加权距离判别分析法在岩体质量等级分类中的应用

姚银佩[1, 2]，李夕兵[1, 2]，宫凤强[1, 2]，彭　康[1, 2]

(1. 中南大学　资源与安全工程学院，湖南 长沙　410083；2. 中南大学 深部金属矿产开发与灾害控制湖南省重点实验室，湖南 长沙　410083)

摘要：距离判别分析法是一种按多指标性能参数进行分类的方法，已被应用于工程岩体质量的等级分类中。但传统的距离判别法对各个指标的重要性同等对待，夸大一些微小变化指标的作用。因此，采用加权马氏距离对样本中各指标进行加权处理以区分其重要性。首先对工程岩体质量指标运用主成分分析思想，计算出一组新的指标参数和与之对应的反应原始指标信息的贡献率，以贡献率组成对角阵作为权值矩阵；然后把数据标准化处理，计算加权马氏距离判别岩体质量等级。将该方法应用于工程实践，并与人工神经网络法、距离判别法进行比较。研究结果表明，加权距离判别分析法具有更高的判别能力，是一种准确有效的岩体质量分级方法。

关键词：岩石力学；岩体质量分级；马氏距离判别；加权马氏距离方法；距离判别分析

中图分类号：TU 45　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1000－6915(2010)增 2－4119－05

APPLICATION OF WEIGHTED MAHALANOBIS DISTANCE DISCRIMINANT ANALYSIS METHOD TO CLASSIFICATION OF ROCK MASS QUALITY

YAO Yinpei[1, 2]，LI Xibing[1, 2]，GONG Fengqiang[1, 2]，PENG Kang[1, 2]

(1. *School of Resources and Safety Engineering*，*Central South University*，*Changsha*，*Hunan* 410083，*China*；2. *Hunan Key Laboratory of Resources Exploitation and Hazard Control for Deep Metal Mines*，*Central South University*，*Changsha*，*Hunan* 410083，*China*)

Abstract：Distance discriminant analysis method is one of classification methods according to multi-index performance parameters；and it has been applied to classification of engineering rock mass quality. However，the traditional Mahalanobis distance discriminant method treats with the importance of all parameters equally，and exaggerates the role of parameters which changes a little. The weighted Mahalanobis distance is used in discriminant analysis method to distinguish the importance of each parameter to improve the classification of rock mass quality. In the concrete application，firstly based on the principal component analysis scheme，a new group of parameters and their corresponding percent contributions of the parameters of rock mass quality are calculated；and the weighted matrix is regarded as the diagonal matrix of the contributions rates. Setting data to standardization，then the weighted Mahalanobis distance can be calculated to classify rock mass quality. The new method is used in practical project and compared with the artificial neural network method and Mahalanobis distance discriminant analysis method. The results show that the weighted Mahalanobis distance method has a higher discriminant ability；and prediction results are in better agreement with the fact. It is an exact and effective classification method of rock mass quality.

Key words：rock mechanics；classification of rock mass quality；Mahalanobis distance discriminant；weighted Mahalanobis distance method；distance discriminant analysis

---

收稿日期：2010－05－13；**修回日期：**2010－06－13

基金项目：国家重点基础研究发展计划(973)项目(2010CB732004)；国家自然科学基金资助项目(10872218，50934006)

作者简介：姚银佩(1985－)，男，2008 年毕业于中南大学采矿与岩土工程专业，现为硕士研究生，主要从事采矿技术与岩土工程方面的研究工作。E-mail：yaoyinpei@163.com

1　引　言

工程岩体质量等级分类是各种岩石力学与工程基础工作的重要环节之一，其目的是从工程的实际需求出发对岩石工程的基础或围岩的岩体进行分类，以便根据其工程质量好坏合理地设计岩体工程[1~4]。

由于工程岩体本身的物理属性和结构特性具有较高的复杂性和不确定性，因此，工程岩体分类考虑的因素众多，形成了多种对工程岩体分类的方法[1]。早期的分类方法主要考虑岩体的单一因素，多偏向于对岩石属性的认识，随着人们认识的深入，逐渐地由单一因素分级发展到多因素综合分级，由定性发展到定性与定量相结合的分级方法[1]。近几年来，许多研究人员把可拓学理论[5]、神经网络法[6]、支持向量机理论[7]应用到岩体质量评价中，取得了很好的效果。最近，距离判别分析方法[8~11]也被引入到岩体质量评价中。但是传统的距离判别分析法一般使用常规的马氏(Mahalanobis)距离，马氏距离对要处理的参数是同等对待的，而在实际问题中多个指标的重要性不尽相同，马氏距离夸大了某些微小变化指标的作用，因此，有必要对传统的马氏距离[12~14]进行改进，对各项指标的重要性加以区分。为此，本文采用一种对岩体各指标进行加权的方法，得到加权马氏距离，进而判别岩体质量等级，提高判别精度，取得了较好的效果。

2　距离判别分析法

2.1　马氏距离判别分析法

设 $\boldsymbol{G}=\{\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_m\}^{\mathrm{T}}$ 为 m 元总体(考察 m 个指标)，样本 $\boldsymbol{X}=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m\}^{\mathrm{T}}$。令 $\boldsymbol{\mu}_i=E(\boldsymbol{X}_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，则总体均值向量 $\boldsymbol{\mu}=\{\boldsymbol{\mu}_1,\ \boldsymbol{\mu}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\mu}_m\}^{\mathrm{T}}$。总体 $\boldsymbol{G}$ 的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{cov}(\boldsymbol{G})=E[(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}] \tag{1}$$

样本 $\boldsymbol{X}$ 与总体 $\boldsymbol{G}$ 的马氏距离平方为

$$d^2(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{G})=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}) \tag{2}$$

设有 k 个 m 元总体：$\boldsymbol{G}_1,\ \boldsymbol{G}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{G}_k(k>2)$，其各自的均值向量和协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{\mu}_i$，$\boldsymbol{\Sigma}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$。对任意给定的 m 元样本 $\boldsymbol{X}$，可以按马氏距离最近准则对 $\boldsymbol{X}$ 进行判别分类，确定其属于的总体。首先计算样本 $\boldsymbol{X}$ 到 k 个总体的马氏距离平方 $d^2(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{G}_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，然后进行比较，把样本 $\boldsymbol{X}$ 判归距离最小的总体。即判别准则为：设 $i=l$ 时，若 $d^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{G}_l)=\min\limits_{i=1,\ 2,\ \cdots,\ k}\{d^2(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{G}_i)\}$，则样本 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{G}_l$。

2.2　加权马氏距离

在上面介绍的马氏距离判别分析法中，其对样本 $\boldsymbol{X}$ 的 m 个指标是同等对待的，即每个指标在决定马氏距离大小时具有同等的重要性，而在实际问题中，往往这些指标在判定样本 $\boldsymbol{X}$ 属于的总体 $\boldsymbol{G}$ 时所起作用是不尽相同的，即其重要性程度存在差异，因此，马氏距离夸大了一些微小变化指标的作用。如果不对指标的重要性进行区分，在判定时可能造成较大的误判。为了减小这种影响，根据何　桢等[12~14]的研究，在马氏距离的基础上加入指标的权重，以区分各指标的重要性，得到加权马氏距离平方为

$$\tilde{d}^2(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{G})=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}) \tag{3}$$

其中，

$$\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}(w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m)$$

式中：$\boldsymbol{W}$ 为对角矩阵；$w_i\in[0,\ 1]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，对应于各指标在距离函数中的权重，$\Sigma w_i=1$。

2.3　加权马氏距离判别法

首先采用主成分分析法[14~17]对样本 $\boldsymbol{X}$ 的指标进行分析，转化成对应的有确定贡献率的新样本 $\boldsymbol{X}'$，以贡献率为权值计算加权马氏距离，并与马氏距离相比较，得到权矩阵 $\boldsymbol{W}$。

假设总体 $\boldsymbol{G}$ 的均值向量为 $\boldsymbol{\mu}$，协方差阵为 $\boldsymbol{\Sigma}>0$，且不妨设 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{\mu}=0$，其中 $\boldsymbol{R}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 的相关系数阵，否则，可对数据进行标准化处理，还可消除量纲的影响。这样便可求得 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的非零特征根 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m>0$，及其对应的单位化特征向量 $\boldsymbol{U}_1,\ \boldsymbol{U}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{U}_m$。记 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\lambda_m)$，$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\ \boldsymbol{U}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{U}_m)$，则有 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}$。记 $\boldsymbol{X}'=\{x_1',\ x_2',\ \cdots,\ x_m'\}$，则 x_i' 对 $\boldsymbol{X}$ 中各分量方差总和的贡献率 $\eta_i=\lambda_i/\mathrm{tr}\boldsymbol{\Sigma}=\lambda_i/\mathrm{tr}\boldsymbol{\Lambda}$，简称 $x_i'(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 的方差贡献率。

记 $\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_m)$，而 $\boldsymbol{\mu}_i'=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_i'=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_i\boldsymbol{U}$ 分别为经变换后 $\boldsymbol{G}_i$ 的均值与协方差阵，因为 x_i' 和 x_j' 之间相互独立 $(i\neq j)$，于是可将 x_i' 的方差贡献率看成 x_i' 的权值，则 $\boldsymbol{X}$ 到 $\boldsymbol{G}_i$ 的加权马氏距离平方为

$$\begin{aligned}\tilde{d}_i^2=\tilde{d}^2(\boldsymbol{X}',\ \boldsymbol{G}_i)_{\boldsymbol{H}}&=(\boldsymbol{X}'-\boldsymbol{\mu}_i')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Sigma}_i'^{-1}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'-\boldsymbol{\mu}_i')=\\&[\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_i)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_i)]=\\&(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_i)\end{aligned} \tag{4}$$

与式(3)对比，得到

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{UHU}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\mathrm{tr}\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{U\Lambda U}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\mathrm{tr}\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{\Sigma}=\frac{1}{\mathrm{tr}\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{R} \tag{5}$$

于是给出加权马氏距离判别法的判别规则，其简化后为

$$\tilde{d}_i^2=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}_i) \tag{6}$$

若 $\tilde{d}_l^2=\min\{\tilde{d}_i^2,\ 1\leqslant i\leqslant k\}$，则 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{G}_l$。

3　岩体质量等级加权马氏距离判别模型

参考工程岩体质量分级有关研究[6~8]，以单轴抗压强度($\boldsymbol{X}_1$)、岩体声波纵波速度($\boldsymbol{X}_2$)、体积节理数($\boldsymbol{X}_3$)、节理面粗糙度系数($\boldsymbol{X}_4$)、节理面风化变异系数($\boldsymbol{X}_5$)和透水性系数($\boldsymbol{X}_6$)共 6 个指标作为加权马氏距离判别分析的判别指标，根据王 彪等[6]所提供的四川金沙江白鹤滩水电站坝址岩体实测资料进行数据标准化处理(见表 1)，选取其中 20 个学习样本，另外 10 个样本作为待判样本。实测资料显示此工程岩体分为 II，III，IV 共 3 个种类。II，III，IV 类岩体可以看作是 3 个不同类别岩体的总体 $\boldsymbol{G}_i$ (i=1，2，3)。

考虑 3 个总体的协方差矩阵不一定相同，分别求出样本各总体的协方差矩阵。对 20 个样本 $\boldsymbol{X}$ 的 6 个判别指标进行主成分分析，得到 6 个新的相互独立的能够反映原指标信息的综合指标 $\boldsymbol{X}'$。求出权矩

表 1　不同分析方法判别结果比较

Table 1　Comparisons of results of different discriminant analysis methods

样本编号	判别指标						岩体质量等级			
	$\boldsymbol{X}_1$	$\boldsymbol{X}_2$	$\boldsymbol{X}_3$	$\boldsymbol{X}_4$	$\boldsymbol{X}_5$	$\boldsymbol{X}_6$	实测	BP[6]	MD[8]	WMD
1#	0.64	0.98	1.00	0.67	0.30	1.00	IV	IV	IV	IV
2#	0.51	0.94	0.50	0.33	0.20	0.90	IV	III	IV	IV
3#	0.55	0.74	1.00	1.00	0.24	0.80	IV	IV	IV	IV
4#	0.61	0.83	1.00	0.67	0.37	0.80	IV	V	IV	IV
5#	0.64	0.81	0.50	0.67	0.63	0.90	IV	IV	IV	IV
6#	0.72	0.73	1.00	0.67	0.42	0.80	IV	IV	IV	IV
7#	0.45	0.82	0.50	0.67	0.21	0.90	III	III	III	III
8#	0.56	0.84	0.67	0.67	0.32	0.90	III	III	III	III
9#	0.56	0.84	0.50	0.33	0.37	0.90	II	II	II	II
10#	0.36	1.00	0.67	0.67	0.51	0.60	III	III	III	III
11#	0.28	0.36	0.50	1.00	0.82	0.70	IV	IV	IV	IV
12#	0.43	0.50	0.50	1.00	0.82	0.70	III	II	III	III
13#	0.33	0.24	0.50	1.00	0.69	0.70	IV	IV	IV	IV
14#	0.29	0.25	0.50	1.00	0.80	0.60	III	III	III	III
15#	0.50	0.56	0.50	1.00	0.53	0.70	IV	III	IV	IV
16#	0.67	0.58	0.50	1.00	0.46	0.70	IV	IV	IV	IV
17#	0.53	0.45	1.00	1.00	0.70	0.70	III	III	III	III
18#	0.43	0.72	1.00	1.00	0.59	0.80	III	III	II	III
19#	0.54	0.72	0.50	1.00	0.60	0.80	II	II	II	II
20#	0.28	0.52	0.67	1.00	0.78	1.00	III	III	III	III
21#	0.50	1.00	1.00	0.33	0.32	1.00	II	II	II	II
22#	0.50	1.00	1.00	0.33	0.23	1.00	II	II	II	II
23#	0.41	0.44	0.50	1.00	1.00	0.80	IV	IV	IV	IV
24#	0.87	1.00	0.50	0.33	0.61	0.90	III	III	III	II
25#	1.00	0.92	0.50	0.33	0.37	0.90	II	II	II	II
26#	0.82	1.00	0.50	0.27	0.53	0.90	II	II	II	II
27#	0.87	0.92	0.50	0.27	0.47	0.90	II	I	II	II
28#	0.94	0.92	0.50	0.33	0.26	0.90	II	II	II	II
29#	0.54	0.72	0.50	1.00	0.60	0.80	IV	IV	IV	IV
30#	0.62	0.98	0.33	1.00	0.56	0.90	III	III	IV	III

注：21#～30#为待判岩体样本；BP[6]，MD[8]和 WMD 分别为人工神经网络法、马氏距离法和加权马氏距离法。

阵 $\boldsymbol{W}$，而实际计算时只需求出相关系数矩阵 $\boldsymbol{R}$，并且以每个指标参数值除以该指标最大值的方法把数据标准化处理，代入式(6)算出加权马氏距离，然后依据加权马氏距离的大小来判别待判样本岩体质量等级。其中相关系数 $\boldsymbol{R}$ 的值为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 1.000 & 0.604 & -0.088 & -0.629 & -0.428 & 0.403 \\ 0.604 & 1.000 & 0.149 & -0.748 & -0.705 & 0.651 \\ -0.088 & 0.149 & 1.000 & -0.028 & -0.323 & 0.159 \\ -0.629 & -0.748 & -0.028 & 1.000 & 0.599 & -0.597 \\ -0.428 & -0.705 & -0.323 & 0.599 & 1.000 & -0.493 \\ 0.403 & 0.651 & 0.159 & -0.597 & -0.493 & 1.000 \end{bmatrix}$$

判别分析步骤示意图如图 1 所示。

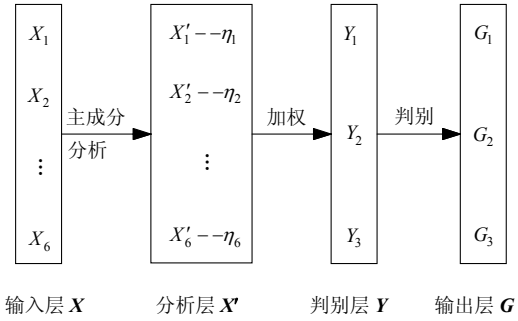


图 1　加权马氏距离判别步骤示意图

Fig.1　Sketch of weighted Mahalanobis method steps

另外在对样本进行主成分分析及计算马氏距离和加权马氏距离时，计算量比较大，为此可以借助统计分析软件[18, 19]来完成。

4　加权马氏距离分析法改进效果检验

根据加权马氏距离对 20 个样本研究得出判别函数，并对 10 个待判样本进行判别，并利用回代的方法对 20 个学习样本进行判别。表 1 中分别列举了利用 BP 人工神经网络法(back propagation artificial neural network)[6]、马氏距离(Mahalanobis distance)[8]和加权马氏距离(weighted Mahalanobis distance)判别法判别的结果，并进行对比。

通过对比可知，人工神经网络法判错概率为 27%；利用马氏距离在对待判样本判别中误判 30# 样本，回判学习样本时误判 18#样本，而加权马氏距离判别结果只有 24#误判。这说明加权马氏距离判别分析法用于岩体工程质量分级比马氏距离判别法更准确、有效，提高了对工程岩体质量等级判别的精度。

为了提高判别的准确度，在计算过程中使用的协方差为每个整体的协方差，没有假定每个整体的协方差都相等且等于样本的协方差。但需要注意的是，并不是每个整体的协方差都能计算得到加权马氏距离，这就要求选取样本时容量尽量要大，且样本的参数分布均匀。另外，加权马氏距离中用相关性系数阵作为权重矩阵，反映了指标间的相关性，有时不妨用学习样本和预测样本一起组成整体来求相关性矩阵。

5　结　论

本文在马氏距离判别工程岩体质量等级的基础上，针对马氏距离未考虑岩体质量各指标重要性存在差异这一不足，采用加权马氏距离对判别指标进行加权处理，以区分其重要性。

首先应用主成分分析的方法处理样本参数，得出样本总体的相关性系数阵作为权重矩阵；然后建立判别模型。把加权马氏距离判别法应用到工程实例中，通过与人工神经网络法及马氏距离判别法相比较，表明该方法提高了对岩体质量等级判别的精度。在实际应用时，应加强对岩体质量样本数据库的收集和整理，以增强加权距离判别分析法的适用性和高效性。

参考文献(References)：

[1] 唐胜传，黄润秋. 岩体质量分类[J]. 西南工学院学报，2001，16(4)：40－43.(TANG Shengchuan，HUANG Runqiu. Research on rock mass quality classification at right bank of a hydropower engineering，Yunnan[J]. Journal of Southwest China Institute of Technology，2001，16(4)：40－43.(in Chinese))

[2] 陈昌彦，王贵荣. 各类岩体质量评价方法的相关性探讨[J]. 岩石力学与工程学报，2002，21(12)：1 894－1 900.(CHEN Changyan，WANG Guirong. Discussion on the interrelation of various rock mass quality classification systems at home and abroad[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2002，21(12)：1 894－1 900.(in Chinese))

[3] 谢本贤，陈沅江，史秀志. 深部岩体工程围岩质量评价的 IRMR 法研究[J]. 中南大学学报(自然科学版)，2007，38(5)：987－992.(XIE Benxian，CHEN Yuanjiang，SHI Xiuzhi. IRMR method for evaluation of surrounding rock quality in deep rock mass engineering[J]. Journal

of Central South University(Science and Technology)，2007，38(5)：987－992.(in Chinese))

[4] 宫凤强，李夕兵，高　科. 地下工程围岩稳定性分类的突变级数法研究[J]. 中南大学学报(自然科学版)，2008，39(5)：1 081－1 086.(GONG Fengqiang，LI Xibing，GAO Ke. Catastrophe progression method for stability classification of underground engineering surrounding rock[J]. Journal of Central South University(Science and Technology)，2008，39(5)：1 081－1 086.(in Chinese))

[5] 原国红，陈剑平，马　琳. 可拓评判方法在岩体质量分类中的应用[J]. 岩石力学与工程学报，2005，24(9)：1 539－1 544.(YUAN Guohong，CHEN Jianping，MA Lin. Application of extenics to evaluation of engineering quality of rock masses[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2005，24(9)：1 539－1 544.(in Chinese))

[6] 王　彪，陈剑平，李钟旭，等. 人工神经网络在岩体质量分级中的应用[J]. 世界地质，2004，23(1)：64－68.(WANG Biao，CHEN Jianping，LI Zhongxu，et al. Application of artificial neural network in rock mass quality classification[J]. Global Geology，2004，23(1)：64－68.(in Chinese))

[7] 赵洪波. 岩体分级的进化支持向量机的方法研究[J]. 绍兴文理学院学报，2004，24(7)：82－84.(ZHAO Hongbo. Classification of rock mass with genetic-support vector machine[J]. Journal of Shaoxing University，2004，24(7)：82－84.(in Chinese))

[8] 宫凤强，李夕兵. 距离判别分析法在岩体质量等级分类中的应用[J]. 岩石力学与工程学报，2007，26(1)：190－193.(GONG Fengqiang，LI Xibing. Application of distance discriminant analysis method to classification of engineering quality of rock masses[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2007，26(1)：190－193.(in Chinese))

[9] 宫凤强，李夕兵. 膨胀土胀缩等级分类中的距离判别分析法[J]. 岩土工程学报，2007，29(3)：463－466.(GONG Fengqiang，LI Xibing. Distance discriminant analysis to the classification of the grade of shrink and expansion for the expansive soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering，2007，29(3)：463－466.(in Chinese))

[10] 王吉亮，陈剑平，杨　静. 距离判别法在公路隧道围岩分类中的应用[J]. 吉林大学学报(地球科学版)，2008，38(6)：999－1 004.(WANG Jiliang，CHEN Jianping，YANG Jing. Application of distance discriminant analysis method in classification of surrounding rock mass in highway tunnel[J]. Journal of Jilin University(Earth Science)，2008，38(6)：999－1 004.(in Chinese))

[11] 宫凤强，李夕兵，张　伟. 隧道围岩分级的距离判别分析模型及应用[J]. 铁道学报，2008，30(3)：119－123.(GONG Fengqiang，LI Xibing，ZHANG Wei. Study and application of distance discriminant analysis model in tunnel surrounding rock classification[J]. Journal of the China Railway Society，2008，30(3)：119－123.(in Chinese))

[12] 何　桢，张于轩. 多响应试验设计的优化方法研究[J]. 工业工程，2003，6(4)：35－38.(HE Zhen，ZHANG Yuxuan. A method for optimization of multiresponse experimental design[J]. Industrial Engineering Journal，2003，6(4)：35－38.(in Chinese))

[13] 何　桢，吕海利. 用加权马氏距离法进行多响应产品设计的一种改进[J]. 组合机床与自动化加工技术，2007，(2)：88－91.(HE Zhen，LU Haili. An improvement to the method of multi-response product design using weighted Mahalanobis distance[J]. Modular Machine Tool and Automatic Manufacturing Technique，2007，(2)：88－91.(in Chinese))

[14] 赵　琳，罗　汉，刘　京. 加权马氏距离判别分析方法及其权值确定——旅游信息服务系统的智能推荐[J]. 经济数学，2007，24(2)：185－188.(ZHAO Lin，LUO Han，LIU Jing. Weighted Mahalanobis distance and the weight-determining method—the arithmetic of tourism information recommender system[J]. Mathematics in Economics，2007，24(2)：185－188.(in Chinese))

[15] 王学民. 应用多元分析[M]. 上海：上海财经大学出版社，1999.(WANG Xuemin. Multivariate analysis[M]. Shanghai：Shanghai University of Finance and Economics Press，1999.(in Chinese))

[16] 袁志发，周静芋. 多元统计分析[M]. 北京：科学出版社，2002.(YUAN Zhifa，ZHOU Jingyu. Multivariate statistical analysis[M]. Beijing：Science Press，2002.(in Chinese))

[17] 范金城，梅长林. 数据分析[M]. 北京：科学出版社，2002.(FAN Jincheng，MEI Changlin. Data analysis[M]. Beijing：Science Press，2002.(in Chinese))

[18] 孙　祥，徐流美，吴　清. MATLAB 7.0 基础教程[M]. 北京：清华大学出版社，2005.(SUN Xiang，XU Liumei，WU Qing. Introduction to MATLAB 7.0[M]. Beijing：Tsinghua University Press，2005.(in Chinese))

[19] 朱世武. SAS 编程技术教程[M]. 北京：清华大学出版社，2007.(ZHU Shiwu. Programming tutorial of SAS[M]. Beijing：Tsinghua University Press，2007.(in Chinese))