行板电容器

由式(7.7.10)，可求得介质片受到的静电力为

$$F_x=\left.\frac{\partial W_e}{\partial x}\right|_{U_0\text{不变}}=\frac{b(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0^2}{2d}$$

由此可以看出，由于 $\varepsilon>\varepsilon_0$，所以介质片所受到的力有把介质片拉进电容器的趋势。

此题也可用式(7.7.9)来计算。设极板上保持总电荷 q 不变，则

$$W_e=\frac{q^2}{2C}=\frac{dq^2}{2b[\varepsilon_0(l-x)+\varepsilon x]}$$

由式(7.7.9)，可得

$$F_x=-\left.\frac{\partial W_e}{\partial x}\right|_{q\text{不变}}=\frac{d(\varepsilon-\varepsilon_0)q^2}{2b[\varepsilon_0(l-x)+\varepsilon x]^2}$$

由于

$$q=CU_0=\frac{bU_0}{d}[\varepsilon_0(l-x)+\varepsilon x]$$

同样得到

$$F_x=\frac{b(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0^2}{2d}$$

练　习　题

7.7－1　真空中一半径为 a 的球体内分布有均匀电荷，体电荷密度为 ρ_0，试计算静电能量。

7.7－2　两个电容器的电容分别为 C_1 和 C_2，各充以电荷 q_1 和 q_2。然后移去电源，再将两电容器并联，问总的电磁能量减少了多少？减少的能量到哪里去了？

7.7－3　平行板电容器的极板面积为 S，板间距离为 d，所加电压为 U_0，介质的介电常数为 ε。求作用于每块极板上的电场力。

7.7－4　有一球形薄膜带电表面，半径为 a，其上带电荷 q。求薄膜单位面积上所受的膨胀力。

7.8 磁场能量与磁场力

7.8.1 磁场的能量

由前面已经知道,磁场的能量密度和总能量分别为

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \tag{7.8.1}$$

和

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V \tag{7.8.2}$$

这里积分区域是磁场存在的整个空间。

在静磁场中,磁场的总能量也可用电流密度 $\boldsymbol{J}$ 和矢量位 $\boldsymbol{A}$ 来表示。由

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \qquad \text{和} \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

以及恒等式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}$,得

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H} =$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J} + \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})$$

代入式(7.8.2),并利用散度定理,有

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V =$$

$$\frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\oint_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{A}\times H)\cdot\mathrm{d}\mathrm{S}$$

上式右端的面积分在限定整个场空间的闭合曲面上进行。若电流分布在有限区域 V 内,当 $R\to\infty$ 时,有 $A\propto\frac{1}{R}$、$H\propto\frac{1}{R^2}$,而 $\mathrm{dS}\propto R^2$,所以面积分项等于零。于是得到

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A} \quad \mathrm{d}V \tag{7.8.3}$$

由于在区域 V 外的场空间中没有电流分布,即 $\boldsymbol{J}=0$,所以式(7.8.3)可写成

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_{V} \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A} \quad \mathrm{d}V \tag{7.8.4}$$

对于一个载电流为 I 的回路 C,其磁场能量又可写为

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\oint_{C} I\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}I\Psi = \frac{1}{2}LI^2 \tag{7.8.5}$$

注意,由此式也可将自感系数表示为

$$L = \frac{2W_{\mathrm{m}}}{I^2} \tag{7.8.6}$$

若两个回路 C_1 和 C_2 分别载有电流 I_1 和 I_2,设 I_1 产生的矢量位为 $\boldsymbol{A}_1$、I_2 产生的矢

量位为 $\boldsymbol{A}_2$，则总的磁场能量为

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\oint_{C_1} I_1(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1+\frac{1}{2}\oint_{C_2} I_2(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2=$$

$$\frac{1}{2}I_1\Psi_{11}+\frac{1}{2}I_1\Psi_{21}+\frac{1}{2}I_2\Psi_{12}+\frac{1}{2}I_2\Psi_{22}=$$

$$\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2=$$

$$W_{\mathrm{m1}}+W_{\mathrm{m2}}+W_{\mathrm{m互}} \tag{7.8.7}$$

式中，$W_{\mathrm{m1}}=\frac{1}{2}L_1I_1^2$ 是载流回路 C_1 的电流 I_1 产生的磁场所具有的能量，称为回路 C_1 的自有能；$W_{\mathrm{m2}}=\frac{1}{2}L_2I_2^2$ 则是回路 C_2 的自有能；$W_{\mathrm{m互}}=MI_1I_2$ 是回路 C_1 与回路 C_2 之间的相互作用能，$W_{\mathrm{m互}}$ 也可用电流和矢量位表示为

$$W_{\mathrm{m互}}=\frac{1}{2}\oint_{C_1} I_1\boldsymbol{A}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1+\frac{1}{2}\oint_{C_2} I_2\boldsymbol{A}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2=$$

$$\oint_{C_1} I_1\boldsymbol{A}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1=\oint_{C_2} I_2\boldsymbol{A}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \tag{7.8.8}$$

对于 N 个电流回路的一般情况，不难推知磁场能量为

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Psi_iI_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}L_{ij}I_iI_j \tag{7.8.9}$$

例 7.22 同轴线的内导体是半径为 a 的圆柱，外导体是半径为 b 的薄圆柱面，其厚度可忽略不计。内、外导体间填充有磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 两种不同的磁介质，如图 7－28 所示。设同轴线中通过的电流为 I，试求同轴线中单位长度所储存的磁场能量。

解：同轴线的内外导体之间的磁场沿 ϕ 方向，在两种磁介质的分界面上，磁场只有法向分量。根据边界条件可知，两种磁介质中的磁感应强度相同，但磁场强度不相同。可利用安培环路定律，并结合边界条件求解同轴线中的磁场。

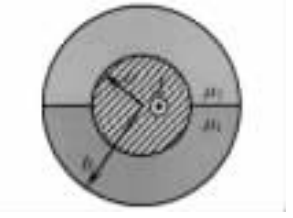


图 7－28 填充两种不同磁介质的同轴线

利用安培环路定律，当 $\rho<a$ 时，有

$$2\pi\rho H_0=\frac{1}{\pi a^2}\pi\rho^2$$

所以

$$H_0=\frac{I}{2\pi a^2}\rho \quad (\rho<a)$$

当 $a<\rho<b$ 时，有

$$\pi\rho(H_1+H_2)=I$$

由于 $H_1=\frac{B_1}{\mu_1}$、$H_2=\frac{B_2}{\mu_2}$ 以及 $B_1=B_2=B$，所以得到

$$B = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)\rho} \quad (a < \rho < b)$$

同轴线中单位长度储存的磁场能量为

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{B_0^2}{\mu_0} 2\pi\rho \mathrm{d}\rho + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{B^2}{\mu_1}\pi\rho \mathrm{d}\rho + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{B^2}{\mu_2}\pi\rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\right)^2 2\pi\rho \mathrm{d}\rho + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)\int_a^b \left[\frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)\rho}\right]^2 \pi\rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2 I^2}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a}$$

由 $W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} L I^2$，可以得到单位长度的自感为

$$L = \frac{2W_{\mathrm{m}}}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a}$$

7.8.2 磁场力

同求静电力一样，磁场力也可用虚位移法来计算。在 N 个电流回路系统中，假定第 i 个回路在磁场力 F_i 的作用下产生一个虚位移 δx_i。此时，磁场力做功为 $\delta F_i \delta x_i$，系统的能量增加 δW_{m}。根据能量守恒定律，有

$$\delta W_S = F_i \delta x_i + \delta W_{\mathrm{m}} \tag{7.8.10}$$

式中，δW_S 是与各电流回路相连接的外电源提供的能量。具体计算过程中，可假定各回路电流维持不变，或假定与各回路交链的磁通维持不变。

1. 各回路电流不变

当回路发生位移时，由于电磁感应，在回路中要产生感应电流，从而使回路中的电流产生变化。为维持各回路电流不变，各回路应与外电流源连接。在这种情况下，与各电流回路相连接的电流源提供的能量为

$$\delta W_S = \sum_{i=1}^{N} I_i \delta \Psi_i$$

而由式(7.8.9)可知，系统增加的磁能为

$$\delta W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i \delta \Psi_i$$

比较以上两式，得

$$\delta W_S = 2\delta W_{\mathrm{m}}$$

将其代入式(7.8.10)，可得

$$F_i = \left.\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial x_i}\right|_{I\text{不变}} \tag{7.8.11}$$

2. 各回路的磁通不变

在这种情况下，各电流回路不与外电流源相连接，则 $\delta W_S = 0$。代入式(7.8.10)，有

$$F_i \delta x_i = -\delta W_m$$

由此可得

$$F_i = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial x_i}\right|_{\Psi\text{不变}} \tag{7.8.12}$$

例 7.23 两个互相平行且共轴的圆形线圈，相距为 d，半径分别为 a_1 和 a_2，其中 $a_1 \ll d$。两线圈中分别载有电流 I_1 和 I_2，如图 7－29 所示。求两线圈间的磁场力。

解：由于 $a_1 \ll d$，可近似认为线圈 2 的电流 I_2 在线圈 1 的圆面积上所产生的磁场是均匀的，且等于圆心处的磁场。由两线圈间的相互作用能，利用虚位移法可很容易地求出磁场力。

线圈 2 中的电流 I_2 在线圈 1 的圆心处产生的磁场为

$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_2 a_2^2}{2(a_2^2 + d^2)^{3/2}}$$

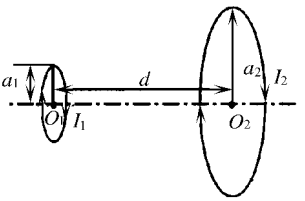


图 7－29 共轴的圆形线圈

与线圈 1 交链的磁通为

$$\Psi_{21} = B_{21}\pi a_1^2 = \frac{\pi\mu_0 I_2 a_1^2 a_2^2}{2(a_2^2 + d^2)^{3/2}}$$

所以两线圈的互感为

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \frac{\pi\mu_0 a_1^2 a_2^2}{2(a_2^2 + d^2)^{3/2}}$$

由虚位移法，可得到两线圈间的磁场力为

$$F_{21} = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial d} = -\frac{3\pi I_1 I_2 \mu_0 a_1^2 a_2^2 d}{2(a_2^2 + d^2)^{5/2}}$$

负号表示当 I_1 与 I_2 方向相同时，F_{21} 为吸引力；当 I_1 与 I_2 方向相反时，F_{21} 为排斥力。

例 7.24 如图 7－30 所示的一个电磁铁，由铁轭（绕有 N 匝线圈的铁心）和衔铁构成。铁轭和衔铁的横截面积均为 S，平均长度分别为 l_1 和 l_2。铁轭与衔铁之间有一很小的空气隙，其长度为 x。设线圈中的电流为 I，铁轭和衔铁的磁导率为 μ，若忽略漏磁和边缘效应，求铁轭对衔铁的吸引力。

解：作用在衔铁上的磁场力有减小空气隙的趋势，可通过式(7.8.11)或式(7.8.12)计算。在忽略漏磁和边缘效应的情况下，若保持磁通 Ψ 不变，则 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 不变，储存在铁轭和衔铁中的磁场能量也不变，而空气隙中的磁场能量则要变化。于是作用在衔铁上的磁场力为

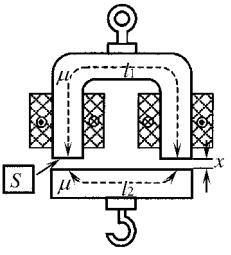


图 7－30 电磁铁

$$F_i = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial x_i}\right|_{\Psi\text{不变}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\int_{\text{铁轭}} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_{\text{气隙}} \boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{H}_0\mathrm{d}V\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x 2S\frac{B_0^2}{\mu_0}\mathrm{d}x = -\frac{SB_0^2}{\mu_0}$$

式中，$\boldsymbol{H}_0$ 是空气隙中的磁场强度。

根据安培环路定律，有

$$H(l_1 + l_2) + 2H_0 x = NI$$

由于 $H=\frac{B}{\mu}$ 和 $H_0=\frac{B_0}{\mu_0}$，考虑到 $B=B_0$，由上式可得

$$B_0=\frac{\mu_0\mu NI}{(l_1+l_2)\mu_0+2\mu x}$$

故得到铁轭对衔铁的吸引力为

$$F_x=-\frac{\mu_0\mu^2N^2I^2S}{[(l_1+l_2)\mu_0+2\mu x]^2}$$

若采用式(7.8.11)计算 F_x，则储存在系统中的磁场能量为

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}NISB_0=\frac{\mu_0\mu SN^2I^2}{2[(l_1+l_2)\mu_0+2\mu x]}$$

同样得到铁轭对衔铁的吸引力为

$$F_x=\left.\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial x}\right|_{I\text{不变}}=-\frac{\mu_0\mu^2N^2I^2S}{[(l_1+l_2)\mu_0+2\mu x]^2}$$

练　习　题

7.8－1　有一横截面为正方形的环形螺线管，其内外半径分别为 $r_i=6\mathrm{cm}$ 和 $r_0=7\mathrm{cm}$，铁心的相对磁导率 $\mu_{\mathrm{r}}=1400$。环上绕有 $N=1000$ 匝线圈，导线中通过的电流 $I=0.7\mathrm{A}$。求磁场能量。

7.8－2　半径为 a 的圆形线圈中的电流为 I，放置到均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，其法线方向与外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的夹角为 α。求线圈所受到的力矩。

7.8－3　平行双线传输线的导线半径为 a，两导线的轴线相距为 D，且 $D\gg a$。导线中流过的电流为 I，试求两导线间单位长度的磁场力。

习　题

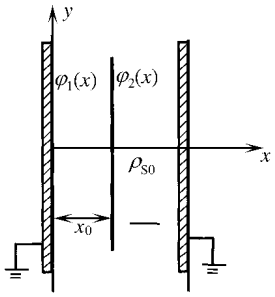
7－1　在半径分别为 a 和 b 的两个同心导体球壳间有均匀的电荷分布，其电荷体密度 $\rho=\rho_0(\mathrm{C/m^3})$。已知外球壳接地，内球壳的电位为 U_0，求两导体球壳间的电场和电位分布。

7－2　两块无限大导体平面分别置于 $x=0$ 和 $x=a$ 处，设 $x=0$ 处的电位 $\varphi=0$，$x=a$ 处的电位 $\varphi=U_0$。两导体平面之间有均匀的电荷分布，体密度为 $\rho=\rho_0(\mathrm{C/m^3})$。求两板间的电场和电位。

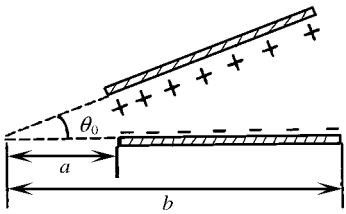
7－3　两块无限大接地导体平面分别置于 $x=0$ 和 $x=a$ 处，其间在 $x=x_0$ 处有一面密度为 $\rho_{S0}(\mathrm{C/m^2})$ 的均匀电荷分布，如题 7－3 图所示。求两导体板之间的电场和电位。

7－4　如题 7－4 图所示，空气电容器的两极板为尺寸相同、面积很大的正方形导体平板，板间夹角 θ_0。当两极板分别带上大小为 q 的异号电荷时，忽略边缘效应，求：

(1)电容器内的电位和电场强度；



题 7－3 图

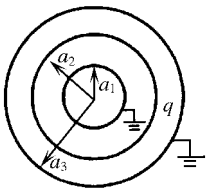


题 7－4 图

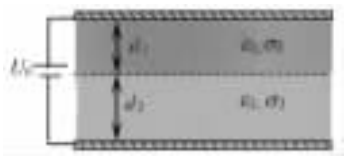
(2)极板上的电荷面密度；

(3)两极板间的电容。

7－5　如题 7－5 图所示，三个同心导体球壳的半径分别为 a_1、a_2 和 a_3（$a_1<a_2<a_3$）。已知球壳 2 上的电荷量为 q，内球壳 1 与外球壳 3 均接地。求：(1)球壳 2 与内、外球壳之间的电场和电位分布；(2)内球壳 1 的外表面与外球壳 3 的内表面上的电荷面密度 ρ_{S1} 和 ρ_{S3}。



题 7－5 图



题 7－6 图

7－6　极板面积为 S 的平行板电容器上外加电压 U_0，两极板间填充两种有损耗电介质，其厚度、介电常数和电导率分别为 d_1、d_2、ε_1、ε_2 和 σ_1、σ_2，如题 7－6 图所示。求：

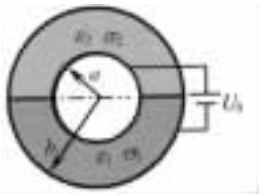
(1)介质中的电流和电场分布；

(2)两种电介质分界面上的电荷面密度；

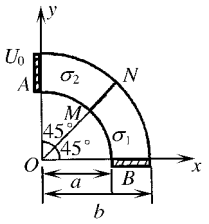
(3)两极板间的电阻。

7－7　同心球形电容器的内导体半径为 a，外导体内半径为 b，其间填充介电常数与电导率分别为 ε_1、σ_1 和 ε_2、σ_2 的两种有损耗介质，如题 7－7 图所示。若内外导体之间外加电压 U_0。求：(1)介质中的电场分布；(2)电容器的漏电阻；(3)电容器的损耗功率。

7－8　一扇形弧片由两块电导率不同的金属薄片构成，如题 7－8 图所示。若 $\sigma_1=6.5\times10^7$ S/m，$\sigma_2=1.2\times10^7$ S/m，$a=30$cm，$b=45$cm，厚度 $d=0.2$cm。设电极 A、B 的电



题 7－7 图



题 7－8 图

导率远大于 σ_1，电极间的电压 $U_0=30\text{V}$。求：

(1)弧片内的电位分布；

(2)电极 A、B 间的总电流 I 和电阻 R；

(3)分界面 MN 上的电荷面密度。

7－9　长度为 $2l$ 的直线段上通有均匀电流 I，求此线电流的矢量磁位和磁感应强度，并讨论 $l\to\infty$ 的情况。

7－10　边长分别为 a 和 b、载有电流 I 的小矩形回路。

(1)求远处的任一点 $P(x,y,z)$ 的矢量位 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，并证明它可以写成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0\boldsymbol{p}_\text{m}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$$

其中 $\boldsymbol{P}_\text{m}=\boldsymbol{e}_z Iab$。

(2)由 $\boldsymbol{A}$ 求磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，并证明 $\boldsymbol{B}$ 可以写成

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla(\text{d}\Omega)$$

式中 $\text{d}\Omega=\dfrac{ab\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}$ 为场点对小电流回路所张的立体角。

7－11　一个点电荷 q 放在半径为 a 的接地细导体圆环的轴线上，当此电荷距圆环中心为 d 时，圆环上的感应电荷为 $-Q$。若圆环周围介质为空气，试确定此导体圆环的电容。

7－12　在空气中有 3 个半径为 a 的相同导体球，球心分别位于边长为 d 的等边三角形的 3 个顶点上。最初 3 个球都带有相同的电荷 q，然后将 3 个球轮流接地足够长时间再断开。若 $d\gg a$，求每个导体球上最终还剩下多少电荷。

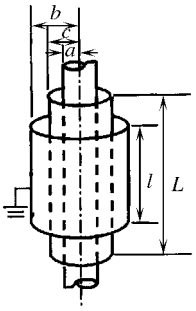
7－13　在空气中有 4 个半径为 a 的相同导体球，球心分别位于边长为 d 的正方形的 4 个顶点上。最初球 1 带电荷 q，其余 3 个球不带电荷。然后用细金属丝将球 1 轮流与球 2、3 和 4 连接足够长时间再断开。若 $d\gg a$，求各导体球上最终的电荷。

7－14　圆柱形高压导线半径为 $a=30\text{mm}$，要穿过一个内半径为 $b=50\text{mm}$、长度为 $l=150\text{mm}$ 的接地金属套管，如题 7－14 图所示。已知空气的击穿场强为 $E_M=3\times10^6\text{ V/m}$，忽略套管的边缘效应。

(1)求最大的工作电压。

(2)在导线与套管之间加一个半径为 $c=40\text{mm}$、厚度可忽略不计的内套管。为使两层所承受的电压相等，求内套管的长度 L 以及此时的最大工作电压。

(3)若要使两层中的最大场强相等，内套管的长度 L 应为多少？此时的最大工作电压值为多少？



题 7－14 图

7－15　圆柱形电容器外导体内半径为 b，内导体半径为 a。当外加电压 U 固定时，在 b 一定的条件下，求使电容器中的最大电场强度取极小值 $E_{\min}$ 的内导体半径 a 的值和这个 $E_{\min}$ 的值。

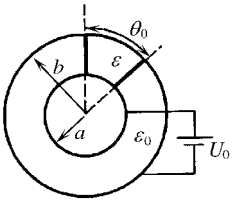
7－16　圆柱形电容器的导体半径为 $R_1=1\text{cm}$，外导体的内半径为 $R_2=4\text{cm}$，其间填充有两层厚度分别为 $d_1=1\text{cm}$ 和 $d_2=2\text{cm}$ 的同轴电介质。设外导体接地，内导体的电位为 $U_0=100\text{V}$。在两层介质之间放置一层很薄的金属圆柱片，为使两层介质中的最大电场强度相等，金属圆柱片的电位 U 应为多少？

7－17　圆柱形电容器的导体半径为 $a=1\text{cm}$，其间填充有相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}=3$ 和 $\varepsilon_{r2}=2$ 的两层同轴电介质。为使两层介质中的最大电场强度相等，并且内、外两层介质所承受的电压也相等，两层介质的厚度 d_1 和 d_2 应为多少？

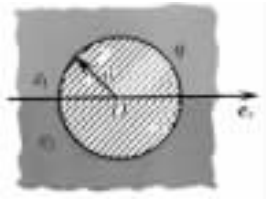
7－18　两同轴圆柱导体面半径分别为 a 和 b，在 $0<\theta<\theta_0$ 部分填充介电常数为 ε 的电介质，如题 7－18 图所示。两柱面间加电压 U_0，试求：

(1)两柱面间的电场和电位分布；

(2)单位长度的电容和电场能量。



题 7－18 图



题 7－19 图

7－19　如题 7－19 图所示，一半径为 a、带电量 q 的导体球，其球心位于两种介质的分界面上，此两种介质的电容率分别为 ε_1 和 ε_2，分界面为无限大平面。求：(1) 导体球的电容；(2) 总的静电能量。

7－20　两个半径均为 a 的导体球，球心相距为 d，且 $d\gg a$。设两球分别带电荷 q_1 和 q_2，计算此导体系统的静电能量；若用细导线将两个导体球连接起来，静电能量有什么变化？

7－21　把一带电量 q、半径为 a 的导体球切成两半，求两半球之间的电场力。

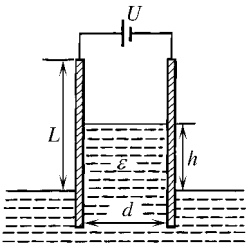
7－22　将介电常数为 ε、内外半径分别为 a 和 b 的介质球壳从无限远处移至真空中点电荷 Q 的电场中，并设点电荷 Q 位于此处。求此过程中电场力所做的功。

7－23　半径分别为 a_1 和 a_2 的两个小导体球的电位分别为 U_1 和 U_2，两球的球心相距为 d。若 $d \gg a_1$，$d \gg a_2$，试求两球之间的电场力。

7－24　如题 7－24 图所示，两平行的金属板，板间距离为 d，竖直地插入在电容率为 ε 的液体中，两板间加电压 U，证明液面升高

$$h=\frac{1}{2\rho g}(\varepsilon-\varepsilon_0)\left(\frac{U}{d}\right)^2$$

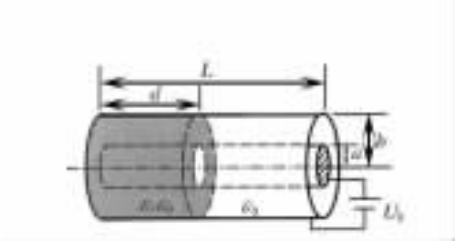
其中 ρ 为液体的质量密度。



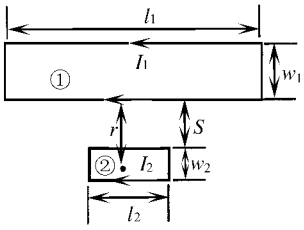
题 7－24 图

7－25　可变空气电容器，当动片由 0°～180°电容量由 25pF～350pF 直线地变化，当动片为 θ 角时，求作用于动片上的力矩。设动片与定片间的电压为 $U_0=400\text{V}$。

7－26　圆柱形电容器的导体半径为 a，外导体的内半径为 b，长度为 L，其间介质为空气。将电容器充电至电压为 U_0，断开电源后，在电容器中填入一段长度为 d、相对介电常数为 ε_r 的电介质，如题 7－26 图所示。忽略边缘效应，求电介质所受到的电场力。



题 7－26 图

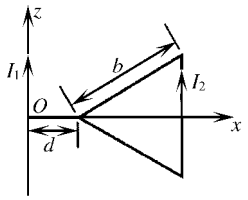


题 7－27 图

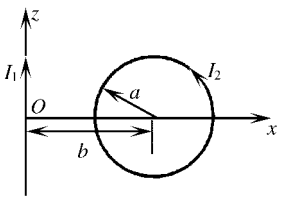
7－27　如题 7－27 图所示，两个长的矩形线圈，放置在同一平面上，长度分别为 l_1 和 l_2，宽度分别为 w_1 和 w_2，两线圈最近的边相距为 S，两线圈中分别载有电流 I_1 和 I_2。设 $l_1 \gg l_2$，且两线圈都只有一匝，略去端部效应。证明：两线圈的互感为

$$M=\frac{\mu_0 l_2}{2\pi}\ln\frac{(S+w_1)(S+w_2)}{S(S+w_1+w_2)}$$

7－28　真空中长直导线的电流 I_1，与一电流为 I_2 的等边三角形回路共面，如题 7－28 图所示。求：(1)长直导线与三角形回路之间的互感；(2)三角形回路受到的磁场力。



题 7－28 图



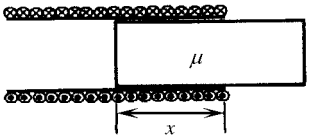
题 7－29 图

7－29　如题 7－29 图所示，长直导线与半径为 a 圆形导体回路共面，直导线中的电流为 I_1，圆形回路中的电流为 I_2。求：

(1)长直导线与圆形导体回路间的互感；

(2)长直导线对圆形导体回路的磁场力。

7－30　如题 7－30 图所示的长螺旋管，单位长度密绕 n 匝线圈，通过电流 I，铁心的磁导率为 μ、截面积为 S，求作用在它上面的力。



题 7－30 图

第八章　静态场边值问题的解法

前面对一些简单的静态场问题的场分布进行了分析和计算，但在工程实际中所遇到的电磁场问题往往比较复杂。譬如，给定空间某一区域内的电荷分布，同时也给定此区域的边界上的电位或电场分布，求解此空间区域中的电位或电场分布。这样的问题称为静态场的边值问题，往往难以用前面介绍的方法求解。因此，本章将介绍一些静态场边值问题的求解方法。

静态场边值问题的解法通常可分为解析方法和数值方法两大类。解析方法给出的结果是场量的解析表达式——有限形式的闭合解或无穷级数解，本章主要介绍了分离变量法和镜像法。数值方法则是通过数值计算，给出场量的一组离散的数据，这类方法通常要利用电子计算机来实现。由于高速电子计算机的广泛应用，数值方法获得很大的发展，已可用于求解一些非常复杂问题，是当前电磁场中最具活力的，有广阔的应用前景。本章对常用的有限差分法、有限元法和矩量法进行简要的介绍。

8.1　边值问题的惟一性定理

前面已经指出，在静态场的情况下，电场可以用一个标量电位来描述，磁场可以用一个矢量磁位来描述，在无源（$J=0$）的区域中，磁场也可以用一个标量磁位来描述。在均匀媒质中，位函数都满足泊松方程或拉普拉斯方程。同时，在场域的边界面上位函数还应满足一定的边界条件。因此，静态场问题的求解，都可归结为在给定的边界条件下，求解位函数的泊松方程或拉普拉斯方程，这类问题称为静态场的边值问题。

8.1.1　边值问题的类型

在场域 V 的边界面 S 上给定的边界条件有以下三种类型：

（1）第一类边界条件是已知位函数在场域边界面 S 上各点的值，即给定

$$\varphi|_S = f_1(S) \tag{8.1.1}$$

这类问题称为第一类边值问题或狄里赫利问题。

（2）第二类边界条件是已知位函数在场域边界面 S 上各点的法向导数值，即给定

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = f_2(S) \tag{8.1.2}$$

这类问题称为第二类边值问题或纽曼问题。

（3）第三类边界条件是已知一部分边界面 S_1 上位函数的值，而在另一部分边界面 S_2 上已知位函数的法向导数值，即给定

$$\varphi|_{S_1} = f_1(S_1) \quad \text{和} \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{S_2} = f_2(S_2) \tag{8.1.3}$$

这里 $S_1+S_2=S$。这类问题称为第三类边值问题或混合边值问题。

如果场域延伸到无限远处,还必须给出无限远处的边界条件。对于源分布在有限区域情况,在无限远处的位函数应为有限值,即给出

$$\lim_{r\to\infty} r\varphi = \text{有限值} \tag{8.1.4}$$

称为自然边界条件。

此外,若整个场域内,同时存在几种不同的均匀介质,则位函数还应满足不同介质分界面上的边界条件。

8.1.2 惟一性定理

惟一性定理是边值问题的一个重要定理,其表述为:在场域 V 的边界面 S 上给定 φ 或 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ 的值,则泊松方程或拉普拉斯方程在场域 V 具有惟一解。

下面采用反证法对惟一性定理做出证明。设在边界面 S 包围的场域 V 内有两个位函数 φ_1 和 φ_2 都满足泊松方程,即

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{1}{\varepsilon}\rho \quad \text{和} \quad \nabla^2\varphi_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

令 $\varphi_0=\varphi_1-\varphi_2$,则在场域 V 内

$$\nabla^2\varphi_0 = \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\rho + \frac{1}{\varepsilon}\rho = 0$$

由于

$$\nabla\cdot(\varphi_0\nabla\varphi_0) = \varphi_0\nabla^2\varphi_0 + (\nabla\varphi_0)^2 = (\nabla\varphi_0)^2$$

将上式在整个场域 V 上积分并利用散度定理,有

$$\oint_S \varphi_0\nabla\varphi_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla\varphi_0)^2\mathrm{d}V \tag{8.1.5}$$

对于第一类边值问题,在整个边界面 S 上 $\varphi_0|_S=\varphi_1|_S-\varphi_2|_S=0$;对于第二类边值问题,在整个边界面 S 上 $\left.\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right|_S=\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S-\left.\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S=0$;对于第三类边值问题,在边界面的 S_1 部分上 $\varphi_0|_{S_1}=\varphi_1|_{S_1}-\varphi_2|_{S_1}=0$,在边界面的 S_2 部分上 $\left.\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right|_{S_2}=\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{S_2}-\left.\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{S_2}=0$。因此,无论是哪一类边值问题,由式(8.1.5)都将得到

$$\int_V (\nabla\varphi_0)^2\mathrm{d}V = \oint_S \varphi_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\mathrm{d}S = 0$$

由于 $(\nabla\varphi_0)^2$ 是非负的,要使上式成立,必须在场域 V 内处处有 $\nabla\varphi_0=0$。这表明在整个场域 V 内 φ_0 恒为常数,即

$$\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2 \equiv C$$

对于第一类边值问题,由于在边界面 S 上 $\varphi_0|_S=0$,所以 $C=0$。故在整个场域 V 内有 $\varphi_0=\varphi_1-\varphi_2=0$,即 $\varphi_1=\varphi_2$。

对于第二类边值问题,若 φ_1 与 φ_2 取同一个参考点,则在参考点处 $\varphi_1-\varphi_2=0$,所以 C

$=0$，故在整个场域 V 内也有 $\varphi_1=\varphi_2$。

对于第三类边值问题，由于 $\varphi_0|_{S_1}=\varphi_1|_{S_1}-\varphi_2|_{S_1}=0$，所以 $C=0$，故在整个场域 V 内也有 $\varphi_1=\varphi_2$。

惟一性定理具有非常重要的意义，首先它指出了静态场边值问题具有惟一解的条件，在边界面 S 上的任一点只需给定 φ 或 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 的值，而不能同时给定两者的值。同时惟一性定理也为静态场边值问题的各种求解方法提供了理论依据，为求解结果的正确性提供了判据。根据惟一性定理，在求解边值问题时，无论采用什么方法，只要求出的位函数既满足相应的泊松方程（或拉普拉斯方程），又满足给定的边界条件，则此函数就是所求出的惟一正确解。

练　习　题

8.1－1　两同心导体球壳的半径分别为 a 和 b，中间填充介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的两层电介质，其分界面半径为 $c(a<c<b)$，电介质 ε_1 中有体密度为 ρ 的均匀电荷。设内球壳上的电量为 q，外球壳接地。试写出与此静电场对应的边值问题。

8.1－2　两块无限大的接地导体平板分别位于为 $x=0$ 和 $x=d$ 处，两板之间的电荷体密度为 $\rho=kx^2$，k 为常数。已知 $\varphi(0)=0$、$\varphi(d)=U_0$。试通过解泊松方程求两板之间的电位函数 $\varphi(x)$。

8.2　分离变量法

分离变量法是求解边值问题的一种经典的方法，其基本思想是：把待求的位函数表示为几个未知函数的乘积，其中每一个未知函数仅是一个坐标变量的函数，代入偏微分方程进行变量分离，将原偏微分方程分离为几个常微分方程，然后分别求解这些常微分方程并利用边界条件确定其中的待定常数，从而得到位函数的解。

应用分离变量法求解时，所求场域的边界面应与某一正交曲面坐标系的坐标面重合。本节主要介绍在直角坐标系、圆柱面坐标系和球面坐标系中，应用分离变量法求解二维拉普拉斯方程的边值问题。

8.2.1　直角坐标系中的分离变量法

设位函数只是 x、y 的函数，沿 z 坐标方向没有变化，则拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{8.2.1}$$

将 $\varphi(x,y)$ 表示为两个一维函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 的乘积，即

$$\varphi(x,y)=X(x)Y(y) \tag{8.2.2}$$

代入式(8.2.1)，有

$$Y(y)\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}+X(x)\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y}=0$$

用 $X(x)Y(y)$ 除上式各项，可得

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y}$$

上式中，左端仅为 x 的函数，右端仅为 y 的函数，而对 x、y 取任意值时，它们又是恒等的。所以，式中的每一项都需等于常数。将此常数写成 k^2，即

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y}=-k^2 \tag{8.2.3}$$

由此可得到

$$\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}+k^2X(x)=0 \tag{8.2.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y}-k^2Y(y)=0 \tag{8.2.5}$$

这样就把二维拉普拉斯方程(8.2.1)分离成了两个常微分方程。k 称为分离常数，它的取值不同时，方程(8.2.4)和方程(8.2.5)的解也有不同的形式。

当 $k=0$ 时，方程(8.2.4)和方程(8.2.5)的解为

$$X(x)=A_0x+B_0$$

$$Y(y)=C_0y+D_0$$

于是

$$\varphi(x,y)=(A_0x+B_0)(C_0y+D_0) \tag{8.2.6}$$

当 $k\neq0$ 时，方程(8.2.4)和方程(8.2.5)的解为

$$X(x)=A\sin kx+B\cos kx$$

$$Y(y)=C\sinh ky+D\cosh ky$$

于是

$$\varphi(x,y)=(A\sin kx+B\cos kx)(C\sinh ky+D\cosh ky) \tag{8.2.7}$$

由于拉普拉斯方程(8.2.1)是线性的，所以式(8.2.6)和式(8.2.7)的线性组合也是方程(8.2.1)的解。在求解边值问题时，为了满足给定的边界条件，分离常数 k 通常取一系列特定的值 $k_n(n=1,2,\cdots)$，而待求位函数 $\varphi(x,y)$ 则由所有可能的解的线性组合构成，称为位函数的通解，即

$$\varphi(x,y)=(A_0x+B_0)(C_0y+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin k_nx+B_n\cos k_nx)(C_n\sinh k_ny+D_n\cosh k_ny) \tag{8.2.8}$$

若将式(8.2.3)中的 k^2 换为 $-k^2$，则可得到另一形式的通解为

$$\varphi(x,y)=(A_0x+B_0)(C_0y+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sinh k_nx+B_n\cosh k_nx)(C_n\sin k_ny+D_n\cos k_ny) \tag{8.2.9}$$

通解中的分离常数的选取以及待定常数均由给定的边界条件确定。

例 8.1　无限长接地金属导体槽内的电位分布

如图 8－1 所示，有一横截面为矩形的无限长接地金属导体槽，上有一电位为 U_0 的金属盖板。导体槽的侧壁与盖板间有非常小的间隙以保证相互绝缘。求此导体槽内的电位分布。

解：因为导体槽在 z 方向为无限长，所以槽内电位分布与 z 无关，所满足的边界条件为

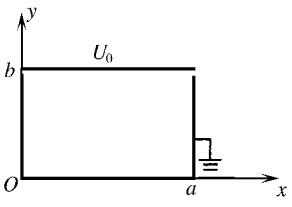


图 8－1　接地矩形槽

$$\varphi(0,y)=0 \quad (0\leqslant y<b) \tag{8.2.10}$$

$$\varphi(a,y)=0 \quad (0\leqslant y<b) \tag{8.2.11}$$

$$\varphi(x,0)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant a) \tag{8.2.12}$$

$$\varphi(x,b)=U_0 \quad (0\leqslant x\leqslant a) \tag{8.2.13}$$

因槽内的电位 $\varphi(x,y)$ 在 $x=0$ 和 a 处为零，所以其通解应为式(8.2.8)。

将式(8.2.10)代入式(8.2.8)，有

$$0=B_0(C_0y+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(C_n\sinh k_ny+D_n\cosh k_ny)$$

为使上式对 y 在 $0\sim b$ 范围内取任何值时都成立，则应有 $B_n=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$，于是有

$$\varphi(x,y)=A_0x(C_0y+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin k_nx(C_n\sinh k_ny+D_n\cosh k_ny) \tag{8.2.14}$$

再将式(8.2.11)代入式(8.2.14)，有

$$0=A_0a(C_0y+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin k_na(C_n\sinh k_ny+D_n\cosh k_ny)$$

于是应有 $A_0=0$ 和 $A_n=\sin k_na=0(n=1,2,\cdots)$。但 A_n 不能等于零，否则 $\varphi(x,y)\equiv0$，故有 $\sin k_na=0$。由此得到

$$k_n=\frac{n\pi}{a} \quad (n=1,2,\cdots)$$

代入式(8.2.14)，有

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{a}\left(C_n\sinh\frac{n\pi y}{a}+D_n\cosh\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{8.2.15}$$

再将式(8.2.12)代入式(8.2.15)，有

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}A_nD_n\sin\frac{n\pi x}{a}$$

为使上式对 x 在 $0\sim a$ 范围内取任何值时都成立，并且 $A_n\neq0$，则应有

$$D_n=0(n=0,1,2,\cdots)$$

于是式(8.2.15)变为

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A'_n\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} \tag{8.2.16}$$

式中 $A'_n=A_nC_n$。最后将式(8.2.13)代入式(8.2.16)，有

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi b}{a} \tag{8.2.17}$$

为了确定常数 A'_n，将 U_0 在区间$(0,a)$上按$\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{a}\right\}$展开为傅里叶级数为

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{8.2.18}$$

式中系数 f_n 按如下计算，即

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a U_0 \sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{4U_0}{n\pi} & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

比较式(8.2.17)和式(8.2.18)中 $\sin\dfrac{n\pi x}{a}$的系数，可得到

$$A'_n = \frac{f_n}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}} = \begin{cases} \dfrac{4U_0}{n\pi\sinh\dfrac{n\pi b}{a}} & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

将 A'_n 代入式(8.2.16)，即得到接地金属槽内的电位分布为

$$\varphi(x,y) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

8.2.2 圆柱面坐标系中的分离变量法

具有圆柱面边界的问题，适宜用圆柱面坐标系中的分离变量法求解。这里，仅介绍圆柱面坐标系中的位函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$沿 z 坐标方向没有变化的二维问题。在这种情况下，位函数满足的拉普拉斯方程为

$$\nabla^2\varphi(\rho,\phi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0 \tag{8.2.19}$$

令位函数 $\varphi(\rho,\phi)=R(\rho)\Phi(\phi)$，代入上式，有

$$\Phi(\phi)\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right] + R(\rho)\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} = 0$$

将上式各项乘以$\dfrac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\phi)}$，可得

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right] = -\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\Phi^2}$$

由于此式对 ρ 和 ϕ 取任意值时恒成立，所以，式中的每一项都等于常数，即

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right] = -\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} = k^2$$

由此将拉普拉斯方程(8.2.19)分离成为两个常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} + k^2\Phi(\phi) = 0 \tag{8.2.20}$$

和

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]-k^2R(\rho)=0 \tag{8.2.21}$$

式中 k 为分离常数。

当 $k=0$ 时，方程(8.2.20)和方程(8.2.21)的解为

$$\Phi(\phi)=A_0+B_0\phi$$

$$R(\rho)=C_0+D_0\ln\rho$$

于是

$$\varphi(\rho,\phi)=(A_0+B_0\phi)(C_0+D_0\ln\rho) \tag{8.2.22}$$

当 $k\neq0$ 时，方程(8.2.20)和方程(8.2.21)的解为

$$\Phi(\phi)=A\sin k\phi+B\cos k\phi$$

$$R(\rho)=C\rho^k+D\rho^{-k}$$

于是

$$\varphi(\rho,\phi)=(A\cos k\phi+B\sin k\phi)(C\rho^k+D\rho^{-k}) \tag{8.2.23}$$

对于许多具有圆柱面边界的问题，位函数 $\varphi(\rho,\phi)$ 是变量 ϕ 的周期函数，其周期为 2π，即 $\varphi(\rho,\phi+2\pi)=\varphi(\rho,\phi)$。此时，分离常数应取整数值，即 $k=n(n=0,1,2,\cdots)$，且 $B_0=0$。由此得到，圆柱形区域中二维拉普拉斯方程(8.2.19)的通解为

$$\varphi(\rho,\phi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi)(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}) \tag{8.2.24}$$

式中的待定常数由具体问题所给定的边界条件确定。

例 8.2 均匀外电场中的无限长介质圆柱体。

如图 8－2 所示，在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_xE_0$ 中，有一半径为 a、介电常数为 ε 的无限长均匀介质圆柱体，其轴线与外电场垂直，圆柱外为自由空间。试求介质圆柱内外的电位函数和电场强度。

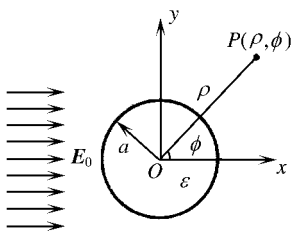


图 8－2 均匀外电场中的无限长介质圆柱体

解：在外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 作用下，介质圆柱要极化，空间任一点的电位是均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电位与极化电荷产生的电位之和。因介质圆柱内外的自由电荷体密度 $\rho=0$，所以介质圆柱内外的电位函数都满足拉普拉斯方程。又由于介质圆柱体是均匀无限长的，而且均匀外电场与圆柱的轴线垂直，所以电位函数与变量 z 无关，所以电位的通解为式(8.2.24)的形式。

设介质圆柱内的电位函数为 φ_1，介质圆柱外的电位函数为 φ_2。它们应满足以下边界条件：

(1) 在介质圆柱外，当 $\rho\to\infty$ 时，极化电荷产生的电场减弱为零，故这些地方的电位函数 φ_2 应与均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电位 φ_0 相同，即

$$\varphi_2(\rho,\phi)\to\varphi_0(\rho,\phi)=-E_0x=-E_0\rho\cos\phi\quad(\rho\to\infty) \tag{8.2.25}$$

(2) 在介质圆柱内的 $\rho=0$ 处，电位应为有限值，即

$$\varphi_1(0,\phi)<\infty \tag{8.2.26}$$

(3) 在介质圆柱体的表面($\rho=a$)上,电位函数应满足

$$\varphi_1(a,\phi)=\varphi_2(a,\phi),\ \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho} \tag{8.2.27}$$

在介质圆柱外,要满足边界条件(8.2.25),在通解(8.2.24)中须取 $n=1$,且不含 $\sin n\phi$ 项,即 $C_0=0$,$D_0=0$,$B_n=0(n=1,2,\cdots)$,$A_n=0(n\neq1)$,且

$$A_1C_1=-E_0$$

于是介质圆柱外的电位函数可写为

$$\varphi_2(\rho,\phi)=-E_0\rho\cos\phi+D'_2\rho^{-1}\cos\phi \tag{8.2.28}$$

介质圆柱内的电位函数 φ_1 应具有与式(8.2.28)相同的函数形式,即

$$\varphi_1(\rho,\phi)=C'_1\rho\cos\phi+D'_1\rho^{-1}\cos\phi$$

代入边界条件(8.2.26),可得 $D'=0$,于是

$$\varphi_1(\rho,\phi)=C'_1\rho\cos\phi \tag{8.2.29}$$

再将式(8.2.28)和式(8.2.29)代入边界条件(8.2.27),则有

$$\begin{cases}-E_0a+D'_2a^{-1}=C'_1a\\ \varepsilon_0E_0a^2+\varepsilon_0D'_2=-\varepsilon C'_1a^2\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases}C'_1=-\dfrac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\\ D'_2=\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0a^2\end{cases}$$

故介质圆柱内外的电位函数分别为

$$\varphi_1(\rho,\phi)=-\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\rho\cos\phi\qquad(\rho\leqslant a)$$

和

$$\varphi_2(\rho,\phi)=-E_0\rho\cos\phi+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0a^2\rho^{-1}\cos\phi\qquad(\rho\geqslant a)$$

介质圆柱内外的电场强度分别为

$$\boldsymbol{E}_1=-\nabla\varphi_1=-\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}-\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\phi}=$$

$$\boldsymbol{e}_\rho\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\sin\phi=\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0\qquad(\rho<a)$$

和

$$\boldsymbol{E}_2=-\nabla\varphi_2=-\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}-\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\phi}=$$

$$\boldsymbol{e}_\rho\left[\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\left(\frac{a}{\rho}\right)^2+1\right]E_0\cos\phi+\boldsymbol{e}_\phi\left[\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\left(\frac{a}{\rho}\right)^2-1\right]E_0\sin\phi=$$

$$\boldsymbol{E}_0+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\left(\frac{a}{\rho}\right)^2E_0(\boldsymbol{e}_\rho\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi)\qquad(\rho>a)$$

以上结果表明,介质圆柱体内的电场是均匀场,且与外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向相同。但由于

$2\varepsilon_0/(\varepsilon+\varepsilon_0)<1$，所以 $E_1<E_0$，这是因为介质圆柱面上的极化电荷在介质内产生的电场与外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向相反。介质圆柱内、外的电场分布如图 8－3 所示。

例 8.3 无限长磁介质圆柱形空腔的磁屏蔽效能。

如图 8－4 所示，磁导率为 μ 的磁介质构成的无限长圆柱形空腔，内、外半径分别为 a 和 b。设外加均匀恒定磁场 $\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{e}_x H_0$，试求无限长磁介质圆柱形空腔的磁屏蔽效能。

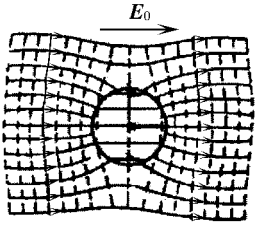


图 8－3 均匀外电场中介质圆柱体的电场

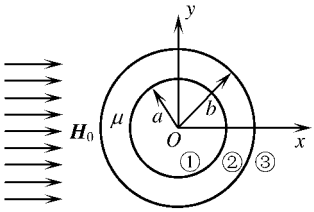


图 8－4 均匀外磁场中的无限长空心磁介质圆柱

解：导磁圆柱形空腔的磁屏蔽效能是指空腔内的磁场与外加磁场的比值。

此问题中无外加电流，故可用标量磁位 φ_{m} 来求解磁场。均匀恒定磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 的标量磁位 φ_{m0} 为

$$\varphi_{\mathrm{m0}}=-H_0 x=-H_0\rho\cos\phi$$

按照介质的不同特性，将空间划分为三个区域，相应的标量磁位分别为 φ_{m1}、φ_{m2} 和 φ_{m3}。它们应满足的边界条件为：

(1) 在介质圆柱内的 $\rho=0$ 处，φ_{m1} 应为有限值，即

$$\varphi_{\mathrm{m1}}(0,\phi)<\infty \tag{8.2.30}$$

(2) 在圆柱腔外，当 $\rho\to\infty$ 时，φ_{m3} 应趋于 φ_{m0}，即

$$\varphi_{\mathrm{m3}}(\rho,\phi)\to\varphi_{\mathrm{m0}}(\rho,\phi)=-H_0\rho\cos\phi \tag{8.2.31}$$

(3) 在圆柱空腔的内表面($\rho=a$)上，标量磁位应满足

$$\varphi_{\mathrm{m1}}(a,\phi)=\varphi_{\mathrm{m2}}(a,\phi),\mu_0=\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m1}}}{\partial\rho}=\mu\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m2}}}{\partial\rho} \tag{8.2.32}$$

在圆柱空腔的外表面($\rho=b$)上，标量磁位应满足

$$\varphi_{\mathrm{m2}}(b,\phi)=\varphi_{\mathrm{m3}}(a,\phi),\ \mu\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m2}}}{\partial\rho}=\mu_0\frac{\partial\varphi_{\mathrm{m3}}}{\partial\rho} \tag{8.2.33}$$

由此可知

$$\varphi_{\mathrm{m1}}(\rho,\phi)=F_1\rho\cos\phi \qquad (\rho\leqslant a)$$

$$\varphi_{\mathrm{m2}}(\rho,\phi)=F_2\rho\cos\phi+F_3\rho^{-1}\cos\phi \qquad (a\leqslant\rho\leqslant b)$$

$$\varphi_{\mathrm{m3}}(\rho,\phi)=-H_0\rho\cos\phi+F_4\rho^{-1}\cos\phi \qquad (\rho\geqslant b)$$

将上述表达式代入式(8.2.32)和式(8.2.33)，可得到

$$\begin{cases} aF_1 = aF_2 + a^{-1}F_3 \\ \mu_0 F_1 = \mu F_2 - \mu a^{-2}F_3 \\ bF_2 + b^{-1}F_3 = -H_0 b + b^{-1}F_4 \\ \mu F_2 - \mu b^{-2}F_3 = -\mu_0 H_0 - \mu_0 b^{-2}F_4 \end{cases}$$

由此解得

$$F_1 = -\frac{4\mu_0 \mu H_0}{(\mu_0+\mu)^2 - (\mu_0-\mu)^2 a^2/b^2}$$

所以，圆柱空腔内的标量磁位为

$$\varphi_{m1}(\rho,\phi) = \frac{4\mu_0 \mu H_0}{(\mu_0+\mu)^2 - (\mu_0-\mu)^2 a^2/b^2}\rho\cos\phi \qquad (\rho \leqslant a)$$

圆柱空腔内的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}_1 = -\nabla\varphi_{m1} = -\boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial\rho} - \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial\phi} =$$

$$\frac{4\mu_0\mu}{(\mu_0+\mu)^2 - (\mu_0-\mu)^2 a^2/b^2}\boldsymbol{H}_0 \qquad (\rho < a)$$

无限长导磁圆柱形空腔的磁屏蔽效能为

$$\frac{|\boldsymbol{H}_1|}{|\boldsymbol{H}_0|} = \frac{4\mu_0\mu}{(\mu_0+\mu)^2 - (\mu_0-\mu)^2 a^2/b^2} \tag{8.2.34}$$

若腔体为铁磁材料，则因其相对磁导率 $\mu_r \gg 1$，上式可近似为

$$\frac{\boldsymbol{H}_1}{\boldsymbol{H}_2} \approx \frac{4}{\mu_r(1-a^2/b^2)} \tag{8.2.35}$$

由此可见，磁屏蔽材料的相对磁导率 μ_r 愈大，或屏蔽层越厚(a/b 的值越小)，则屏蔽效能越好。介质圆柱腔内、外的磁场分布如图 8－5 所示。

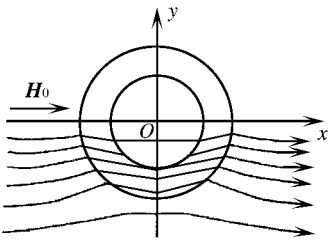


图 8－5　均匀外磁场中圆柱形空腔的磁屏蔽

8.2.3　球面坐标系中的分离变量法

具有球面边界的边值问题，宜采用球面坐标系中的分离变量法求解。在球面坐标系中，对于以极轴为对称轴的问题，位函数与坐标变量 ϕ 无关，则拉普拉斯方程为

$$\nabla^2\varphi(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{8.2.36}$$

令位函数 $\varphi(r,\theta)=R(r)F(\theta)$，代入上式，有

$$F(\theta)\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right] + R(r)\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}F(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right] = 0$$

将上式各项乘以 $\dfrac{r^2}{R(r)F(\theta)}$，可得

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right] = -\frac{1}{F(\theta)\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}F(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]$$

由于此式对 r 和 θ 取任意值时恒成立，所以式中的每一项都等于常数，即

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]=-\frac{1}{F(\theta)\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}F(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]=k^2$$

由此将拉普拉斯方程(8.2.36)分离成为两个常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]-k^2R(r)=0 \tag{8.2.37}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}F(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+k^2F(\theta)=0 \tag{8.2.38}$$

方程(8.2.38)称为勒让德方程。若分离常数 k 的取值为

$$k^2=n(n+1)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

则其解为

$$F(\theta)=A_n\mathrm{P}_n(\cos\theta)+B_n\mathrm{Q}_n(\cos\theta) \tag{8.2.39}$$

式中，$\mathrm{P}_n(\cos\theta)$、$\mathrm{Q}_n(\cos\theta)$分别是第一类、二类勒让德函数。对球形区域问题，θ 在闭区间 $[0,\pi]$上变化，而 $\mathrm{Q}_n(\cos\theta)$在 $\theta=0$ 和 π 时是发散的。所以，当场域包含 $\theta=0$ 和 π 的点时，在式(8.2.39)中则应取 $B_n=0$，即

$$F(\theta)=A_n\mathrm{P}_n(\cos\theta) \tag{8.2.40}$$

$\mathrm{P}_n(\cos\theta)$又称为勒让德多项式，其一般表达式为

$$\mathrm{P}_n(\cos\theta)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\cos\theta)^n}[(\cos^2\theta-1)^n]\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{8.2.41}$$

下面给出前几个勒让德多项式的表达式为

$$\mathrm{P}_0(\cos\theta)=1$$

$$\mathrm{P}_1(\cos\theta)=\cos\theta$$

$$\mathrm{P}_2(\cos\theta)=\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}_3(\cos\theta)=\frac{5}{2}\cos^3\theta-\frac{3}{2}\cos\theta$$

当 $k^2=n(n+1)$时，方程(8.2.37)的解为

$$R(r)=C_nr^n+D_nr^{-(n+1)}$$

于是得到方程(8.2.36)的基本解为

$$\varphi(r,\theta)=[C_nr^n+D_nr^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta) \tag{8.2.42}$$

由 n 取所有可能数值时各解的线性组合，即得到球形区域中二维拉普拉斯方程(8.2.36)的通解为

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[C_nr^n+D_nr^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta) \tag{8.2.43}$$

式中的待定常数由具体问题所给定的边界条件确定。

例 8.4　均匀外电场中的导体球。

如图 8－6 所示，在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_zE_0$ 中，放置一个半径为 a 接地导体球，球外介质为空气。试求导体球外的电位函数和电场强度。

解:在外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 作用下,导体球面上会出现感应电荷分布,空间任一点的电位是均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电位与感应电荷产生的电位之和。因导体外的自由电荷体密度 $\rho=0$,所以电位函数满足拉普拉斯方程。又由于问题是关于极轴对称的,所以电位函数与变量 ϕ 无关,通解应为式(8.2.43)所示的形式。

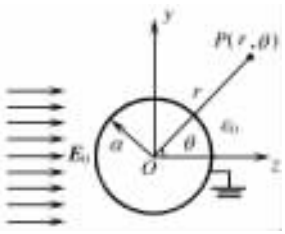


图 8-6 均匀外电场中的导体球

在导体球外,感应电荷的电场随 r 的增加而减弱,当 $r\to\infty$ 时减弱为零,故这些地方的电位函数 φ 与均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电位 φ_0 相同,即

$$\varphi(r,\theta)\to\varphi_0(r,\theta)=-E_0z=-E_0r\cos\theta\quad(r\to\infty)\tag{8.2.44}$$

将式(8.2.43)代入式(8.2.44),有

$$\sum_{n=0}^{\infty}[C_nr^n+D_nr^{-(n+1)}]\mathrm{P}_n(\cos\theta)\to E_0r\cos\theta\quad(r\to\infty)$$

所以得到

$$C_n=0,\ D_n=0(n\neq1),\ C_1=-E_0$$

于是

$$\varphi(r,\theta)=(-E_0r+D_1r^{-2})\mathrm{P}_1(\cos\theta)=(-E_0r+D_1r^{-2})\cos\theta$$

又由于导体球接地,所以 $r=a$ 时,$\varphi(a,\theta)=0$,即

$$(-E_0a+D_1a^{-2})\cos\theta=0$$

由此得到

$$D_1=a^3E_0$$

故导体球外的电位函数为

$$\varphi(r,\theta)=(-r+a^3r^{-2})E_0\cos\theta$$

导体球外的电场强度

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=$$

$$\boldsymbol{e}_r\left[1+2\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]E_0\cos\theta+\boldsymbol{e}_\theta\left[-1+\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]E_0\sin\theta=$$

$$\boldsymbol{E}_0+\left(\frac{a}{r}\right)^3E_0(\boldsymbol{e}_r2\cos\theta+\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta)$$

球面上的感应电荷面密度为

$$\rho_S=\varepsilon_0\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{E}\,|_{r=a}=3E_0\cos\theta$$

练 习 题

8.2-1 横截面为矩形的长槽由三块接地导体板构成,上边盖板的电位为 $\varphi=U_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$,如图 8-7 所示。求槽内的电位分布和电场强度。

8.2－2　如图 8－8 所示，横截面为矩形的封闭区域由四块导体板构成，左右两边的板接地，顶板和底板分别保持恒定电位 U_1 和 U_2。求矩形区域内的电位分布。

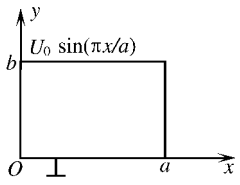


图 8－7　题 8.2－1 用图

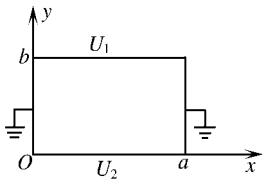


图 8－8　题 8.2－2 用图

8.2－3　在均匀电场 $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{e}_x E_0$ 中，垂直于电场方向放置一根无限长导体圆柱，圆柱的半径为 a。求导体圆柱外的电位 φ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 以及导体表面的感应电荷密度 ρ_S。

8.2－4　介电常数为 ε 无限大的介质中，外加均匀电场 $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{e}_z E_0$，在介质中有一个半径为 a 的球形空腔。求空腔内、外的电场 $\boldsymbol{E}$ 和空腔表面的极化电荷密度。

8.2－5　一个半径为 R 的介质球均匀极化，已知其极化强度 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{e}_z P_0$。求介质球内、外的电场。

8.3　镜像法

在静电场中，有时会遇到在导体表面或介质分界面附近的电荷的电场问题。显然，所求的电场是由给定的电荷与界面上的感应电荷或极化电荷共同产生的。对这类问题，可采用镜像法求解。

镜像法的基本思想是，在所研究的场域以外的某些适当的位置上，用一些虚设的电荷（称为镜像电荷）等效替代导体表面的感应电荷或介质分界面上的极化电荷。这样就把原来的边值问题的求解转换为均匀无界空间中的问题来求解。根据惟一性定理，只要虚设电荷与场域内原有的实际电荷一起所产生的电场满足原问题所给定的边界条件，所得结果就是原问题的解。

应用镜像法求解的关键在于如何确定像电荷。根据惟一性定理，镜像电荷的确定应遵循以下两条原则：

（1）所有镜像电荷必须位于所求的场域以外的空间中。

（2）镜像电荷的个数、位置及电荷量的大小以满足场域边界面上的边界条件来确定。

下面对典型的平面、球面和圆柱面镜像问题进行讨论。

8.3.1　导体平面的镜像

1. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像

如图 8－9 所示，有一个点电荷 q，位于无限大接地导体平面上方，与导体平面相距为 h。

在 $z>0$ 的上半空间中，除点电荷 q 所在点外，电位函数 φ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$。又由于导体平面接地，因此，在 $z=0$ 处，电位函数 $\varphi=0$。

若在导体平面下方与点电荷 q 对称的点 $(0,0,-h)$ 处放置一点电荷 $q' = -q$，并把无限大导体平面撤去，让整个空间充满介电常数为 ε 的均匀电介质，如图 8－10 所示。显然，

q 和 q' 共同产生的电位函数在导体平面的上半空间内满足所要求的全部条件。根据惟一性定理，可得到位于无限大接地导体平面上方的点电荷 q 产生的电位函数为

$$\varphi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\right]\quad(z\geqslant 0)\tag{8.3.1}$$

这表明，点电荷 q 关于无限大接地导体平面的像电荷 q' 的大小和位置为

$$q'=-q,\ z'=-h\tag{8.3.2}$$

导体平面上的感应电荷密度为

$$\rho_S=-\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{qh}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\tag{8.3.3}$$

导体平面上的总感应电荷为

$$q_{in}=\int_S\rho_S\mathrm{d}S=-\frac{qh}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}=$$

$$-\frac{qd}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}=-q\tag{8.3.4}$$

可见，导体平面上的总感应电荷恰好与所设置的像电荷相等。

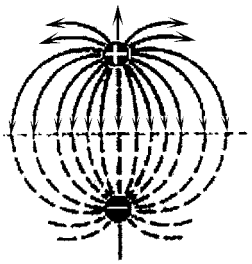


图 8－11　点电荷与导体平面之间的电力线分布

点电荷与导体平面之间的电力线分布如图 8－11 所示，其中实线是实际的电力线，虚线是假想的电力线。

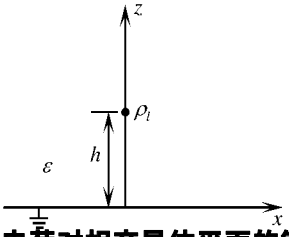
2. 线电荷对无限大接地导体平面的镜像

如图 8－12 所示，位于无限大接地导体平面上方的无限长直线电荷，单位长度带电量 ρ_l，与导体平面平行且相距为 h。与点电荷对无限大接地导体平面的镜像类似分析，可知其镜像电荷仍是无限长线电荷，如图 8－13 所示。镜像电荷的线密度和位置为

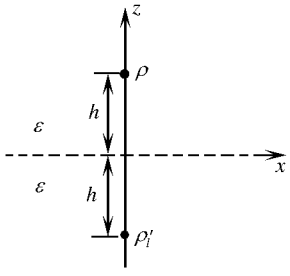
$$\rho'_l=-\rho_l,z'=-h\tag{8.3.5}$$

在 $z>0$ 的上半空间中，电位函数为

$$\varphi(x,y,z)=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{x^2+(z+h)^2}}{\sqrt{x^2+(z-h)^2}}\quad(z\geqslant 0)\tag{8.3.6}$$



无限大接地导体平面



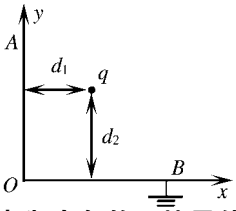
大接地导体平面的镜像

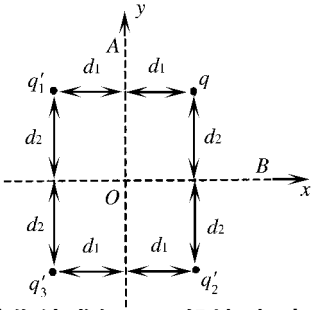
3. 点电荷对相交导体平面的镜像

点电荷对无限大导体平面的镜像，可应用到点电荷与相交的两块半无限大导体平面的情况，但仅用一个镜像电荷不能满足边界条件。

如图 8－14 所示是相互垂直的两块半无限大接地导体平面，点电荷 q 与两导体平面

的距离分别为 d_1 和 d_2。在第二象限内的位置“1”(点电荷 q 关于导体平面 OA 的对称点)处放置一个镜像电荷 $q'_1=-q$,这将使导体平面 OA 的电位为零,但导体平面 OB 的电位不为零。类似地,在第四象限内的位置“2”(点电荷 q 关于导体平面 OB 的对称点)处放置一个镜像电荷 $q'_2=-q$,将使导体平面 OB 的电位为零,但导体平面 OA 的电位不为零。如果在第三象限内的位置“3”(恰好是镜像电荷 q'_1 和 q'_2 分别关于导体平面 OA 和 OB 的对称点)处再放置一个镜像电荷 $q'_3=q$,根据对称性,这些镜像电荷将使得导体平面 OA 和 OB 的电位都为零。这说明,相互垂直的两块接地半无限大导体平面有三个镜像电荷,如图 8—15 所示。





不仅相交为直角的两块导体平面间的场可以用镜像法求解。一般地,相交的两块半无限大导体平面,只要交角为 π/n ($n=1,2,\cdots$)都可用镜像法求解,其镜像电荷共有 $2n-1$ 个。

与正交导体平面　　正交导体平面的镜像

例 8.5　真空中,电量为 1μC 的点电荷位于 $P(0,0,1)$ 处,xOy 平面是一个无限大的接地导体板。(1)求 z 轴上电位为 10^4 V 的点的坐标;(2)计算该点的电场强度。

解:(1) 根据镜像法可知上半空间的电位为

$$\varphi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+1)^2}}\right]$$

由

$$\varphi(0,0,z)=\frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z-1|}-\frac{1}{|z+1|}\right]=10^4$$

可解得

$$z_1=1.67\text{m},\ z_2=0.45\text{m}$$

(2) 当 $z>1$ 时,z 轴上的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(0,0,z)=\boldsymbol{e}_z\frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z+1)^2}\right]$$

将 $z_1=1.67$m 代入上式,得

$$\boldsymbol{E}(0,0,z_1)=\boldsymbol{e}_z\frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(1.67-1)^2}-\frac{1}{(1.67+1)^2}\right]=\boldsymbol{e}_z 1.88\times10^4\quad(\text{V/m})$$

当 $z<1$ 时,z 轴上的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(0,0,z)=-\boldsymbol{e}_z\frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\right]$$

将 $z_2=0.45$m 代入上式,得

$$\boldsymbol{E}(0,0,z_2) = -\boldsymbol{e}_z \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(0.45-1)^2} - \frac{1}{(0.45+1)^2}\right] = -\boldsymbol{e}_z 3.41\times 10^4 \quad (\mathrm{V/m})$$

例 8.6 一个点电荷 q 与无限大导体平面距离为 d，如果把它移到无穷远处，需要做多少功？

解：点电荷位于接地导体平面附近时，导体平面上有感应电荷。可先利用镜像法求出感应电荷产生的电场 $\boldsymbol{E}$，然后由 $W_e = \int_d^\infty q\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 计算出电场所做的功。

当点电荷 q 移动到距离导体平面为 x 的点 P 处时，其像电荷 $q'=-q$，与导体平面相距为 $x'=-x$，如图 8－16 所示。像电荷 q' 在点 P 处产生的电场为

$$\boldsymbol{E}'(x) = \boldsymbol{e}_x \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2}$$

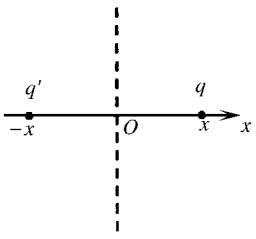


图 8－16 点电荷与无限大接地导体平面的镜像

所以将点电荷 q 移到无穷远处时，电场所做的功为

$$W_e = \int_d^\infty q\boldsymbol{E}'(x)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_d^\infty \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2}\mathrm{d}x = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 \mathrm{d}}$$

外力所做的功等于电场所作的功的负值，即

$$W_o = -W_e = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$$

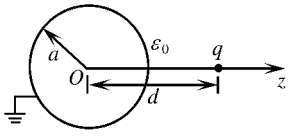
注意：由于点电荷 q 移动的过程中，导体平面上的感应电荷面密度要发生变化，所以镜像电荷的位置也在变化，因此不能用 $W_e = q\varphi'$ 来求电场所做的功。

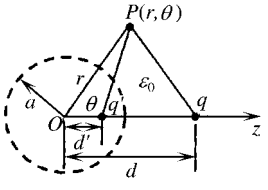
8.3.2 导体球面镜像

当一个点电荷位于一个导体球面附近时，这类问题也可用镜像法求解。

1. 点电荷对接地导体球面的镜像

如图 8－17 所示，点电荷 q 位于一个半径为 a 的接地导体球外，距球心为 d。点电荷 q 将在导体球面上产生感应电荷，导体球外的电位由点电荷与感应电荷共同产生。把导体球面移去，用一个镜像电荷来等效球面上的感应电荷。为了不改变球外的电荷分布，镜像电荷必须放置在导体球面内。又由于对称性，镜像电荷应位于球心与点电荷 q 的连线上，如图 8－18 所示。设镜像电荷为 q'，与球心相距为 d'，则由 q 和 q' 产生的电位函数为





与接地导体球面　　接地导体球面的镜像

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} - \frac{q'}{\sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos\theta}}\right]$$

由于导体球接地，在球面 $r=a$ 处，$\varphi=0$。于是有

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}} - \frac{q'}{\sqrt{a^2+d'^2-2ad'\cos\theta}}\right] = 0$$

经整理，可得

$$(a^2+d^2)q'^2-(a^2+d'^2)q^2-2a\cos\theta(dq'^2-d'q^2)=0$$

因上式对任意的 θ 都成立，所以

$$\begin{cases}(a^2+d^2)q'^2-(a^2+d'^2)q^2=0\\ dq'^2-d'q^2=0\end{cases}$$

由此解得

$$q'=-\frac{a}{d}q,\ d'=\frac{a^2}{d} \tag{8.3.7}$$

和

$$q'=-q, d'=d\ (\text{无意义，舍去})$$

根据惟一性定理，得到球外的电位函数为

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}-\frac{a}{d\sqrt{r^2+(a^2/d)^2-2r(a^2/d)\cos\theta}}\right]\quad(r\geqslant a) \tag{8.3.8}$$

球面上的感应电荷面密度为

$$\rho_S=-\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}=-\frac{q(d^2-a^2)}{4\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \tag{8.3.9}$$

导体球面上的总感应电荷为

$$q_{in}=\int_S\rho_S\mathrm{d}S=-\frac{q(d^2-a^2)}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}}=-\frac{a}{d}q \tag{8.3.10}$$

可见，导体球面上的总感应电荷也与所设置的镜像电荷相等。

以上讨论的是点电荷位于接地导体球面外的情况。如果点电荷 q 位于一个半径为 a 的接地导体球面内，距球心为 $d(d<a)$，也可类似以上方法处理，在这种情况下，镜像电荷应放置在球外，且在球心与点电荷 q 的连线的延长线上。设镜像电荷为 q'，距球心为 h'，仿照上面的做法，可得到

$$q'=-\frac{a}{d}q,\ d'=\frac{a^2}{d} \tag{8.3.11}$$

由于 $d<a$，所以必有 $|q'|>|q|$。也就是说，这种情况下，镜像电荷的电荷量大于点电荷 q 的电荷量。

当点电荷位于接地导体球面内时，球面外的电位 $\varphi=0$，球面内的电位函数表达式与式(8.3.8)相同。但感应电荷分布在导体球面的内表面上，其电荷面密度为

$$\rho_S=\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}=-\frac{q(a^2-d^2)}{4\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \tag{8.3.12}$$

导体球面上的总感应电荷为

$$q_{in}=\int_S\rho_S\mathrm{d}S=-\frac{q(a^2-d^2)}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}}=-q \tag{8.3.13}$$

可见，在这种情况下，镜像电荷与感应电荷的电荷量不相等。

2. 点电荷对不接地导体球面的镜像

设点电荷 q 位于一个半径为 a 的不接地导体球外，距球心为 d。由于导体球不接地，导体球面是电位不为零的等位面，且球面上既有感应负电荷分布也有感应正电荷分布，但总的感应电荷为零，可采用叠加原理来确定镜像电荷。先设想导体球是接地的，则球面上只有总电荷量为 q' 的感应电荷分布，其镜像电荷由式(8.3.7)确定。然后断开接地线，并将电荷 $-q'$ 加于导体球上，从而使总电荷为零。为使导体球面为等位面，所加的电荷 $-q'$ 应均匀分布在导体球面上。因此，电荷 $-q'$ 可用一个位于球心的镜像电荷 $q''=-q'$ 来替代，如图 8－19 所示。

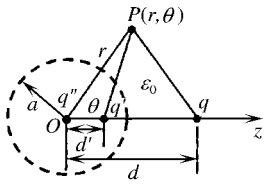


图 8－19　点电荷与不接地导体球面的镜像

例 8.7　真空中一个点电荷 $q=10^{-6}$C，位于一个半径 $a=5$cm 的导体球壳附近，距球心为 $d=15$cm。(1)当导体球壳接地时，求点电荷 q 受到的电场力；(2)若导体球壳不接地，点电荷 q 受到的电场力又为多少。

解：(1)根据球面镜像可知，当导体球壳接地时，镜像电荷为

$$q'=-\frac{a}{d}q=-\frac{1}{3}q,\ d'=\frac{a^2}{d}=\frac{5}{3}\text{cm}$$

点电荷 q 受到的电场力等于镜像电荷 q' 对 q 的作用力，故

$$F=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(d-d')^2}=\frac{10^{-6}\times\left(-\frac{1}{3}\times10^{-6}\right)}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\left(15\times10^{-2}-\frac{5}{3}\times10^{-2}\right)^2}=-0.169\ \text{N}$$

(2) 当导体球壳不接地时，镜像电荷为

$$q'=-\frac{1}{3}q,\ d'=\frac{5}{3}\ \text{cm}$$

$$q''=\frac{1}{3}q,\ d''=0$$

点电荷 q 受到的电场力等于镜像电荷 q' 和 q'' 对 q 的作用力之和，故

$$F=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(d-d')^2}+\frac{qq''}{4\pi\varepsilon_0 d^2}=$$

$$-0.169+0.133=-0.036\ \text{N}$$

8.3.3　导体圆柱面镜像

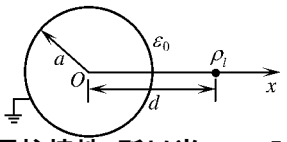
1. 线电荷对导体圆柱的镜像

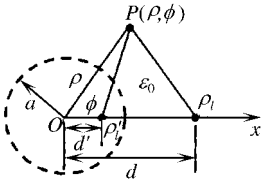
如图 8－20 所示，一根电荷线密度为 ρ_l 的无限长线电荷位于半径为 a 的无限长接地导体圆柱面外，与圆柱的轴线平行且到轴线的距离为 d。

在用镜像法解此问题时，为使导体圆柱面上的电位为零，镜像电荷应是圆柱面内部与轴线平行的无限长线电荷。由于对称性，镜像电荷必定位于线电荷与圆柱轴线所决定的平面上，如图 8－21 所示。设镜像电荷的线密度为 ρ'_l 且距圆柱的轴线为 d'，则由 ρ_l 和 ρ'_l

共同产生的电位函数为

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{\sqrt{\rho^2+d^2-2\rho d\cos\phi}}-\frac{\rho'_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{\sqrt{\rho^2+d'^2-2\rho d'\cos\phi}}+C$$





由于导体圆柱接地，所以当 $\rho=a$ 时，电位应为零，即

荷与导体圆柱　　与导体圆柱的镜像

$$\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{a\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\phi}}-\frac{\rho'_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{\sqrt{a^2+d'^2-2ad'\cos\phi}}+C=0$$

由于上式对任意的 ϕ 都成立，因此，将上式对 ϕ 求导，可以得到

$$\rho_l d(a^2+d^2)+\rho'_l d'(a^2+d'^2)-2ad d'(\rho_1+\rho'_1)\cos\theta=0$$

所以有

$$\begin{cases}\rho_1 d(a^2+d^2)+\rho'_l d'(a^2+d'^2)=0\\ \rho_l+\rho'_l=0\end{cases}$$

由以上两式可解出镜像线电荷的大小和位置分别为

$$\rho'_l=-\rho_l,\ d'=\frac{a^2}{d} \tag{8.3.14}$$

和

$$\rho'_l=-\rho_l,\ d'=d\ (\text{无意义，舍去})$$

根据惟一性定理，可得到导体圆柱面外的电位函数为

$$\varphi=\frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{d^2\rho^2+a^4-2\rho d a^2\cos\phi}}{d\sqrt{\rho^2+d^2-2\rho d\cos\phi}}+C$$

由 $r=a$ 时 $\varphi=0$，可得到 $C=\frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{a}$，故

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{d^2\rho^2+a^4-2\rho d a^2\cos\phi}}{\sqrt{a^2\rho^2+a^2d^2-2\rho d a^2\cos\phi}} \tag{8.3.15}$$

导体圆柱面上的感应电荷面密度为

$$\rho_S=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a}=-\frac{\rho_l(d^2-a^2)}{2\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\phi)} \tag{8.3.16}$$

导体圆柱面上单位长度的感应电荷为

$$q_{\text{in}}=\int_S\rho_S\,\mathrm{d}S=-\frac{\rho_l(d^2-a^2)}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{ad\phi}{a^2+d^2-2ad\cos\phi}=-\rho_l \tag{8.3.17}$$

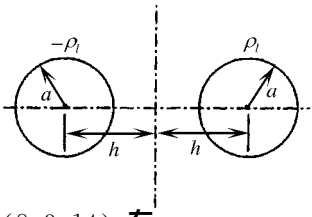
可见，导体圆柱面上单位长度的感应电荷也与所设置的镜像电荷相等。

2. **两平行圆柱导体的电轴**

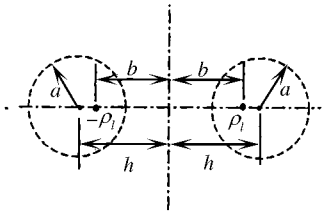
上述线电荷与接地导体圆柱面的镜像，可以用于分析两半径相同、带有等量异号电荷

的平行无限长直导体圆柱间的电场问题。这种情况在电力传输、通信工程中有着广泛的实际应用。

如图 8－22 所示，设两平行导体圆柱的半径均为 a，两导体轴线间距为 $2h$，单位长度分别带电荷 ρ_l 和 $-\rho_l$。由于两圆柱带电导体的电场互相影响，使导体表面的电荷分布不均匀，相对的一侧电荷密度大，而相背的一侧电荷密度较小。根据线电荷对导体圆柱的镜像，可以设想将两圆柱导体撤去，其表面上的电荷用线密度分别为 ρ_l 和 $-\rho_l$、且相距为 $2b$ 的两根无限长带电细线来等效替代，如图 8－23 所示。带电细线的所在的位置称为带电圆柱导体的电轴，因而这种方法又称为电轴法。



平行圆柱导体



圆柱导体的电轴

由式(8.3.14)，有

$$(h-b)(h+b)=a^2$$

由此解得

$$b=\sqrt{h^2-a^2} \tag{8.3.18}$$

例 8.8 如图8－24 所示，一根与地面平行架设的圆柱导线，半径为 a，悬挂高度为 h。(1)证明：单位长度上圆柱导线与地面间的电容为 $C_0=\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\operatorname{arcosh}(h/a)}$；(2)若导线与地面间的电压为 U_0，证明：地面对导线单位长度的作用力 $F_0=\dfrac{\pi\varepsilon_0 U_0^2}{[\operatorname{arcosh}(h/a)]^2(h^2-a^2)^{1/2}}$。

解：(1) 地面的影响可用一个镜像圆柱来等效。设圆柱导线单位长度带电荷为 q_l，则镜像圆柱单位长度带电荷为 $-q_l$。根据电轴法，电荷 q_l 和 $-q_l$ 可用位于电轴上的线电荷来等效代替，如图 8－25 所示。因此，导线与地面间的电位差为

$$\varphi_0=\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{a-(h-b)}-\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{b+(h-a)}=$$

$$\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{h^2-a^2}+(h-a)}{\sqrt{h^2-a^2}-(h-a)}=$$

$$\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{h^2-a^2}+h}{a}=\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\operatorname{arcosh}\left(\frac{h}{a}\right)$$

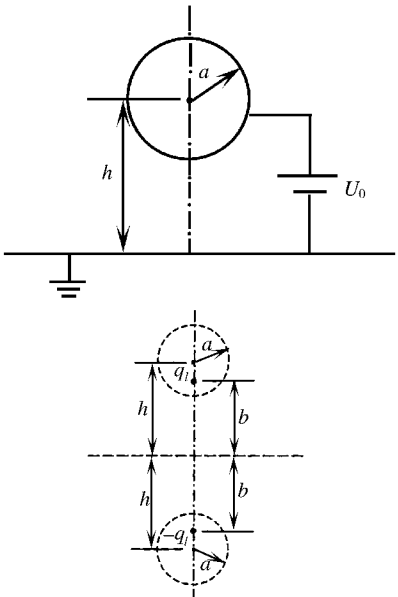
故单位长度上圆柱导线与地面间的电容为

地面的圆柱导线　　面的圆柱导线的镜像

$$C_0=\frac{q_1}{\varphi_0}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\operatorname{arcosh}(h/a)}$$

(2) 导线单位长度上的电场能量为

$$W_e=\frac{1}{2}C_0U_0^2=\frac{\pi\varepsilon_0U_0^2}{\operatorname{arcosh}(h/a)}$$



由虚位移法，可得地面对导线单位长度的作用力为

$$F_0 = \frac{\partial W_e}{\partial h}\bigg|_{U_0\text{不变}} = \frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{\pi\varepsilon_0 U_0^2}{\operatorname{arcosh}(h/a)}\right] = \frac{\pi\varepsilon_0 U_0^2}{[\operatorname{arcosh}(h/a)]^2 (h^2 - a^2)^{1/2}}$$

8.3.4 介质平面的镜像

含有无限大介质分界平面的问题，也可采用镜像法求解。

1. 点电荷对电介质分界平面的镜像

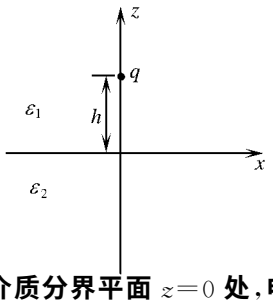
如图 8－26 所示，介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的两种不同介质，各均匀充满半个无限大空间，其分界面是无限大平面，在电介质 1 中有一个点电荷 q，距分界平面为 h。

在点电荷 q 的电场作用下，电介质产生极化，在介质分界面上形成极化电荷分布。此时，空间中任一点的电场由点电荷 q 与极化电荷共同产生。依据镜像法的基本思想，在计算电介质 1 中的电位时，用位于介质 2 中的镜像电荷 q' 来代替分界面上的极化电荷，并把整个空间看作充满介电常数为 ε_1 的均匀介质，如图 8－27 所示。在计算电介质 2 中的电位时，用位于介质 1 中的镜像电荷 q'' 来代替分界面上的极化电荷，并把整个空间看作充满介电常数为 ε_2 的均匀介质，如图 8－28 所示。于是介质 1 和介质 2 中的电位分别为

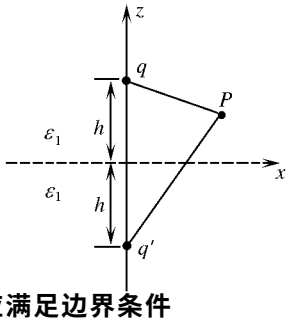
$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} - \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\right] \quad z \geqslant 0 \tag{8.3.19}$$

和

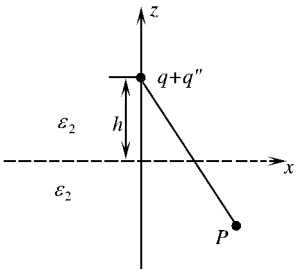
$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q+q''}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} \qquad (z \leqslant 0) \tag{8.3.20}$$



电荷与电介质平面



介质 1 的电荷



介质 2 的电荷

在介质分界平面 $z=0$ 处，电位应满足边界条件

$$\begin{cases}\varphi_1\big|_{z=0}=\varphi_2\big|_{z=0}\\ \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}\end{cases}\tag{8.3.21}$$

将式(8.3.19)和式(8.3.20)代入式(8.3.21)，可得到

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_1}(q+q')=\dfrac{1}{\varepsilon_2}(q+q'')\\ q-q'=q+q''\end{cases}$$

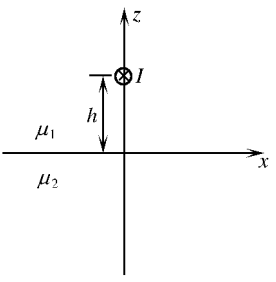
由此解得镜像电荷 q' 和 q'' 分别为

$$q'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q,\quad q''=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q\tag{8.3.22}$$

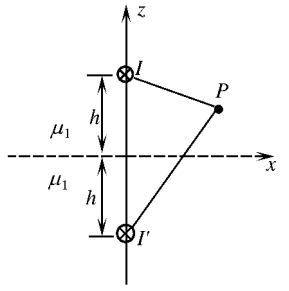
2. 线电流对磁介质分界平面的镜像

与静电问题类似，当线电流位于两种不同磁介质分界平面附近时，也可用镜像法求解。

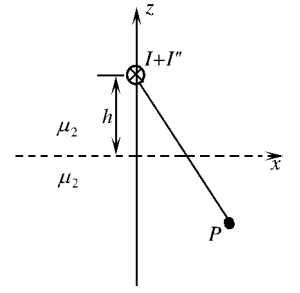
如图 8－29 所示，磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种不同均匀磁介质的分界面是无限大平面，在介质 1 中有一根无限长直线电流 I 平行于分界平面，且与分界平面相距为 h。此时，在介质分界面上有磁化电流分布，空间中的磁场由线电流 I 与磁化电流共同产生。依据镜像法的基本思想，在计算磁介质 1 中的磁场时，用位于介质 2 中的镜像线电流 I' 来代替分界面上的磁化电流，并把整个空间看作充满磁导率为 μ_1 的均匀介质，如图 8－30 所示。在计算磁介质 2 中的磁场时，用位于介质 1 中的镜像线电流 I'' 来代替分界面上的磁化电流，并把整个空间看作充满磁导率为 μ_2 的均匀介质，如图 8－31 所示。



电流与磁介质平面



磁介质 1 的线电流



磁介质 2 的线电流

由于电流沿 y 轴方向流动，所以矢量磁位只有 y 分量，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_yA$。因此，介质 1 和介

质 2 中的矢量磁位分别为

$$A_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-h)^2}} + \frac{\mu_1 I'}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(z+h)^2}} \qquad (z \geqslant 0) \tag{8.3.23}$$

和

$$A_2 = \frac{\mu_2 (I+I'')}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-h)^2}} \qquad (z \leqslant 0) \tag{8.3.24}$$

在介质分界平面 $z=0$ 处，矢量磁位应满足边界条件

$$\begin{cases} A_1\big|_{z=0} = A_2\big|_{z=0} \\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial A_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial A_2}{\partial z}\bigg|_{z=0} \end{cases} \tag{8.3.25}$$

将式(8.3.23)和式(8.3.24)代入式(8.3.25)，可得

$$\begin{cases} \mu_1(I+I') = \mu_2(I+I'') \\ I - I' = I + I'' \end{cases}$$

由此解得镜像电流 I' 和 I'' 分别为

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I, \quad I'' = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \tag{8.3.26}$$

练　习　题

8.3－1　一个电荷量为 q、质量为 m 的小带电体，放置在无限大导体平面下方，与平面相距为 h。求 q 的值以使带电体上受到的静电力恰与重力相平衡(设 $m=2\times10^{-3}$kg，$h=0.02$m)。

8.3－2　如图 8－32 所示，一个点电荷 q 放在 60°的接地导体角域内的点(1,1,0)处。求：(1)所有镜像电荷的位置和大小；(2)点(2,1,0)处的电位。

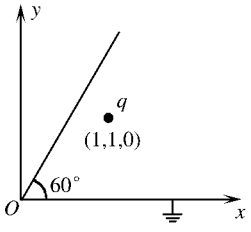


图 8－32　题 8.3－2 用图

8.3－3　真空中一个点电荷 $q=10^{-6}$C，放在半径 $a=5$cm 的不接地导体球壳外，距球心为 $d=15$cm 处。球面上何处的电场强度的值最大？其数值为多少？

8.3－4　半径为 a 的接地导体球外距球心 d 处放置一个点电荷 q。(1)求点电荷 q 受到的静电力；(2)若导体球未接地且带电荷为 Q，试证明：当

$$\frac{Q}{q} = \frac{a^3(2d^2-a^2)}{d(d^2-a^2)^2}$$

时，点电荷 q 受到的静电力为零。

8.3－5　如图 8－33 所示，半径为 a 的长直导线架在空中，导线与墙和地面都平行，距墙和地面分别为 d_1 和 d_2，且 $d_1 \gg a$、$d_2 \gg a$。若将墙和地面均视为理想导体，试求此导线与地之间每单位长度的电容。

8.3－6　在 $z<0$ 的下半空间是介电常数为 ε 的介质，上半空间为空气，距离介质平面距为 h 处有一点电荷 q，求：(1)$z>0$ 和 $z<0$ 的两个半空间内的电位；(2)介质表面上的

极化电荷密度，并证明表面上极化电荷总电量等于镜像电荷 q'。

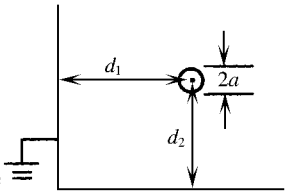


图 8－33　题 8.3－5 用图

8.4　有限差分法

有限差分法是求解边值问题的一种经典数值方法，它的基本思想是将场域划分成网格，用网格节点的差分方程近似代替场域内的偏微分方程，然后解这些差分方程求出各离散节点上位函数的值。一般来说，只要划分得充分细，其结果可达到足够的精度。差分网格的划分有多种不同的方式，这里仅讨论二维拉普拉斯方程的正方形网格划分方法。

8.4.1　有限差分方程

在一个边界为 C 的二维区域 S 内，电位函数 $\varphi(x,y)$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{8.4.1}$$

在边界 C 上给定第一类边界条件，即

$$\varphi\,|_C=f(x,y) \tag{8.4.2}$$

如图 8－34 所示，用分别平行于 x、y 轴的两组直线把场域 S 划分成许多正方形网格，网格线的交点称为节点，两相邻平行网格线间的距离 h 称为步距。

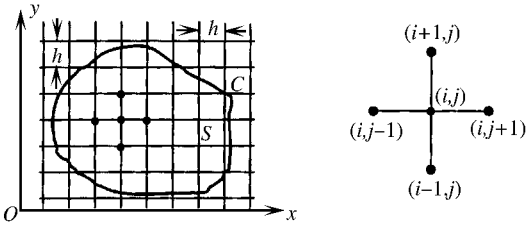


图 8－34　场域的正方形网格划分

用 $\varphi_{i,j}$ 表示节点 (x_i,y_j) 处的电位值。利用二元函数的泰勒展开式，可将与节点 (x_i,y_j) 直接相邻的节点上的电位值表示为

$$\varphi_{i-1,j}=\varphi(x_i-h,y_j)=\varphi_{i,j}-h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{i,j}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{i,j}-\cdots \tag{8.4.3}$$

$$\varphi_{i+1,j}=\varphi(x_i+h,y_j)=\varphi_{i,j}+h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{i,j}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{i,j}-\cdots \tag{8.4.4}$$

$$\varphi_{i,j-1}=\varphi(x_i,y_j-h)=\varphi_{i,j}-h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{i,j}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{i,j}-\cdots \tag{8.4.5}$$

$$\varphi_{i,j+1}=\varphi(x_i,y_j+h)=\varphi_{i,j}+h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{i,j}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{i,j}-\cdots \tag{8.4.6}$$

将式(8.4.3)与式(8.4.4)相加，并略去比 h^2 更高阶的项，可得

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{i,j}=\frac{\varphi_{i-1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i+1,j}}{h^2} \tag{8.4.7}$$

同理，由式(8.4.5)与式(8.4.6)，可得

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{i,j}=\frac{\varphi_{i,j-1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j+1}}{h^2} \tag{8.4.8}$$

将式(8.4.7)与式(8.4.8)代入式(8.4.1),可得到节点(x_i,y_j)处的差分方程为

$$\varphi_{i,j}=\frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i,j-1}+\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i,j+1}) \tag{8.4.9}$$

这就是二维拉普拉斯方程的差分格式,它将场域内任一点的位函数值表示为周围直接相邻的四个节点上位函数值的平均值。这一关系式对场域内的每一个节点都成立,也就是说,对场域内的每一个节点都可以列出一个式(8.4.9)形式的差分方程,所有节点的差分方程构成联立差分方程组。

已知的边界条件经离散化后成为边界节点上的已知数值。若场域的边界正好落在网格节点上,则将这些节点赋予边界上的位函数值。一般情况下,场域的边界不一定正好落在网格节点上,最简单的近似处理就是将最靠近边界的节点作为边界节点,并将位函数的边界值赋予这些节点。

8.4.2 差分方程的求解方法

在求解实际问题时,为了达到足够的精度,需将网格划分得充分细,节点的个数很多,联立差分方程的数目很大。因此,通常应用迭代法求解差分方程组。

1. 简单迭代法

这一方法的求解过程是,先对场域内的节点赋予迭代初值$\varphi_{i,j}^{(0)}$,这里上标(0)表示0次(初始)近似值。然后再按

$$\varphi_{i,j}^{(k+1)}=\frac{1}{4}[\varphi_{i-1,j}^{(k)}+\varphi_{i,j-1}^{(k)}+\varphi_{i+1,j}^{(k)}+\varphi_{i,j+1}^{(k)}]\quad(i,j=1,2,\cdots) \tag{8.4.10}$$

进行反复迭代($k=0,1,2,\cdots$)。若当第N次迭代以后,所有内节点的相邻两次迭代值之间的最大误差不超过允许范围,即

$$\max_{i,j}|\varphi_{i,j}^{(N)}-\varphi_{i,j}^{(N-1)}|<W \tag{8.4.11}$$

这里W是预定的允许误差,则终止迭代并将第N次迭代结果作为内节点上电位的最终数值解。

例8.9 有一个无限长直的金属槽,截面为正方形,两侧面及底板接地,上盖板与侧面绝缘,其上的电位为$\varphi=100\text{V}$,试用有限差分法计算槽内的电位。

解:如图8—35所示,将场域划分为16个网格,共有25个节点,其中16个边界节点的电位值是已知的,要计算的是9个内节点的电位值。

设内节点上电位的初始迭代值为

$$\begin{cases}\varphi_{1,1}^{(0)}=\varphi_{2,1}^{(0)}=\varphi_{3,1}^{(0)}=25\\ \varphi_{1,2}^{(0)}=\varphi_{2,2}^{(0)}=\varphi_{3,2}^{(0)}=50\\ \varphi_{1,3}^{(0)}=\varphi_{2,3}^{(0)}=\varphi_{3,3}^{(0)}=75\end{cases} \tag{8.4.12}$$

代入式(8.4.10),得到内节点上电位的一次迭代值为

$$\varphi_{1,1}^{(1)}=18.75,\quad \varphi_{2,1}^{(1)}=25,\quad \varphi_{3,1}^{(1)}=18.75$$
$$\varphi_{1,2}^{(1)}=37.5,\quad \varphi_{2,2}^{(1)}=50,\quad \varphi_{3,2}^{(1)}=37.5$$
$$\varphi_{1,3}^{(1)}=56.25,\quad \varphi_{2,3}^{(1)}=75,\quad \varphi_{3,3}^{(1)}=56.25$$

将此一次迭代值代入式(8.4.10),得到内节点上电位的二次迭代值为

$$\varphi_{1,1}^{(2)}=15.625,\quad \varphi_{2,1}^{(2)}=21.875,\quad \varphi_{3,1}^{(2)}=15.625$$
$$\varphi_{1,2}^{(2)}=31.25,\quad \varphi_{2,2}^{(2)}=43.75,\quad \varphi_{3,2}^{(2)}=31.25$$
$$\varphi_{1,3}^{(2)}=53.125,\quad \varphi_{2,3}^{(2)}=65.625,\quad \varphi_{3,3}^{(2)}=53.125$$

照此迭代下去,计算到 $\varphi_{i,j}^{(28)}$ 时,发现 $\max\limits_{i,j}|\varphi_{i,j}^{(28)}-\varphi_{i,j}^{(27)}|$ 小于 10^{-3}。取 $\varphi_{i,j}^{(28)}$ 作为内节点上电位的最终近似值,则有

$$\varphi_{1,1}=7.144,\quad \varphi_{2,1}=9.823,\quad \varphi_{3,1}=7.144$$
$$\varphi_{1,2}=18.751,\quad \varphi_{2,2}=25.002,\quad \varphi_{3,2}=18.751$$
$$\varphi_{1,3}=42.857,\quad \varphi_{2,3}=52.680,\quad \varphi_{3,3}=42.857$$

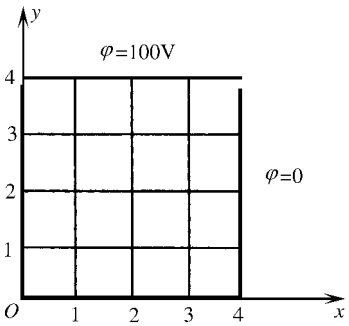


图 8－35　例 8.9 的网格划分

2. 超松弛迭代法

简单迭代法的收敛速度较慢,为了加快收敛速度,实际中常采用超松弛迭代法。这一方法采用了变化量加权迭代,其迭代过程为

$$\varphi_{i,j}^{(k+1)}=\varphi_{i,j}^{(k)}+\alpha[\tilde{\varphi}_{i,j}^{(k+1)}-\varphi_{i,j}^{(k)}] \tag{8.4.13}$$

其中

$$\tilde{\varphi}_{i,j}^{(k+1)}=\frac{1}{4}[\varphi_{i-1,j}^{(k+1)}+\varphi_{i,j-1}^{(k+1)}+\varphi_{i+1,j}^{(k)}+\varphi_{i,j+1}^{(k)}] \tag{8.4.14}$$

α 是一个加速收敛因子,称为松弛因子,它的取值范围在 1 与 2 之间。α 有一个最优值 α_{opt},称为最佳收敛因子,当 $\alpha=\alpha_{\text{opt}}$ 时,迭代过程收敛速度最快。在一般情况下,如何选择最佳收敛因子是一个很复杂的问题。若正方形区域划分为正方形网格时,每边的节点数为 p,则最佳收敛因子为

$$\alpha_{\text{opt}}=\frac{2}{1+\sin\left(\dfrac{\pi}{p-1}\right)} \tag{8.4.15}$$

从式(8.4.13)可知,在计算 $\tilde{\varphi}_{i,j}^{(k+1)}$ 时,利用了 $\varphi_{i-1,j}^{(k+1)}$ 和 $\varphi_{i,j-1}^{(k+1)}$ 两个第 $k+1$ 次近似值,因此,网格节点必须按照一定顺序排列。通常采取"从左到右",再"从下到上"的自然顺序排列,并按自然顺序进行迭代过程。

再用超松弛迭代法来求解例 8.9。由式(8.4.15),可得到最佳收敛因子为 $\alpha_{\text{opt}}=1.17$。仍取式(8.4.12)作为初始迭代值,代入式(8.4.13)和式(8.4.14),可得到内节点上电位的一次迭代值为

$$\varphi_{1,1}^{(1)}=17.69,\quad \varphi_{2,1}^{(1)}=22.86,\quad \varphi_{3,1}^{(1)}=17.06$$
$$\varphi_{1,2}^{(1)}=33.24,\quad \varphi_{2,2}^{(1)}=44.47,\quad \varphi_{3,2}^{(1)}=31.44$$
$$\varphi_{1,3}^{(1)}=48.16,\quad \varphi_{2,3}^{(1)}=65.53,\quad \varphi_{3,3}^{(1)}=44.86$$

照此迭代 10 次时,就能达到相邻两次迭代值的最大绝对误差小于 10^{-3}。

练　习　题

8.4－1　在例 8.8 中,若正方形的边长 10cm,顶盖电位

$\varphi=100\sin\frac{\pi x}{10}$，试用有限差分法求槽内的电位分布。

8.4－2　如图 8－36 所示，若采用长方形网格进行场域划分，试导出此时与二维拉普拉斯相应的差分格式。

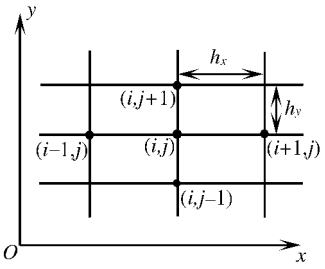


图 8－36　长方形网格划分

8.5　有■限■元■法

有限元法也是一种通过对场域离散化来求出数值解的方法，已广泛应用于求解电磁场问题，成为各种先进、实用的电磁场数值计算软件包的构成基础。

有限元法基于变分原理和剖分插值。首先将边值问题转化为相应的变分问题，即泛函极值问题。然后利用剖分插值，将变分问题离散成多元函数的极值问题，最终归结为求解一组多元的线性方程。

下面以二维拉普拉斯方程的第一类边值问题为例，概述有限元法的基本应用原理。

8.5.1　泛函极值问题的构成

设在曲线 C 为边界的场域 S 内，电位函数 φ 的边值问题为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{8.5.1}$$

$$\varphi\,|_C=f(x,y) \tag{8.5.2}$$

在场域 S 内的电场能量为

$$W=\frac{\varepsilon}{2}\iint_S\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8.5.3}$$

可以看出，对于不同的电位函数 φ，电场能量有不同的值。因此，电场能量 W 是电位 φ 的函数，称为能量泛函。可以证明，在边界条件(8.5.2)下，使电场能量 W 取得极小值的电位函数 φ 必定满足方程(8.5.1)。这就表明，与式(8.5.1)和式(8.5.2)构成的边值问题等价的泛函极值问题为

$$\begin{cases}W=\dfrac{\varepsilon}{2}\iint_S\left[\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\min\\ \varphi\,|_C=f(x,y)\end{cases} \tag{8.5.4}$$

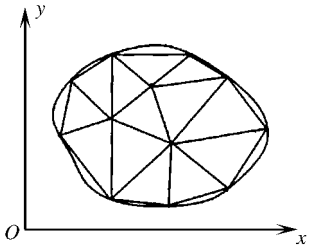
8.5.2　场域的剖分与插值

如图 8－37 所示的三角形单元剖分是最常用的二维场域剖分方法。各三角形单元的形状和大小可以是任意的，因此，有限元法的场域剖分较为灵活，能较好地适应边界形状。但在场域剖分时应注意：(1)任何一个三角形单元的顶点必须同时为其相邻三角形单元的顶点；(2)相邻的单元既不能相互重叠也不能相互分离；(3)各单元节点编号顺序一律按逆时针方向进行。

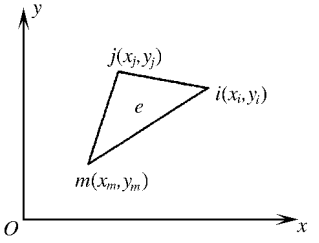
线性插值是最常用的插值方式。任取一个单元，设其编号为 e，其三个顶点编号按逆

时针顺序标记 i、j 和 m，如图 8－38 所示。将单元内任一点的位函数 $\varphi(x,y)$ 用 x、y 的线性函数来近似，即

$$\varphi(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y \tag{8.5.5}$$



域的三角剖分



元 e 的节点标记

把该单元的三个顶点上的待求电位值 φ_i、φ_j 和 φ_m 以及顶点坐标 (x_i,y_i)、(x_j,y_j) 和 (x_m,y_m) 代入式(8.5.5)，可将 $\varphi(x,y)$ 表示为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\Delta}[(a_i+b_i x+c_i y)\varphi_i+(a_j+b_j x+c_j y)\varphi_j+(a_m+b_m x+c_m y)\varphi_m] \tag{8.5.6}$$

其中

$$\begin{cases} a_i=x_j y_m-x_m y_j,\ a_j=x_m y_i-x_i y_m,\ a_m=x_i y_j-x_j y_i \\ b_i=y_j-y_m,\ b_j=y_m-y_i,\ b_m=y_i-y_j \\ c_i=x_m-x_j,\ c_j=x_i-x_m,\ c_m=x_j-x_i \end{cases} \tag{8.5.7}$$

$\Delta=\dfrac{1}{2}(b_i c_j-b_j c_i)$ 为单元 e 的面积。

8.5.3 变分问题的离散化

首先进行单元分析。将式(8.5.6)代入单元 e 的能量函数

$$W_e(\varphi)=\frac{\varepsilon}{2}\iint_{S_e}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可得到

$$W_e(\varphi_i,\varphi_j,\varphi_m)=\frac{\varepsilon}{8\Delta}[(b_i\varphi_i+b_j\varphi_j+b_m\varphi_m)^2+(c_i\varphi_i+c_j\varphi_j+c_m\varphi_m)^2]$$

将上式分别对 φ_i、φ_j 和 φ_m 求偏导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_e}{\partial\varphi_i}=K_{ii}^e\varphi_i+K_{ij}^e\varphi_j+K_{im}^e\varphi_m \\ \dfrac{\partial W_e}{\partial\varphi_j}=K_{ji}^e\varphi_i+K_{jj}^e\varphi_j+K_{jm}^e\varphi_m \\ \dfrac{\partial W_e}{\partial\varphi_m}=K_{mi}^e\varphi_i+K_{mj}^e\varphi_j+K_{mm}^e\varphi_m \end{cases} \tag{8.5.8}$$

或写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial W_e}{\partial \varphi_i} \\ \dfrac{\partial W_e}{\partial \varphi_j} \\ \dfrac{\partial W_e}{\partial \varphi_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_m \end{pmatrix} \tag{8.5.9}$$

其中

$$\begin{cases} K_{ii}^e = \dfrac{\varepsilon}{4\Delta}(b_i^2 + c_i^2),\ K_{jj}^e = \dfrac{\varepsilon}{4\Delta}(b_j^2 + c_j^2),\ K_{mm}^e = \dfrac{\varepsilon}{4\Delta}(b_m^2 + c_m^2) \\ K_{ij}^e = K_{ji}^e = \dfrac{\varepsilon}{4\Delta}(b_i b_j + c_i c_j) \\ K_{im}^e = K_{mi}^e = \dfrac{\varepsilon}{4\Delta}(b_i b_m + c_i c_m) \\ K_{jm}^e = K_{mj}^e = \dfrac{\varepsilon}{4\Delta}(b_j b_m + c_j c_m) \end{cases} \tag{8.5.10}$$

接下来进行整体合成。设单元的总数为 e_0，节点总数为 N，将所有单元能量函数叠加起来，得到整个场域 S 内的能量函数为

$$W(\varphi) = W(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N) = \sum_{e=1}^{e_0} W_e(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_m)$$

这样就将能量泛函的极值问题转化为多元函数 $W(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N)$ 的极值问题。由于 $W(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N)$ 是二次函数，所以 $\dfrac{\partial W}{\partial \varphi_n}(n=1,2,\cdots,N)$ 是线性函数。根据多元函数的极值原理，令 $\dfrac{\partial W}{\partial \varphi_n}=0(n=1,2,\cdots,N)$，即可得到节点电位 $\varphi_n(n=1,2,\cdots,N)$ 的线性方程组

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.5.11}$$

或简记为

$$[K_{sr}]\{\varphi_s\} = \{0\} \tag{8.5.12}$$

式中的系数矩阵 $[K_{sr}]$ 为

$$[K_{sr}] = \sum_{e=1}^{e_0} [\widetilde{K}_{sr}]^e \tag{8.5.13}$$

这里 $[\widetilde{K}_{sr}]^e$ 是将单元矩阵 $[K]^e$ 按节点编号顺序扩充而成的 N 阶方阵。在 $[\widetilde{K}_{sr}]^e$ 中，只有行数和列数为 i、j、m 时，存在原单元矩阵 $[K]^e$ 的九个元素外，其余各行、列的元素都为零。

在上述离散过程中，尚未涉及对边界条件(8.5.2)的处理。由于边界节点的电位值是已知的，求极值时，不能将 W 对边界节点的电位求偏导数。因此，应将方程组(8.5.11)进行修改。设第 s 号节点为边界节点，其电位值为 φ_{s0}，则将 $[K_{sr}]$ 中主对角线元素 K_{ss} 改为 1，而第 s 行和第 s 列的其余元素全改为 0。方程组(8.5.11)右端第 s 行改写为 φ_{s0}，其余各行则改写为 $-K_{ls}\varphi_{s0}(l=1,2,\cdots,N$ 且 $l=s)$，即

$$\begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & 0 & \cdots & K_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & \cdots & 0 & \cdots & K_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_s \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1s}\varphi_{s0} \\ \vdots \\ \varphi_{s0} \\ \vdots \\ -K_{Ns}\varphi_{s0} \end{pmatrix} \tag{8.5.14}$$

对每一个边界节点都按以上方法处理，最后就得到场域的内节点电位的线性方程组，解此线性方程组即可求出场域内各节点的电位值。

练 习 题

8.5－1 证明：使电场能量泛函式(8.5.3)取得最小值的电位函数 $\varphi(x,y)$ 必定满足拉普拉斯方程(8.5.1)。

8.5－2 利用有限元法求解例 8.9 中的电位函数 $\varphi(x,y)$。

8.6 矩 量 法

在静电场中，体积 V 内的电荷分布 $\rho(x',y',z')$ 在场点 (x,y,z) 产生的电位可表示为

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(x',y',z')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{8.6.1}$$

若 $\rho(x',y',z')$ 为已知函数，则由式(8.6.1)可求出空间任意点的电位。但在某些情况下，$\rho(x',y',z')$ 是未知的，而源区的电位分布却是已知的。例如，当对一个导体施加外电压时，导体表面的电位是已知的，而导体表面的电荷分布却是未知的。这时，式(8.6.1)是关于 $\rho(x',y',z')$ 的一个积分方程。通过求解此积分方程，即可得到电荷分布。

矩量法是求解积分方程的一种常用的方法，已被广泛用于求解电磁场问题。矩量法的基本思想是将未知函数用一组已知函数(称为基函数)展开，经过离散化把积分方程转换成一组线性方程。下面以式(8.6.1)的求解为例，简要介绍矩量法的基本应用原理。

采用矩量法中最常用的子域基及点匹配法。首先把区域 V 划分为 n 个子区域 $V_i(i=1,2,\cdots,n)$，设 $u_i(x',y',z')$ 是在子区域 V_i 上预先选定的函数。将 $\rho(x',y',z')$ 表示为

$$\rho(x',y',z') = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(x',y',z') \tag{8.6.2}$$

其中 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是待定系数。把式(8.6.2)代入式(8.6.1)，得

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(x',y',z')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_i}\frac{u_i(x',y',z')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{8.6.3}$$

在子区域 V_j 上，已知 $\varphi=\varphi_j$，代入式(8.6.3)，得

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_i}\frac{u_i(x',y',z')}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_{i,j} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{8.6.4}$$

其中

$$\varphi_{i,j}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_i}\frac{u_i(x',y',z')}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{8.6.5}$$

是第 i 个子区域 V_i 中的 $u_i(x',y',z')$ 在第 j 个子区域 V_j 上产生的电位值。

由于在源区内 $\varphi(x,y,z)$ 是已知的，式(8.6.4)是待定系数 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 一组线性方程

$$\begin{cases}\varphi_{11}\alpha_1+\varphi_{12}\alpha_2+\cdots+\varphi_{1n}\alpha_n=\varphi_1\\ \varphi_{21}\alpha_1+\varphi_{22}\alpha_2+\cdots+\varphi_{2n}\alpha_n=\varphi_2\\ \quad\vdots\\ \varphi_{n1}\alpha_1+\varphi_{n2}\alpha_2+\cdots+\varphi_{nn}\alpha_n=\varphi_n\end{cases} \tag{8.6.6}$$

写成矩阵形式为

$$[\varphi_{ij}]\{\alpha_j\}=\{\varphi_i\} \tag{8.6.7}$$

求出 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 后，可由式(8.6.2)确定源区的电荷分布，或由式(8.6.3)确定空间的电位分布。

例 8.10 一根长度 $l=0.2\mathrm{m}$、半径 $a=0.001\mathrm{m}$ 的导体细圆柱，电位 $\varphi=1\mathrm{V}$。试用矩量法计算导体细圆柱的电荷分布。

解：因为导体圆柱的半径远小于长度，可将其电荷近似看作是线电荷。如图 8－39 所示，将导体细圆柱等分为 4 个小段，则每一小段的长度 $\Delta l_i=0.05\mathrm{m}(i=1,2,3,4)$。取基函数

$$u_i(z')=\begin{cases}1 & \text{在 } \Delta l_i \text{ 上}\\ 0 & \text{在 } \Delta l_i \text{ 外}\end{cases}\qquad(i=1,2,3,4)$$

代入式(8.6.5)，得

$$\varphi_{i,j}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Delta l_i}\frac{1}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}'_i|}\mathrm{d}l'_i\qquad(i,j=1,2,3,4)$$

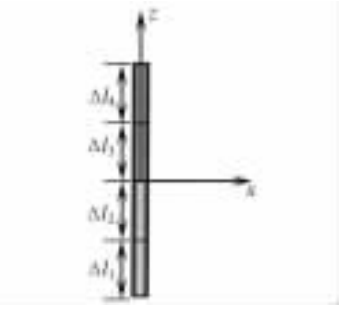


图 8－39 导体细圆柱的分段

当 $i=j$ 时

$$\varphi_{ii}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-0.025}^{0.025}\frac{1}{\sqrt{a^2+z'^2_i}}\mathrm{d}z'_i=$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ln(z'_i+\sqrt{a^2+z'^2_i})\Big|_{z'=-0.025}^{z'=0.025}=$$

$$\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{0.05}{0.001}=70.42\times10^9\qquad(i=1,2,3,4)$$

当 $i\neq j$ 时

$$\varphi_{ij}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta l_i}{|z_j-z'_i|}\qquad(i,j=1,2,3,4\text{ 且 }i\neq j)$$

于是

$$\varphi_{12}=\varphi_{21}=\varphi_{23}=\varphi_{32}=\varphi_{34}=\varphi_{43}=9\times10^9$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{31} = \varphi_{24} = \varphi_{42} = 4.5 \times 10^{9}$$

$$\varphi_{14} = \varphi_{41} = 3 \times 10^{9}$$

代入方程组(8.6.6),注意到 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 1$,可解得

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 1.17 \times 10^{-11},\ \varphi_2 = \varphi_3 = 1.06 \times 10^{-11}$$

以及对应的电荷密度为

$$\rho_1 = \rho_4 = \alpha_1 u_1 = 1.17 \times 10^{-11}\,\mathrm{C/m}$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \alpha_2 u_2 = 1.06 \times 10^{-11}\,\mathrm{C/m}$$

由于同种电荷互相排斥,所以导体细圆柱两端的电荷密度比中心的电荷密度要大一些。

这里只将导体细圆柱分为了 4 段,所得结果误差较大。要得到精确的结果,可将导体细圆柱分为足够多的小段,借助计算机进行求解。

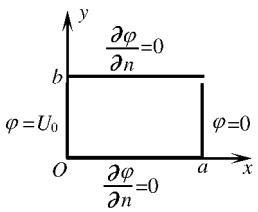
练 习 题

8.6－1　在例 8.10 中,若将细导线分别划分为 6 小段和 8 小段,试用矩量法求其电荷分布,并与例 8.10 中的结果进行比较。

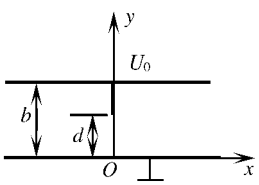
8.6－2　利用矩量法求无界空间中边长为 $2a$ 的正方形导体薄板的电容。

习 题

8－1　求如题 8－1 图所示的二维矩形区域中的电位和电场分布。



题 8－1 图

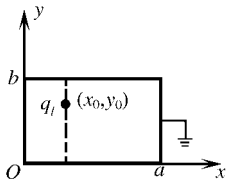


题 8－2 图

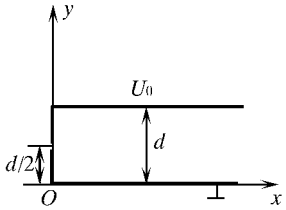
8－2　如题 8－2 图所示,两平行无限大导体平面,距离为 b,其间有一极薄的导体片由 $y=d$ 到 $y=b(-\infty<x<\infty)$。上板和薄片保持电位 U_0,下板保持零电位,设在薄片平面上,从 $y=0$ 到 $y=d$,电位线性变化,$\varphi(0,y)=\dfrac{U_0}{d}y$。(1)求板间电位的解;(2)在板间电位的解中,除开 $\dfrac{U_0}{d}y$ 一项外,其他所有项对电场总储能的贡献,并按 $C_f=\dfrac{2W_e}{U_0^2}$ 定出边缘电容。

8－3　如题 8－3 图所示,由四块无限长接地导体板构成的矩形腔内,有一与 z 轴平行的无限长线电荷 ρ_l。求矩形腔内的电位函数。

8－4　两块直角形导体板沿 x 方向和沿 z 方向都是无限大,如题 8－4 图所示。下板电位为 0,上板电位为 U_0,求两导体板所围成的区域内的电位分布。



题 8－3 图



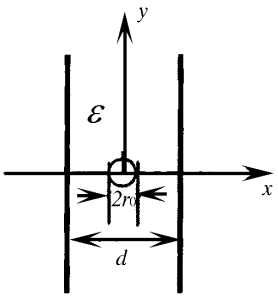
题 8－4 图

8－5　如题 8－5 图所示，极板距离为 $d=1\text{cm}$ 的平行板电容器，其中的介质（介电常数为 $\varepsilon=9\varepsilon_0$）内存在有圆柱形气泡，气泡的直径 $2r_0=1\text{mm}$。已知介质和空气的击穿场强分别为 $15\times10^3\text{kV/m}$ 和 $3\times10^3\text{kV/m}$。求平行板电容器在下述情况下的最大工作电压：

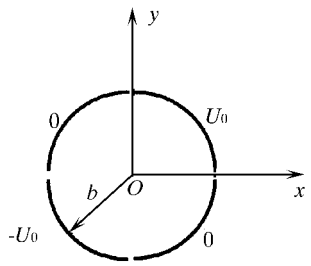
（1）存在上述圆柱形气泡缺陷的情况；

（2）无缺陷的情况。

8－6　在介电常数为 ε 的无限大的介质中，沿 z 轴方向开一个半径为 a 的圆柱形空腔。沿 x 轴方向外加一均匀电场 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_xE_0$，求空腔内和空腔外的电位函数。



题 8－5 图



题 8－7 图

8－7　一个半径为 b、无限长的薄导体圆柱面被分割成四个四分之一圆柱面，如题 8－7 图所示。第二象限和第四象限的四分之一圆柱面接地，第一象限和第三象限分别保持电位 U_0 和 $-U_0$。求圆柱面内部的电位函数。

8－8　在阴极射线管中的均匀偏转磁场是由在管颈上放置一对按余弦定律绕线的线圈产生的。分析管颈中的磁场时，可以将管颈视为无限长，其表面电流密度为 $\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{e}_zJ_{S0}\cos\phi$，这样的线圈称为鞍线圈。证明：管颈中的磁场是均匀的。

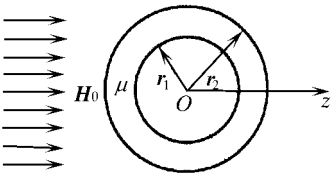
8－9　在均匀电场 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_zE_0$ 中，放置一个半径为 a、介电常数为 ε 的均匀介质球，球外为空气。求介质球内、外的电位以及球面上的极化电荷面密度。

8－10　半径为 a、介电常数为 ε 的均匀介质球的中心放置一电偶极矩 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}_zp_0$，球外

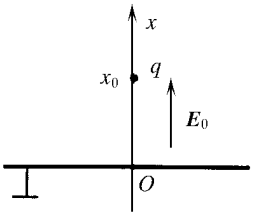
为空气。求介质球内、外的电位以及球面上的极化电荷面密度。

8－11　在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_zE_0$ 中放入半径为 a 的导体球，设(1)导体充电至 U_0；(2)导体上充有电荷 Q。试分别计算两种情况下导体球外的电位分布。

8－12　如题 8－12 图所示，由磁性材料构成的空心球壳的内、外半径分别为 r_1 和 r_2，磁性材料的磁导率为 μ。设外加的均匀磁场 $\boldsymbol{H}_0=e_zH_0$，试计算空心球壳的磁屏蔽效能。



题 8－12 图



题 8－13 图

8－13　如题 8－13 图所示，在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_xE_0$ 中，一个点电荷 q 与接地导体平面相距为 x_0。求：(1)当点电荷 q 所受电场力为零时，x_0 的值为多大？(2)若点电荷 q 最初位于 $\frac{x_0}{2}$ 处，要使点电荷 q 向正 x 方向运动，所需最小初速度为多大？(设点电荷的质量为 m)

8－14　在 $x=0$ 处为一无限大接地导体平板，介电常数为 ε_1 的介质充满 $x>0$、$y>0$ 的空间，介电常数为 ε_2 的介质充满 $x>0$、$y<0$ 的空间。在介质 1 中点 $P(a,b,0)$ 处有一点电荷 q，求导体表面上的感应电荷面密度。

8－15　一个半径为 b、总电荷为 Q 的均匀带电细圆环，位于半径为 a 的接地薄导体球壳内。圆环的中心轴线与导体球壳的一条直径重合，圆心与导体球壳的球心相距为 $d(d^2+b^2<a^2)$。(1)求导体球壳的球心处的电位；(2)若在球壳的球心处再放置一个点电荷 q，求点电荷 q 受到的电场力。

8－16　真空中有一半径为 a 的不接地导体球壳，且球壳本身不带电。在球壳外有一半径为 b 的带电细圆环，圆环的中心轴线与导体球壳的一条直径重合，圆心与导体球壳的球心相距为 $d(d^2+b^2<a^2)$。设圆环上的电荷线密度为 ρ_l，试求导体球的电位。

8－17　一个半径为 R 的导体球带有电荷量为 Q，在球体外距离球心为 D 处有一个点电荷 q。(1)求点电荷 q 与导体球之间的静电力；(2)证明：当 q 与 Q 同号，且 $\frac{Q}{q}<\frac{RD^3}{(D^2-R^2)^2}-\frac{R}{D}$ 成立时，F 表现为吸引力。

8－18　两个点电荷 Q 和 $-Q$，在一个半径为 a 的导体球直径的延长线上，分别位于导体球的两侧且距球心为 D $(D>a)$。

(1)证明：镜像电荷构成一个位于球心的电偶极子，其电偶极矩为 $p=\frac{2a^3Q}{D^2}$；

(2)令 D 和 Q 分别趋于无穷，同时保持 $\frac{Q}{D^2}$ 不变，计算球外的电场。

8－19　一个导体球壳的内半径为 a，外半径为 b，在距球心为 $d(d<a)$ 处有一点电荷 q。(1)当导体球壳接地时，求空间任意点的电位以及 q 所受到的电场力；(2)若导体球不

接地且带有总电荷 Q，其结果如何？

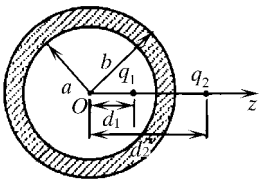
8－20　在接地的导体平面上，有一个半径为 a 的半球面凸部，半球的球心在导体平面上，在半球的对称轴上有一个点电荷 q 距球心为 $d(d>a)$。求：

(1)空间的电位分布；

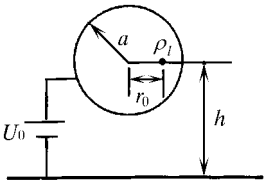
(2)q 所受到的静电力。

8－21　介电常数为 ε_1 和 ε_2 的两种均匀介质分别充满半个空间，分界面为一无限大平面，在分界面两侧对称放置两个点电荷 q_1 和 q_2，与平面相距为 d。求 q_1 和 q_2 分别所受到的静电力 F_1 和 F_2。

8－22　不接地空心导体球的内、外半径分别为 a 和 b，在空腔内距球心为 $d_1(d_1<a)$ 处放置点电荷 q_1，在球外距球心为 $d_2(d_2>b)$ 处放置点电荷 q_2，且 q_1、q_2 与球心共线，如题 8－22 图所示。求点电荷 q_1 和 q_2 分别受到的电场力。



题 8－22 图



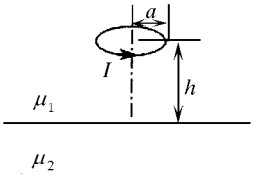
题 8－23 图

8－23　一半径为 a 的无限长金属圆柱薄壳，平行于地面，其轴线与地面相距为 h。在圆柱薄壳内距轴线为 r_0 处，平行放置一根电荷线密度为 ρ_l 的长直细导线，如题 8－23 图所示。设圆柱壳与地面间的电压为 U_0。求：

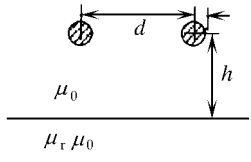
(1)金属圆柱薄壳内部的电位 φ_1；

(2)金属圆柱薄壳外的电位 φ_2。

8－24　两种不同磁介质的磁导率分别为 μ_1 和 μ_2，其分界面为无限大平面。在磁介质 1 中，有一个半径为 a、载电流为 I 的细导线圆环，与分界面平行且相距为 h，如题 8－24 图所示。设 $h \gg a$，求圆环所受到的磁场力。



题 8－24 图



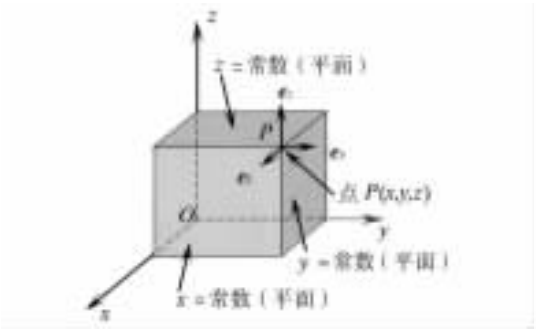
题 8－25 图

8－25　一对平行传输线，其线半径为 a，相距为 d。在传输线下方 h 处放置以无限大的铁磁物质，其相对磁导率为 μ_r，如题 8－25 图所示。设 $a \ll h$ 且 $a \ll d$，求这对平行传输线单位长度的外自感。

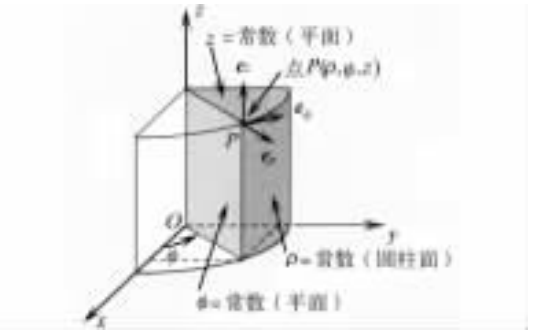
附　　录

附录一　常用正交坐标系

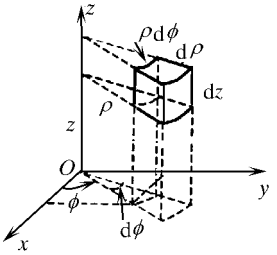
常用的三种正交坐标系是直角坐标系(x,y,z)、圆柱坐标系(ρ,ϕ,z)和球坐标系$(r,\theta,\phi,)$,这三种坐标系的单位矢量、长度元、面积元和体积元如附图 1－1～附图 1－5 所示。各坐标系的关系式及坐标系之间的转换关系示于附表 1－1 中。



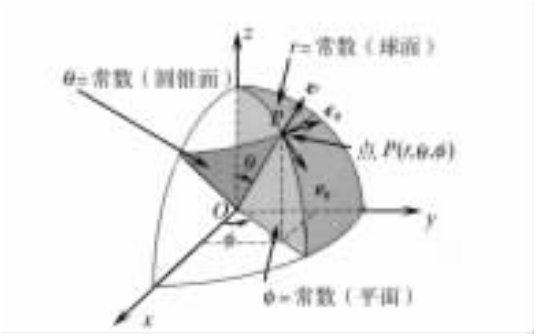
附图 1－1　直角坐标系



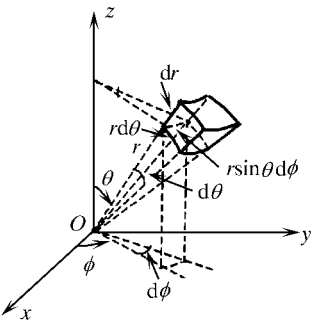
附图 1－2　圆柱面坐标系



附图 1－3　圆柱面坐标系的长度元、面积元和体积元



附图 1－4　球面坐标系



附图 1－5　球面坐标系的长度元、面积元和体积元

附表 1－1

坐标系	直角坐标系(x,y,z)	圆柱坐标系(ρ,ϕ,z)	球坐标系(r,θ,ϕ)
单位矢量	$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$	$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z$	$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\phi$
长度元	$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\rho+\boldsymbol{e}_\phi\rho\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{e}_\theta r\mathrm{d}\theta+\boldsymbol{e}_\phi r\sin\theta\mathrm{d}\phi$
面积元	$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_\rho\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$	$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_\theta r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_\phi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$
体积元	$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$
与其它坐标系的转换关系	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ $\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $z=z$	$x=\rho\cos\phi$ $y=\rho\sin\phi$ $z=z$	$x=r\sin\theta\cos\phi$ $y=r\sin\theta\sin\phi$ $z=r\cos\theta$
	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta=\arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z)$ $\phi=\phi$	$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta=\arctan(\rho/z)$ $\phi=\phi$	$\rho=r\sin\theta$ $\phi=\phi$ $z=r\cos\theta$
与其它坐标系的单位矢量转换关系	$\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_x\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\phi$ $\boldsymbol{e}_\phi=-\boldsymbol{e}_x\sin\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\phi$ $\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z$	$\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_\rho\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi$ $\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_\rho\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi\cos\phi$ $\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z$	$\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi$ $\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi\cos\phi$ $\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta$
	$\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_z\cos\theta$ $\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_x\cos\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\phi-\boldsymbol{e}_z\sin\theta$ $\boldsymbol{e}_\phi=-\boldsymbol{e}_x\sin\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\phi$	$\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\rho\sin\theta+\boldsymbol{e}_z\cos\theta$ $\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\rho\cos\theta-\boldsymbol{e}_z\sin\theta$ $\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_\phi$	$\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_r\sin\theta+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta$ $\boldsymbol{e}_\phi=\boldsymbol{e}_\phi$ $\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta$

附录二　重要的矢量公式

一、矢量恒等式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

$$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$$

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{A})=u\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla u$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times u\boldsymbol{A}=\nabla u\times\boldsymbol{A}+u\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\nabla\cdot\nabla u=\nabla^2 u$$

$$\nabla\times\nabla u=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

二、积分公式

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\mathrm{S}\qquad\text{（散度公式）}$$

$$\int_V\nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}\mathrm{S}$$

$$\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad\text{（斯托克斯公式）}$$

$$\int_V(u\nabla^2 v+\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}V=\oint_S u\nabla v\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\qquad\text{（第一格林公式）}$$

$$\int_V(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\mathrm{d}V=\oint_S(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\qquad\text{（第二格林公式）}$$

三、梯度、散度、旋度和拉普拉斯展开式

1. ■直角坐标系

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

2. ■圆柱坐标系

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z\end{vmatrix}=$$

$$\boldsymbol{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_\phi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]$$

$$\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

3. ■球坐标系

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial u}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi\end{vmatrix}=$$

$$\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]+$$

$$\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

附录三　部分材料的电磁参数

本附录列出部分材料的相对介电常数 ε_r、电导率 σ 和相对磁导率 μ_r，这些参数与频率、温度有关，表中列出的常数均是在室温时的低频平均值。

附表 3－1　相对介电常数

材　料	ε_r	材　料	ε_r
空气	1.0006	尼龙(固态)	3.8
聚苯乙烯泡沫塑料	1.03	石英	5
干燥木头	2～4	胶木	5
石腊	2.1	铅玻璃	6
胶合板	2.1	云母	6
聚乙烯	2.26	氯丁橡胶	7
聚苯乙烯	2.6	大理石	8
PVC	2.7	硅	12
琥珀	3	酒精	25
橡胶	3	甘油	50
纸	3	蒸馏水	81
有机玻璃	3.4	二氧化钛	89～173
干燥沙质土壤	3.4	钛酸钡	1200

附表 3－2　电导率

材　料	$\sigma/(S\cdot m^{-1})$	材　料	$\sigma/(S\cdot m^{-1})$
银	6.17×10^{7}	海水	4
铜	5.80×10^{7}	粘土	5×10^{-3}
金	4.10×10^{7}	蒸馏水	2×10^{-4}
铝	3.82×10^{7}	胶木	10^{-9}
黄铜	1.50×10^{7}	瓷	2×10^{-13}
铁	1.03×10^{7}	橡胶	10^{-15}
磷青铜	10^{7}	聚苯乙烯	10^{-16}
不锈钢	0.11×10^{7}	石英	10^{-17}

附表 3－3　相对磁导率

材　料	种　类	μ_r	材　料	种　类	μ_r
铋	抗磁体	0.99983	2－81 坡莫合金	铁磁体	130
金	抗磁体	0.99996	镍	铁磁体	250
银	抗磁体	0.99998	钴	铁磁体	600

铜	抗磁体	0.99999	锰锌铁氧体	铁磁体	1500
水	抗磁体	0.99999	低碳钢	铁磁体	2000
空气	顺磁体	1.0000004	坡莫合金 45	铁磁体	2500
铝	顺磁体	1.000021	纯铁	铁磁体	4000
钯	顺磁体	1.00082	铁镍合金	铁磁体	100,000

习■题■答■案

第 一 章

1－1 (1) $-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, $-\dfrac{3\boldsymbol{r}}{r^5}$, $f'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

(2) 3, $\dfrac{2}{r}$, $\dfrac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{r}$

1－2 (1) $\dfrac{1}{24}$, (2) $\dfrac{1}{24}$

1－4 (1) 8, (2)8

1－5 (1) $I=1357.2A$

(2) $\rho(r)=2\varepsilon_0\sigma_0\alpha r_0^2E(r_0)\dfrac{r-r_0}{r^2\sigma^2(r)}$ (C/m^3), $\rho_S=-8.85\times10^{-10}$ C/m^2

1－6 (**略**)

1－7 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\dfrac{\mu_0\omega Q}{6\pi a}$

1－8 (1) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\mu_0 NIb^2}{(b^2+d^2/4)^{3/2}}$,

(2) (**略**)

(3) $d=b$

1－9 (**略**)

1－10 (1) $\rho_P=-\dfrac{K}{r^2}$, $\rho_{SP}=\dfrac{K}{a}$

(2) $\rho=\dfrac{\varepsilon K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}$

(3) $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_r\dfrac{K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r}$ $(r<a)$, $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_r\dfrac{\varepsilon aK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}$ $(r>a)$

1－11 (1) $\varepsilon(r)=\varepsilon_0\dfrac{b^2}{r^2}$

(2) $\rho_p=\dfrac{q}{2\pi b^2 r}$, $\rho_{SPa}=-\dfrac{(b^2-a^2)q}{4\pi a^2b^2}$, $\rho_{SPb}=0$

1－12 （1）$\rho=6\varepsilon_0\dfrac{r^3}{a^4}$

（2）$\rho_S=2\varepsilon_0$

1－13 （略）

1－14 $\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{b^2\boldsymbol{r}_b}{r_b^2}-\dfrac{a^2\boldsymbol{r}_a}{r_a^2}\right)$ （$r_b>b$）

$\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{r}_b-\dfrac{a^2\boldsymbol{r}_a}{r_a^2}\right)$ （$r_b<b$ 且 $r_a>a$）

$\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_a)$ （$r_a<a$）

1－15 $B_{1\phi}=0.833r$（T） （$r<a_1$）

$B_{2\phi}=\dfrac{10}{3}r-\dfrac{10^{-5}}{r}$（T） （$a_1<r<a_2$）

$B_{3\phi}=\dfrac{2\times10^{-5}}{r}$（T） （$r>a_2$）

1－16 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\left(\dfrac{b^2}{r_b^2}\boldsymbol{r}_b-\dfrac{a^2}{r_a^2}\boldsymbol{r}_a\right)$ （$r_b>b$）

$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\left(\boldsymbol{r}_b-\dfrac{a^2}{r_a^2}\boldsymbol{r}_a\right)$ （$r_b<b,r_a>a$）

$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times(\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_a)=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{d}$ （$r_a<a$）

1－17 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\dfrac{\mu_0 I}{4\pi xy}(x+y-\sqrt{x^2+y^2})$ （$y>0$）

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\dfrac{\mu_0 I(x+y)}{4\pi xy}\left(1-\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ （$y<0$）

1－18 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 J_0}{2}(\boldsymbol{e}_x y+\boldsymbol{e}_y x)$ （$x^2+y^2<a^2$）

1－19 $\varepsilon_{r2}=\dfrac{5}{3}$

1－20 （1）$\dfrac{\pi}{2}R^2E_0\cos\theta_0$

（2）$2\varepsilon_0 RE_0\sin\theta_0$

1－21 （1）$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{e}_\phi\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ （$z>0$），$\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{e}_\phi\dfrac{\mu I}{2\pi r}$ （$z<0$）

（2）$\boldsymbol{J}_M=0$ （$r\neq0,z<0$），$I_m=\left(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1\right)I$ （$r=0,z<0$）

$\boldsymbol{J}_{MS}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{(\mu-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$

1－22 （1）$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{e}_\phi\dfrac{\mu_0\mu I}{\pi(\mu+\mu_0)r}$

（2）$\boldsymbol{J}_M=0$ （$r\neq0$），$\boldsymbol{J}_{MS}=0$，$I_M=\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}I$ （$r=0$）

1－23 $\boldsymbol{H}_1=\dfrac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{H}_0$，$\boldsymbol{H}_2=\dfrac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{H}_0$

1－24 $\varepsilon=-\dfrac{\mu_0 abd\omega I}{\pi}\dfrac{(a^2+d^2)\sin\omega t}{(a^2+d^2)^2-(2ad\cos\omega t)^2}$

1－25 (1) $\varepsilon=\dfrac{\mu_0 I_0 b\omega}{2\pi}\sin\omega t\ln\dfrac{a+d}{d}$

(2) $\varepsilon=\dfrac{\mu_0 I_0 bv_0}{2\pi}\left[\dfrac{1}{d+v_0 t}-\dfrac{1}{d+a+v_0 t}\right]$

(3) $\varepsilon=\dfrac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}\left[\dfrac{av_0\cos\omega t}{(d+v_0 t)(d+a+v_0 t)}+\omega\sin\omega t\ln\dfrac{a+d+v_0 t}{d+v_0 t}\right]$

1－26 (2) **铜** $\tau=1.55\times10^{-19}$ s，**石墨** $\tau=3.69\times10^{-10}$ s

1－27 (1) $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_\phi\dfrac{0.4}{\rho}\cos(10^8 t-0.5z)$ (A/m)

(2) $\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{e}_z 398\cos(10^8 t-0.5z)$ (A/m)

(3) $i_d=-0.55\sin(10^8 t-0.25)$ (A)

1－28 (**略**)

1－29 $k=41.56$ rad/m

$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_x 496\cos(15\pi x)\sin(6\pi\times10^9 t-41.56z)+$

$\boldsymbol{e}_z 565.5\sin(15\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t-41.56z)$ (V/m)

1－30 $P_{av}=\dfrac{E_0^2}{90}$ (W)

1－31 (**略**)

第 二 章

2－1 (1) **是均匀平面波**

(2) $f=3\times10^8$ Hz，$\lambda=1$ m，$k=2\pi$ (rad/m)，$v_p=c=3\times10^8$ m/s，**沿－z 方向传播**

(3) $\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_x 0.1\cos(6\pi\times10^8 t+2\pi z)$ (μA/m)

2－2 (1) $f=2.5$ GHz

(2) $\varepsilon_r=1.13$，$\mu_r=1.99$

2－3 (1) $k=2\pi$ rad/m、$v_p=1.5\times10^8$ m/s、$\lambda=1$ m、$\eta=60\pi$ (Ω)

(2) $|\boldsymbol{E}(0,0)|=8.66\times10^{-3}$ V/m

(3) $z=15$ m **处**。

2－4 (1) $k=0.1047$ rad/m，$y=(22.5\pm n\dfrac{\lambda}{2})$ (m)

(2) $\boldsymbol{E}(y,t)=-\boldsymbol{e}_x 1.508\times10^{-13}\cos(10^7\pi t-0.1047y+\dfrac{\pi}{4})$ (V/m)

2－5 (1) $\varepsilon_r=9$

(2) $\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_y\dfrac{1}{8\pi}\cos(2\pi\times10^8 t-2\pi z)$ (A/m)

2－6 $f=5.73\times10^8$ Hz

(1) $|\boldsymbol{E}|=100$ V/m；(2) $|\boldsymbol{E}|=81.9$ V/m；(3)128.1 V/m；(4) $|\boldsymbol{E}|=95.57$ V/m

2－7 （略）

2－8 （1）$\boldsymbol{e}_n=\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}=\dfrac{2}{3}\left(-\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\ \dfrac{1}{2}\right)$

（2）$f=2.25\times10^8$ Hz

（3）$\boldsymbol{H}(t)=\dfrac{1}{20}(\boldsymbol{e}_x1.5+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)\cos\left[2\pi\times2.25\times10^8t-(-\pi x+\pi y+\dfrac{\pi}{2}z)\right]$（A/m）

（4）$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=2\times\dfrac{2}{3}\left(-\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\ \dfrac{1}{2}\right)$（W/m^2）

2－9 （1）$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{e}_x4\pi+\boldsymbol{e}_z3\pi$（rad/m），$\boldsymbol{e}_n=\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}=\dfrac{1}{5}(\boldsymbol{e}_x4+\boldsymbol{e}_z3)$

（2）$\lambda=0.4$ m，$f=7.5\times10^8$ Hz

（3）$A=3$

（4）$\boldsymbol{E}=120\pi\left(\boldsymbol{e}_x\ \dfrac{6}{5}+\boldsymbol{e}_y5-\boldsymbol{e}_z\ \dfrac{8}{5}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(4\pi x+3\pi z)}$（$\mu$V/m）

（5）$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=60\pi\times29\times\dfrac{1}{5}(\boldsymbol{e}_x4+\boldsymbol{e}_z3)$（$\mu$W/m^2）

2－10 （1）$\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_E\times\boldsymbol{e}_H=-\boldsymbol{e}_x0.375+\boldsymbol{e}_y0.273+\boldsymbol{e}_z0.886$

（2）$\varepsilon_r=2.49$

（3）$\lambda=\dfrac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}=380.23$ m

（4）$\boldsymbol{E}_{(r)}=(\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}}$（kV/m）

$\boldsymbol{H}_{(r)}=(\boldsymbol{e}_x6+\boldsymbol{e}_y18-\boldsymbol{e}_z3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}}$（A/m）

2－11 （1）$\beta=k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}=2\pi$（rad/m），$\omega=6\pi\times10^8$ rad/s

（2）$\boldsymbol{e}_n=\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}=\boldsymbol{e}_x0.8-\boldsymbol{e}_y0.6$

（3）$\boldsymbol{H}(r,t)=\dfrac{1}{120\pi}\Big\{-\boldsymbol{e}_x3\cos[6\pi\times10^8t-2\pi(0.8x-0.6y)-53.1°]-$

$\boldsymbol{e}_y4\cos[6\pi\times10^8t-2\pi(0.8x-0.6y)-53.1°]+$

$\boldsymbol{e}_z5\cos[6\pi\times10^8t-2\pi(0.8x-0.6y)]\Big\}$（A/m）

2－12 （1）$\alpha=0.0286$ Np/m，$\beta=0.0439$ rad/m，$v_p=4.55\times10^7$ m/s，$\eta_c=480\mathrm{e}^{\mathrm{j}33.1°}$（Ω）

（2）$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x20\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos\left(\omega t-\beta z+\dfrac{\pi}{2}\right)\Big|_{\substack{t=6\mu\mathrm{s}\\z=10\mathrm{m}}}=$

$\boldsymbol{e}_x12.7$（mV/m）

2－13 （略）

2－14 （1）$\alpha\approx0.0025$ Np/m，$\beta\approx1$ rad/m，$\eta_c\approx500$ Ω

（2）$\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_y15\mathrm{e}^{-0.0025z}\cos(10^8t-z+30°)$（A/m）

2－15 $\alpha=1.27$ Np/m，$\beta=1226.6$ rad/m，$v_p=5\times10^7$ m/s，$\lambda=5\times10^{-3}$ m，$\eta_c\approx251.3$ Ω

2－16 $f=160$ Hz

2－17 （1）$\alpha\approx8.89$ Np/m，$\beta\approx8.89$ rad/m，$\eta_c=3.142\mathrm{e}^{\mathrm{j}45°}$

（2）$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x7259\mathrm{e}^{-8.89z}\cos(2\pi\times5\times10^6t-8.89z+8.89)$（V/m）

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_y 2311\mathrm{e}^{-8.89z}\cos\left(2\pi\times5\times10^6 t-8.89z+8.89-\frac{\pi}{4}\right)\ (\mathrm{A/m})$$

2－18 $f_1=50$ Hz **时**，$\delta_1=5.03\times10^{-2}$ m，$z_1=0.232$m

$f_2=2$ MHz **时**，$\delta_2=0.252\times10^{-3}$ m，$z_2=1.16\times10^{-3}$ m

$f_3=3$ GHz **时**，$\delta_3=6.5\times10^{-6}$ m，$z_3=29.9\times10^{-6}$ m

2－19 (1) $\alpha=0.497$ Np/m，$\beta=31.6\pi$ (rad/m)，$\eta_c=238.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.29^\circ}$

(2) $x=1.395$m

(3) $\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{e}_y 50\mathrm{e}^{-0.497x}\cos\left(6\pi\times10^9 t-31.6\pi x+\frac{\pi}{3}\right)\ (\mathrm{V/m})$

$$\boldsymbol{H}(x,t)=\boldsymbol{e}_z 0.21\mathrm{e}^{-0.49x}\cos\left(6\pi\times10^9 t-31.6\pi x+\frac{\pi}{3}-0.29^\circ\right)\ (\mathrm{A/m})$$

2－20 (1) $\alpha=84$ Np/m，$\beta=300\pi$ (rad/m)，$\eta_c=41.8\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.028\pi}(\Omega)$，$\delta=11.9\times10^{-3}$ m

(2) $\boldsymbol{E}(y,t)=\boldsymbol{e}_z 4.18\mathrm{e}^{-84y}\cos\left(10^{10}\pi t-300\pi y-\frac{\pi}{3}+0.028\pi\right)\ (\mathrm{V/m})$

$$\boldsymbol{H}(y,t)=\boldsymbol{e}_x 0.1\mathrm{e}^{-84y}\cos(10^{10}\pi t-300\pi y-\pi/3)\ (\mathrm{A/m})$$

2－21 (1) $f=3$ GHz

(2) **左旋圆极化波**

(3) $\boldsymbol{H}(z,t)=-\boldsymbol{e}_x 2.65\times10^{-7}\cos\left(2\pi\times3\times10^9 t-20\pi z+\frac{\pi}{2}\right)+$

$$\boldsymbol{e}_y 2.65\times10^{-7}\cos(2\pi\times3\times10^9 t-20\pi z)\ (\mathrm{A/m})$$

2－22 (**略**)

2－23 (**略**)

2－24 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=E_0\left[\boldsymbol{e}_x\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})+\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right]$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0\left[-\boldsymbol{e}_x\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right]$$

式中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$

2－25 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_x 1.03A\cos(\omega t-kz+14.04^\circ)+\boldsymbol{e}_y 0.43A\cos(\omega t-kz+90^\circ)$

$\boldsymbol{H}(z,t)=-\boldsymbol{e}_x 1.15\times10^{-3}A\cos(\omega t-kz+90^\circ)+\boldsymbol{e}_y 2.73\times10^{-3}A\cos(\omega t-kz+14.04^\circ)$

该平面波是左旋椭圆极化波

第 三 章

3－1 (1) $\boldsymbol{H}_i(z,t)=\frac{1}{\eta}[-\boldsymbol{e}_x 200\cos(\omega t-\beta z)+\boldsymbol{e}_y 100\sin(\omega t-\beta z)]\ (\mathrm{A/m})$

(2) $\boldsymbol{E}_{总}(z)=-\boldsymbol{e}_x 200\sin\beta z-\boldsymbol{e}_y \mathrm{j}400\sin\beta z\ (\mathrm{V/m})$

$$\boldsymbol{H}_{总}(z)=\frac{1}{\eta}(-\boldsymbol{e}_x 400\cos\beta z-\boldsymbol{e}_y \mathrm{j}200\cos\beta z)\ (\mathrm{A/m})$$

(3) $\boldsymbol{J}_S=-\boldsymbol{e}_x \mathrm{j}0.53+\boldsymbol{e}_y 1.06\ (\mathrm{A/m})$

3－2　(1) $x=-\frac{3}{2}\text{m}$

(2) $x=-\frac{3}{4}\text{m}$

3－3　(1) $z=-(0.586n+0.82)$ cm，$n=0,1,2,\cdots$

(2) $E_{\max}/H_{\max}=\eta_0/\sqrt{\varepsilon_r}\approx 236\ \Omega$

3－4　(1) $k_1=3.33$ rad/m，$k_2=10.54$ rad/m

(2) $\Gamma=0.117$

(3) $\boldsymbol{E}_1(z,t)=\boldsymbol{e}_x 2.4\cos(5\times10^8 t-3.33z)+\boldsymbol{e}_x 0.281\cos(5\times10^8 t+3.33z)$　(V/m)

(4) $\boldsymbol{E}_2(z,t)=\boldsymbol{e}_x 2.68\cos(5\times10^8 t-10.54z)$　(V/m)

3－5　(1) $\Gamma=0.2$

(2) $\tau=1.2$

(3) $\boldsymbol{S}_{i\text{平均}}=\boldsymbol{e}_z 39.79\times10^{-6}$　(W/m^2)

$\boldsymbol{S}_{r\text{平均}}=-\boldsymbol{e}_z 1.59\times10^{-6}$　(W/m^2)

$\boldsymbol{S}_{t\text{平均}}=\boldsymbol{e}_z 38.2\times10^{-6}$　(W/m^2)

3－6　(**略**)

3－7　(**略**)

3－8　$\boldsymbol{E}_2(z,t)=\boldsymbol{e}_x 6.67\cos(3\pi\times10^9 t-20\pi z)$　(V/m)

$\boldsymbol{H}_2(z,t)=\boldsymbol{e}_y 0.036\cos(3\pi\times10^9 t-20\pi z)$　(A/m)

3－9　(1) $\alpha_1=0$，$\beta_1=0.333$ rad/m

(2) $\Gamma=0.29\text{e}^{\text{j}103^\circ}$

$\boldsymbol{E}_r(z,t)=\boldsymbol{e}_x 29\cos(10^8 t+0.333z+103^\circ)$

(3) $\alpha_2=0.78$ Np/m

$\beta_2=1.27$ rad/m

(4) $\boldsymbol{E}_z(z,t)=\boldsymbol{e}_x 97.8\text{e}^{-0.78z}\cos(10^8 t-1.27z+16.8^\circ)$

3－10　$\boldsymbol{S}_{2\text{平均}}=\boldsymbol{e}_z 72.77$ (W/m^2)

3－11　(**略**)

3－12　(1) $\boldsymbol{E}_r(z,t)=\boldsymbol{e}_x E_{\text{im}}(\omega t+\beta_1 z+\theta_1)$

式中，$\theta_1=\pi-2\arctan\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\tan\beta_2 d\right)$

(2) $\boldsymbol{E}_1(z,t)=\boldsymbol{e}_x E_{\text{im}}[\cos(\omega t-\beta_1 z)+\cos(\omega t+\beta_1 z+\theta)]$

(3) $\boldsymbol{E}_2(z,t)=\boldsymbol{e}_x\dfrac{2\eta_2 E_{\text{im}}}{\sqrt{2[(\eta_1^2+\eta_2^2)+(\eta_1^2-\eta_2^2)]\cos2\beta_2 d}}\times[\cos(\omega t-\beta_2 z+\theta_2)-\cos(\omega t+\beta_2 z+\theta_2)]$

式中，$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$

$\theta_2=\arctan\left[\dfrac{(\eta_1-\eta_2)\sin2\beta_2 d}{(\eta_1+\eta_2)+(\eta_1-\eta_2)\cos2\beta_2 d}\right]$

(4) $\boldsymbol{S}_{1\text{平均}}=0$，$\boldsymbol{S}_{2\text{平均}}=0$

(5) $d=n\dfrac{\lambda_2}{2}$，$n=1,2,3,\cdots$

3－13 (1) $d=0.687$ cm

(2) 85.7%

3－14 $d<9\lambda_0$

3－15 (1) $f=\dfrac{1}{2\pi}\times3\times10^8$ Hz

(2)
$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_i(y,z)=\boldsymbol{e}_x377\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.866z} & (\mathrm{V/m})\\ \boldsymbol{H}_i(y,z)=(\boldsymbol{e}_y0.866-\boldsymbol{e}_z0.5)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.866z} & (\mathrm{A/m})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_r(y,z)=-\boldsymbol{e}_x206.22\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.866z} & (\mathrm{V/m})\\ \boldsymbol{H}_r(y,z)=(\boldsymbol{e}_y0.474+\boldsymbol{e}_z0.274)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.866z} & (\mathrm{A/m})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_t(y,z)=\boldsymbol{e}_x170.78\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.958z} & (\mathrm{V/m})\\ \boldsymbol{H}_t(y,z)=(\boldsymbol{e}_y1.34-\boldsymbol{e}_z0.227)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2.958z} & (\mathrm{A/m})\end{cases}$$

(3) $\boldsymbol{S}_{t\text{平均}}=\boldsymbol{e}_y19.4+\boldsymbol{e}_z114.4$ $(\mathrm{W/m^2})$

3－16 (1)
$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_i(y,z)=\boldsymbol{e}_x37.7\mathrm{e}^{-\mathrm{j}8.66y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z} & (\mathrm{V/m})\\ \boldsymbol{H}_i(y,z)=(\boldsymbol{e}_y0.05+\boldsymbol{e}_z0.087)\mathrm{e}^{\mathrm{j}8.66y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5z} & (\mathrm{A/m})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_r(y,z)=-\boldsymbol{e}_x37.7\mathrm{e}^{\mathrm{j}8.66y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}5z} & (\mathrm{V/m})\\ \boldsymbol{H}_r(y,z)=(\boldsymbol{e}_y0.05-\boldsymbol{e}_z0.087)\mathrm{e}^{\mathrm{j}8.66y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}5z} & (\mathrm{A/m})\end{cases}$$

$\boldsymbol{E}_1(y,z)=\boldsymbol{E}_i(y,z)+\boldsymbol{E}_r(y,z)=-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}75.4\sin(5z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}8.66y}$ $(\mathrm{V/m})$

$\boldsymbol{H}_1(y,z)=\boldsymbol{e}_y0.1\cos(5z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}8.66y}-\boldsymbol{e}_z\mathrm{j}0.174\sin(5z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}8.66y}$ $(\mathrm{A/m})$

(2) $\boldsymbol{S}_{1\text{平均}}=-\boldsymbol{e}_y6.56\sin^2(5z)$ $(\mathrm{W/m^2})$

电磁功率沿－y 方向流动

3－17 (1) $\theta_c=6.38^\circ$

(2) $\Gamma_\perp=\mathrm{e}^{\mathrm{j}38^\circ}$，$\tau_\perp=1.89\mathrm{e}^{\mathrm{j}19^\circ}$

(3) 159dB

3－18 (1) $\theta_i=\theta_B=57.69^\circ$

(2) $\theta_i=\theta_c=39.23^\circ$

3－19 (1) $\theta_i=B_B=63.43^\circ$

(2) $\dfrac{|\boldsymbol{S}_{r\text{平均}}|}{|\boldsymbol{S}_{i\text{平均}}|}=18\%$

3－20 $E_{tp}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}(1+\Gamma)\sqrt{1-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i}$

$E_{tn}=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(1+\Gamma)\sin\theta_i$

$\Gamma=\dfrac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_i-\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{1-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i}}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_i+\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{1-\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i}}$

3－21 (1) $\lambda_1=0.5$m，$\lambda_2=1$m

(2) $\theta_c=30^\circ$

(3) $\theta_i=\theta_B=26.57°$

3－22 $\theta_B=\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{\mu r}{\mu r+1}}\right)$

3－23 (1) **反射波是左旋圆极化**

(2) **反射波是左旋椭圆极化**

第 四 章

4－1 (a) $\lambda_c=4.57$ cm，$\lambda_g=3.98$ cm，$Z_{TE_{10}}\approx 500\ \Omega$；

(b) $\lambda_c=9.14$ cm，$\lambda_g=3.18$ cm，$Z_{TE_{10}}\approx 400\ \Omega$，$TE_{10}$，$TE_{20}$，$TE_{30}$；

(c) $\lambda_c=4.57$ cm，$\lambda_g=3.98$ cm，$Z_{TE_{10}}\approx 500\ \Omega$，$TE_{10}$，$TE_{01}$，$TE_{11}$，$TM_{11}$。

4－2 (a) 44.7 rad　　(b)117.7 rad

4－3 (**略**)

4－4 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{a}_x H_0\sin\left(\dfrac{2\pi}{a}x\right)$　　$\lambda_c=a$

4－5 (**略**)

4－6 (a) $\lambda_g=21.8$ cm　　$\lambda_c=14.43$ cm

(b) $v_p=4.16\times10^8$ m/s　　$\lambda_g=13.87$ cm　　$\lambda_c=14.43$ cm

4－7 (a) $(\lambda_c)_{TE_{10}}=14$ cm　　$(\lambda_c)_{TE_{20}}=7$ cm

(b) TE_{10}　　TE_{20}　　TE_{01}

(c) $2a>5\text{cm}>\begin{cases}a\\2b\end{cases}$

4－8 $a\times b=9\times6\ \text{cm}^2$

4－9 TM_{110}　　TE_{101}　　TE_{011}

$f_{110}=6.25$ GHz　　$f_{101}=4.8$ GHz　　$f_{011}=5.83$ GHz

4－10 (**略**)

4－11 TM_{01}　　TE_{11}　　TE_{21}

4－12 **圆波导中最低阶模** TE_{11} **模，最低阶旋转对称模** TM_{01}

4－13 $\boldsymbol{E}=\left[\boldsymbol{a}_r\eta H_m J_1\left(\dfrac{2.405r}{a}\right)+\boldsymbol{a}_z\dfrac{kc}{j\omega\varepsilon}H_m J_0\left(\dfrac{2.405}{a}r\right)\right]e^{-j\beta z}$

第 五 章

5－1 $\gamma\approx\sqrt{R_1G_1}\left[1+\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\omega L_1}{R_1}-\dfrac{\omega c_1}{G_1}\right)^2\right]+j\dfrac{\omega}{2}\sqrt{R_1G_1}\left(\dfrac{L_1}{R_1}+\dfrac{c_1}{G_1}\right)$

$Z_0\approx\sqrt{R_1/G_1}\left\{1+\dfrac{\omega^2}{8}\left[\left(\dfrac{L_1}{R_1}\right)^2+\dfrac{2L_1c_1}{R_1G_1}-3\left(\dfrac{c_1}{G_1}\right)^2\right]\right\}+j\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\dfrac{R_1}{G_1}}\left(\dfrac{L_1}{R_1}-\dfrac{c_1}{G_1}\right)$

5－2 $R_1=0.0576\ \Omega/\text{m}$；$L_1=0.2\ \mu\text{H/m}$；$G_1=23\ \mu\text{s/m}$；$C_1=80$ pF/m

5－3 (**略**)

5－4 (**略**)

5－5 (a) $Z_0=289.9-j77.6\ \Omega$　　$\alpha=0.139$ Np/m　　$\beta=0.235$ rad/m

(b) $R_1=58.6\ \Omega/\mathrm{m}$　　$L_1=0.812\ \mu\mathrm{H/m}$　　$G_1=0.246\ \mathrm{ms/m}$　　$C_1=12.4$ pF/m

5－6　$l_2=0.125\lambda$　　$l_1=0.324\lambda$

5－7　（**略**）

5－8　（**略**）

5－9　$Z_L=(30+\mathrm{j}40)\ (\Omega)$

5－10　（**略**）

5－11　（**略**）

5－12　50%

第 六 章

6－1　(1) $r=10\mathrm{m}$ **处**，$\boldsymbol{E}\approx\boldsymbol{e}_\theta 14.3\sin(2\pi\times10^6 t)$ (V/m)

$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=0$

$r=100\mathrm{km}$ **处**，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\theta 62.8\times10^{-6}\cos\left(2\pi\times10^6 t-2094+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (V/m)

$\boldsymbol{S}_{\text{平均}}=\boldsymbol{e}_r 5.25\times10^{-12}\ (\mathrm{W/m^2})$

(2) $P_r=0.44$ W

6－2　(1) $R_r=8.77\times10^{-3}\ \Omega$

(2) $R_r=2.44\times10^{-8}\ \Omega$

6－3　$P_r\geqslant2.22$ W

6－4　(1) 13.42×10^{-3} V/m

(2) $D=12$

6－5　$E_{max}=60\times10^{-3}$ V/m

6－6　（**略**）

6－7　（**略**）

6－8　（**略**）

第 七 章

7－1　$E(r)=\dfrac{\rho_S a^2}{\varepsilon_0 r^2}+\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r-\dfrac{a^3}{r^2}\right)$　　$(a<r<b)$

$\varphi(r)=\dfrac{\rho_S a^2(b-r)}{\varepsilon_0 br}+\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[\dfrac{b^2-r^2}{2}-\dfrac{a^3(b-r)}{br}\right]$　　$(a\leqslant r\leqslant b)$

其中：　$\rho_S=\dfrac{\varepsilon_0 bU_0}{a(b-a)}-\dfrac{\rho_0}{6a}(b^2+ab-2a^2)$

7－2　$\varphi(x)=-\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}x^2+\left(\dfrac{U_0}{a}+\dfrac{a\rho_0}{2\varepsilon_0}\right)x$　　$(0\leqslant x\leqslant a)$

$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x\left(\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}x+\dfrac{U_0}{a}+\dfrac{a\rho_0}{2\varepsilon_0}\right)$　　$(0<x<a)$

7－3　$\varphi_1(x)=\dfrac{\rho_{S0}(a-x_0)}{\varepsilon_0 a}x$　　$(0\leqslant x\leqslant x_0)$，$\varphi_2(x)=\dfrac{\rho_{S0}x_0}{\varepsilon_0 a}(a-x)$　　$(x_0\leqslant x\leqslant a)$

$\boldsymbol{E}_1=-\boldsymbol{e}_x\dfrac{\rho_{S0}(a-x_0)}{\varepsilon_0 a}$　　$(0<x<x_0)$，$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\rho_{S0}x_0}{\varepsilon_0 a}$　　$(x_0<x<a)$

7－4　(1) $\varphi(\phi)=\dfrac{q}{\varepsilon_0(b-a)\ln(b/a)}\phi$，$\boldsymbol{E}(r,\phi)=\boldsymbol{e}_\phi\dfrac{q}{\varepsilon_0 r(b-a)\ln(b/a)}$

(2) $\rho_{S下}=-\dfrac{q}{r(b-a)\ln(b/a)}$，$\rho_{S上}=\dfrac{q}{r(b-a)\ln(b/a)}$

(3) $C=\dfrac{\varepsilon_0(b-a)}{\theta_0}\ln\dfrac{b}{a}$

7－5　(1) $\boldsymbol{E}_1(r)=-\boldsymbol{e}_r\dfrac{a_1(a_3-a_2)q}{4\pi\varepsilon_0 a_2(a_3-a_1)r^2}$　　$(a_1<r<a_2)$

$\varphi_1(r)=-\dfrac{(a_3-a_2)q}{4\pi\varepsilon_0 a_2(a_3-a_1)r}(a_1-r)$　　$(a_1<r<a_2)$

$\boldsymbol{E}_2(r)=\boldsymbol{e}_r\dfrac{a_3(a_2-a_1)q}{4\pi\varepsilon_0 a_2(a_3-a_1)r^2}$　　$(a_2<r<a_3)$

$\varphi_2(r)=\dfrac{(a_2-a_1)q}{4\pi\varepsilon_0 a_2(a_3-a_1)r}(a_3-r)$　　$(a_2<r<a_3)$

(2) $\rho_{S1}=-\dfrac{(a_3-a_2)q}{4\pi a_1 a_2(a_3-a_1)}$，$\rho_{S2}=-\dfrac{(a_2-a_1)q}{4\pi a_2 a_3(a_3-a_1)}$

7－6　(1) $J_1=J_2=\dfrac{\sigma_1\sigma_2U_0}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$，$E_1=\dfrac{\sigma_2U_0}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$，$E_2=\dfrac{\sigma_1U_0}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$

(2) $\rho_S=-\dfrac{(\sigma_2\varepsilon_1-\sigma_1\varepsilon_2)U_0}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$

(3) $R=\dfrac{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}{\sigma_1\sigma_2 S}$

7－7　(1) $E=\dfrac{abU_0}{(b-a)r^2}$

(2) $R=\dfrac{b-a}{2\pi(\sigma_1+\sigma_2)ab}$

(3) $P=\dfrac{2\pi(\sigma_1+\sigma_2)abU_0^2}{b-a}$

7－8　(1) $\varphi_1(\phi)=5.95\phi+20.65$ (V)　　$(\pi/4\leqslant\phi\leqslant\pi/2)$

$\varphi_2(\phi)=32.24\phi$ (V)　　$(0\leqslant\phi\leqslant\pi/4)$

(2) $I=3.14\times10^5$ A，$R=9.56\times10^{-5}$ Ω

(3) $\rho_S=\dfrac{2.33}{\rho}\times10^{-10}$ C/m^2　　$(a\leqslant\rho\leqslant b)$

7－9　**有限长**：$A_z=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\dfrac{\sqrt{\rho^2+(z-l)^2}-(z-l)}{\sqrt{\rho^2+(z+l)^2}-(z+l)}$

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi\dfrac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left[\dfrac{l-z}{\sqrt{\rho^2+(l-z)^2}}+\dfrac{l+z}{\sqrt{\rho^2+(l+z)^2}}\right]$

无限长：$A_z=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{1}{\rho}+C$　（C **为任意常数**），$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$

7－10　(1) **略**

(2) $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 p_{\mathrm{m}}}{4\pi r^3}(\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{e}_\theta \sin\theta)$

7－11 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 Q}{q}\sqrt{a^2+d^2}$

7－12 $q_1=-\dfrac{2a}{d}q$，$q_2=-\dfrac{a(d-2a)}{d^2}q$，$q_3=\dfrac{a^2(3d-2a)}{d^3}q$

7－13 $q_1=\dfrac{q}{8}\left[1-\dfrac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}(d-a)}\right]$，$q_2=\dfrac{q}{2}$，$q_3=\dfrac{q}{4}$，$q_4=\dfrac{q}{8}\left[1+\dfrac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}(d-a)}\right]$

7－14 (1) $U_{\max}=4.6\times10^4$ V

(2) $L=193$ mm，$U_{\max}=5.18\times10^4$ V

(3) $L=200$ mm，$U_{\max}=5.27\times10^4$ V

7－15 $a\approx\dfrac{b}{2.718}$，$E_{\min}\approx2.718\dfrac{U}{b}$

7－16 $U=667$ V

7－17 $d_1=0.5$ cm，$d_2=0.465$ cm

7－18 (1) $\boldsymbol{E}(r)=\boldsymbol{e}_r\dfrac{U_0}{r\ln(b/a)}$　$(a<r<b)$

$\varphi(r)=\dfrac{U_0}{\ln(b/a)}\ln\dfrac{b}{r}$　$(a<r<b)$

(2) $C=\dfrac{(2\pi-\theta_0)\varepsilon_0+\varepsilon\theta_0}{\ln(b/a)}$，$W_e=\dfrac{(2\pi-\theta_0)\varepsilon_0+\varepsilon\theta_0}{2\ln(b/a)}U_0^2$

7－19 (1) $C=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a$

(2) (**略**)

7－20 $\Delta W_e=-\dfrac{d-a}{16\pi\varepsilon_0 ad}(q_1-q_2)^2$

7－21 $\boldsymbol{F}=\dfrac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{e}_z$

7－22 $W=\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)(b-a)Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon ab}$

7－23 $F=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 a_1 a_2}{d^3}(U_1U_2d^2-U_2^2a_2-U_1^2a_1)$

7－24 (**略**)

7－25 $T=1.45\times10^{-7}$ N·m

7－26 $F_d=\dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)L^2U_0^2}{[L+(\varepsilon_r-1)d]^2\ln(b/a)}$

7－27 (**略**)

7－28 (1) $M=\dfrac{\mu_0}{\pi}\left[\dfrac{b}{2}-\dfrac{d}{\sqrt{3}}\ln\left(1+\dfrac{\sqrt{3}b}{2d}\right)\right]$

(2) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\dfrac{d}{\sqrt{3}}\ln\left(1+\dfrac{\sqrt{3}b}{2d}\right)+\dfrac{b}{2d+\sqrt{3}b}\right]$

7－29 (1) $M=\mu_0(a-\sqrt{a^2-b^2})$

(2) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{e}_x\mu_0 I_1 I_2\left(1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$

7－30 $F_x=\dfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)n^2 I^2 S$

第 八 章

8－1 $\varphi(x,y)=U_0\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$

$\boldsymbol{E}(x,y)=\boldsymbol{e}_x\dfrac{U_0}{a}$

8－2 (1) $\varphi(x,y)=\dfrac{U_0}{b}y+\dfrac{2bU_0}{d\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\left(\dfrac{n\pi d}{b}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$

(2) $C_f=\dfrac{2W_e}{U_0^2}=\dfrac{4\varepsilon_0 b}{\pi^2 d}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\left(\dfrac{n\pi d}{b}\right)$

8－3 $\varphi_1(x,y)=\dfrac{2q_1}{\pi\varepsilon_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sinh(n\pi a/b)}\sinh\left[\dfrac{n\pi}{b}(a-x_0)\right]\cdot$

$\sin\left(\dfrac{n\pi y_0}{b}\right)\sinh\left(\dfrac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\qquad(0<x<x_0)$

$\varphi_2(x,y)=\dfrac{2q_1}{\pi\varepsilon_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sinh(n\pi a/b)}\sinh\left(\dfrac{n\pi x_0}{b}\right)\cdot$

$\sin\left(\dfrac{n\pi y_0}{b}\right)\sinh\left[\dfrac{n\pi}{b}(a-x)\right]\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\qquad(x_0<x<a)$

8－4 $\varphi(x,y)=\dfrac{U_0}{b}y+\dfrac{U_0}{\pi}\sum\limits_{n=2,4\cdots}\dfrac{(-1)^{n/2}}{n}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi x}{b}}\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$

8－5 (1) $U_{\max}=1.67\times10^4\ \mathrm{V/m}$

(2) $U_{\max}=1.5\times10^5\ \mathrm{V/m}$

8－6 $\varphi_1=-\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\rho\cos\phi\qquad(\rho\leqslant a)$

$\varphi_2=-\left[\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^2+1\right]E_0\rho\cos\phi\qquad(\rho\geqslant a)$

8－7 $\varphi(x,y)=\sum\limits_{n=1,3\cdots}\dfrac{2U_0}{n\pi}\left(\dfrac{\rho}{b}\right)^n\left[\sin(n\phi)+(-1)^{\frac{n+3}{2}}\cos(n\phi)\right]$

8－8 (**略**)

8－9 $\varphi_1=-\dfrac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0 r\cos\theta\qquad(r\leqslant a)$

$\varphi_2=\left[\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\left(\dfrac{a}{r}\right)^3-1\right]E_0 r\cos\theta\qquad(r\geqslant a)$

$\rho_{SP}=\dfrac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$

8－10 $\varphi_1=\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon r^3}+\dfrac{2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon a^3}\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\qquad(r\leqslant a)$

$\varphi_2=\dfrac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi(\varepsilon+2\varepsilon_0)r^3}\qquad(r\geqslant a)$

$$\rho_{SP}=\frac{3\varepsilon_0 p_0}{2\pi\varepsilon a^3}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\cos\theta$$

8－11 (1) $\varphi(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+a^3E_0r^{-2}\cos\theta+aU_0r^{-1}$

(2) $\varphi(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+a^3E_0r^{-2}\cos\theta+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

8－12 $\dfrac{|\boldsymbol{H}_1|}{|\boldsymbol{H}_0|}=\dfrac{9\mu_0\mu}{(\mu_0+2\mu)(\mu+2\mu_0)-2(\mu_0-\mu)^2(r_1/r_2)^2}$

8－13 (1) $x_0=\sqrt{\dfrac{q}{16\pi\varepsilon_0 E_0}}$，(2) $v_0=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{q^3E_0}{\pi\varepsilon_0 m^2}}$

8－14 $\rho_{S1}=-\dfrac{q}{2\pi}\left\{\dfrac{a}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}}+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{a}{[a^2+(y+b)^2+z^2]^{3/2}}\right\}\quad(y>0,|z|<\infty)$

$\rho_{S2}=-\dfrac{\varepsilon_2 aq}{\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\dfrac{1}{[a^2+(y-b)^2+z^2]^{3/2}}\quad(y<0,|z|<\infty)$

8－15 (1) $\varphi(0)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{d^2+b^2}}-\dfrac{1}{a}\right]$

(2) $F=\dfrac{Qqd}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{(d^2+b^2)^{3/2}}-\dfrac{1}{a^3}\right]$

8－16 $\varphi(a)=\dfrac{b\rho_l}{2\varepsilon_0\sqrt{d^2+b^2}}$

8－17 (1) $F=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{Q+(R/D)q}{D^2}-\dfrac{Rq}{D[D-(R/D)^2]^2}\right\}$

(2) (**略**)

8－18 (1) (**略**)

(2) $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{e}_\phi\sin\theta)$

8－19 (1) $F=-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{ad}{(d^2-a^2)^2}$

(2) **点电荷 q 所受到的电场力 F 不变**

8－20 (1) $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rD\cos\theta}}-\dfrac{a/d}{\sqrt{r^2+(a^2/d)^2-(2ra^2/d)\cos\theta}}-\right.$

$\left.\dfrac{1}{\sqrt{r^2+d^2+2rd\cos\theta}}+\dfrac{a/d}{\sqrt{r^2+(a^2/d)^2+(2ra^2/d)\cos\theta}}\right\}$

(2) $F=-\dfrac{(d^4-a^4)^2+16a^3d^5}{16\pi\varepsilon_0 d^2(d^4-a^4)^2}$

8－21 $F_1=\dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)q_1^2+2\varepsilon_1 q_1 q_2}{16\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d^2}$，$F_2=\dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)q_2^2+2\varepsilon_2 q_1 q_2}{16\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d^2}$

8－22 $F_1=-\dfrac{ad_1q_1^2}{4\pi\varepsilon_0(a^2-d_1^2)^2}$，$F_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{q_2(bq_2+d_2q_1)}{d_2^2}-\dfrac{bd_2q_2^2}{(d_2^2-b^2)^2}\right]$

8－23 (1) $\varphi_1=\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R'r_0}{Ra}+U_0$

(2) $\varphi_2=\dfrac{U_0}{\ln\dfrac{\sqrt{h^2-a^2}+(h-a)}{\sqrt{h^2-a^2}-(h-a)}}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+[y+\sqrt{h^2-a^2}]^2}}{\sqrt{x^2+[y-\sqrt{h^2-a^2}]^2}}$

8－24 $F=-\dfrac{\mu_1(\mu_2-\mu_1)}{\mu_2+\mu_1}\dfrac{\pi I^2 a^4 h}{[a^2+(2h)^2]^{5/2}}$

8－25 $L=\dfrac{\mu_0}{\pi}\ln\dfrac{d}{a}+\dfrac{\mu_0(\mu_r-1)}{\pi(\mu_r+1)}\ln\dfrac{D}{2h}$

阶 段 测 验 题

阶段测验题(一)

(第一、二、三章之后进行)

1. 电磁场的四个场矢量是什么？分别写出它们的单位。

2. 电磁场的源量是什么？写出它们在宏观意义下的分布形式。

3. P、Q 两点的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{e}_x 5+\boldsymbol{e}_y 12+\boldsymbol{e}_z \quad \text{和} \quad \boldsymbol{e}_x 2-\boldsymbol{e}_y 3+\boldsymbol{e}_z$$

从 P 到 Q 的距离矢量是什么？它的长度是多少？它的长度线是否与 xy 平面平行？

4. 用直角坐标系，验证以下两个零恒等式：

$$(1)\ \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\equiv 0$$

$$(2)\ \nabla\times(\nabla u)\equiv 0$$

5. 试写出用电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 表示的麦克斯韦方程组，并说明此方程组在什么条件下才成立？

6. 某无损耗媒质的参数为 $\sigma=0$、$\varepsilon=5\varepsilon_0$、$\mu=\mu_0$，若其中存在的位移电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{e}_x 4\times 10^{-6}\cos(\omega t-3z)\quad \mathrm{A/m^2}$$

试求该媒质中的电场强度和磁场强度。

7. 空气中离辐射源距离为 r 处(设 $r\gg\lambda$)的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\theta\frac{500}{r}\sin\theta\cdot\cos(2\pi\times 10^9 t-kr)\quad(\mu\mathrm{V/m})$$

试确定波数 k 以及与 $\boldsymbol{E}$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}$，并计算平均坡印廷矢量。

8. 写出在空气中沿 y 方向传播、z 方向极化的均匀平面波的电场和磁场的复数表示式。

9. 一均匀平面波从媒质 1(参数为 ε_1、$\mu_1=\mu_0$、$\sigma_1=0$)垂直入射到媒质 2(参数为 ε_2、$\mu_2=\mu_0$、$\sigma_2=0$)的分界平面上，试问在什么条件下，分界平面上的电场为最大值？

10. 试简要证明右旋圆极化波垂直入射到理想导体平面时，反射波变为左旋圆极化。

11. 什么是临界角？在什么条件下，两种非磁性媒质($\mu_1=\mu_0$，$\mu_2=\mu_0$)的分界面上存在临界角？

12. 什么是布儒斯特角？在什么条件下，两种非磁性媒质($\mu_1=\mu_0$，$\mu_2=\mu_0$)的分界面上存在布儒斯特角？

阶段测验题(二)

(第四、五、六章之后进行)

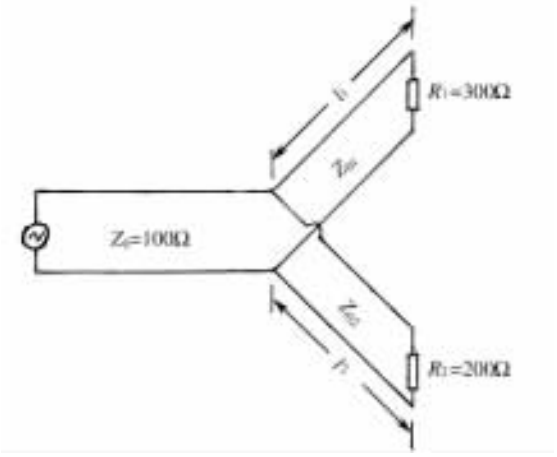
1. 试比较无界非导电媒质中的均匀平面波与沿无损耗传输线的 TEM 波的相同与不同之处。

2. 分别叙述传输线的特性阻抗和输入阻抗的定义。

3. 通常，均匀传输线的电介质是聚乙烯($\varepsilon_r=2.25$)。现要构建特性阻抗 $Z_0=50\ \Omega$ 的同轴传输线，若选定内导体半径 $d=0.7$ mm，试确定外导体的内半径。

4. 一无损耗双线传输线的特性阻抗为 300 Ω，长度为 5 m，其终端负载阻抗为(40+j30)(Ω)。求工作频率为 300 MHz 时，该传输线的输入阻抗。

5. 如附图测 2.5 所示的传输线系统，负载 $R_1=300\ \Omega$ 和 $R_2=200\ \Omega$ 通过特性阻抗为 $Z_0=100\ \Omega$ 的传输线，由频率为 100 MHz 的功率信号源同相馈电，且要求 R_1 吸收的功率是 R_2 吸收功率的二倍。求：(1) Z_{01} 和 l_1；(2) Z_{02} 和 l_2；(3) 线段 l_1 上的反射系数和驻波系数；(4) 线段 l_2 上的反射系数和驻波系数。



附图测 2.5

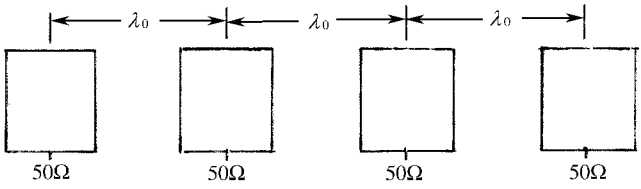
6. 波导的主模指的是什么？矩形波导的主模是哪一个？其截止波长是多少？

7. 波导波长 λ_g 指的是什么？它与相应的无界电介质中的波长 λ 有什么关系？写出 TE_{mn} 波的波导波长计算公式。

8. 尺寸为 8 cm×6 cm×5 cm 的矩形谐振腔，内部介质是空气。试写出前三个最低谐振模式的谐振频率。

9. 写出对称半波天线的远区辐射场表示式，并说明它的几个主要电参数。

10. 安装在 $\varepsilon_r=4$ 的电介质基片上的四个贴片天线构成一个直线阵，彼此间隔一个波长 λ_0(取 $\lambda_0=30$ mm)，每个贴片天线的输入阻抗均为 50 Ω，如附图测 2.10 所示。要求这四个贴片天线通过 50 Ω 的微带线由频率为 10 GHz 的发射机同相馈电，试设计用 $\frac{\lambda}{4}$ 线作阻抗变换的馈电系统。



附图测 2.10

阶段测验题(三)

(第七、八章之后进行)

1. 试从麦克斯韦方程组导出静电场和恒定磁场的基本方程。

2. 电介质与空气的分界面是平面。已知电介质的介电常数 $\varepsilon_1=4\varepsilon$。且分界面一侧(电介质)的电场值 $|\boldsymbol{E}_1|=10\ \mathrm{V/m}$,$\boldsymbol{E}_1$ 的方向与分界面的法线成 30°;求分界面另一侧(空气)的电场 $\boldsymbol{E}_2$。

3. 设位于空气中的无限大导体平板两侧对称地放置点电荷 q_1 和 q_2,两点电荷至导体板的距离皆为 d;试分别求两侧空间中任一点的电位。

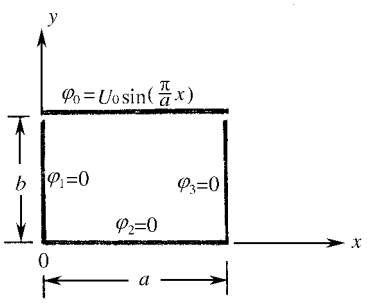
4. 判定矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x 2y-\boldsymbol{e}_y 2x$ 是否可用来表示磁感应强度?若可以,则求出产生此磁场的电流密度 $\boldsymbol{J}$。

5. 同轴导体壳系统的内导体的内半径为 a,外半径为 b;外导体的内半径为 c,外半径为 d。设该系统载有电流 I,求该系统单位长度储存的磁场能量。

6. 半径为 a 的长直导线平行于地球表面,且与地球表面相距 h。设地球为理想导体平面,试求单位长度导线与地球之间的电容。

7. 简述用分离变量法求解电磁场边值问题的基本思想和一般解题步骤。

8. 横截面尺寸为 $a\times b$ 的矩形长金属槽,如附图测 3.8 所示。其底面和两个侧壁面的电位皆为零,而顶盖的电位为 $\varphi_0=U_0\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$。试写出槽内电位 φ 满足的方程及边界条件。



附图测 3.8