第38卷 第1期 地球物理学报 Vol. 38, No. 1
1995 年 1 月 ACTA GEOPHYSICA SINICA Jan., 1995

地球变化磁场的分形和混沌特征*

王 赤 陈金波 王 水
（中国科学技术大学地球和空间科学系，合肥 230026）

摘 要

将北京地区地球变化磁场的水平分量作为一无规时间序列，利用谱分析方法求出了1959,1965, 1970和1976年时间段的分数维布朗运动（FBM）的维数 D_b。结果表明 D_b 值与太阳活动性呈负相关. 进而利用时间延迟方法来重建该序列在相空间的吸引子，计算得到吸引子的维数 $D=4.2\pm0.4$，最大 Lyapunov 指数总是正值. 这表明地球变化磁场可能是混沌的. 还利用一简单模型说明太阳活动性对地球变化磁场 D_b 值的影响.

关键词 地球变化磁场,分形,混沌.

一、引 言

地磁场分为主磁场和变化磁场，变化磁场通常呈现十分复杂的时空分布。自从Manderbrot[1]提出分形的概念之后,自然界的无规性的描述又有了一种有力的工具.分形在空间尺度上的标度不变性同样可以在时间尺度上存在。在地球物理学中，有些作者对地震之前的小地震时间分布进行了分形分析[2]。另一个时间序列的例子便是地球磁场。Chave 等[3]给出了1982年7月加拿大不列颠哥伦比亚省维多利亚地区的北向磁场分量随时间变化的功率谱。一些作者还对 AE、AL 指数的分形特征进行了讨论[4-7]。分形最显著的特征是看来十分复杂的现象，事实上其大多数却是可用很少的参量来控制，即简单的非线性系统可以产生复杂的混沌运动。支配混沌运动的规律可用确定型的方程来描述[8]。例如 Michael 等[9]指出太阳黑子数随时间的变化即是一混沌运动。本文将利用北京地磁基准台地磁场水平分量的观测资料来研究地球变化磁场的分形和混沌特征，探讨其与太阳活动性的关系，并给出一种定性的物理解释。

二、地球变化磁场的 FBM 的分形维数

考虑一无规时间序列 $B_H(t)$，是随机的且具有一个特定的谱。谱密度具有以频率的幂次律依赖关系,即可求出 FBM 的分形维数 D_b,确定一个分形结构。它大致反映了时间序列的不规则性的程度。D_b 越大,时间序列变化就越复杂[10].

目前,我国地磁台站一般采用 Askania 地磁经纬仪进行地磁三要素(水平分量、磁偏

* 国家自然科学基金资助的课题.
本文1993年6月28日收到,1994年5月16日收到修改稿.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

角和磁倾角）的绝对测量．我们将地球变化磁场的水平分量随时间变化作为一无规时间序列，分别以 d 和 h 为采样时间单位，作出低频段和高频段的频谱图，谱指数 β 值即为频谱图在双对数坐标轴下曲线的斜率．而 β 值与 D_b 的关系为[10]

$$\beta = 5 - 2D_b,$$

由此即可求得 FBM 的维数 D_b．

1. 低频段

以 19、20 太阳周的高年 1959、1970 年和低年 1965、1976 年为例，采用 FFT 技术得到频谱图(图 1)．图中的直线是采用最小二乘法拟合的，它的斜率即为 β 值．进而在表 1 中列出了计算得到的 β 值和 D_b 值；还列出相应年份的太阳相对黑子数 R^*，它大致反映了太阳的活动性．

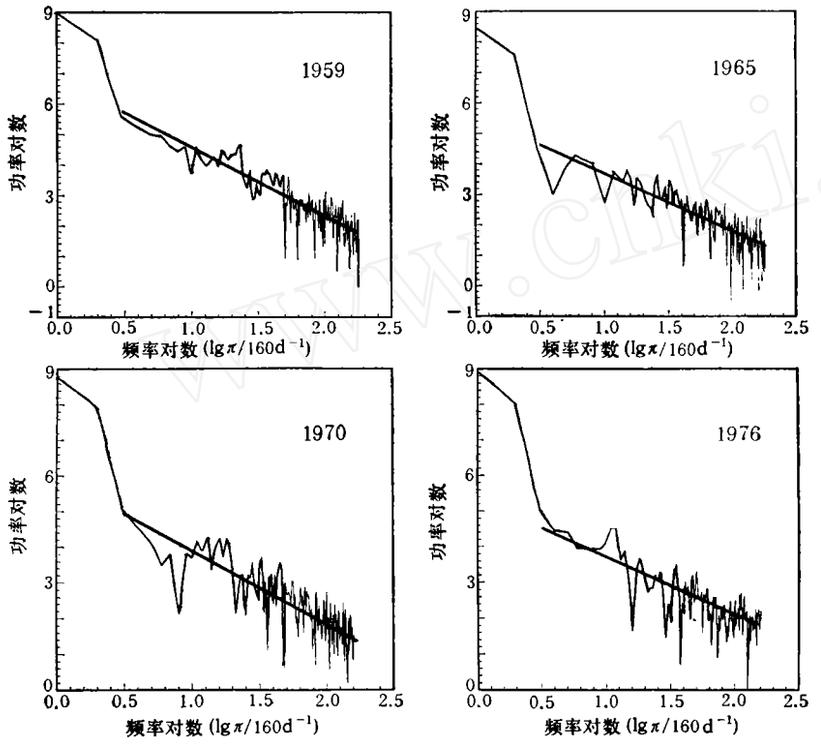

图 1　地球变化磁场水平分量的频谱(采用双对数坐标)

表 1　1959,1965,1970 和 1976 年有关的参数

太阳周	年　份	β	D_b	R^*
19 周	1959	2.28	1.36	159
	1965	1.90	1.55	9.1
20 周	1970	2.09	1.45	104.7
	1976	1.62	1.69	12.6

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由图 1 和表 1 可以看到，在太阳活动极大年的 1959 和 1970 年，其 β 值均大于 2.0，D_b 值都小于 1.5；而在太阳活动极小年的 1965 和 1976 年，其 β 值小于 2.0，D_b 值全大于 1.5．一般认为太阳活动极大年太阳活动性显著，但地球变化磁场水平分量的 D_b 值均较小，从整体上显得比低年时不复杂(这不排除太阳活动极大年期间地磁个·别事件的剧变)．另外，D_b 值 19 周时较 20 周偏低，而 Dodon 等[11]指出 19 周比 20 周呈现出更高的太阳活动性．所以这些都显示地球变化磁场水平分量的 D_b 值与太阳活动性呈现负相关．

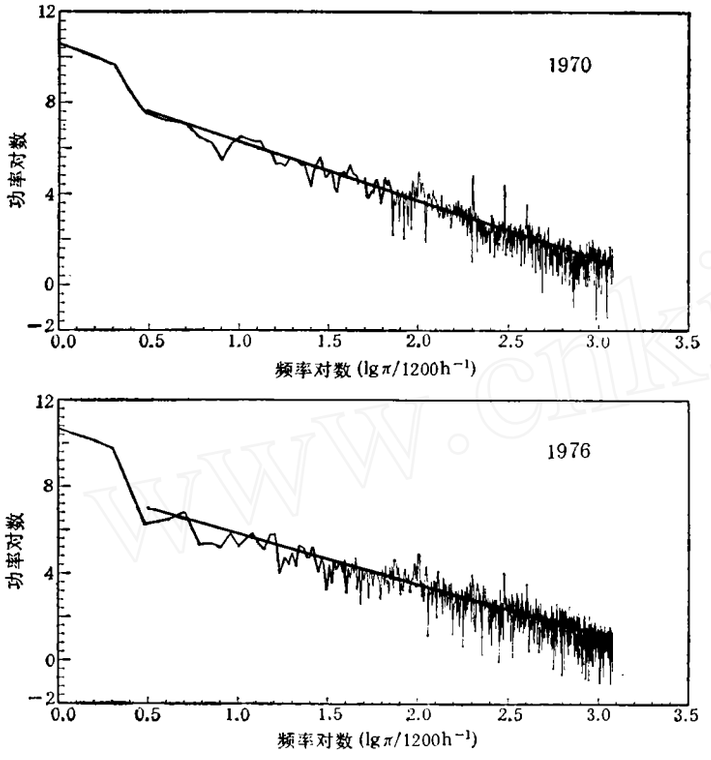

图 2 地球变化磁场水平分量的频谱(高频段)

2. 高频段

以 1970 和 1976 年为例，方法与上节相同，只是采样的时间间隔为 1h，频谱图如图 2 所示．得到的 β 值分别为 2.67 和 2.40，D_b 分别为 1.16 和 1.30．由于自仿射曲线分形维数与所选择的测量单位有关[2]，故高频段求得的 D_b 值与低频段有出入，但仍可看出太阳活动极大年的 D_b 值要小于太阳活动极小年的值．

三、吸引子分析

对于一由 N 个变量 $\{X_k(T)\}(k=1, 2, 3, \cdots, N)$ 来描述的复杂系统，在由变量 $\{X_k(T)\}$ 构成的相空间中，系统的瞬时状态为一点，状态的变化即为相轨迹．耗散系统的相轨迹最终将收敛一个子集，称为吸引子．而定性和定量描述该系统的特征量就是吸

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

引子的维数和 Lyapunov 指数.吸引子的维数大致给出确定系统状态的最少变量数目[8].

1. 吸引子的维数

时间延迟方法是根据系统的一个变量的时间序列数据得到许多信息的有效方法[12]. 用 X_i 代表称为嵌入空间的N维相空间的一个点，其坐标为 $\{X_0(t_i),\cdots,X_0(t_i+(N-1)\tau)\}$,$\tau$ 的选取总是希望这些变量是线性无关的. 如果从这些数据中选取任意的一个参考点 $\bar{X}_i$，并计算它到其余$N-1$个点 $\bar{X}_j(j\neq i)$ 的距离 $\bar{X}_i-\bar{X}_j$，便得到以 $\bar{X}_i$ 为中心、以 r 为半径距离的相点数目. 对所有的 i 值重复这一过程,得到

$$C(r)=\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\theta(r-|\bar{X}_i-\bar{X}_j|),$$

式中θ为 Heaviside 函数. 这样在一定的范围内（无标度律区间）$C(r)=r^d$，即可由 $\lg C(r)$ 对 $\lg r$ 的斜率得到吸引子的维数 d.

Holzfuss 等[13]建议仅在某参考点上研究，即 $C(r)$ 在选中的点上计数，然后求 $\lg C(r)$ 对 $\lg r$ 的斜率,近似认为是 D. 对于有限个点都这样做后,取其平均值;到N足够大时,如D达到饱和后即认为它就是吸引子的维数(关联维数). 我们即采用这种方法，时间序列的选取是 1970 年的小时值,共选取了 2000 个观测值，τ 取 3h,得到的二维相图

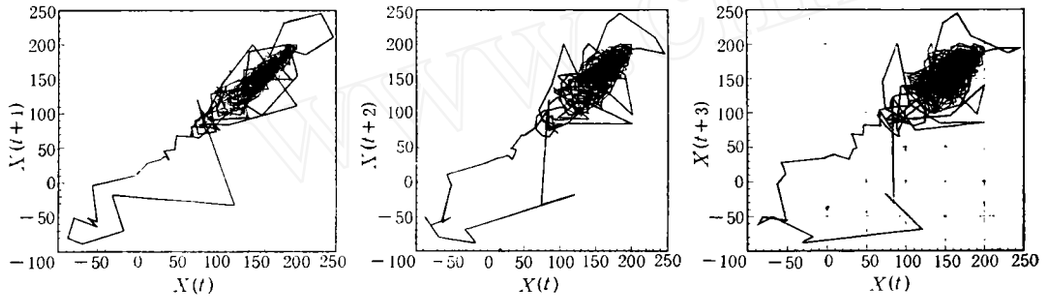

图 3　二维相图

如图 3 所示. 图 4 描绘了选取不同的N所得到 $\lg C(r)$ 与 $\lg r$ 的关系曲线. 可以看出，在一定范围内 $\lg C(r)$ 与 $\lg r$ 存在着线性关系，采用最小二乘法拟合得到的直线的斜率即维数 D. 另外还选取了 4 个参考点进行同样的运算,所得结果及有关统计分析列于表 2.

表 2　D 值及统计分析

N	3	4	5	6	7	8	9
1	2.37	3.12	3.48	3.92	4.03	4.21	4.25
2	4.05	4.20	3.71	4.30	4.46	4.37	4.37
3	3.07	3.78	4.01	4.20	4.68	4.40	4.81
4	1.98	2.19	2.81	3.15	3.68	3.89	4.15
5	2.74	2.66	3.05	3.35	3.98	4.12	3.94
$\bar{D}$	2.84	3.19	3.41	3.78	4.12	4.13	4.37
ΔD	0.70	0.70	0.45	0.33	0.31	0.33	0.34

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

进而将不同N值下分维数D的平均值 $\bar{D}$ 做出如图 5 所示的曲线. 可以看到，当$N=7$时吸引子的维数趋于饱和（$D=4.2\pm0.4$)；白噪声的D值随着N增加而一直增加，不存在饱和.

D值的计算结果受到许多因素的影响，例如观测值的精度、时间段的选取以及处理方法等. 这里由北京地磁基准台 1970 年的地磁场水平分量观测资料得到 $D=4.2\pm0.4$，也只是一个初步的结果. Vassiliadis 等[4]利用 AE 指数的时间序列测量资料求得地球磁层系统的分维数为 3.6；而 Roberts 等[6]由 AL 指数得到的分维数为 4.0 ± 0.2. 尽管这些计算值不全相同，但已表明地球变化磁场的相空间的吸引子是存在的. 虽然变化磁场看似很复杂，控制这个系统的变量数目并不是太多，表面上是随机的变化磁场信号，实际上是由少数几个确定性的方程所控制的，即变化磁场是具有内在确定性的随机现象，也就是说它可能是混沌的.

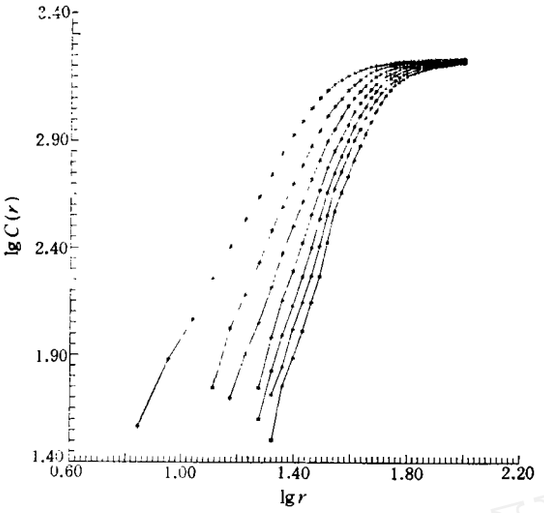

图 4 $\lg C(r)$ 与 $\lg r$ 的关系（$N=3,4,\cdots,9$)

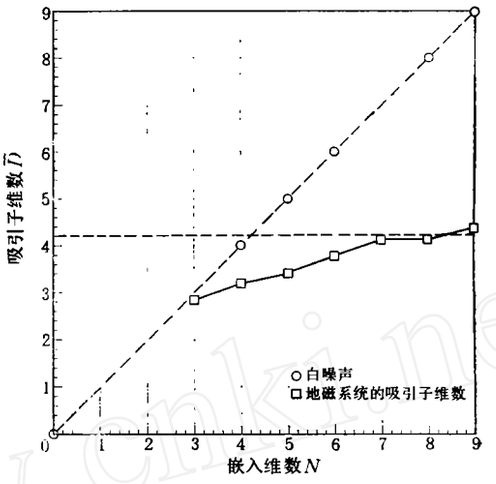

图 5 $\bar{D}$ 与嵌入维数N的关系

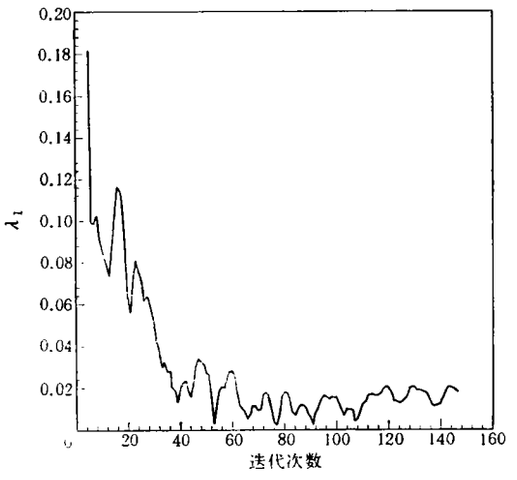

图 6 最大的 Lyapunov 指数 λ_1

2. Lyapunov 指数

到目前为止，还没有很精确的混沌的定义. 但对于一个系统来说它如果是混沌的，那么它至少有一个正的 Lyapunov 指数 λ. 正的 Lyapunov 指数就意味着初值敏感性，或导致相空间最初相近的相轨道的分离，分离程度正比于 $e^{\lambda t}$. 在代数意义上，一系列 Lyapunov 指数 λ_i 将从大到小排列. 这样混沌最起码的条件就是 λ_1 为正[8].

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Wolf 等[14] 提出了一种从时间序列中确定 λ_1 的方法。利用这一算法，仍以 1970 年地球变化磁场水平分量随时间的变化为例，并取 $N=5, \tau=2\text{h}$，计算结果如图 6 所示。可以看出，虽然计算结果是有变化的，但 λ_1 总是正值，其估计值约为 0.02h^{-1}。这再次表明地球变化磁场可能是混沌的。

四、定 性 解 释

以上无论从吸引子的维数还是 Lyapunov 指数来看，地球变化磁场都可能是混沌的。有关地球变化磁场的起源和电离层发电机过程，已有许多理论描述[15]。这里只想通过一个简单模型来定性地解释地球变化磁场时间序列的 FBM 的维数 D_b 与太阳活动呈负相关的可能性。

假设在地球电离层中有一耦合的双圆环盘发电机系统，如图 7 所示。图中 $\boldsymbol{B}_0$ 为地球内部产生的地球主磁场，阴影部分表示导电介质。由于太阳和月球潮汐力的作用，两圆环盘受到一力矩 $\boldsymbol{\Gamma}$，将做切割磁力线运动并产生感生电流，变化磁场的大小将正比于感生电流。由于两圆环盘通过线圈发生耦合，构成一个非线性系统，可以采用与文献[16]中类似的方法，由电路理论得到描述这一非线性系统的方程组

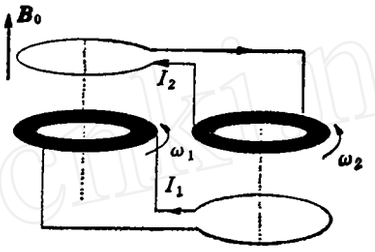

图 7　耦合双圆环盘发电机模型

$$\frac{dx_1}{dt}+\nu\frac{dx_2}{dt}=-\mu x_1+y_1x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt}+\nu\frac{dx_1}{dt}=-\mu x_2+y_2x_1,$$

$$\frac{dy_1}{dt}=1-x_1x_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt}=1-x_1x_2,$$

式中 $I_i=x_i\sqrt{\Gamma/M}$，$\omega_i=y_i\sqrt{\Gamma L/KM}(i=1,2)$，$\mu=R\sqrt{K/LM\Gamma}$，$\nu=M/L$。而 I_i 和 ω_i 分别是两个圆盘中的电流和角速度，Γ 是外力施加的力矩，M 为一取决于圆环盘与线圈耦合的常数，L 是线路的自感，R 是电阻。

从物理上考虑，假定太阳活动只影响电阻 R，而对其它参数的影响很小；进而假设所产生的变化磁场 δB 正比于总电流强度 (I_1+I_2)，即正比于 (x_1+x_2)。我们可以讨论不同 μ 值(即不同的 R 值)情况下，(x_1+x_2) 随时间的变化，计算结果如图 8 所示。可以看出，当 μ 值较小时(例如取 $\mu=0.3$)，系统产生的输出 (x_1+x_2) 为周期运动；随着 μ 值的增大(例如取 $\mu=0.9$ 和 1.0)，将转变为无规的混沌状态。

进而计算 $\mu=0.9$ 和 $\mu=1.0$ 时信号的 D_b 值如图 9 所示，可以看出谱密度是随频率呈指数形式下降的。我们仍采用最小二乘法来线性拟合此曲线求 D_b 值，得到 $\mu=$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

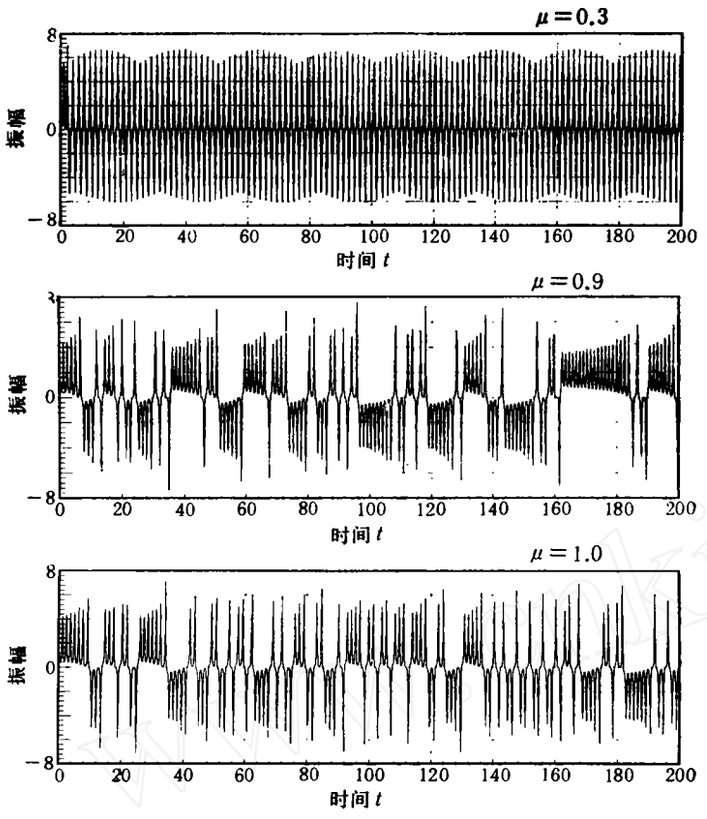

图 8 不同 μ 值时 $(x_1 + x_2)$ 随时间的变化

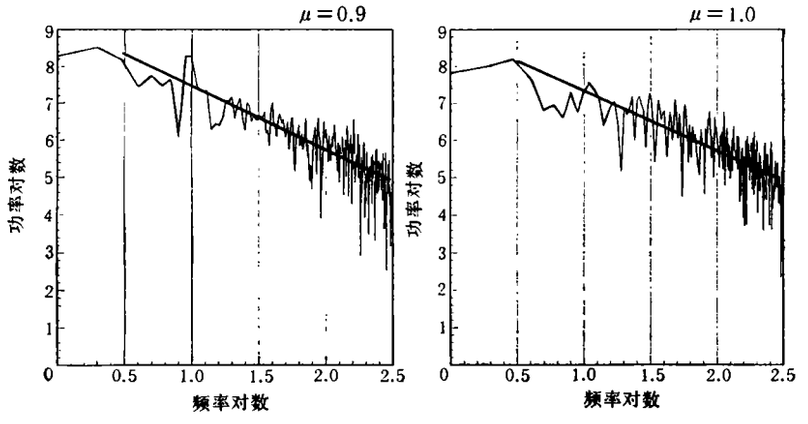

图 9 $\mu = 0.9$ 和 $\mu = 1.0$ 时的功率谱

0.9 时，$D_b = 1.6$；$\mu = 1.0$ 时，$D_b = 1.7$。在太阳活动极大年，太阳活动显著，辐射增强，因而导致地球电离层中电子浓度增大。Davies[17] 曾引用了电离层电子浓度随太阳相对黑子数 R^* 增大而增加的观测数据。当电子浓度增大时，电离层电导率将增大，电阻 R 变

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

小，亦即模型中的参数 μ 变小，进而 D_b 值也将变小。这就定性地说明了地球变化磁场的 D_b 值可能是与太阳活动性呈负相关的。

五、讨论和结论

本文将北京地区的地球变化磁场随时间的变化视为一无规时间序列，采用傅里叶分析和吸引子分析的方法进行了综合分析。以上工作还是十分初步的，尚有待进一步的研究来加以检验和修正。不同作者所取得的结果可能存在较大的差异；采用不同时期的观测资料和不同的处理方法，也会得到不同的结果。例如，Vassiliadis 等[4]利用 1983 年 1 月 1—21 日的 *AE* 资料得到分维数为 3.6，而 Shan 等[5]利用 1983 年 4 月 1—5 日的 *AE* 资料得到分维数为 2.4，以致一些作者[5,7]对他们所取得的结果提出疑问。然而，应用非线性动力学方法来讨论磁层物理问题，仍然是个十分有吸引力的研究方向。为了提高计算 D_b 值、吸引子维数 D 和 Lyapunov 指数的精度，需要更大量的观测数据和更完善的算法，并要进一步考虑测量误差的影响。同时还有待进一步探讨产生地球变化磁场的控制系统的物理模型。本文所取得的主要结论如下：

1. 地球变化磁场序列具有自仿射分形结构，其 FBM 的维数 D_b 在太阳活动极大年较之太阳活动极小年要小，在太阳活动较为剧烈的 19 周较之 20 周为小，这显示出地球变化磁场的 D_b 值与太阳活动性呈负相关。

2. 利用时间序列的时间延迟技术重构吸引子，结果表明地球变化磁场序列在相空间中存在吸引子，其维数 $D = 4.2 \pm 0.4$。

3. 计算得到的最大 Lyapunov 指数总是正值，这表明地球变化磁场可能是混沌的，它是由确定性方程产生的随机现象，并具有对初感敏感的特征，这也表明地球变化磁场的长期预报是难以实现的。

4. 太阳活动将会影响地球变化磁场系统控制方程的参数，从而影响地球变化磁场。

参　考　文　献

[1] 尼科里斯、普利高津著，探索复杂性，罗久里、陈奎宁译，成都：四川教育出版社，1986.

[2] 陈　颙等，分形和浑沌在地球科学中的应用，北京：学术期刊出版社，1—58，1989.

[3] Chave, A. D., Thomson, D. J., Ander, M. E., On the robust estimation of power spectra, coherences and transfer functions, *J. Geophys. Res.*, **92**,633—648, 1987.

[4] Vassiliadis, D. V., Sharma, A. S., Eastman, T. E., Papadopoulos, K., Low-dimensional chaos in magnetospheric activity from *AE* time series, *Geophys. Res. Lett.*, **17**, 1841—1844, 1990.

[5] Shan, L.-H., Hansen, P., Goertz, C. K., Smith, R. A., Chaotic appearance of the *AE* index, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 147—150, 1991.

[6] Roberts, D. A., Baker, D. N., Klimas, A. J., Indications of low dimensionality in magnetospheric dynamics, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 151—154, 1991.

[7] Prichard, D., Price, C. P., Spurious dimension estimates from time series of geomagnetic indices, *Geophys. Res.Lett.*, **19**, 1623—1626, 1992.

[8] 郝柏林，分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它——关于确定论系统中的内在随机性，物理学进展，**3**，329—417，1983.

[9] Michael, D. M., Magulre, W. B., Chase, R. P., Chaos in the sunspot cycle: Analysis and prediction, *J. Geophys. Res.*, **96**, 1705—1716, 1991.

[10] 赵凯华等，非线性物理学导论，北京大学非线性科学中心，108—111，1992.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[11] Dodson, H. W., Hedeman, E. R., Monler, O. C., Comparsion of activity in solar cycles 18, 19 and 20, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **12**, 329—341, 1974.
[12] Takens, F., Detecting strange attractors in turbulence, In: Band, D. A., Young, L. S., ed., Dynamical System and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, **898**, 366—381, 1981.
[13] Holzfuss, J., Mayer-Kress, G., Dimensions and Entropies in Chaotic System, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[14] Wolf, A., Swift, J., Swinney, H. L., Vastano, J. A., Determing Lyapunov exponents from a time series, *Physica* D., **16**, 285—317, 1985.
[15] 加藤进著,高层大气动力学,马淑英、李 钧译,北京: 科学出版社,199—241,1988.
[16] Rasband, S. N., Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems, Wiley, 112—117, 1990.
[17] Davies, K., Ionospheric Radio, Peter Peregrinus Ltd., 128—129, 1990.

FRACTAL AND CHAOTIC FEATURES FOR VARYING COMPONENT OF THE EARTH'S MAGNETIC FIELD

WANG CHI CHEN JIN-BO WANG SHUI
(Department of Earth and Space Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract

It regarded the horizontal component of the earth's magnetic field observed in Beijing as a random time series, the FBM fractal dimension D_b of the time series in 1959, 1965, 1970 and 1976 was obtained by use of spectra analysis. The results show that the relation between D_b and the solar activity is negative. The attractor was reconstructed by means of time delay, and the dimension of the underlaying system is 4.2 ± 0.4. The largest Lyapunov exponent is always positive. These results indicate that the varying component of the earth's magnetic field may be chaotic. Finally, we illustrate the effect of solar activity on D_b using a simple model qualitatively.

Key words Varying component of the earth's magnetic field, Fractal, Chaos.

作者简介 王赤,1967 年 2 月生,1990 年 7 月毕业于中国科学技术大学地球和空间科学系,1992 年在中国科学院空间科学与应用研究中心获硕士学位,随后到中国科学技术大学攻读博士. 现在美国麻省理工学院攻读博士学位,研究方向为空间等离子体物理学.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net