第12卷 第18期 2012年6月
1671—1815(2012)18-4391-06

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 12 No. 18 Jun. 2012
© 2012 Sci. Tech. Engrg.

通信技术

基于小波分析的图像压缩算法应用

杜广环 张晓光

(黑龙江科技学院理学院，哈尔滨 150027)

摘 要 以提高压缩比，减少失真度为目标，给出了基于Db小波基的具体推导过程。利用Mallat分解重构比较了Db小波和9—7小波的压缩效果。因此研究对于用小波变换进行图像处理等方面都有很好的应用价值。

关键词 小波变换 图像压缩 Mallat算法

中图法分类号 TN911.73； **文献标志码** A

随着信息技术的发展，声音、图像等信息的容量日益增大。而现有的通信技术，对图像来说，如果需要进行快速或实时传输以及大量存储，就要对图像数据进行压缩。基于小波变换构图像压缩技术是目前图像压缩领域的重要分支，它因具有高压缩比，快速压缩，以及压缩后保持图像特征基本不变等特性，在图像压缩领域获得了广泛的应用和研究。

1 小波变换的定义

令 $L^2(R)$ 表示实数轴上可测函数组成的平方可积空间，函数 $\phi(t) \in L^2(R)$ 的傅立叶变换为 $\hat{\phi}(\omega)$，当 $\hat{\phi}(\omega)$ 满足完全重构条件(或者恒分辨条件)

$$C_\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\phi}(\omega)}{|\omega|} d\omega < \infty \tag{1.1}$$

称函数 $\phi(t)$ 为一个基本小波或母小波。

由于 ω 在积分的分母上，因此必须有 $\hat{\phi}(0) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt = 0$

将母小波 $\phi(t)$ 经过伸缩和平移后得

$$\phi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\phi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a > 0, b \in R) \tag{1.2}$$

称其为一个小波序列，每个 $\phi_{a,b}(t)$ 称为一个小波基函数。其中变量 a 反映了一个特定基函数的尺度(伸缩情况)，变量 b 指明了它沿 t 轴的平移位置。对于任意的函数 $f(t) \in L^2(R)$ 的连续小波变换定义为：

$$W_f(a,b) = [f(t), \varphi_{a,b}(t)] = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \tag{1.3}$$

其重构公式(逆变换)为

$$f(t) = \frac{1}{C_\phi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a,b)\phi_{a,b}(t)dadb \tag{1.4}$$

等式(1.3)右边前面的尺度因子 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 保证了小波基函数的范数全都相等，因为

$$\| f(\frac{t-b}{a}) \| = \sqrt{a} \| f(x) \| \tag{1.5}$$

2 图像压缩评价标准

图象质量包含2方面：一是图像的逼真度，即被评价图像与原标准图像的偏离程度；二是图像的可懂度，指图像向人或机器提供信息的能力。目前常用的评价准则主要有2种：客观标准和主观标准。

2.1 客观标准

客观标准是对压缩还原后的图像与原始图像的误差进行定量计算，一般包含三个指标：

(1) 均方误差

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i - \hat{x}_i)^2。$$

2012年3月23日收到 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11541324)资助

第一作者简介：杜广环，女，讲师，研究方向：小波图像压缩。

(2)信噪比

$$SNR = -20\lg\frac{\sigma}{\sqrt{MSE}}。$$

(3)峰值信噪比

$$PSNR = 10\lg(255^2/MSE)(Db)。$$

其中，$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i - \bar{x})^2$，$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x_i$；$\hat{x}$ 为重构图像的像素值。

评价图像压缩效果的另外一个重要指标是压缩比 CR，它指的是表示原始图像每象素的比特数同压缩后平均每象素的比特数的比值，也常用每像素比特值来表示压缩效果。

2.2 主观标准

主观准则是选择一组评价者给待评图像进行打分，对这些主观打分进行平均，获得一个主观评价分。通常有 2 种评价标准，第一种评价标准是妨碍尺度准则，第二种评价标准是质量尺度准则。如表 1 所示。

表 1 图像压缩效果主观评价(妨碍尺度)

第一种评价标准(妨碍尺度)	得分	第二种评价标准(质量尺度)
感觉不到失真	5	非常好
感觉到失真，但没有不舒服感觉	4	好
稍有感觉到不舒服	3	一般
不舒服	2	差
非常不舒服的感觉	1	非常差

实践表明，主观评价标准与客观评价标准之间有一定的联系，可以进行粗略转换。峰值信噪比与主观评价之间关系如表 2 所示。

表 2 图象压缩效果主观评价与客观评价(*PSNR*)间 *PSNR* >48 的关系

主观评价	客观评价(*PSNR*)
感觉不到失真	
感觉到失真，但没有不舒服感觉	$35 < PSNR \leqslant 48$
稍有感觉到不舒服	$29 < PSNR \leqslant 35$
不舒服	$25 < PSNR \leqslant 29$
非常不舒服的感觉	$PSNR \leqslant 25$

3 采用不同小波基对二维图像进行压缩

3.1 采用 Db8 小波基对二维图像进行压缩

首先，给出 Db8 小波的分解与重构过程。

Mallat 分解公式：

设 $h = \{h_0, h_1, h_2, \cdots, h_7\}$，$g = \{g_{-6}, g_{-5}, \cdots, g_0, g_1\}$，则有

$$c_{j,k} = \sum_{l\in z} h_{k-2l}c_{j+1,l}\sum_{l_1=0}^{7} h_{l_1}c_{j+1,2k+l_1},(k-2l=l_1);$$

$$d_{j,k} = \sum_{l_1=-6}^{1} g_{l_1}c_{j+1,2k+l_1}。$$

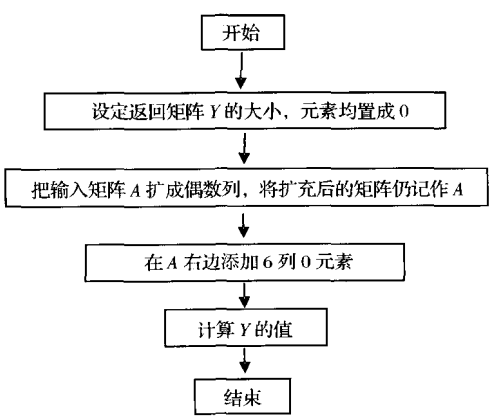
Mallat 重构公式：

$$c_{j+1,k} = \sum_{l\in z} h_{k-2l}c_{j,l} + \sum_{l\in Z} g_{k-2l}c_{j,l} \sum_{\substack{l_1=0 \\ 2l=(k-l_1)}}^{7} h_{l_1}c_{j,(k-l_1)/2} + \sum_{\substack{l_1=-6 \\ 2l=(k-l_1)}}^{1} g_{l_1}d_{j,(k-l_1)/2} =$$

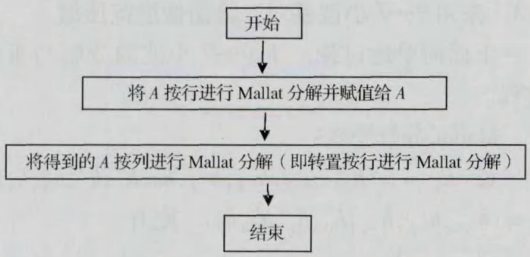
$$\begin{cases} h_0c_{j,k/2} + h_2c_{j,(k-2)/2} + h_4c_{j,(k-4)/2} + h_6c_{j,(k-6)/2} + \\ \quad g_{-6}d_{j,(k+6)/2} + g_{-4}d_{j,(k+4)/2} + g_{-2}d_{j,(k+2)/2} + \\ \quad g_0d_{j,k/2}2\mid k \\ h_1c_{j,(k-1)/2} + h_3c_{j,(k-3)/2} + h_5c_{j,(k-5)/2} + h_7c_{j,(k-7)/2} + \\ \quad g_{-5}d_{j,(k+5)/2} + g_{-3}d_{j,(k+3)/2} + g_{-1}d_{j,(k+1)/2} + \\ \quad g_1d_{j,(k+1)/2}2 + k \qquad (k-2l=l_1)。 \end{cases}$$

以 Db8 小波为例来说明图像分解及重构的程序流程，采用其它小波基的图像分解和重构与此程序流程完全类似，只需改变相应的滤波器的系数就可以了。

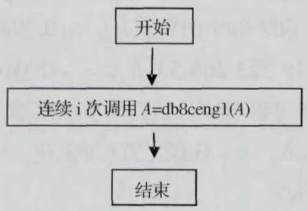
第一步，建立一个 M 文件 Db8hang. m 实现对一幅图像按行进行 Mallat 分解：



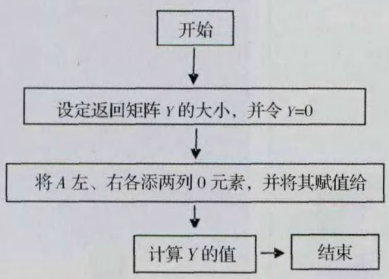
第二步，建立一个 M 文件 Db8cengl(*A*). m 将矩阵 *A* 分解，即对 *A* 进行一次二维的 Mallat 分解。



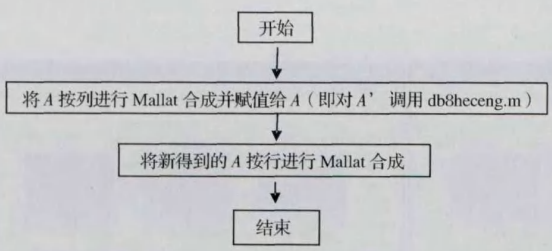
第三步,建立一个 M 文件 Db8ceng1(A,i). m 将矩阵 A 分解 i 层。



第四步,建立一个 M 文件 Db8hehang(A). m 将 A 按行进行 Mallat 合成。



第五步,建立一个 M 文件 Db8hehang1(A). m 实现对 A 完成一层合成,即对 A 先列后行进行 Mallat 合成。



第六步,建立一个 M 文件 Db8hehang(A,i). m 实现对 A 完成 i 层合成。

3.2　采用 Haar 小波基对二维图像进行压缩

用 Haar 小波作二维图像分解相当于先对每一行作一维 Mallat 分解,再对每一列作一维 Mallat 分解。

分解公式:先行后列

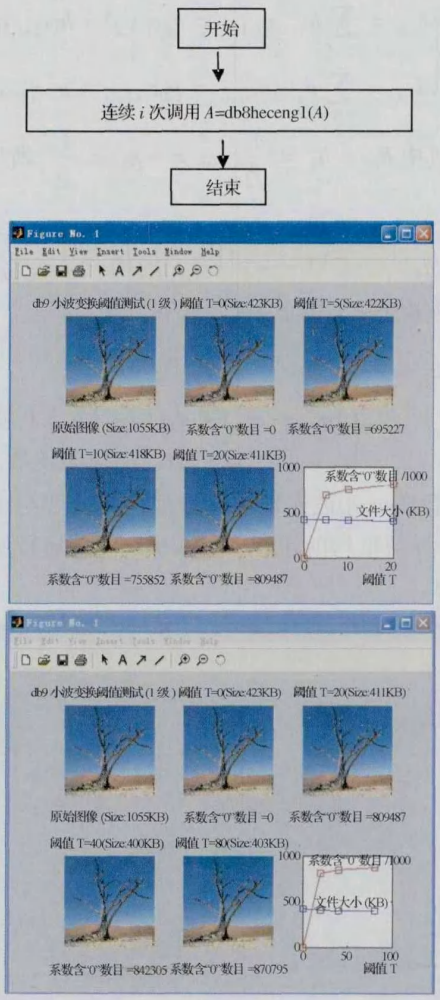


图 3.1　Db8 小波变换测试结果(在不同阈值下测试)

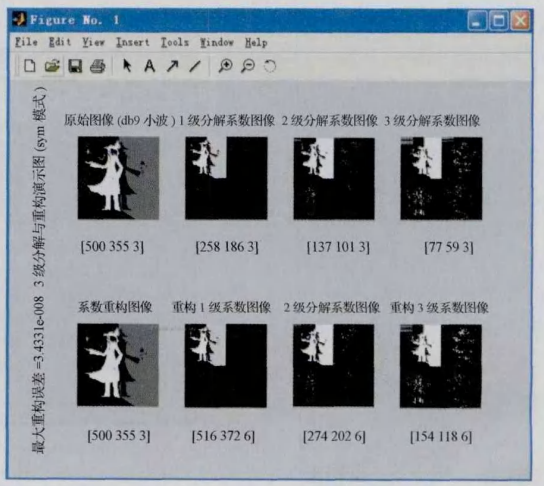


图 3.2　Db8 的(Syms 模式)最大重构误差 $3.433\ 1\times10^{-8}$

$$\begin{cases} c_{j,k} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_{n-2k}c_{j+1,n} = h_0c_{j+1,2k} + h_1c_{j+1,2k+1} \\ d_{j,k} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} g_{n-2k}c_{j+1,n} = g_0c_{j+1,2k} + g_1c_{j+1,2k+1}。 \end{cases}$$

其中 $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g_0 = -g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,所以

$$\begin{pmatrix} c_{j,k} \\ d_{j,k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{j+1,2k} \\ c_{j+1,2k+1} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} c_{j+1,2k} \\ c_{j+1,2k+1} \end{pmatrix}。$$

重构公式:先列后行

$$c_{j+1,k} = \sum_{l\in Z} h_{k-2l}c_{j,l} + \sum_{l\in Z} g_{k-2l}c_{j,l} = \begin{cases} h_1c_{j,(k-1)/2} + g_1d_{j,(k-1)/2}, & k-1 \text{ 是偶数} \\ h_0c_{j,k/2} + g_0d_{j,k/2}, & k \text{ 是偶数}。 \end{cases}$$

用 Haar 小波实现非标准规格化分解与重构过程,分解与重构的流程图同 Db8 小波,运行结果见图 3.3。

3.3 采用 9—7 小波基对二维图像进行压缩

下面简单地讨论一下 9—7 小波的分解与重构过程。

Mallat 分解公式:

设 $h = \{h_{-4}, h_{-3}, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, h_3, h_4\}$, $\tilde{h} = \{h_{-3}, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, h_3\}$, 则有

$$c_{j,k} = \sum_{l_1=-3}^{3} \tilde{h}_{l_1}c_{j+1,2k+l_1}。$$

重构公式:设

$h_0 = 0.602\ 949\ 018\ 2$, $h_{\pm1} = 0.266\ 864\ 118\ 4$, $h_{\pm2} = -0.078\ 223\ 266\ 53$, $h_{\pm3} = -0.016\ 864\ 118\ 4$, $h_{\pm4} = 0.026\ 748\ 757\ 4$, $\tilde{h}_0 = 0.557\ 543\ 526$, $\tilde{h}_{\pm1} = 0.295\ 635\ 88$, $\tilde{h}_{\pm2} = -0.028\ 771\ 763$, $\tilde{h}_{\pm3} = -0.045\ 635\ 88$

则有

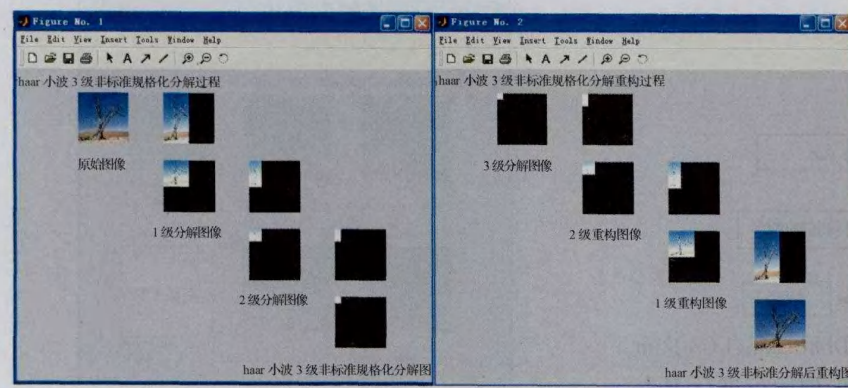


图 3.3 非标准 Haar 小波规格化分解与重构结果



图 3.4 原始图



图 3.5 重构图

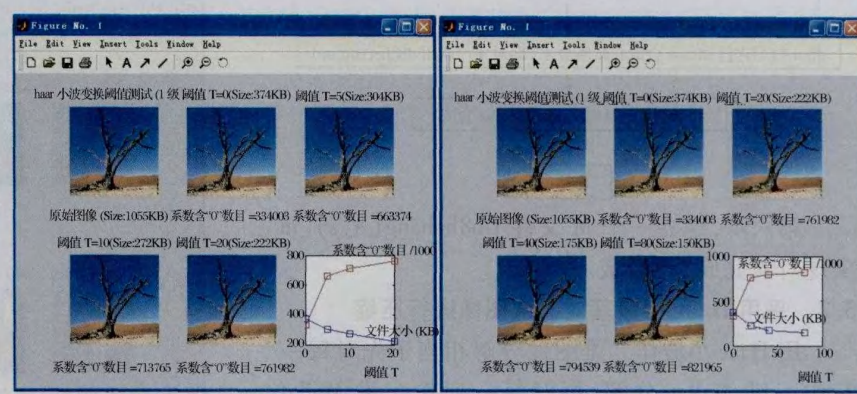


图 3.6 Haar 小波变换测试结果(在不同阈值下测试)

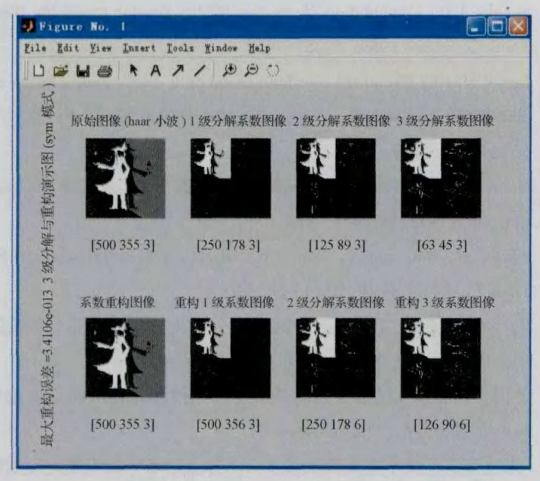


图 3.7　Haar 的(Syms 模式)最大重构误差 $3.141\,06\times10^{-13}$

$$c_{j+1,k}=\sum_{\substack{l_1=-4\\2\mid(k-l_1)}}h_{l_1}c_{j,(k-l_1)/2}=\begin{cases}h_{-4}c_{j,(k+4)/2}+h_{-2}c_{j,(k+2)/2}+\\ h_0c_{j,k/2}+h_2c_{j,(k-2)/2}+h_4c_{j,(k-4)/2} & 2\mid k\\ h_{-3}c_{j,(k+3)/2}+h_{-1}c_{j,(k+1)/2}+\\ h_1c_{j,(k-1)/2}+h_3c_{j,(k-3)/2} & 2\mid k。\end{cases}$$

图像压缩效果图见图 3.8(第一行是原始图,左下是一级分解图,右下是二级分解图)。从图像可以看出上一级压缩效果较好(压缩 1/4),二级分解压缩图像较差(压缩 1/16)。

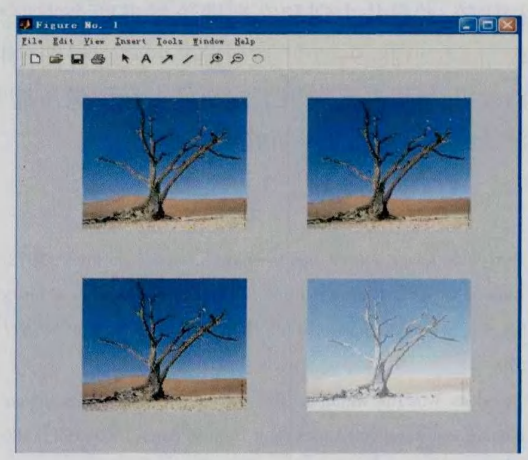
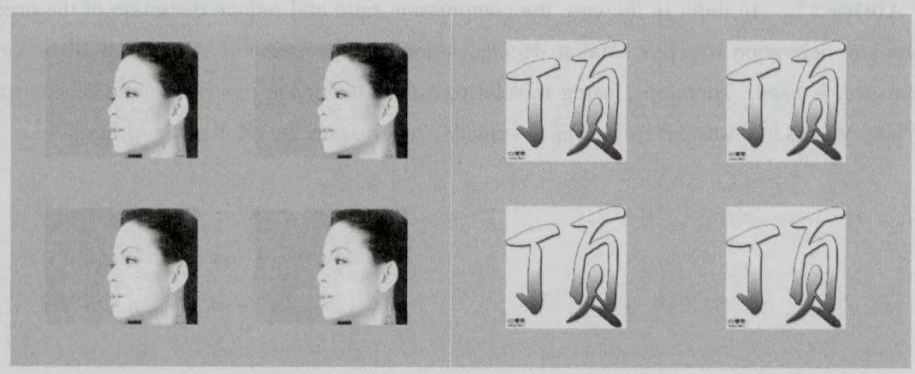


图 3.8　图像分解压缩效果图

3.4　Db8、Haar 和 9—7 小波基对二维图像压缩效果比较

下面就从主观评价标准和客观评价标准两个方面来比较里利用 Db8 小波、Haar 小波和 9—7 小波对图像压缩的效果。首先,对灰度图像进行处理。

在图 3.9 中,第一幅图为原图,其余为压缩后图像,分解 4 层,阈值设为 15,60。其中第二幅图选择 9—7 小波基,第三幅图选择 Haar 小波基,第四幅图选择 Db8 小波基。从客观评价标准来看,Db8 小波的压缩效果要优于 9—7 小波以及 Haar 小波。



(a)　　(b)

图 3.9　Db 小波、Haar 小波与 9—7 小波压缩效果比较图

表 3　图 3.9 (a)压缩客观质量比较

小波基	MSE	SNR	PSNR	压缩比	主观标准
Db8	0.002 7	72.6	169.9	39.5	5
Haar	0.002 9	70.4	169.2	40.9	4.5
9—7	0.002 7	72.5	169.9	37.6	4.5

表 4　图 3.9 (b)压缩客观质量比较

小波基	MSE	SNR	PSNR	压缩比	主观标准
Db8	0.008 6	56.5	158.4	11.1	5
Haar	0.008 7	56.4	158.2	12	4.5
9—7	0.008 8	56.1	158.1	10.7	4.5

4 结论

本文介绍了几种利用Mallat图像的分解与重构方法,取不同的阈值对图像进行压缩,将所得结果进行比较,并且从主观和客观评价标准两个方面来比较用Db小波、9—7小波、Haar小波进行图像压缩的效果,可以看出利用小波变换进行图像压缩时小波基的选择对图像压缩效果的影响。

参 考 文 献

1 Pratl W K. Image transmission techniques. Academic Press, 1978

2 Andrewetal H N. Fourier trabsform coding of images. Hawaii Int Conf Sys Sci, Weston Company, North Hollywood, California, 1968:677—679

3 Sweldens W. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets. Appl Comut Harmon Appl, 1996;3(2):186—200

4 Shanks J L. Computation of the fast Walsh-Fourier transform. IEEE Trans Computer, 1969; 5:457—459

5 Lee M H. Fast Hadamard transform based on a simple matrix factorization. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal P, 1986;34(6):1666—1667

6 Henry Y L. Fast Hadamad transform using the H diagram. IEEE Trans Computer, 1973;22: 957—960

7 Ahmed N, Natarajan T, Rao K R. Discrete cosine Transform IEEE Trans Computer, 1994; 23(1):90—93

8 周 杰,彭嘉雄,丁明跃. 方向小波变换及其在运动弱目标检测中的应用. 信息与控制, 1996;25(1):21—27

9 曹国强. 非线性子波变换用于图像边缘检测. 神经网络理论与应有研究, 1996;25(2): 448—451

10 朱文革. 广义小波变换及其在人工神经网络中的应用. 应用数学学报, 1997;20(2):175—180

11 施云惠,崔明根,王子才. 多元小波变换及 $L^2(R^P)$ 框架. 应用泛函分析学报, 2001;3(1):74—82

Application of Image Compression Algorithm Base on Wavelet Analysis

DU Guang-huan, ZANG Xiao-guang

(Heilongjiang Faculty of Science and Technology, Mathematic Department, Harbin 150027, P. R. China)

[**Abstract**] In order to increase the compression ratio and reduce distortion of the original image, the Db wavelet basis of derivation is given. Mallat decomposition andreconstruction compared Db wavelet and 9—7 wavelet compression is used. Therefore, using wavelet transform for image processing and other aspects has good value.

[**Key words**] wavelet transform image compression Mallat algorithm