文章编号: 1006-4710(2012)01-0094-04

基于分形维数的全变分图像平滑模型

王小侠，赵凤群，戴芳，郭文艳
(西安理工大学 理学院，陕西 西安 710054)

摘要: 针对标准全变分模型用梯度检测边缘易受噪音干扰产生"阶梯"效应和在处理纹理丰富的图像时易丢失细节纹理信息的缺点，提出了一种基于分形维数的全变分模型，该模型可利用图像局部分形维数来检测边缘，能够准确识别真实边缘、剔除假性边缘，从而抑制"阶梯"效应，可保护纹理丰富的图像的纹理细节信息。平滑后的图像显示出改进方法能有效去除噪声并减弱"阶梯"效应，获得较高峰值的信噪比。

关键词: 图像去噪; TV 模型; 分形维数; 边缘检测
中图分类号: TP391 **文献标志码:** A

Image Smoothing Model Based on Fractal Dimension and Total Variation

WANG Xiaoxia, ZHAO Fengqun, DAI Fang, GUO Wenyan
(Faculty of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: With the aim of preventing the traditional total variation method from using the gradient to detect the edges easily subjecting to noise interference to produce "staircase" effect and of dealing with the defects of image with rich textures easily losing the fine textures, an improved total variation model based on fractal dimension is presented. The local fractal dimension is introduced into the new model to detect the edges so that the true edges are accurately recognized and the artificial ones are eliminated, therefore, the "staircase" effect is inhibited and the textures are protected. The smoothed images show that the improved method can not only effectively eliminate noises and weaken the "staircase" effects but also obtain the higher PSNR than the traditional total variation model.

Key words: image smoothing; total variation model; fractal dimension; edge detecting

在图像的生成和传输中大量噪声的加入会严重影响图像的视觉效果。为了克服噪声对图像质量的影响，人们提出了基于变分[1-2]、插值[3-4]、小波[5]、分形[6]等平滑算法以及某几种方法相结合的平滑算法[6-7]来对噪声污染的图像进行平滑。然而在对噪声污染图像平滑过程中保留图像边缘和抑制噪声始终是一对矛盾。标准的全变模型即 TV 模型能去除噪声同时较好地保持边缘且算法简单，但存在一些缺点，如在处理纹理图像时容易丢失纹理细节信息[1]。同时该模型利用梯度检测边缘时受噪声影响较大，易出现"阶梯"效应。针对于此，出现了各种改进的全变分模型[7-10]，但是将分形维数引入全变分模型进行图像平滑的报道目前还相对较少。

自然界中大多数表面映射成的灰度图像是具有相同分形特征的分形表面，且分形维数与人类视觉系统对图像粗糙度的感知是一致的，分形维数越大对应的图像表面越粗糙，分形维数越小对应的图像表面越光滑[11]。分形维数可以很好地表征纹理的粗糙程度。本研究将分形维数引入全变分模型，构造新的扩散函数，使得新模型在去噪同时能更好地保持边缘和纹理信息。

1 分形与分形维数

分形的本质是"自相似"。自然界一般景物通常具有统计意义上的自相似性，同时自然界中大多数物质表面所映射成的灰度强度分布场也具有分形

收稿日期: 2011-09-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60971127)；陕西省自然科学基础研究计划基金资助项目(2011JM1013)；西安理工大学校计划基金资助项目(108-210710)；西安理工大学博士启动基金资助项目(108-211011)。
作者简介: 王小侠(1975-)，女，陕西渭南人，讲师。研究方向为图像处理中的分形与小波方法的应用研究。
E-mail: wangxiaoxia@xaut.edu.cn。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

特征。图像的纹理特征越强分形维数越大,反之,分形维数越小,且对尺度变化不敏感,这与人类视觉系统有很大的相似之处。因此,分形维数常被应用于图像的压缩、纹理识别、分割,等。

定义 1 对 n 维欧氏空间中的有界集合 A,若 A 可以表示为其自身的 N_r 个互不覆盖的子集的并集时,则 A 是自相似的[8]。此时,A 的分形相似维数 $FD(A)$ 为:

$$N_r r^{FD(A)} = 1 \tag{1}$$

故有:

$$FD(A) = \frac{\log N_r}{\log(1/r)} \tag{2}$$

其中,r 是所有坐标方向上的尺度因子,N_r 是有界集合 A 的互不覆盖的子集个数。

在灰度图像中将二维图像视作三维空间中的表面,图像灰度的变化情况由该表面的粗糙程度反映。目前已有许多估计其分形维数的方法,例如频域法、计盒维数法和基于数学形态学的方法等。本研究采用文献[12]中基于相消小波分形维数的计算方法。

2 模型的建立

设 $I(x,y)$ 为原始无噪图像,$I_0(x,y)$ 为被噪声污染的图像,则:

$$I_0(x,y) = I(x,y) + n(x,y) \tag{3}$$

其中,$n(x,y)$ 为具有零均值,方差为 σ^2 的高斯白噪声。

基于变分的图像平滑模型可归结为方程的最小值问题,即:

$$J_r[I] = \iint_\Omega R(|\nabla I|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\lambda}{2}\iint_\Omega |I - I_0|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

其中,$I \in L^2(\Omega)$,$\Omega \in R^n$。

相应的 Euler 时间演化格式为:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla\cdot(G(|\nabla I|)\nabla I) + \lambda(I_0 - I) \tag{5}$$

其中,$G(|\nabla I|) = \dfrac{R'(|\nabla I|)}{|\nabla I|}$ 为扩散函数,λ 为正则化参数。

选择不同函数 $G(\cdot)$ 对应的不同平滑模型。一般地 $G(\cdot)$ 取为非负光滑不增函数,且满足 $G(0) = 1$,$\lim\limits_{s\to\infty} G(s) = 1$。当 $G(|\nabla I|) = 1/|\nabla I|$ 时则成为著名的整体变分(TV)图像平滑模型。该模型对具有重复模式的小尺度噪音有很好的平滑效果,但对纹理丰富的图像容易造成细节丢失。另外,由于梯度容易受噪声的干扰,而不能正确区分真实边缘和由于噪声引起的假性边缘。黄宸、柳建分别从理论和试验证明了相消小波变换的分形维数有较强的抗噪声干扰能力,能够较好地识别图像的真实边缘,并将其用于噪声图像的边缘检测[12]。受此启发,笔者将分形维数引入 TV 模型,用分形维数替代 TV 模型中的梯度算子,定义新的基于分形维数的扩散函数为:

$$G(FD(I)) = 1/\sqrt{1 + (FD(I)/k)^2} \tag{6}$$

从而得到改进的模型为:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial t} = \nabla\cdot(G(FD(I))\nabla I) + \lambda(I_0 - I) \\ I(x,y,0) = I_0 \end{cases} \tag{7}$$

其中,$FD(I)$ 为图像 I 的分形维数,k 为阈值参量,λ 为正则化参数。

2.1 模型分析

如图 1 所示,$x-y$ 是整体坐标,(x,y) 点处的局部坐标为 $\eta-\xi$,其中 η 轴在该点处平行于图像梯度方向,ξ 轴是对应的垂直方向。则容易得到(7)式中第一个式子相应局部坐标系下的微分形式为:

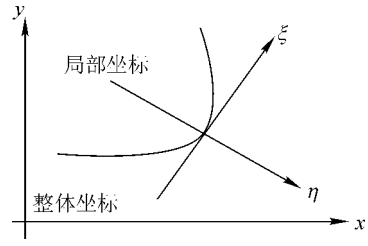


图 1 整体坐标与局部坐标示意图
Fig. 1 Global and local coordinates

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &= \nabla\cdot(G(FD(I))\nabla I) + \lambda(I_0 - I) = \\
&G(FD(I))\left(\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y}\right) + \\
&\frac{I_x}{|\nabla I|}\frac{\partial(G(FD(I))\,|\,\nabla I\,|)}{\partial x} + \\
&\frac{I_y}{|\nabla I|}\frac{\partial(G(FD(I))\,|\,\nabla I\,|)}{\partial y} + \\
&G(FD(I))\,|\nabla I|\left(I_x\frac{\partial(1/|\nabla I|)}{\partial x} + \right. \\
&\left. I_y\frac{\partial(1/|\nabla I|)}{\partial y}\right) + \lambda(I_0 - I) = \\
&G(FD(I))(I_{xx} + I_{yy}) + \\
&\frac{(G(FD(I))\,|\,\nabla I|)'}{|\nabla I|^2}(I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_{yy} I_y^2) - \\
&\frac{G(FD(I))}{|\nabla I|^2}(I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_{yy} I_y^2) + \lambda(I_0 - I)
\end{aligned}$$

根据图 1 中整体坐标与局部坐标的关系有:

$$I_{\eta\eta} = \frac{I_{xx}I_x^2 + 2I_{xy}I_x I_y + I_{yy}I_y^2}{|\nabla I|^2},$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta} = I_{xx} + I_{yy}$$

则:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = G(FD(I))(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta}) + (G(FD(I)) \mid \nabla I \mid) I_{\eta\eta} - G(FD(I)) I_{\eta\eta} + \lambda(I_0 - I) = G(FD(I)) I_{\xi\xi} + (G(FD(I)) \mid \nabla I \mid) I_{\eta\eta} + \lambda(I_0 - I) \quad (8)$$

其中,I_x,I_y 分别表示对 x 和 y 的一阶偏导数,I_{xy},I_{xx},I_{yy},$I_{\eta\eta}$,$I_{\xi\xi}$ 分别表示对 x,y,η 和 ξ 的二阶偏导数。从式(8)右端第一项看到,扩散只发生在 ξ 方向即边缘方向,在梯度方向没有扩散,从而使得图像的边缘得以保持。$G(FD(I)) = 1/\sqrt{1 + (FD(I)/k)^2}$ 控制扩散的速度是非增的,故在图像灰度变化平缓处分形维数 $FD(I)$ 较小,$G(FD(I))$ 值相对较大,进行强制扩散对图像进行平滑处理,能够有效去除孤立噪声。而在图像边缘或纹理细节处分形维数较大,$G(FD(I))$ 相对较小,扩散系数对图像进行保护边缘和纹理细节处理。第二项为运输项(主要发生在梯度方向),可帮助去除假性边缘,对于产生激波、保持边缘有很重要的意义。第三项为忠诚项是控制平滑后的图像与原图像的保真度。

由以上分析可以看出,改进模型能够根据分形维数大小进行不同强度的噪声平滑,在图像光滑部分平滑强度大,在纹理和边缘部分平滑减弱或者不平滑,由此本研究避免了传统TV模型由于梯度算子将光滑区域的噪声误认为边缘而引起的"阶梯"效应。

2.2 模型的离散

模型时间离散采用向前差分格式,空间离散采用半点差分格式,空间步长 $h = 1$。算法与传统TV模型离散算法类似,不同之处在于改进模型中没有涉及梯度的计算,取而代之的是分形维数的估计。(7)式离散后为:

$$\frac{I_{i,j}^n - I_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = \left(\frac{G(FD(I_{i+1,j}^{n-1})) + G(FD(I_{i,j}^{n-1}))}{2} I_{i+1,j}^{n-1} + \frac{G(FD(I_{i-1,j}^{n-1})) + G(FD(I_{i,j}^{n-1}))}{2} I_{i-1,j}^{n-1} + \frac{G(FD(I_{i,j-1}^{n-1})) + G(FD(I_{i,j}^{n-1}))}{2} I_{i,j-1}^{n-1} + \frac{G(FD(I_{i,j+1}^{n-1})) + G(FD(I_{i,j}^{n-1}))}{2} I_{i,j+1}^{n-1}\right) + \lambda I_{i,j}^0 - (\lambda + (G(FD(I_{i+1,j}^{n-1})) + G(FD(I_{i-1,j}^{n-1})) + G(FD(I_{i,j+1}^{n-1})) + G(FD(I_{i,j-1}^{n-1})))/2 + 2G(FD(I_{i,j}^{n-1}))) I_{i,j}^{n-1} \quad (9)$$

具体算法为:

1) 输入初始的含噪图 I_0,给定迭代步数 N、梯度参量 k 以及正则化参量 λ,置 $n = 1$,$I^0 = I_0$;

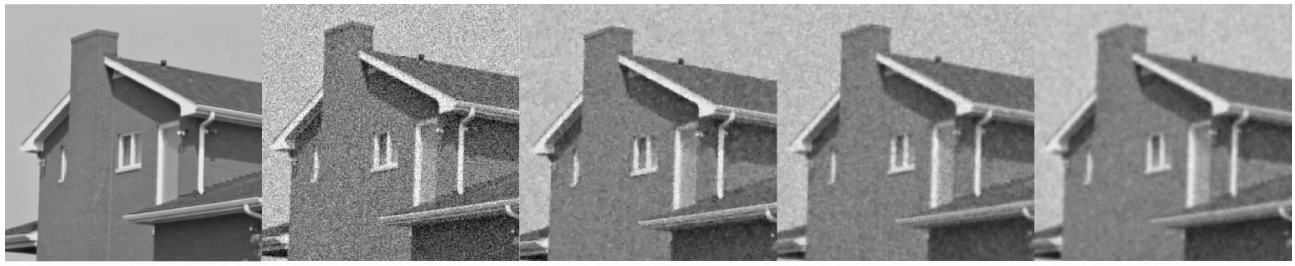
2) 对每个像素计算基于相消小波变换的分形维数;

3) 按照离散格式(9)计算 n 时刻的图像 I^n,置 $n = n + 1$;

4) 若 $n > N$ 则停止,此时的 I^n 即为最终得到的平滑后的图像,否则转第2步。

3 实验结果与分析

基于非线性复数域的扩散方程模型是一种经典的图像锐化和去噪模型,该模型能够避免高斯滤波器周期拓展带来的边缘模糊和假性边缘引起的"阶梯"效应问题。为验证本模型的平滑效果在House加入分别不同水平的高斯白噪声,应用TV模型、非线性复数域扩散模型与本模型进行处理。图2给出house原图,加入噪声标准差为0.015时高斯白噪声图,分别用标准TV模型、非线性复数域扩散模型和本模型进行平滑。可见,标准TV模型由于噪声干扰而产生假性边缘,非线性复数域扩散模型和本模型均能在有效去除噪声的同时保留图像的纹理细节信息,而本模型处理结果的视觉效果和峰值信噪比相对更好一些。



(a)原图 (b)噪声污染图 (c)标准TV模型效果图 (d)非线性复数域扩散模型效果图 (e)本模型效果图

图2 三种模型对加噪House图像平滑的效果图

Fig. 2 Comparison of three models for house

进一步对纹理边缘比较丰富的Lena图加标准差分别为0.001,0.02的高斯白噪声,表1为三种处理方法的峰值信噪比,图3为噪声标准差为0.02时三种方法平滑处理结果。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



(a)原图 (b)噪声污染图 (c)标准 TV 模型效果图 (d)非线性复数域扩散模型效果图 (e)本模型效果图

图 3 三种模型对加噪 Lena 图像平滑的效果图

Fig. 3 Comparison of three models for Lena

表 1 三种模型峰值信噪比

Tab. 1 Comparison of three models on PSNR

图像	噪声标准差	方法			
		平滑前噪声图	标准 TV 模型	非线性复数域扩散模型	本模型
House	0.015	19.977 6	23.437 7	24.618 6	27.877 3
Lena	0.001	20.081 1	23.938 0	25.124 3	28.232 8
	0.02	19.848 1	23.391 5	24.598 4	27.534 9

峰值信噪比(*PSNR*) 的计算公式为:

$$PSNR = 10\log\frac{MN255^2}{\sum_M\sum_N (I(x,y) - I^n(x,y))^2}$$

其中,$I(x,y)$ 是无噪声图,$I^n(x,y)$ 为平滑后图像。

由图 3(c) 可见,标准 TV 模型可以在平滑区域产生明显的"阶梯"效应,非线性复数域扩散模型减弱了平滑区域的"阶梯"效应,同时较好地保持了边缘(见图 3(d)) 。从图 3(e) 可见,本模型能有效地去除噪声,同时很好地保持图像的特征信息并克服"阶梯"效应。从表 1 也可看出本模型平滑后的图像峰值信噪比与标准 TV 模型和非线性复数域扩散模型相比更高。

4 结 论

针对 TV 模型的缺陷,引入了新的基于分形维数的扩散函数,可根据图像的纹理特征进行平滑,避免了传统 TV 模型"阶梯效应"的发生。实验表明新模型在有效平滑噪声的同时能够较完整地保持图像的特征信息,同时获得较好的视觉效果。

参考文献:

[1] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1-4): 259-268.

[2] Chen Qiang, Philippe M. Adaptive total variation denoising based on difference curvature [J]. Image and Vision Computing, 2010, 28: 298-306.

[3] KinTak U, He Xiaoyu, Yang Bo, et al. A novel image denoising algorithm based on non-uniform rectangular partition and interpolation multimedia [C] //Communications (Mediacom), 2010 International Conference. Hong Kong, 2010: 9-12.

[4] Chinna R B, Madhavi L M. A combination of wavelet and fractal image denoising technique [J]. International Journal of Electronics Engineering, 2010, 2(2): 259-264.

[5] Ghazel M, Freeman G H, Vrscay E R. Fractal image denoising [J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2003, 12(12): 1560-1578.

[6] Chinna R B, Madavi L M. A combination of wavelet and fractal image denoising technique [J]. International Journal of Electronic Engineering, 2010, 2(2): 259-264.

[7] Landi G, Loli P E. An efficient method for nonnegatively constrained total variation-based denoising of medical images corrupted by poisson noise [J]. Computerized Medical Imaging and Graphics, 2012, 36(1): 38-46.

[8] Stephen K L, Michael H, Knoll F, et al. A total variation based approach to correcting surface coil magnetic resonance images [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218: 219-232.

[9] 陈利霞,宋国乡,丁宣浩,等. 改进的总变分去噪算法[J]. 光子学报, 2009, 38(4): 1001-1004.
Chen Lixia, Song Guoxiang, Ding Xuanhao, et al. Improved total variation algorithms to remove noise [J]. Acta Photonica Sinica, 2009, 38(4): 1001-1004.

[10] 陈利霞,丁宣浩,宋国乡,等. 基于总变分与小波变换的图像去噪算法 [J]. 西安电子科技大学学报, 2008, 35(6): 1075-1079.
Chen Lixia, Ding Xuanhao, Song Guoxiang, et al. Image de-noising algorithm based on total variation and wavelet transform [J]. Journal of Xidian University, 2008, 35(6): 1075-1079.

[11] Umut Guclu, Yagmur Gucluturk, Chu Kiong Loo. Evaluation of fractal dimension estimation methods for feature extraction in motor imagery based brain computer interface [J]. Procedia Computer Science, 2011, 3: 589-594.

[12] 黄宸,柳建. 基于小波变换的分形维数估计在有噪图像边缘检测中的应用 [J]. 红外与激光工程, 1998, 27(3): 57-62.
Huang Chen, Liu Jian. Application of the estimation of fractal dimension based on wavelet transformation [J]. Infrared and Laser Engineering, 1998, 27(3): 57-62.

(责任编辑 李虹燕)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net