1999年9月 第17卷第3期 长沙铁道学院学报 JOURNAL OF CHANGSHA RAILWAY UNIVERSITY No.3 Sept. 1999

空间曲面的分形维数*

袁成桂 侯振挺 邹捷中
(长沙铁道学院科研所, 长沙, 410075)

摘 要 在分形的研究中, 给出了许许多多的测度和维数的定义, 即给出了空间曲面的一种测度及维数定义和相应的测度和维数的性质, 并与其它维数进行了比较.

关键词 空间曲面; 测度; 维数
分类号 O184

Fractal Measure and Dimension of Curved Surface

Yuan Chenggui Hou Zhengting Zou Jiezhong
(Research Department, Changsha Railway University, Changsha, 410075)

Abstract In this paper, we give a new definition about curved surface's fractal measure and dimension, then we study its properties and applications.

Keywords curved surface; measure; dimension

1 定义

设 $Z = f(x, y)$ 是空间的连续曲面, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $\forall I \subset [0, 1] \times [0, 1]$, 曲面在 I 上的振幅记为 $O(f, I)$, 即

$$O(f, I) = \sup_{Z_1, Z_2 \in I} f(Z_1) - f(Z_2) \tag{1.1}$$

设 $I = I_1 \times I_2$ 是小正方形开区间, P_1 是使下式成立的最少整数, 即

$$P_1 - 1 \geq O(f, I) / |I_1| = O(f, I) / |I|^{\frac{1}{2}} \leq P_1 \tag{1.2}$$

其中 表示体积的度量, 显然如果用 $\Gamma_f(I)$ 表示 f 在 I 上的图, 那么最小用 P_I 个 $I_1 \times I_2 \times I_3$ 立方体, 可以覆盖 $\Gamma_f(I)$. 用 P 表示 $R^3 \to R^2$ 的投影映射, 即: $P((x, y, z)) = (x, y)$. 设 E 是 $\Gamma_f(I)$ 的任一子集, $\mathscr{E}$ 是 $P(E)$ 的任一正方形开覆盖, 定义

$$\mathscr{R}(E, \mathscr{E}) = \inf\{\sum_{I \in \xi} P_I |I|^S, I = I_1 \times I_2, |I_1| = |I_2|, |\mathscr{E}| < \delta\} \tag{1.3}$$

其中 $|\mathscr{E}|$ 表示为: $|\mathscr{E}| = \sup\{|I|^{\frac{1}{2}} : I \in \mathscr{E}\}$, 由于 $\mathscr{R}_\delta$ 是 δ 的减函数, 所以:

$$\mathscr{R}(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{R}_\delta(E, \mathscr{E}) \tag{1.4}$$

有意义, 显然我们有

$$\mathscr{R}(\phi) = 0 \tag{1.5}$$

收稿日期: 1999-03-15 第一作者 袁成桂, 男, 34岁, 副教授, 博士
* 国家自然科学基金和湖南省教委基金资助课题

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww

如果$E \subset F$,则有

$$\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F) \tag{1.6}$$

设$E_i \subset \Gamma_f, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$,下证

$$\mathscr{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{P}(E_i) \tag{1.7}$$

如果存在i,使得$\mathscr{P}(E_i) = \infty$,则(1.7)成立.

下设$\forall i, \mathscr{P}(E_i) < \infty, \forall \epsilon > 0$,从而存在$\delta_i$,使得:

$$\sum_{I \in \mathscr{E}_i,\ \mathscr{P}_i < \delta_i} P_I \ |I|^s \leq \mathscr{P}(E_i) + \epsilon, \ \mathscr{E}_i \text{为} E_i \text{的一个覆盖}$$

显然:

$$\mathscr{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_i \Big(\sum_{I \in \mathscr{E}_i,\ \mathscr{E}_i < \delta_i} P_I \ |I|^s \Big)$$

即(1.7)成立,由(1.5),(1.6),(1.7)知,$\mathscr{P}(\ )$定义了Γ_f上的一个外测度,由(1.3)知,它是一个距离外测度,从而由[5]知,如果定义Γ_f上的可测集为

$$\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(A \cap E) + \mathscr{P}(A \cap E^c), \forall A \subset \mathscr{T}_f$$

则称E为$\mathscr{P}$可测的,$\mathscr{P}$可测集构成$-\sigma-$代数且包含了所有的Borel可测集.

2 性质

命题**2.1** 设f是$[0,1] \times [0,1]$上的连续曲面,Γ_f表示f在$[0,1] \times [0,1]$上的图,则有

(1) 如果$0 < s < 1$,则$\mathscr{P}(\Gamma_f) = \infty$

(2) 如果$s > \frac{3}{2}$,则$\mathscr{P}(\Gamma_f) = 0$

证明(1)、$0 < s < 1$时,由于

$\mathscr{P}_\delta(\Gamma_f) = \inf\{\sum_{I \in \mathscr{E}} |I|^s / \delta^{1-s} : \mathscr{E}\text{为}\Gamma_f\text{的覆盖}, \ |\mathscr{E}| < \delta\}$

$\to \infty, \delta \to 0$

(2)的证明由下一命题可推出.

命题**2.2** 设$Z = f(x, y)$是$[0,1] \times [0,1]$上的连续曲面,且$1 < s < 3$,则

$$\mathscr{P}(\Gamma_f) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{n < \delta} \sum_n O(f, \Delta_{ij}) \ |\Delta_{ij}|^{s - \frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

其中$\pi = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$,且$x_{i+1} - x_i = x_{j+1} - x_j, 0 \leq i, j \leq n - 1$

$\Delta_{ij} = (x_i, x_{i+1}) \times (x_j, x_{j+1}), Q \leq i, j \leq n - 1$,记$\sum_n = \sum_{i,j=1}^{n}$

证明 在Δ_{ij}的基础上,我们可以找到$[0,1] \times [0,1]$的一个正方形覆盖$\mathscr{E}$从而

$$\sum_\pi P_{\Delta_{ij}} \ |\Delta_{ij}|^s \leq \sum_{I \in \mathscr{E}} P_I \ |I|^s$$

即

$$\sum_\pi O(f, \Delta_{ij}) \ |\Delta_{ij}|^{s - \frac{1}{2}} \leq \sum_{I \in \mathscr{E}} P_I \ |I|^s$$

从而有

$$\lim_{\delta \to 0^+} \inf_{\pi < \delta} \sum_\pi O(f, \Delta_{ij}) \ |\Delta_{ij}|^{s - \frac{1}{2}} \leq \mathscr{P}(\Gamma_f)$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww

下面我们来证明相反的不等式,为此设

$$M = O(f, [0,1] \times [0,1]),\ \pi = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$$

$$x_{i+1} - x_i = x_{j+1} - x_j,\ 0 \le i, j \le n-1$$

$$\Delta_{ij} = (x_i, x_{i+1}) \times (x_j, x_{j+1}) \text{ 且 } \forall \delta > 0 \quad \sum \Delta_{ij}^{\ s} < \delta$$

设 η 充分小, 作小方块 $\Delta_{ij}' = (x_i - \eta, x_i + \eta) \times (x_j - \eta, x_j + \eta)$

显然: $\{\Delta_{ij} \cup \Delta_{ij}', 0 \le i, j \le n\}$ 构成 $[0,1] \times [0,1]$ 的一个开覆盖, 记为 $\mathscr{E}$ 从而

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\Gamma_f) &\le \sum P_{\Delta_{ij}} \Delta_{ij}^{\ s} + \sum P_{\Delta_{ij}} \Delta_{ij}'^{\ s} \\ &\le \sum (1 + O(f, \Delta_{ij}) / \Delta_{ij}^{\frac{1}{2}}) \Delta_{ij}^{\ s} \\ &\quad + \sum (1 + M/2\eta)[(2\eta)^2]^2\end{aligned}$$

设 η 满足

$$n [(2\eta)^{2s} + M(2\eta)^{2s-1}] < \delta$$

则我们有

$$\mathscr{P}(\Gamma_f) \le 2\delta + \sum O(f, \Delta_{ij}) \Delta_{ij}^{\ s-\frac{1}{2}}$$

令 $\delta \to 0$, 命题得证.

与其它测度的定义一样, 我们也可以给出维数的定义

$$\begin{aligned}\mathscr{T}\text{-}\dim(\Gamma_f) &= \inf\{s: \mathscr{P}(\Gamma_f) = 0\} \\ &= \sup\{s: \mathscr{P}(\Gamma_f) = \infty\}\end{aligned} \tag{2.2}$$

命题 **2.3**　设 $0 \le \alpha \le 1$, 假设存在 $[0,1] \times [0,1]$ 中的方形 $\Delta > 0$, 使得

$$\lim_{\Delta_x \to 0} P(f, \Delta_x) / \Delta_x^{\ \alpha} > 0 \qquad \forall x \in \Delta \tag{2.3}$$

Δ_x 为含 x 的方形, 那么:

$\mathscr{T}^{\frac{3}{2}-\alpha}(\Gamma_f) > 0$　　从而

$$\mathscr{T}\text{-}\dim(\Gamma_f) \ge \frac{3}{2} - \alpha$$

证明　由假设知, 存在 $\delta > 0$ 及 $c > 0$, 使得

$$\{x \in [0,1] \times [0,1]: \inf_{\Delta_x^{\frac{1}{2}} < \delta} P(f, \Delta_x) / \Delta_x^{\ \alpha}) > c\} > 0 \tag{2.4}$$

设 E 是(1.4) 的子集, 且 $E > 0$, $\mathscr{E}$ 是 $[0,1] \times [0,1]$ 的一个覆盖. $\mathscr{E}$ 是 E 相交且覆盖 E 的 $\mathscr{E}$ 的子集, 则有

$$\mathscr{T}^{\frac{3}{2}-\alpha}(\Gamma_f) \ge \lim_{\delta \to 0^+} \inf_{\mathscr{E} < \delta} \sum O(f, \Delta_x) / \Delta_x^{\ \frac{1}{2}} \Delta_x^{\ \frac{3}{2}-\alpha} \ge c \sum_{\Delta_{ij} \in \mathscr{E}'} \Delta_{ij} \ge c\ E$$

由此可知, 命题得证.

3　与其它测度的比较

设 E 是 R^3 中的子集, 我们知道, 它的 Hausdorff 测度及其维数分别定义如下:

s 为非负数, $\delta > 0$, 定义

$$\mathscr{H}_\delta^s(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} U_i^{\ s}: U_i \text{ 为 } F \text{ 的 } \delta \text{ 一覆盖}\}$$

$$\mathscr{H}^s(F) = \inf_{\delta \to 0} \mathscr{H}_\delta^s(F) \tag{3.1}$$

$$\mathscr{H}\text{-}\dim F = \inf\{s: \mathscr{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s: \mathscr{H}^s(F) = \infty\} \tag{3.2}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww

维数的另一种定义是盒维数,设 $N_\delta(F)$ 为覆盖 F 的半径为 δ 的最小开球数,令

$$\underline{\dim}_B F = \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{3.3}$$

$$\overline{\dim}_B F = \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{3.4}$$

(3.3),(3.4) 分别称为 F 的下盒维数和上盒维数.

如果 $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$,则称 F 的盒维数存在,记为

$$\dim_B F = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{3.5}$$

定理 3.1 设 $Z = f(x,y)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续曲面,那么

$$\mathscr{T}-\dim\Gamma_f \le \underline{\dim}_B\Gamma_f$$

证明 由[4]知,$N_\delta(F)$ 可用边长为 $\frac{1}{2^n}$ 大小相等的立方体的个数所代替,它在 xoy 平面上的射影组成了 $[0,1]\times[0,1]$ 的一个覆盖 $\mathscr{E}_n$,$\forall s > \underline{\dim}_B\Gamma_f$

由于

$$N_{\frac{1}{2^n}}(\Gamma_f)\quad 2^{-ns} \le 1$$

从而

$$\mathscr{P}(\Gamma_f) \le \varliminf_{n\to\infty}\sum_{I\in\mathscr{E}_n} P_I\ \ I\ \ ^s \le \varliminf_{\delta\to 0} N_{\frac{1}{2^n}}(\Gamma_f)\quad 2^{-2ns} \le 1$$

所以令 $s\to\underline{\dim}_B\Gamma_f$,有

$\mathscr{T}-\dim(\Gamma_f) \le \underline{\dim}_B\Gamma_f$ 证毕.

定理 3.2 设 f 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续曲面,如果对任一的正方形 $I\subset[0,1]\times[0,1]$,均有

$$\mathscr{T}-\dim\Gamma_{f_1} = \mathscr{T}-\dim\Gamma_f$$

则有下式成立

$$\mathscr{T}-\dim\Gamma_f = \underline{\dim}^{PB}\Gamma_f$$

证明 由[4]知:

$$\begin{aligned}\dim^{PB}\Gamma_f &= \inf\{\sup\underline{\dim}_B(E_i): E\subseteq\bigcup_i E_i\}\\ &= \inf\{\sup\underline{\dim}_B(\overline{E}_i): E\subseteq\bigcup_i E_i\}\end{aligned}$$

从而

$$\dim^{PB}\Gamma_f = \inf\{\sup\underline{\dim}_B(\overline{I}_i), \Gamma_f\subset\bigcup_i I_i\}$$

显然,I_i 在 xoy 平面上的投影至少包含一个小的正方形 I,从而

$$\begin{aligned}\dim^{PB}\Gamma_f &\ge \sup\underline{\dim}_B\overline{I}_i) \ge \dim_B(\Gamma_{f_I}\\ &\ge \mathscr{T}-\underline{\dim}\Gamma_{f_I} = \mathscr{T}-\dim\Gamma_f\end{aligned}$$

4 注记

注释 在Hausdorff测度的定义中,用立方体来覆盖,设 $\widetilde{\mathscr{H}}_\delta(F) = \inf\{\sum\ \ I_i\ ^s : \{I_i\}$ 为 F 的边长为 δ 的立方体覆盖$\}$,可得到一测度 $\widetilde{\mathscr{H}}(\ )$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww

$$\mathscr{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0}\tilde{\mathscr{H}}^s_\delta(F)$$

显然: $\mathscr{H}^s_\delta(F) \le \tilde{\mathscr{H}}^s_\delta(F)$. 又由于若$\{U_i\}$为$F$的$\delta$一覆盖, 选取包含$U_i$的边长为$\delta$的立方体$I_i$, 则$\{I_i\}$覆盖$F$, 从而

$\mathscr{H}^s_\delta(F) \le \sum_i (2\ U_i\ )^s$, 即

$\mathscr{H}^s_\delta(F) \le 2^s \mathscr{H}^s_\delta(F)$, 从而

$$\mathscr{H}^s(F) \le \tilde{\mathscr{H}}^s(F) \le 2^s \mathscr{H}^s(F)$$

由上式可推出$\tilde{\mathscr{H}}$与$\mathscr{H}$定义的维数相同: 设$f(x,y)$为定义于$[0,1]\times[0,1]$上平行于xoy面的平面, 此时P_1是一个恒等映射从而由上述推理知

$$\mathscr{H}-\dim\Gamma_f = \mathscr{T}-\dim\Gamma_f$$

对于平面$f(x,y) = k(x+y)$, 由于此时要有$q^l \equiv$ 常数, 此时也可推出$\mathscr{H}-\dim\Gamma_f = \mathscr{T}-\dim\Gamma_f$.

参 考 文 献

1 Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets. Cambridge Univ Press, 1985

2 Taylor S J. The Measure Theory of Random Fractals. Math Proc Cambridge Philo Soc, 1986

3 Telcs A. Spectra of Graphs and Fractal Dimension. Proba Rel Fields, 1990

4 Tian You and Lan KA-Sing. Fractal Dimension and Singularities of the Weierstass Type Function. Tran Amer Math Soci, 1993

5 袁成桂. 非标准地毯上扩散过程的存在性:[博士论文]. 长沙:长沙铁道学院, 1994

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://ww