

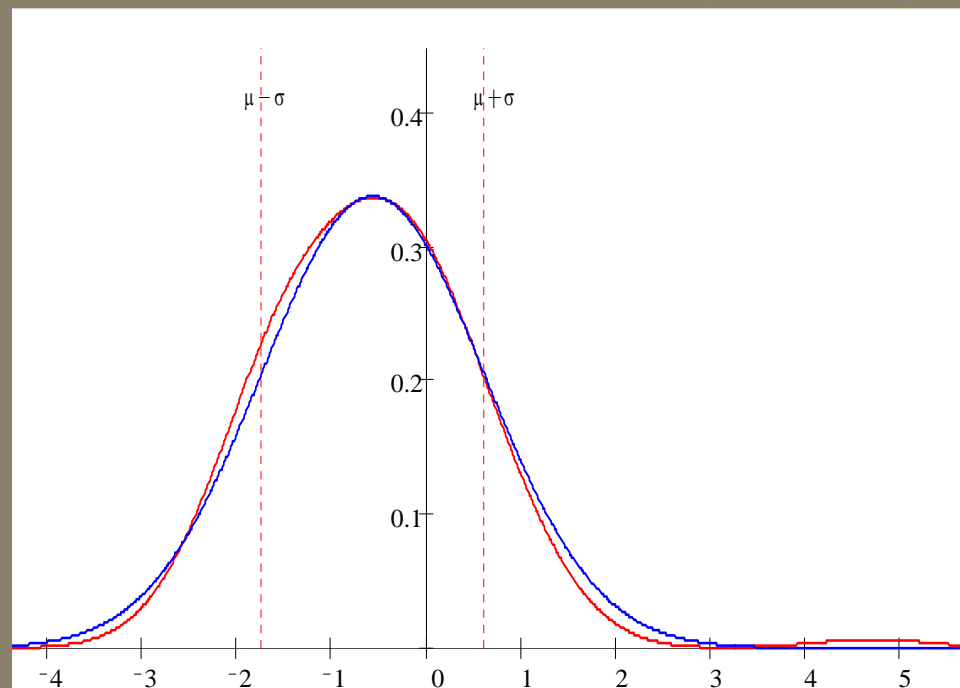


武汉大学

Wuhan University



# 误差理论与测量平差基础



武汉大学 姚宜斌



武汉大学

Wuhan University



## 前言

每一位同学拿到《误差理论与测量平差基础》一书时，脑子里马上就有许多问题涌现：这是一门什么样的课程？学习这门课有什么用处呢？我应该怎样去学好它？……故在讲课之前，简单地向大家介绍一下本课程的基本情况。

测量平差是测绘专业一门重要的技术基础课，主要讲授测量数据处理的基本理论和方法，是理论与实践并重的课程。通过学习测量平差，牢固地掌握测量数据处理的理论和方法，为后续专业课程的学习打下扎实的基础。



武汉大学

Wuhan University



## 前言

### 一、教学内容

全书共有十二章：

第一章 绪论

第二、三章 全书的基础知识

第四章 介绍测量平差理论

第五、六、七、八章 4种平差方法

第九章 各种平差方法的总结

第十章 讨论点位精度

第十一章 统计假设检验的知识

第十二章 近代平差概论

根据本科教学大纲的要求，重点讲解第二章~第十章以及第十二章(部分)的内容。



武汉大学

Wuhan University



## 前言

### 二、怎样学好测量平差

1. 要有扎实的数学基础。只有牢固地掌握了高等数学，线性代数和概率与数理统计等课程的知识才能学好测量平差，因此课前要做到预习，对与以上三门课程有关内容进行复习，只有这样才能听懂这一门课。

2. 听课时弄清解决问题的思路，掌握公式推导的方法以及得到的结论，培养独立思考问题和解决问题的能力。

3. 课后及时复习并完成一定数量的习题，从而巩固课堂所学的理论知识。



武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论

一、本课程在测绘科学与技术中的作用与地位

二、测量误差与测量平差(Surveying Adjustment)

- ❖ 误差与测量误差
- ❖ 测量误差的来源
- ❖ 测量误差的分类
- ❖ 测量误差与多余观测带来的问题
- ❖ 测量平差的诞生

三、测量平差的目的和任务

四、本课程的体系结构

- ❖ 误差理论
- ❖ 平差方法



# 武汉大学

Wuhan University



测量数据（观测数据）是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取的反映地球与其它实体的空间分布有关信息的数据，包含信息和干扰（误差）两部分。

## 误差与测量误差：

所谓测量误差，就是对某量进行测量时，其测量结果（即观测值）与该量客观存在的真正大小或理论上应满足的数值（通称真值，从概率与数理统计的观点看，就是观测值的数学期望）之间的差异，即：

$$\text{观测误差} = \text{真值} - \text{观测值}$$

以  $\Delta$  表示观测误差， $\tilde{L}$  表示真值， $L$  表示观测值，则上式可写为  $\Delta = \tilde{L} - L$

通常称  $\Delta$  为观测值的真误差。



武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论（续）

### ◆ 测量误差的来源:

1. 测量仪器
2. 观测者
3. 外界条件

上述仪器，观测者，外界条件是观测误差的主要来源，我们通常把它们综合起来称为**观测条件**。

**测不准原理：**所有测量都具有观测误差，观测误差自始至终存在于测量过程之中。





武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论（续）

### ◆ 测量误差的分类：

**1.偶然误差：**指在相同的观测条件下作一系列的观测时，从单个误差看，该列误差的大小和符号表现出偶然性，无规律，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差，也称随机误差。

**处理方法：**采用多余观测，利用测量平差的方法求出观测值的最或然值。





武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论（续）

**2.系统误差：**指在相同的观测条件下作一系列的观测时，大小和符号表现出系统性，或按一定规律变化，或者为某一常数的误差。

**处理方法：**

- 1)在观测方法和观测程序上采取必要的措施，限制或削弱系统误差的影响；
- 2) 在平差计算前进行必要的预处理，即利用已有公式对观测值进行系统误差改正；
- 3) 将系统误差当作未知参数纳入平差函数模型中，一并解算。



武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论（续）

**3.粗差：**明显歪曲测量结果的误差,是指比在正常观测条件下所可能出现的最大误差还要大的误差。

**处理方法：**舍弃或重测。



武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论（续）

- ◆ 测量平差研究的主要对象是偶然误差，即总是假定含粗差的观测值已被剔除，含系统误差的观测值已经过适当改正。因此，在观测误差中，仅含偶然误差或是偶然误差占主导地位。



# 武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论（续）

- 问：对某量只作一次观测，该观测值是否不含误差？
- 测量误差与多余观测带来的问题：

由于观测结果不可避免地存在偶然误差的影响，因此，在实际工作中，为了提高成果的质量，同时也为了检查和及时发现观测值中是否有错误存在，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行**多余观测**。由于偶然误差的存在，通过多余观测必然会发现在**观测结果之间不相一致，或不符合应有关系而产生不符值**。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，使得消除不符值后的结果，可以认为是观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量，因此，可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果，这就是测量平差的一个主要任务。



武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论（续）

### ◆ 测量平差的诞生：

- 1) 观测值中含有偶然误差；
- 2) 消除由于多余观测而产生的观测值之间的矛盾的需要。

多余观测的目的：

- 1) 及时发现粗差和错误；
- 2) 提高观测成果的精度。



武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论（续）

### ◆ 测量平差的目的和任务：

- 1) 求待定量的最佳估值;即对一系列带有观测误差的观测值，运用概率统计的方法来消除它们之间的不符值，求出未知量的最可靠值。
- 2) 评定测量成果的精度。

测量平差是测绘专业的专业基础课之一。它是应用概率和数理统计方法来分析观测数据，为观测数据的处理提供理论基础；以最小二乘法作为处理观测数据的基本原则，讲解测量平差的基本原理、方法和技能；论述近代测量平差的基本理论与方法，介绍测量数据处理的最新研究成果。



武汉大学

Wuhan University



## 第一讲 绪论（续）

### 四、本课程的体系结构

- ❖ **误差理论：**偶然误差特性和偶然误差的传播；精度指标及其估计；权与中误差的定义及其估计方法。
- ❖ **平差方法：**条件平差，附有参数的条件平差，间接平差，附有限制条件的间接平差。

本章主要说明观测误差的产生和分类，测量平差法研究的内容以及本课程的任务。





武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差

### 一、偶然误差的规律性

真误差:

观测值与其真值之差, 即  $\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i$ 。

基本假设:

系统误差已消除, 粗差不存在。

寻找偶然误差之规律性的方法:

统计分析

- 1、统计表
- 2、直方图



# 武汉大学

Wuhan University



误差的区间 "	$\Delta$ 为负值			$\Delta$ 为正值			备注
	个数 $\nu_i$	频率 $\nu_i/n$	$\frac{\nu_i/n}{d\Delta}$	个数 $\nu_i$	频率 $\nu_i/n$	$\frac{\nu_i/n}{d\Delta}$	
0.00 ~ 0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	d $\Delta$ = 0.20"; 等于区间左 端值的误差 算入该区间 内。
0.20 ~ 0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40 ~ 0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60 ~ 0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80 ~ 1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00 ~ 1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20 ~ 1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40 ~ 1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
$\Sigma$	181	0.505		177	0.495		

误差分布具有以下性质：

- 1) 误差的绝对值有一定的**限值**；
- 2) 绝对值**较小**的误差**比**绝对值**较大**的误差**多**；
- 3) 绝对值**相等**的正负误差的个数**相近**。



# 武汉大学

Wuhan University

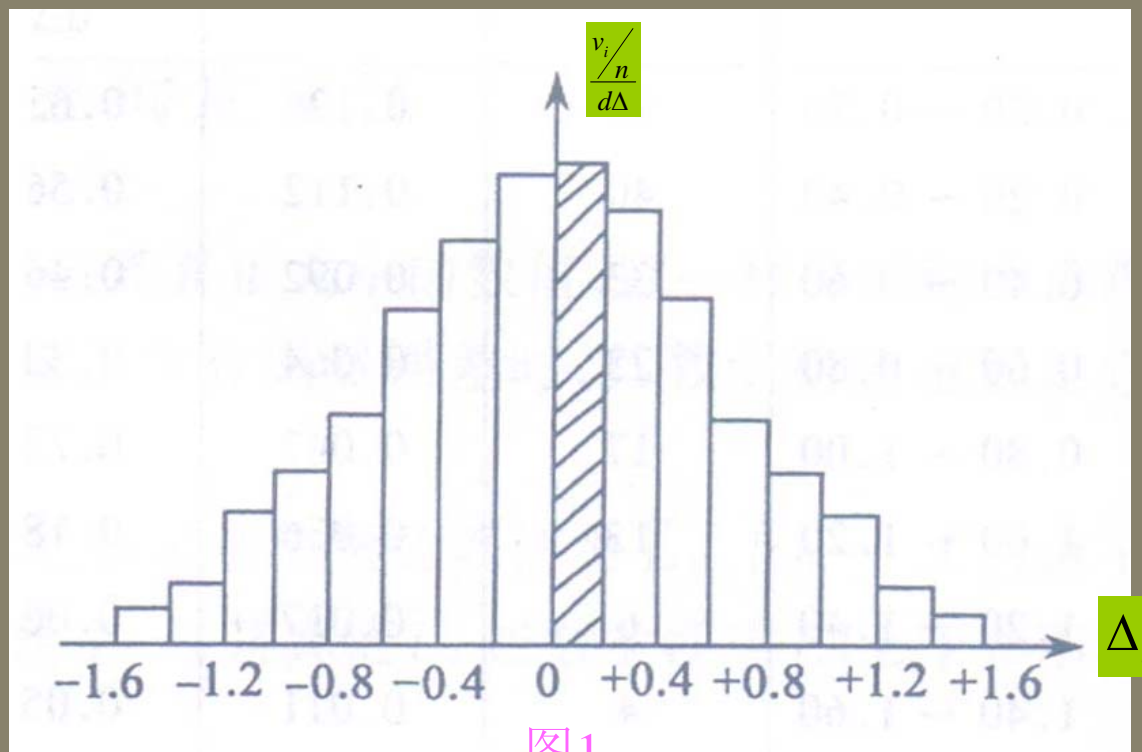


图1

直方图的优点：能形象地表示出误差的分布情况；

缺点：

- 1) 粗糙；
- 2) 间隔不好选取；
- 3) 比较相近的两个误差分属于不同区间。（例0.2和0.21）



# 武汉大学

## Wuhan University



误差的区间 "	$\Delta$ 为负值			$\Delta$ 为正值			备注
	个数 $v_i$	频率 $v_i/n$	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 $v_i$	频率 $v_i/n$	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00 ~ 0.20	40	0.095	0.475	37	0.088	0.440	d $\Delta$ = 0.20"; 等于区间左 端值的误差 算入该区间 内。
0.20 ~ 0.40	34	0.081	0.450	36	0.085	0.425	
0.40 ~ 0.60	31	0.074	0.370	29	0.069	0.345	
0.60 ~ 0.80	25	0.059	0.295	27	0.064	0.320	
0.80 ~ 1.00	20	0.048	0.240	18	0.043	0.215	
1.00 ~ 1.20	16	0.038	0.190	17	0.040	0.200	
1.20 ~ 1.40	14	0.033	0.165	13	0.031	0.155	
1.40 ~ 1.60	9	0.021	0.105	10	0.024	0.120	
1.60 ~ 1.80	7	0.017	0.085	8	0.019	0.095	
1.80 ~ 2.00	5	0.012	0.060	7	0.017	0.085	
2.00 ~ 2.20	6	0.014	0.070	4	0.009	0.045	
2.20 ~ 2.40	2	0.005	0.025	3	0.007	0.035	
2.40 ~ 2.60	1	0.002	0.010	2	0.005	0.025	
2.60 以上	0	0	0	0	0	0	
$\Sigma$	210	0.499		211	0.501		

从表中可以看出：

- 1) 愈接近于零的误差区间，误差出现的频率愈大；
- 2) 随着离零愈来愈远，误差出现频率亦逐渐递减；
- 3) 出现在正负误差区间内的频率基本相等。



武汉大学

Wuhan University

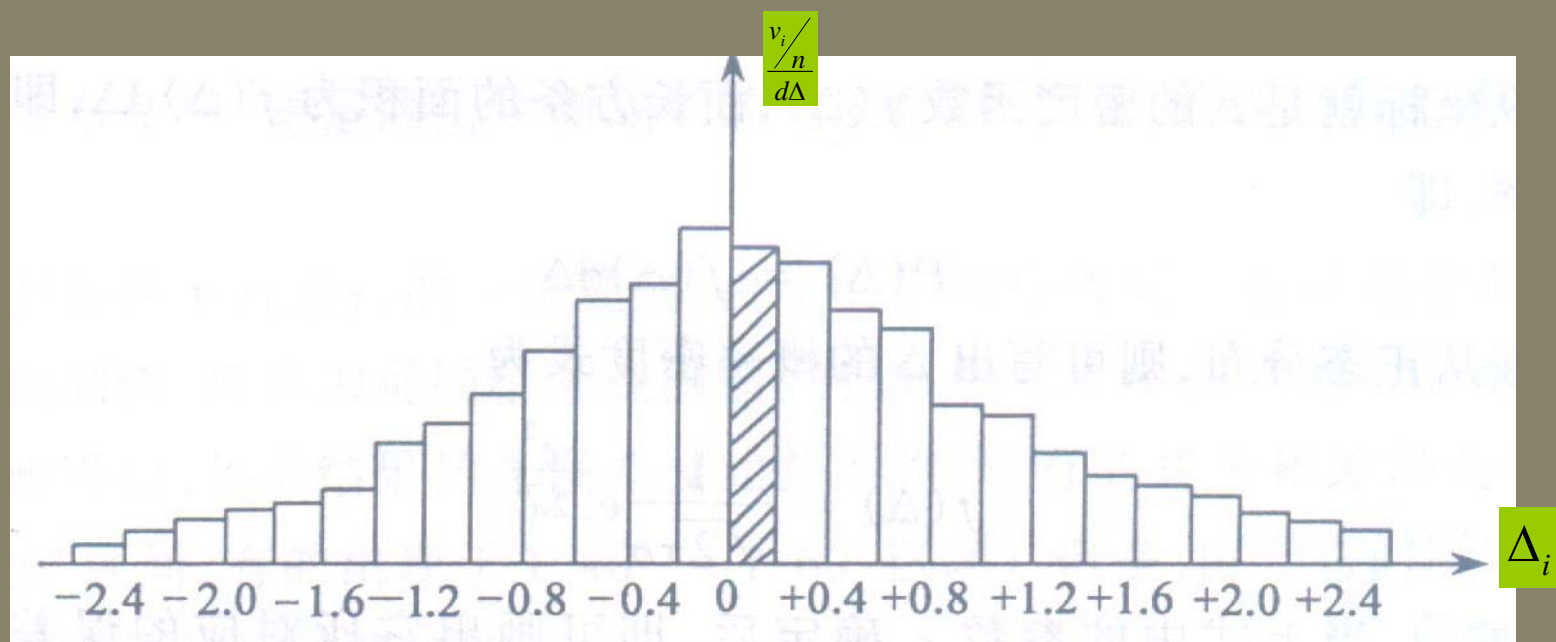


图2



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

由统计分析可以看出，偶然误差具有下列特性：

- 1、在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值有一定的限值，即超过一定限值的偶然误差出现的概率为零；

$$P(|\Delta| > \Delta_{\text{限}}) = 0$$

- 2、绝对值较小的偶然误差比绝对值较大的偶然误差出现的概率大； $P(|\Delta_{\text{小}}|) > P(|\Delta_{\text{大}}|)$

- 3、绝对值相等的正负偶然误差出现的概率相同；

- 4、偶然误差的理论平均值为零，即

$$E(\Delta) = 0 \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i = 0$$





武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

### 二、正态分布

当偶然误差的个数  $n \rightarrow \infty$  时，偶然误差出现的频率就趋于稳定。此时，若把偶然误差区间的间隔无限缩小，则直方图（图1、图2）将分别变为图3所示的两条光滑的曲线。

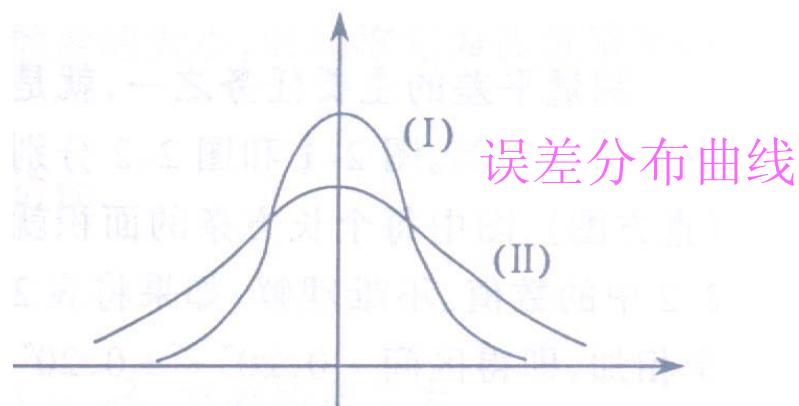


图3





武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

由概率论知，该曲线是正态分布的概率分布曲线。所以测量上通常将正态分布作为偶然误差的理论分布。或者说偶然误差服从正态分布。其密度函数为：

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\Delta - \mu)^2\right), \quad -\infty < \Delta < +\infty$$

式中： $\mu$  和  $\sigma$  为参数。



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

由密度函数

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\Delta - \mu)^2\right), \quad -\infty < \Delta < +\infty$$

知，偶然误差 $\Delta$ 为正态随机变量。所以又称偶然误差为随机误差。

下面来看参数  $\mu$  和  $\sigma$  是什么。

对正态随机变量 $\Delta$  求数学期望：

$$E(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta f(\Delta) d\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\Delta - \mu)^2\right)$$



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

作变量代换，令  $t = \frac{\Delta - \mu}{\sigma}$   
得

$$\begin{aligned} E(\Delta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \end{aligned}$$

因

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = \sqrt{2\pi}$$



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

所以

$$E(\Delta) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \mu$$

再求  $\Delta$  的方差  $D(\Delta)$ 。

$$D(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta - E(\Delta))^2 f(\Delta) d\Delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta - \mu)^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\Delta - \mu)^2\right) d\Delta$$

同样作变量代换，可得：

$$D(\Delta) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2$$



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

由以上推导知，参数  $\mu$  和  $\sigma$  分别是随机误差  $\Delta$  的数学期望和方差。它们确定了正态分布曲线的形状。

由

$$E(\Delta) = \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i = 0$$

知，随机误差  $\Delta$  的数学期望等于零。

由正态分布知，正态分布曲线具有两个拐点，这两个拐点在横轴上的坐标为  $\Delta_{\text{拐}} = \pm\sigma$ 。

方差的几何意义是：方差是正态分布曲线的拐点横坐标的平方。

偶然误差  $\Delta$  是服从  $N(0, \sigma^2)$  分布的随机变量。



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

### 三、精度及衡量精度的指标

观测值的质量取决于观测误差（偶然误差、系统误差、粗差）的大小。

**1、精度：**指误差分布的密集或离散的程度，即离散度的大小；描述**偶然误差**，指**观测结果**与其**数学期望**接近程度，可从分布曲线的陡峭程度看出精度的高低。

**注意：**所谓精度高低，是对不同观测组而言。对于**同一组的若干个观测值**，因对应于同一种误差分布，故每个观测值的**精度都相同**。在相同观测条件下进行的一组观测，每一观测值都称为等精度观测值。



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

**2、准确度：**描述系统误差和粗差，指观测值的真值与其数学期望之差，即： $\varepsilon = \tilde{L} - E(L)$

**3、精确度：**描述偶然误差、系统误差和粗差的集成，指观测结果与其真值的接近程度，包括观测结果与其数学期望接近程度和数学期望与其真值的偏差，是一个全面衡量观测质量的指标。

精确度可用观测值的均方误差来描述，即：

$$MSE(L) = E(L - \tilde{L})^2 = \sigma_L^2 + (E(L) - \tilde{L})^2$$

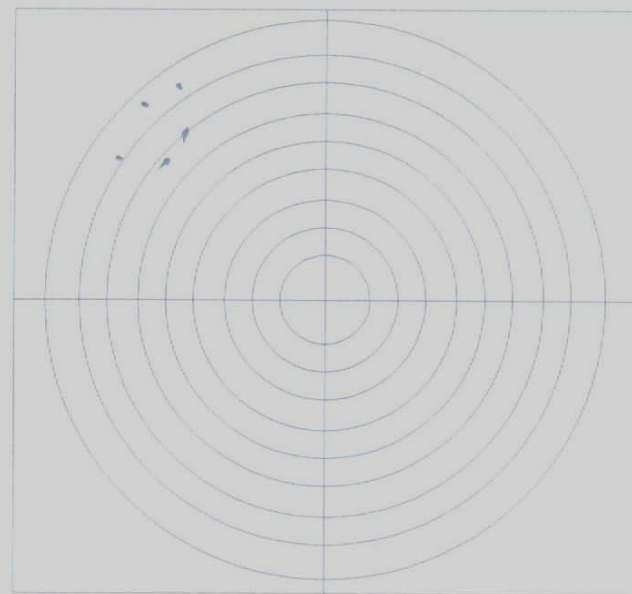
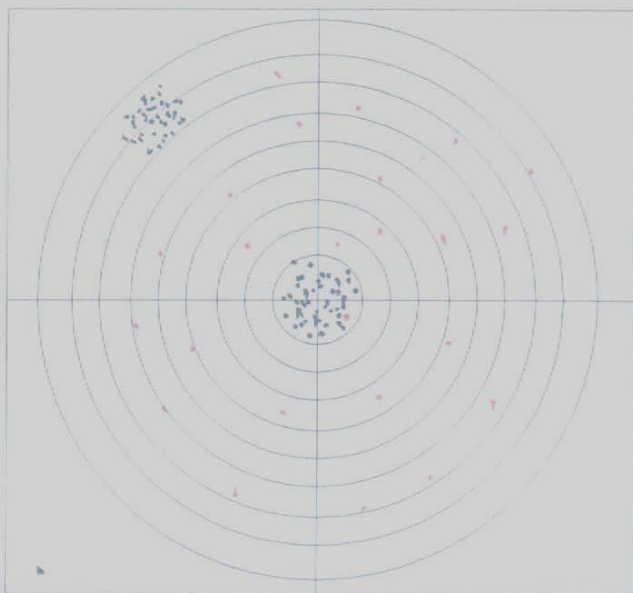
当  $E(L) = \tilde{L}$ ，即观测值中不存在系统误差和粗差时，亦即观测值中只存在偶然误差时，均方误差就等于方差，此时精确度就是精度。





武汉大学

Wuhan University





# 武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

### 4、衡量精度的指标

精度虽然可以通过直方图或分布曲线的形状来描述，但在实际工作中很麻烦，且不能用一个数字来衡量其高低。为此，人们希望通过用一个数字来反映偶然误差的离散程度。能反映偶然误差的离散程度的数字称为衡量精度的指标。这样的数字很多，比如：

**4.1 方差和中误差** 设在相同的观测条件下得到一组独立观测误差  $\Delta_i$ ，则其方差定义为：

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}$$



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

方差的算术平方根定义为中误差，即

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}}$$

在实际工作中， $n$ 总是有限的，由有限个观测值的真误差只能求得方差和中误差的估值：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}$$

和

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}}$$



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

**4.2 平均误差** 设在相同的观测条件下得到一组独立观测误差  $\Delta_i$ ，则其平均误差由  $\Delta_i$  之绝对值的数学期望定义，即：

$$\theta = E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta_i|}{n}$$

因为

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta = 2 \int_0^{+\infty} \Delta f(\Delta) d\Delta$$

所以

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \approx 0.7979 \sigma \approx \frac{4}{5} \sigma$$

$$\sigma = \theta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.253 \theta \approx \frac{5}{4} \theta$$



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

由上式知，不同的 $\theta$ ，对应着不同的 $\sigma$ ，于是就对应着不同的误差分布曲线。所以平均误差 $\theta$ 也可作为衡量精度的指标。

在实际工作中，既可通过以上等量关系来计算平均误差的估值：

$$\hat{\theta} = \frac{4}{5} \hat{\sigma} = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}}$$

也可由下式计算之：

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta_i|}{n}$$



# 武汉大学

Wuhan University

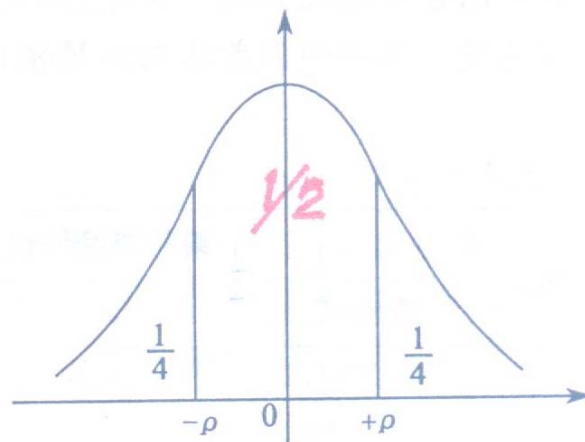


## 第二讲 偶然误差（续）

### 4.3 或然误差

当观测误差出现在 $(-\rho, +\rho)$ 之间的概率等于二分之一时，称 $\rho$ 为或然误差（如图），即

$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta) d\Delta = \frac{1}{2}$$





武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

令  $\frac{\Delta}{\sigma} = t$ ，则有

$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta) d\Delta = 2 \int_0^{\rho/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2}$$

由概率积分表可查得，当概率为二分之一时，积分限为0.6745，于是可得中误差与偶然误差的理论关系：

$$\rho \approx 0.6745\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma, \sigma \approx 1.4826\rho \approx \frac{3}{2}\rho$$





武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

中误差、平均误差和或然误差都可以作为衡量精度的指标，但由于

- ❖ 当 $n$ 不大时，中误差比平均误差更能灵敏地反映大误差的影响；
- ❖ 中误差具有明确的几何意义（分布曲线的拐点坐标）；
- ❖ 平均误差和或然误差都与中误差存在理论关系；

所以，世界各国都采用中误差作为衡量精度的指标，我国也统一采用中误差作为衡量精度的指标。



武汉大学

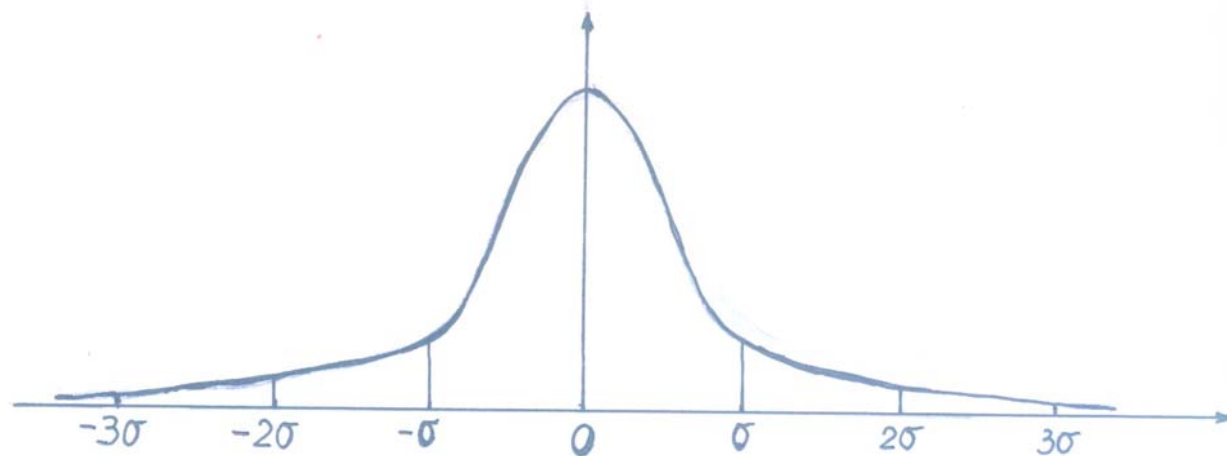
Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

### 4.4 极限误差

由中误差的定义知，中误差是一组同精度观测误差平方的平均值的平方根极限值。既然是平均值，就会有的观测误差的绝对值比中误差大，有的观测误差的绝对值比中误差小。那么，绝对值比中误差小的观测误差出现的概率是多少？绝对值比中误差大的观测误差出现的概率又是多少呢？由下图，通过积分





# 武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

可得观测误差  $\Delta$  出现在给定区间  $(-k\sigma < \Delta < k\sigma)$  内的概率为：

$$P(\mu - k\sigma < \Delta < \mu + k\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-k\sigma}^{k\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) d\Delta$$

作变量代换，得  $k=1, 2, 3$  时的概率分别为：

$$P(-\sigma < \Delta < \sigma) \approx 68.3\%$$

$$P(-2\sigma < \Delta < 2\sigma) \approx 95.5\%$$

$$P(-3\sigma < \Delta < 3\sigma) \approx 99.7\%$$

上式表明：绝对值大于中误差的观测误差出现的概率为31.7%；绝对值大于二倍中误差的观测误差出现的概率为4.5%；绝对值大于三倍中误差的观测误差出现的概率仅为0.3%。即观测误差的绝对值一般不会大于三倍中误差。因此，实际工作中通常以三倍中误差作为观测误差的极限，并称为极限误差，用  $\Delta_{\text{限}}$  表示，即  $\Delta_{\text{限}} = 3\sigma$

**4.5 相对误差：** 观测值的中误差与观测值之比，称为相对误差，即

$$\frac{\sigma_s}{S} = \frac{1}{S/\sigma_s} = \frac{1}{N}$$



武汉大学

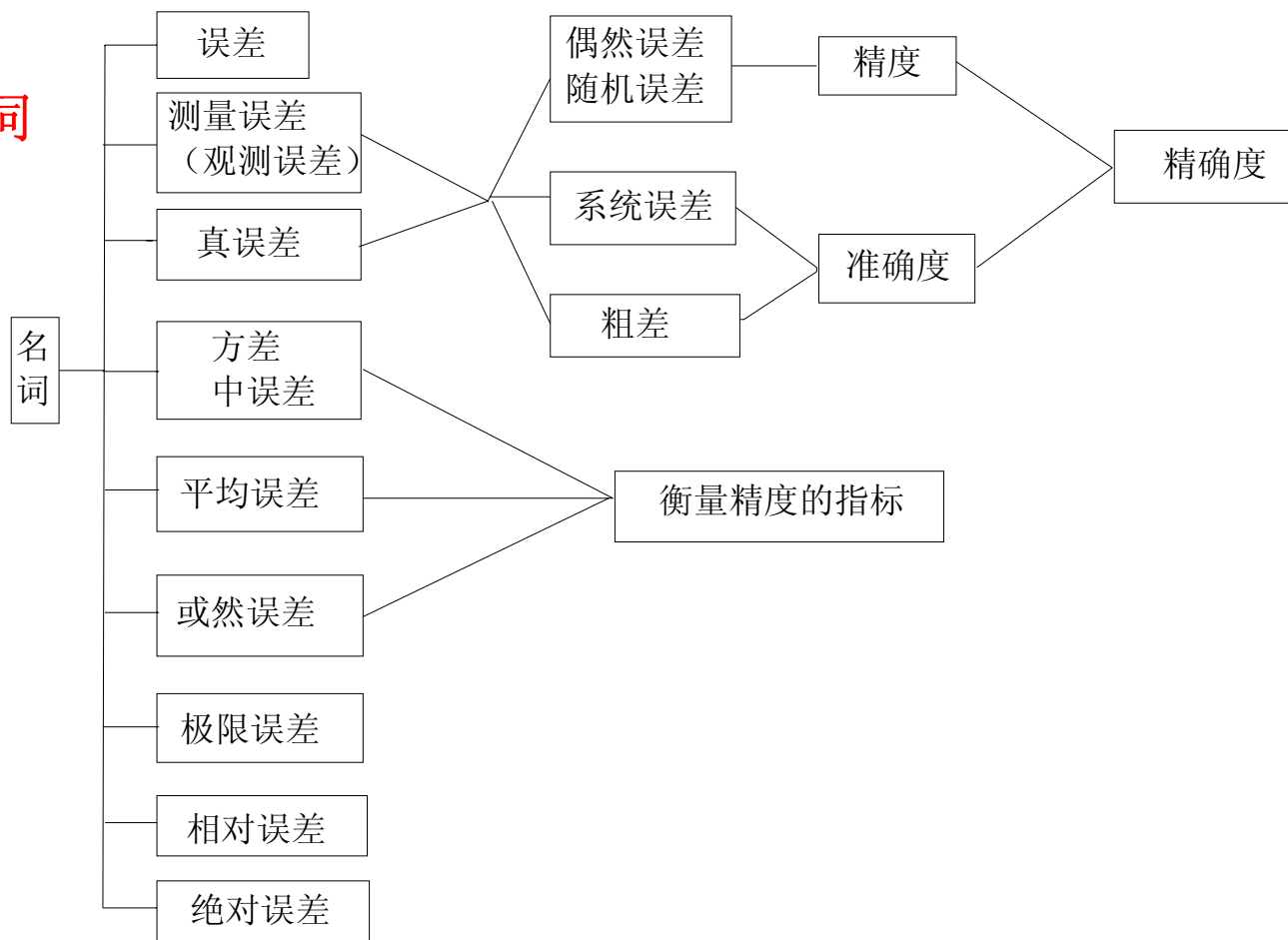
Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

小结：

1、几个名词





武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

### 2、一个事实

不论观测条件如何，观测误差总是不可避免的。

### 3、基本假设

在本课程中，我们假设观测误差为偶然误差，即不含系统误差和粗差。换句话说，我们假设观测误差服从正态分布。

### 4、统计规律

- ❖ 在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值有一定的限值，即超过一定限值的偶然误差出现的概率为零；
- ❖ 绝对值较小的偶然误差比绝对值较大的偶然误差出现的概率大；
- ❖ 绝对值相等的正负偶然误差出现的概率相同；
- ❖ 偶然误差的理论平均值为零。



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

本章是本课程的重点内容之一。

**重点：**偶然误差的规律性，精度的含义以及衡量精度的指标。

**难点：**精度、准确度、精确度等概念。

**要求：**弄懂精度等概念；深刻理解偶然误差的统计规律；牢固掌握衡量精度的几个指标。



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

### 主要公式汇编

真误差

$$\Delta = \tilde{L} - L$$

方差

理论值:

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}$$

估值:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}$$

中误差

理论值:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}}$$

估值:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}}$$





武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

### 平均误差

理论值:

$$\theta = E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta_i|}{n}$$

估 值:

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \approx 0.7979 \sigma \approx \frac{4}{5} \sigma$$

### 或然误差

理论值:

$$\rho \approx 0.6745 \sigma \approx \frac{2}{3} \sigma$$

估 值:

$$\hat{\rho} \approx 0.6745 \hat{\sigma} \approx \frac{2}{3} \hat{\sigma}$$



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

极限误差： $\Delta_{\text{限}} = 3\sigma$  (或  $\Delta_{\text{限}} = 2\sigma$ )

相对误差：
$$\frac{\sigma_s}{S} = \frac{1}{S/\sigma_s} = \frac{1}{N}$$



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

### 复习思考题

1. 什么叫观测误差？产生观测误差的原因主要有哪几个方面？
2. 观测条件是由哪些因素构成的？
3. 根据观测误差对观测结果影响的不同，说明观测误差的分类。
4. 为什么观测值中一定存在偶然误差？偶然误差能否被消除，为什么？
5. 测量平差的任务是什么？



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

6. 观测值的真误差属于什么误差？
7. 在相同的观测条件下，大量的偶然误差呈现什么样的规律性？
8. 观测条件与误差分布之间有何关系？
9. 在相同的观测条件下，对同一个量进行了若干次观测，这些观测值的精度是否相同？能否理解为误差小的观测值一定比误差大的观测值精度高，为什么？
10. 在相同的观测条件下，绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。那么，误差为零的观测值出现的概率是不是最大，你怎样理解？
11. 我们规定  $\Delta_{\text{限}}$  等于  $3\sigma$  或  $2\sigma$  的理论根据是什么？



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

### 习题

1. 在角度测量中，用正倒镜观测；在水准测量中，使前后视距相等，这些规定都是为了消除什么误差？
2. 用钢尺丈量距离时，下列几种情况会使测量结果中含有误差，试分别判定误差的性质及符号：
  - 1) 尺长不准确；
  - 2) 尺不水平；
  - 3) 估读小数不准确；
  - 4) 尺垂曲；
  - 5) 尺端稍偏直线方向（定线不准确）。



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

3.在水准测量中，有下列几种情况，使水准尺读数带有误差，试判别误差的性质及符号：

- 1) 视准轴与水准轴不平行；2) 仪器下沉；  
3) 读数时估读不准确；4) 水准尺下沉。

4.为了鉴定经纬仪的精度，对已知的水平角

$\alpha$  ( $\alpha = 45^\circ 00' 03.0''$ ) 作了12次观测，其结果为：

$45^\circ 00' 06''$ ,  $44^\circ 59' 55''$ ,  $44^\circ 59' 58''$ ,  $45^\circ 00' 03''$ ,  $45^\circ 00' 04''$ ,

$45^\circ 00' 00''$ ,  $44^\circ 59' 58''$ ,  $44^\circ 59' 59''$ ,  $45^\circ 00' 06''$ ,  $45^\circ 00' 03''$

假设  $\alpha$  无误差，试求观测值的中误差。



武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

5. 有一段距离，其观测值及其中误差为  $345.675 \pm 15\text{cm}$

试估计这个观测值的误差的实际可能出现的范围是多少？

6. 已知两角度的大小及其中误差分别为：

$$44^\circ 46' 08'' \pm 10'', 120^\circ 40' 16'' \pm 10''$$

试说明：这两个角度的真误差是否相等？它们的最大误差  $\Delta_{\text{限}}$  是否相等？它们的精度是否相等？





武汉大学

Wuhan University



## 第二讲 偶然误差（续）

7. 已知  $S = 200.000m \pm 10mm$  试求：观测值的相对误差，并估计这个观测值的误差可能出现的范围。
8. 已知  $S_1 = 300.445m \pm 4.5cm$ ,  $S_2 = 660.844m \pm 4.5cm$  试说明：它们的真误差是否相等？它们的最大误差是否相等？它们的精度是否相等？它们的相对误差是否相等？
9. 量得一段距离， $S = 2046.35m$ ，其相对中误差为  $\frac{1}{25000}$ ，求该距离的中误差。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律

现在提出这样一个问题：观测值函数的精度如何评定？其中误差与观测值的中误差存在怎样的关系？如何从后者得到前者？这是本章所要讨论的重要内容，阐述这种关系的公式称为协方差传播律。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律

### 一、观测向量及其方差——协方差矩阵

作为衡量精度的指标，中误差可衡量一组观测值的精度。在实际工作中，我们得到的观测值往往是由多组观测值所构成的观测向量。比如，在GPS测量中，基线观测值  $L = (\Delta x \ \Delta y \ \Delta z)^T$  就是观测向量。

衡量观测向量之精度的指标是方差——协方差矩阵。一般地，设  $n$  维观测向量为

$$L = (l_1 \ l_2 \ \cdots \ l_n)^T_{n \times 1}$$

则其方差——协方差矩阵定义为：



# 武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

$$D_{LL} = E\left((L - E(L))(L - E(L))^T\right) = \begin{pmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \sigma_{l_1 l_2} & \cdots & \sigma_{l_1 l_n} \\ \sigma_{l_2 l_1} & \sigma_{l_2}^2 & \cdots & \sigma_{l_2 l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{l_n l_1} & \sigma_{l_n l_2} & \cdots & \sigma_{l_n}^2 \end{pmatrix}^T$$

几点说明：

1.  $E(L) = (E(l_1) \ E(l_2) \ \cdots \ E(l_n))^T$  为观测向量的期望；
2. 主对角线元素  $\sigma_{l_i}^2 = D(l_i) = E((l_i - E(l_i))^2)$  为第*i*组观测值的方差；
3. 非主对角线元素  $\sigma_{l_i l_j} = E((l_i - E(l_i))(l_j - E(l_j)))$  为第*i*组观测值关于第*j*组观测值的协方差，协方差用来描述第*i*个观测值与第*j*个观测值之间的**相关程度**。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

当  $\sigma_{l_i l_j} = 0$  表示这两个观测值的误差之间互不影响，即它们的误差是不相关的，并称这些观测值为**不相关的观测值（也称独立观测值）**；

当  $\sigma_{l_i l_j} \neq 0$ ，表示这两个观测值的误差之间是相关的，称这些观测值为**相关的观测值（也称不独立观测值）**。

例：直接测得的高差，距离，角度及方向等都是**独立观测值**；

一般来说，独立观测值的各个函数之间是不独立的，或者说是相关的，因而它们是相关观测值。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

3. 由于  $\sigma_{l_i l_j} = E((l_i - E(l_i))(l_j - E(l_j))) = E((l_j - E(l_j))(l_i - E(l_i))) = \sigma_{l_j l_i}$

所以  $D_{LL}$  是对称方阵。

4. 当该组观测值是一组独立观测值时，则  $\sigma_{l_i l_j} = 0 (i \neq j)$

此时方差阵变为对角阵，即

$$D_{LL} = \begin{pmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \sigma_{l_2}^2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \sigma_{l_n}^2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\sigma_{l_1}^2, \sigma_{l_2}^2, \cdots, \sigma_{l_n}^2)$$

5. 当该组观测值是一组同精度独立观测值时，则

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ ，此时方差阵变为数量矩阵。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 二、协方差传播律

#### 1、协方差传播律的作用

计算观测向量函数的方差——协方差矩阵，  
从而评定观测向量函数的精度。

#### 2、预备公式

$$E(C) = C, \quad E(CX) = CE(X), \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n)$$





武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 3、观测向量线性函数的方差

设观测向量 $X$ 及其期望和方差为：

$$X = (X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n)^T, \quad E(X) = (E(X_1) \quad E(X_2) \quad \cdots \quad E(X_n))^T$$

$$D_{XX} = E((X - E(X))(X - E(X))^T) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = D_{XX}^T$$

观测向量线性函数为

$$Z = KX + k_0$$

式中：  $K = (k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n)$ ,  $k_0$  为常数。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

Z的期望为

$$E(Z) = E(KX + k_0) = KE(X) + k_0$$

Z的方差为

$$\begin{aligned} D_{ZZ} &= E[(Z - E(Z))(Z - E(Z))^T] \\ &= E[(KX + k_0 - KE(X) - k_0)(KX + k_0 - KE(X) - k_0)^T] \\ &= KE[(X - E(X))(X - E(X))^T]K^T \\ &= KD_{XX}K^T \end{aligned}$$

即

$$D_{ZZ} = KD_{XX}K^T$$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 4、多个观测向量线性函数的方差——协方差矩阵

若观测向量的多个线性函数为

$$Z_1 = k_{11}X_1 + k_{12}X_2 + \cdots + k_{1n}X_n + k_{10}$$

$$Z_2 = k_{21}X_1 + k_{22}X_2 + \cdots + k_{2n}X_n + k_{20}$$

... ..

$$Z_t = k_{t1}X_1 + k_{t2}X_2 + \cdots + k_{tn}X_n + k_{t0}$$

则令

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_t \end{pmatrix}_{t \times 1}, K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{t1} & k_{t2} & \cdots & k_{tn} \end{pmatrix}_{t \times n}, K_0 = \begin{pmatrix} k_{10} \\ k_{20} \\ \vdots \\ k_{t0} \end{pmatrix}_{t \times 1}$$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

于是，观测向量的多个线性函数可写为

$$D_{ZZ} = K D_{XX} K^T$$

$$\underset{t1}{Z} = \underset{tn}{K} \underset{n1}{X} + \underset{t1}{K_0}$$

式中： $D_{ZZ} = D_{ZZ}^T$ 为对称方阵。

若还有观测向量的另外 $r$ 个线性函数

$$Y_1 = f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + \cdots + f_{1n}X_n + f_{10}$$

$$Y_2 = f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + \cdots + f_{2n}X_n + f_{20}$$

... ..

$$Y_r = f_{r1}X_1 + f_{r2}X_2 + \cdots + f_{rn}X_n + f_{r0}$$

其矩阵形式为：

$$\underset{r1}{Y} = \underset{rn}{F} \underset{n1}{X} + \underset{r1}{F_0}$$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

则有：

$$D_{YY} = FD_{XX}F^T = D_{YY}^T$$

$r \times r$

而

$$\begin{aligned} D_{YZ} &= E[(Y - E(Y))(Z - E(Z))^T] \\ &= E[(FX + F_0 - FE(X) - F_0)(KX + k_0 - KE(X) - k_0)^T] \\ &= FE[(X - E(X))(X - E(X))^T]K^T \\ &= FD_{XX}K^T \end{aligned}$$

$r \times t$

同理：

$$D_{ZY} = KD_{XX}F^T = D_{YZ}^T$$

$t \times r$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 5、多个观测向量非线性函数的方差——协方差矩阵

基本思想：**a**、用全微分代替全增量，得到函数误差表达式（线性近似）；**b**、应用协方差传播律。

设观测向量的 $t$ 个非线性函数为：

$$Z_1 = f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$Z_2 = f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

... ..

$$Z_t = f_t(X_1, X_2, \dots, X_n)$$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

对上式求全微分，得

$$dZ_1 = \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right) dX_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \right) dX_2 + \cdots + \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \right) dX_n$$

$$dZ_2 = \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_1} \right) dX_1 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right) dX_2 + \cdots + \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \right) dX_n$$

... ..

$$dZ_t = \left( \frac{\partial f_t}{\partial X_1} \right) dX_1 + \left( \frac{\partial f_t}{\partial X_2} \right) dX_2 + \cdots + \left( \frac{\partial f_t}{\partial X_n} \right) dX_n$$





武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

令

$$dZ = \begin{pmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \\ \vdots \\ dZ_t \end{pmatrix}, \quad dX = \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_t}{\partial X_1} & \frac{\partial f_t}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_t}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

则由误差传播定律得：

$$D_{ZZ} = K D_{XX} K^T$$

由以上推导知，求非线性函数的方差——协方差矩阵比求线性函数的方差——协方差矩阵只多一个求全微分的步骤。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 6、协方差传播律的应用举例

#### 线性函数

##### (1) 单个函数

一般问题：书例3-1

测量问题：书例3-2，书例3-3，水准测量的精度P35

同精度独立观测值的算术平均值的精度P35

若干独立误差的联合影响P36

由所要求的函数精度确定部分观测值的精度（测量平差：P30）

##### (2) 多个函数

一般问题：书例3-5

测量问题：书例3-4



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 非线性函数

#### (1) 单个函数

一般问题：书例3-6

测量问题：

#### (2) 多个函数

一般问题：

测量问题：书例3-7



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### （1）单个函数

一般问题：

例3-1：在1:500的地图上，量得某两点间的距离  
 $d=23.4\text{mm}$ ,  $d$ 的量测中误差  $\sigma_d = 0.2\text{mm}$  求该两点实地距离  $S$  及其中误差  $\sigma_s$ 。

测量问题：

例3-2：设  $X$  为独立观测值  $L_1, L_2, L_3$  的函数

$$X = \frac{1}{7}L_1 + \frac{2}{7}L_2 - \frac{4}{7}L_3$$

已知  $L_1, L_2, L_3$  的中误差  $\sigma_1 = 3\text{mm}, \sigma_2 = 2\text{mm}, \sigma_3 = 1\text{mm}$   
求函数的中误差  $\sigma_X$ 。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

例3-3：设在测站A上，已知  $\angle ABC = \alpha$ ，设无误差，而观测角  $\beta_1$  和  $\beta_2$  的中误差为  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.4''$ ，协方差  $\sigma_{12} = -1(\text{秒}^2)$ ，求角  $x$  的中误差  $\sigma_x$ 。

水准测量的精度：书P35

当各测站高差的观测精度相同时，水准测量中高差的中误差与测站数的平方根成正比； $\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{N} \sigma_{\text{站}}$

当各测站的距离大致相等时，水准测量中高差的中误差与距离的平方根成正比。 $\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{S} \sigma_{\text{公里}}$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

同精度独立观测值的算术平均值的精度：书P35  
N个同精度独立观测值的算术平均值的中误差等于各观测值的中误差除以  $\sqrt{N}$ ，即  $\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma$ 。

若干独立误差的联合影响：书P36

观测结果的方差等于各独立误差所对应的方差之和，即  $\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$ 。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### （2）多个函数

一般问题：

例3-5：设有函数  $Z = F_1 X + F_2 Y$

已知X和Y的协方差阵  $D_{XX}$  和  $D_{YY}$ ，X关于Y的互协方差阵为  $D_{XY}$ ，求Z的方差阵  $D_{ZZ}$  和Z关于X及Y的互协方差阵  $D_{ZX}$  和  $D_{ZY}$ 。





武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

测量问题：

例3-4：设在一个三角形中，同精度独立观测得到三个内角  $L_1, L_2, L_3$ ，其中误差为  $\sigma$ 。试求将三角形闭合差平均分配后的各角  $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$  的协方差阵。



武汉大学

Wuhan University



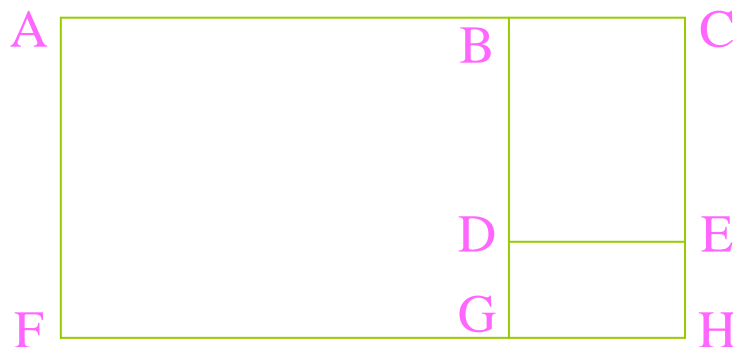
## 第三讲 协方差传播律（续）

### 非线性函数

#### (1) 单个函数：一般问题

例3-6：图为一块土地面积按比例尺的放样，图中全部内角均已知为直角，给定数据为  $\overline{FH} = y_1 = 7cm, \overline{BC} = y_2 = 2cm$

$$\overline{HE} = x_1 = 1cm, \overline{CE} = x_2 = 3cm$$



$$Y = (y_1 \quad y_2)^T, D_{YY} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (mm^2)$$

$$X = (x_1 \quad x_2)^T, D_{XX} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (mm^2)$$

试计算矩形ABFG的面积 $Z$ 及其方差。  
 $D_{XY} = 0$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

测量问题：（2）多个函数： 一般问题：

测量问题：

例3-7：设在三角形ABC（如图）中，观测三个内角  $L_1, L_2, L_3$

将闭合差平均分配后得到的各角之值为  $\hat{L}_1 = 40^\circ 10' 30''$

按例3-4的方法求得它们的协方差阵为  $\hat{L}_2 = 50^\circ 05' 20''$

$$\hat{L}_3 = 89^\circ 44' 10''$$

$$D_{\hat{L}\hat{L}} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \text{ (单位: 秒}^2\text{)}$$

已知边长  $S_0 = 1500.000m$ （无误差），试计算  $s_a, s_b$  的长度和它们的协方差阵  $D_{ss}$ 。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 7、应用协方差传播律时应注意的问题

- (1) 根据测量实际，正确地列出函数式；
- (2) 全微分所列函数式，并用观测值计算偏导数值；
- (3) 计算时注意各项的单位要统一；
- (4) 将微分关系写成矩阵形式；
- (5) 直接应用协方差传播律，得出所求问题的方差——协方差矩阵。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 8、权及定权的常用方法

#### ► 权的概念

观测值所占的比重，精度越高，比重越大，即与精度成反比。

方差是表征精度的绝对数字指标；

权是表征精度的相对数字指标；即表示各观测值方差之间比例关系的数字特征。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 1) 权的定义

权的意义，不在于其数值的大小，重要的是它们之间的比例关系。

设有观测值  $L_i (i=1,2,\dots,n)$ ，方差为  $\sigma_i^2 (i=1,2,\dots,n)$ ，如选定任一常数  $\sigma_0$ ，则定义

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

并称  $p_i$  为观测值  $L_i$  的权。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

说明：

(1) 权的大小可衡量观测值精度的高低；

方差（或中误差）愈小，其权愈大；或者说，精度愈高，其权愈大；权可以作为比较观测值之间的精度高低的一种指标。

(2) 权不唯一。





武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 2) 单位权中误差

权为1的观测值所对应的中误差，称为单位权中误差。

由

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

令

$$\sigma_i = \sigma_0$$

，代入上式，得：

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2} = 1$$

可见， $\sigma_0^2$ 是单位权（权为1）观测值的方差，简称为单位权方差。



# 武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 3) 定权的常用方法

#### (1) 水准测量的权

i: 设每一测站观测高差的精度相同，其中误差均为  $\sigma_0$

则各路线观测高差的中误差为  $\sigma_i = \sqrt{N_i} \sigma_{\text{站}}$

设单位权中误差为  $\sigma_0 = \sqrt{C} \sigma_{\text{站}}$

因此有

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{C}{N_i} (i=1,2,\dots,n)$$

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = \frac{C}{N_1} : \frac{C}{N_2} : \dots : \frac{C}{N_n} = \frac{1}{N_1} : \frac{1}{N_2} : \dots : \frac{1}{N_n}$$

即当各测站的观测高差为同精度时，各路线的权与测站数成反比。

常数C有两个意义：C是1测站的观测高差的权；C是单位权观测高差的测站数。例3-8



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

ii: 设每公里观测高差的精度相同, 其中误差为  $\sigma_{\text{公里}}$

则各路线观测高差的中误差为  $\sigma_i = \sqrt{S_i} \sigma_{\text{公里}}$

设单位权中误差为  $\sigma_0 = \sqrt{C} \sigma_{\text{公里}}$

因此有

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{C}{S_i} (i=1, 2, \dots, n)$$

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = \frac{C}{S_1} : \frac{C}{S_2} : \dots : \frac{C}{S_n} = \frac{1}{S_1} : \frac{1}{S_2} : \dots : \frac{1}{S_n}$$

即当每公里观测高差为同精度时, 各路线的权与距离的公里数成反比。

常数C有两个意义: C是一公里观测高差的权; C是单位权观测高差的线路公里数。例3-9



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### (2) 同精度观测值之算术平均值的权

设有  $L_1, L_2, \dots, L_n$ ，它们分别是  $N_1, N_2, \dots, N_n$  次同精度观测值的平均值，若每次观测的中误差均为  $\sigma$ ，则  $L_i$  的中误差为

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{N_i}} (i=1, 2, \dots, n)$$

令  $\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{C}}$

则  $L_i$  的权为  $p_i = \frac{N_i}{C} (i=1, 2, \dots, n)$

即由不同次数的同精度观测值所算得的算术平均值，其权与观测次数成正比。

C有两个意义：C是一次观测的权倒数；C是单位权观测值的观测次数。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 9、协因数与协因数传播律

1) 协因数—权倒数

$$Q_{ii} = \frac{1}{p_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2}$$

$$Q_{jj} = \frac{1}{p_j} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_0^2}$$

$$Q_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0^2}$$

所以

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 Q_{ii}$$

$$\sigma_j^2 = \sigma_0^2 Q_{jj}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0^2 Q_{ij}$$



# 武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 2) 协因数阵

将n维随机变量  $X_n$  的方差阵  $D_{XX}$  同乘以一个纯量因子  $1/\sigma_0^2$  有

$$\frac{1}{\sigma_0^2} D_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2/\sigma_0^2 & \sigma_{12}/\sigma_0^2 & \cdots & \sigma_{1n}/\sigma_0^2 \\ & \sigma_2^2/\sigma_0^2 & \cdots & \sigma_{2n}/\sigma_0^2 \\ \text{对} & \text{称} & \cdots & \cdots \\ & & & \sigma_n^2/\sigma_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \text{对} & \text{称} & \cdots & \cdots \\ & & & Q_{nn} \end{bmatrix} = Q_{XX}$$

协因数阵



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

协因数阵  $Q_{xx}$ : 指由协因数  $Q_{ii}$  和互协因数  $Q_{ij}$  按一定顺序排列成的矩阵。

注意两点:

- (1) 主对角线元  $Q_{ii}$  为随机变量  $x_i$  的协因数, 即权倒数;
- (2) 非主对角线元素  $Q_{ij} (i \neq j)$  为随机变量  $x_i$  关于随机变量  $x_j$  的互协因数, 且有  $Q_{ij} = Q_{ji}$ 。



# 武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 3) 权阵

$$\frac{1}{\sigma_0^2} D_{XX} = Q_{XX} \Rightarrow D_{XX} = \sigma_0^2 Q_{XX} = \sigma_0^2 P_{XX}^{-1}$$

$P_{XX}$  为权阵，记为

$$P_{XX} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = Q_{XX}^{-1}$$

注意两点（1）独立观测值的权阵为对角阵，且其主对角线元素即为相应观测值的权，有  $p_{ii} = p_i$

$$P_{XX} = Q_{XX}^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & p_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$





武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

(2) 当观测值向量中的观测值**相关**时，其权阵中的主对角线元素  $p_{ii}$  **不是** 观测值  $L_i$  的权  $p_i$ 。

例：已知观测值向量  $L$  的权阵为  $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

试求观测值  $L_1, L_2, L_3$  的权  $p_i$ 。

解：

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

由于  $Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 2/4 = \frac{1}{2}$ ，因而有  $p_1 = p_2 = p_3 = 1/Q_{ii} = 2$



# 武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 4) 协因数传播律（例3-12, 3-13）

$$\left. \begin{aligned} Y &= FX + F^0 \\ Z &= KX + K^0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} D_{YY} &= FD_{XX}F^T \\ D_{ZZ} &= KD_{XX}K^T \\ D_{YZ} &= FD_{XX}K^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_0^2 Q_{YY} &= F(\sigma_0^2 Q_{XX})F^T \\ \sigma_0^2 Q_{ZZ} &= K(\sigma_0^2 Q_{XX})K^T \\ \sigma_0^2 Q_{YZ} &= F(\sigma_0^2 Q_{XX})K^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} Q_{YY} &= FQ_{XX}F^T \\ Q_{ZZ} &= KQ_{XX}K^T \\ Q_{YZ} &= FQ_{XX}K^T \end{aligned} \right\}$$

### 独立观测值的 权倒数传播律：例3-10, 3-11

$$z = f(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

$$\frac{1}{p_z} = \left( \frac{\partial f}{\partial L_1} \right)^2 \frac{1}{p_1} + \left( \frac{\partial f}{\partial L_2} \right)^2 \frac{1}{p_2} + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial L_n} \right)^2 \frac{1}{p_n}$$



# 武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 10、单位权中误差的计算

如何利用一组不同精度的独立观测值的真误差求单位权中误差？

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}} & \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}} & \xrightarrow{\Delta'_i = \sqrt{p_i} \Delta_i} & \sigma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i \Delta_i^2}{n}} & \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i \Delta_i^2}{n}} \end{array}$$

由三角形闭合差求测角中误差

$$\hat{\sigma}_\beta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w^2}{3n}}$$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

小结：本讲主要内容包括

### 1、方差——协方差矩阵的定义

$$D_{XX} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = D_{XX}^T$$

### 2、协方差传播律

（线性和非线性）

$$D_{ZZ} = K D_{XX} K^T$$

### 3、应用协方差传播律所应注意的问题

### 4、权与定权的常用方法（含协因数）



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

全章共分7节，是本课程的重点内容之一。

**重点：**协方差传播律，权与定权的常用方法，以及协因数传播律。

**难点：**权，权阵，协因数和协因数阵等重要概念的定义，定权的常用方法公式应用的条件，以及广义传播律（协方差传播律和协因数传播律）应用于观测值的非线性函数情况下的精度评定问题。

**要求：**通过本章的学习，弄清协因数阵，权阵中的对角元素与观测值的权之间的关系；能牢固地掌握广义传播律和定权的常用方法的全部公式，并能熟练地应用到测量实践中去，解决各类精度评定问题。



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 主要公式汇编

$$D_{LL} = E((L - E(L))(L - E(L))^T) = \begin{pmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \sigma_{l_1 l_2} & \cdots & \sigma_{l_1 l_n} \\ \sigma_{l_2 l_1} & \sigma_{l_2}^2 & \cdots & \sigma_{l_2 l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{l_n l_1} & \sigma_{l_n l_2} & \cdots & \sigma_{l_n}^2 \end{pmatrix}^T$$

$$D_{ZZ} = K D_{XX} K^T$$

$$D_{YY} = F D_{XX} F^T = D_{YY}^T$$

$$D_{ZY} = K D_{XX} F^T = D_{YZ}^T$$

$$\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{N} \sigma_{\text{站}}$$

$$\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{S} \sigma_{\text{公里}}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{C}{N_i} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{C}{S_i} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$p_i = \frac{N_i}{C} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$Q_{ii} = \frac{1}{p_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2}$$

$$Q_{jj} = \frac{1}{p_j} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_0^2}$$

$$Q_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0^2}$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2} D_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2/\sigma_0^2 & \sigma_{12}/\sigma_0^2 & \cdots & \sigma_{1n}/\sigma_0^2 \\ & \sigma_2^2/\sigma_0^2 & \cdots & \sigma_{2n}/\sigma_0^2 \\ \text{对} & \text{称} & \cdots & \cdots \\ & & & \sigma_n^2/\sigma_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \text{对} & \text{称} & \cdots & \cdots \\ & & & Q_{nn} \end{bmatrix} = Q_{XX}$$

$$P_{XX} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = Q_{XX}^{-1}$$



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

$$\left. \begin{array}{l} D_{YY} = F D_{XX} F^T \\ D_{ZZ} = K D_{XX} K^T \\ D_{YZ} = F D_{XX} K^T \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sigma_0^2 Q_{YY} = F(\sigma_0^2 Q_{XX}) F^T \\ \sigma_0^2 Q_{ZZ} = K(\sigma_0^2 Q_{XX}) K^T \\ \sigma_0^2 Q_{YZ} = F(\sigma_0^2 Q_{XX}) K^T \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q_{YY} = F Q_{XX} F^T \\ Q_{ZZ} = K Q_{XX} K^T \\ Q_{YZ} = F Q_{XX} K^T \end{array} \right\}$$

$$z = f(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

$$\frac{1}{p_z} = \left( \frac{\partial f}{\partial L_1} \right)^2 \frac{1}{p_1} + \left( \frac{\partial f}{\partial L_2} \right)^2 \frac{1}{p_2} + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial L_n} \right)^2 \frac{1}{p_n}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i \Delta_i^2}{n}}$$

$$\hat{\sigma}_\beta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i^2}{3n}}$$





武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

### 复习思考题及课外作业

1. 误差传播定律是用来解决什么问题的？
2. 试述应用误差传播定律的实际步骤。
3. 为什么说三角形闭合差是真误差？如何由三角形闭合差计算测角中误差？



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

4. 权是怎样定义的？权与中误差有何关系？有了中误差，为什么还要引进权的概念？
5. 在  $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$  中， $\sigma_0^2$  是任意假定的常数，我们为什么要称它为单位权中误差？什么样的观测值称为单位权观测值？
6. 当只有一个观测值时，给定它的权是否有意义，为什么？
7. 指出水准测量的两种定权公式



武汉大学

Wuhan University



## 第三讲 协方差传播律（续）

$$P_i = \frac{C}{N_i}$$

及

$$P_i = \frac{C}{S_i}$$

式中,  $P_i$   $C$   $N_i$   $S_i$  各代表什么意义?

8.应用权倒数传播律时, 应注意什么问题?

9.权倒数传播律与误差传播律有何异同?