图像分形维数计算技术

董 远　胡光锐
（上海交通大学电子工程系　上海　200030）

摘　要　在分形科学的研究中，分形维数的求取方法一直是人们所关注的。本文基于目前常用的图像分形维数的求取方法，对各种方法的计算量、适用范围进行分析和比较，给出推荐模型。

关键词　分形　分形维数　纹理

TECHNOLOGY OF COUNTING IMAGE FRACTAL DIMENSION

Dong Yuan　Hu Guangrui
(*Department of Electronic Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030*)

Abstract　The method to count fractal dimension of a image has still been attending in the research of fractal science. Based on the common methods to acquire the fractal dimension of a image nowadays, this paper makes a comparison among some models in complexity and applicability, and gives the recommended models at last.

Keywords　Fractal　Fractal dimension　Texture

1 引　言

简单的物体可以用传统的几何方法来进行描述，但是大多数的自然景物非常复杂，所以不能依据传统的几何理论对其进行描述。另一方面，自相似性在描述自然景物中却起着非常重要的作用。

基于对复杂自然景物自相似性的描述，Mandelbrot[1]创立了分形几何学理论，提出用分形维数的概念来度量自然现象的不规则程度。自然界中的许多现象比如云、山、沙漠、岩石等等都具有分形特征，而人造物体如机械、汽车、飞机、建筑等等都不具有分形特征。

分形维数的概念在对形状和纹理的测量分析和分类上是非常有用的。分形在图像分割[3]、图像数据压缩[5]及计算机视觉[4]方面都具有广泛的应用前景。

本课题受国家自然科学基金资助（编号：69672007）。董远，博士生，主研领域：人工智能，模式识别，图像处理等。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2 求取图像分形维数的方法

Peleg[7]应用 ε－毯子的方法，这是 Mandelbrot 最早推荐的方法；Pentland[6]将图像表面视为分数布朗运动(fBf: fractional Brownian function)，并通过求取 fBf 的 Fourier 功率谱来估计分形维数；Gangepain 和 Roques-Carmes[10]及 Keller et al.，[8] B. B. Chaudhuri[9]则用一种称为“盒子”维数的方法来求取分形维数。

2.1 Peleg et al.法－“毯子”维

Peleg et al.[7]提出一种测量分形维数的方法。一副图像可视为高度正比于其灰度值的丘陵面，那么这个丘陵面的上下 ε 构成一副厚度为 2ε 的“毯子”，毯子的表面积为毯子的体积除以 2ε。对于不同的 ε，毯子的面积可以重复如下计算：

设 $f(i,j)$代表灰度值函数，u_ε，b_ε 分别代表上表面和下表面。

先令 $$u_0(i,j) = b_0(i,j) = f(i,j)$$

上下两张“毯子”分别沿如下的方法上下生长，$\varepsilon = 1,2,3,\cdots$

$$u_\varepsilon(i,j) = \max\{u_{\varepsilon-1}(i,j) + 1, \max_{d((i,j,m,n)\leqslant 1} u_{\varepsilon-1}(m,n)\}$$

$$b_\varepsilon(i,j) = \min\{b_{\varepsilon-1}(i,j) - 1, \max_{d(i,j,m,n)\leqslant 1} b_{\varepsilon-1}(m,n)\}$$

此处 $d(i,j,m,n)$代表(i,j)与(m,n)两点之间的距离。

则“毯子”的容积由下式给出：

$$v_\varepsilon = \sum_{i,j}(u_\varepsilon(i,j) - b_\varepsilon(i,j))$$

同时表面积由下式给出：

$$A(\varepsilon) = \frac{(v_\varepsilon - v_{\varepsilon-1})}{2}$$

由于分形表面符合下列关系式：

$$A(\varepsilon) = F\varepsilon^{2-D}$$

所以我们可通过最小二乘法拟合直线 $\lg A(\varepsilon) - \lg\varepsilon$，从而求得分形维数 D。

2.2 Pentland 分数布朗随机场模型(FBR)法

Pentland[6]对自然景物的纹理特性进行了研究，证明了大多数的自然景物满足各向同性分数布朗随机场模型[2]。

此方法共提出两种模型：DFBR(离散分数布朗随机场)模型、DFBIR(离散分数布朗增量随机场)模型。后经实验，人们发现离散分数布朗随机场(DFBR: Discrete Fractional Brownian Random Field)模型在应用上有尺度的限制，这是因为它是非平稳的。而 DFBIR[11]模型经证明，具有与 DFBR 模型相同的局部特性，且是平稳的，因而与大多数自然景物吻合较好。

2.3 “盒子”维

Mandelbrot 认为具有分形特征的表面具有自相似性，欧氏空间中的有界集合 A 的分形维数 D 有如下关系式：

$$1 = N_r r^D \quad 或 \quad D = \frac{\log(N_r)}{\log(1/r)} \tag{1}$$

但是，直接利用(1)式计算分形维数是很困难的。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Gangepain 和 Roques – Carmes[10] 采用一种叫网状盒子计算方法。这种方法速度较快,但当图像的分形维数很高时会低估图像的分形维数。

Keller et al.[8] 提出了一种修正方法。这种方法运算时间稍微长一些,但精确性更好一些。这种方法仍存在 Gangepain 和 Roques – Carmes 方法的缺点,即当图像的分形维数很高时会低估图像的分形维数。

B.B.Chaudhuri[9] 提出一种求取"盒子"维的方法。算法如下:

由(1)式,将大小为 $M \times M$ 的图像考虑成为一个三维空间,坐标(x,y)代表二维平面,图像灰度值代表 Z 轴方向。将(x,y)二维平面分割成大小为 $s \times s$ 的格子(s 为整数,$M/2 \geqslant s > 1$)。此时我们有 $r = s/M$,在每一个格子中有许多体积为 $s \times s \times s$ 的小盒子的堆砌。使第(i,j)个格子中的灰度表面的最大和最小的灰度值分别落入堆砌的序号为 k 和 l 的盒子中。

令 $n_r(i,j) = l - k + 1$,将所有格子的 $n_r(i,j)$求和,则有

$$N_r = \sum_{i,j} n_r(i,j)$$

通过 s 的变化引起 r 的变化,用最小二乘法来拟合 $\log(N_r) - \log(1/r)$,求出斜率即为 D。这种"盒子"维的求法较前两种"盒子"维算法精确性好,特别是在图像的邻近区域灰度值变化很大时。

3 各方法的适用范围与计算量

3.1 各方法的适用范围

将一幅绝对平滑的图像分别加均值为零、不同方差 σ 的高斯白噪声,得到一系列的合成图像,如图 1。

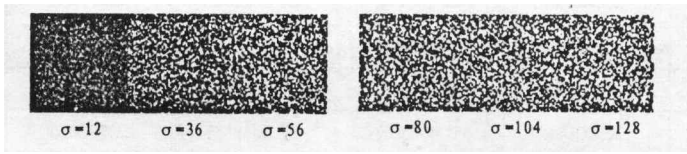


图 1 混加均值为零、不同方差 σ 的高斯白噪声所获得的多个合成图像

分别用本文提到的五种方法对图 1 不同方差 σ 的合成图像求分形维数,求得的分形维数

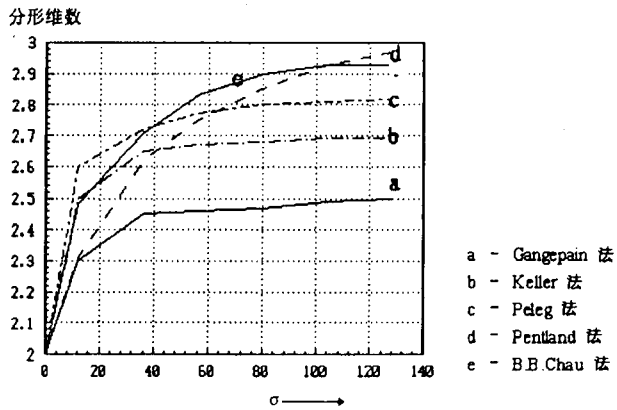


图 2 不同方法对不同 σ 白噪声合成图像求得的分形维数结果

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

值如图 2。根据图像的纹理特性，理想情况下，随着噪声方差 σ 的增大，图像的分形维数应该从 2.0 开始逐渐增大，以渐近方式达到 3.0。

由图可见，Pentland，Peleg et al. 和 B. B. Chaudhuri 法计算的结果比较满意。Gangepain 和 Roques - Carmes[10]、Keller et al.[11]法在图像灰度表面的一定粗糙程度范围内的结果比较满意，在此 σ 范围外曲线的斜率为零，因此这两种算法的适用范围并不覆盖整个分形维数的动态范围。各种模型的适用范围如表 1。

表 1　五种方法分形维数的适用范围

	Pentland	Peleg et al.	B. B. Chaudhuri	Gangepain	Keller et al.
分形维数适用范围	2.0 ~ 3.0	2.0 ~ 3.0	2.0 ~ 3.0	2.0 ~ 2.5	2.0 ~ 2.75

3.2 各种方法的计算量比较

选取 56 pixel × 56 pixel 的纹理图像 8 幅(如图 3)，分别求取分形维数，实验结果如表 2。机型：Pentium - 100.

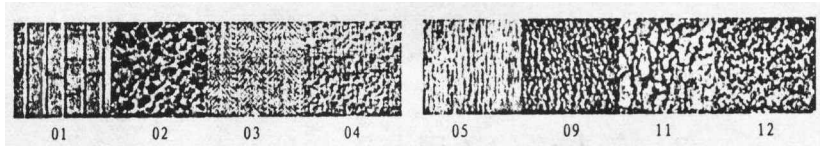


图 3　纹理图像

表 2　算法的分形维数值与计算时间比较

方法 / 纹理图像序号	B. B. Chaudhuri	Pentland	Peleg et al.	Gangepain	Keller et al.
	分形维数	分形维数	分形维数	分形维数	分形维数
01	2.520531	2.351852	2.613419	2.281145	2.534272
02	2.702737	2.643573	2.705646	2.434598	2.603459
03	2.500174	2.404567	2.603817	2.292036	2.452399
04	2.552448	2.491919	2.636397	2.335655	2.539012
05	2.419320	2.339787	2.472028	2.251232	2.403296
09	2.629632	2.552996	2.672386	2.402435	2.634567
11	2.748775	2.675432	2.741444	2.412366	2.602327
12	2.764608	2.719394	2.758387	2.419563	2.616475
运行时间比较(秒)	0.054945	0.8736225	0.1467031	0.0538461	0.2923074

从所得结果中可以看出，B. B. Chaudhuri、Pentland 和 Peleg et al. 方法所求得的分形维数接近，Gangepain 和 Keller et al. 方法当图像的分形维数很高时会低估图像的分形维数。但 Pentland 法由于需进行傅里叶变换来求功率谱，因而计算量大，运算时间过长。

4　结　　论

总的来说，Pentland 法、B. B. Chaudhuri 法、Peleg 法精确性好，可测分形维数适用范围宽，但

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Pentland 法计算量大,运算时间过长。Gangepain 法与 Keller et al.法计算时间适中,但当图像的分形维数很高时会低估图像的分形维数,因而有一定的使用限制。结合适用范围和计算量两方面考虑,我们认为 B.B.Chaudhuri 法和 Peleg 法较好。

参 考 文 献

[1] B.B.Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, San Francisco, CA: Freeman, 1982.

[2] Pentland A.P., "Fractal - based description of natural sciences", IEEE Trans.on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.6, No.6, 1984: 661 ~ 673.

[3] J.Prigaut, "Automated image segmentation by mathematical morphology and fractal geometry", J.Microscopy, Vol.15, 1988: 21 ~ 30.

[4] G.Zorpette, "Fractal: Not just another pretty picture", IEEE Spectrum, Vol.1, 1988: 29 ~ 31.

[5] M.Bernsley, Fractal Everywhere .San Diego, CA: Academic, 1988.

[6] A.P.Pentland, "Fractal based description of natural scenes", IEEE Trans.PAMI, Vol.6, 1984: 661 ~ 674.

[7] S.Peleg, J.Naor, R.Hartley, and D.Avnir, "Multiple resolution texture analysis and classification", IEEE Trans.PAMI, Vol.6, 1984: 518 ~ 523.

[8] J.Keller, R.Crownover, and S.Chen, "Texture description and segmentation through fractal geometry", Comput.Vision Graphics and Image Processing, Vol.45, 1989: 150 ~ 160.

[9] B.B.Chaudhuri and Nirupam Sarkar, "Texture segmentation using fractal dimension", IEEE Trans. on PAMI, Vol.17, No.1, January, 1995: 72 ~ 77.

[10] J.Gangepain and C.Roquew - Carmes, "Fractal approach to two dimensional and three dimensional surface roughness", Wear, Vol. 109, 1986: 119 ~ 126.

[11] 薛东辉、朱耀庭、朱光喜,"基于 DFBIR 场的图像边缘提取的一种新方法",《信号处理》, Vol.13, No,1, 1996.

计算机应用与软件(月刊) 2001 年 第 18 卷 第 6 期

* 中国计算机学会会刊 *

主办单位 上海市计算技术研究所
上海计算机软件技术开发中心

主 编 朱三元

编辑出版 《计算机应用与软件》编辑部

通讯地址 上海市愚园路 546 号
PC:200040 T:62520070 × 505

印 刷 江苏丹阳教育印刷厂

国内总发行 上海市报刊发行局

国内订购 全国各地邮电局(代号:4-379)

刊 号 ISSN1000-386X * CN31-1260/TP

广告代理 上海科技广告公司

广告许可证 沪工商广字 011114 号

定 价 5.00 元

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net