文章编号: 0253- 9993(2001) 04- 0394- 05

矿井涌水量时间序列的多重分形维数谱计算

唐依民, 肖　江, 杨喜陶, 沈洪远

(湘潭工学院 土木系, 湖南 湘潭　411201)

摘　要: 介绍了多重分形的概念, 在 Chhabra 和 Jensen 提出直接法的基础上, 给出了以矿井涌水量时间序列的功率谱函数为特征量的多重分形谱的计算方法和步骤. 利用 6 个矿井涌水量的实测数据对该方法的可行性和有效性进行了验证, 同时说明了矿区地下水系统具有多重分形的特征.

关键词: 矿井涌水量; 多重分形; 奇异性指数; 多重分形谱; 功率谱
中图分类号: TD742. 1　　文献标识码: A

矿井涌水量时间序列作为矿区地下水系统的一类输出, 包含了矿区地下水系统在演化过程中所具有的各种特征信息. 尽管矿区地下水系统的分形特性在理论上没有得到证明, 如能通过对矿井涌水量时间序列的分析, 获取有关分形的信息, 计算相应的分形维数, 也可间接地说明矿区地下水系统在演化过程中所具有的分形性. 计算时间序列分形维数的方法很多, 如相空间重构法 (G- P 算法)、域重新标度法 (R/S 分析法)、方差法、相关系数法、频谱分析法等[1], 这些方法对于求得时间序列的单一维数均具有较好的效果. 利用矿井涌水量时间序列的原始值, 应用域重新标度法 (R/S 分析法), 可通过计算出域值间接地得到其具有的容量维数[2]. 运用相空间重构法 (G- P 算法) 直接计算矿井涌水量原始值的关联维数, 所得结果是嵌入维数 m (横轴) 与分形维数 D (纵轴) 之间的关系曲线, 表现出逐步增加的趋势, 难以形成一条与横轴平行的直线来反映 D 不随 m 增加而达到饱和的情况, 由此说明了矿井涌水量时间序列的单一分形维数是不存在的[3]. 矿井涌水量时间序列是否具有多重分形性, 本文拟从多重分形的原理、计算方法等方面入手, 并通过实例的计算结果, 来说明矿井涌水量时间序列确实存在多重分形维数谱. 这不仅是矿区地下水系统具有分形特征的一个佐证, 也为地下水系统的分析与控制提供了理论基础, 并对于深刻认识自然界中出现的水文地质问题与现象的形成机理和过程有着指导性的意义.

1　多重分形维数谱的概念

对不规则 (或病态) 集而言, 当用传统整数维的数学语言难以描述时, Mandelbrot 所提出的分形概念则是描述这类集合不规则特征的有效工具, 分维数则是描述这类集合不规则性的特征参数.

假设具有分形特征的集合是由多个子集组成的, 并且每个子集所具有的特征都相同, 这类集合可归结为一致分形. 运用 Hausdorff 测度进行量测这类集合后, 可得到 Hausdorff 维数及有关的广义维数[4], 这些维数均是单一分维数, 并可用这一种参数来表征这类集合的整体特征.

同样, 假设分形集合是由具有不同分形特征的子集所组成, 则构成了多重分形[5]. 对于多重分形而言, 自相似性 (或称标度不变性) 是局域的, 并具有空间分布的特征, 因此单一分维数仅能表征某个子集的局部奇异性[4], 通常称之为奇异性指数 α; 而多重分形整体的特性则需要用每个子集具有的奇异性指数所组成的一个有规则的序列值来表征, 通常也称之为多重分形维数谱 $f(\alpha)$. 可见, 多重分形的特征需要

收稿日期: 2000- 11- 03
基金项目: 湖南省教委资助项目 (99C159)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2 个参数 $\alpha, f(\alpha)$ 来描述. 当描述多重分形局部极限状况时, 称为多重分形的精细理论; 当描述多重分形整体的不规则性时, 称为多重分形的粗线条理论[6].

为了对两参数 $\alpha, f(\alpha)$ 的含义及两者间的关系有更深刻的了解, 应从数学角度进行以下讨论[5~7].

设 $E \subset R^n$ 是波雷尔集, μ 是 R^n 上有界区域支撑的波雷尔测度, 对于所有的 $x \in E$, 用一系列以 x 为中心, 边长 $0< r < 1$ 的坐标网立方体 $B_i(x, r)$ 对 E 进行覆盖, 由于 r 的不同, 可形成具有多个相同测度为 μ、不同局部维数为 α 的子集 E_α. 对于每个子集而言, 测度 μ 在点 x 的局部维数为

$$\dim_{\mathrm{loc}}\mu(x) = \lim_{r\to 0}[\log\mu(B(x, r))/\log r]. \tag{1}$$

如果这个极限存在, 则 $\mu(x)$ 服从幂律, 即

$$\mu(x) \backsimeq r^{\alpha}, \tag{2}$$

那么, $\alpha = \dim_{\mathrm{loc}}\mu(x) = \lim_{r\to 0}[\log\mu(b(x, r))/\log r]$. 称 α 为 Hölder 指数或奇异性指数, 它控制着测度的局域幂指数行为 (即奇异性). 由于 r 的不同, $\alpha \geqslant 0$ 在空间上的分布也不同, 因此, 在某个区域 $[\alpha, \alpha + d\alpha]$ 内, 具有测度为 $\mu(B_i(x, r))$ 的盒子数为 $N_r(\alpha) = \#\{i: \mu(B_i(x, r)) \geqslant r^{\alpha}\}$.

随着空间各处 α 值的不同, $N_r(\alpha)$ 也有相应的改变, 由此定义了测度 μ 在点 x 的粗线条多重分形维数谱 $f(\alpha) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{r\to 0}\dfrac{\log[N_r(\alpha+\varepsilon) - N_r(\alpha-\varepsilon)]}{-\log r}$. 这就意味着, 如果 $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, 且充分小, 则对充分小的 r 有 $r^{-f(\alpha)+\eta} \leqslant N_r(\alpha+\varepsilon) - N_r(\alpha-\varepsilon) \leqslant r^{-f(\alpha)-\eta}$, 粗略地讲, $-f(\alpha)$ 是使得式 (2) 成立的一系列与 α 对应的函数值.

2　多重分形维数谱的计算方法

由于在实际应用中, 描述多重分形的 $\alpha - f(\alpha)$ 语言中的 $N_r(\alpha)$ 难以求得, 而对于使用广义维数 $\tau(q) - D(q)$ 描述多重分形中的 $D(q)$ 谱的计算方法则较多, 再通过 Legendre 变换则可间接得到 $f(\alpha)$ 谱, 这是常用计算多重分形维数谱的方法.

2.1　直接计算多重分形维数谱 $f(\alpha)$ 的原理

Chhabra 和 Jensen 提出了一种直接计算 $f(\alpha)$ 的新方法[8], 基本思想是用尺度为 δ 的盒子覆盖被研究的多重分形集, 考虑研究点在第 i 个盒子的概率为 $p_i(\delta)$, 由此构造一个测度族, 即

$$\mu(q, \delta) = [p_i(\delta)]^q / \sum_j [p_j(\delta)]^q. \tag{3}$$

式中, $\sum_j [p_j(\delta)]^q$ 为对所有盒子的概率的 q 次幂求和.

被研究的多重分形集的 Hausdorff 维数为

$$f(\alpha(q)) = \lim_{\delta\to 0}\{\sum_i [\mu_i(q, \delta)\log\mu_i(q, \delta)]/\log\delta\}. \tag{4}$$

被研究的多重分形集整体奇异性的平均值可估计为

$$\alpha(q) = \lim_{\delta\to 0}\{\sum_i [\mu_i(q, \delta)\log p_i(\delta)]/\log\delta\}. \tag{5}$$

改变 δ 的值, 求出对应的 $\sum\mu_i\log\mu_i$ 和 $\sum\mu_i\log p_i$, 利用 $\sum\mu_i\log\mu_i - \log\delta$ 和 $\sum\mu_i\log p_i - \log\delta$ 曲线图求出无标度区, 再用最小二乘法拟合出 f 和 α 的值. 对于每个给定的 q, 都可以用式 (3) ~ (5) 直接计算出相应的 $\alpha(q)$ 和 $f(\alpha(q))$, 从而作出相应的多重分形曲线即可得到谱.

2.2　直接计算矿井涌水量时间序列 $f(\alpha)$ 谱的步骤

在实际工作中对多重分形的研究, 可以通过式 (3) 构造的单参数测度族, 来描述研究对象所固有的物理量或其它特征量, 在支撑上的分布奇异性. 对于矿井涌水量时间序列而言, 其实测值的原始数据即为支撑, 进行多重分形研究的关键, 是如何确定能反映矿井涌水量时间序列特性的物理量或其它特征量, 而且这些物理量或其它特征量还应与 $f(\alpha)$ 谱有直接联系.

对于每一个矿井而言, 其水文地质条件、开采条件和充水条件均有所不同, 形成了不同的矿区地下水

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

系统. 当把矿井涌水量作为矿区地下水系统的输出时, 从频域的角度对其进行分析, 可得到不同频率上的功率谱. 由于系统的结构和构造不同, 传递函数或状态方程也不同, 系统输出信息的功率谱函数均有不同. 因此, 功率谱函数可以作为反映矿井涌水量时间序列特性的一类特征量, 并可以此作为计算矿井涌水量时间序列多重分形维数谱 $f(\alpha)$ 的基础.

综上所述, 直接计算矿井涌水量时间序列多重分形维数谱 $f(\alpha)$ 的步骤如下: (1) 收集、整理矿井涌水量时间序列的原始值; (2) 对矿井涌水量时间序列原始值进行频域分析, 获取功率谱函数; (3) 利用功率谱函数值, 通过式(3)求得单参数测度族 $\mu(q, \delta)$ 的数据; (4) 利用单参数测度族的数据, 根据式(4), (5)求得 $\alpha(q)$, $f(\alpha(q))$; (5) 根据已得到的 $\alpha(q)$, $f(\alpha(q))$ 值, 绘制多重分形曲线得到 $f(\alpha)$ 谱.

3 计算实例

根据上述步骤, 利用斗笠山香花台等 6 个煤矿矿井涌水量的实测数据, 分别求得了各个矿井涌水量时间序列的多重分形维数谱 $f(\alpha)$. 以斗笠山香花台矿井为例, 图 1 反映了从原始数据开始, 到获取矿井涌水量时间序列的功率谱, 直至最后计算出多重分形维数谱的整过程及其结果; 由此也表明了矿井涌水量时间序列确实具有多重分形性质, 而不是简单的自相似分形. 斗笠山香花台等 6 个煤矿矿井涌水量时间序列的计算结果见表 1、表 2 及图 2.

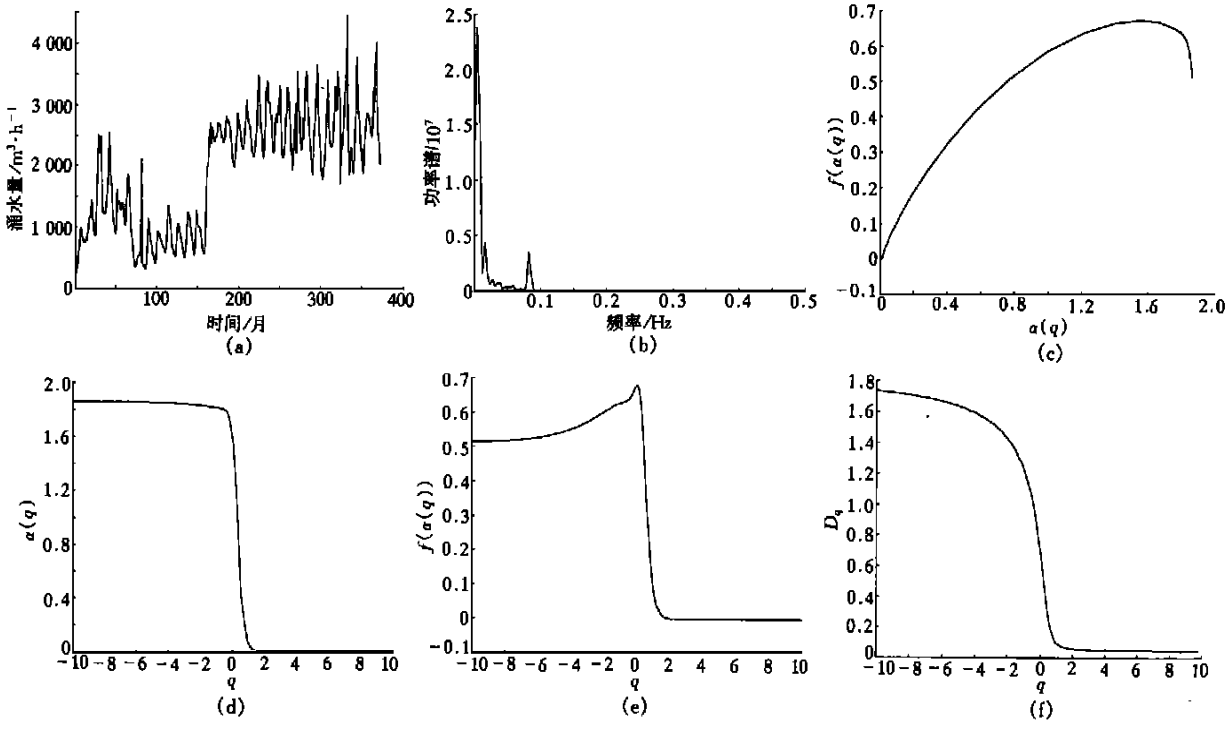


图 1 斗笠山香花台矿井涌水量时间序列多重分形维数谱计算过程及成果

Fig. 1 Calculating process and result of multifractal spectrum from time series of mine hydraulic discharge in Xianghuatai

(a) 矿井涌水量历时曲线; (b) 矿井涌水量时间序列功率谱曲线; (c) $f(\alpha(q))-\alpha(q)$ 曲线; (d) $\alpha(q)-q$ 曲线; (e) $f(\alpha(q))-q$ 曲线; (f) D_q-q 曲线

表 1 中的 q 为式 (3) 中测度族的参数之一, 其意义与 $\tau(q)-D(q)$ 语言描述多重分形中参数 q 的含义相同. 当 $q=0$ 时, $\alpha(q)$ 为 Hausdorff 维数; 当 $q=1$ 时, $f(\alpha)$ 为信息维数. 对于确定的 q 而言, 反映出不同矿区地下水系统各自所具有的分形特征; 对于变化的 q 而言, 则反映了不同矿区地下水系统所具有的不同意义的分形维数.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 1　矿井涌水量时间序列多重分形维数谱 $f(\alpha)$ 特殊点计算结果

Table 1　Statistics of calculating results on special point about multifract spectrum from time series of mine hydraulic discharge

参　数		斗笠山香花台矿井	桥头河凳子山矿井	恩口一井	恩口三井	谭家山煤矿一井	萍乡安源煤矿
$q=0$	α	1.548 4	1.530 6	1.410 9	1.119 1	1.010 1	1.542 4
	$f(\alpha)$	0.676 1	0.683 2	0.787 8	0.711 4	0.590 9	0.767 3
$q=1$	α	0.088 7	0.097 4	0.229 6	0.252 1	0.171 0	0.161 0
	$f(\alpha)$	0.088 7	0.097 4	0.229 6	0.252 1	0.171 0	0.161 0

表 2　矿井涌水量时间序列功率谱有关统计值与 $D_q, f(\alpha)$ 及 $f(\alpha(q))$ 的关系

Table 2　Relation both D_q, $\alpha(q)$, $f(\alpha(q))$ and statistics value of multifract spectrum from time series of mine hydraulic discharge

参　数	桥头河凳子山矿井	斗笠山香花台矿井	谭家山煤矿一井	萍乡安源煤矿	恩口三井	恩口一井
$df/d\alpha$	相同		相同		相同	
D_q 变化幅度	1.695	1.719	1.041	1.663	1.085	1.498
功率谱中位数	1.068×10^4	2.145×10^4	1.184×10^3	3.376×10^3	3.906×10^4	2.152×10^5
功率谱标准差	2.199×10^5	2.732×10^6	1.608×10^4	7.015×10^4	9.125×10^5	1.829×10^6
$\alpha(q)$ 变化范围	0.018~ 1.83	0.016~ 1.86	0.038~ 1.15	0.035~ 1.81	0.06~ 1.2	0.053~ 1.65
功率谱平均值	5.809×10^4	5.600×10^5	5.145×10^3	2.168×10^4	3.279×10^5	7.329×10^5
$f(\alpha(q))$ 最大值	0.683 2	0.676 1	0.590 9	0.767 3	0.711 4	0.787 8
功率谱中位数/周期平均值	0.801×10^3	0.355×10^3	0.043×10^3	0.122×10^3	2.930×10^3	20.76×10^3
周期平均值/月	13.34	60.39	27.61	27.70	13.33	10.73

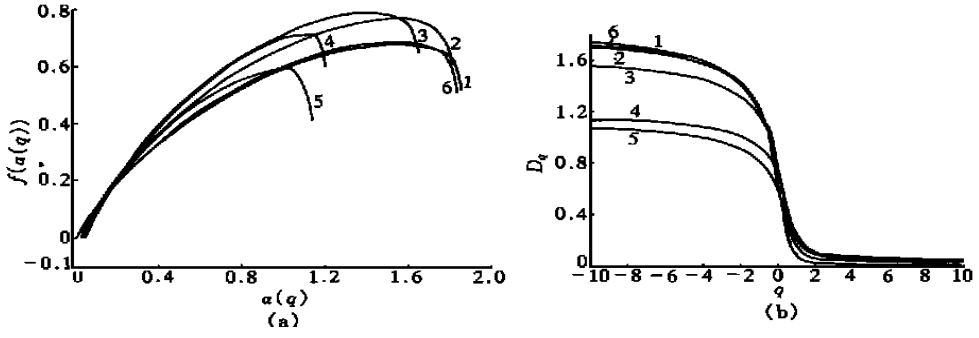


图 2　6 矿井 $D_q, \alpha(q)$ 及 $f(\alpha(q))$ 计算结果

Fig. 2　$D_q, \alpha(q)$ and $f(\alpha(q))$ calculating result curves about six shafts

(a) 6 矿井 $f(\alpha(q))-\alpha(q)$ 综合曲线；(b) 6 矿井 D_q-q 综合曲线；

1——斗笠山香花台；2——萍乡安源；3——恩口一井；4——恩口三井；5——潭家山一井；6——桥头河凳子山

从图 2 (a) 中可见，在 $f(\alpha(q))$ 达到最大值之前，根据 $f(\alpha(q))-\alpha(q)$ 曲线斜率 $(df/d\alpha)$ 的变化情况，可把 6 个矿井的曲线分成 3 组．对于图 2 (a)，(b) 而言，从表 2 中的有关统计数据也可发现，在同一组曲线中：(1) $f(\alpha(q))$ 的最大值随着矿井涌水量时间序列功率谱的中位数与矿井涌水量时间序列平均周期的比值而发生变化，当 $f(\alpha(q))$ 最大值较大时对应的比值也较大；(2) $\alpha(q)$ 的变化范围与矿井涌水量时间序列功率谱的平均值有关，表现为 $\alpha(q)$ 较大时，功率谱的平均值也较大；(3) D_q 的变化幅度值

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

则与矿井涌水量时间序列功率谱的中位数或标准差表现出一定的关系, 通常 D_q 的变化幅度值较大时, 功率谱的中位数或标准差值也较大.

4 结 语

利用矿井涌水量时间序列的功率谱直接计算其具有的多重分形维数谱是一种有效的方法. 这种方法简单、快速, 并便于操作和运用. 通过对 6 个矿井实例的计算, 也证明了这种方法的可行性. 实例的计算结果表明, 矿井涌水量时间序列具有多重分形维数谱是可以肯定的, 矿区地下水系统具有多重分形性是明确的. 而探讨多重分形维数谱所具有的水文地质意义, 并用以解决实际水文地质问题, 是进一步深入工作的一个方向.

参考文献:

[1] 李后强, 汪福泉. 分形理论及其在分子科学中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1993. 190~ 198.
[2] 唐依民, 肖 江. 矿井涌水量时间序列分析的域重新标度法 [J]. 煤炭学报, 2000, 25 (1): 66~ 69.
[3] 李 擎, 郑德玲, 赵星浩, 等. 一种新的混沌识别方法 [J]. 北京科技大学学报, 1999, 21 (2): 198~ 201.
[4] 屈世显, 张建华. 复杂系统的分形理论与应用 [M]. 西安: 陕西人民出版社, 1996. 27~ 82.
[5] 谢和平. 分形- 岩石力学导论 [M]. 北京: 科学出版社, 1996. 51~ 62.
[6] 肯尼思• 法尔科内. 分形几何中的技巧 [M]. 曾文曲, 王向阳译. 沈阳: 东北大学出版社, 1999. 218~ 236.
[7] 肯尼思• 法尔科内. 分形几何- 数学基础及应用 [M]. 曾文曲, 刘世耀译. 沈阳: 东北工学院出版社, 1991. 341~ 353.
[8] Chhabra A, Jensen R V. Direct determination on the $f(\alpha)$ singularity spectrum [J]. Phys Review Letters, 1989, 62 (12): 1 327~ 1 330.

作者简介:

唐依民 (1956-), 男, 副教授, 湖南衡阳人, 1981 年毕业于长春地质学院, 一直从事矿山水文地质的教学和科研以及矿区地下水系统的非线性动力学的演化研究工作, 发表“矿区地下水系统及其特征分析”等论文 10 余篇.

Calculating method of multifractal spectrum from time series of mine hydraulic discharge

TANG Yi-min, XIAO Jiang, YANG Xi-tao, SHANG Hong-yuan

(Xiangtan Polytechnic University, Xiangtan 411201, China)

Abstract: On the basis of introducing the multifractals concept, power spectrum of mine hydraulic discharge act as a characteristic quantify is put forward, in order that the multifractal spectrum from time series of mine hydraulic discharge is calculated combining with Chhabra and Jensen put up instant calculating method. As a means of method on the calculating multifractal spectrum from time series of mine hydraulic discharge, each and every multifractal spectrum is obtained by use of actual measured value of mine hydraulic discharge from six shafts, they are proved not only feasibility and validity but also multifractals character of groundwater system in mining areas.

Key words: mine hydraulic discharge; multifractals; singular exponent; multifractal spectrum; power spectrum

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net