维普资讯 http://www.cqvip.com

地球物理学中的分形与分维研究进展

杨 新 社

(中国科学院地球物理研究所 100101)

提 要:应用分形理论来研究地球物理现象,是近年来地球物理学研究中的新方法和新思路。本文介绍了分形与分维的基本概念,并综述了地球物理学中分形研究的最新进展。

关键词:分形几何学 地球物理学 自相似性 自仿射性。

一、引 言

由当代数学家 B. B. Mandelbrot 创建并发展的分形几何学(Fractal Geometry)已被广泛应用于众多领域[1],分形(Fractals)和分维(fractal dimension,国内不少学者译为分形维)成了许多学科的热门课题。现在,人们不仅知道描述浑沌运动(Chaotic motion)的奇异吸引子(strange attractor)具有分形结构($D_F \approx 1.26$),而且知道在自然界和社会中广泛存在的自相似性(Self—similarity)[2][3]现象都可由分形来描述。

分形几何学的主要内容是研究一些具有自相似性的不规则曲线或位形(简称线性分形)、具有自反演性(Self—reverse)的不规则图形、具有自平方性(Self—squaring)的分形变换以及具有自仿射性(Self—affine)的分形集等等。目前应用较多的主要限于具有自相似性的线性分形和具有自仿射性的信号序列。

通过下面的分析讨论,我们就会看到地球物理和地质中的很多现象都具有分形几何的特征。地震时空分布、断层形状、云图、油气田分布、岛域形状等具有自相似的分布特征;地球地表形状、大地水准面异常、地磁分量记录等则具有自仿射的分形特征。

二、分形与分维

分形理论的基本观点认为维数的变化是连续的,处理的对象往往具有非规则性和自相似性。自相似性即局部是整体成比例缩小的性质,定量描述这种性质的参数是分形维(简称分维)。在经典几何学中,点是零维的,直线是一维的,平面是二维的,各种各样的曲线也是一维

收稿日期:1991 年 1 月 16 日

维普资讯 http://www.cqvip.com

的。这种只取整数的维数是拓扑学意义下的欧几里得维数，记为 D_T，它反映了确定一个点的空间位置所需独立座标或独立方向的数目。分形维 D_F 既可以是整数，也可以是分数和无理数。为了表征分形，人们引入了多种不同的维数定义。下面介绍几种常见的维数定义：

1、豪斯道夫(Hausdorff)维数(或柯尔莫戈洛夫(Kolmogorov)维数—容量维)

若 $N_{(\varepsilon)}$ 是能覆盖住一个点集的直径为 ε 的小球(称 ε 球)的最小数目，则点集的容量维定义为：

$$D_c=-\lim_{\varepsilon\to 0}\ \ln N(\varepsilon)/\ln\varepsilon \qquad (1)$$

由于容量维基本上就是 Havsdorff 1909 年引入的广义维数的定义，所以在许多实际问题中，可以不管容量维 与 Hausdorff 维数的细微差别，一律称为分维。最典型的例子是 Cantor 集的 $D_0=0.6309$，一维 Koch 曲线的 $D_0=1.2618$。

计算 D_0 除了这种 d 维“ε 超球”(d=1，2，3 时超球分别为线段、圆、球)的覆盖法外，还可由李雅普诺夫(Lyapunov)指数 $\lambda i(i=1,2,\cdots,k)$ 来求得。1979 年 J. Kaplan 和 J. Yorke 给出了如下的关系[4]：

$$D_0=k+\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda i\Big)/|\lambda_{k+1}| \qquad (2)$$

其中 k 是满足 $\sum_{i=1}^{k}\lambda i\geqslant 0$ 的最大整数。1985 年，A. Wolf[5]给出了从实验数据中提取 λi 指数的方法。Lyapunov 指数是描述浑沌吸引子精细特征的一个指标，这种吸引子具有分形结构。如大气浑沌的 Lorenz 吸引子的 $D_0=2.06$，流体中湍流发生的 Henon 吸引子的 $D_0=1.26$。

2、信息维

在容量维定义中，只考虑了所需 ε 球的个数，而对每个球覆盖点数的多少却未加区别，于是，人们提出了信息维的定义：

$$D_1=-\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\sum_{i=1}^{N}Pi\ \ln(1/Pi)\Big]/\ln\varepsilon \qquad (3)$$

式中，P_i 是一个点落在第 i 个球中的概率。当 $P_i=1/N$ 时，$D_1=D_0$，可见信息维是容量维的一个推广。由于 D_1 的计算涉及到概率 P_i，运用起来有点费事，因而提出了关联维 D_2 的定义。

3、关联维数

P. Grassberger 和 I. Procaccia 于 1983 年应用关联函数 $C(\varepsilon)$ 给出的关联维数的定义为：

$$D_2=-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln C(\varepsilon)/\ln\varepsilon \qquad (4)$$

式中，$C(\varepsilon)$ 为系统的一个解序列。能否求出 D_2，关键在于 ε 取值的范围。若 ε 取值太大，则有 $C(\varepsilon)=1$，$\ln C(\varepsilon)=0$，这样的 ε 反映不了系统的内部性质。适当缩小 ε 的取值范围，可能在一段 ε 区间内有 $C(\varepsilon)\sim\varepsilon^D$，这里 D 就是 D_2 的一种逼近。若 ε 取值太小，周围一切偶然行为对系统性质的影响都将表现出来，因此只有当 ε 取适当值时，才会出现标度区间。

4、黎尼伊(Renyi)维数

事实上，可以统一定义一个维数 D_q，它是依赖于参数 q 的量，即

$$D_q=-\lim_{\varepsilon\to 0}K_q(\varepsilon)/\ln\varepsilon \qquad (5)$$

其中，$K_{q(\varepsilon)}$ 为 Renyi 广义熵：

$$K_{q(\varepsilon)}=\Big[\ln\sum_{i}P_i^q\Big]/(1-q) \qquad (6)$$

$$q=0,1,2\cdots\cdots,n$$

当 q=0，1，2 时，D_q 分别等于容量维 D_0，信息维 D_1，关联维 D_2，并且满足关系 $D_q>D_p$(当

维普资讯 http://www.cqvip.com

$p>q$)和 $D_T \leqslant D_q \leqslant \cdots \leqslant D_2 \leqslant D_1 \leqslant D_0$。

由分形维的定义，实际分形的维数完全可由上面给出的维数定义来进行估计($D_F=D_q>D_T$)。对于简单分形如 Cantor 尘集、Sierpinski 海绵等，所有的 D_q 都相等，即 $D_q=D_0(q=1,2,\cdots,n)$。而对于复杂的分形，必须采用多种维数来描述，从而找出对系统物理性质起主导作用的那个 D_q 来。如果维数较低，表明在构造这些复杂系统的模型时，并不需要使用较多的变量。现有的实验和唯象方法便于直接测定 D_0、D_1 和 D_2[6]。

值得指出的是，自然界中的真实分形和数学上纯粹的分形有以下两点差异：(1)自然界中的分形带有随机因素，不象数学中的分形那样纯粹和"干净"，因而必须采用概率统计的方法来处理；(2)自然界中的分形现象只在一定尺度范围内，在一定的层次中才能表现出分形的特征，其两端都受到某种特征尺度的限制。在这些特征尺度之外，分形现象就不存在了，其分维也就失去了意义。例如，对海岸线而言，其特征尺度总不能比两个端点的距离还大，也不能比原子的尺度还小。云的分维，也只在 $10^0 \sim 10^6 km^2$ 的尺度内才有意义。而数学上的分形，则可以一直追溯到无穷。

三、地震活动的分形维和 b 值

地震活动的预报是地球物理、力学问题的一个难题，它涉及的因素很多。地震震级越大，则发生的次数就越少。Gutenbery 和 Richter 研究了地震震级与频次的关系，得出了著名的 G—R 关系：

$$\ln N = a - bM \qquad (7)$$

和震级—地震波能量关系

$$\ln E = A + 1.5M \qquad (8)$$

其中，M 为震级，N 为震级在 M 以上的地震频次，E 为地震波能量，A 为与所取单位有关的常数，当 E 以焦耳为单位时，$A=4.8$，a 为常数，而 b 为系数。b 值是一个非常重要的参数，它反映了岩石所承受的平均应力和岩石内部平均强度的大小。多年来，人们对地震活动性和 b 值进行了大量的研究，但是以前没有将它们与分形和分维联系起来。

地震活动的分形特征可以从时间、空间和强度三个方面来进行研究，分别测定其分维。事实上，由(7)和(8)式可得到：

$$N \sim E^{-b/1.5} \qquad (9)$$

由此可见，地震频次这种量度值，是随标度 E 的减小而增大的，这是一种分形现象，其分形维 D_F 为：

$$D_F = b/1.5 \qquad (10)$$

K. Aki(1981)[7]，G. King(1983)[8]等分别由一定的前提条件出发，推出地震断层长度的自相似分维 $D_s=2b$. 这说明：地震 b 值与分维之间，有着极其密切的本质联系；如果忽略二者之间的换算系数，简直可以说，b 值就是一种分形维。

目前研究表明：地震 b 值所反映的自相似性跨越了很大的尺度，其无标度的上限可到 7 级以上，其下限可能在 0 级以下，其能量至少跨越 10 个数量级，这是十分惊人的自然线性分形现象。研究还发现，与 b 值相关的分维随时间、空间都有变化。特别是大地震发生前，由中小地震

维普资讯 http://www.cqvip.com

算出的时间分维和空间分维大都较低；而大地震后余震的时、空分维相对较高。同时，不同地区的地震的分维也有不同程度的差异，一般来说，洋脊地区的地震分维相当高，岛弧、转换断层次之，内陆地震的分维较低。另外，地震震源的空间位置分布也表现出了明显的分形特征。对地震活动分布的分形特征的一个较合理解释，就是认为与地震过程相关的岩石破裂及断层活动也是分形的。然而，实际问题远比所想象的要复杂得多，地震科学中的分形与分维研究还未达到实用化的程度，仍需做大量的深入研究。

四、断层的分维与岩石破裂模式

绝大多数的地震属于构造地震，而构造地震则是断层活动的产物。地球表层的各种断裂，从规模巨大的断裂带直至岩石中的微裂纹，本身就存在某种自相似性。

对断层的分维进行研究是从 C. Aviles（1987）对圣安德烈斯（San andres）断层的研究开始的[9]。近年来，国内学者也已开始应用这些方法对关中大地震的断层、鲜水河断裂带、红河断裂带以及滇西北地区等进行了研究，取得了可喜的结果。如，鲜水河断裂带的分维为 $D_0=1.15$，红河断裂带的分维为 $D_0=1.43$。同时，这些研究也表明，同一断层的不同段的分维也会有差异。尽管如此，目前的工作尚未达到在地震区划中的实用化程度。

在岩石材料的大量破裂实验中，发现裂纹扩展路径并不像经典分析中所说的那样沿某个方向平滑扩展，而实际上一般是沿晶、穿晶及它们的耦合断裂方式。这些细观上的不规则裂纹本身就是一种分形。现在，人们已测量出了许多材料破裂的分形维，如石英（$D_0=1.89$）、玄武岩（$D_0=2.56$）、花岗岩（$D_0=2.22$）和片麻岩（$D_0=2.13$）等。

目前，人们已经知道，地质材料破裂的分形维不仅与破裂方式有关，而且与材料的物理特性本身有密切关系。例如，岩石、混凝土应力应变曲线的分维 D_F 为[10]：

$$D_F=\ln 3/\ln\sqrt{1+8\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}E\right)} \qquad (11)$$

（E 为材料的弹性模量），这里 D_F 实质上反映了材料的微孔隙所造成的非弹性变形特征。

近年来，应用重整化群方法（renormalization group technique）研究岩石破裂模式已经取得一些进展。假定岩石由许多小立方体所组成，每一立方体破裂的概率为 P_c，则碎块分布的分形维 $D_0=\ln(8P_c)/\ln 2$，即分维与尺度无关，仅仅与单元立方体的破裂概率 P_c 有关，证明了破碎过程就是分形形成过程。同时，还研究了两种破裂模式：坚固单元柱体模式（临界概率 $P_c=0.896$，分维 $D_F=2.84$）和软弱面模式（$P_c=0.490$，$D_F=1.97$）。无论在哪种情况下，单元立方体的破裂概率如果小于临界概率 P_c，破裂都不会发展，不致引起整体的破裂；一旦超过了临界概率，就会发生突变，导致整体的突然破裂。这表明，分形维可能是破裂方式的灵敏量度。无疑，这些研究对于震源物理是很有意义的。

五、横向非均匀分布中的分形维

地质和地球物理中的许多现象都具有横向非均匀分布特征，而这些非均匀分布的空间构

维普资讯 http://www.cqvip.com

型大都又有分形几何的特征。

对于某种矿产资源，Chargill[11]发现了储量吨位 M 与平均品位 $\bar{C}$ 的如下分形关系：

$$\bar{C}\sim M^{-D/3} \qquad (12)$$

作为例子，他计算了美国汞矿储量分布的分维 $D_F=2.01$，而铜矿的分维 $D_F=1.16$。与此同时，Drew(1982)则发现美国的油气田分布的分维 $D_f=2.22$。

地球上的水系、云等现象也具有分形特征，它们却满足分形的如下形式的周长—面积关系：

$$P\sim A^{D/2} \qquad (13)$$

此处的 D 就是对应的分形维。Lovejoy[12]通过卫星云图发现云的分维 $D=1.35$。以此法计算，我国水系的分维平均值为 $\bar{D}=1.574$。有关的研究显示出水系的分维估值 $\hat{D}$。可能与表征内外营力强度的 F 值具有线性关系。以(13)式为基础，我们测算了板块边界形状的分形维，如太平洋板块的分维为 1.17，印度板块的分维为 1.43。

地球表面的地形起伏和大地水准面异常本身也是一种分形。利用地球形状的球谐展开式，Turcotte[13]证明其功率谱密度与波数的如下关系

$$S(k)\sim k^{-\beta} \qquad (14)$$

这实际上是一种自仿射分形，其分形维为：

$$D=\frac{5-\beta}{2}$$

Turcotte 的结果为 $\beta=2$，$D=1.5$。这说明地球表面形状等同于随机的“布朗噪声”(Brown noise)。Bell(1975)和 Fox(1985)对海底地形的统计分析时，也得到了类似的结果。另外得到的大地水准面的分维 $D=0.75$，对应的 $\beta=3.5$，这和著名的 Kaula 律是一致的。

这里需指出的是：用周长—面积方法对地形剖面测算所得的线性分维($D\approx1.2$)和用上面的功率谱密度法所得的分维($D=1.5$)是有差别的，这一差别来源于“自相似”与“自仿射”分形的差异。地形剖面的垂向坐标不是自相似的，重力作用的结果导致了地形的自仿射特征。

目前的研究还表明：岩石的微孔渗流、地幔交待过程等不仅与两相流(two—phase flow)有关，而且呈现出了明显的分形结构。就象重力基点网，地震台站这些人为的设置构型，有时也会呈现分形结构。Korvin[14](1990)测算了澳大利亚南部的重力基点网的分形维 $D=1.4$。

六、时间序列中的分形维

对于有一定谱特征的单值单变量随机的自仿射序列，如 X(t)，B. Mandelbrot[15](1985)证明了，其能量谱密度 S(f)对频率成幂律关系：

$$S(f)\sim f^{-\beta} \qquad (16)$$

且其分形维 D 可由参数 β 求得：

$$D=\frac{5-\beta}{2} \qquad (17)$$

对于布朗运动 $\beta=2$，则 $D=1.5$。Chave[16]等人 1987 年分析了加拿大某台站所记录的一段地磁场北分量的时间序列，在滤除磁暴等干扰后，他们发现所得的能量谱的低频部分能很好满

维普资讯 http://www.cqvip.com

足(16)式，且β=2.5，则其对应的低频分维D=1.25；在高频部分得出β=1.15，分维D=1.92；而在中频部分分维则变化较大。

Froyland[17](1988)分析了1980年所记录到的挪威海浪高的时间序列，他发现该序列是自仿射的，其分维为D=1.13±0.01。事实上，自然界中，大多数随机序列都是自仿射的。另外，Mandelbrot和Wallis[18]还分析了太阳黑子的活动性，其分维为D=1.07，这表明象太阳黑子这些随机性较强的现象本身却存在较强的规律性。同样地，我们也可用本节的方法去研究固体潮记录、地震记录等的分维。

七、讨论与展望

分形是自然界中较为普遍的现象，应用其理论和方法来研究地球科学中的一些现象的工作还只是初步，尽管如此，这一理论方法已揭示出了不少新的规律性并显示了其极大的优越性。对现实世界中的分形现象可以从各个不同的角度来研究其分形维和分形的形成过程。分形理论与浑沌理论、耗散结构论、协同学、突变论等非线性科学理论有着内在的联系，如果将这些学科有机地结合起来，研究非线性的地球系统和地球物理序列，必将给现今地学难题的解决提供新的研究线索和研究途径。

同时，分形理论也在发展之中，分形维的概念还需进一步的发展与推广。尽管我们不能指望分形理论能解决所有的问题。但是，地学工作者应密切注视着这些方面的进展与动向，从中获得启示，开辟新的研究领域和研究方向。

参 考 文 献

[1] Mandelbrot B. B.，The Fractal Geometry of Nature，Freeman，San Francisco，1982.

[2] 郝柏林，分形与分维，科学，38，NO.9，1985。

[3] paladin G.，Vulpiani A.，Fractals in Physics，Pietronero L.，eds.，Elsevier Science Publishers，1986.

[4] J. Kaplan，J. Yorke，Lecture Notes in Mathematics，1979，p228.

[5] Wolf a.，et a.，Determination of Lyapunov Exponents，Physica，16D，1985，p285.

[6] Mandelbrot B. B.，Fractals and Multifrata's，Springer，New York. 1989.

[7] Aki K.，A Probabilistic Synthesis of Precursory Phenomena，In Earthquake Prediction(Simpson，D. eds)，AGU，Washington，D. C.，1981，p556—574.

[8] king G.，The Accommodation of Large Strains in the Upper Lithosphere of Earth and other Solids by Self—similar Fault systems，The Geometrical Origin of b—value，Pure Appl. Geophys. 21，1983，p761—815.

[9] Aviles，D C. A.，et al.，Fractal Analysis Applied to Characteristic Segments of the San Andres Fault.，J. Geophys. Res.，92，1987，p331.

[10] 谢和平，岩石、混凝土损伤力学，中国矿业大学出版社，1989年。

[11] Cargill S. M. et al.，Estimating Usable Resoures From Historical Data，Econ. Geol.，76. 1981，p1081—1095.

[12] Lovejoy S.，Area—perimeter Relation for Rain and Cloud Areas，Science，216，1982，p185—187.

[13] Turcotte D. L.，Fractal Interpretation of Topography and Geold Spectra，J. Geophys Res.，92 1987，p597—601.

[14] Korvin G.，et al.，Fractal Chracterization of the South Australian Gravity Station Network，Geophys. J. Inter，，100，1990，p535.

[15] Mandelbrot B. B.，Self—affine Fractals and Fractal Dimension，Phys. Scripta，32，1985，p257—260.

维普资讯 http://www.cqvip.com

〔16〕 Chave A. D., et al, On the Robust Estimation of power Spectra Coherences, J. Geophys. Res., 92. 1987, P633—648.

〔17〕 Froyland J., et al., The Fractal Statistics of Ocean Wave, Geophys Norv., 38, 1988, p45—76.

〔18〕 Mandelbrot B. B., Wallis J. R., Some Long—run properties of Geophysical Records, Water Resour. Res., 5, 1969, p321—340.

REVIEW OF FRACTAL RESEARCH IN GEOPHYSICS

Yang Xinshe

(*Institute of Geophysics, Academia Sinica*, 100101)

Abstract

It is a new method and tendency in geophysics to apply the fractal theory to study geophysical phenomena. In the paper, the basic concepts of fractals and fractal dimensions are introduced, and the new advances in the research of fractals in geophysics are also reviewed.

Key Words: Fractal geometry, geophysics, Self—similarity, self—affinity