第 25 卷 第 6 期　　地 球 物 理 学 报　　Vol. 25, No. 6
1982 年 11 月　　ACTA GEOPHYSICA SINICA　　Nov., 1982

变密度体重力勘探反演的多解性问题

熊 光 楚

摘　　要

本文利用经典位论中格林层的概念，证明了：

1. 在一个物体内可以有多种密度分布，使其总质量为零，在物体外任一点的位为零；

2. 当总质量不变时，在一个固定形状及体积的物体中，可以有多种密度分布，并且处处密度为正，使物体外任一点的位相同；

3. 当总质量不变时，在不同形状及不同体积的物体内，可以有多种密度分布，并且处处密度为正，使物体外任一点的位相同.

由此得出结论：总质量不变，若物体的密度不均匀（而且处处为正），根据重力异常作反演，不能唯一地求出物体的形状；当物体的形状已知时，也不能唯一地求出其密度分布.

重力异常反演的多解性问题，在上世纪末及本世纪初就研究了. 开初，主要是研究质量相对球心对称分布的所谓"牛顿球"的问题，以后又研究了二度体的情况，但这时假定引起异常的物体及其周围的介质的密度都是均匀的. 由此得出的结论是：如果能知道地下几个点(有时甚至只要一个点)的实际情况（通过地震测深及钻探来获得），异常的多解性即可避免[1]. 但是，实际的地质情况很复杂，在研究区域地质构造及深部地质构造时，不仅地质体的形状复杂，而且物性不均匀. 二度体、均匀物性的模型过于简单，不能满足实际工作的需要. 近年来有许多人开始研究较复杂形状、不均匀物性的物体的模型. B. H. Страхов 最近用泛函分析的方法，在一定的假设条件下，对变密度的三度体重力异常反演解释的非唯一性作了论述[2]. 考虑到这个问题的重要性，我们用格林层的概念证明：当三度体的质量分布不均匀时，根据重力异常作反演，即使有了少数点上的已知地质材料，既无法求出物体的形状，也无法求出其质量分布情况. 即使物体的形状已知，也无法求出其质量分布情况.

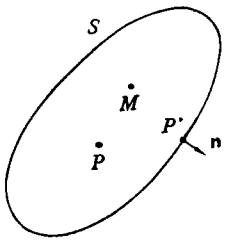


图　1

一、设 S 为包围一个单连通区 T 的分片光滑的封闭曲面. P 及 M 为 S 内的点，q 为 S 外的点，并用 Pq 表示 P 与 q 间的距离（图 1）. 如果在 P 点有一单位质量，则根据位的理论，有[3]

$$\frac{K}{Pq} = K\int_S \frac{\bar{\mu}}{r}\,dS. \tag{1}$$

式中 K 为引力常数，r 为 S 上 P' 点到 q 点的距离，$\bar{\mu}$ 为 S 面上的面密度，即

本文 1980 年 7 月 17 日收到，1981 年 4 月 21 日收到第一次修改稿，1982 年 3 月 29 日收到第二次修改稿.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\bar{\mu} = -\frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial G}{\partial n}}. \tag{2}$$

G是以P为极点相对S面的格林函数，$\boldsymbol{n}$为P'点处S面的外法线方向，$\overline{\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}}$表示$G$在$S$面上对$S$外法线方向的偏微商．同时，在$S$面上还有

$$\int_S \bar{\mu} dS = -\frac{1}{4\pi}\int_S \overline{\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}} dS = 1, \tag{3}$$

及

$$\overline{\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}} < 0, \quad \bar{\mu} > 0. \tag{4}$$

因此，(1)式的物理意义是：在P点的单位质量在q点的位等于S面上面密度为$\bar{\mu}$的质量层在q点的位．这个与S面重合，并用(2)式定义其面密度的面称为“格林层”．为了以后叙述方便，我们称与S面重合、其面密度为$b\bar{\mu}$的面为“G质量层”，$|b| < \infty$．

二、设G为以P为极点相对S面的格林函数．$S_1, S_2, \cdots, S_H$（S_H与S重合）为S内包围P而又相互间隔很小但又不相交的封闭面．设g_i为以P为极点相对S_i面的格林函数，则总质量为Δm_i的“G质量层”S_i在q点的位$\Delta U_i(q)$，根据(1)式为

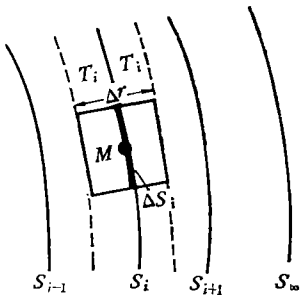


图 2

$$\Delta U_i(q) = \frac{K\Delta m_i}{Pq} = K(\Delta m_i)\int_{S_i}\frac{\bar{\mu}_i}{r_i}dS$$

$$= K\int_{S_i}\frac{(\Delta m_i)\bar{\mu}_i}{r_i}dS.$$

式中，$\bar{\mu}_i = \overline{\frac{\partial g_i}{\partial \boldsymbol{n}}}$，$(\Delta m_i)$为$\Delta m_i$的数值，由此得到

$$U(q) = \sum_{i=1}^{H}\frac{K\Delta m_i}{Pq} = \sum_{i=1}^{H} K\int_{S_i}\frac{(\Delta m_i)\bar{\mu}_i}{r_i}dS. \tag{5}$$

H为S_i面的个数．

从图2看出，设有分布在ΔS_i面上的质量$(\Delta m_i)\bar{\mu}_i\Delta S_i$，当$\Delta S_i \to 0$时，它在$q$点引起的位可看成是该质量集中在$M$点时的位（$M$点在$\Delta S_i$上，位于其中点），即

$$\Delta U_1 = \frac{K(\Delta m_i)\bar{\mu}_i\Delta S_i}{r_i}. \tag{6}$$

式中r_i为M点到q点的距离．

现设有质量δm均匀分布在$\Delta V = \Delta r\Delta S_i$这一小体积中，$\Delta r$为相邻两个面即$S_i$与$S_{i+1}$面间的最短距离，而$\Delta S_i$恰在$\Delta V$的中央并将$\Delta V$近于等分，当$\Delta S_i$及$\Delta r$同时趋近于零时，这个质量在$q$点引起的位可看成该质量集中在$M$点时的位，即

$$\Delta U_2 = \frac{K\delta m}{r_i}. \tag{7}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中 r_i 为M点到 q 点的距离．如果令

$$\delta m = (\Delta m_i)\bar{\mu}_i \Delta S_i, \tag{8}$$

则有

$$\Delta U_1 = \Delta U_2. \tag{9}$$

显然，根据 (8) 式定义的 δm 将随着 $\Delta V = \Delta r \Delta S_i$ 的减小而减少，选择 Δm_i，使下述极限存在：

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta m}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ \Delta r \to 0}} \frac{(\Delta m_i)\bar{\mu}_i \Delta S_i}{\Delta r \Delta S_i} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{(\Delta m_i)}{\Delta r} \bar{\mu}_i = \rho_0(M), \tag{10}$$

则 $\rho_0(M)$ 具有密度的意义．由此得到

$$\mathrm{d}m = \rho_0(M) dV. \tag{11}$$

现在，取 $S_1, S_2, \cdots, S_H$ 面的数目无限大(只要取相邻面间的距离无限小就可以做到)，则相邻面间最短距离 Δr 趋近于零，根据 (6)—(11) 式，(5) 式可写为

$$U(q) = \sum_{i=1}^{\infty} K \int_{S_i} \frac{(\Delta m_i)\bar{\mu}_i}{r_i} dS = \sum_{i=1}^{\infty} K \int_{T_i} \frac{\rho_0(M) dV}{r_i} = K \int_{T'} \frac{\rho_0(M) dV}{r}. \tag{12}$$

式中，T' 为比 T 略大而且包围 T，并与 T 无共同边界点的一个空间，若令 $\Delta m_\infty = 0$，则可令 $T' = T$.

如果令 T 中的总质量为 m，则

$$m = \sum_i \Delta m_i. \tag{13}$$

当 $m = 0$ 时，从 (5) 式得出

$$U(q) = \frac{Km}{Pq} = 0.$$

很显然，服从 (13) 式的 $\Delta m_i (i = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$ 的解是多值的．这就是说，当总质量为零时，在 S 面内有无穷多种质量分布方式，使在 S 外任一点的位为零．

现在 S 内充满密度为 $\rho(M)$ 的物质，设 $\rho(M)$ 的极小值为 $A > 0$，则当 $|\rho_0(M)| < A$ 时，可以将 $\rho_0(M)$ 迭加在 $\rho(M)$ 之上，即改变物体的密度分布而不改变其外场．由于满足 (13) 式的 Δm_i 是多值的，因此我们得到了一个重要的结论：同一质量可以在 S 内有多种分布，而且保持处处密度为正，使其在 S 外的位相同．

三、设 Δm_1、Δm_2、Δm_3、$\cdots$ 为一组质量，具有

$$\Delta m_i > 0, \quad \sum_i \Delta m_i = m. \tag{14}$$

现设在图 3 的 P 点有一按 (14) 式定义的质量 m．包围 P 作一分片光滑的封闭面 S_∞，包围一个单连通区域 T，以 P 为极点作相对 S_∞ 的格林函数 G，然后在 S 内作一系列相距很近但又不相交的包围 P 的任意曲面，设 g_i 为以 P 为极点相对 S_i 面的格林函数，根据重力场的迭加原理，P 点的 m 在 S_∞ 外一点 q 的位等于

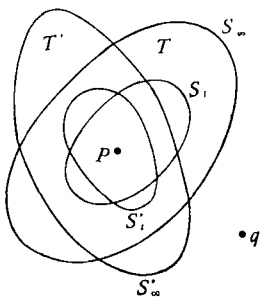


图 3

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$U(q)=\frac{Km}{Pq}=K\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\Delta m_i}{Pq}. \tag{15}$$

根据(1)式,用 S_i 面上的"G 质量层"代替 P 点的 Δm_i 求其在 q 点的位,则有

$$U(q)=K\sum_{i=1}^{\infty}(\Delta m_i)\int_{S_i}\frac{\bar{\mu}_i}{r_i}dS. \tag{16}$$

式中 $\bar{\mu}_i=\overline{\frac{\partial g_i}{\partial n}}$. 利用推导(12)式同样的方法可以得到

$$U(q)=K\int_T\frac{\rho(M)}{r}dV. \tag{17}$$

式中 $\rho(M)$ 根据(10)式为

$$\rho(M)=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{-(\Delta m_i)}{\Delta r}\left(\frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial g_i}{\partial n}}\right). \tag{18}$$

由于满足(14)式的 Δm_i 的解是多解的,因而根据(18)式,(17)式中 $\rho(M)$ 也是多解的. 这样,又得到上节中同样的结论. 这时,由于 $\overline{\frac{\partial g_i}{\partial n}}<0$,根据(14)及(18)式,可以保证在物体内 $\rho(M)>0$.

四、围绕极点 P 作另一分片光滑的封闭曲面 S'_∞,包围一个单连通区域 T'(见图3). 重复上节的步骤,可得到在 P 点的质量 m 在 S'_∞ 外一点 q 的位为

$$U'(q)=\frac{Km}{Pq}=K\int_{T'}\frac{\rho'(M)}{r}dV. \tag{19}$$

式中 $\rho'(M)$ 根据(10)式为

$$\rho'(M)=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{-(\Delta m_i)}{\Delta r}\left(\frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial g'_i}{\partial n}}\right), \tag{20}$$

而 g'_i 为以 P 为极点相对 S'_i 面的格林函数.

对比(19)及(15)式,得到

$$U(q)=U'(q).$$

这样,我们得出第二个重要的结论:同一质量可以在不同的有限区域(只要它们有公共极点 P)内有多种分布,使 S_∞ 及 S'_∞ 外任意一点 q 上其位相同.

五、一个复连通区域可以由若干个单连通区域组成,根据重力位服从迭加原理,可以得到复连通区的重力位($U(q)$)为

$$U(q)=\sum_{i=1}^{n}U_i(q). \tag{21}$$

式中 $U_i(q)$ 为组成复连通区的第 i 个单连通区的重力位, n 为组成复连通区的单连通区个数,既然 $U_i(q)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是多解的,$U(q)$ 也必定是多解的.

六、综上所述,可以得出下述结论:总质量不变时,当物体的密度不均匀时(处处为正),根据地面重力异常作反演,不能唯一地求出物体的形状;而当物体的形状已知时,也不能唯一地求出其密度分布.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参　考　文　献

[1] Боровко, Н. И., Оптимизацая геофизических исследований при поисках рудных месторождений, Л. «Неада», 1979.

[2] Страхов, В. Н., Об эквивалентности в обратной задаче гравиметрии при переменной плотности масс, Докл. АНСССР, Vol. **263**, No. 2, 1977.

[3] H. 伊捷尔松，位理论及其在地球形状理论和地球物理中的应用，32—38，中国工业出版社，1963.

ON THE NONUNIQUE SOLUTIONS IN THE INVERSE PROBLEM OF GRAVIMETRY FOR THE BODIES WITH IMHOMOGENEOUS DENSITY

XIONG GUANG-CHU

Abstract

Based on the idea of Green's shell and the relationship between the surface density and the volume density, we have proved the following theorems:

1. There are more than one way in which a given mass can be distributed imhomogeneously in a given body with the total mass equal to zero and gives a zero potential field outside the body.

2. In a given body with given mass, its density can assume more than one kind of distribution but still gives the same potential field outside the body.

3. If the regions occupied by different bodies have a common point P as the pole of the Green's functions relative to the different surfaces enclosing the different regions, a given mass can be distributed imhomogeneously in the bodies in more than one way such that their potential fields outside the bodies are the same.

From what stated above, we get the following conclusion:

If a given mass distributes imhomogeneously in a given body, it is impossible to get unique solutions of the shape and density of the body, it is also impossible to get a unique solution of the density even if the shape of the body is given.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net