戴前伟,王洪华,冯德山,等. 基于双二次插值的探地雷达有限元数值模拟. 地球物理学进展,2012,27(2):0736-0743,doi:10.6038/j. issn. 1004-2903. 2012. 02. 041.

DAI Qian-wei, WANG Hong-hua, FENG De-shan, *et al*. Finite element numerical simulation for GPR based on quadratic interpolation. *Progress in Geophys*. (in Chinese), 2012, 27(2):0736-0743, doi:10.6038/j. issn. 1004-2903. 2012. 02. 041.

基于双二次插值的探地雷达有限元数值模拟

戴前伟[1,2], 王洪华[2], 冯德山[1,2*], 陈德鹏[2]

(1. 中南大学有色金属成矿预测教育部重点实验室,地球科学与信息物理学院,长沙 410083
2. 中南大学 地球科学与信息物理学院,湖南 长沙 410083)

摘 要 从探地雷达(GPR)满足的波动方程出发,详细介绍了二维 GPR 模型单元剖分、二次插值、数值积分和有限元刚度矩阵总体合成的 GPR 有限元求解过程. 为解决数值模拟时截断边界处的超强反射,采用 Clay Bout 透射边界条件对雷达波进行衰减,进而压制了来自截断边界处的反射波. 在满足时间步长与空间网格差分稳定性前提下,采用中心差分法对 GPR 有限元方程进行离散,并用不完全 LU 分解预处理的 BICGSTAB 算法求解系数方程组,然后编制了基于双二次插值的 GPR 有限元正演模拟 matlab 程序. 运用该程序分别对矩形和"V"字形两个典型地电模型进行正演计算,得到了正演剖面图,将该正演剖面图与基于线性插值的 FEM 算法的正演剖面图做了对比分析. 结果表明基于双二次插值 FEM 算法相比基于双线性插值 FEM 算法异常响应更明显,具有更高的模拟精度,更有利于指导雷达剖面的数据解译.

关键词 二次插值,有限元;数值模拟,探地雷达

doi:10. 6038/j. issn. 1004-2903. 2012. 02. 041 **中图分类号** P631 **文献标识码** A

Finite element numerical simulation for GPR based on quadratic interpolation

DAI Qian-wei[1,2], WANG Hong-hua[2], FENG De-shan[1,2*], CHEN De-peng[2]

(1. *Key Laboratory of Metallogenic Prediction of Nonferrous Metals, Ministry of Education, School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha* 410083, *China*
2. *School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha* 410083, *China*)

Abstract Started from the GPR wave undulation equation, this article introduced element subdivision, interpolation, integration, general synthesis and GPR finite element wave equation deducing process in details. In order to eliminate the super strong reflection on the interceptive boundary when the FEM was conducting GPR forward simulations, the transmission absorbed boundary condition was adapted to transmit out reflected waves that in the interceptive boundary of GPR wave, and then suppressed the reflected wave from the interceptive boundary. Under the premise of meeting the time step and space grid difference stability, using central difference method to discrete GPR finite element equation and BICGSTAB algorithm to solve the Coefficient equations. Afterwards , establishing the matlab program of GPR finite element forward simulations. Applying this program to conduct FEM forward simulations for two geoelectric model of Rectangular block and "V" shape respectively, we obtained the GPR profiles of FEM forward simulations based on quadratic interpolation. Comparing the profiles based on this forward simulations and the FEM forward simulations profiles based on linear interpolation, the results show that the abnormal response of

收稿日期 2011-07-11; **修回日期** 2011-10-10. **投稿网址** http//www. progeophys. cn

基金项目 国家自然科学基金资助项目(41074085,40804027)、中南大学硕士生学位论文创新项目(No. 2011ssxt055)和湖南省研究生科研创新项目(CS2010B052)联合资助.

作者简介 戴前伟(1968—),男,湖南涟源人,博士,教授,从事电磁法方法及理论、工程地球物理勘探等方向的研究.

***通讯作者** 冯德山(1978—),男,湖南祁阳人,博士,副教授,从事探地雷达正反演及小波分析的研究. (E-mail:fengdeshan@126. com)

the FEM based on quadratic interpolation is more significant than that of the FEM based on linear interpolation, it has higher simulation accuracy and more conducive to guide the interpretation of the radar profile data.

Keywords　quadratic interpolation; finite element; numerical simulation; ground penetrating radar

探地雷达(Ground Penetrating Radar，GPR)的是探测浅部地质异常体的有效手段，GPR 的数值模拟技术一直是该领域的研究热点[1]. 三维探地雷达由于其庞大的数据量和计算量，验证制约了其数值模拟的发展[2]. 作为向三维的过度，二维探地雷达的数值模拟有一定的理论意义. 在众多的地球物理数值模拟方法中，时域有限差分法(FDTD)以算法简单、灵活、程序易实现，而被广泛的采用，如：李展辉[3]、冯暄[4]、刘四新[5] 等基于 K S Yee 网格的 FDTD 进行了 GPR 二、三维正演，但是该算法对于物性参数分布复杂或几何特征不规则的模型适应性差. 有限单元法(Finite Element Method，FEM)由于适用于求解各种复杂问题、求解过程规范，计算程序通用性强等优点在地球物理数值模拟领域具有广泛的应用性[6].

有限单元法在探地雷达正演模拟中应用得比较晚，它主要是借鉴声波、弹性波的有限元

求解理论. 沈飚[7] 将声波方程代替电磁波的传播方程进行了二维介质的正演模拟；底青云和王妙月[8,9,10] 从麦克斯韦方程组出发，并且考虑了衰减项，进行了探地雷达剖面的有限单元仿真模拟及偏移处理；谢辉[11] 利用二十节点等参单元对 Pulse 探地雷达进行了有限单元正演模拟计算，编制了三维有限元程序，建立了电磁波在 Pulse 探地雷达天线中的全反射模型；Fanning 和 Boothby[12] 将三维探地雷达有限单元建模技术应用到了拱桥检测中；Arias 和 Armesto[13] 将三维探地雷达有限单元模拟技术应用到考古成像中；Lubowiecka[14] 等利用 GPR 三维有单限元模拟应用于中世纪石拱桥检测中. 前人大都采用线性插值的 FEM 求解 GPR 波动方程，由于 GPR 波具有频率高、场值变化剧烈、高度非线性的特点[15]，导致基于线性插值的 FEM 方法进行 GPR 正演，并不易取得精确的数值解. 为了在不增加单元数量的情况下，本文在单元内选用双二次插值的 FEM 算法进行 GPR 正演模拟，它与线性插值具有相同单元数目的前提下[16]，它提高数值模拟结果的精度.

1　GPR 波动方程有限元求解

根据文献[8,9]，雷达波满足的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{E}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{H}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=\boldsymbol{S}_{\mathrm{H}}. \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{E}$ 为电场强度(V/m)，$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度(A/m)，ε 为介电常数(F/m)，μ 为磁导率(H/m)，σ 为电导率(S/m)，$\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}$ 为电场源，$\boldsymbol{S}_{\mathrm{H}}$ 为磁场源.

运用有限单元法求解 GPR 波动方程其实质是结合雷达波所要满足的初、边值条件求解满足偏微分方程的变分问题. 下面采用伽辽金法推导含衰减项的 GPR 有限元方程.

1.1　网格剖分

首先将求解的二维区域剖分成矩形单元，如图 1 所示.

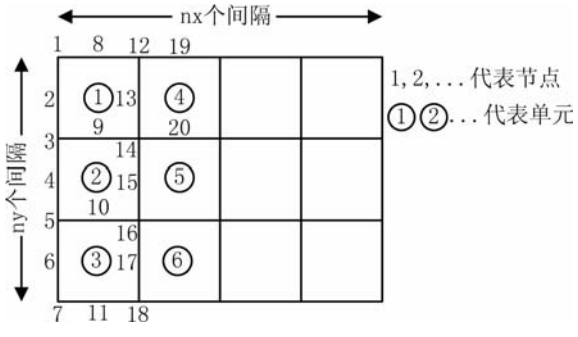


图 1　网格剖分及节点编号示意图

Fig. 1　Schematic diagram for finite element mesh and node number

1.2　二次插值

由于双二次单元比双线性单元的精度高，加之二维有限元数值模拟的计算量并不大，所以本文采用双二次插值，矩形单元剖分. 矩形单元双二次插值是在每个单元上取 8 个点：4 个顶点和 4 条边得中点. 8 个节点的编号及其坐标如图 2 所示. 其中图 2(a)是母单元示意图，图 2(b)是子单元示意图，两个单元间的坐标变换关系为

$$x=x_0+(a/2)\cdot\xi, y=y_0+(b/2)\cdot\eta. \tag{3}$$

其中 x_0, y_0 是子单元中点的坐标，a, b 是子单元的两个边长，微分关系为

$$\mathrm{d}x=(a/2)\cdot\mathrm{d}\xi,\quad \mathrm{d}y=(b/2)\cdot\mathrm{d}\eta,$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(ab/4)\cdot\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{4}$$

可构造如下的双二次插值形函数

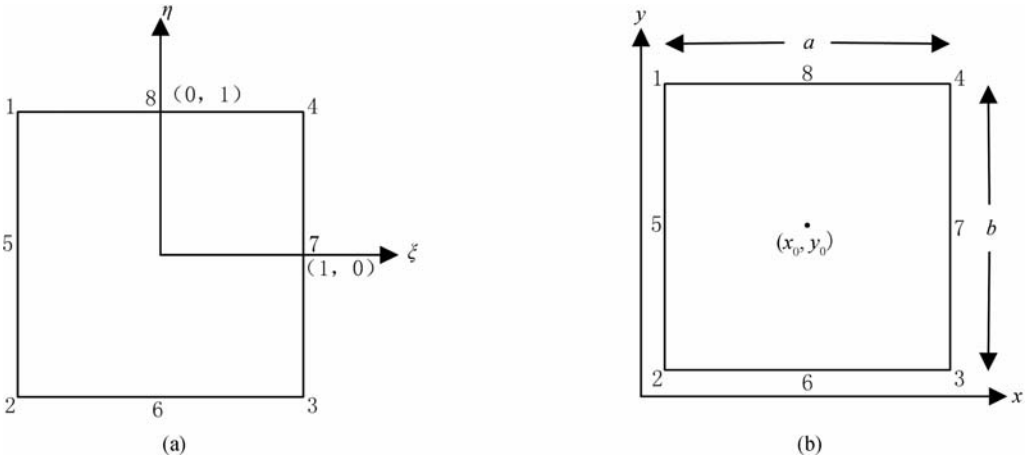


图 2 母单元、子单元示意图

(a)母单元;(b)子单元

Fig. 2 Schematic diagram for sub cell and mother cell

(a)Sub cell; (b)Mother cell

$$N_1=(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)/4,$$
$$N_5=(1-\eta^2)(1-\xi)/2\ ,$$
$$N_2=(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)/4,$$
$$N_6=(1-\xi^2)(1-\eta)/2\ ,$$
$$N_3=(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)/4,$$
$$N_7=(1-\xi^2)(1+\eta)/2\ ,$$
$$N_4=(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)/4,$$
$$N_8=(1-\eta^2)(1+\xi)/2\ . \tag{5}$$

1.3 单元积分

根据伽辽金法,将(1)两边同时乘以 $\delta\check{E}$,并求积分,有

$$\int_e \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}\delta\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\Omega+\int_e \frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\delta\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\Omega-\int_e \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\Omega$$
$$=\int_e \boldsymbol{E}_E\delta\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\Omega\ , \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_e$,$\boldsymbol{N}=(N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6,N_7,N_8)^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}=(E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6,E_7,E_8)$,$N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6,N_7,N_8$ 是单元上各节点的形函数,$E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6,E_7,E_8$ 是各节点的电场值,Ω 为单元面积.则式(6)左边第一项为

$$\int_e \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}\delta\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\Omega=\int_e \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_e}{\partial t^2}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{E}_e\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{e}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_e}{\partial t^2}=\delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_e\ddot{\boldsymbol{E}}_e. \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{M}_e$ 为单元质量矩阵,

$$\boldsymbol{M}_e=\int_e \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_e \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\cdot\frac{ab}{4}\ . \tag{8}$$

$$\boldsymbol{M}_e=\frac{ab}{180}\begin{bmatrix}6&2&3&2&-6&-8&-8&-6\\2&6&2&3&-6&-6&-8&-8\\3&2&6&2&-8&-6&-6&-8\\2&3&2&6&-8&-8&-6&-6\\-6&-6&-8&-8&32&20&16&20\\-8&-6&-6&-8&20&32&20&16\\-8&-8&-6&-6&16&20&32&20\\-6&-8&-8&-6&20&16&20&32\end{bmatrix}.$$

式中 a、b 为图 2(b)中单元的宽度和高度.

式(6)左边第二项为

$$\int_e \frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\delta\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\Omega=\frac{\sigma}{\varepsilon}\int_e \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{E}_e}{\partial t}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{E}_e\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\sigma}{\varepsilon}\delta\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{e}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\partial \boldsymbol{E}_e}{\partial t}=\delta\boldsymbol{E}_e^{T}\boldsymbol{K}_e'\dot{\boldsymbol{E}}_e\ . \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{K}_e'$ 为单元阻尼矩阵

$$\boldsymbol{K}_e'=\frac{\sigma}{\varepsilon}\int_e \boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sigma}{\varepsilon}\int_e \boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{N}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\cdot\frac{ab}{4}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{K}_e'=\frac{ab}{180}\frac{\sigma}{\varepsilon}\begin{bmatrix}6&2&3&2&-6&-8&-8&-6\\2&6&2&3&-6&-6&-8&-8\\3&2&6&2&-8&-6&-6&-8\\2&3&2&6&-8&-8&-6&-6\\-6&-6&-8&-8&32&20&16&20\\-8&-6&-6&-8&20&32&20&16\\-8&-8&-6&-6&16&20&32&20\\-6&-8&-8&-6&20&16&20&32\end{bmatrix},$$

式(6)左边第三项为

$$\int_e \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\Omega=\int_e \frac{1}{\mu\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_e}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_e}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \delta \boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{E}_e , \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{K}_e=(k_{ij})=(k_{ji})$，

$$k_{ij} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\int_e \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\mu\varepsilon}\int_e \left(\left(\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\partial y}\right)\right)\frac{ab}{4}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta . \tag{12}$$

将(5)式求得 ξ 或者 η 的微商，代入到上式积分即可得到单元刚度矩阵 k_{ij} 为

$$\boldsymbol{K}_e=\begin{bmatrix}
52\alpha+52\beta & k12=k21 & k13=k31 & k14=k41 & k15=k51 & k16=k61 & k17=k71 & k18=k81\\
17\alpha+28\beta & k22=k11 & k23=k32 & k24=k42 & k25=k52 & k26=k62 & k27=k72 & k28=k82\\
23\alpha+23\beta & k32=k41 & k33=k11 & k34=k43 & k35=k53 & k36=k63 & k37=k73 & k38=k83\\
28\alpha+17\beta & k42=k31 & k43=k21 & k44=k11 & k45=k54 & k46=k64 & k47=k74 & k48=k84\\
6\alpha-80\beta & k52=k51 & k53=k71 & k54=k71 & 48\alpha+160\beta & k56=k65 & k57=k75 & k58=k85\\
-40\alpha-6\beta & k62=k81 & k63=k81 & k64=k61 & 0 & 160\alpha+48\beta & k67=k76 & k68=k86\\
-6\alpha-40\beta & k72=k71 & k73=k51 & k74=k51 & -48\alpha+80\beta & 0 & k77=k55 & k78=k87\\
-80\alpha+6\beta & k82=k61 & k83=k61 & k84=k81 & 0 & 80\alpha-48\beta & k87=0 & k88=k66
\end{bmatrix},$$

式中 $\alpha=\frac{1}{90\mu\varepsilon}\frac{b}{a}$，$\beta=\frac{1}{90\mu\varepsilon}\frac{a}{b}$.

式(6)右边项为

$$\boldsymbol{S}_E = \int_e \boldsymbol{S}_e \boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \delta\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_e . \tag{13}$$

1.4　总体合成

根据式(8)、(10)、(12)、(13)得到单元积分

$$\delta\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_e\ddot{\boldsymbol{E}}_e+\frac{\sigma}{\varepsilon}\delta\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}'_e\dot{\boldsymbol{E}}_e+\delta\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{E}_e-\delta\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_e=0 . \tag{14}$$

将单元列向量 $\boldsymbol{E}_e$、$\dot{\boldsymbol{E}}_e$ 和 $\ddot{\boldsymbol{E}}_e$ 扩展成全体节点的列向量

$$\boldsymbol{E}、\dot{\boldsymbol{E}}\text{ 和 }\ddot{\boldsymbol{E}}，\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=(E_1,E_2,E_3\cdots,E_{ND})，$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}=(\dot{E}_1,\dot{E}_2,\dot{E}_3\cdots,\dot{E}_{ND})，$$

$$\ddot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}=(\ddot{E}_1,\ddot{E}_2,\ddot{E}_3\cdots,\ddot{E}_{ND})，$$

其中 ND 是节点总数. 将 4×4 的系数矩阵 $\boldsymbol{M}_e$、$\boldsymbol{K}'_e$ 和 $\boldsymbol{K}_e$ 扩展成 $ND\times ND$ 的矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}'$ 和 $\boldsymbol{K}$，将列向量 $\boldsymbol{S}_e$ 扩展成 ND 维列向量 $\boldsymbol{S}$，即

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{\Omega}\delta\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_e\ddot{\boldsymbol{E}}_e+\sum_{\Omega}\delta\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}'_e\dot{\boldsymbol{E}}_e\\ &\quad+\sum_{\Omega}\delta\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{E}_e-\sum_{\Omega}\delta\boldsymbol{E}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_e\\ &=\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{E}}+\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}'\dot{\boldsymbol{E}}+\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}-\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_E\\ &=\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{K}'\dot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S}_E) ,\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{M}=\sum_{\Omega}\boldsymbol{M}_e$，$\boldsymbol{K}'=\sum_{\Omega}\boldsymbol{K}'_e$，$\boldsymbol{K}=\sum_{\Omega}\boldsymbol{K}_e$，$\boldsymbol{S}_E=\sum_{\Omega}\boldsymbol{S}_e$.

$$\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{K}'\dot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S}_E)=0. \tag{16}$$

由于 $\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\neq0$，所以必有

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{K}'\dot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{S}_E ,$$

于是可以得到时空域探地雷达波的二维有限元波动方程，这是含有 ND 个元的 ND 个方程联合的常微分方程组，可以写成如下形式：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{K}'\dot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{S}_E , \tag{17}$$

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{K}'\dot{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}_H , \tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵，$\boldsymbol{K}'$ 为阻尼矩阵，$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵，$\dot{\boldsymbol{E}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 为时间的一次导数，$\ddot{\boldsymbol{E}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{H}}$ 为时间的二次导数.

2　解 GPR 有限元常微分方程

解微分方程式(17)或(18)式前，要将边界条件代入，探地雷达数值模拟过程中，吸收边界条件加入是很重要的环节. 边界条件如果仅采用简单的自由边界条件，即令外边界上场函数法向导数为零，会在截断边界处产生全反射，严重影响模拟的精度. 为消除反射波，在截断边界上用入射波方程代替全波动方程就是需要的吸收边界条件[17,18]，采用 Clay Bout 透射边界条件对雷达波进行衰减，消除截断边界处的强反射. 本文采用中心差分法解方程(17)式. 对初始条件离散化得到

$$\boldsymbol{E}(0)=\boldsymbol{E}_0，\dot{\boldsymbol{E}}(0)=\dot{\boldsymbol{E}}_0，$$

把时间域$[0,T]$分为几个相等步长 $\Delta t=T/n$，把时刻 t 的微分方程记为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{E}}_t+\boldsymbol{K}'\dot{\boldsymbol{E}}_t+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}_t=\boldsymbol{S}_{Et} , \tag{19}$$

用差商代替微分，有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}_t &=(\boldsymbol{E}_{t+\Delta t}-\boldsymbol{E}_{t-\Delta t})/(2\Delta t)，\ddot{\boldsymbol{E}}_t\\ &=(\boldsymbol{E}_{t+\Delta t}-2\boldsymbol{E}_t+\boldsymbol{E}_{t-\Delta t})/(\Delta t)^2 .\end{aligned} \tag{20}$$

中心差分法是一种条件稳定性的计算方法，当时间步长 Δt 取的过大时，计算结果就会出现数值色散，为此本文采用 $\Delta t \leqslant (\Delta X_{\min}/V_{\max})$，显然式中时间步长 Δt 与最小单元边长 $\Delta X_{\min}$ 成正比，与最大媒质速度 $V_{\max}$ 成反比. 差分网格空间步长满足稳定性条件 $\Delta x < (\lambda_{\min}/10)$，其中 $\lambda_{\min}$ 为最小波长长度，Δx 为单元的最小尺寸. 为此将式(31)代入到式(30)中得到

$$\left(\frac{\boldsymbol{M}}{(V\boldsymbol{t})^2}+\frac{1}{2\Delta \boldsymbol{t}}\boldsymbol{K}'\right)\boldsymbol{E}_{t+\Delta t}=\boldsymbol{S}_{Et}+\left(\frac{2\boldsymbol{M}}{(V\boldsymbol{t})^2}-\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{E}_t+\left(\frac{1}{2\Delta \boldsymbol{t}}\boldsymbol{K}'-\frac{\boldsymbol{M}}{(V\boldsymbol{t})^2}\right)\boldsymbol{E}_{t-Vt}. \tag{21}$$

此式即为GPR有限元正演递推公式. 由于零时刻的 $\boldsymbol{E}_0$、$\dot{\boldsymbol{E}}_0$ 和 $\ddot{\boldsymbol{E}}_0$ 和 $-\Delta t$ 时刻的 $\boldsymbol{E}_{-\Delta t}$、$\dot{\boldsymbol{E}}_{-\Delta t}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{E}}_{-\Delta t}$ 均为0，所以根据(33)式可计算出 $\Delta \boldsymbol{t}$ 时刻的 $\boldsymbol{E}_{\Delta t}$，然后依次递推可得到所有时刻的 $\boldsymbol{E}$ 值. 令

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{M}}{(V\boldsymbol{t})^2}+\frac{1}{2\Delta \boldsymbol{t}}\boldsymbol{K}',$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}_{Et}+\left(\frac{2\boldsymbol{M}}{(V\boldsymbol{t})^2}-\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{E}_t+\left(\frac{1}{2\Delta \boldsymbol{t}}\boldsymbol{K}'-\frac{\boldsymbol{M}}{(V\boldsymbol{t})^2}\right)\boldsymbol{E}_{t-Vt}.$$

在实际计算中由于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 往往是大型的病态稀疏矩阵，其条件数很大，如果采取对其直接求逆的方法求解，计算量巨大. 为此采取集中质量，集中阻尼矩阵方法来处理 $\boldsymbol{M}$，

$$\boldsymbol{M}_e=\frac{ab}{12}\begin{bmatrix}-1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 4 & & \\ & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & 4\end{bmatrix}, \tag{22}$$

$\boldsymbol{K}'$ 矩阵，即将每一行(或每一列)的元素都加到对角线元素上去[13]，如式(8)则可转化为单元集中式(22)的质量矩阵同理，阻尼矩阵 $\boldsymbol{K}'_e$ 也可以写成集中阻尼矩阵的形式.

本文在求解波动方程(21)时，选用不完全LU分解预处理的BICGSTAB(Biconjugate Gradient Stabilized)线性方程组求解算法[19,20]，BICGSTAB算法的主要思想是基于双Lanczos算法和基于残差正交子空间的迭代方法. 该算法是一种高效迭代法，特别适用于求解方程组条件数很大的病态线性方程组.

3 探地雷达数值模拟实例

3.1 矩形模型

图3为矩形模型示意图，模型为一个6.0×5.0 m的矩形区域，中间存在一个埋深2.0 m大小为1.0×1.0 m矩形异常体，其介质的相对介电常数 ε_1 为30.0，电导率 σ_1 设置为0.001 s/m，背景介质的相对介电常数 ε_2 为5.0，电导率 σ_2 为0.002 s/m. 空间网格步长为0.1 m，网格总数为60×50. GPR波脉冲激励源的中心频率为100 MHz，时间步长为0.1 ns，时窗长度为100 ns. 分别应用基于二次插值和线性插值的FEM对该模型进行正演模拟，其模拟所得的GPR正演模拟剖面如图4所示，图中可见：在剖面中40 ns左右时刻，存在有宽约1.0米的能量较强反射界面，它是矩形上边界上的反射，通过时深转换计算可知，该反射界面与图3模型中矩形的上界面位置相吻合，两边出现对称的双曲线弧，是由于矩形的上边界两个角点出现绕射现象所引起的. 通过对比所得图4(a)与图4(b)剖面图，可见：图4(b)中矩形体下界面的反射波能量比图4(a)能量更强，反射波更清晰. 由于雷克子波是一个高次的随时间变化的脉冲，线性插值不易取得精确的数值解，导致图4(a)中产生的上下界面的反射波波形能量图4(b)要弱，反射波形更不清楚.

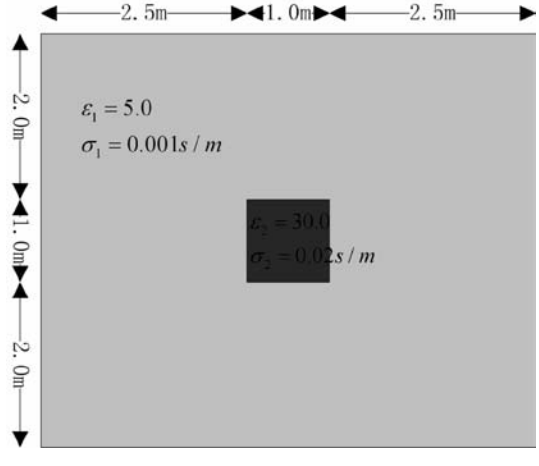


图3 矩形模型示意图

Fig. 3 Sketch map of Rectangle model

3.2 “V”字形模型

图5为“V”字形模型示意图，模型为一个10 m×5 m的矩形区域，分为上下两层介质，中间为一“V”字形界面，“V”处在下层的最中间位置，宽度为3米，深度为1.5米，上层介质的相对介电常数 ε_1

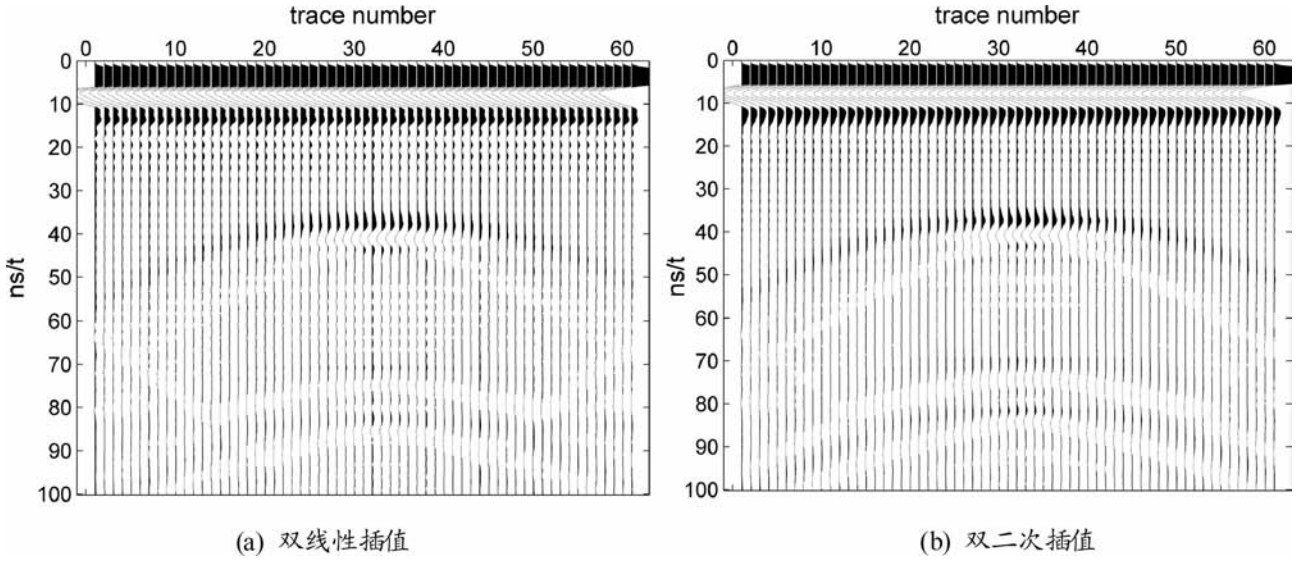


图 4　起伏界面 GPR 模型不同插值方式的 FEM 正演模拟剖面图

(a)双线性插值；(b)双二次插值

Fig. 4　The GPR forward compose section map of fluctuation interface model based on difference interpolation

(a)Double linear interpolation; (b)Double quadratic interpolation

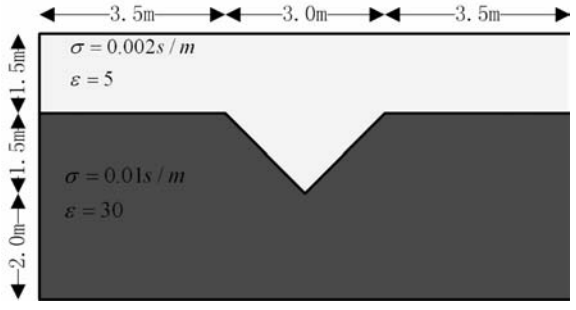


图 5　“V”字形模型示意图

Fig. 5　Sketch map of“V”shape model

为 5.0，电导率 σ_1 为 0.001 s/m，下层位于 1.5 米深的位置，相对介电常数设置为 50，电导率设置为 0.01 s/m. 空间网格步长为 0.1 m，网格总数为 100×50. GPR 波脉冲激励源的中心频率为 100 MHz，时间步长为 0.1 ns，时窗长度为 1000 ns. 分别应用基于二次插值和线性插值的 FEM 对“V”字形模型进行正演模拟，其模拟所得的 GPR 正演模拟剖面如图 6 所示，图中可见：在 36 ns 附近有一条能量较强的反射界面，通过计算可以得出它与图 5 模型中的

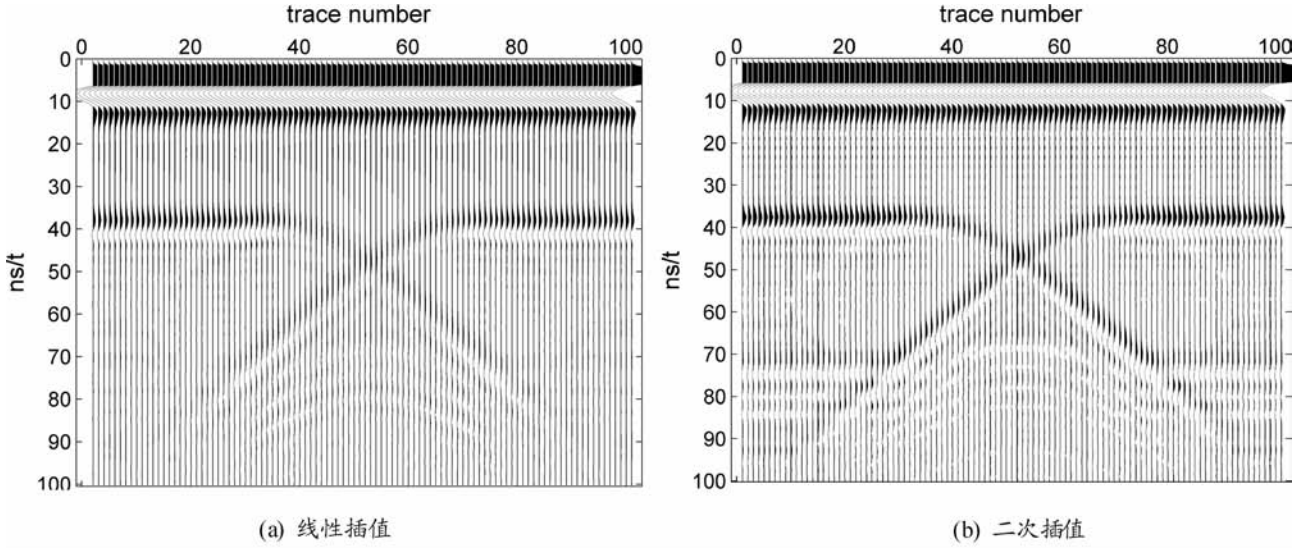


图 6　“V”字形 GPR 模型不同插值方式的 FEM 正演模拟剖面图

(a)线性插值；(b)二次插值

Fig. 6　The GPR forward compose section map of“V”shape model based on difference element interpolation

(a)Double linear interpolation; (b)Double quadratic interpolation

上、下两层分界面位置相吻合;分界面中间,可以清楚的看到一个“V”字形,但比模型中的“V”字形要浅得多.对比图6(a)、(b)可知:图6(b)在V字形反射界面的能量比图6(a)要强,特别是图5(b)中“V”字形两侧的多次反射波清晰可见,而图6(a)中没有出现多次反射波(或者说能量很微弱).由此可见,基于二次插值的的有限元法能更突出于“V”字形形态,模拟所得的正演剖面具有更高的分辨率、更利于指导雷达剖面的数据解译.

4 结 论

4.1 采用基于双二次插值的有限元单元法实现了二维GPR的数值模拟,详细论述了有限元求解GPR波动方程的整个过程.探讨了集中质量矩阵在GPR有限元波动方程求解中的应用,解决了大型病态稀疏矩阵求逆的问题,提高了有限元线性方程组求解的计算效率.

4.2 两个GPR模型算例结果表明:相比FEM的双线性插值法,本文采用的FEM双二次插值方法,能更好地拟合GPR模型的物性参数分界面,其数值模拟结果能有效突出多次反射波,更好的拟合物性分界面,具有更高的模拟精度.

参 考 文 献(References):

[1] 曾昭发,刘四新.探地雷达原理与应用[M].北京:电子工业出版社,2010.
Zeng Z F, Liu S X. Ground Penetrating Radar Theory and Applications[M]. bei jing: Publishing House of Electronics Industry 2010.

[2] 冯德山,戴前伟.基于小波多分辨探地雷达三维正演模拟及偏移处理.中南大学学报(自然科版),2007,38(4):758-763.
FENG De-shan, DAI Qian-wei. GPR three dimension forward simulation and migration processing with multi-resolution of wavelets. Cent. South Univ(Science and Technology),2007,38(4):758-763.

[3] 李展辉,黄清华,王彦宾.三维错格时域伪谱法在频散介质井中雷达模拟中的应用.地球物理学报,2009,57(2):1915-1922.
LI Zhan Hui, HUANG Qing Hua, WANG YAN Bi. A-3D staggered grid PSTD method for borehole radar simulations in dispersive media. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2009, 57(2):1915-1922.

[4] 冯暄,邹立龙,刘财.全极化探地雷达正演模拟.地球物理学报,2011,54(2):349-257.
FENG Xuan, ZOU Li Long, LIU Cai. Forward modeling for full-polarimetric ground penetrating radar. Chinese J. Geophys. (in Chinese),2011,54(2):349-257.

[5] 刘四新,曾昭发.频散介质中地质雷达波传播的数值模拟.地球物理学报,2007,50(1):320-326.
LIU Si-Xin, ZENG Zhao- Fa. Numerical simulation for Ground Penetrating Radar wave propagationin the dispersive medium. Chinese J. Geophys. (in Chinese),2007,50(1):320-326.

[6] 徐世浙.地球物理中的有限单元法[M].北京:科学出版社,1994.
Xu S Z. Finite element method for geophysics[M]. bei jing: science Press,1994.

[7] 沈飚.探地雷达波波动方程研究及其正演模拟.物探化探计算技术,1994,16(1):29-33.
SHEN Biao. study of radar wave equation and its forward modeling. Geophysical and Geochemical computation technology(in Chinese),1994,16(1):29-33.

[8] 底青云,王妙月.雷达波有限元仿真模拟.地球物理学报,1999,42(6):818-825.
Di Qing-yun, Wang Miao-yue. 2D finite element modeling for radar wave. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 1999, 42(6):818-825.

[9] Qingyun Di, Miaoyue Wang. Migration of ground-penetrating radar data with a finite-element method that considers attenuation and dispersion. Geophysics,2004,69(2):472-477.

[10] 底青云,许混,王妙月.衰减雷达波有限元偏移.地球物理学报,2000,43(2):257-262.
Di Qing Yun, XU Kun, wang miao yue. the attenuated radar wave migration with finite element method. Chinese J. Geophys. (in Chinese),2000,43(2):257-262.

[11] 谢辉,钟燕辉,蔡迎春.电磁场有限元法在GPR正演模拟中的应用.河南科学,2003,21(3):295-298.
Xie Hui, Zhong Yan-hui, Cai Ying-chun. Application of finite element methods for electromagnetic fields in forward model of GPR. He Nan Science. 2003,21(3):295-298.

[12] Fanning P J, Boothby T E. Three-dimensional modeling and full-scale testing of stone arch bridges. Comput&.Structures, 2001,79(29):2645-2662.

[13] Arias P, Armesto J, Capua D D, etal. Digital photogrammetry, GPR and computational analysis of structural damages in a mediaeval bridge. Engineering Failure Analysis,2007,14(8):1444-1457.

[14] Lubowiecka I, Armesto J, Arias P, etal. Historic bridge modelling using laser scanning, ground penetrating radar and finite element methods in the context of structural dynamics. Engineering Structures,2009,31(11):2667-2676.

[15] 黄南晖.地质雷达探测的波场分析.中国地质大学学报,1993,18(3):294-303.
Huang Nan hui. Wave analysis in GPR prospecting.. Journal of China University of Geosciences 1993,18(3):294-303.

[16] 张继锋,汤井田,喻言,刘长生.基于二次插值的线源可控源有限元数值模拟.吉林大学学报(地球科学版),2009,39(05):929-935.
ZHANG Ji feng, T ANG Jing tian, YU Yan, LIU Chang sheng. Finite Element Numerical Simulation on Line Controlled Source Based on Quadratic Interpolation. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2009, 39(05):

929-935.

[17] 薛东川,王尚旭,焦淑静. 起伏地表复杂介质波动方程有限元数值模拟方法. 地球物理学进展,2007,22(2):522-529.
Xu Dong-chuan, Wang Shang-xu, Jiao Shu-jing. Wave equation finite-element modeling including rugged topography and complicated medium. Progress in Geophysics. (in Chinese),2007,22(2):522-529.

[18] Claerbout J F. Imaging the Earth's Interior. Blackwell Scientific Publications,1985.

[19] David M. Young. Second-degree iterative methods for the solution of large linear systems. Journal of Approximation Theory,1972,5 (2):137-148.

[20] 柳建新,蒋鹏飞,童孝忠. 不完全 LU 分解预处理的 BICGSTAB 算法在大地电磁二维正演模拟中的应用. 中南大学学报(自然科学版),2009,40(2):484-491.
Liu Jian-xin, Jiang Peng-fei, Tong Xiao-zhong, *et al*. Application of BICGSTAB algorithm with incomplete LU decomposition preconditioning to two-dimensional magnetotelluric forward modeling. Journal of Central South University(Science and Technology),2009,40(2):484-491.