

目 录

引论	(1)
第一部分 沃尔什方法	(3)
第一章 Walsh 函数及并元移位	(4)
1.1 Walsh 函数	(4)
1.2 Walsh 函数的性质	(8)
1.3 离散一维 Walsh 变换	(10)
1.4 并元移位的叠加矩阵 $[Q]$	(13)
1.5 Q 矩阵的广义逆	(19)
1.6 重叠并元微分	(28)
第二章 二维 Walsh 变换	(32)
2.1 二维 Walsh 函数和 Walsh 图形	(32)
2.2 二维 Walsh 函数的性质	(33)
2.3 二维 Walsh 变换	(35)
2.4 电视图像信号的二维序谱分析	(39)
第三章 二维空间序率滤波器	(49)
3.1 四均分二维空间序率滤波器	(49)
3.2 二均分二维空间序率滤波器	(55)
3.3 PAL 二维数字解调器	(60)
第四章 时域数字图像信号的减半及再生	(62)
4.1 亚 Nyquist 取样电视图像信号的二维序谱分析	(63)
4.2 二维重叠低通数字滤波器	(66)
4.3 无穷大矩阵下的二维低通重叠滤波器	(72)
第五章 二维重叠序率滤波器的设计	(78)
5.1 二维一般序率数字滤波器的设计	(78)
5.2 二维重叠序率数字滤波器的构造	(82)
5.3 二维序率重叠数字滤波器的设计	(86)
5.4 计算模板的二维谱分析	(89)

第六章	二维抽取和内插	(94)
6.1	二维抽取和内插的一般公式	(94)
6.2	1/4 抽取和内插	(96)
6.3	1/8 抽取与内插	(98)
第七章	二维重叠序率滤波器的应用	(101)
7.1	用一个帧存储器储存二帧数字图像	(101)
7.2	二倍副载频取样的 PAL 全电视信号的再生	(104)
7.3	3×3 模板和 2×2 滤波	(105)
第二部分	傅立叶方法	(111)
第八章	傅立叶图形及其性质	(112)
8.1	傅立叶图形及其二维频谱	(112)
8.2	成傅立叶变换对的图形	(116)
8.3	二维傅立叶变换的性质	(120)
第九章	彩色全电视信号的二维频谱分析	(129)
9.1	一场内亮、色信号的二维离散频谱	(130)
9.2	一帧内亮、色信号的二维离散频谱	(134)
9.3	PAL 全电视信号的二维频谱	(137)
第十章	亚 Nyquist 取样图像信号及其再生	(139)
10.1	用傅立叶方法分析亚奈取样图像信号	(139)
10.2	用傅立叶方法再生亚奈取样图像信号	(141)
10.3	无穷大矩阵时的二维重叠低通数字滤波器	(144)
第十一章	二维重叠频率数字滤波器	(150)
11.1	二维一般数字滤波器的设计	(150)
11.2	二维重叠数字滤波器的构造	(153)
11.3	二维重叠数字滤波器的设计	(157)
第十二章	二维重叠数字滤波器的应用	(163)
12.1	图像差值信号的抽取和内插	(163)
12.2	1/3 抽取和内插	(166)
12.3	图像放大用内插模板	(170)
参考文献		(177)

引 论

近年来,数字图像处理技术得到广泛应用,各种处理方法不断涌现出来。二维离散变换是其中的一种重要方法。十多年来,先后提出过许多种变换:傅立叶变换、沃尔什(Walsh)变换、哈尔(Haar)变换、斜变换、数论变换、霍特林(Hotelling)变换、余弦变换等。人们最初是想利用变换域系数集中的特性来压缩图像数据,但是,尽管有各种快速算法,正反变换在硬件上实现的复杂性使变换方法难以实用。

但离散变换仍不失去其生命力,它是一种十分有效的分析工具,它反映出时域图像信号的谱特性。在众多变换中,最主要的是傅立叶变换和 Walsh 变换。

由于二维 Walsh 变换简单、直观,一开始就吸引了许多学者的注意。但是 Walsh 变换后系数的集中性质并不好,因而与余弦变换等相比,近年来的研究进展不大。不过二维 Walsh 函数正交基一目了然,用它来表示图像物理性质清楚。它的值只有 ± 1 ,不象傅立叶变换中含有无理数 π ,故用 Walsh 变换设计的各种图像处理模板系数都是有理数、规则性强、易于归纳,所以 Walsh 变换作为一种分析及设计工具,仍具有独特的优点。

由于二维傅立叶变换的频谱物理意义十分明确,在二维滤波中始终占有主角的地位。但是它是三角函数,必含有无理数 π ,所以,傅立叶变换设计的模板系数也是无理数、不规则、难以归纳。但是如果把二维 Walsh 变换和傅立叶变换结合起来,用 Walsh 变换来了解系数的规律和性质,由傅立叶变换来设计具体使用的实用

模板,则是非常有效的。

本书将 Walsh 变换和傅立叶变换作为图像处理中的一种分析方法,对图像处理的许多问题在频域上提出要求,进行分析或滤波,但真正实施起来,并不通过正交变换,而是在时域中进行。用这种方法可以设计出能进行各种处理的模板,也可以对已用模板作二维谱分析,使各种模板有明确的谱特性物理意义。

在图像处理中,常将图像分解成许多子图像进行处理。这种有限的正交变换处理方法在边缘处会引起图像质量的损伤,在 Walsh 变换中,斜线上会出现方块效应,在傅立叶变换中,在交界面上会出现 Gibbs 效应。为了克服边缘效应,已提出过许多方法,余弦变换是其中的一个。本书提出用重叠滤波的方法可以有效地克服边缘效应。在重叠滤波中,子图像是逐点逐行重叠的。如果子图像的尺寸是 $N \times N$,则对任一样点,与该样点有关的互相重叠的子图像有 N^2 个,这 N^2 个子图像的输出之和即为重叠滤波的输出。重叠滤波器最终表示为一个 $(2N-1) \times (2N-1)$ 的模板,对这个模板和原始图像做一般卷积即得处理后的结果,它不存在边缘效应,图像其它性质也有明显的改善。

本书将详细介绍重叠滤波的定义、物理意义、设计方法和应用。它既减少了运算量,又提高了图像质量,重叠滤波将有限正交变换和模板联系起来,为实时图像处理提供了一种有用的工具。全书采用直观的图形分析方法,避免复杂的数学公式,利于了解其物理意义,并掌握其设计方法,能应用它来解决各种图像处理的实际问题。

第一部分 沃尔什方法

沃尔什(Walsh)函数是一个完备的正交系,它只取+1及-1两个值,以简单、直观、奇特的性质和便于在数字计算机中处理的特点吸引着不少学者对它进行深入和广泛的研究,是一个可以和傅立叶函数系相媲美的完备正交函数系。随着数字信号处理理论及技术的发展,对不同问题不断用 Walsh 及傅立叶方法作对比研究,加深了对这二种函数的认识。在二维重叠数字滤波器的 Walsh 方法和傅立叶方法的对比研究中, Walsh 方法更显示出它的奇妙性质及特点。Walsh 函数的一种重要性质是并元移位,而重叠序率滤波器中样点逐个移位通过整个计算矩阵时,这种移位正是 Walsh 函数中的并元移位;重叠滤波器的输出相当于并元移位的重叠和。这种并元移位重叠和傅立叶函数中用的循环移位叠加性质完全不同。本部分将详细讨论并元移位的叠加性质,并引入了一个 Walsh 函数特有的并元移位重叠矩阵,使二维重叠序率滤波器的设计简单化和理论化,也加深了对二维 Walsh 函数的认识。

第一章 Walsh 函数及并元移位

1.1 Walsh 函数

Walsh 函数可以由 Rademacher 函数构成。

Rademacher 函数集是一个不完备的正交函数集,由它可以形成完备的 Walsh 正交函数集。

Rademacher 函数 $R(k, t)$ 是定义在区间 $0 \leq t < 1$ 上的函数

$$R(0, t) = 1 \quad (1.1)$$

$$R(k+1, t) = (-1)^{t_k}$$

其中 t_k 是 t 的二进制表示式中小数点后第 k 位的数值,即

$$t = (0, t_0, t_1, \dots, t_k, \dots)_2 \quad t_k(0, 1) \quad (1.2)$$

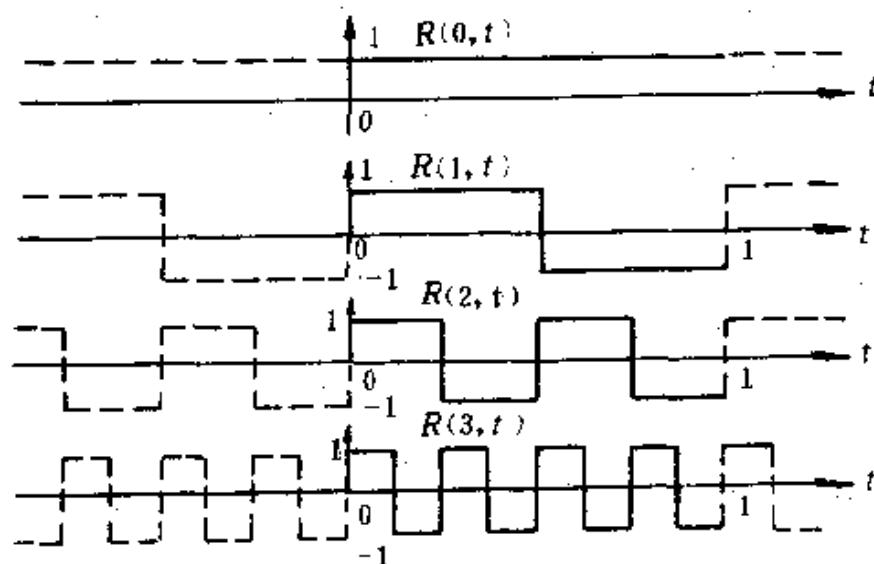


图 1-1 Rademacher 函数

图 1-1 画出了前 4 个 Rademacher 函数。这组函数还可由用矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} R(0,t) \\ R(1,t) \\ R(2,t) \\ R(3,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

用 Rademacher 函数可以构成 Walsh 函数。它可以用不同方式来定义,以排列次序来分有三种:按序率即变号次数顺序排列,按自然顺序即 Paley 顺序排列和按 Hadamard 顺序排列。但最常用的还是按序率顺序排列的 Walsh 函数,它类同按频率顺序排列的傅立叶函数,在作谱分析时有明确的物理意义。所以这儿只介绍按序率顺序排列的 Walsh 函数 $Wal(n,t)$ 和构造简单、有递推性质的 Hadamard 顺序排列的 $Wal_H(n,t)$ 。

$Wal(n,t)$ 由 Rademacher 函数构成。在区间 $0 \leq x < 1, n=0,1,2, \dots, 2^p-1$, 定义

$$Wal(n,t) = \prod_{k=0}^{p-1} [R(k+1,t)]^{g(n)_k} \quad (1.4)$$

这里 $g(n)_k$ 是将 n 写成 Gray 码时第 k 位的数值。

$$n = \{g_{p-1}g_{p-2} \dots g_2g_1g_0\}$$

例如 求 $Wal(5,t) (p=3)$

将 $n=5$ 写成 Gray 码为 (111)

则 $g_2=1, g_1=1, g_0=1$ 因此

$$Wal(5,t) = R(1,t)R(2,t)R(3,t)$$

图 1-2 显示了前 8 个 Walsh 函数。

在处理离散信号时,常用到离散 Walsh 函数。离散 Walsh 函数可以表示成矩阵形式。

先用指数形式来表示 Walsh 函数。以 $R(k+1,t) = (-1)^{t_k}$ 代入式 (1.4), 可得指数形式的 $Wal(n,t)$ 。但要注意 Rademacher 函数中 t 是小于 1 的, $t = (0, t_0t_1 \dots t_k \dots t_{p-1})$, 而在矩阵表示中 t 是大于 1 的, $t = (t_{p-1} \dots t_k \dots t_1t_0)$, 两者中的 t_k 的次序正好相反。因此指数形式的 $Wal(n,t)$ 中的 t_k 应用 t_{p-1-k} 代之, 即

$$\begin{aligned}
 \text{Wal}(n, t) &= \prod_{k=0}^{p-1} (-1)^{t_{p-1-k} \sigma(n)_k} \\
 &= \prod_{k=0}^{p-1} (-1)^{t_{p-1-k} (n_{k+1} \oplus n_k)}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

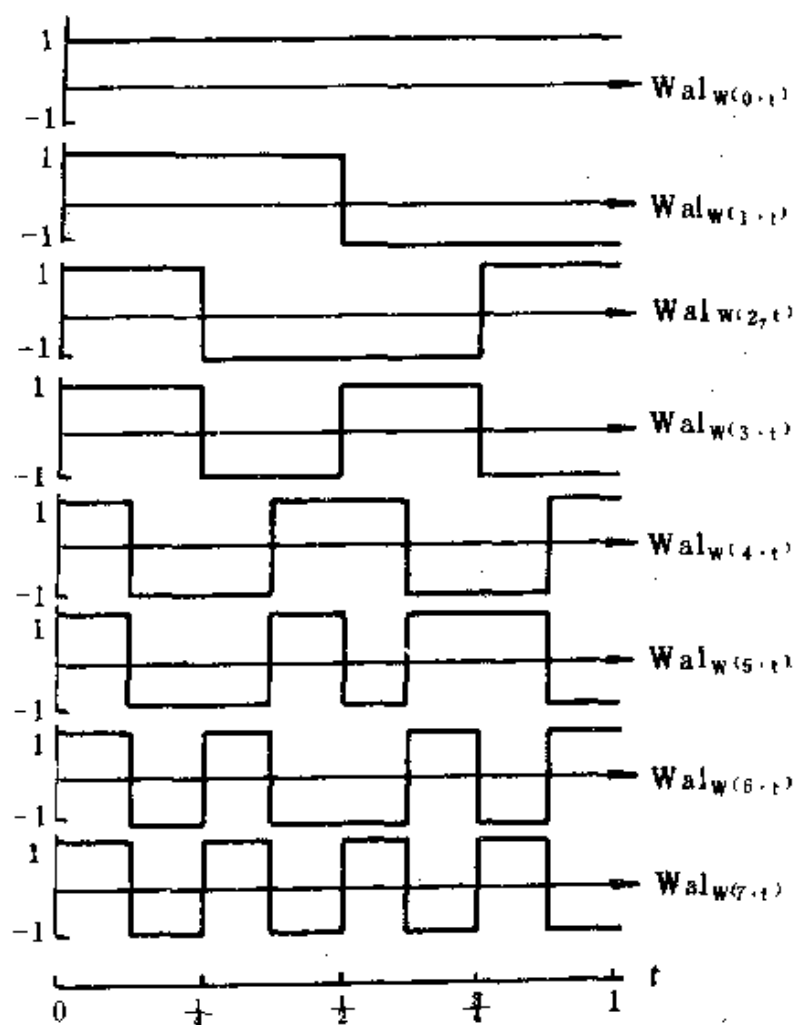


图 1-2 按 Walsh 排列的前 8 个 $\text{Wal}(n, t)$ 函数

把前 N 个长为 N 的离散 Walsh 函数排列成 $N \times N$ 矩阵, 以 $[\text{Wal}_N]$ 表示。如 $2^p = 8$ 时,

$$[\text{Wal}_8] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

按 Hadamard 排列的 Walsh 函数 $\text{Wal}_H(n, t)$ 在结构上十分方便。 n 从 0 递增到 $2^p - 1$ 的 $\text{Wal}_H(n, t)$ 定义如下

$$\text{Wal}_H(n, t) = \prod_{k=0}^{p-1} [R(k+1, t)]^{(n_k)} \quad (1.7)$$

式中 (n_k) 为 n 的二进制表示中反写后的第 k 位数值。

$\text{Wal}_H(n, t)$ 的指数形式是

$$\text{Wal}_H(n, t) = (-1)^{\sum_{k=0}^{p-1} t_k \cdot 2^{p-1-k} \cdot n_k} \quad (1.8)$$

$\text{Wal}_H(n, t)$ 的矩阵形式是

$$[\text{Wal}_8]_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

式 (1.9) 又称 Hadamard 矩阵 $H(3)$, Hadamard 矩阵有递推关系, 在运算时十分方便。

$$H(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$H(2) = \begin{pmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\vdots$$

$$H(k) = \begin{pmatrix} H(k-1) & H(k-1) \\ H(k-1) & -H(k-1) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

1.2 Walsh 函数的性质

Walsh 函数具有以下诸性质:

①单边带性质 把列率(序号的一半)看成类似频率的参量,那么列率的变化类似于频率的搬移。如果说不同频率的正(余)弦波相乘后出现频率和差项,形成双边带信号;那么,当两个不同列率的 Walsh 函数相乘后,会产生列率搬移,形成单边带信号。即

$$\text{Wal}(n, t) \text{Wal}(m, t) = \text{Wal}(n \oplus m, t) \quad (1.13)$$

$\oplus$ 表示模 2 相加。

即 $1 \oplus 1 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 0 \oplus 0 = 0$

下面来证明这个性质。由 Walsh 函数定义式(1.4)

$$\begin{aligned} \text{Wal}(n, t) \text{Wal}(m, t) &= \prod_{k=0}^{r-1} [R(k+1, t)]^{r^{(n)}_k} \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{r-1} [R(k+1, t)]^{r^{(m)}_k} \\ &= \prod_{k=0}^{r-1} [R(k+1, t)]^{r^{(n)}_k + r^{(m)}_k} \end{aligned}$$

但 $[R(k+1, t)]^{1+1} = [R(k+1, t)]^{1 \oplus 1} = 1 [R(k+1, t)]^{1+0} = [R(k+1, t)]^{1 \oplus 0} = [R(k+1, t)]$ 所以幂次相加等于模 2 相加,故

$$\text{Wal}(n, t) \text{Wal}(m, t) = \prod_{k=0}^{r-1} [R(k+1, t)]^{r^{(n \oplus m)}_k}$$

$$= \prod_{k=0}^{p-1} [R(k+1, t)]^{s^{(n)}_k \oplus s^{(m)}_k} \\ = \text{Wal}(n \oplus m, t)$$

例如 $n=5, m=3$, 则 $n=(101)_2, m=(011)_2, n \oplus m = (1 \oplus 0, 0 \oplus 1, 1 \oplus 1) = (110)_2$

所以 $\text{Wal}(5, t)\text{Wal}(3, t) = \text{Wal}(6, t)$

从图 1-2 也可看出

$$\text{Wal}(5, t) = (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1)$$

$$\text{Wal}(3, t) = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)$$

$$\text{Wal}(6, t) = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$$

符合 Walsh 函数的乘法律式(1.13)。

②模 2 移位性质 将某 Walsh 的坐标 t 按模 2 方式移 m 位 (即 $t \oplus m$) 得到的新序列相当于两个序列的乘积。即

$$\text{Wal}(n, t \oplus m) = \text{Wal}(n, t)\text{Wal}(n, m) \quad (1.14)$$

③正交完备性质 Walsh 函数具有正交性质。

$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \text{Wal}(n, t)\text{Wal}(m, t) = \begin{cases} 1, m=n \\ 0, m \neq n \end{cases} \quad (1.15)$$

函数序列 $\text{Wal}(n, t), n=0, 1, 2, \dots, \infty$, 组成一组封闭的正交函数序列, 再也找不到任何其它一组不等于 $\text{Wal}(n, t)$ 的函数序列与其正交。因此在区间 $0 \leq t < 1$ 内, 任何绝对可积函数 $f(t)$ 均可展开成 Walsh 级数的和, 即

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n) \text{Wal}(n, t) \quad (1.16)$$

$$C(n) = \int_0^1 f(t) \text{Wal}(n, t) dt \quad (1.17)$$

称式(1.16)为 $f(t)$ 的 Walsh 级数; $C(n)$ 为 $f(t)$ 的第 n 次 Walsh 级数的系数。

④对称性 由式(1.6)可见

$$\text{Wal}(n, t) = \text{Wal}(t, n) \quad (1.18)$$

⑤Walsh 函数成群 Walsh 函数形成一个乘法群。在 $N=2^p$ 的 Walsh 函数中, 任意二个 Walsh 函数相乘后所得的 Walsh 函数

也必在其中。而且每 2^k 阶 ($k=0, 1, 2, \dots, p-1$) Walsh 函数还形成一个子群。

1.3 离散一维 Walsh 变换

现在假定在式(1.16)级数中,只取前 $N=2^p$ 项就够了,则有

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} C(n) \text{Wal}(n, t) \quad (1.19)$$

对式(1.19)中的 $f(t)$ 及 $\text{Wal}(n, t)$ 在区间 $0 \leq t \leq 1$ 中取样 N 次并以

$$f(0), f(1), \dots, f(m), \dots, f(N-1)$$

和 $\text{Wal}(n, 0), \text{Wal}(n, 1), \dots, \text{Wal}(n, m), \dots, \text{Wal}(n, N-1)$ 分别表示 $f(t)$ 和 $\text{Wal}(n, t)$ 的各样点值,这样就把式(1.19)离散化了,得到

$$f(m) = \sum_{n=0}^{N-1} C(n) \text{Wal}(n, m) \quad m=0, 1, \dots, N-1 \quad (1.20)$$

对式(1.17),用求和代替积分,并将其离散化,于是得

$$\begin{aligned} C(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \text{Wal}(n, m) \Delta m \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \text{Wal}(n, m) \end{aligned} \quad (1.21)$$

式(1.21)即为离散 Walsh 正变换。它将周期性离散信号

$f(0), f(1), \dots, f(N-1)$ (或称时间序列),变换为另一种序列

$$C(0), C(1), \dots, C(N-1)$$

$C(n)$ 实际上就是信号 $f(m)$ 的 Walsh 级数展开中的系数。式(1.20)是离散 Walsh 逆变换,它将 $C(n)$ 序列还原为原来的离散信号 $f(m)$ 。

从式(1.21)得 Walsh 正变换的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} C(0) \\ C(1) \\ \vdots \\ C(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} [\text{Wal}_N] \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

其中 $[\text{Wal}_N]$ 为 N 阶 Walsh 矩阵,简写为 $[W_N]$ 。式(1.22)可简写为

$$[C_N] = \frac{1}{N} [W_N] [f_N] \quad (1.23)$$

Walsh 矩阵 $[W_N]$ 的逆矩阵 $[W_N]^{-1} = \frac{1}{N} [W_N]$,这样,逆变换式(1.20)的矩阵形式是

$$[f_N] = [W_N] [C_N] \quad (1.24)$$

利用式(1.5),Walsh 正逆变换还可写成指数形式

$$C(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) (-1)^{\sum_{k=0}^{N-1} t_{k+1} (N_{k+1} \oplus t_k)} \quad (1.25)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} C(n) (-1)^{\sum_{k=0}^{N-1} n_{k+1} (t_{k+1} \oplus t_k)} \quad (1.26)$$

上面三种 Walsh 变换的公式,使用最方便的还是矩阵形式。

离散 Walsh 变换有许多重要的性质,下面作一简要介绍。

用 $[f(m)]$ 表示时间序列,用 $[C(n)]$ 表示变换后的序列。这两个序列组成变换对,以下列符号表示之

$$[f(m)] \rightarrow [C(n)]$$

性质 1 直线性。即 $[f_1(m)] \rightarrow [C_1(n)]$

$$[f_2(m)] \rightarrow [C_2(n)]$$

则 $[f_1(m)] + [f_2(m)] \rightarrow [C_1(n)] + [C_2(n)]$

(1.27)

性质 2 并元移位性(并元移位定理)。将序列 $[f(m)]$ 作 l 位并元移位得到的序列,叫并元移位序列,以 $[Z(m)_l]$ 表示,这里 $l, m = 0, 1, \dots, N-1$

其中 $z(m)_l = f(m \oplus l)$

例如：当 $N=8, l=3$ 时，则原序列和并元移 3 位的序列分别是

$$[f(m)] = [f(0)f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)f(6)f(7)]$$

$$[z(m)_3] = [f(3)f(2)f(1)f(0)f(7)f(6)f(5)f(4)]$$

m 和 l 取不同数值，并元移位结果如表 1-1。

表 1-1

$m \oplus l$		m							
l		0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	1	0	3	2	5	4	7	6
	2	2	3	0	1	6	7	4	5
	3	3	2	1	0	7	6	5	4
	4	4	5	6	7	0	1	2	3
	5	5	4	7	6	1	0	3	2
	6	6	7	4	5	2	3	0	1
	7	7	6	5	4	3	2	1	0

并元移位定理是^[1]，如果 $[f(m)] \rightarrow [C(n)]$ ，且 $[z(m)_l]$ 为 $[f(m)]$ 并元移位的序列，则有

$$[z(m)_l] \rightarrow [\text{Wal}(n, l)C(n)] = [C(n)_l] \quad (1.28)$$

其中 $\text{Wal}(n, l)$ ——矩阵 (Wal_{2^N}) 中第 n 列，第 l 行的元素。

例如，设输入序列 $[f(m)]$ 为

$$[0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1]$$

利用一维 Walsh 变换式(1.21)，可得

$$[C(n)] = [\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0]$$

现设输入序列作 $l=3$ 的并元移位，利用表 1-1 可得

$$[z(m)_3] = [1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$$

由并元移位定理式(1.28)，得 $[z(m)_3]$ 的变换为

$$\text{Wal}(n, 3)C(n) = [\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0]$$

这和 $[z(m)]$ 直接作 Walsh 变换的结果一致。

$$\begin{bmatrix} C(0)_3 \\ C(1)_3 \\ C(2)_3 \\ C(3)_3 \\ C(4)_3 \\ C(5)_3 \\ C(6)_3 \\ C(7)_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

性质 3 并元卷积定理⁽²⁾。定义并元序率卷积为

$$f_1(m) \otimes f_2(m) = \sum_{r=0}^{N-1} f_1(r) f_2(r \oplus m) \quad (1.29)$$

则若 $[f_1(m)] \rightarrow [C_1(n)]$, $[f_2(m)] \rightarrow [C_2(n)]$, 有

$$f_1(m) \otimes f_2(m) \rightarrow C_1(n) C_2(n) \quad (1.30)$$

性质 4 并元自相关定理。定义并元自相关

$$f_1(m) \otimes f_1(m) = \sum_{r=0}^{N-1} f_1(r) f_1(r \oplus m)$$

$$\text{则 } f_1(m) \otimes f_1(m) \rightarrow C_1(n)^2 \quad (1.31)$$

1.4 并元移位的叠加矩阵 $[Q]$

下面研究一个序列的并元移位及其叠加性质。一个 $N=8$ 的序列是函数 $f(t)$ 在 $t=0, 1, \dots, 7$ 等 8 个时刻的采样。这个序列可用 $0, 1, \dots, 7$ 等 8 个采样时刻表示, 也可以用 $A, B, \dots, H$ 等 8 个采样来表示, 其中 $A=f(0)$ 、 $B=f(1)$ 、 $\dots$ 、 $H=f(7)$ 。

所谓并元时间移位, 是指函数在时间 t 变成

$$x = t \oplus i, i = 0, 1, \dots, 7 \quad (1.32)$$

时, 这 8 个采样位置移动和排列次序的变化。这个变化可由表 1-1 并元移位后采样时刻的变化值 $x = t \oplus i$ 来表示, 也可用图 1-3 的采

A 等排列次序的变化来表示。从图 1-3 易见下列产生并元移位的规则。移位 1 位($\oplus 001$)需将相邻的采样(A 和 B, C 和 D, E 和 F, G 和 H)

A	B	C	D	E	F	G	H
B	A	D	C	F	E	H	G
C	D	A	B	G	H	E	F
D	C	B	A	H	G	F	E
E	F	G	H	A	B	C	D
F	E	H	G	B	A	D	C
G	H	E	F	C	D	A	B
H	G	F	E	D	C	B	A

图 1-3 $N=8$ 的并元移位

交换;移位两位($\oplus 010$)需要成对的采样(AB 和 CD , EF 和 GH)交换;移位4位($\oplus 100$)需要将4个采样($ABCD$ 和 $EFGH$)交换;等等。任何其它移位都可以通过这些基本移位规则而获得。例如移3位($\oplus 011$)可分解成两种移位,即需要交换采样对的移位($\oplus 010$)及交换相临采样的移位($\oplus 001$)。

[illegible]图 1-4 并元移位的叠加($N=8$)

图 1-4 显示了 $N=8$ 的序列并元移位的叠加。即将图 1-3 中采样时刻 7 或采样 H 对齐后,在 7 或 H 上下各形成 7 行,这些行从上下到中心分别用 $u=0,1,\dots,7$ 表示,把每一行中的字母相加,可得每行的叠加值 S_u 。在图 1-4 中可看到这个叠加过程,图 1-4 右部显示了 S_u 值。如第 6 行的叠加数

$$S_6 = 4G + 2E + 1A$$

对照图 1-3 及图 1-4,对第 u 个叠加行,在 $i=0$ 列的抽样时刻为 $(u-0)\oplus 0$,在 $i=1$ 列的抽样时刻为 $(u-1)\oplus 1$,第 $i=2$ 列的抽样时刻为 $(u-2)\oplus 2$ 等,所以第 u 行第 i 列的抽样 x 可由下式表示

$$x = (u-i)\oplus i \quad i \leq u \quad (1.33)$$

若用字母表示,第 u 行的全部叠加 S_u 为

$$S_u = \sum_{i=0}^u f[(u-i)\oplus i] \quad (1.34)$$

并元移位的叠加性质可以用矩阵形式表示。图 1-4 的 $N=8$ 的并元移位叠加可表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ G \\ F \\ E \\ D \\ C \\ B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 2B \\ 2C+A \\ 4D \\ 2E+2C+A \\ 4F+2B \\ 4G+2E+A \\ 8H \\ 4G+2E+A \\ 4F+2B \\ 2E+2C+A \\ 4D \\ 2C+A \\ 2B \\ A \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

$N=2^r$ 阶重叠矩阵 $[Q_N]$ 是一个 $N \times (2N-1)$ 矩阵, 若矩阵元素标号 i, j 的定义为

$$j = \begin{cases} N-1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -(N-1) \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cccccc} \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \times \\ & & \cdot & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & \cdot & & & \\ \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \times \\ \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \times \\ \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \times \\ & & \cdot & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & \cdot & & & \\ \times & \times_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \times_{N-1} \end{array} \right]$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{i}$
 $0, \dots, N-1$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{00} = 1 \\ q_{(M+i) \pm (M+j)} = \frac{q_{ij}}{2} \end{array} \right\} \quad (1.36)$$
$$j=0, \pm 1, \dots, \pm(M-1) \text{ (当 } j \text{ 为负数时 } q_{ij} \text{ 写成 } q_{i,-j})$$

0, $M=1$ 时,

由 $\begin{cases} i=0 \\ j=0 \end{cases}$ 得

$$q_{1+0,1+0}=q_{11}=\frac{q_{00}}{2}=\frac{1}{2}, \text{ 又 } q_{1,-1}=\frac{1}{2}$$

当 $k=1, M=2$ 时,

$$\text{由} \begin{cases} i=0 \\ j=0 \end{cases} \text{得 } q_{2+0,2+0} = q_{22} = \frac{q_{00}}{2} = \frac{1}{2}, \text{又 } q_{2,-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=1 \\ j=1 \end{cases} \text{得 } q_{2+1,2+1} = q_{33} = \frac{q_{11}}{2} = \frac{1}{4}, \text{又 } q_{3,-3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=1 \\ j=-1 \end{cases} \text{得 } q_{2+1,2-1} = q_{31} = \frac{q_{1,-1}}{2} = \frac{1}{4}, \text{又 } q_{3,-1} = \frac{1}{4}$$

当 $k=2, M=4$ 时,

$$\text{由} \begin{cases} i=0 \\ j=0 \end{cases} \text{得 } q_{4+0,4+0} = q_{44} = \frac{q_{00}}{2} = \frac{1}{2}, \text{又 } q_{4,-4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=1 \\ j=1 \end{cases} \text{得 } q_{4+1,4+1} = q_{55} = \frac{q_{11}}{2} = \frac{1}{4}, \text{又 } q_{5,-5} = \frac{1}{4}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=1 \\ j=-1 \end{cases} \text{得 } q_{4+1,4-1} = q_{53} = \frac{q_{1,-1}}{2} = \frac{1}{4}, \text{又 } q_{5,-3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=2 \\ j=2 \end{cases} \text{得 } q_{4+2,4+2} = q_{66} = \frac{q_{2,2}}{2} = \frac{1}{4}, \text{又 } q_{6,-6} = \frac{1}{4}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=3 \\ j=3 \end{cases} \text{得 } q_{4+3,4+3} = q_{77} = \frac{q_{3,3}}{2} = \frac{1}{8}, \text{又 } q_{7,-7} = \frac{1}{8}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=3 \\ j=1 \end{cases} \text{得 } q_{4+3,4+1} = q_{75} = \frac{q_{3,1}}{2} = \frac{1}{8}, \text{又 } q_{7,-5} = \frac{1}{8}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=3 \\ j=3 \end{cases} \text{得 } q_{4+3,4-3} = q_{71} = \frac{q_{3,-3}}{2} = \frac{1}{8}, \text{又 } q_{7,-1} = \frac{1}{8}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=2 \\ j=-2 \end{cases} \text{得 } q_{4+2,4-2} = q_{62} = \frac{q_{2,-2}}{2} = \frac{1}{4}, \text{又 } q_{6,-2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{由} \begin{cases} i=3 \\ j=-1 \end{cases} \text{得 } q_{4+3,4-1} = q_{73} = \frac{q_{3,-1}}{2} = \frac{1}{8}, \text{又 } q_{7,-5} = \frac{1}{8}$$

因此, $[Q_8]$ 为

$$[Q_8] = \begin{bmatrix} q_{07}q_{17}\cdots q_{77} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{01}q_{11}\cdots q_{71} \\ q_{00}q_{10}\cdots q_{70} \\ q_{0,-1}q_{1,-1}\cdots q_{7,-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{0,-7}q_{1,-7}\cdots q_{7,-7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

借用式(1.36),可以写出任意阶矩阵 $[Q_N]$,其中 $[Q_2]$ 及 $[Q_4]$ 为

$$[Q_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$$[Q_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

$[Q_N]$ 矩阵反映 Walsh 函数的并元移位的重叠性质。对一维序列 $[f(m)]$, $m=0,1,\dots,N-1$

它的并元移位的重叠式为

$$[S_N] = [Q_N][f_N] \quad (1.40)$$

对二维序列

$f(n, m)$, $n, m = 0, 1, \dots, N-1$ 它的二维并元移位重叠式为

$$[S_N] = [Q_N][f_N][Q_N]^T \quad (1.41)$$

式(1.41)类同二维 Walsh 变换的矩阵形式, 利用式(1.41)使二维 Walsh 重叠数字滤波器的设计简化及公式化。

1.5 Q 矩阵的广义逆

在上节中, 引入了反映 Walsh 函数并元移位重叠性质的 Q 矩阵, 对一个一维序列 $[f_N]$, 它的并元移位的重叠式

$$[S_N] = [Q_N][f_N]$$

相反的问题是给定 $[S_N]$, 要求原一维序列 $[f_N]$ 。由于 Q 矩阵不是一个方阵, 上述问题不能用一般矩阵求逆解决, 但可以用矩阵的广义逆来表示。

矩阵的广义逆(又称伪逆)概念最早由穆尔(Moore)于 1920 年提出, 并由彭罗斯(Penrose)等人进行了比较系统的研究, 应用到各种实际问题中去。本节将介绍广义逆的来由、定义和主要性质。

(1) 问题的提出

设 A 是 $n \times m$ 矩阵, b 是已知的 n 维向量, X 是未知的 m 维向量, 三者构成一个代数方程组: $AX = b$

现在要求解 m 维向量 X , 求 X 的准则是使

$$J = (AX - b)^2 \quad (1.42)$$

取极小值。

在 $m=n$ 而且 $|A| \neq 0$ 时, A 的逆阵 A^{-1} 存在, 这时 $X = A^{-1}b$ 就构成了上述代数方程组的唯一解。这是众所周知的。

但是在不少问题中, A 是奇异方阵(即 $|A| = 0$)或者 A 不是方阵(即 $m \neq n$)。这时使得 $J = J_{\min}$ 的解又是什么呢? 用广义逆的概念不难表示这个问题的解。

(2) 广义逆的定义

定义 1: (广义逆) 任给定 $n \times m$ 矩阵 $A (m \neq n)$, 若有 $m \times n$ 矩阵 $A^\#$ 满足下述条件:

$$\textcircled{1} AA^\#A = A;$$

$$\textcircled{2} A^\#AA^\# = A^\#;$$

$$\textcircled{3} AA^\# = (AA^\#)^T;$$

$$\textcircled{4} A^\#A = (A^\#A)^T;$$

则称 $A^\#$ 是 A 的广义逆 (或伪逆), A 的广义逆 $A^\#$ 是唯一的。

(3) 广义逆的计算

当 A 是非奇异方阵时, $A^\# = A^{-1}$, 这一点前面已经提及, 在其它情况下, 随着 A 的秩 $r (= \text{Rank}(A))$ 情况的不同, 广义逆的计算方法也不同, 分为行满秩、列满秩以及一般矩阵三种情况进行讨论。

定义 2: (行满秩和列满秩) 设矩阵 $A = A_{n \times m}$ 。若当 $n < m$ 时, 有 $\text{Rank}(A) = n$, 称 A 为行满秩矩阵。

定义 3: (右逆) 设 A 是行满秩的 $n \times m$ 实长方形, $n < m$, 若存在一个 $m \times n$ 矩阵 $A_R^\#$, 当 $A_R^\#$ 右乘 A 后, 得到一个 $n \times n$ 单位阵, 即

$$AA_R^\# = I$$

则 $A_R^\#$ 称为 A 的右逆, 且可证明有

$$A_R^\# = A^T(AA^T)^{-1}$$

定义 4: (左逆) 设 A 是列满秩的 $n \times m$ 实长方形, $n > m$, 若存在一个 $m \times n$ 矩阵 $A_L^\#$, 当 $A_L^\#$ 左乘 A 后, 得到一个 $m \times m$ 单位阵, 即

$$A_L^\#A = I_m$$

则 $A_L^\#$ 称为 A 的左逆, 且可证明有

$$A_L^\# = (A^T A)^{-1} A^T$$

定理 1: (满秩分解) 设 A 为 $n \times m$ 矩阵, 其秩为 $r \leq \min(m, n)$, 则 A 必可分解成 $n \times r$ 矩阵 B 和 $r \times m$ 矩阵 C 的乘积, $A = BC$ 。这个定理的证明略, 但应当指出的是这种分解并不是唯一的。写出这个定理主要为了说明一般矩阵的广义逆的计算。

定理 2: (广义逆的计算) 对于矩阵 A , 其广义逆 $A^\#$ 存在, 且唯

一,

$$\textcircled{1} A \text{ 为非奇异方阵时, } A^{\#} = A^{-1} \quad (1.43)$$

$$\textcircled{2} A \text{ 为行满秩矩阵时, } A^{\#} = A_R^{\#} = A^T (AA^T)^{-1} \quad (1.44)$$

$$\textcircled{3} A \text{ 为列满秩矩阵时, } A^{\#} = A_L^{\#} = (A^T A)^{-1} A^T \quad (1.45)$$

④在一般情况下, $r = \text{Rank}(A) \leq \min(n, m)$, 则对 A 作满秩分解, $A = BC$, 其中 B 是 $n \times r$ 的列满秩阵, C 是 $r \times m$ 的行满秩阵,

$$B_L^{\#} = (B^T B)^{-1} B^T \quad C_R^{\#} = C^T (CC^T)^{-1}$$

$$\text{则有 } A^{\#} = C_R^{\#} B_L^{\#} = C^T (CC^T)^{-1} B^T \quad (1.46)$$

在实际应用中, A 为列满秩的情况比较多见, 其它情况比较少见。

利用上述公式求并元移位的重叠矩阵 $[Q_2]$ 、 $[Q_4]$ 、 $[Q_8]$ 和 $[Q_{16}]$ 的广义逆 $[Q_2^{\#}]$ 、 $[Q_4^{\#}]$ 、 $[Q_8^{\#}]$ 和 $[Q_{16}^{\#}]$ 。

$[Q_2]$ 矩阵的秩是 $\text{Rank}[Q_2] = 2$, 所以 $[Q_N]$ 是列满秩矩阵。可以写出它的左逆 $Q_{2L}^{\#}$ 为

$$\begin{aligned} Q_{2L}^{\#} &= (Q_2^T Q_2)^{-1} Q_2^T \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.47)$$

同样, 可以得 $[Q_4]$ 的广义逆为

$$\begin{aligned}
Q_4^\# &= (Q_4^T Q_4)^{-1} Q_4^T \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}^{-1} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.48)
\end{aligned}$$

Q_8 的广义逆为(见公式(1.49))

Q_{16} 和 $Q_{16}^\#$ 如图 1-5 和 1-6 所示。从这两个图还可以看出矩阵的生成规则以及 $[Q]$ 矩阵、 $[Q^\#]$ 矩阵的性质。例如 $[Q^\#]$ 矩阵中每一列的系数的总和都等于 1。

[illegible]

[illegible]

图 1-5 Q_{16} 矩阵

$$Q_{18}^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	2	0	-2	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	4	0	-4	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	-2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	-4	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	-4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8

图 1-6 Q_8^* 矩阵

1.6 重叠并元微分

在有限离散 Walsh 分析中,有一种与连续函数微积分不同的并元微积分算法,这种并元微积分运算在信号分析中,可作为一种处理方法。

采样点 $N=2^p$ 的离散信号 $f(t)$ 的并元微分定义为^[3]

$$g(t) = \sum_{i=0}^{p-1} [f(t) - f(t \oplus 2^{p-i} - 1)]^{i-1} \quad (1.50)$$

$$(t=0, 1, \dots, 2^p-1)$$

可以证明

$$G(m) = mF(m) \quad (m=0, 1, \dots, 2^p-1) \quad (1.51)$$

其中 $G(m)$ 、 $F(m)$ ——分别是 $g(t)$ 与 $f(t)$ 的离散 Walsh 变换。

并元微分运算可以用矩阵形式表示如下

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(2^p-1) \end{bmatrix} = [D_p] \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(2^p-1) \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

式中 D_p ——并元微分算子。

$$D_p = \frac{1}{2^p} \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(2^p-2) & u(2^p-1) \\ u(1) & u(0) & \cdots & u(2^p-1) & u(2^p-2) \\ \vdots & & & & \\ u(2^p-2) & u(2^p-1) & \cdots & u(0) & u(1) \\ u(2^p-1) & u(2^p-2) & \cdots & u(1) & u(0) \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

$$\text{式中 } u(t) = \sum_{k=0}^{2^p-1} k \text{Wal}(k, t) \quad (1.54)$$

当 $p=2, 3$ 时,有

$$D_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

$$D_3 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 28 & -16 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -16 & 28 & -8 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 28 & -16 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -16 & 28 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 28 & -16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -16 & 28 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -8 & 28 & -16 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & -16 & 28 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

从式(1.55)、式(1.56)可见,处于不同位置的并元微分算子是不同的,它不符合循环移位规则,而是以并元移位规则而变动,这给处理带来不便。另外,在 N 个采样点中,有一半以上的采样点没有用上(它们的加权系数为零),当 N 增大时,这点更明显。

在 1.4 节中,引入了重叠并元移位矩阵 Q ,它在重叠序率滤波器中得到应用。在并元微分中,也可以引入重叠并元微分运算。

在重叠并元微分中,当区间长为 N 时,任一个采样点与其周围采样点能组成 N 个长为 N 的数组,一个采样点的重叠并元微分,是与该采样点有关的全部并元微分在该点输出之总和。

例如有序列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$, 求长 $N=4$ 时,采样点 a_3 的重叠并元微分。 a_3 与其周围点可以组成 4 个长 $N=4$ 的数组:

$a_0, a_1, a_2, a_3; a_1, a_2, a_3, a_4; a_2, a_3, a_4, a_5; a_3, a_4, a_5, a_6$ 在这 4 个数组中 a_3 正好处于 4 个不同位置,分别求出它们在 a_3 采样点的并元微分,再加起来,即得 a_3 在 $N=4$ 长时的重叠并元微分。

在上例第一组 a_0, a_1, a_2, a_3 中 a_3 处于第 4 位,对照式(1.55)(矩阵 D_2 第 4 行),这时 a_3 的并元微分输出为

$$d_1 = 6a_3 - 4a_2 - 2a_0$$

在第二组 a_1, a_2, a_3, a_4 中 a_3 处于第 3 位,对照式(1.57)(矩阵

D_2 中第 3 行), 这时 a_3 的并元微分输出为

$$d_2 = 6a_3 - 4a_4 - 2a_2$$

同样第三组 a_2, a_3, a_4, a_5 的 a_3 并元微分输出为

$$d_3 = 6a_3 - 4a_2 - 2a_4$$

第四组 a_3, a_4, a_5, a_6 的 a_3 并元微分输出为

$$d_4 = 6a_3 - 4a_4 - 2a_6$$

将这四个输出加起来, 即得 a_3 点重叠微分输出

$$\begin{aligned} D'_2 &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ &= 24a_3 - 10a_4 - 10a_2 - 2a_0 - 2a_6 \end{aligned}$$

即对输入序列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, 所对应的加权系数为 $(-2, 0, -10, 24, -10, 0, -2)$ 。上例中是对采样点 a_3 而言的, 可以证明, 对其它采样点加权系数是相同的。

所以重叠并元微分运算可以用重叠并元微分算子 D' , 来表示。 D' , 可由下式求得:

$$D' = Q_p D_p^0 \quad (1.57)$$

式中 Q_p —— $N=2^p$ 阶并元移位叠加矩阵;

D_p^0 —— D'_p 阵的第 1 列。

如 $p=2, 3$ 时的 D'_2, D'_3 分别为

$$D'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -10 \\ 24 \\ -10 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \\ 12 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1.58)

$$D'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ -16 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = 4 \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ -21 \\ 56 \\ -21 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

有了重叠并元微分算子 D' , 当求一个序列的长 N 的并元微分时, 和采样点位置无关, 只要求 D' 和序列的一般卷积即得该序列的并元微分输出。

第二章 二维 Walsh 变换

2.1 二维 Walsh 函数和 Walsh 图形

Walsh 函数可以有多个变量。如果它们具有两个变量,即分别在 x 方向和 y 方向的变量,则可写成

$$\text{Wal}(k, x)\text{Wal}(m, y)$$

这里 k, m 分别为在 x 及 y 方向上的序号。二维 Walsh 函数可以用 Walsh 图形来表示。图 2-1 是 $N=4$ 的 Walsh 图形^[4]。

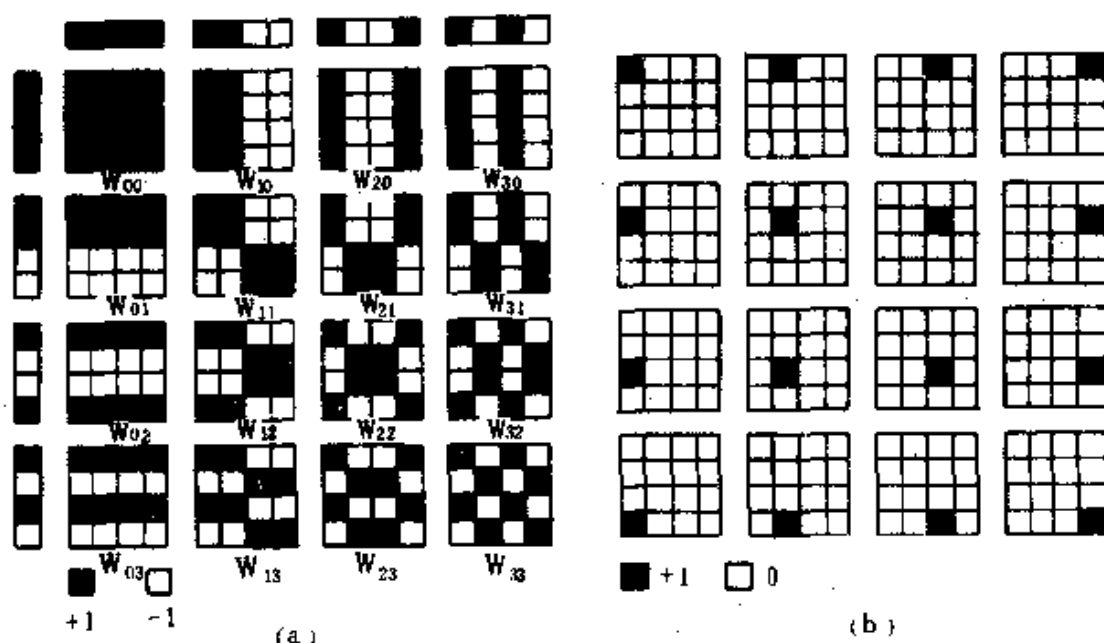


图 2-1 Walsh 图形及其二维序谱

Walsh 图形是这样构成的:以函数 $\text{Wal}(k, x)$ 为图形的水平边、 $\text{Wal}(m, y)$ 为图形的垂直边,二者相乘即得二维的 Walsh 图形。

为了清楚起见,以图 2-1 的 $N=4$ 为例加以说明。由于 $N=4$ 的离散 Walsh 函数由矩阵 $[W_{ij}]$ 表示:

$$[W_4] = \begin{bmatrix} + & + & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

由式(2.1)式可见, $N=4$ 的 Walsh 图形 x 轴方向的四条边为 $[++++]$, $[++--]$, $[-+-+]$, $[-+--]$

y 轴方向的四条边为

$[++++]'$, $[++--]'$, $[-+-+]'$, $[-+--]'$

由二边相乘(同号相乘得+1,异号相乘得-1)即得图 2-1 的 Walsh 图形。每一个 Walsh 图形可由 $Wal(k, x)Wal(m, y)$ 表示, 或用 $Wal_{km}(x, y)$ 表示, 或用 Wal_{km} 表示, 甚至用 W_{km} 表示。

每一个 Walsh 图形 Wal_{km} 可以用一个矩阵来表示, 如

$$W_{21} = \begin{bmatrix} + & - & - & + \\ + & - & - & + \\ - & + & + & - \\ - & + & + & - \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$W_{12} = \begin{bmatrix} + & + & - & - \\ - & - & + & + \\ - & - & + & + \\ + & + & - & - \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

从式(2.2)可见 W_{21} 在 x 方向有 2 次变号, 在 y 方向有 1 次变号。同样从式(2.3)可见, W_{12} 在 x 方向有 1 次变号, 在 y 方向有 2 次变号。

Walsh 图形是二维 Walsh 函数的直观表示, 它包含二维 Walsh 函数的全部性质, 必须对这些图形十分熟悉和深入掌握。如左上角的 W_{00} 表示二维直流成分, 右下角的 W_{33} 表示二维高频成分。

2.2 二维 Walsh 函数的性质

二维 Walsh 函数有下列性质:

性质 1 函数 $W_{00}(x, y)$ 在区间 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ 内都等于 1, 故 W_{00} 在这个区间的积分等于 1。而其它函数 $W_{km}(x, y), k, m \neq 0$, 在这个区间内等于正负 1 的数相同, 它们的积分为零。

性质 2 二维 Walsh 函数具有正交性质。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \int_0^1 \int_0^1 W_{k_1 m_1}(x, y) W_{k_2 m_2}(x, y) dx dy \\ = \begin{cases} 0, k_1 \neq k_2 \text{ 或 } m_1 \neq m_2 \\ 1, k_1 = k_2, m_1 = m_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

这样任意二维函数 $f(x, y)$ 可以展开为二维 Walsh 函数的级数和:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C(k, m) \cdot W_{km}(x, y) \quad (2.6)$$

$$\text{式中 } C(k, m) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) W_{km}(x, y) dx dy \quad (2.7)$$

性质 3 二维 Walsh 函数形成群(乘法封闭性)。两个二维 Walsh 函数相乘得另一个二维 Walsh 函数:

$$W_{k_1 m_1} W_{k_2 m_2} = W_{km} \quad (2.8)$$

其中 $k = k_1 \oplus k_2, m = m_1 \oplus m_2$

这个性质在图 2-1 的 Walsh 图形中可以看得十分清楚, 类同一维序率搬家, 这儿是二维序率搬家。如原来的二维信号是二维低频成分的组

$$f(x, y) = W_{00} + W_{10} + W_{01}$$

和一个二维高频 Walsh 图形 W_{33} 相乘后得

$$\begin{aligned} W_{33} f(x, y) &= W_{33} W_{00} + W_{33} W_{10} + W_{33} W_{01} \\ &= W_{33} + W_{23} + W_{32} \end{aligned}$$

即将三个二维低频成分搬到高频域。

二维 Walsh 函数的乘法还符合封闭性, 即形成一个乘法群。图 2.1 中任意两个 Walsh 函数相乘后所得的二维 Walsh 函数也必在图 2.1 中。而且每 2^p 阶 ($p=0, 1, 2, \dots$) Walsh 函数还形成一个个子群。

性质 4 二维 Walsh 函数和一维 Walsh 函数。任意一个二维函数经过各种不同方式的排列可以形成一个一维函数, 如果这种排

列恰当,则这个一维函数正好是一个(一个序号的)一维 Walsh 函数。如式(2.3)的 W_{12} ,经一行接一行排成的一维函数是序号为 5 的一维 Walsh 函数。Walsh 函数的这个性质,使二维 Walsh 函数处理易变成一维处理。

2.3 二维 Walsh 变换

对式(2.7),用求和代替积分,并将其离散化,于是得

$$C(k, m) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) \text{Wal}_{km}(i, j) \quad (2.9)$$

$$k, m = 0, 1, \dots, N-1$$

式(2.9)即为二维 Walsh 正变换。逆二维 Walsh 变换为

$$f(i, j) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} C(k, m) \text{Wal}_{ij}(k, m) \quad (2.10)$$

$$i, j = 0, 1, \dots, N-1$$

这表明,一个复杂的二维函数可以分解为许多简单的 Walsh 图形之和。二维 Walsh 变换提供了一个实行这种分解的手段。

二维 Walsh 正反变换可表示为最常用的矩阵形式:

$$[C_N] = \frac{1}{N^2} [W_N] [f_N] [W_N] \quad (2.11)$$

$$[f_N] = [W_N] [C_N] [W_N] \quad (2.12)$$

这里 $[f_N]$ 为二维数据, $[C_N]$ 为这个二维数据的二维 Walsh 序谱。二者都是一个 $[N \times N]$ 矩阵。在将二维数据分解成 Walsh 图形之和,二维序谱只是代表权重因子,必须把它乘到各个基元 Walsh 函数上才能综合出所要的 $[f_N]$ 。

式(2.11)中矩阵 $[C_N]$ 的元素 C_{km} 可表示为

$$C_{km} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} W_{ki} f_{ij} W_{jm} \quad (2.13)$$

$$k, m = 0, 1, \dots, N-1$$

式中 W_k 是 Walsh 矩阵 $[W_N]$ 的元素。

图 2-1 所示的任一个二维 Walsh 函数 W_{km} 经二维 Walsh 变换

后,所得的 4×4 二维谱矩阵 $[T]$ 中除 $u=k, v=m$ 的坐标格子中有 +1 输出外,其余都为零。图 2-1 右边画出了全部 16 个 Walsh 图形所对应的二维谱。例如式 (2.2) 的 W_{21} 经变换后得

$$[T] = \frac{1}{16} [W_4] [W_{21}] [W_4] = \frac{1}{16} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在二维序谱 $[T]$ 矩阵中,坐标原点在矩阵左上角。若将 $[T]$ 矩阵分为 4 个象限,则第 II 象限的水平轴序率和垂直轴序率都是低频的,是二维低频区域,用 $L-L$ 表示。第 I 象限的水平轴是高序率,而垂直轴是低序率,用 $H-L$ 表示。同样,第 III 象限是 $L-H$ 区。第 IV 象限是 $H-H$ 区(二维高序率区)。

二维 Walsh 变换可以通过二次快速一维变换来实现,一个 Fortran 程序如下:

```
2D WALCH TRANSFORM PROGRAM
OPEN(UNIT=7)
OPEN(UNIT=6)
OPEN(UNIT=3,NAME='FLECK.DAT',TYPE='OLD')
DIMENSION X(16,16),Y(16,16),HR(16),HT(16)
READ(3,01)X
01 FORMAT(16F4,0)
DO 02 I=1,16
DO 03 J=1,16
03 Y(I,J)=X(I,J)
02 CONTINUE
CALL TTWT(X,16,HR,HI,4)
```

```

WRITE(7,05)Y,X
05  FORMAT(4F4.0)
WRITE(6,04)Y
04  FORMAT (' 2D  FWT  EXAMPLE  # 1',//,' INPUTDA-
TA',//,(16F4.0))
WRITE(6,14)X
14  FORMAT (////' 2D  WALSH  SEQUENCE  SPECTUM',//,
(16F4.0))
CLOSE(UNIT=7)
CLOSE(UNIT=6)
CLOSE(UNIT=3)
STOP
END
SURROUTINE TTWT(X,N,HR,HI,L)
DIMENSION X(N,N),HR(N),HI(N)
DO 10 J=1,N
DO 20 I=1,N
20  HR(I)=X(I,J)
CALL BWT(HR,HI,N,L)
DO 30 IJ=1,N
30  X(IJ,J)=HI(IJ)
10  CONTINUE
DO 40 I=1,N
DO 50 J=1,N
50  HR(J)=X(I,J)
CALL BWT(HR,HI,N,L)
DO 60 JI=1,N
60  X(I,JI)=HI(JI)
40  CONTINUE
RETURN

```

```

END
SUBROUTINE BWT(A,B,N,L)
DIMENSION A(N),B(N)
DO 101 IJ=1,N
  I1=JFUN(IJ-1,L)+1
101  B(I1)=A(IJ)
      DO 103 J1=1,L
        N1=2 * * J1
        N2=N1/2
        N3=N2-1
        DO 102 JI=1,N,N1
          JK=JI+N3
          DO 102 JL=JI,JK
            N6=JL+N2
            WR=B(N6)
            B(N6)=B(JL)-WR
102    B(JL)=B(JL)+WR
103    CONTINUE
104  B(I)=B(I)/FLOAT(N)
      RETURN
      END
      FUNCTION JFUN(M,K)
      JFUN=0
      DO 106 MK=1,K
        M6=M/2 * * (MK-1)-M/2 * * MK-2 * (M/2 * * (MK
          +1))
        M7=M6-2 * (M6/2)
106    JFUN=JFUN02+M7
      RETURN
      END

```

2.4 电视图像信号的二维序谱分析

电视信号中亮度信号和色信号的二维 Walsh 谱分析不仅是二维 Walsh 变换的一个应用,也为电视亮、色信号的二维分离和解调提供了基础,这儿作一个介绍。

(1) 亮度信号的二维序谱

典型的自然图像信号的功率谱分布如图 2-2 所示。

大量自然图像中出现对角形结构的概率,比出现纵横结构的概率小,如图 2-2 所示。这说明图像信号的能量集中在水平(U 轴)和垂直(V 轴)都是低频的区域,以及 U 在高频、但 V 在低频,或者 V 在高频、而 U 在低频,几乎很少存在 U 及 V 都是高频的区域。如一种竖直条的 4×4 取样为

$$[Y] = \begin{bmatrix} +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

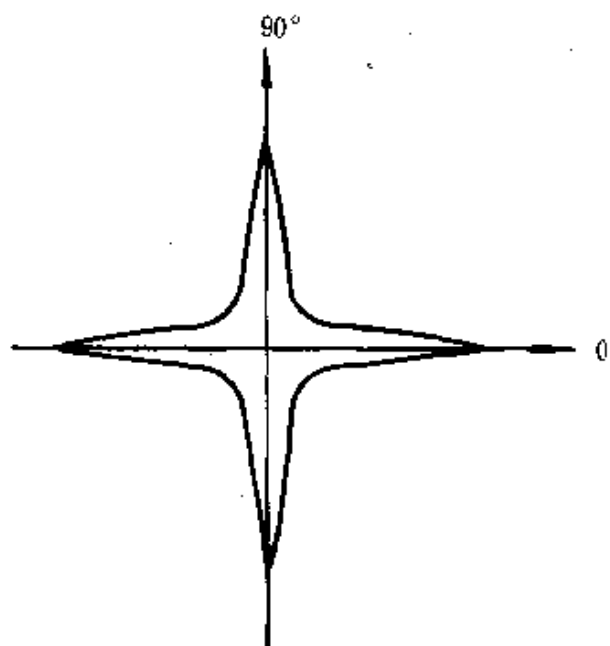


图 2-2 典型的自然图像之功率谱分布

此信号经二维 Walsh 变换后得

$$[T] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

变换后,在 $U=1, V=0$ 处有输出,其余为零,即在二维低频区域。所以电视信号中亮度信号经变换后都集中在左上角,而右下角二维高频部分是很少有分量的。这是大量数据统计的结果,也是时域中图像信号能压缩的理论基础。所以,亮度信号的二维谱可用下式表示:

$$[T_Y] = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{01} & y_{02} & 0 \\ y_{10} & y_{11} & 0 & 0 \\ y_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

(2) NTSC 信号的二维序谱⁽⁴⁾

NTSC 彩色全电视信号的彩色副载波采用 $1/2$ 间置,两个正交调制的副载波 u_N 及 v_N 为

$$u_N = U \sin[2\pi(N - \frac{1}{2})f_H t] \quad (2.15)$$

$$v_N = V \cos[2\pi(N - \frac{1}{2})f_H t] \quad (2.16)$$

式中 f_H ——行频; N ——正整数。

u_N 及 v_N 二行一循环,其第 1 场内第 1 至第 4 行的波形如图 2-3 所示。如图若用 $4f_s$ 取样

$$f_s = (N - \frac{1}{2})f_H$$

然后按行储存起来,可得 u_N 及 v_N 的 4×4 二维取样结构如下:

$$u_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} +U & +U & -U & -U \\ -U & -U & +U & +U \\ +U & +U & -U & -U \\ -U & -U & +U & +U \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$v_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} +V & -V & -V & +V \\ -V & +V & +V & -V \\ +V & -V & -V & +V \\ -V & +V & +V & -V \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

图中 4×4 方阵是 NTSC 制副载波结构最基本的组成, $2' \times 2'$ 方阵是这个基本组成在水平和垂直方向的周期重复。

假定这时亮度信号是二维直流成分 Y , 则 NTSC 全电视信号在 $4f$ 取样后得的 4×4 方阵为(不计色信号的系数 $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$[A_N] = \begin{bmatrix} Y+U+V & Y+U-V & Y-U-V & Y-U+V \\ Y-U-V & Y-U+V & Y+U+V & Y+U-V \\ Y+U+V & Y+U-V & Y-U-V & Y-U+V \\ Y-U-V & Y-U+V & Y+U+V & Y+U-V \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$[A_N]$ 经二维 Walsh 变换后得

$$[T_N] = \begin{bmatrix} Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & V & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

将式(2.17)的 u_N 及式(2.18)的 v_N 与图 2.1 的 Walsh 图形作比较, 可见 u_N 与 W_{13} 相同, v_N 与 W_{23} 相同。所以式(2.20)中 U 出现在 $u=1, v=3$ 处及 V 出现在 $u=2, v=3$ 处是必然的。

以上是只考虑副载波本身的情况, 若色差信号有一定带宽, 则 NTSC 信号的二维序谱 $[T_N]$ 应为

$$[T_N] = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{10} & 0 & 0 \\ y_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{01} & v_{01} & 0 \\ u_{10} & u_{00} & v_{00} & v_{10} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

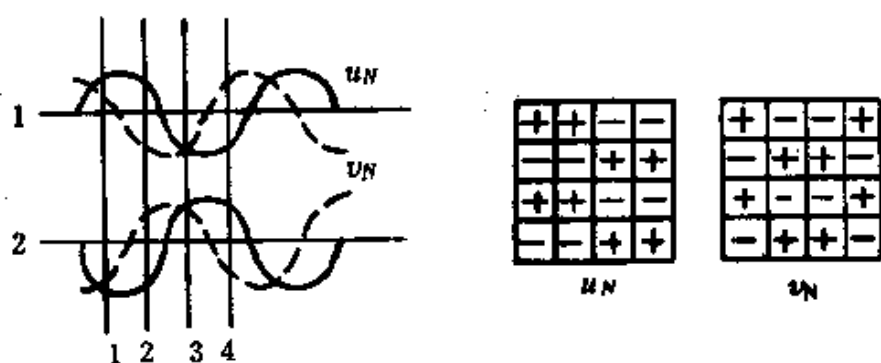


图 2-3 一场内 NTSC 的取样图形

对照图 2-1, 可以画出 NTSC 的二色信号 u_N 及 v_N 的二维图形为

$$\begin{aligned} u_N &= u_{00} \begin{bmatrix} + & + & - & - \\ - & - & + & + \\ + & + & - & - \\ - & - & + & + \end{bmatrix} + u_{01} \begin{bmatrix} + & + & - & - \\ - & - & + & + \\ - & - & + & + \\ + & + & - & - \end{bmatrix} \\ &\quad + u_{10} \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ - & - & - & - \\ + & + & + & + \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \\ v_N &= v_{00} \begin{bmatrix} - & - & - & + \\ - & + & + & - \\ + & - & - & + \\ - & + & + & - \end{bmatrix} + v_{01} \begin{bmatrix} + & - & - & + \\ - & + & + & - \\ - & + & + & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$+v_{10} \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

以上分析以 4×4 矩阵为例,对 $2^n \times 2^n$ 大矩阵同样是合适的。

(3) PAL 信号的二维序谱

PAL 制副载波采用 $\frac{1}{4}$ 间置, PAL 制的二个副载波 u_r 及 v_r 用下式表示:

$$u_r = U \sin[2\pi f_H(N - \frac{1}{4} + 1/625)t] \quad (2.24)$$

$$v_r = \pm V \cos[2\pi f_H(N - \frac{1}{4} + 1/625)t] \quad (2.25)$$

u_r 及 v_r 四行一循环,其第 1 行至第 4 行的波形如图 2-4 所示。

若用 $4f_{sc}$ [$f_{sc} = (N - \frac{1}{4} + 1/625)f_H$] 取样,且起始相位为 0° ,则 u_r 及 v_r 的取样值为

$$[u_r] = \begin{bmatrix} 0 & +U & 0 & -U \\ -U & 0 & +U & 0 \\ 0 & -U & 0 & +U \\ +U & 0 & -U & 0 \end{bmatrix}, [v_r] = \begin{bmatrix} +V & 0 & -V & 0 \\ 0 & -V & 0 & +V \\ -V & 0 & +V & 0 \\ 0 & +V & 0 & -V \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

则它们的二维序谱分布为

$$[T_r] = \begin{bmatrix} Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-U+V}{2} & 0 \\ 0 & \frac{U+V}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

若起始相位为 45° ,则 u_r 及 v_r 的二维取样值为

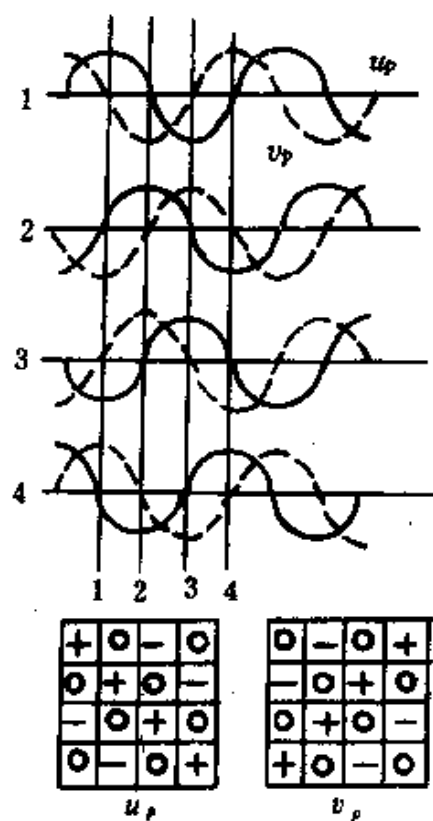


图 2-4 PAL 信号的二维取样图形

$$\begin{aligned}
 [u_p]' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} +U & +U & -U & -U \\ -U & +U & +U & -U \\ -U & -U & +U & +U \\ +U & -U & -U & +U \end{bmatrix} \\
 [v_p]' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} +V & -V & -V & +V \\ -V & -V & +V & +V \\ -V & +V & +V & -V \\ +V & +V & -V & -V \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

则它们的二维序谱 $[T_p]'$ 为

$$[T,]' = \begin{bmatrix} Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-U+V}{2\sqrt{2}} & \frac{U-V}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{U+V}{2\sqrt{2}} & \frac{U+V}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

第一种二维谱分布式(2.28)在二维解调时有用,第二种二维谱分布式(2.29)在亚 Nyquist 再生时有用。

PAL 全电视信号的二维谱分布实验照片如图 2-5 所示^[6]。图 2.5 中用的是 512×512 像素的 PAL 电视信号数字图像,经 $4f$ 取样,然后按行储存起来,再经二维 Walsh 变换后得到的。图 2-5(a)是亮度信号的二维谱分布,它和分析结果一样,集中在左上角的二维低频部分。(b)是一场内 PAL 全信号的二维谱分布,左上角仍是亮度信号,中间亮点表示色信号频谱能量,与式(2.28)及式(2.31)的理论分析完全一致。(c)是一帧内 PAL 全信号的二维谱分布,这时色信号分成两部分,和理论分析也是一致的^[4]。

表 2-1 至表 2-3 示出了 16×16 的 PAL 全电视信号的二维取样值以及二维 Walsh 和 PAL 谱分布。图 2-5 及表 2-1 至表 2-4 的二维 Walsh 谱是利用 2.3 节中的二维 Walsh 变换程序得到的。

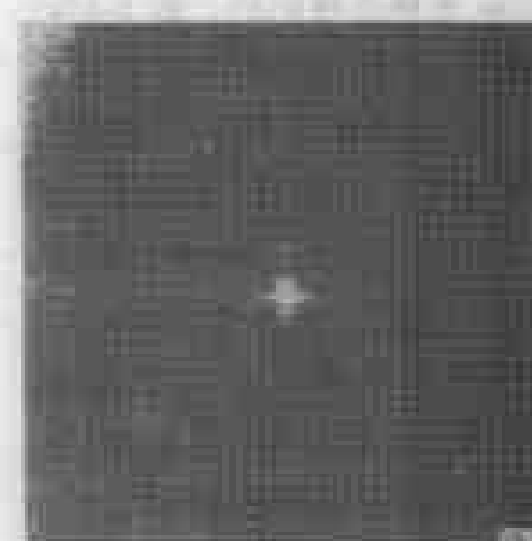
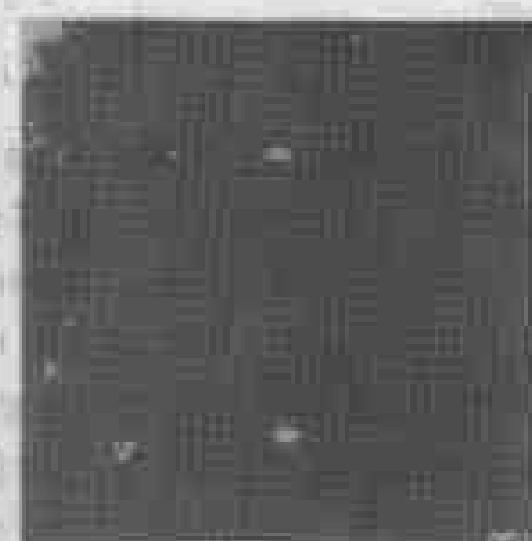
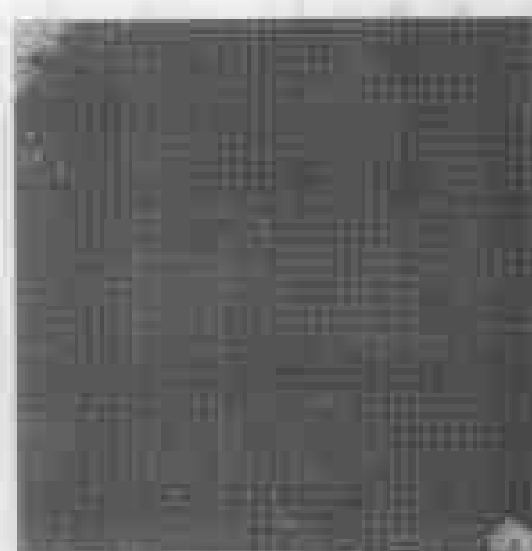


图 2-3 PAL 信号的二维序图
 (a) 锯齿信号的二维图, (b) 一帧中 PAL 全电视信号的二维图,
 (c) 一帧中 PAL 全电视信号的二维图。

表 2-1 一场中 PAL 全电视信号的二维取样值

96	96	160	128	80	96	160	144	80	96	160	128	80	96	160	144
96	144	160	96	80	128	144	112	96	144	144	112	96	128	160	112
144	144	80	96	160	144	80	96	160	144	80	96	160	144	80	96
144	96	80	128	160	112	80	144	160	112	96	144	160	96	80	144
96	112	160	144	96	128	176	176	160	144	160	160	160	144	160	144
80	128	144	112	112	160	160	112	96	144	160	112	96	144	176	144
144	144	128	144	160	144	96	112	160	160	192	192	192	128	192	192
160	128	128	128	144	112	112	160	192	192	160	160	224	208	144	144
96	112	144	128	112	144	192	176	160	192	224	160	160	208	224	160
176	176	192	176	144	160	208	192	160	176	224	208	160	176	224	192
192	208	208	192	192	176	160	192	208	176	144	192	224	176	160	208
208	208	192	192	208	192	160	176	208	192	144	160	224	208	160	176
208	208	208	192	176	192	208	176	144	192	224	160	144	192	224	176
192	192	192	192	176	176	208	192	144	176	224	192	144	176	224	192
192	192	176	192	208	160	144	192	224	176	144	192	224	176	144	208
192	192	192	192	208	192	144	176	224	192	96	128	144	112	96	128

表 2-2 一场中 PAL 全电视信号的二维 Walsh 谱

157	-3	0	0	1	0	-1	-1	-1	0	0	-2	0	1	-1	0
-24	-4	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0
-7	7	0	2	1	-1	2	2	2	0	0	0	0	-1	1	0
-7	0	0	-1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
-1	-3	-1	1	0	0	-1	-3	-1	0	0	0	0	1	0	1
6	0	3	1	0	1	2	-2	-2	1	0	-1	0	1	1	1
-2	5	1	1	0	-2	-3	-0	-0	-4	-1	-1	0	0	0	-1
-2	-1	-1	-2	2	2	2	14	13	2	1	2	0	0	0	1
-2	0	-2	-0	0	0	-4	0	1	1	0	0	1	0	0	1
4	-1	0	0	0	2	-1	-4	5	-1	0	0	0	0	0	0
-1	3	0	1	0	-2	3	-3	0	-1	1	0	0	-1	0	0
-1	-2	0	-2	-1	0	2	-3	1	1	1	0	0	-1	0	0
-4	1	-1	-1	0	0	-2	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
2	0	2	-1	0	1	0	2	-1	1	0	0	0	-1	1	0
0	3	0	2	0	-1	1	-1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	-2	0	-1	0	0	0	-2	0	-1	0	0	0	-1	-1	0

表 2-3 一场内 PAL 全电视信号的二维 Fourier 频谱(振幅部分)

0	1	0	1	1	0	1	2	1	2	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	2	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	2	1	2	1	3	2	1	1	2	1	0	0
1	1	1	1	3	2	1	3	1	1	1	3	3	1	1	0
1	0	0	1	10	2	2	1	2	2	1	2	9	2	1	1
1	0	0	2	4	1	0	4	3	1	1	1	1	2	0	0
0	0	0	0	2	2	1	2	4	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	3	18	6	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	2	157	2	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	6	18	3	1	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1	4	2	1	2	2	0	0	0
1	0	0	2	1	1	1	1	3	4	0	1	4	2	0	0
1	1	1	2	9	2	1	2	2	1	2	2	10	1	0	0
1	0	1	1	3	3	1	1	1	1	3	1	2	3	1	11
0	0	0	1	2	1	1	2	3	1	2	1	2	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	2	0	0	1	1	1	1	0

第三章 二维空间序率滤波器

离散 Walsh 变换由于其简单、快速和易数字化,引起人们普遍的重视。尤其在二维图像处理中,它的直观和快速的优点更为显著。

利用正反离散 Walsh 变换和在序率域中乘一个传输函数,可以实现二维数字序率滤波,如图 3-1 所示。虽然现在已有快速 Walsh 变换,但正反二次二维变换的计算量仍是十分大的。

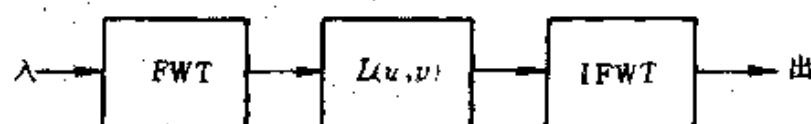


图 3-1 二维序率数字滤波器

正如数字频率滤波器一样,序率滤波也可以在时域内直接实现,对一些特殊而有实用价值的序率滤波器,这种在时域的离散序率滤波效果和用正反变换的序率滤波器一样,但速度可以快十倍或数十倍,储存量也大大减少。

本章详细介绍了一些特殊的空间序率滤波器的设计方法,如四均分和二均分空间序率滤波器。以 PAL 二维数字解码器为例,说明四均分二维带通序率滤波器的应用。二均分二维序率滤波器可以用于边缘鉴出中^[7]。

3.1 四均分二维空间序率滤波器

二维序率数字滤波器是基于二维 Walsh 函数和二维 Walsh 变换设计的。图 3-2 表示 8 阶二维 Walsh 函数。在图 3-2 中每一个方块是一个二维 Walsh 函数,它能用

$$\text{Wal}(q, x)\text{Wal}(r, y)$$

来表示。其中 $q, r=1, 2, \dots, 8$

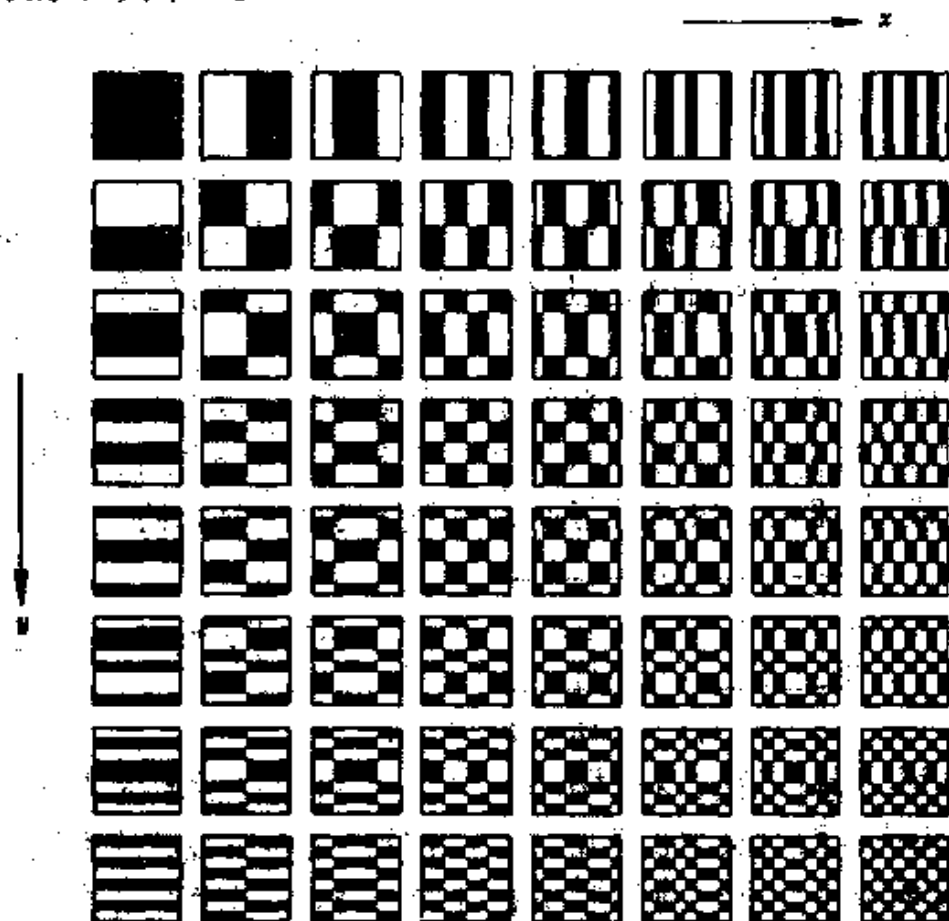


图 3-2 二维 Walsh 函数

图 3-2 中的 64 个二维 Walsh 函数可以分成四个象限。第 I 象限的 16 个二维 Walsh 函数, 在水平及垂直方向的序率都是低的, 即 $L-L$ 分量。第一个 L 表示在水平方向的低序率, 第二个字母 L 表示在垂直方向的低序率。同样第 II 象限的 16 个二维 Walsh 函数, 其水平方向是高序率, 垂直方向是低序率, 所以第 II 象限的 16 个二维 Walsh 函数的序率是 $H-L$ 分量。同理在第 III 象限的是 $L-H$ 分量, 在第 IV 象限的是 $H-H$ 分量。

下面分别设计这四个类型的二维序率滤波器。

(1) 二维 $L-L$ 空间序率滤波器

二维 $L-L$ 空间序率滤波器能够分离全部在第 I 象限的二维

Walsh 函数,即 L - L 序率分量。图 3-2 中的任一个二维 Walsh 函数是一个有 8×8 个元素的矩阵,其中任一个矩阵 $[A]$ 可表示为

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

若将矩阵 $[A]$ 分成许多 2×2 小矩阵,如式 (3.1) 中虚线所示。则在第 I 象限的二维 Walsh 函数的每一个 2×2 小矩阵都是

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

计算 2×2 小矩阵的平均值,同时用这个平均值代替这个 2×2 小矩阵的每一个元素

$$[b_1] = \begin{bmatrix} (k+l+m+n)/4 & (k+l+m+n)/4 \\ (k+l+m+n)/4 & (k+l+m+n)/4 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

式中 k, l, m 和 n 是 2×2 矩阵的元素,即

$$a = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$

若输入信号矩阵 $[A]$ 的 2×2 小矩阵都用式 (3.2) 的小矩阵 $[b_1]$ 代替,则所得到的新矩阵 $[B_1]$ 只包含 $[A]$ 中的 L - L 分量。所以式 (3.2) 相当于一个 L - L 空间序率滤波器,如同在一个二维序率域内有一个 L - L 传输函数 $[L_1]$

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

(2) 二维 L - H 空间序率滤波器

二维 L - H 空间序率滤波器能够分离全部在第 I 象限的二维 Walsh 函数, 也就是原始输入信号中 L - H 列率分量。从图 3-2 可看出, 在第 I 象限中的每一个二维 Walsh 函数的 2×2 矩阵都有如下形式:

$$\pm \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

因此二维 L - H 空间列率滤波器的公式为

$$[b_2] = \begin{bmatrix} (k+l-m-n)/4 & (k+l-m-n)/4 \\ -(k+l-m-n)/4 & -(k+l-m-n)/4 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

由式(3.4)计算得到的新矩阵 $[B_2]$ 只包含 L - H 列率分量, 因此式(3.4)是一个 L - H 空间序率滤波器, 且相应于在二维序率域上有一个 L - H 传输函数 $[L_2]$

$$[L_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

(3) 二维 H - L 空间序率滤波器

二维 H - L 空间序率滤波器能滤出在第 I 象限的全部二维 Walsh 函数的 2×2 小矩阵

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

因此二维 H - L 空间序率滤波器的公式为

$$[b_3] = \begin{bmatrix} (k-l+m-n)/4 & -(k-l+m-n)/4 \\ (k-l+m-n)/4 & -(k-l+m-n)/4 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

同样由式(3.6)计算得的新矩阵 $[B_3]$ 只有 H - L 序率分量, 相当于如下传输函数:

$$[L_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

(4) 二维 H - H 空间序率滤波器

如上面一样, 有

$$[b_4] = \begin{bmatrix} (k-l-m+n)/4 & -(k-l-m+n)/4 \\ -(k-l-m+n)/4 & (k-l-m+n)/4 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[L_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

以上讨论了四个象限的四均分二维空间序率滤波器。还可以

设计许多种四均划分的二维空间序率滤波器,其中最有用的是二维带通序率滤波器,它可应用在 PAL 彩色全电视信号的色度信号分离中,它在序率域内的传输函数是

$$[L_5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

可以用类同的方法来设计式(3.10)的二维带通序率滤波器。从图 3-2 中处于二维带通序率域的 16 个二维 Walsh 函数的图形可见,由它们又可以划分出许多有同样性质的 2×2 小矩阵。若输入矩阵 $[A]$ 的元素是 $a_{ij}, i, j = 1, 2, 3, \dots, 8$ 。若 2×2 矩阵组成为

$$[a_1] = \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{i+2,j} \\ a_{i,j+2} & a_{i+2,j+2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

式中 $i, j = 1, 3, 5, 6$

则在二维带通域内的 16 个二维 Walsh 函数的所有 2×2 小矩阵的形式为

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以二维带通序率滤波器的计算公式是

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (a_{ij} - a_{i+2,j} - a_{i,j+2} + a_{i+2,j+2})/4 \\ b_{i+2,j} &= -(a_{ij} - a_{i+2,j} - a_{i,j+2} + a_{i+2,j+2})/4 \\ b_{i,j+2} &= -(a_{ij} - a_{i+2,j} - a_{i,j+2} + a_{i+2,j+2})/4 \\ b_{i+2,j+2} &= (a_{ij} - a_{i+2,j} - a_{i,j+2} + a_{i+2,j+2})/4 \end{aligned} \quad (3.12)$$

由式(3.12)计算而得的新矩阵 $[B_5]$ 是二维带通序率滤波器的输出。

3.2 二均分二维空间序率滤波器

(1) 二维垂直低序率滤波器

二维垂直低通序率滤波器可分离出全部在第 I、II 象限的二维 Walsh 函数, 其传输函数为

$$[L_6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

其计算公式为(式(3.2)及式(3.6)之和)

$$[b_6] = \begin{bmatrix} \frac{k+m}{2} & \frac{l+n}{2} \\ \frac{k+m}{2} & \frac{l+n}{2} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

(2) 二维水平低通序率滤波器

二维水平低通序率滤波器可分离出全部在第 I、IV 象限的二维 Walsh 函数, 其传输函数为

$$[L_7] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

计算公式为

$$[b_1] = \begin{bmatrix} \frac{k+l}{2} & \frac{k+l}{2} \\ \frac{m+n}{2} & \frac{m+n}{2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

(3) 边缘鉴出器^[7]

一个图像的边缘的序谱是由其高频成分组成的,即由第 I 及第 III 象限的二维 Walsh 图形组成,包含 $L-H$ 及 $H-L$ 二部分。而不是第 IV 象限的 $H-H$ 成分(相当于高频杂波)。所以边缘鉴出器的传输函数是

$$[L_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

它的计算公式是式(3.5)及式(3.7)之和,即

$$[b_1] = \begin{bmatrix} \frac{k-n}{2} & \frac{1-m}{2} \\ \frac{m-1}{2} & \frac{n-k}{2} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

式(3.18)是一种很简单的边缘鉴出器,它的每像素计算次数为 0.5 次/像素。

还有许多十分有用的二均分序率滤波器,如二维标准低通序率滤波器 $[L_s]$

$$[L_9] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

二维标准高通序率滤波器 $[L_{10}]$

$$[L_{10}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

下面是一个边缘鉴出 Fortran 程序。图 3.3 是实验照片。

```

C      A PROGRAM OF EDGE DETECTOR BY 2D
      SPACE FILTER
      INTEGER IBUFF(1024),X,Y,DX,DY,R
      EXTERNAL PMDR,PMDW
      LOGICAL A
C      START

      CALL PMSK(PMDR,255,)
      CALL PMSK(PMDW,255)
      OPEN (UNIT=2,NAME='FLECK.DAT',TYPE='UN-
      KNOWN')
      DO 01 Y=0,480,32

```

```

DO 01 X=0,480,32
CALL PLESEC(X,Y,32,32,IBUFF)
01  CALL TTHH(X,Y,32,32,IBUFF)
    CLOSE(UNIT=2,DISPOSE='SAVE')
    STOP
    END
    SUBROUTINE PLESEC(X,Y,DX,DY,IBUFF)
    BYTE BUFF(1024)
    INTEGER IBUFF(1024),X,Y,DX,DY
    CALL PROD(X,Y,DX,DY,BUFF,)
    IEND=DX * DY
    DO 100 I=1,IEND
    IBUFF(I)=BUFF(I)
100  IF (IBUFF(I).LT.0)IBUFF(I)=IBUFF(I)+256
    RETURN
    END
    SUBROUTINE TTHH(X,Y,DX,DY,D1)
    INTEGER X1(32,32),X,Y,DY,DY
C    WRITE(6,11)X1
C11  FORMAT(32I4)
    DO 30 I=1,32,2
C    DO 30 J=1,32,2
C    X1(I,J)=2 * IABS(X1(I,J)-X1(I+1,J+1))
    X1(I+1,J+1)=X1(I,J)
    X1(I+1,J)=2 * IABS(X1(I+1,J)-X1(I,J+1))
30  X1(I,J+1)=X1(I+1,J)
C    WRITE(6,22)X1
C22  FORMAT(32I4)
    CALL NNNN1(X,Y,DX,DY,X1)
    RETURN

```

```

END
SUBROUTINE NNNN1(X,Y,DX,DY,IBUFF)
INTEGER IBUFF(1024),X,Y,DX,DY,R
EXTERNAL,PMDR,RMDW
LOGICAL A
CALL PMSK(PMDR,255,)
CALL PMSK(PMDW,255,)
CALL PLESEN(X,Y,DX,DY,IBUFF)
RETURN
END
SUBROUTINE PLESEN(X,Y,DX,DY,IBUFF)
BYTE BUFF(1024)
INTEGER IBUFF(1024),X,Y,DX,DY
IEND=DX * DY
DO 100 I=1,IEND
WERT=IBUFF(I)
IF(WERT.LT.256)GO TO 100
WERT=255
100  BUFF(I)=WERT
CALL PWRE(X,Y,DX,DY,BUFF)
RETURN
END

```

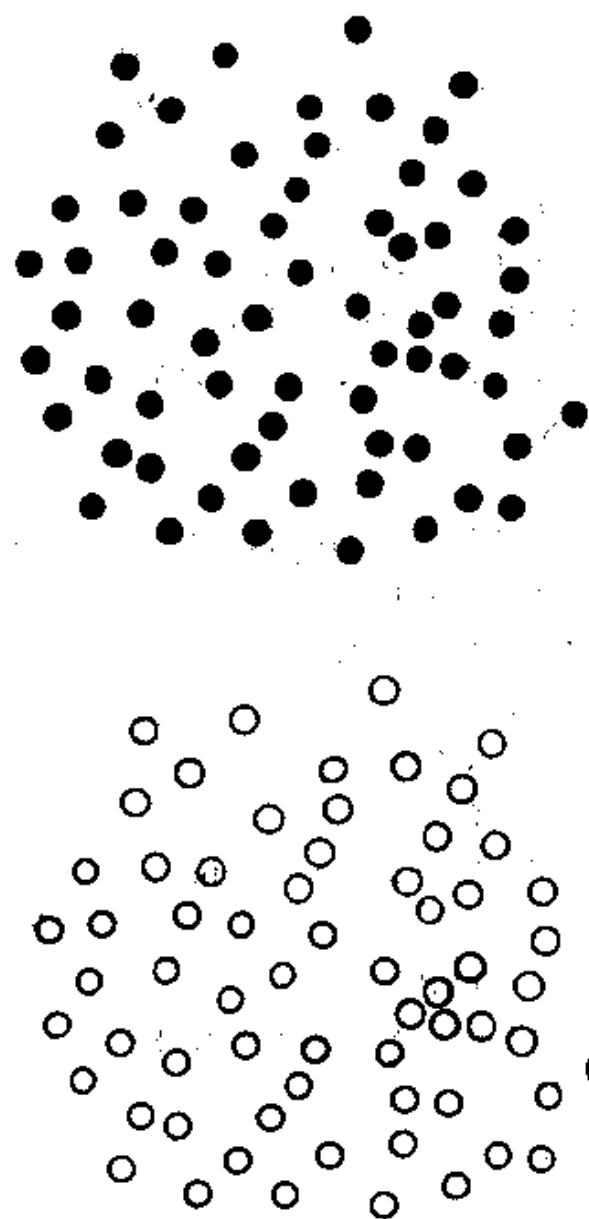


图 3-3 边缘鉴出实验照片

3.3 PAL 二维数字解调器

如前述,在 $4f_r$ 取样下 PAL 全电视信号的二维序谱为

$$[T_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-U+V}{2} & 0 \\ 0 & \frac{U+V}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

因此,可以用一个二维带通序率滤波器(S_1)

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

S_1 可将色度信号从 PAL 全电视信号中分出来,其计算公式如式(3.12)所示。

然后从全电视信号中减去分离出的色度信号,即得亮度信号,它的序谱为

$$[S_0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

这样,可以用十分简单的方法实现 PAL 信号的二维数字解调^[6]。

第四章 时域数字图像 信号的减半及再生

根据 Nyquist 取样定理,一个连续信号的取样频率应大于 2 倍带宽。这个定理在序率域内也是成立的:

假设二维图像信号 $f(x, y)$ 是带限信号,其序率 u 及 v 限制在 $0 \leq u < 2', 0 \leq v < 2', p = 0, 1, 2, \dots$, 则 $f(x, y)$ 唯一地由 $\frac{1}{2'}$ 秒的二维均匀间隔上的取样值所决定。

因此二维的电视图像有二个清晰度,水平清晰度及垂直清晰度。由于地球重力的影响,实际图像或是要求高的水平清晰度(相当于垂直细条组成的高频线),或是要求高的垂直清晰度(相当于水平条组成的高频线),很少有图像要求水平和垂直清晰度两者都是高的(相当于小点子)。所以电视图像信号的特征是,其二维谱集中在二维低频区域。在二维序谱中,即集中在二维 Walsh 变换中的左上角,如第二章亮度信号二维谱的实验照片所示(图 2-5a)。

由于图像信号的二维谱的这个特点,按 Nyquist 取样频率得到的二维离散图像数据可以直接去掉一半。被去掉的一半数据可以用一个二维低通滤波器从保留的一半中再生;只要图像频谱符合二维低频区的条件,则再生的误差将是小的。大多数图像的二维谱都能满足这个要求,所以它的二维数据只保留一半就可以了。也就是说,取样频率只要二维 Nyquist 的一半就足够了。这种取样叫亚 Nyquist 取样。它表明,任一数字图像的传输码率及储存量都可以减少一半^[8]。

再生的关键是二维低通滤波器的设计。本章将指出,只有用二维重叠低通滤波器才能较好地再生图像。同时,模板尺寸越大越好,只有从无穷大矩阵的二维重叠低通滤波器得到的有限计算模

板才能减小再生图像的误差。

4.1 亚 Nyquist 取样电视图像信号的二维序谱分析

一个静止的电视图像是一个二维函数,能用一个矩阵表示。若一个二维图像按 Nyquist 取样定理所得的数字图像用 4×4 矩阵 $[a]$ 表示:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

信号 $[a]$ 经二维 Walsh 变换后可得其二维序谱 $[TW_a]$, 一般情况下, 图像的频谱线集中在二维低频区域中, 即 $[TW_a]$ 应为

$$[TW_a] = \begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & 0 \\ t_{10} & t_{11} & 0 & 0 \\ t_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

从式(4.2)可见, 电视图像信号的二维 Walsh 谱集中在变换矩阵的左上角, 这儿是二维低序谱区。

若把信号 $[a]$ 变成 $[b]$

$$[b] = \begin{bmatrix} a_{00} & -a_{01} & a_{02} & -a_{03} \\ -a_{10} & a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{30} & a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$[b]$ 相当于 $[a]$ 调制一个二维高序率载波 $[W_{33}]$

$$[W_{33}] = \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

〔b〕的二维序谱〔TW_b〕将搬到二维高序率区,即

$$[TW_b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{21} \\ 0 & 0 & t_{11} & t_{20} \\ 0 & t_{02} & t_{01} & t_{00} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

从式(4.5)可见,信号〔b〕的二维序谱〔TW_b〕在 Walsh 变换矩阵的右下角,这里是二维高序谱区域。

把信号〔a〕及〔b〕相加,可得一个新的信号〔c〕及其二维序谱〔TW_c〕:

$$[c] = \frac{[a] + [b]}{2} = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & a_{02} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$[TW_c] = \frac{[TW_a] + [TW_b]}{2} = \begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & 0 \\ t_{10} & t_{11} & 0 & t_{21} \\ t_{20} & 0 & t_{11} & t_{10} \\ 0 & t_{02} & t_{01} & t_{00} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

同样,将〔a〕及〔b〕相减可得另一个信号〔d〕及其二维序谱〔TW_d〕:

$$[d] = \frac{[a] - [b]}{2} = \begin{bmatrix} 0 & a_{01} & 0 & a_{03} \\ a_{10} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{30} & 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$[TW_d] = \frac{[TW_a] - [TW_b]}{2} = \begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & 0 \\ t_{10} & t_{11} & 0 & -t_{21} \\ t_{21} & 0 & -t_{11} & -t_{10} \\ 0 & -t_{02} & -t_{01} & -t_{00} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

比较 $[TW_c]$ 与 $[TW_c]$ 或 $[TW_d]$,三者矩阵左上角的二维低序谱分量是相同的。因此可以用二维低通率滤波器从信号 $[c]$ 或 $[d]$ 中取出其二维低序率分量,即得原信号 $[a]$ 。如果原信号 $[a]$ 只有二维低频分量,则从 $[c]$ 或 $[d]$ 恢复得到的 $[a]$ 将是不失真的。注意 $[c]$ 或 $[d]$ 中有一半是零,即由 $[a]$ 中直接丢失一半数据组成,所以用 $[c]$ 或 $[d]$ 来代替 $[a]$ 可以减少二维信源数据的一半。

若原信号 $[a]$ 中有二维高频成分,这时 $[TW_c]$ 将变成

$$[TW_a] = \begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & 0 \\ t_{10} & t_{11} & 0 & 0 \\ t_{20} & 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

而 $[TW_b]$ 将变成

$$[TW_b] = \begin{bmatrix} t_{33} & t_{32} & 0 & 0 \\ t_{23} & 0 & 0 & t_{20} \\ 0 & 0 & t_{11} & t_{10} \\ 0 & t_{02} & t_{01} & t_{00} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

合成信号的 $[TW_c]$ 及 $[TW_d]$ 为

$$[TW_c] = \begin{bmatrix} t_{00} + t_{33} & t_{01} + t_{32} & t_{02} & 0 \\ t_{10} + t_{23} & t_{11} & 0 & t_{20} \\ t_{20} & 0 & t_{11} & t_{23} + t_{20} \\ 0 & t_{02} & t_{31} + t_{01} & t_{33} + t_{10} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$[TW_d] = \begin{bmatrix} t_{00} - t_{33} & t_{01} - t_{32} & t_{02} & 0 \\ t_{10} - t_{23} & t_{11} & 0 & t_{20} \\ t_{20} & 0 & t_{11} & t_{23} - t_{20} \\ 0 & t_{02} & t_{32} - t_{01} & t_{33} - t_{10} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

从式(4.12)及式(4.13)用二维低频通滤波器取出的二维序谱为

$$[TW_s]_1 = \begin{bmatrix} t_{00} + t_{33} & t_{01} + t_{32} & t_{02} & 0 \\ t_{10} + t_{23} & t_{11} & 0 & 0 \\ t_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$[TW_s]_2 = \begin{bmatrix} t_{00} - t_{33} & t_{01} - t_{32} & t_{02} & 0 \\ t_{10} - t_{23} & t_{11} & 0 & 0 \\ t_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

将再生信号的二维谱 $[TW_s]_1$ 或 $[TW_s]_2$ 与原信号的谱 $[TW_s]$ [式(4.10)] 相比, 有了差别, 所以这时从 $[c]$ 及 $[d]$ 再生的信号将有误差。但从式(4.14)及(4.15)可见, 混入 $[TW_s]_1$ 和 $[TW_s]_2$ 的高序率分量符号相反, 即 $[c]$ 及 $[d]$ 引起的高序率分量的误差是相反的。利用二维取样 $[c]$ 及 $[d]$ 的这个重要性质, 可引入二维重叠数字滤波器, 它综合了 $[c]$ 及 $[d]$ 二种半 Nyquist 取样结构, 可以减少再生图像中高频分量引起的误差。

4.2 二维重叠低通数字滤波器

设计一个二维低通滤波器, 它可从 $[c]$ 或 $[d]$ 中滤出二维低频分量, 从而再生出原二维数据 $[a]$ 。对 4×4 矩阵, 这个二维低通滤波器在序率域的传输函数 $[L_i]$ 可表为

$$[L_i] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

将 $[L_i]$ 代入二维 Walsh 变换式, 可得 4 阶二维标准低通序率滤波器的输出计算模板 $[l_i]$

$$[L_4] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

式(4.17)表明,原二维数据 $[a]$ 矩阵经二维低通滤波后输出矩阵是一个 4×4 矩阵 $[a']$,这个 $[a']$ 输出矩阵中的第一个元素 a'_{00} 可表为

$$a'_{00} = \frac{1}{8} [4a_{00} + 2a_{10} + a_{03} + a_{30} - a_{21} - a_{12}] \quad (4.18)$$

矩阵 $[a']$ 中的其它元素 a'_{ij} 的计算模板可用类同方法得到(见第五章)。

但是用式(4.17)表示的一般二维低通滤波器来从再生半Nyquist 取样信号再生出原图像质量不好,在斜线处会出现方块锯齿效应。虽然可以通过加大计算矩阵(如 64×64)来减小锯齿,但这样就加大了计算量,同时锯齿效应也还存在。这是由于作二维离散变换时所取方块尺寸总是有限的,用许多有限方块分别作处理后拼成一个整幅图像总有边缘效应。

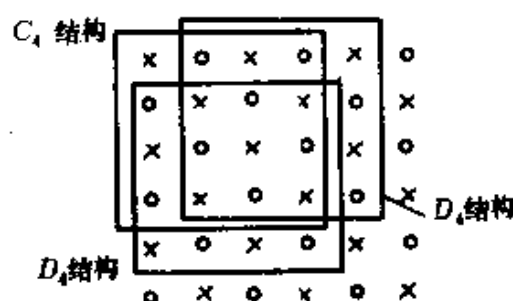


图 4-1 重叠滤波时的二种结构

如果将上述滤波重叠进行,即在原 4×4 矩阵的基础上向左或向下移一位,产生另外一些 4×4 矩阵,再分别滤波后,最后输出是这些重叠滤波的叠加,如图 4-1 所示。这时会出现 $[c]$ 和 $[d]$ 二种半Nyquist 取样结构,如 4-1 节所述,它们的高频误差是相反的。实验表明,这种滤波重叠后斜线处的方块锯齿效应消失。

因此引入一个二维重叠滤波器,其样点逐点移位通过全部与该点有关的滤波器,而滤波输出是这些全部互相重叠的有关滤波

器的输出的总和。这种重叠滤波器的输出一般用一个计算模板表示(本书的图 5-4 画出了 4×4 二维低通重叠滤波器的示意图)。

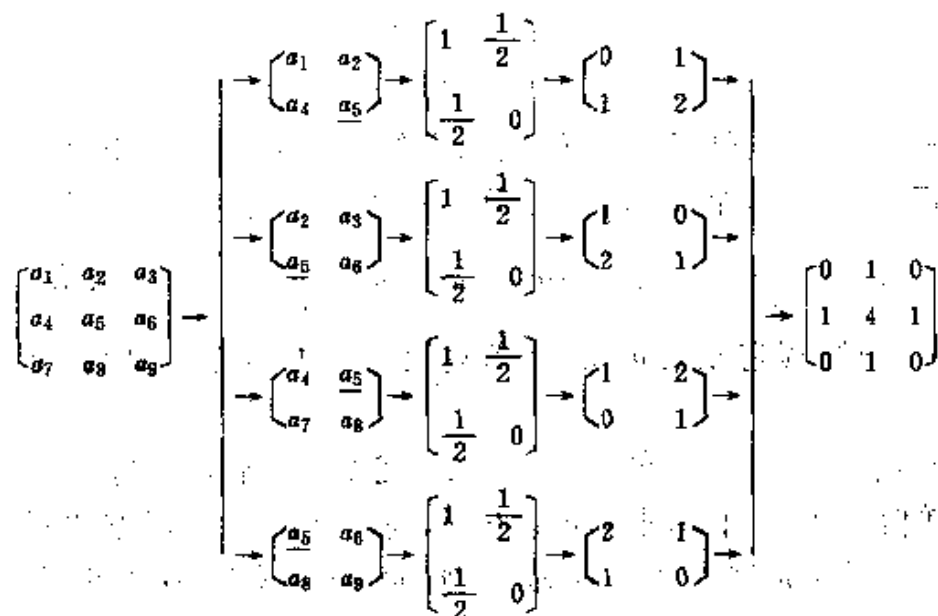


图 4-2 2×2 二维低通重叠数字滤波器

图 4-2 表示一个最简单的 2×2 二维低通重叠滤波器,下面研究样点 a_5 经过重叠滤波器后的输出。

与样点 a_5 有关的 2×2 滤波器有 4 个:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_5 & a_6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

在上述四个矩阵中,样点 a_5 正好处在 2×2 矩阵中不同的 4 个位置上。这 4 个 2×2 矩阵分别经过二维低通序率滤波器。在 2×2 矩阵时,二维低通滤波器在序率域的传输函数 $[L_2]$ 可表示为

$$[L_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

图 4-2 中画出的是由 4 个 2×2 矩阵组成的计算模板,用它可求出输出矩阵中相应元素的表达式。

如图 4-2 所示,4 个 2×2 滤波器在 a_5 相应位置上的输出分别为

$$(b_5)_1 = a_5 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \quad (4.20)$$

$$(b_5)_2 = a_5 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_6 \quad (4.21)$$

$$(b_5)_3 = a_5 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_8 \quad (4.22)$$

$$(b_5)_4 = a_5 + \frac{1}{2}a_8 + \frac{1}{2}a_3 \quad (4.23)$$

4 个滤波器的输出和为

$$\begin{aligned} b_5 &= \frac{1}{8}[(b_5)_1 + (b_5)_2 + (b_5)_3 + (b_5)_4] \\ &= \frac{1}{8}(4a_5 + a_4 + a_2 + a_6 + a_8) \end{aligned} \quad (4.24)$$

式(4.24)可以用一个计算模板来表示:

$$[M_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

同样,在 4×4 矩阵时,传输函数如(4.16)所示,这时的计算模板 $[M_4]$ 是一个 7×7 模板,即

$$[M_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 16 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

也可写出 8×8 矩阵的 (L_8) 及 (M_8) :

$$[L_8] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

同样,可写出 $[M_{16}]$ (只写出 $1/4$):

[illegible]

从 $[M_2]$ 、 $[M_4]$ 、 $[M_8]$ 及 $[M_{16}]$ 等表示式可见,这些模板有三个特点:①除计算模板中心点外,系数是交叉为零的;②每个模板中除中心外的全部系数之和等于中心点的系数;③从每个比 $[M_4]$ 大的模板中截取一菱形,其中心外的全部系数之和等于中心点处的系数(菱形截取方法下述)。

因此用这些模板从一半为零的亚 Nyquist 取样数据中再生原信号时,在有数据处其输出仍是原数据,在无数数据处的输出值由不为零的一半数据中产生,而与丢掉的一半数无关。这个数学公式从反面说明了,如果一个二维图像只有二维低频成分,则原数据可以丢掉一半,只要保留一半就可以无失真地再生原图像。

4.3 无穷大矩阵下的二维低通重叠滤波器

前面得到了 $[M_2]$ 、 $[M_4]$ 、 $[M_8]$ 及 $[M_{16}]$,从中可以得出规律,写出更高阶的计算矩阵。实验表明,所取矩阵越大,再生误差越小。因此下面设计任意大矩阵时的二维低通重叠序率滤波器的计算模板⁽⁹⁾。

从表达式 $[M_2]$ 、 $[M_4]$ 、 $[M_8]$ 及 $[M_{16}]$ 等可见,系数 $5=1+4$,系数 $21=1+4+16$, $85=1+4+16+64$ 等,即是 $1^2+2^2+4^2+8^2+\dots$,因此可以得到在 $N \times N=2^r \times 2^r$ 任意大矩阵时的计算模板如下:

式中 $m_0 = N^2 = 4^r$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \sum_{i=0}^{r-1} 4^i = \frac{4^r - 1}{3} \\ m_j &= \sum_{i=0}^{r-j} 4^i = \frac{4^{r-j+1} - 1}{3} \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

所有系数除 m_0 归 1 后, 可得

$$\left. \begin{aligned} m_0' &= 1 \\ m_1' &= \frac{4^{r-1}}{3 \times 4^r} \\ &\vdots \\ m_j' &= \frac{4^{r-j+1} - 1}{3 \times 4^r} \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

当 $2^r \rightarrow \infty$ 时, 即得

$$\left. \begin{aligned} m_0' &= 1 \\ m_1' &= \frac{1}{3} \\ m_2' &= \frac{1}{12} \\ &\vdots \\ m_j' &= \frac{1}{3 \times 4^{j-1}} \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

由此可得 $[M_\infty]$ 为式 (4.34)。

在式 (4.34) 的 $[M_\infty]$ 中, 有一个重要性质, 公式中的最外 4 层的系数, 是 192 个 $\frac{1}{192}$, 其中一半是正, 一半是负, 加起来正好为零。由式 (4.33) 可见, 再外 8 层是 728 个 $\frac{1}{728}$, 其中也是正负各一半, 以此类推, 再外层亦一样。所以在使用式 (4.34) 时, 若认为离计算点越远的一个宽的对称菱形带内的像素的平均值是常数, 则外层的菱形带可以不计算, 这和实际情况是相符的, 因为图像的相关

性随距离迅速下降,远离计算点的象素可以忽视不计。因此 $[M_{\infty}]$ 在实用中用中心一部分系数就可以了,常用的是一个

$$[M_4]' = \begin{bmatrix} & & & 1/12 & & & \\ & & & -1/12 & 0 & -1/12 & \\ & & -1/12 & 0 & 1/3 & 0 & -1/12 \\ 1/12 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/12 \\ & & -1/12 & 0 & 1/3 & 0 & -1/12 \\ & & & -1/12 & 0 & -1/12 & \\ & & & & & & 1/12 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

比较式(4.35)的 $[M_4]'$ (从 M_{∞} 推得)及式(4.26)的 $[M_4]$,可见 M_4 的系数值都增大了。表4-1是 $[M_4]$ 及 $[M_4]'$ 再生图像的比较。

表4-1中,(1)是原始图像数据(只给出与再生数据作比较用的一部分),(2)是去掉一半为的图像数据,(3)是用 $[M_4]$ 从(2)再生的图像,(4)是 $[M_4]'$ 的误差[即(1)-(3)],(5)是用 $[M_4]'$ 再生的图像,(6)是 $[M_4]$ 的的误差。由表可见, $[M_4]'$ 的再生误差明显比 $[M_4]$ 的误差小。

表 4-1 用 $[M_4]$ 及 $[M_4]'$ 再生的图像及其误差

(1)原始图像数据											
226	166	176	226	208	159	186	234	203	161	188	223
203	154	190	237	196	159	212	232	130	160	208	225
184	157	211	229	174	175	230	222	162	175	226	206
162	172	227	210	165	185	235	207	160	193	229	186
154	192	227	192	164	202	231	184	160	211	224	170
160	212	228	174	172	220	223	167	171	231	205	156
(2)保留一半的原始图像数据											
0	166	0	226	0	159	0	234	0	161	0	223
203	0	190	0	196	0	212	0	180	0	208	0
0	157	0	229	0	175	0	222	0	175	0	206
162	0	227	0	165	0	235	0	160	0	229	0
0	192	0	192	0	202	0	184	0	211	0	170
160	0	228	0	172	0	223	0	171	0	205	0

续表

(3)用 (M_4) 再生的图像											
214	166	177	226	207	159	189	234	200	161	191	228
203	166	190	223	196	172	212	223	180	170	208	212
183	157	206	229	184	175	220	222	174	175	214	206
162	177	227	208	165	189	235	202	160	194	229	189
175	192	220	192	170	202	222	184	169	211	212	170
160	208	228	181	172	216	223	173	171	214	205	171
(4) (M_4) 的误差											
5	0	-1	0	0	0	-3	0	2	0	-3	0
0	-12	0	14	0	-13	0	8	0	-10	0	12
0	0	4	0	-10	0	9	0	-12	0	11	0
0	-5	0	1	0	-4	0	4	0	-1	0	-3
-14	0	6	0	-6	0	8	0	-9	0	11	0
0	3	0	-7	0	3	0	-6	-0	16	-0	-15
(5)用 $(M_4)'$ 再生的图像											
217	166	175	226	209	159	188	234	201	161	191	208
203	162	190	227	196	168	212	227	180	167	208	215
182	157	208	229	182	175	224	222	170	175	218	206
162	175	227	20	165	188	235	203	160	195	229	189
111	192	224	192	166	202	226	184	166	211	216	170
160	211	228	179	172	219	223	170	171	218	205	167
(6) $(M_4)'$ 的误差											
2	0	1	0	-1	0	-2	0	1	0	-3	0
0	-8	0	9	0	-9	0	4	0	-7	0	9
2	0	2	0	-8	0	5	0	-8	0	7	0
0	-3	0	-0	0	-3	0	3	0	-2	0	-3
-7	0	2	0	-2	0	4	0	-6	0	8	0
0	1	0	-5	0	0	0	-3	0	12	0	11

第五章 二维重叠序率滤波器的设计

二维重叠序率滤波器是由与样点有关的一般序率滤波器输出的叠加组成的,所以必须在分析一般序率滤波器设计方法的基础上,才能设计出二维重叠滤波器。本章详细地介绍一般二维序率滤波器输出矩阵中每一元素的计算方法,并将它用于重叠滤波器中;指出重叠序率滤波器是一般序率滤波器的并元移位的叠加和。因此,引用第一章中引入的并元移位叠加矩阵 $[Q]$,二维重叠序率数字滤波器的设计就变得十分简单,可以用一个类同二维 Walsh 变换的简单公式表示。

5.1 二维一般序率数字滤波器的设计^[10]

二维一般序率数字滤波器由正逆 Walsh 变换组成,如图 5-1 所示,一个 $N \times N$ 二维数据 $a(x, y)$, 经二维 Walsh 变换到序率域得 $A(u, v)$, 在序率域乘上传输函数 $L(u, v)$ 后, 再经二维逆 Walsh 变换到时域, 得一个 $N \times N$ 的输出矩阵 $b(x, y)$ 。

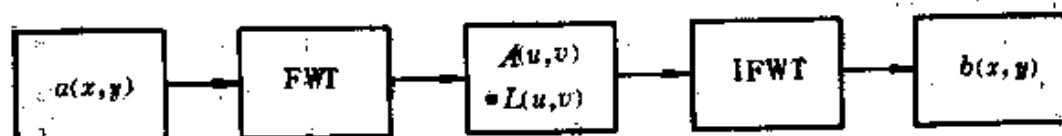


图 5-1 二维一般序率数字滤波器方框图

由离散卷积定理,在序率域的乘积

$$B(u, v) = A(u, v) L(u, v) \quad (5.1)$$

等于在时域的并元卷积,即

$$b(x, y) = a(x, y) \circledast l(x, y) \quad (5.2)$$

式中

$$B(u, v) \leftrightarrow b(x, y)$$

$$A(u, v) \leftrightarrow a(x, y)$$

互相为 Walsh 变换。

所以矩阵中的每一个元素 $b(x, y)$ 可表示如下

$$b(x, y) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a(m, n) l(x \oplus m, y \oplus n) \quad (5.3)$$

图 5-2 表示一个 4×4 二维标准低通一般序率数字滤波器, 输入矩阵 $[a]$ 为

$$[a] = \begin{bmatrix} a(0,0) & a(0,1) & a(0,2) & a(0,3) \\ a(1,0) & a(1,1) & a(1,2) & a(1,3) \\ a(2,0) & a(2,1) & a(2,2) & a(2,3) \\ a(3,0) & a(3,1) & a(3,2) & a(3,3) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

二维标准低通序率滤波器的传输函数用矩阵 $[L]$ 表示

$$[L] = \begin{bmatrix} L(0,0) & L(0,1) & L(0,2) & L(0,3) \\ L(1,0) & L(1,1) & L(1,2) & L(1,3) \\ L(2,0) & L(2,1) & L(2,2) & L(2,3) \\ L(3,0) & L(3,1) & L(3,2) & L(3,3) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$[L]$ 的二维 Walsh 变换 $[l]$ 为

$$[l] = \begin{bmatrix} l(0,0) & l(0,1) & l(0,2) & l(0,3) \\ l(1,0) & l(1,1) & l(1,2) & l(1,3) \\ l(2,0) & l(2,1) & l(2,2) & l(2,3) \\ l(3,0) & l(3,1) & l(3,2) & l(3,3) \end{bmatrix} \\ = 2 \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

图 5-2 二维一般数字滤波器

由式(5.3)可知,输出矩阵中第一元素 $b(0,0)$ 为

$$\begin{aligned} b(0,0) &= \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 a(m,n)l(0 \oplus m, 0 \oplus n) \\ &= 4a(0,0) + 2[a(0,1) + a(1,0)] + a(0,3) + a(3,0) \\ &\quad - a(1,2) - a(2,1) \end{aligned}$$

因此 b_{00} 可由式(5.6)的计算模板 $[l]$ 决定。写成 $[l]_{00}$ 。在图 5-2 中由右边的大矩阵中左上角的下标为 b_{00} 的那个 4×4 矩阵表示。这样 $b(0,0)$ 是输入矩阵 $[a]$ 和计算矩阵 $[l]$ 对应元素乘积之和。

输出矩阵中从 $b(0,0)$ 右移一位的元素是 $b(0,1)$, 由式(5.3), 它表示为

$$\begin{aligned} b(0,1) &= \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 a(m,n)l(0 \oplus m, 1 \oplus n) \\ &= 4a(0,1) + 2[a(0,0) + a(1,1)] + a(0,2) \\ &\quad + a(3,1) - a(1,3) - a(2,0) \end{aligned}$$

$b(0,1)$ 可由计算模板矩阵 $[l]_{01}$ 决定

$$[l]_{01} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$[l]_{01}$ 矩阵是由 $[l]_{00}$ 矩阵在水平方向并元移位 $\oplus 1$ 位得到, $[l]_{01}$ 在图 5-2 中的位置是下标 b_{01} 的一个 4×4 矩阵。

用同样方法可得输出矩阵 $[b]$ 中任一元素 $b(x,y)$ 的计算矩阵 $[l]_{xy}$, $[l]_{xy}$ 由 $[l]_{00}$ 矩阵水平并元移位 $\oplus x$ 位和垂直移位 $\oplus y$ 形成。 4×4 二维标准低通序率滤波器的 16 个 $[l]_{xy}$ ($x, y = 0 \sim 3$) 全部画在图 5-2 的大矩阵中。这 16 个矩阵都由同样的系数组成, 其中 $[l]_{00}$ 是 $[l]$ 的二维 Walsh 变换, 而 $[l]_{xy}$ 由 $[l]_{00}$ 并元移位 x 和 y 位后形成, 这 16 个 $[l]_{xy}$ 矩阵与输入矩阵的对应元素乘积之和即得输出矩阵 $[b]$ 中的 16 个元素。因此图 5-2 解剖了一般序率数字滤波器的构造和设计方法。理解了处于输出矩阵中不同位置的元素的计算公式(即矩阵 $[l]_{xy}$), 就很易设计二维重叠序率数字滤波器了。

5.2 二维重叠序率数字滤波器的构造

前已介绍,在二维重叠数字滤波器中,当样点逐点移位通过全部与该样点有关的一般数字滤波器时,则这些一般滤波器的输出之和即为重叠数字滤波器的输出。

下面以 5.1 节中的 4×4 二维标准低通序率数字滤波器为例,来介绍 4×4 二维重叠序率数字滤波器的构造,如图 5-3 所示。

图 5.3 上边是时域的输入数据,它是一个任意大的数据矩阵,图 5.3 中只画出和样点 a_{33} 有关的数据,它是一个 7×7 矩阵。与样点 a_{33} 有关的 4×4 矩阵共有 16 个,这 16 个矩阵全部画在图 5.3 上边的大矩阵中,样点 a_{33} 在这 16 个矩阵中的位置分别是 $x=0 \sim 3, y=0 \sim 3$,正好经历了 4×4 矩阵中的每一个位置。如第一个左上角的矩阵中 a_{33} 在 $x=0, y=0$ 的位置,右下角的最后一个矩阵 a_{33} 的位置在 $x=3, y=3$ 。

这 16 个 4×4 数据分别经过传输函数 $[L]$ 为

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的二维标准低通一般序率数字滤波器,它们的输出可由矩阵 $[C_n]$ 决定,16 个 $[C_n]$ 矩阵全部画在图 5-3 下边的大矩阵中,上下二个大矩阵中的 16 个矩阵是一一相对应的。如第一个在左上角的矩阵样点 a_{33} 处于 $x=0, y=0$ 的位置,即

a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}	a_{05}	a_{06}
a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
a_{50}	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}
a_{60}	a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}

↓

a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}
a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{50}	a_{51}	a_{52}	a_{53}
a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{60}	a_{61}	a_{62}	a_{63}
a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}
a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{50}	a_{51}	a_{52}	a_{53}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}
a_{03}	a_{04}	a_{05}	a_{06}	a_{02}	a_{03}	a_{04}	a_{05}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

↓

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\
 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 \hline
 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\
 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 5 & 18 & 5 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]$$

图 5.3 二维重叠序率数字滤波器

$$\begin{bmatrix}
 a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\
 a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\
 a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\
 a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}
 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

经低通滤波后,输出矩阵中相对应位置的输出 $(b)_{00}$ 由矩阵 $(l)_{00}$ 决定(即式(5.6)),它和图 5-2 和 5-3 中决定一般序率滤波器中 b_{00} 的矩阵相同,所以第一个一般滤波器的输出 b_{00} 为

$$b_{00} = 4a_{33} + 2(a_{34} + a_{43}) + a_{36} - a_{45} - a_{54} + a_{63} \quad (5.9)$$

又如最后一个矩阵中 a_{33} 处于右下角 ($x=3, y=3$) 即

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

对照图 5-2 的一般序率滤波器在 $x=3, y=3$ 的输出 b_{33} 由 $[L]_{33}$ 矩阵决定

$$[L]_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

所以最后一个矩阵在 $x=3, y=3$ 的输出 $(b)_{33}$ 可表示为

$$b_{33} = 4a_{33} + 2(a_{23} + a_{32}) + a_{03} - a_{12} - a_{21} + a_{30} \quad (5.12)$$

全部 16 个一般滤波器在样点所在位置的输出计算矩阵 $[L]_{xy}$ 都相对应的画在图 5-3 下边大矩阵中, 而重叠滤波器的输出是这些输出的总和

$$b = \sum_{x=0}^3 \sum_{y=0}^3 (b)_{xy} \quad (5.13)$$

经整理, 可得一个 7×7 的计算矩阵 $[M]$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 16 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$[M]$ 矩阵的元素 m_{xy} 与输入矩阵的对应元素 a_{xy} 乘积之和即为重叠滤波器的输出, 对照图 5-3, 样点 a_{33} 的输出 b 等于

$$b = \frac{1}{32} [16a_{33} + 5(a_{23} + a_{32} + a_{43} + a_{34}) + a_{03} - a_{12} - a_{21} + a_{30} - a_{41}]$$

$$-a_{52}+a_{63}-a_{54}-a_{45}+a_{36}-a_{25}-a_{14}] \quad (5.15)$$

其它样点的输出只要将模板 $[M]$ 的中心对准该点后即可计算得到。这些输出就是二维数据经传输函数为 $[L]$ 的二维重叠数字滤波器后的滤波输出。

所以二维重叠滤波器最后由一个计算模板表示,一个传输函数为 $N \times N$ 维的二维重叠滤波器的计算模板 $[M]$ 为 $(2N-1) \times (2N-1)$ 。二维重叠数字滤波器的设计问题是给定 $[L]$,求 $[M]$ 。可以用图 5-3 的方法由 $[L]$ 来构成 $[M]$,但这太麻烦了。下面介绍 $[M]$ 的设计公式。

5.3 二维序率重叠滤波器的设计

二维序率重叠数字滤波器的设计问题归结为给定 $N \times N$ 传输函数的矩阵 $[L]$,求计算模板 $[M]$ 。 $[M]$ 是一个 $(2N-1) \times (2N-1)$ 矩阵。

由图 5-3 可见, $[M]$ 矩阵由 16 个 $[L]_{xy}$ 矩阵叠加组成,而 $[L]_{xy}$ 矩阵由 $[L]$ 的二维 Walsh 变换 $[L]_{00}$ 矩阵经二维并元移位 x 和 y 后形成,所以 $[M]$ 矩阵是 $[L]$ 矩阵的并元移位的叠加和。在第一章中已详细讨论过并元移位的叠加性质,并引入了叠加矩阵 $[Q]$ 及二维并元移位重叠式(1.41),所以 $[M]$ 可表如下:

$$\begin{aligned} [M] &= [Q][L][Q]^T \\ &= [Q][W][L][W][Q]^T \end{aligned} \quad (5.16)$$

例如,对上述 4×4 二维标准低通序率滤波器的 $[M_4]$ 可表为

$$[M_4] = [Q_4][W_4][L_4][W_4][Q_4]^T \quad (5.17)$$

式中, $[L_4]$ 如式(5.5)所示; $[W_4]$ 为 4 阶 Walsh 矩阵; $[Q_4]$ 为 4 阶重叠矩阵,即

$$[Q_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

将 $[Q_4]$ 、 $[L_4]$ 和 $[W_4]$ 代入式(5.17),得

$$\begin{aligned} [M_4] &= [Q_4] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} [Q_4]^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \times 2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 16 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19) \end{aligned}$$

利用式(5.17)可以设计任意传输函数的二维重叠数字滤波器。如二维高通序率滤波器的传输函数 $[L]_H$ 可表示为

$$[L]_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

代入式(5.17),即得二维高通重叠序率数字滤波器的 $[M]_H$,

$$[M]_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 16 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

又如二维带通序率滤波器的传输函数 $[L]_B$ 为

$$[L]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

代入式(5.17),得二维带通重叠序率数字滤波器的 $[M]_B$ 为

$$[M]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

再如,边缘鉴出器的传输函数为

$$[L]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

用式(5.17)求得二维重叠边缘鉴出模板为

$$[M]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

以上均以 4×4 二维重叠序率滤波器为例,对于 $N \times N$ ($N=2^r$) 二维重叠滤波器的计算模板,可以用式(5.16)以同样方法求得。第四章中的亚 Nyquist 取样再生用的 $[M_8]$ (式(4.26))、 $[M_{16}]$ (式(4.27))以及 $[M_N]$ (式(4.28))都可用此公式设计而得。

5.4 计算模板的二维谱分析^[11]

根据式(5.16)可由给定二维谱 $[L]$,求计算模板 $[M]$ 。反过来还可由计算模板 $[M]$,求二维序谱 $[L]$

$$[L] = \frac{1}{N^2} [W] [Q^*] [M] [Q^*]^T [W] \quad (5.26)$$

其中 $[Q^*]$ 是矩阵 $[Q]$ 的广义逆。在第一章中,式(1.50)、(1.51)、(1.52)和图 1.6 已示出了 $[Q_2^*]$ 、 $[Q_4^*]$ 、 $[Q_8^*]$ 和 $[Q_{16}^*]$ 。

例如 4×4 二维标准低通序率滤波器的计算模板 $[M_4]$ 如(5.19)式所示,则其相对应的 4×4 传输函数 $[L_4]$ 如下:

$$[L_4] = \frac{1}{16} [W_4] [Q_4^*] [M_4] [Q_4^*]^T [W_4]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} [W_4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 16 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} [W_4] \\
&= \frac{1}{4} [W_4] \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [W_4] \\
&= 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

所得到的 $[L_4]$ 正是一个二维标准低通序率滤波器的传输函数。又如 4.3 节介绍的从 M_∞ 推得的 $[M_4]'$ (式(4.32)) 所相应的 4×4 传输函数矩阵 $[L_4]'$ 可表为

$$\begin{aligned}
[L_4]' &= [W_4] [Q_4^*] [M_4] [Q_4^*]^T [W_4] \\
&= [W_4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 & -1/12 & 0 & 0 \\ 0 & -1/12 & 0 & 1/3 & 0 & -1/12 & 0 \\ 1/12 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/12 \\ 0 & -1/12 & 0 & 1/3 & 0 & -1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 & -1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} [W_4] \\
& = \frac{1}{6} [W_4] \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [W_4] \\
& = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & 6 & 7 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)
\end{aligned}$$

式(5.28)相当于一个二维低通滤波器的谱特性,这和式(5.27)的二维标准低通率滤波器的二维谱特性有所不同。因此,从 M_∞ 推得的 $[M_4]'$ 可理解为式(5.28) $[L_4]'$ 的 4×4 二维谱特性。

为了比较,再分析 $N=4$ 时用傅立叶方法得到的二维标准低通频率滤波器的 7×7 模板 $[N_4]$ 的二维序谱特性(见第二部分第十章式(10.16))。

$$[N_4] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 18 & 64 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

求 $[N_4]$ 对应的 Walsh 方法中的二维序谱响应 $[L_4^*]$

$$[L_4^*] = \frac{1}{16} [W_4] [Q_4^*] [M_4] [Q_4^*]^T [W_4]$$

$$= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 18 & 64 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=6 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

式(5.30)显示 $[L_2]$ 仍是一个二维低通序谱特性。从式(5.27)、(5.28)与式(5.30)可见,在数字图像处理中反映二维低通的计算模板,都能求出其相应于二维重叠滤波器的传输函数矩阵,而这些传输函数的数值有所不同,但都反映为一个二维低通的序谱特性,因此用式(5.26)可以分析计算模板的二维序谱特性。

在数字图像处理的文献和书中,常用许多 3×3 模板,它们可以用于平滑、边缘鉴出、增强等。从二维重叠滤波器的角度看,这些 3×3 模板相当于一个 2×2 的传输函数矩阵的二维重叠滤波器。在第六章中,将详细讨论这些 3×3 模板所相对应的 2×2 序谱。

所以二维重叠数字滤波器将模板和频谱联系了起来,它给常用的模板以二维谱特性的物理意义,相反的,也可以按需要的二维谱响应来设计模板。因此在数字图像处理的各个领域是一种有用的分析方法和实用工具。

第六章 二维抽取和内插

6.1 二维抽取和内插的一般公式^[13,15]

上面详细介绍了 $1/2$ 抽取下内插模板的设计和谱分析。本节将这种设计方法加以小结,给出一组设计公式,它将 $1/k$ 抽取结构、图像频谱结构、内插滤波器传输函数和内插模板联系在一起。用这种方法,可以设计任意抽取下的内插模板,并有明确的物理意义。本节还以 $1/4$ 和 $1/8$ 抽取为例,说明这些设计公式的应用。

$1/k$ 抽取下内插模板的设计步骤如下:

①给出原始图像数据矩阵 a 及其二维序谱 A , a 与 A 是一对 Walsh 变换(也可以是其它离散变换,本节以 Walsh 变换为例)。

$$A = \frac{1}{N^2} W \cdot a \cdot W \quad (6.1)$$

$$a = W \cdot A \cdot W \quad (6.2)$$

式中 a 为 $N \times N$ 矩阵; W 为 N 阶离散 Walsh 函数矩阵。符号“ $\cdot$ ”表示矩阵相乘。

②写出 $1/k$ 抽取单位矩阵 e 。在 e 矩阵中,只有 N^2/k 个元素为 1,其余为零。

求出 e 阵的调制类矩阵 E , E 阵中有 k 个元素为 1,其余为零。 e 与 E 是一对 Walsh 变换。

$$E = \frac{1}{N^2} W \cdot e \cdot W \quad (6.3)$$

$$e = W \cdot E \cdot W \quad (6.4)$$

③写出 $1/k$ 抽取图像数据矩阵 h

$$h = a \odot e \quad (6.5)$$

符号 $\odot$ 表示二个矩阵的对应元素相乘,不是矩阵相乘。 h 阵中只有

N^2/k 个元素的图像数据保留,其余都置零。

h 的二维谱 H 有

$$H = \frac{1}{N^2} W \cdot h \cdot W \quad (6.6)$$

$$h = W \cdot H \cdot W \quad (6.7)$$

H 阵中由 k 个 A 谱组成,这 k 个 A 谱应没有互相重叠的部分,不然会产生混叠误差。由并元卷积定理,在时域中 $h = a \odot e$,则在序率域中

$$H = A \circledast E \quad (6.8)$$

符号 $\circledast$ 表示并元卷积。

④设计出从 H 谱中滤出一个 A 谱的滤波器的传输函数 L , L 阵应符合下条件:

$$A = L \odot H \quad (6.9)$$

⑤ L 的二维逆 Walsh 变换即是非重叠内插模板 l

$$L = \frac{1}{N^2} W \cdot l \cdot W \quad (6.10)$$

$$l = W \cdot L \cdot W \quad (6.11)$$

内插重构图像 a 可由 l 和 h 作并元卷积得到

$$A = l \circledast h \quad (6.12)$$

l 必满足两个条件:

首先,必须保证二维恒定成分的正确恢复,即

$$l \circledast e = D \quad (6.13)$$

D 是一个二维恒值矩阵,它的全部元素值均为 1。

其次,当模板 l 的左上角元素放在 e 阵的取样值处,输出应为 1,即

$$l \odot e = d \quad (6.14)$$

在 d 阵中,左上角元素为 1,其余均为零。从式(6.3)和式(6.4),可得

$$L \odot E = d \quad (6.15)$$

$$L \circledast E = D \quad (6.16)$$

因此, 序率域响应 L 必满足式(6.9)、(6.15)以及(6.16)。

③求出重叠内插模板 m

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{N^2} Q \cdot l \cdot Q^T \\ &= \frac{1}{N^2} Q \cdot W \cdot L \cdot W \cdot Q^T \end{aligned} \quad (6.18)$$

式中 Q 为 N 阶并元移位叠加矩阵。模板 m 和 h 作一般卷积, 即内插出原图像数据。 m 阵必满足下列条件

$$m \circledast e = D \quad (6.19)$$

以保证直流分量的正确重构。

从以上讨论可见, 共有九个矩阵: 原始图像矩阵 a ; 原始图像序谱矩阵 A ; $1/k$ 抽取单位矩阵 e ; 调制点分布矩阵 E ; $1/k$ 抽取图像矩阵 h ; $1/k$ 抽取图像序谱矩阵 H ; 并元卷积模板矩阵 l ; 滤波器序率域响应矩阵 L ; 一般卷积模板矩阵 m 。它们之间有 4 对 Walsh 变换: a 与 A , e 与 E , h 与 H , l 与 L , 并有下列数学关系

$$\begin{aligned} h &= e \odot a & H &= E \circledast A \\ l \odot e &= d & L \circledast E &= D \\ l \circledast e &= D & m \circledast e &= D \\ L \odot E &= d & a &= l \circledast h \\ f &= m \circledast h & A &= L \odot H \end{aligned}$$

6.2 1/4 抽取和内插

下面以 1/4 抽取为例说明以上设计步骤。 $k=4$ 时的单位抽取矩阵 e 可选为

$$e_{1/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

求 $e_{1/4}$ 的二维 Walsh 变换, 可得调制点矩阵

$$E_{1/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

为满足条件 $E \otimes L = D$, 传输函数 L 应为

$$L_{1/4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

由 L 的二维 Walsh 变换得一般内插模板 $l_{1/4}$ 为

$$l_{1/4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$l_{1/4}$ 符合式 (6.13)。

利用式 (6.18) 还可以得 1/4 抽取时的重叠滤波内插模板

$$m_{1/4} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$m_{1/4}$ 符合式 (6.19)。

1/4 抽取还可以选另一种结构 $e'_{1/4}$

$$e'_{1/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

其对应的调制点矩阵 $E'_{1/4}$

$$E'_{1/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

为满足式(6.16),传输函数 $L'_{1/4}$ 应选为

$$L'_{1/4} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

代入式(6.18),可得内插模板 $m'_{1/4}$

$$m'_{1/4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/32 & 1/16 & 1/32 & 0 & 0 \\ -1/32 & -1/16 & -1/32 & 0 & -1/32 & -1/16 & -1/32 \\ 0 & 0 & 5/32 & 5/16 & 5/32 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8 & 1 & 5/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 5/32 & 5/16 & 5/32 & 0 & 0 \\ -1/32 & -1/16 & -1/32 & 0 & -1/32 & -1/16 & -1/32 \\ 0 & 0 & 1/32 & 1/16 & 1/32 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$m'_{1/4}$ 符合式(6.19)。

6.3 1/8 抽取与内插

1/8 抽取可以有多种结构,当 $e_{1/8}$ 为

$$e_{1/8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

它的调制点矩阵 $E_{1/8}$ 为

$$E_{1/8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

为满足式(6.16), $L_{1/8}$ 选为

$$L_{1/8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

将 $L_{1/8}$ 代入式(6.18), 即得 $1/8$ 内插模板 $m_{1/8}$

$$m_{1/8} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 & 3/8 & 1/2 & 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 & 1/2 & 3/8 & 1/4 & 1/8 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$m_{1/8}$ 满足条件 $m_{1/8} * e_{1/8} = D$ 。

$1/8$ 抽取还可以有另一种结构 $e'_{1/8}$

$$e'_{1/8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

这时的调制点分布 $E'_{1/8}$ 为

$$E'_{1/8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

为满足式(6.16), 传输函数 $L'_{1/8}$ 为

$$L'_{1/8} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

将 $L'_{1/8}$ 代入式(6.18), 得内插模板 $m'_{1/8}$:

$$m'_{1/8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/16 & 1/8 & 1/16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/8 & 2/8 & 5/8 & 2/8 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8 & 1 & 5/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/8 & 3/8 & 5/8 & 3/8 & 1/8 & 1/16 \\ 0 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 & 1/8 & 1/16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$m'_{1/8}$ 也符合条件 $m'_{1/8} * e'_{1/8} = D$ 。

从以上四个例子中,可见用本章所述的计设计方法可以得到需要的内插公式。这些内插公式在有的文献中也介绍过,但大多数是直接引入或经验公式,没有系统的设计方法,也没有将它们与滤波器的传输函数和谱分析联系起来。利用本章的设计方法,不只可以设计出合理的内插模板,并将它们与滤波器联系起来,给予明确的物理意义。本章所述的方法可以推广到立体数字信息的压缩和重构^[14]。

第七章 二维重叠序率滤波器的应用^[16]

二维重叠数字滤波器可以用于任一需要二维滤波的地方,如边缘鉴出、杂波消除、高频增强等。只要根据一定的谱要求即可设计相应的重叠滤波器,所以它的应用是一个更广泛的课题。这儿只列举三个应用的例子。

7.1 用一个帧存储器储存二帧数字图像

利用图像二维谱集中在二维低频特点,一个按二维 Nyquist 取样定理所得的数字图像,在时域中就可以减少一半,在使用时被丢掉的一半可以用一个二维重叠低通滤波器再生。因此,原来储存一幅数字图像的存储器现在可以储存二幅数字图像;原来传输一路数字图像的信道可以传送二幅数字图像。使用时可以用二组重叠滤波器来分解及再生。这种压缩及再生的方法十分简单,在任一数字计算机中都能立即实现。

这种数字图像的合二而一,又一分为二的方法有二种,即频分法和时分法,这二种方法的性能有所不同。

(1) 频分法

若有二个数字图像 $[a]$ 及 $[b]$,分别用 4×4 矩阵表示:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

一般情况下,图像的频谱集中在二维低频范围^⑥,经二维 Walsh 变换后的二维序率谱中,它们集中在变换矩阵的左上角,即图像 $[a]$ 及 $[b]$ 的序谱 $[A]$ 及 $[B]$ 可表为

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & 0 \\ A_{10} & A_{11} & 0 & 0 \\ A_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & 0 \\ B_{10} & B_{11} & 0 & 0 \\ B_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

若将 $[B]$ 调到一个二维高序率分量 $[W_{33}]$:

$$[W_{33}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

则得 $[b']$ 信号及其二维序谱 $[B']$ 为

$$[b'] = \begin{bmatrix} b_{00} & -b_{01} & b_{02} & -b_{03} \\ -b_{10} & b_{11} & -b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & -b_{21} & b_{22} & -b_{23} \\ -b_{30} & b_{31} & -b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$[B'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{20} \\ 0 & 0 & B_{11} & B_{10} \\ 0 & B_{02} & B_{01} & B_{00} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

将 $[a]$ 及 $[b']$ 相加合成一幅数字图像 $[d]$ 及其二维谱 $[D]$ 为

$$[d] = \begin{bmatrix} a_{00} + b_{00} & a_{01} - b_{01} & a_{02} + b_{02} & a_{03} - b_{03} \\ a_{10} - b_{10} & a_{11} + b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{20} + b_{20} & a_{21} - b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{30} - b_{30} & a_{31} + b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & 0 \\ A_{10} & A_{11} & 0 & B_{20} \\ A_{20} & 0 & B_{11} & B_{10} \\ 0 & B_{02} & B_{01} & B_{00} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

比较式(7.9)的 $[D]$ 及式(6.3)的 $[A]$ 可见,其二维低频部分的序谱是相同的,所以可以由一个二维低通滤波器从合成信号 $[d]$ 中再生出信号 $[a]$ 来。

比较式(7.9)的 $[D]$ 及式(2.7)的 $[B']$,它们的高频成分是相同的,所以可以用一个二维高通滤波器从合成信号 $[a]$ 再生信号 $[b']$,从而再生出另一个原始图像信号 $[b]$ 来。

这样二幅数字图像 $[a]$ 及 $[b]$ 可以合成一幅图像,然后用频分法将其分开。

二维重叠序率滤波器可以用一个 7×7 计算模板表示,一个二维低通序率滤波器的计算模板 $[L]$ 是

$$[M]_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 & -1/12 & 0 & 0 \\ 0 & -1/12 & 0 & 1/3 & 0 & -1/12 & 0 \\ 1/12 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & -1/12 \\ 0 & -1/12 & 0 & 1/3 & 0 & -1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 & -1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

而二维高通序率滤波器的计算模板 $[H]$ 是

$$[M]_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 0 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 & -1/3 & 0 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 0 & -1/3 & 1 & -1/3 & 0 & -1/12 \\ 0 & 1/12 & 0 & -1/3 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 0 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

(2)时分法

第二种合成和分解二幅数字图像的方法是时分法。图像 $[a]$ 及 $[b]$ 是按 Nyquist 取样定理得到的数字图像,各用 4×4 矩阵表示。图像 $[a]$ 交叉地丢掉一半,图像 $[b]$ 交叉地丢掉另一半,然后 $[a]$ 及 $[b]$ 合成一幅图像储存或传输。在接收端先将 $[a]$ 及 $[b]$ 用时分法分开,再分别经过二个二维低通重叠滤波器再生。二维低通重叠滤波器的计算模板即式(4.33)的 $[M']$ 。

(3) 二种方法误差的讨论

如前所述,时分法一半数据无误差,一半有误差;频分法每个数据都有误差。但这二种方法的均方误差是同一数量级的。

从干扰频谱的性质看,频分法是用高通及低通滤波器分开的,所以在 $[a]$ 图像中的误差是 $[b]$ 图像的二维高频成分引起的, $[b]$ 图像中的误差是 $[a]$ 图像的高频成分引起的。而时分法是先将 $[a]$ 及 $[b]$ 图像分开,再分别用二维低通重叠滤波器再生,所以其误差分别由其图像本身的高频成分引起。即 $[a]$ 图像的误差是 $[a]$ 图像的二维高频成分, $[b]$ 图像的误差是 $[b]$ 的图像的二维高频成分。

所以本文介绍的二种合成和分解图像的方法,其误差的均方根值差不多,但干扰频谱性质不同,使用时可以根据实际情况选用。

7.2 二倍副载频取样的 PAL 全电视信号的再生⁽¹²⁾

在第二章中分析了 $4f_m 45^\circ$ 相延取样下 PAL 全电视信号的二维序谱 $[T, \omega]$ (式(2.29))。

将 $4f_m$ 取样得的二维数据,交叉地丢掉一半(即将这一半置零) f_m 取样下的 PAL 全电视信号的二维序谱 $[T, \omega]^*$

$$[T_r]^* = \begin{bmatrix} Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{V}{\sqrt{2}} & \frac{U}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{U}{\sqrt{2}} & \frac{V}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

若用二维标准低通率滤波器 $[L]$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从 $[T_r]^*$ 取出其低频部分,可得 $[t_r]^*$

$$[t_r]^* = \begin{bmatrix} Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{V}{\sqrt{2}} & \frac{U}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{U}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$[t_r]^*$ 中包括 Y 及 U, V ,而且成正确比例,因此从 $[t_r]^*$ 中可以再生出正确的彩色图像来,但这时取样频率只有 $2f_{sc}$,所以从 $2f_{sc}$ 取样的PAL全电视信号中可以再生出类同 $4f_{sc}$ 取样的彩色图像。

类同时分法所示的将二幅图像合成一幅的方法,也可以将2幅 $2f_{sc}$ 取样的PAL图像合成一幅,这样一个帧储存器中就可以储存二幅PAL图像。

7.3 3×3 模板和 2×2 滤波

在数字图像处理中,常用 3×3 、 5×5 以及 9×9 等各种计算模

板,如文献〔7〕中介绍了三种 3×3 边缘鉴出模板和三种 3×3 Laplacian 模板。这些模板都有各自的设计方法,相当于一种二维 FIR 数字滤波器。

从前述可知,一个 $N \times N$ 的二维传输函数矩阵,其二维重叠滤波器相当于一个 $(2N-1) \times (2N-1)$ 的计算模板。所以一个 2×2 的传输函数矩阵的二维重叠滤波器的计算模板是 3×3 ,这样就将 3×3 模板和 2×2 序谱联系了起来。如前述,一个二维低通序率滤波器在 2×2 矩阵时,其传输函数矩阵 $[L_2]$ 为

$$[L_2] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

其相应的重叠滤波器计算模板为

$$[M_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

同样,一个二维高通序率滤波器的传输函数矩阵 $[H_2]$ 为

$$[H_2] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

其相应的重叠滤波器计算模板为

$$[M_2'] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

一般,一个频谱为 2×2 的矩阵 $[L]$ 的重叠滤波器输出可用一个 3×3 模板 $[M]$ 表示, $[M]$ 与 $[L]$ 的关系如下:

$$[M] = [Q_2][W_2][L][W_2][Q_2]^T \quad (7.18)$$

式中 $[W_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$[Q_2] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

用式(7.18)可以设计任意 2×2 矩阵的重叠滤波器,现将常用的列在表 7-1 中。其中包括 Pratt 一书中引入的三种边缘检出模板和三种 Laplacian 模板,它们都相当一种二维高通滤波器。

式(7.18)是给定二维谱 $[L]$,求计算模板 $[M]$,同样,对已知的 3×3 模板 $[M]$,可以求出它的二维谱 $[L]$:

$$[L] = \frac{1}{4} [W] [Q_2^*] [M] [Q_2^*]^T [W] \quad (7.19)$$

式中 $[Q_2^*]$ 是 $[Q]$ 矩阵的广义逆(式(1.47))

$$[Q_2^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式(7.19)中的二阶 Walsh 矩阵 $[W_2]$ 与 $[Q_2^*]$ 是已知的,可以乘在一起

$$\begin{aligned} [W_2] [Q_2^*] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.20)$$

式(7.19)可以表为

$$[L] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} [M] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

用式(7.21)可以对任意给定的 3×3 模板求出它所对应的二维谱响应 $[L]$,如边缘鉴出模板 2 为

$$[M] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

代入式(7.21),得其对应的传输函数为

$$\begin{aligned}
 [L] &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

所以二维重叠滤波器给 3×3 模板以明确的二维谱特性的物理意义。图 7-1(a) 所示为用一个 3×3 模板 (M) 对一个数字图像信号逐点作处理时的情况。从二维重叠滤波器的角度看, 这种处理相当对这一个数字图像逐点逐行作二维谱为 $[L]$ 的 2×2 矩阵的正反变换滤波, 如图 7-1(b) 所示。由于这种有限滤波是逐点逐行重叠进行的, 边缘效应自然消失了, 显著地改善了图像质量。

需要注意的是: 由于所研究的二维重叠滤波器是各向同性的, 所以式 (7.19) 只适用于对中心对称的 3×3 模板 (M)。

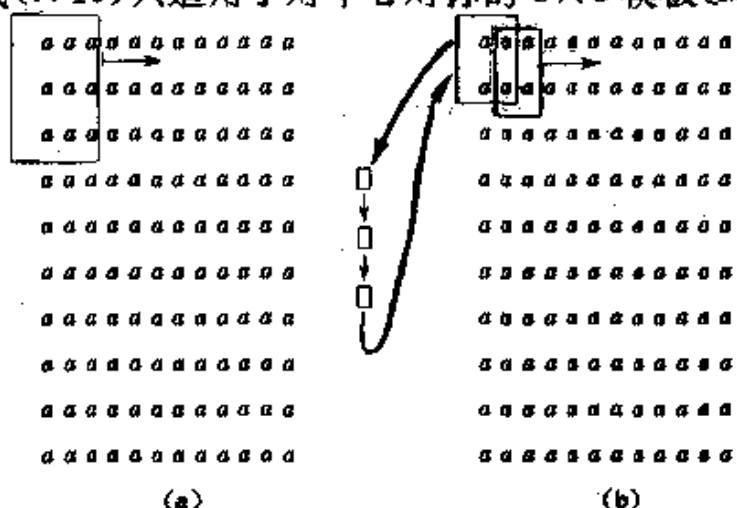


图 7-1 3×3 模板和 2×2 滤波

(a) 数字图像的 3×3 模板处理;

(b) 与 (a) 相当的 2×2 重叠数字滤波。

表 7-3

2×2 滤波器传输函数	3×3 模板	说 明
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	L-L 模板
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	H-L 模板
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$	L-H 模板
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$	H-H 模板 (Laplacian 模板 3)
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	L-A 模板
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	H-A 模板
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	A-L 模板
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	A-H 模板
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	A-A 模板

续表

2×2 滤波器传输函数	3×3 模板	说 明
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	<i>L-L</i> 和 <i>H-H</i> 模板
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	<i>L-H</i> 和 <i>H-L</i> 模板
$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	标准低通模板
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	Laplacian 模板 1
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	Laplacian 模板 2
$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	边缘模板 1
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$	边缘模板 3
$\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	边缘模板 2
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	

第二部分 傅立叶方法

在第一部分中介绍了基于 Walsh 变换的二维重叠序率数字滤波器。也可以用其它类型的变换,如基于傅立叶变换的二维重叠频率数字滤波器。二维重叠数字滤波器(频率两字以下均略去)可以克服有限傅立叶变换由于边缘不连续性引起的 Gibbs 效应和渗漏现象。

一个 $N \times N$ 二维重叠滤波器可以用 $(2N-1) \times (2N-1)$ 计算模板表示,和 Walsh 变换一样,这个 N 可以趋于无穷大。本部分将给出二维标准低通重叠滤波器在 $N \rightarrow \infty$ 时的计算模板。用傅立叶方法当 $N \rightarrow \infty$ 时,重叠滤波器的计算模板和一般数字滤波器的模板完全相同,这和 Walsh 方法是不一样的。原因是在傅立叶方法中重叠过程只是各种频率成分加权的系数不同,它不产生新的频率成分,而在 Walsh 方法中,重叠过程会产生另外的序率成分。

所以重叠滤波器在傅立叶方法中只在有限变换中才有价值,而在 Walsh 方法中就在 $N \rightarrow \infty$ 也必须重叠,所以是必不可少的。特别是它可利用 Walsh 函数中群与子群的性质,从无穷大模板中截取有限一部分来进行滤波,使有限的滤波作用有部分无限滤波的效果。而这个性质在傅立叶变换中即没有,因为傅立叶函数只形成一个整体群,而没有子群的性质。

所以通过傅立叶方法和 Walsh 方法的对比讨论,可以加深对这两个变换相同点及差别的深入认识。

第八章 傅立叶图形及其性质

在一维傅立叶级数分析中,任何曲线可图示为各种频率的正弦波之和,其物理意义十分清楚。本章提出一种二维的傅立叶图形,任何二维图形也可表示为各种傅立叶图形之和。使二维图形分析的物理意义也十分清楚。

二维傅立叶变换的许多性质,如位移性质、调制性质、相乘性质、积分性质以及旋转性质的物理意义都可以通过傅立叶图形更深入地理解。从傅立叶图形还可以看出二维傅立叶变换的一些特殊性质。

本章最后以一个简单例子说明傅立叶图形在二维分析中的应用,绘出了许多互成傅立叶变换对的图形。

8.1 傅立叶图形及其二维频谱

N 阶离散傅立叶函数可用矩阵 $[F_N]$ 表示⁽¹⁷⁾,如 $N=5$ 的矩阵 $[F_5]$ 可表为

$$[F_5] = \begin{bmatrix} W^4 & W^2 & W^0 & W^3 & W^1 \\ W^2 & W^1 & W^0 & W^4 & W^3 \\ W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^3 & W^4 & W^0 & W^1 & W^2 \\ W^1 & W^3 & W^0 & W^2 & W^4 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

式中

$$W = \exp \left\{ -\frac{2\pi j}{5} \right\}.$$

$[F_5]^*$ 是矩阵 $[F_5]$ 的共轭矩阵。为了简单起见,可将 $[F_5]$ 中的 W^n 用数字 n 来代表 ($n=0,1,2,3,4$), 则 $[F_5]$ 与 $[F_5^*]$ 可表为

$$[F_5] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

$$[F_5^*] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

对任一个二维取样图形 $[X_N]$ ($[X_N]$ 为 $N \times N$ 元素的矩阵), 其二维离散傅立叶变换定义为

$$[T_N] = \frac{1}{N^2} [F_N] [X_N] [F_N] \quad (8.4)$$

$[T_N]$ 就是 $[X_N]$ 的二维频谱。逆二维傅立叶变换定义为

$$[X_N] = [F_N^*] [T_N] [F_N] \quad (8.5)$$

用离散傅立叶函数可以构成傅立叶图形, 如图 8-1(a)所示。

图中傅立叶图形的构成如下: 将式(8.3) $[F_5^*]$ 中的每一行作为水平方向的五条边

(13024), (34012), (00000), (21043), (42031)

$[F_5^*]$ 中的每一列作为垂直方向的五条边

(13024)', (34012)', (00000)', (21043)', (42031)'

矩阵的行与列的 W^* 相乘所得数值组成的新矩阵即为傅立叶图形。每一个傅立叶图形用 $f_m(x, y)$ 表示($m, n=0, \pm 1, \pm 2$)。这里 x 与 y 分别为水平与垂直的空间坐标变量, 其坐标原点在矩阵中心。 m 表示 x 轴方向的空间频率, n 表示 y 轴方向的空间频率。如 $f_{11}(x, y)$ 就是以 $[F_5^*]$ 矩阵中的第+1行(21043)及+1列(34012)分别作为水平边与垂直边相乘而得的图形, 即

	13024	34012	00000	21043	42031						
1	24130	40123	11111	32104	03142	10000	01000	00100	00010	00001	
3	41302	12340	33333	04321	20314	00000	00000	00000	00000	00000	
0	13024	34012	00000	21043	42031	00000	00000	00000	00000	00000	
2	30241	01234	22222	43210	14203	00000	00000	00000	00000	00000	
4	02413	23401	44444	10432	31420	00000	00000	00000	00000	00000	
3	41302	12340	33333	04321	20314	00000	00000	00000	00000	00000	
4	02413	23401	44444	10432	31420	10000	01000	00100	00010	00001	
0	13024	34012	00000	21043	42031	00000	00000	00000	00000	00000	
1	24130	40123	11111	32104	03142	00000	00000	00000	00000	00000	
2	30241	01234	22222	43210	14203	00000	00000	00000	00000	00000	
0	13024	34012	00000	21043	42031	00000	00000	00000	00000	00000	
0	13024	34012	00000	21043	42031	00000	00000	00000	00000	00000	
0	13024	34012	00000	21043	42031	10000	01000	00100	00010	00001	
0	13024	34012	00000	21043	42031	00000	00000	00000	00000	00000	
0	13024	34012	0000	21043	42031	00000	00000	00000	00000	00000	
2	30241	01234	22222	43210	14203	00000	00000	00000	00000	00000	
1	24130	40123	11111	32104	03142	00000	00000	00000	00000	00000	
0	13024	34012	00000	21043	42031	00000	00000	00000	00000	00000	
4	02413	23401	44444	10432	31420	10000	01000	00100	00010	00001	
3	41302	12340	33333	04321	20314	00000	00000	00000	00000	00000	
4	02413	23401	44444	10432	31420	00000	00000	00000	00000	00000	
2	30241	01234	22222	43210	14203	00000	00000	00000	00000	00000	
0	13024	34012	00000	21013	42031	00000	00000	00000	00000	00000	
3	41302	12340	33333	04321	20314	00000	00000	00000	00000	00000	
1	24130	40123	11111	32104	03142	10000	01000	00100	00010	00001	
(a)	f_m					(b)	F_m				

图 8-1 傅立叶图形及其二维频谱

$$\begin{matrix} & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ 1 & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

每一个傅立叶图形都有它的二维频谱,可用二维离散傅立叶变换求得,如 $f_{11}(x,y)$ 的二维频谱 $F_{11}(u,v)$ 为

$$\begin{aligned} F_{11}(u,v) &= \frac{1}{5^2} [F_5] (f_{11}(x,y)) [F_5] \\ &= \frac{1}{5^2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即 $F_{11}(u,v)$ 是一个矩阵,在 $u=1, v=1$ 处有值为 1,其余各值均为零。这里 u, v 为二维频谱的二个坐标, $u, v=0, \pm 1, \pm 2$, 其坐标原点也在矩阵中心。

图 8-1(a)的每一种傅立叶图形的二维频谱均对应画在 8-1(b)中,每一个傅立叶图形 $f_{mn}(x,y)$ 的二维频谱为 $F_{mn}(u,v)$,即只有在 $u=m, v=n$ 处有 1 值,其余均为零。

以上只以 $N=5$ 为例画出其傅立叶图形及二维频谱。下面写出其普遍公式。

式(8.1)矩阵 $[F_5]$ 中的每一个元素 F_{xy} (这里 x, y 表示该元素在矩阵中的坐标)可表为

$$[F_N] = [F_{xy}] = [W^{xy}] \quad (8.6)$$

$$[F_N^*] = [F_{xy}^*] = [W^{xy}]^* \quad (8.7)$$

则傅立叶图形 $f_m(x, y)$ 可表为

$$[f_m(x, y)] = [F_m^* F_{xy}^*] = [W^{m+xy}]^* \quad (8.8)$$

式(8.8)是傅立叶图形的一般表示式,傅立叶图形是一个矩阵,其 x, y 坐标处矩阵元素的值为 $[W^{m+xy}]^*$ 。

$f_{11}(x, y)$ 的二维频谱为

$$F_{11}(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{当 } u \neq m, v \neq n \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } u = m, v = n \text{ 时} \end{cases} \quad (8.9)$$

式(8.9)就是傅立叶图形 $f_{11}(x, y)$ 的二维频谱 $F_{11}(u, v)$ 的解析表示式。

8.2 成傅立叶变换对的图形

利用图 8-1 的傅立叶图形及其二维频谱,可以找出许多成傅立叶变换对的图形。例如横隙缝可表为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

式(8.10)右边的五个图形的傅立叶变换可以从图 8-1 中找到,其和为

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 13024 \\ 13024 \\ 13024 \\ 13024 \\ 13024 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} 34012 \\ 34012 \\ 34012 \\ 34012 \\ 34012 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} 00000 \\ 00000 \\ 00000 \\ 00000 \\ 00000 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} 21043 \\ 21043 \\ 21043 \\ 21043 \\ 21043 \end{bmatrix}^* \\
& + \begin{bmatrix} 42031 \\ 42031 \\ 42031 \\ 42031 \\ 42031 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 00+00 \\ 00+00 \\ 00+00 \\ 00+00 \\ 00+00 \end{bmatrix} \times 5 \quad (8.11)
\end{aligned}$$

注意式(8.11)中左边数字 n 代表 W^n , * 代表共轭, 所以式(8.10)与式(8.11)成傅立叶变换对, 用 $\leftrightarrow$ 表示:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

在式(8.11)中, 利用以下关系式

$$W^0 + W^1 + W^2 + W^3 + W^4 = 0$$

同样可以找出互成傅立叶变换对的图形

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

即左斜线与右斜线互成傅立叶变换对。用同样的方法可以找出许多互成傅立叶变换对的图形, 现列于图 8-2 中。

$$\begin{aligned}
(8) \quad & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W^3 & W^4 & W^0 & W^1 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & W^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
(9) \quad & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W^2 & W^1 & W^0 & W^4 & W^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & W^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \end{bmatrix} \\
(10) \quad & \begin{bmatrix} 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
(11) \quad & \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & + & 2 & + & + \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & + & 2 & + & + \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
(12) \quad & \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix} \\
(13) \quad & \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix} \\
(14) \quad & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

图 8-2 互成傅立叶变换对的图形

8.3 二维傅立叶变换的性质

二维傅立叶变换有许多重要的性质,可以用傅立叶基本图形与互成傅立叶变换对的图形来表示这些性质,从而具体地理解这些性质的物理意义。这里用 $f(x,y)$ 及 $g(x,y)$ 表示二维图形,用 $F(u,v)$ 及 $G(u,v)$ 表示其二维频谱,它们的傅立叶变换关系用 $f(x,y) \rightarrow F(u,v)$ 及 $g(x,y) \rightarrow G(u,v)$ 表示。

为了简单起见,以 5×5 矩阵为例来讨论二维傅立叶变换的性质。这里空间域坐标 (x,y) 与频率域坐标 (u,v) 的坐标原点都在矩阵中心, (x,y,u,v) 为 $0, \pm 1, \pm 2$, 如图 8-3 所示。

$y=2$	*	*	*	*	*	$v=2$	*	*	*	*	*
$y=1$	*	*	*	*	*	$v=1$	*	*	*	*	*
$y=0$	*	*	*	*	*	$v=0$	*	*	*	*	*
$y=-1$	*	*	*	*	*	$v=-1$	*	*	*	*	*
$y=-2$	*	*	*	*	*	$v=-2$	*	*	*	*	*
$x=$	-2	-1	0	1	2	$u=$	-2	-1	0	1	2
$f(x,y)$						$F(u,v)$					

图 8-3 空间域坐标与频率域坐标

(1) 改变符号

$$f(-x, -y) \rightarrow F(-u, -v) \quad (8.14)$$

若选图 8-2 中第 3 对傅立叶变换对

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

$f(x, y)$ 是空间域中在 $y = +1$ 处的一条横缝, $f(-x, -y)$ 则是在 $y = -1$ 处的一条横缝, $f(-x, -y)$ 及其二维频谱如下式所示 (它们是图 8-2 中的第 4 对):

$$f(-x, -y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = F(-u, -v) \quad (8.16)$$

比较式 (8.15) 及式 (8.16), 式 (8.16) 右边的频谱矩阵正好是 $F(-u, -v)$ (即 u, v 之值用 $-u, -v$ 代之)。因之利用上述二对傅立叶变换对直观地验证了二维傅立叶变换改变符号的性质。

(2) 改变标度因子

$$f(ax, by) \rightarrow F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (8.17)$$

若 $f(x, y)$ 是 $y = +1$ 处一条横缝, $f(x, y) \rightarrow F(u, v)$, 如式 (8.15), 则改变 y 坐标的标度因子 $f(x, \frac{y}{2})$ 及其谱如下式所示 (它们是图 8-2 中的第 7 对):

$$f\left(x, \frac{y}{2}\right) = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = F(u, 2v) \quad (8.18)$$

比较式 (8.15) 与式 (8.16) 右边的频谱, 它们符合改变标量性质式 (8.17)。

(3) 位置偏移

$$f(x-x_0, y-y_0) \rightarrow F(u, v) \exp\left[-\frac{2\pi j(ux_0 + vy_0)}{N}\right] \quad (8.19)$$

选图 8-2 中的第一对作为 $f(x, y) \rightarrow F(u, v)$, 即

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

将式(8.20)左边上延一位得 $f(x, y-1)$ 及其谱为(图 8-2 中第 3 对)

$$f(x, y-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = F(u, v)W^0 \quad (8.21)$$

式(8.21)验证了位置偏移式(8.19), 这里 $x_0=0, y_0=1$ 即在 $v=1$ 处为 W^1 , $v=2$ 处为 W^2 , $v=-1$ 处为 $W^{-1}=W^4$, $v=-2$ 处为 $W^{-2}=W^3$ 。

(4) 频率位移

$$\exp[2\pi j \frac{u_0 x + v_0 y}{N}] f(x, y) \rightarrow F(u-u_0, v-v_0) \quad (8.22)$$

若仍选式(8.20)为 $f(x, y) \rightarrow F(u, v)$, 右移一位得 $F(u-1, v)$ 及其谱为(图 8.2 中第 5 对)

$$F(u-1, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix} \\ \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W^2 & W^1 & W^0 & W^4 & W^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = f(x, y)W^{-2} \quad (8.23)$$

注意式(8.23)中箭头向左,即右边是空间域,左边是频率域,上式正好验证了频率偏移式(8.22),这里 $u_0=1, v_0=0$ 。

(5) 共轭对称

$$f^*(x, y) \rightarrow F^*(-u, -v) \quad (8.24)$$

选图 8-2 中第 8 对作为 $f(x, y) \rightarrow F(u, v)$, 即

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W^3 & W^4 & W^0 & W^1 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & W^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.25)$$

则可以写出 $f^*(x, y)$ 及其谱如下式 (即图 8-2 中第 9 对):

$$f^*(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W^3 & W^4 & W^0 & W^1 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & W^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \end{bmatrix} \\ = F^*(-u, -v) \quad (8.26)$$

上式正好验证了共轭对称性质式(8.24)。

(6) 线性关系

$$af(x, y) + by(x, y) \rightarrow aF(u, v) + bG(u, v) \quad (8.27)$$

式(8.20)二边均互为变换对,二边相加后即得(图 8-2 中第 11 对)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & + & 2 & + & + \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & + & 2 & + & + \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

这正好证实了线性关系式(8.27),这里 $a=b=1$ 。

(7) 旋转性质

即若 $f(x, y)$ 旋转一个角度,则其 $F(u, v)$ 也旋转一个同样的角

度。

这个性质利用图 8-2 中第 1 对〔式(8.20)〕及第 2 对〔式(8.26)〕来验证是十分明显的。

图 8-2 中的第 2 对如下所示：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

式(8.29)左边的图像是式(8.20)的图像逆时针转 45° ，而其频谱也是逆时针转 45° 。

(8) 微分性质

$$f(x, y) - f(x-1, y) \rightarrow F(u, v) \left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi ju}{N}\right) \right] \quad (8.30)$$

仍选图 8-2 中第 1 对作为 $f(x, y) \rightarrow F(u, v)$ ，则可写出 $f(x, y) - f(x-1, y)$ 及其谱如下：

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x-1, y) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & - & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-W^3 & 1-W^4 & 1-W^0 & 1-W^1 & 1-W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= F(u, v) (1-W^u) \end{aligned} \quad (8.31)$$

式(8.31)是一对二维傅立叶变换对，正好验证了微分性质式(8.30)。

(9) 积分性质

$$f(x, y) + f(x-1, y) \rightarrow F(u, v) [1 + \exp(-2\pi j \frac{u}{N})] \quad (8.32)$$

可类同微分性质验证。

(10) 正交性质

二维傅立叶变换有一个特殊性质, 就是它的图形与谱是正交的。二维傅立叶变换的正交性质可以从图 8-2 中每一个变换对中直接看出。已讨论过的图 8-2 中的第 1 对到第 10 对, 图形及谱都互为正交。图 8-2 中还列出了第 11 对到第 14 对, 这 4 对都有一个共同的性质, 即图形的变换就是本身, 从这 4 对变换对可见, 这些图形本身就是正交的。图形本身正交这一点在第 11, 12 对是明显的。第 13, 14 对可以将其在 x, y 及 u, v 周期延展后看得十分清楚, 如图 8-4 所示。

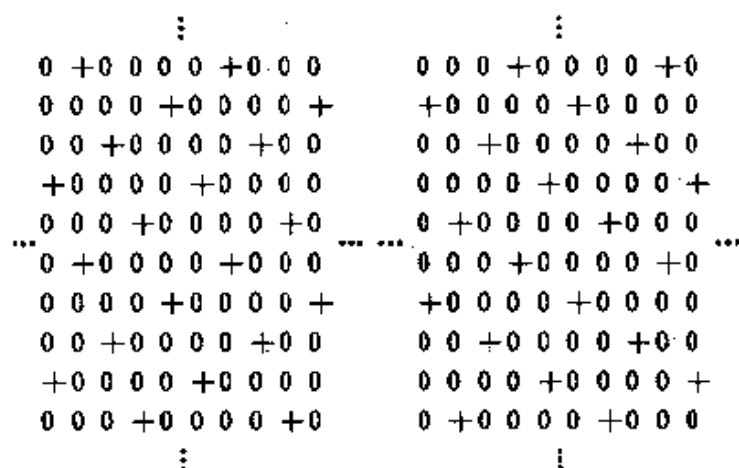


图 8-4

(11) 循环卷积

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) g(x-m, y-n) \rightarrow F(u, v) G(u, v) \quad (8.33)$$

选 $f(x, y)$ 及 $g(x, y)$ 如下二式 (即图 8-2 中第 5 和 10 对):

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

$$g(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W^2 & W^1 & W^0 & W^1 & W^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow G(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

作卷积:

$$h(x, y) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) g(x-m, y-n)$$

$h(x, y)$ 可表示为一个矩阵

$$[h(x, y)] = \begin{bmatrix} h_{-2,2} & h_{-1,2} & h_{0,2} & h_{1,2} & h_{2,2} \\ h_{-2,1} & h_{-1,1} & h_{0,1} & h_{1,1} & h_{2,1} \\ h_{-2,0} & h_{-1,0} & h_{0,0} & h_{1,0} & h_{2,0} \\ h_{-2,-1} & h_{-1,-1} & h_{0,-1} & h_{1,-1} & h_{2,-1} \\ h_{-2,-2} & h_{-1,-2} & h_{0,-2} & h_{1,-2} & h_{2,-2} \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

则由式(8.35)可得 $g(0-m, 0-n)$ 为

$$g(0-m, 0-n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W^3 & W^1 & W^0 & W^1 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

所以可得

$$\begin{aligned} h_{00} &= \sum_{n=0}^{\pm 2} \sum_{m=0}^{\pm 2} f(m, n) g(0-m, 0-n) \\ &= \sum_{n=0}^{\pm 2} \sum_{m=0}^{\pm 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W^3 & W^1 & W^0 & W^1 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = W^0 \end{aligned} \quad (8.38)$$

式(8.38)中两个矩阵作 Σ 及 $\otimes$ 运算, 表示矩阵中对应位置元素相乘后之和。同样可得

$$\begin{aligned}
h_{10} &= \sum_{n=0}^{\pm 2} \sum_{m=0}^{\pm 2} f(m-n) g(1-m, 0-n) \\
&= \sum_{n=0}^{\pm 2} \sum_{m=0}^{\pm 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W^2 & W^3 & W^4 & W^0 & W^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = W^4 \quad (8.39)
\end{aligned}$$

用同样步骤可得所有的 $h_{xy}, x, y=0, \pm 1, \pm 2$ 。这样可以写出 $h(x, y)$ 及其傅立叶变换 $H(u, v)$ 如下:

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} W^0 W^4 W^3 W^2 W^1 \\ W^1 W^0 W^4 W^3 W^2 \\ W^2 W^1 W^0 W^4 W^3 \\ W^3 W^1 W^0 W^4 W^3 \\ W^4 W^3 W^2 W^1 W^0 \end{bmatrix} \rightarrow H(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.40)$$

$h(x, y)$ 正好是一个傅立叶基本图形, 由图 8-1 可知其频谱如式 (8.40) 右边所示。而由 $F(u, v)$ 乘 $G(u, v)$ 可得

$$F(u, v)G(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

式 (8.40) 右边正好是 (8.41) 式的右边, 故验证了二维傅立叶变换的卷积性质。

(12) 调制性质

$$f(x, y) g(x, y) \rightarrow \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m, n) G(u-m, v-n) \quad (8.42)$$

可用上述类同卷积性质的方法来验证。

(13) 循环矩阵的对角化

资料 [5] 指出, 二维循环矩阵的二维频谱均在对角线上。这个性质从傅立叶图形中很容易看出, 从图 8-1 可见, 右移的倾斜图形与左移的倾斜图形其二维频谱分别在右斜对角线与左斜对角线

上。

以上分析表明,通过傅立叶图形及其变换对可以将二维傅立叶变换的各个性质直观而清楚地表示出来,这有助于掌握二维傅立叶变换的各种性质。

第九章 彩色全电视信号的二维频谱分析

电视图像信号是一幅幅活动的图像。一幅图像有二个空间变量 x, y 。可用二维函数 $F(x, y)$ 来描述。但过去为了使产生与处理电视图像信号,在电视中采用扫描技术将二维图像变成一维信号。电视技术中对电视图像信号的分析就是对这个一维变量函数进行 Fourier 频谱分析。NTSC 与 PAL 全电视信号的一维频谱是早已知道的,如今的彩色编解码技术都是建立在这个一维频谱基础上的。

随着计算技术的发展,如今已能储存一帧甚至数帧的全电视信号。这样就可以同时获得整个平面上各系数的电视图像信号,并对它进行二维处理。由于图像信号原来就是二维的,图像信号的二维分析与处理可以更好地反映图像信号的本质,获得更好的效果。所以已有不少资料对 PAL 与 NTSC 全电视信号作了多维分析,详细地分析了 PAL 信号的一维、二维与三维连续频谱,但这些论文都只分析了 NTSC 及 PAL 信号的二维连续频谱,所用的处理技术(如二维滤波器)也只适用于连续的信号,对用数字技术贮存的全帧信号还不适用。第二章中用二维离散变换分析了 NTSC 与 PAL 信号,主要是利用二维 Walsh 函数的分析结果。由于 Fourier 函数有清晰的物理意义与普遍使用的长处,对 NTSC 及 PAL 信号的二维离散频谱分析也是十分必要的,特别是 PAL 信号的 Walsh 序谱是重叠的,而 Fourier 频谱却是分开的,用 Fourier 函数来分析 PAL 信号更合适。所以本章用二维离散 Fourier 变换来分析 NTSC 及 PAL 全电视信号。

类同第二章,分别对一场内与一帧内的 NTSC 及 PAL 全电视信号作二维离散 Fourier 变换,获得了一场内与一帧内的 NTSC 及 PAL 全电视信号的二维离散频谱。本章虽以 8×8 子矩阵为例来分析,但结果可以推广到任意大的 $2^N \times 2^N$ 方阵。本章不只讨论了彩

色副载波的二维离散频谱,还简要指出了整个色度信号的二维频谱。指出不论是NTSC还是PAL制信号,其二维离散频谱与一维频谱有不同的特点。在一维频谱中,NTSC及PAL制的亮、色频谱在同一频带内,但是交错分开的;而在二维频谱中,NTSC及PAL的亮、色频谱是成块分开的,并不交错在一起。所以二维处理中分离亮、色信号的效果要比一维来得更好。最后,还给出了PAL全电视信号的二维频谱分布实验照片。

9.1 一场内亮、色信号的二维离散频谱

若图像 $[A_s]$ 的二维取样值由 8×8 方阵表示

$$[A_s] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} & a_{06} & a_{07} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{60} & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{70} & a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

则此信号的二维离散傅立叶变换定义为

$$[T_s] = \frac{1}{8^2} [F_s] [A_s] [F_s] \quad (9.2)$$

式中 $[F_s]$ 为8阶离散傅立叶矩阵

$$[F_s] = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 \\ W^0 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ W^0 & W^6 & W^4 & W^2 & W^0 & W^6 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

式中 $W = \exp(-\frac{2\pi j}{8})$

NTSC 制的两个副载波 U_N 及 V_N 采用 1/2 间置, 其波形与取样图形在第二章中有详细介绍, 本文引用其结果。一场内 NTSC 的两个副载波 (8×8) 取样值为 $[U_N]$ 与 $[V_N]$

$$[U_N] = \begin{bmatrix} + & + & - & - & + & - & - & - \\ - & - & + & + & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ - & - & + & + & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ - & - & + & + & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ - & - & + & + & - & - & + & + \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

$$[V_N] = \begin{bmatrix} + & - & - & + & + & - & - & + \\ - & + & + & - & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ - & + & + & - & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ - & + & + & - & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ - & + & + & - & - & + & + & - \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

将式(9.4)及(9.5)分别代入式(9.2)即可求出其二维频谱 $[T_N]_v$ 及 $[T_N]_h$ 为

$$[T_N]_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-j}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1+j}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

$$[T_N]_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+j}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1-j}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

由式(9.6)及(9.7)可见,NTSC的两个副载波的二维频谱的位置是重叠的,但相位上差 90° 。式(9.6)及(9.7)只是副载波本身的二维频谱,已调制色度信号的二维频谱就在副载波周围(均用 C_N 表示)。由于亮度信号的二维频谱在矩阵四周(用 Y_N 表示)则NTSC的全电视信号的二维频谱表示如下:

$$[T_N] = \begin{bmatrix} Y & Y & Y & Y & O & Y & Y & Y \\ Y & Y & Y & O & O & O & Y & Y \\ Y & Y & O & O & O & O & O & Y \\ Y & O & C_N & O & O & C & C_N & O \\ O & C_N & C_N & C_N & O & C_N & C_N & C_N \\ Y & O & C_N & O & O & O & C_N & Y \\ Y & Y & O & O & O & O & Y & Y \\ Y & Y & Y & O & O & Y & Y & Y \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

式(9.8)是 8×8 矩阵,对任意大的矩阵 $4^i \times 4^i$, i 为正整数, $[T_N]$ 仍是类似的,由式(9.8)可见,在 NTSC 制的二维离散频谱中,亮度信号与色度信号的频谱是分开的,而且是成块分开的,这点是不同于一维频谱的。所以从二维角度来分离 NTSC 亮、色度的效果就比一维来得好。

PAL 制的两个副载波 U_P 及 V_P 的 8×8 取样矩阵为(在一场内)

$$[U_P] = \begin{bmatrix} + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \\ 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \\ 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

$$[V_P] = \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

其二维频谱由下式表示:

$$[T_P] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & jV_P & 0 & 0 & 0 & U_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_P & 0 & 0 & 0 & jV_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

在式(9.11)中未写出亮度信号的二维频谱,它与式(9.8)相同,仍在矩阵四个角上。由式(9.11)可见,PAL制二维频谱中亮、色信号仍是成块分开的,但PAL制中亮、色谱靠得更近(比NTSC制的亮色谱)。PAL制二个色度信号的谱却是分开的,在相位上差 90° ,所以PAL制的二个色信号在二维是易于分开的。

9.2 一帧内亮、色信号的二维离散频谱

NTSC制的二个副载波一帧内的 8×8 取样图形为

$$[U_N] = \begin{bmatrix} + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ - & - & + & + & - & - & + & + \\ - & - & + & + & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ - & - & + & + & - & - & + & + \\ - & - & + & + & - & - & + & + \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

$$[V_N] = \begin{bmatrix} + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ - & + & + & - & - & + & + & - \\ - & + & + & - & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ - & + & + & - & - & + & + & - \\ - & + & + & - & - & + & + & - \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

其二维频谱分别为

$$[T_N]_u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

$$[T_N]_v = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

PAL 信号一帧内的副载波取样图形分别为

$$[U_P] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 \\ - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \\ + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

$$[V_P] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \\ + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 \\ - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

其二维频谱分别为

$$[T_P]_v = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 + W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 - W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^0 - W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 + W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

$$[T_F]_v = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 + W^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^2 + W^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 - W^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^2 - W^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

其中 $W = \exp\left\{-\frac{2\pi j}{8}\right\}$ 。

9.3 PAL 全电视信号的二维频谱

实验照片图 9-1 所示⁽⁶⁾是图 2-5 中相同二幅 PAL 全电视信号的二维 Fourier 谱。由于 Fourier 谱是复数,所以图 9-1 左边三幅照片是实数部分,右边三幅是虚数部分。图 9-1(a)是只有亮度信号;图 9-1(b)是一场中 PAL 全电视信号的二维谱;图 9-1(c)是一帧中 PAL 全电视信号的二维谱。由照片可见,亮度信号集中在矩阵中部,色度信号在四周,而且一帧中,色度信号又一分为二,比一场中分布多一倍,这些结果和理论分析是完全一致的。

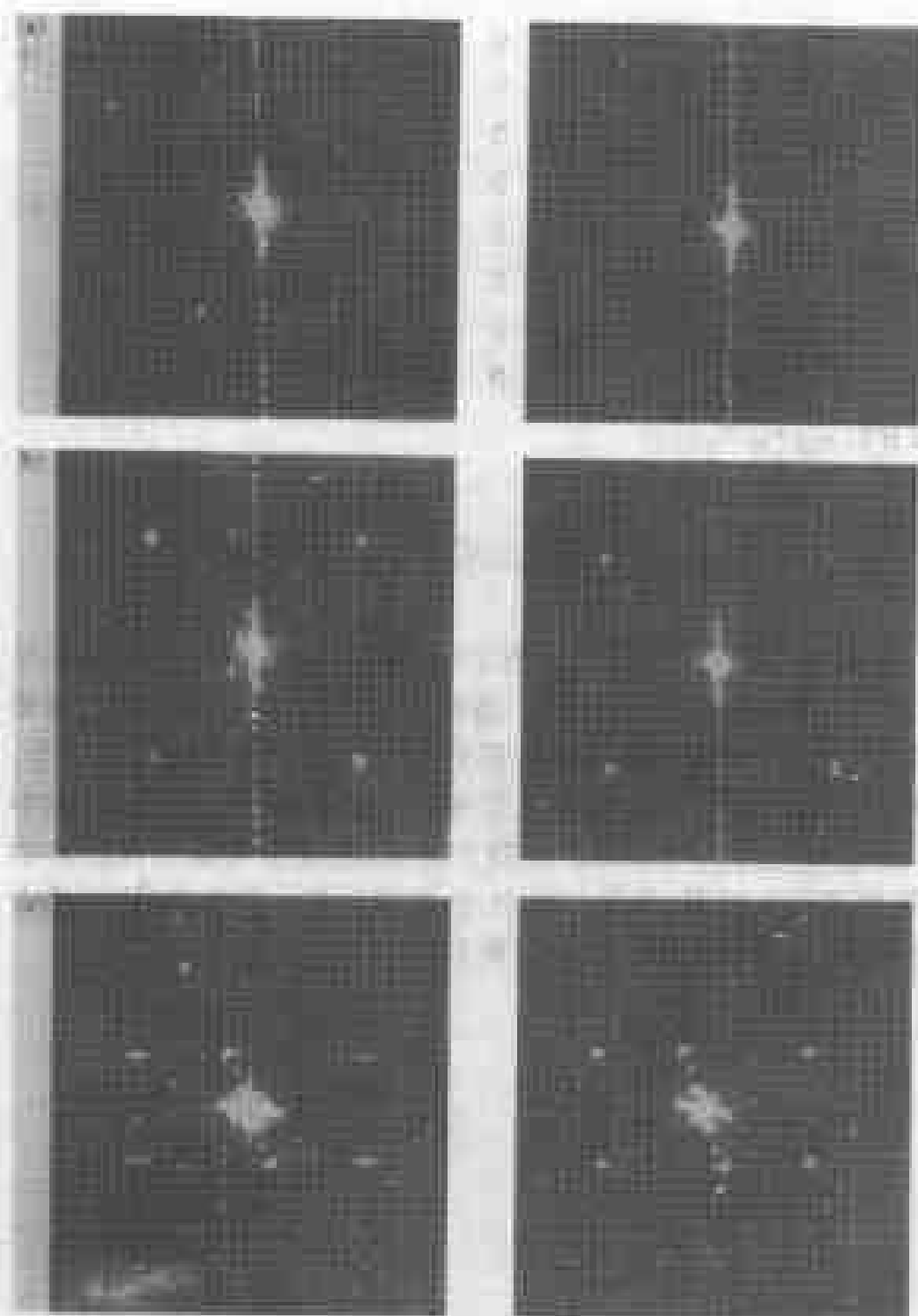


图 2-1 PAL 全电视信号的二维 Fourier 谱
(a) 具有亮度信号的二维频谱; (b) 一场中 PAL 全电视信号的二维谱;
(c) 一帧中 PAL 全电视信号的二维谱。

第十章 亚 Nyquist 取样图像信号及其再生

10.1 用傅立叶方法分析亚奈取样图像信号

若一个按二维 Nyquist 取样定理获得的图像数据中的一部分用 4×4 矩阵表示:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

信号 $[a]$ 的二维傅立叶变换 (TF_s) 由下式定义:

$$[TF_s] = \frac{1}{16} [F] [a] [F] \quad (10.2)$$

式中 $[F]$ 为离散傅立叶矩阵, $N=4$ 时可表为

$$[F_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

一般情况下, 图像的频谱集中在二维低频域中, 在二维傅立叶变换的频域矩阵中, 它们处在该矩阵的四角上。

$$[TF_s] = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & 0 & f_{03} \\ f_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{30} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

若把信号 $[a_s]$ 调到一个二维高频成分 $[P_s]$

$$[P_s] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

则得调制后的信号〔b〕及其频谱〔TF_b〕为

$$[b] = \begin{bmatrix} a_{00} & -a_{01} & a_{02} & -a_{03} \\ -a_{10} & a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{30} & a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

$$[TF_b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{30} & 0 \\ 0 & f_{03} & f_{00} & f_{01} \\ 0 & 0 & f_{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

从式(10.7)可见,信号〔b〕的二维频谱〔TF_b〕售中在矩阵中部,这儿是二维高频域。

将〔a〕和〔b〕相加得一个新的信号〔c〕及其频谱〔TF_c〕

$$[c] = \begin{bmatrix} a_{00} & 0 & a_{02} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

$$[TF_c] = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & 0 & f_{03} \\ f_{10} & 0 & f_{30} & 0 \\ 0 & f_{03} & f_{00} & f_{01} \\ f_{30} & 0 & f_{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

将〔a〕及〔b〕相减得另一个信号〔d〕及其频谱〔TF_d〕得

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & a_{01} & 0 & a_{03} \\ a_{10} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{30} & 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

$$[TF_d] = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & 0 & f_{03} \\ f_{10} & 0 & -f_{30} & 0 \\ 0 & -f_{03} & -f_{00} & -f_{01} \\ f_{30} & 0 & -f_{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

此式与〔TF_a〕、〔TF_c〕比较,三者矩阵四角的二维低频成分是相同的。因此从信号〔c〕或〔d〕中用一个二维低通滤波器取出其二维低

频分量即可恢复原信号 $[a]$ 。如果原信号 $[a]$ 只有二维低频分量,则从 $[c]$ 或 $[d]$ 中恢复得到的 $[a]$ 是无失真的。注意 $[c]$ 或 $[d]$ 中有一半为零,所以 $[c]$ 或 $[d]$ 是亚 Nyquist 取样的图像信号。这表明,对一般图像信号,用亚 Nyquist 取样频率就可以了,只要其二维频谱集中在低频区(对大部分图像是符合这个统计特性的),从亚 Nyquist 取样的图像中通过内插可得 Nyquist 取样的图像信号。

10.2 用傅立叶方法再生亚奈取样图像信号

从式(10.9)及(10.11)的 $[TF_c]$ 及 $[TF_d]$ 可见,从 $[c]$ 及 $[d]$ 信号中再生 $[a]$ 需用的二维标准低通(频率)数字滤波器的传输函数 $[H_1]$ 为

$$[H_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

代入式(10.2)可得其冲激响应 $[h_1]$ 为

$$[h_1] = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

式(10.13)表明,若 $[a]$ 的信号经式(10.12)的二维低通滤波后,其输出矩阵 $[a']$ 中的第一个元素 a'_{00} 为

$$a'_{00} = \frac{1}{16} [8a_{00} + 3(a_{01} + a_{02} + a_{10} + a_{20}) - (a_{12} + a_{21} + a_{23} + a_{32})] \quad (10.14)$$

$[a']$ 矩阵中的其它元素可以用类同公式计算。

若将整个图像分成许多紧连着的 4×4 矩阵,每一个都经过上述二维一般低通滤波器,就可以内插出原图像,但是这时边缘会出现 Gibbs 效应,产生不连续点,严重损害再生图像的质量。

类同 Walsh 方法,可以用二维重叠数字滤波器来克服这个缺点。 4×4 重叠滤波器由 16 个一般滤波器叠加而成,它等效一个计

算模板 $[N_1]$, $[N_2]$ 是一般滤波器的冲激响应 $[h_i]$ 和一个系数矩阵 $[G_i]$ 的对应元素乘积。

$$[G_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

$N=4$ 时, 二维标准低通重叠滤波器的 $[N_1]$ 为

$$[N_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 18 & 64 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

从式(10.16)可见, $[N_1]$ 对中心是对称的, 所以只需写出其中的四分之一即可。

傅立叶方法与 Walsh 方法不同之处在于, 在 Walsh 方法中, $N=2^n$; 而在傅立叶方法中, N 为偶数即可。如 $N=6$ 时, 二维标准低通滤波器的传输函数 $[H_0]$ 为

$$[H_0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

其一般滤波器的冲激响应 $[h_0]$ 为

$$[h_6] = \begin{bmatrix} 18 & 7 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

其系数矩阵 $[N_6]$ 为(只写出四分之一)

$$[N_6] = \begin{bmatrix} 36 & 30 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 30 & 25 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.19)$$

其二维低通重叠滤波器的计算模板 $[G_6]$ 为(只有四分之一)

$$[G_6] = \begin{bmatrix} 64 & 21 & 0 & 1.8 & 0 & 4.2 \\ 21 & 0 & -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1.2 & 0 & -0.8 \\ 1.8 & 0 & 12 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0.6 & 0 & -0.4 \\ 4.2 & 0 & -0.8 & 0 & -0.4 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

可以写出 N 为任意偶数时的 $[h_N]$ 及 $[N_N]$, 如 $N=8$ 时的 $[h_8]$ 及 $[G_8]$ 为

$$[h_8] = \begin{bmatrix} 16 & 6.33 & 0 & 0.67 & 0 & 0.67 & 0 & 6.33 \\ 6.33 & 0 & -1.92 & 0 & -0.5 & 0 & -1.92 & 0 \\ 0 & -1.92 & 0 & 0.92 & 0 & 0.92 & 0 & -1.92 \\ 0.67 & 0 & 0.92 & 0 & -0.5 & 0 & 0.92 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0.67 & 0 & 0.92 & 0 & -0.5 & 0 & 0.92 & 0 \\ 0 & -1.92 & 0 & 0.92 & 0 & 0.92 & 0 & -1.92 \\ 6.33 & 0 & -1.92 & 0 & -0.5 & 0 & -1.92 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

$[N_s]=$

$$\begin{bmatrix} 64 & 22.155 & 0 & 1.675 & 0 & 1.005 & 0 & 3.165 \\ 22.155 & 0 & -5.04 & 0 & -0.8750 & 0 & -1.68 & 0 \\ 0 & -5.04 & 0 & 1.72 & 0 & 1.035 & 0 & -0.72 \\ 1.675 & 0 & 1.72 & 0 & -0.625 & 0 & 0.575 & 0 \\ 0 & -0.875 & 0 & -0.625 & 0 & -0.375 & 0 & -0.125 \\ 1.005 & 0 & 1.035 & 0 & -0.375 & 0 & 0.345 & 0 \\ 0 & -1.68 & 0 & 0.575 & 0 & 0.345 & 0 & -0.24 \\ 3.165 & 0 & -0.72 & 0 & -0.125 & 0 & -0.24 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

($[N_s]$ 只写出四分之一。)

10.3 无穷大矩阵时的二维重叠 低通数字滤波器

类同 Walsh 方法,可以求得在 N 为任意大值时二维重叠标准低通滤波器的计算模板 $[N_s]$ 。当 $N \rightarrow \infty$, 得到无穷大矩阵时的计算模板 $[N_\infty]$ 。在文献[18]中,详细地用解析法求得到任意 N 值时的计算模板 $[N_s]$, 包括 $N \rightarrow \infty$ 的情况, 这儿只引用其结果。

式(10.23)矩阵向外无限扩大,若模板极中心值为 $\pi^2/4$, 并以这点为原点建立 u 及 v 直角坐标, $u, v=1, 2, \dots, n, \dots$, 则在 $u=2, 4, 6, \dots$ 及 $v=1, 3, 5, \dots$ 处, $[N_\infty]$ 中该元素的系数为 $\frac{1}{v^2 - u^2}$, 而 $v=2, 4, 6, \dots$ 及 $u=1, 3, 5, \dots$ 处系数为零。

式(10.23)可用数字表示(除 $4/\pi^2$), 如式(10.24)所示。

在文献[10]中,不只求出了重叠低通滤波器的 $[N_\infty]$ 表达式,还求得二维一般低通滤波器 $N \rightarrow \infty$ 时的计算模板。有趣的是在 $N \rightarrow \infty$ 时,一般低通滤波器的计算模板也是式(10.23)。傅立叶方法的这个结果与 Walsh 方法是不一样的。原因有二个:一是在 Walsh 方法中,从一般滤波器变成重叠滤波器时会引起序率成分的变化,

$$\begin{aligned}
\{N_\infty\} = & \begin{bmatrix}
0 & 1/13 & 0 & 1/33 & 0 & 1/45 & 0 & 1/49 & 0 & 1/45 & 0 & 1/33 & 0 & 1/13 & 0 \\
1/13 & 0 & -1/27 & 0 & -1/27 & 0 & -1/35 & 0 & -1/35 & 0 & -1/27 & 0 & -1/11 & 0 & 1/13 \\
0 & -1/11 & 0 & 1/9 & 0 & 1/21 & 0 & 1/25 & 0 & 1/21 & 0 & 1/9 & 0 & -1/11 & 0 \\
1/33 & 0 & 1/9 & 0 & -1/7 & 0 & 1/15 & 0 & 1/15 & 0 & -1/7 & 0 & 1/9 & 0 & 1/33 \\
0 & -1/27 & 0 & -1/7 & 0 & 1/5 & 0 & 1/9 & 0 & 1/5 & 0 & -1/7 & 0 & -1/27 & 0 \\
1/45 & 0 & 1/21 & 0 & 1/5 & 0 & -1/3 & 0 & -1/3 & 0 & 1/5 & 0 & 1/21 & 0 & 1/45 \\
0 & -1/35 & 0 & 1/15 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/15 & 0 & -1/35 & 0 \\
1/49 & 0 & 1/25 & 0 & 1/9 & 0 & 1 & \pi^2/4 & 1 & 0 & 1/9 & 0 & 1/25 & 0 & 1/49 \dots (10, 23) \\
0 & -1/35 & 0 & 1/15 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/15 & 0 & -1/35 & 0 \\
1/45 & 0 & 1/21 & 0 & 1/5 & 0 & -1/3 & 0 & -1/3 & 0 & 1/5 & 0 & 1/21 & 0 & 1/45 \\
0 & -1/27 & 0 & -1/7 & 0 & 1/5 & 0 & 1/9 & 0 & 1/5 & 0 & -1/7 & 0 & -1/27 & 0 \\
1/33 & 0 & 1/9 & 0 & -1/7 & 0 & 1/15 & 0 & 1/15 & 0 & -1/7 & 0 & 1/9 & 0 & 1/33 \\
0 & -1/11 & 0 & 1/9 & 0 & 1/21 & 0 & 1/25 & 0 & 1/21 & 0 & 1/9 & 0 & -1/11 & 0 \\
1/13 & 0 & -1/11 & 0 & -1/27 & 0 & -1/35 & 0 & -1/35 & 0 & -1/27 & 0 & -1/11 & 0 & 1/13 \\
0 & 1/13 & 0 & 1/33 & 0 & 1/45 & 0 & 1/49 & 0 & 1/45 & 0 & 1/33 & 0 & 1/13 & 0
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$[N_{\infty}] = \begin{bmatrix} 0 & 0.058 & 0 & -0.027 & 0 & -0.027 & 0 & 0.058 & 0 \\ 0.058 & 0 & 0.078 & 0 & 0.0448 & 0 & 0.078 & 0 & 0.058 \\ 0 & 0.078 & 0 & -0.132 & 0 & -0.132 & 0 & 0.078 & 0 \\ -0.027 & 0 & -0.132 & 0 & 0.405 & 0 & -0.132 & 0 & -0.027 \\ 0 & 0.0448 & 0 & 0.405 & 1 & 0.405 & 0 & 0.0448 & 0 \\ -0.027 & 0 & -0.132 & 0 & 0.405 & 0 & -0.132 & 0 & -0.027 \\ 0 & 0.078 & 0 & -0.132 & 0 & -0.132 & 0 & 0.078 & 0 \\ 0.058 & 0 & 0.078 & 0 & 0.0448 & 0 & 0.078 & 0 & 0.058 \\ 0 & 0.058 & 0 & -0.027 & 0 & -0.027 & 0 & 0.058 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

或产生新的序率成分,而在傅立叶方法中,从一般变成重叠时只是乘一个系数,即对不同的频率成分乘不同的系数,而不引起新的频率成分,而这个与 N 有关的系数在 $N \rightarrow \infty$ 时都一样了。二是由于一般二维低通滤波器的计算模板〔如式(10.13)的 $[h_s]$ 与(10.18)的 $[h_0]$ 〕本身就是中心对称结构,而在 Walsh 方法中,一般二维序率滤波器的计算模板是不对称的,只有在重叠时才对称,所以重叠滤波器在 Walsh 方法中是必须的,而在傅立叶方法中,只是在 N 为有限时才必须使用重叠滤波器方法。

类同 Walsh 方法,式(10.23)的 $[N_\infty]$ 表示式也可以只求中心一部分,只要矩阵周围所有系数之和等于(或接近于)中心点值即可。这个矩阵的大小可以是 $5 \times 5, 7 \times 7, 9 \times 9, 11 \times 11 \dots$, 它们的除最外层一圈外的全部系数等于式(10.23)中的系数,而最外层的系数为式(10.23)中系数之半,如 $[N'_5]$ 、 $[N'_7]$ 及 $[N'_9]$ 为

$$[N'_5] = \begin{bmatrix} 0 & -0.066 & 0 & -0.066 & 0 \\ -0.066 & 0 & 0.405 & 0 & -0.066 \\ 0 & 0.405 & 0 & 0.405 & 0 \\ -0.066 & 0 & 0.405 & 0 & -0.066 \\ 0 & -0.066 & 0 & -0.066 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.25)$$

$$[N'_7] = \begin{bmatrix} 0 & 0.039 & 0 & 0.0244 & 0 & 0.039 & 0 \\ 0.039 & 0 & -0.132 & 0 & -0.132 & 0 & 0.039 \\ 0 & -0.132 & 0 & 0.405 & 0 & -0.132 & 0 \\ 0.0224 & 0 & 0.405 & 0 & 0.405 & 0 & 0.0224 \\ 0 & -0.132 & 0 & 0.405 & 0 & -0.132 & 0 \\ 0.039 & 0 & -0.132 & 0 & -0.132 & 0 & 0.039 \\ 0 & 0.039 & 0 & 0.0224 & 0 & 0.039 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

$[N'_5]$ 、 $[N'_7]$ 及 $[N'_9]$ 的除中心外的系数之和都不等于 1, 但随 N 增大, 越接近 1, 但这些模板在一定条件下可以使用。表 10-1 显示

$$[N'_9] = \begin{bmatrix} 0 & 0.029 & 0 & -0.0135 & 0 & -0.0135 & 0 & 0.029 & 0 \\ 0.029 & 0 & 0.078 & 0 & 0.0448 & 0 & 0.078 & 0 & 0.029 \\ 0 & 0.078 & 0 & -0.132 & 0 & -0.132 & 0 & 0.078 & 0 \\ -0.0135 & 0 & -0.132 & 0 & 0.405 & 0 & -0.132 & 0 & 0.0135 \\ 0 & 0.0448 & 0 & 0.405 & 1 & 0.405 & 0 & 0.0448 & 0 \\ -0.0135 & 0 & -0.132 & 0 & 0.405 & 0 & -0.132 & 0 & -0.0135 \\ 0 & 0.078 & 0 & -0.132 & 0 & -0.132 & 0 & 0.078 & 0 \\ 0.029 & 0 & 0.078 & 0 & 0.0448 & 0 & 0.078 & 0 & 0.029 \\ 0 & 0.029 & 0 & -0.0135 & 0 & -0.0135 & 0 & 0.029 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.27)$$

不同 N 值时外围系数之和值。

表 10-1

$N=5$	1.081
$N=7$	0.955
$N=9$	1.029
$N=11$	0.979
$N=13$	1.015

$N \rightarrow \infty$ 时, Walsh 方法和 Fourier 方法的不同点是:在 Walsh 方法中,局部模板的系数的外围和严格等于 1,而 Fourier 方法是随 $N \rightarrow \infty$ 而趋于 1,这是由 Walsh 函数和 Fourier 函数的性质决定的。Walsh 函数形成一个群。对 $N=2^p$ 阶的 Walsh 函数不只其整体是一个群,而对其中 $N=2^k (k < p)$ 的一部分又形成一个个子群,所以 $N \rightarrow \infty$ 的 Walsh 模板,不只在 $N \rightarrow \infty$ 时外围和严格等于 1,对在 $N=2^k (k < p)$ 的每一个小模板,其外围和也严格等于 1。而 Fourier 函数系虽整个形成一个群,但其局部并不形成子群,所以 Fourier 计算模板只有在 $N \rightarrow \infty$ 时,才严格等于 1,才是完整的。

通过对 Fourier 方法和 Walsh 方法的二维低通重叠滤波器性质的讨论,可以深入地了解这二个函数系的不同性质,加深对它们的理解。

第十一章 二维重叠频率数字滤波器

类似 Walsh 方法,也可以得到二维 Fourier 重叠数字滤波器的设计公式。先求出一般数字滤波器输出矩阵中每一个元素的表达式,然后组合起来就可得到重叠滤波器的输出,它可用一个模板来表示。Fourier 重叠滤波器的输出实际上是一般滤波器输出的循环移位叠加,所以类似反映 Walsh 函数单元移位叠加性质的 $[Q]$ 矩阵。本章引入反映 Fourier 循环移位叠加性质的 $[P]$ 矩阵,利用 $[P]$ 矩阵,二维重叠滤波器的设计公式简单明了,可以直接设计出所需传输函数的二维重叠滤波器的计算模板。

11.1 二维一般数字滤波器的设计

以 4×4 矩阵为例来进行二维一般数字滤波器的设计。若输入信号用矩阵 $[a]$ 表示

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

经二维 Fourier 变换

$$[A] = \frac{1}{16} [F][a][F] \quad (11.2)$$

可得 $[a]$ 的二维频谱 $[A]$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

若滤波器的传输函数矩阵为 $[H]$

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & H_{03} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{30} & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

则将 $[A]$ 的每一个元素与 $[H]$ 的每一个元素相乘后得一个加权后的频谱 $[A']$

$$[A'] = \begin{bmatrix} A_{00}H_{00} & A_{01}H_{01} & A_{02}H_{02} & A_{03}H_{03} \\ A_{10}H_{10} & A_{11}H_{11} & A_{12}H_{12} & A_{13}H_{13} \\ A_{20}H_{20} & A_{21}H_{21} & A_{22}H_{22} & A_{23}H_{23} \\ A_{30}H_{30} & A_{31}H_{31} & A_{32}H_{32} & A_{33}H_{33} \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

将 $[A']$ 作逆 Fourier 变换得输出 (b)

$$[b] = [F^*][A'] [F^*] \quad (11.6)$$

$[b]$ 也是一个矩阵

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

根据 Fourier 变换的卷积定理,在频谱域 $[A]$ 及 $[H]$ 的乘积的变换等于它们各自的逆 Fourier 变换 $[a]$ 及 $[h]$ 在时域的卷积。所以式(11.7)的 $[b]$ 矩阵的每一个元素可写为

$$b_{xy} = \frac{1}{16} \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 a_{mn} h(x-m, y-n) \quad (11.8)$$

这里 $[h]$ 是传输函数矩阵 $[H]$ 的逆 Fourier 变换。

$$[h] = [F^*][H][F^*] \quad (11.9)$$

例如,二维标准低通滤波器的传输函数 $[H]$ 为

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

它的 Fourier 变换 $[h]$ 为 (表示为 $[h]_{00}$)

$$[h]_{00} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

由式 (11.8), 输出矩阵中的第一元素 b_{00} 为 $[a]$ 矩阵与式 (11.11) 的 $[h]_{00}$ 矩阵对应元素乘积之和

$$b_{00} = [8a_{00} + 3(a_{01} + a_{10} + a_{30} + a_{03}) - a_{12} - a_{21} - a_{23} - a_{32}]/16 \quad (11.12)$$

第二个元素 b_{01} 所相应的 $[h]_{01}$ 矩阵元素为 $h(x-m, y-n) = h(1-m, 0-n)$, 它相当 $[h]_{00}$ 矩阵中的元素向右循环移位 1 格, 即

$$[h]_{01} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

由式 (11.8), b_{01} 是 $[a]$ 与 $[h]_{01}$ 矩阵相应元素乘积之和

$$b_{01} = (3a_{00} + 8a_{01} + 3a_{02} + 3a_{11} - a_{13} - a_{20} - a_{22} + 3a_{21} - a_{33})/16 \quad (11.14)$$

因此 b_{01} 元素可以由 $[h]_{01}$ 矩阵决定。用同样方法可以求得全部 b_{xy} 元素的决定矩阵 $[h]_{xy}$, $x, y = 0, 1, 2, 3$ 。 $[h]_{xy}$ 矩阵是 $[h]_{00}$ 矩阵在水平方向循环移 x 位, 垂直方向循环移 y 位而得, 它们全部画在图 11-1 中。

图 11-1 中, 左边是输入矩阵 $[a]$, 中间的小矩阵 $[H]$ 是滤波器的传输系数矩阵、中间的大矩阵中有 16 个小矩阵, 它们分别是决定 b_{xy} 输出的矩阵 $[h]_{xy}$ 。图 11-1 的右边是输出矩阵 $[b]$ 。所以图 11-1 表示二维标准低通一般滤波器的构造。它给出了输出矩阵 $[b]$ 中的每一个元素 b_{xy} 的决定矩阵 $[h]_{xy}$, b_{xy} 是矩阵 $[h]_{xy}$ 与输入矩阵 $[a]$ 对应元素乘积之和。

有了一般二维滤波器的每一个元素的输出公式, 就容易得到滤波器的输出表达式。

11.2 二维重叠数字滤波器的构造

二维重叠数字滤波器的定义和二维重叠序率滤波器相同。在重叠滤波器中,样点逐点重叠地通过全部与该样点有关的一般滤波器,而滤波器输出是全部有关输出之总和。图 11-2 是一个二维标准低通重叠滤波器的构造。

图 11-2 左上面是输入二维数据的一部分,这里研究样点 a_{33} 经过 4×4 重叠滤波器的过程。与样点 a_{33} 有关的 4×4 一般滤波器共有 16 个,样点在这 16 个一般滤波器的位置正好经历了 4×4 矩阵元素中每一个位置。这 16 个矩阵全部画在图 11-2 的左边大矩阵中。

这 16 个矩阵分别经过传输系数为 $[H]$ 的一般滤波器,从而得到样点 a_{33} 所在位置的输出表达式。如左上角第一个矩阵的输入数据为

$$[a]_{00} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (11.15)$$

在式(11.15)的矩阵 $[a]_{00}$ 中样点 a_{33} 在左上角,对照图 11-1 的一般滤波器,在左上角的输出的决定矩阵为 $[h]_{00}$

$$[h]_{00} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

所以第一个一般滤波器的输出 b_{00} 等于 $[a]_{00}$ 与 $[h]_{00}$ 矩阵对应元素乘积之和

$$b_{00} = [8a_{33} + 3(a_{34} + a_{43} + a_{36} + a_{63}) - a_{45} - a_{56} - a_{54} - a_{65}] / 16 \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/12 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \\
 & \begin{array}{ccccc} & & [a] & & [H] \\ \left[\begin{array}{cccc} 8 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] & & & & \left[\begin{array}{ccc} 8 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ & & (b_{00}) & & (b_{01}) \\ \\ \left[\begin{array}{cccc} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] & & & & \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \\ & & (b_{10}) & & (b_{11}) \\ \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] & & & & \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ & & (b_{20}) & & (b_{21}) \\ \\ \left[\begin{array}{cccc} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right] & & & & \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 0 \end{array} \right] \\ & & (b_{30}) & & (b_{31}) \\ \\ & & & & \rightarrow \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ & & & & [b]
 \end{array}
 \end{aligned}$$

0	3	8	3	3	0	3	8
-1	0	3	0	0	-1	0	3
0	-1	0	-1	-1	0	-1	0
-1	0	3	0	0	-1	0	3
(b ₀₂)				(b ₀₃)			
-1	0	3	0	0	-1	0	3
0	3	8	3	3	0	3	8
-1	0	3	0	0	-1	0	3
0	-1	0	-1	-1	0	-1	0
(b ₁₂)				(b ₁₃)			
0	-1	0	-1	-1	0	-1	0
-1	0	3	0	0	-1	0	3
0	3	8	3	3	0	3	8
-1	0	3	0	0	-1	0	3
(b ₂₂)				(b ₂₃)			
-1	0	3	0	0	-1	0	3
0	-1	0	-1	-1	0	-1	0
-1	0	3	0	0	-1	0	3
0	3	8	3	3	0	3	8
(b ₃₂)				(b ₃₃)			

图 11.1 二维一般数字滤波器(4×4)

第二个一般滤波器的输入数据矩阵为

$$[a]_{01} = \begin{bmatrix} a_{32} & \underline{a_{33}} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

在 $[a]_{01}$ 矩阵中样点 a_{33} 的位置在第1行第2列。其经过传输系数为 $[H]$ 的一般滤波器后,在输出矩阵中第1行第2列的同一位置的元素值 b_{01} 由矩阵 $[h]_{01}$ 决定。对照图11-1的相应位置可知 $[h]_{01}$ 为

$$[h]_{01} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

对应位置的输出 b_{01} 为

$$b_{01} = [8a_{33} + 3(a_{32} + a_{34} + a_{43} + a_{63}) - a_{45} - a_{54} - a_{52} - a_{65}] / 16 \quad (11.20)$$

这样即可以求得全部16个一般滤波器的输出,它们是图11-2左边的大矩阵中每一个小矩阵 $[a]_{xy}$ 与右边的大矩阵中每一个小决定矩阵 $[h]_{xy}$ 对应元素乘积之和。注意图11-2右边大矩阵中的16个小矩阵和图11-1中的16个决定矩阵相同。

将图11-2的16个一般滤波器的输出相加后整理,可得一个计算模板 $[N]$

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 18 & 64 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

矩阵 $[N]$ 和输入矩阵 $[a]$ 对应元素乘积之和即是样点 a_{33} 经过上述二维重叠滤波器的输出。对其它位置样点的输出,只要将 $[N]$ 的模

板中心对准该样点即可。

11.3 二维重叠数字滤波器的设计

从图 11-2 可见,重叠过程实质上是 $[h]_{\infty}$ 矩阵的二维循环移位的叠加。类似 Walsh 方法,也可以寻找反映 Fourier 变换循环移位叠加的矩阵 $[P]$ 。

循环移位比较简单,如图 11-3(a)表示 $N=8$ 的序列的循环移位,图 11-3(b)表示 $N=8$ 的循环移位的叠加。

A	B	C	D	E	F	G	H
B	C	D	E	F	G	H	A
C	D	E	F	G	H	A	B
D	E	F	G	H	A	B	C
E	F	G	H	A	B	C	D
F	G	H	A	B	C	D	E
G	H	A	B	C	D	E	F
H	A	B	C	D	E	F	G

(a)

A	B	C	D	E	F	G	H												
	B	C	D	E	F	G	H	A											
		C	D	E	F	G	H	A	B										
			D	E	F	G	H	A	B	C									
				E	F	G	H	A	B	C	D								
					F	G	H	A	B	C	D	E							
						G	H	A	B	C	D	E	F						
							H	A	B	C	D	E	F	G					
+								H	A	B	C	D	E	F	G				

+))

.....
1A 2B 3C 4D 5E 6F 7G 8H 7A 6B 5C 4D 3E 2F 1G

(b)

图 11-3 循环移位及其叠加($N=8$)

图 11-3(b)的叠加过程可以用以下矩阵式表示

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 H \\
 G \\
 F \\
 E \\
 D \\
 C \\
 B \\
 A
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 & A \\
 2 & B \\
 3 & C \\
 4 & D \\
 5 & E \\
 6 & F \\
 7 & G \\
 8 & H \\
 7 & A \\
 6 & B \\
 5 & C \\
 4 & D \\
 3 & E \\
 2 & F \\
 1 & G
 \end{bmatrix}
 \quad (11.22)$$

所以反映循环移位叠加性质的 $[P]$ 矩阵在 $N=8$ 时为

$$[P_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

同样, $[P_6]$ 、 $[P_4]$ 、 $[P_2]$ 分别为

$$[P_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

$$[P_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.25)$$

$$[P_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.26)$$

利用 $[P]$ 矩阵,二维重叠滤波器的输出模板 $[N]$ 和传输函数 $[H]$ 的关系是

$$[N] = [P][F] * [H][F] * [P]^T \quad (11.27)$$

用式(11.27),可求任意 $[H]$ 的 $[N]$ 。例如 $N=4$ 的二维低通重叠滤波器的传输函数 $[H]$ 为

$$[H_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (11.28)$$

代入式(11.27)可得

$$[N_1] = [P_1][F_1] * [H_1][F_1] * [P_1]^T$$

$$\begin{aligned}
&= [P_d] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} [P_d]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 18 & 64 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.29)
\end{aligned}$$

式(11.29)的结果和式(11.21)完全相同,所以式(11.27)是二维重叠数字滤波器的一般设计公式,利用这个公式可以求得任意传输函数的二维重叠滤波器的设计模板。如二维扇形滤波器的传输函数 $[H^*]$ 为

$$[H'_{14}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (11.30)$$

代入式(11.27)可得二维高通重叠滤波器的计算模板 $[N']$ 为

$$[N'_{14}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & -18 & 64 & -18 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 18 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

第十二章 二维重叠数字滤波器的应用

二维重叠数字滤波器可以应用于图像处理的各个领域,根据所需的频响特性,它可以是低通的、带通的、高通的和扇形的等。基于傅立叶方法的二维重叠数字滤波器与基于 Walsh 方法的二维重叠序率数字滤波器的不同点是:Fourier 方法中 N 可以是任意正整数,而不像 Walsh 方法中 $N=2^r$ 。另外傅立叶函数的微分性质也和 Walsh 不一样,所以图像的差值信号可以用傅立叶方法来抽取和再生。本章介绍符合傅立叶方法特点的二个二维重叠数字滤波器的应用。

12.1 图像差值信号的抽取和内插

在数字信号处理中,常用抽取和内插来压缩和再生信号^[18],减低抽样率称抽取,增加抽样率称内插。这个抽取和内插的压缩码率的方法也可用于二维图像信号处理中。由于图像信号的二维谱能量的大部分集中在二维低频区域,在第十章中已介绍了亚 Nyquist 取样方法及其再生,因此可将二维图像信号隔一个抽取一个,形成一个交叉为零的二维数据,然后用二维标准低通数字滤波器来内插。

当一行中相邻像素的抽样值相减形成差值信号时,由 8.2 节介绍的二维傅立叶变换的微分性质知,若原图像 $f(x, y)$ 的二维谱为 $F(u, v)$, 则差值图像信号 $f(x, y) - f(x-1, y)$ 的二维谱为 $F(u, v) \cdot (1 - \exp[-\frac{2\pi ju}{N}])$ 。所以若原图像信号的频谱 $F(u, v)$ 集中在二维低频区域,则差值信号的频谱仍集中在二维低频区域。因此差值信号也可以隔一个抽取一个,然后用二维低通数字滤波器来再生。

注意,这儿不可以用 Walsh 方法的二维低通序率数字滤波器来再生,因为 Walsh 函数的微分性质和傅立叶函数不同。因此差值信号的再生必须用傅立叶方法的二维低通数字滤波器,如式(10.16)的 $[N_1]$ 、式(10.20)的 $[N_2]$ 和式(10.22)的 $[N_3]$ 等。

表 12-1 是一个计算实例。其中(1)是输入原图像数据 $f(x, y)$, 是测试卡中高频斜线图案的一部分, 含有较多的二维高频分量; (2)是(1)的差值信号, 即

$$f(x, y) - f(x-1, y)$$

为了比较还计算了它的均方根值: 40.55; (3)是(2)的抽取, 其中有一半置零; (4)是用式(10.22)的 $[N_3]$ 内插后得到的输出; (5)是内插误差, 其均方根值为 3.93; (6)是一半由差值及一半由内插误差组成的新信号, 即(3)+(5)。由这个新信号可以无失真地再生原信号(1), 而其均方根值降为 31。新信号(6)和原信号相比, 显著压缩了码率。

表 12-1 图像差值信号的抽取和内插

(1)原图像数据									
227	176	158	207	219	167	166	223	208	159
216	158	172	225	201	154	189	231	183	158
197	157	189	232	184	158	211	226	169	166
177	169	220	220	166	176	226	208	159	186
162	179	232	203	154	190	237	196	159	212
157	202	228	184	157	211	229	174	175	210
168	223	219	162	172	227	210	165	185	235
187	234	197	154	192	227	192	164	202	231
(2)差值图像信号									
51	18	-49	-12	52	1	-57	15	49	-20
58	-14	-53	24	47	-35	-42	48	25	-47
40	-42	-33	48	26	-53	-15	57	3	-60
8	-51	0	54	-10	-50	18	49	-27	-48
-17	-53	29	49	-36	-47	41	37	-53	-20
-45	-26	44	27	-54	-18	55	-1	-55	8
-55	4	57	-10	-55	17	45	-20	-50	28
-47	37	43	-38	-35	35	28	-38	-29	47
均方根值为 40.5									

续表

(3)差值图像信号的抽取(一半置零)									
0	18	0	-12	0	1	0	15	0	-20
58	0	-53	0	47	0	-42	0	25	0
0	-42	0	48	0	-53	0	57	0	-60
8	0	0	0	-10	0	18	0	-27	0
0	-53	0	49	0	-47	0	37	0	-20
-45	0	44	0	-54	0	55	0	-55	0
0	4	0	-10	0	17	0	-20	0	28
-47	0	43	0	-35	0	28	0	-29	0
(4)用二维低通重叠滤波器(N_0)在(3)中的内插结果									
53	18	-55	-12	53	1	-53	15	48	-20
58	-15	-53	21	47	-33	-42	39	25	-50
42	-42	-34	48	24	-53	-15	57	-2	-60
8	-60	0	61	-10	-63	18	59	-27	-20
-23	-53	28	49	-40	-47	41	37	-48	-20
-45	-33	44	21	-54	-19	55	11	-55	5
-57	4	54	-10	-54	17	53	-20	-55	28
-47	35	43	-38	-35	42	28	-47	-29	52
(5)内插误差(2)-(4)									
-2	0	6	0	-1	0	-4	0	1	0
0	1	0	3	0	-2	0	9	0	3
-2	0	1	0	2	0	0	0	5	0
0	9	0	-7	0	13	0	-10	0	3
6	0	1	0	4	0	0	0	-5	0
0	7	0	6	0	1	0	-12	0	3
2	0	3	0	-1	0	-8	0	5	0
0	2	0	0	0	-7	0	9	0	-5
均方根值 3.9									
(6)由差值信号和内插误差组成的信号(3)+(5)									
-2	18	6	-12	-1	1	-4	15	1	-20
58	1	-53	3	47	-2	-42	9	25	3
-2	-42	1	48	2	-53	0	57	5	-60
8	9	0	-7	-10	13	18	-10	-27	3
6	-53	1	49	4	-47	0	37	-5	-20
-45	7	44	6	-54	1	55	-12	-55	3
2	4	3	-10	-1	17	-18	-20	5	28
-47	2	43	0	-35	-7	28	9	-29	-5
均方根值 31									

12.2 1/3 抽取和内插

1/2 抽取图像信号用二维重叠内插滤波器重构时,可以得到很好的图像质量,和原图像相比基本上没有差别。但 1/2 抽取压缩率只有一半,压缩率太小,在许多场合不符合要求。1/4 抽取时,压缩率提高了,但再生图像损伤太大,所以用 1/3 抽取的图像信号来传输或存储,在恢复时用内插模板重构,是一个折衷的方案。但 1/3 抽取结构特殊,不能用 Walsh 方法来设计。本节中用傅立叶方法设计了 1/3 内插模板,提供了 5×5 和 11×11 的内插模板。这个方法也可以用于设计 k 为任意整数抽取下的内插模板。

(1) 5×5 内插模板的设计

设计步骤同第六章所述,先选定单位抽取矩阵 e ,求其调制点矩阵 E ,然后在满足 $E \circledast L = D$ 和 $E \odot L = d$ 条件下选择传输函数矩阵 L ,由 L 求得内插模板 m , m 必满足条件 $m * e = D$ 。与第二节方法不同之处是必然用傅立叶方法来设计。

1/3 抽取结构只有一种,即

$$e_{1/3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

用二维 Fourier 变换公式

$$E = \frac{1}{N^2} F e F \quad (12.2)$$

代入 $e_{1/3}$ 阵,求出调制点分布矩阵 $E_{1/3}$

$$E_{1/3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

式(12.2)中 F 为 N 阶离散傅立叶矩阵。

为满足 $E \circledast L = D$ 及 $E \odot L = a$, L 可选为

$$L_{1/3} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.4)$$

其重叠内插模板 m 可由下式求得

$$m = \frac{1}{N^2} PFLP^T \quad (12.5)$$

式中 P 为循环移位叠加矩阵, N 阶 P 阵为

$$P_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & N-1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ N & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & N-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

当 $N=3$ 时, P_3 为

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

将式(12.4)及(12.7)的 $L_{1/3}$ 与 P_3 代入上式,得 $1/3$ 抽取下的 5×5 内插模板 $m_{1/3}$ 为

$$m_{1/3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

$m_{1/3}$ 满足 $m * e = D$

y_3 模板中不少元素为零值,没有充分利用保留的取样值,所以内插效果不好。正如第五章所述,在二维高频处有负值的传输函数效果好,所以 L 还可选为

$$L_{1/3} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

可以验证, $L_{1/3}$ 满足条件 $E \otimes L = D, E \odot L = d$

将 $L_{1/3}$ 代入式(12.5),可得 $1/3$ 抽取下另一种 5×5 内插模板 $m'_{1/3}$

$$m'_{1/3} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 12 & -4 & 0 \\ 6 & 12 & 27 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

$m'_{1/3}$ 也满足条件 $m * e = D$

在 $m'_{1/3}$ 模板中,内插值是 8 个保留象素的加权,为了进一步改善内插效果,可扩大内插模板,下面介绍一种 11×11 的 $1/3$ 抽取内插模板。

(2) 11×11 内插模板的设计

为了加大内插模板, e 用式(12.1)的 3×3 矩阵不行了,必加大 e 阵。为了保证周期性,至少需加大到 6×6 ,所以 e 阵可选为

$$e_{1/3}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

代入式(12.2),可得调制点矩阵

$$E_{1/3}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.12)$$

在满足条件 $E \odot L = D, E \odot L = d$ 下, L 选为

$$L_{1/3}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

将 $L_{1/3}^*$ 代入式(12.5),可得 11×11 的内插模板

$m_{1/3} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 & -6 & 0 & 35 & 72 & 0 & -12 & -6 & 0 & 7 \\ -6 & 0 & 0 & -5 & 0 & 24 & -30 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -60 & 48 & 0 & -16 & 0 & 0 & -12 \\ 35 & 0 & -30 & -60 & 0 & 360 & 175 & 0 & -30 & -30 & 0 \\ 72 & 24 & 0 & 48 & 360 & 864 & 360 & 48 & 0 & 24 & 72 \\ 0 & -30 & -30 & 0 & 175 & 360 & 0 & -60 & -30 & 0 & 35 \\ -12 & 0 & 0 & -16 & 0 & 48 & -60 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -30 & 24 & 0 & -8 & 0 & 0 & -6 \\ 7 & 0 & -6 & -12 & 0 & 72 & 35 & 0 & -6 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

(12.14)

$m_{1/3}$ 满足恒定成分重构条件 $m * e = D$ 。

选用不同的 L , 还可以设计出各种内插模板。这里介绍的用傅立叶变换设计内插模板的方法, 可以用于任意整数, 如 $1/5$ 抽取, $1/6$ 抽取, 这是 Walsh 方法作不到的。另外一个特点是, 傅立叶方法设计的内插模板对中心对称, 而 Walsh 方法设计的模板对两轴对称。

12.3 图像放大用内插模板^[19]

图像放大是数字图像处理中的基本操作。一般是放大 4, 9, 16, 25 倍等。即 I^2 倍 (I 为正整数)。最常用和简单的方法是在放大的小方块中取原像素相同的灰度值, 这样放大的图像是由一块块小方块组成, 图像质量十分粗糙。

图像放大可以用二维内插重构, 上面介绍的 $1/2, 1/3, 1/4, 1/8$ 等内插公式都可以用作图像放大, 如 9 倍放大可用二次 $1/3$ 内插公式重构, 16 倍是用二次 $1/4$ 内插公式, 36 倍是可由 $1/4$ 和 $1/9$

二次内插等等。

由于图像放大时放大值均较大,所以不必将模板取得太大,一般由周围 4 个保留的像素来内插就可以了(前述每小方块中取同一灰度值相当于由一个保留像素内插)。下面介绍一些简单的放大用内插公式。这些公式都可以用前几节介绍的方法设计出来,实质上是最简单的内插法的重叠内插滤波。

4 倍图像放大用的内插模板为

$$m_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.15)$$

9 倍放大内插模板为

$$m_9 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.16)$$

25 倍放大内插模板为

$$m_{25} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.17)$$

从上可见,这些内插模板构造简单,计算量小,但效果比方块代替有明显改善。

在由 $N \times N$ 个屏幕组成的电视墙设备中,内插需用硬件实现,以保证实时内插,由于电视墙有 $3N^2$ 个分存储器,每一路都需一个内插电路,使设备复杂。这时,可用图 12-1(d)所示的邻域像素

(a) $A \quad B \quad C$

图 12-1 各种内插方法比较

图 4 第 1 行格套具 4

从图 12-1(d)可见,邻域像素交换法是将要平均的像素紧挨在一起,利用人眼对图像细节分辨力低的特性,即人眼的低通特性,实现相邻像素的平均。实验证明,这个平均方法显著减小了方块效应,而且对图像的清晰度影响不大。

172

(a) 155511	(c) 113355555555553311111111
115551	113355555555553311111111
111555	112233445555554433221111
511155	112233445555554433221111
551115	111111335555555555331111
555111	111111335555555555331111
	111111223344555555443322
	111111223344555555443322
	111111111133555555555533
	111111111133555555555533
	332211111122334455555555
	332211111122334455555555
	553311111111113355555555
	553311111111113355555555
	554433221111112233445555
	554433221111112233445555
(b) 111155555555555511111111	(d) 151555555555551511111111
111155555555555511111111	115115555555551511111111
111155555555555511111111	111551555555551511111111
111155555555555511111111	111115155555555515111111
111111115555555555551111	111115155555555515111111
111111115555555555551111	111111511555555555155111
111111115555555555551111	11111155155555555515511
111111115555555555551111	11111111515555555555151
1111111111155555555555	11111111151555555555151
1111111111155555555555	511111111151155555555515
1111111111155555555555	15111111111551555555551
1111111111155555555555	515111111111151555555555
555511111111111555555555	515111111111151555555555
555511111111111555555555	551551111111115115555555
555511111111111555555555	551551111111111551555555
555511111111111555555555	555551511111111115155555

图 12-2 放大图像的数字实例

图 12-2 是一个数字实例。图 12-2(a)是一幅由 1 和 5 组成的

斜线图像。图 12-2(b)是不加内插的 4×4 放大图像,有明显的方块效应。图 12-2(c)是数字内插后图像,有较宽的过渡带。图 12-2(d)是邻域交换法放大的图像。方块效应显著减小。

用领域交换法实现内插,只需要改变存储器的读出地址即可实现,节省了大量数字平均电路,在屏幕墙等设备中效果十分明显。

图 12-3 显示了 N 为 3~8 时的放大图案。这些图案经计算机模拟实验证明效果较好。实际上,领域交换法可实现多行多点内插,但不是内插的点和行数越多越好。图 12-4 显示的是一个圆环在 8×8 放大时的结果。图 12-4(a)是不加内插放大的图像,图 12-4(b)是内插 6 点 6 行后显示的图像,这时斜线处的方块效应虽减小了,但原直线处出现锯齿,效果并不好。图 12-4(c)是内插 4 点 4 行后显示的图像(即采用图 12-3(f)的 8×8 放大图案),效果较好。

(a)	3×3	A B A a A B A a b	插二行二列
(b)	4×4	A B A B a A B b A a b B a b a b	插二行二列
(c)	5×5	A A A B B A A B A B A a A B b a A a b B a a b a b	插二行二列
(d)	6×6	A B A B A B a A B A B b A a A B b B a A a b B b A a b a b B a b a b a b	插四行四列
(e)	7×7	A A A B A B B A A B A B A B A a A B A B b a A a A B b B A a A a b B b a A a b a b B a a b a b a b	插四行四列

(E) 8×8

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

图 12-3 $N=3 \sim 8$ 时的放大图案

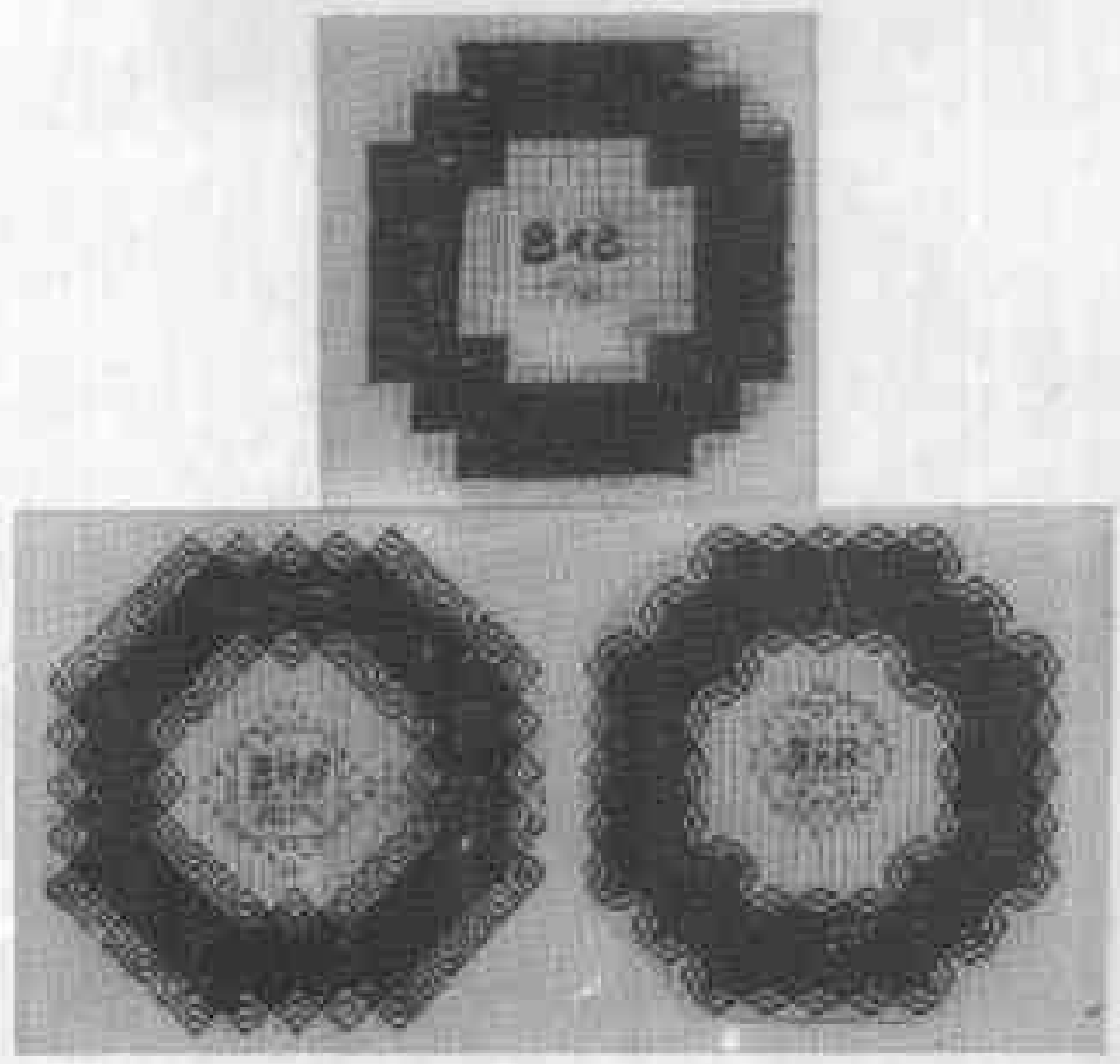


图 12-4 8×8 电视墙的二种放大图案

所以图 12-3 建议的 $N=3 \sim 8$ 的放大图案, 其内插点(或行)数为

$2\lceil\frac{N+2}{4}\rceil$, 式中符号 $\lceil \rceil$ 表示取整数部分。

这种领域像素交换平滑消除块状效应的方法,除了用于电视墙外,还可用于数字图像的编码和其它处理中。

参 考 文 献

- [1] 胡征、樊昌信,《沃尔什函数及其在通信中的应用》,人民邮电出版社,1980。
- [2] 袁保宗,《数字信号处理与通信》,1981。
- [3] Wang Zhaohua, "Overlapping Dydrift", 1989 IEEE on EMC, p. 252~257。
- [4] 王兆华, "用二维 Walsh 函数分析彩色全电视信号", 《通信学报》, No. 2 (1981), p. 50~57。
- [5] 姚庆栋、毕厚杰、王兆华、徐孟侠,《图像编码基础》,浙江大学出版社,1993. 12(修改版)
- [6] Z. H. Wang, "The Theoretical Analysis and Experimental Investigation of the Two Dimensional Spectrum Of a PAL Composite Video Signal", 《ntz Arohiv》, No. 5, p. 143~149, 1983。
- [7] Z. H. Wang, "A Simple Edge Detection by 2D Sequency Digital Filfer", Proc. of 6th international Pattern Recognition Conference, 1982. p. 1135。
- [8] 王兆华、H. Amiri, "用二维重叠数字滤波器再生亚 Nyquist 取样图像信号", 《天津大学学报》, No. 1 (1983), p. 47~64。
- [9] 王兆华、H. Amiri, "二维低通序率重叠数字滤波器的研究", 《通信学报》, Vol. 6, No. 2 (1985), p. 84~88。
- [10] 王兆华, "二维列率重叠数字滤波器", 《电子学报》, Vol. 13, No. 6 (1985), p. 13—18。
- [11] 王兆华、李乐俊, "二维内插模板的重叠序谱分析", 《信号处理》, Vol. 1, No. 2 (1985, p. 103~108。
- [12] 王兆华, "亚奈奎斯脱取样 PAL 电视信号的二维重构", 《通信学报》, Vol. 8, No. 1 (1987), p. 93~97。
- [13] 王兆华, "二维抽取和内插", 《信号处理》, Vol. 3, No. 4 (1987), p. 215~221。
- [14] 王兆华, "立体数字信息的压缩和重构", 《电子学报》, Vol. 16, No. 4 (1988), p. 40~46。

- [15] Wang Zhao-Hua, "Two-dimensional Decimation and Interpolation",
《ntzArchiv》, Bd. 10, H8(1988), p. 201~204.
- [16] 王兆华, 国澄明, 陈翔, "行频对电视图像清晰度的影响", 《电视技术》
No. 3(1988), p. 2~4.
- [17] 王兆华, "Fourier 基本图形和 Fourier 变换图形对", 《信息和控制》, No. 5
(1981), p. 48~49.
- [18] 候正信, "三种二维重叠数字滤波器的构造", 《天津大学学报》, No. 1
(1985), p. 29~41.
- [19] 王兆华, "图像放大的内插模板", 《电视技术》, No. 4(1988), p. 2~7.
- [20] 王兆华等, "电视组合画面的放大图案", 中国专利, 90109417.