起伏地形上观测重力异常的界面反演
——正弦级数迭代法

陈建国 王宝仁
（武汉地质学院物探系）

摘 要

陈建国，王宝仁：起伏地形上观测重力异常的界面反演——正弦级数迭代法，《石油地球物理勘探》，22（4）1987：427～434

根据重力异常的级数系数与密度界面的级数系数的关系，提出一种反演任意起伏地形上观测重力异常的正弦级数法。假定已知单一密度界面上某一点的深度，即可求取布格重力异常原始值的傅氏级数系数，由此可以计算化平和网格化后的重力异常值，制定迭代方案。收敛快慢取决于设计的加速收敛因子。文中提供了该法计算若干理论模型的反演结果，试算表明，该法可用于山区重力资料的反演解释。

ABSTRACT

Chen Jianguo and Wang Baoren: Interface inversion of gravity anomaly observed on rough terrain——Sine series iteration method, *OGP*, 22(4) 1987: 427～434

Sine series iteration method for the inversion of gravity anomaly observed on any rough terrain is advanced on the basis of relationship between the series coefficients of gravity anomaly and the series coefficients of density interface. Having known the depth of a point on a single density interface, we can solve for Fourier series coefficients of the raw data of Bouguer gravitv anomaly, from which the gravimetric data after smoothing and gridding can be obtained, and then iteration procedure worked out. The convergence speed depends on the designed accelerating convergence factor. Some theoretical inversion results obtained using this method is given in this paper. The method has been proved useful to the inversion of gravimetric data observed

本文于1986年7月21日收到，修改稿于1986年11月10日收到。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

in rough hilly country.

引 言

在区域重力资料的解释中，常常涉及密度界面的反演问题。目前许多方法只能反演平面规则测网的重力资料，成都地质学院何玉辉等根据拉氏方程的解已建立了一套具有曲化平和网格化等功能的位场转换系统。本文在该成果的基础上，研究了异常的级数系数与界面级数系数的关系，建立了一种能根据任意地形起伏面上的观测重力异常来反演地下密度界面的正弦级数法。

基 本 原 理

拉氏方程的级数解

根据位场理论，重力场在场源外部满足拉氏方程。在实际工作中，剖面重力异常可视作二度异常，剖面上半空间的重力异常场近似满足以下定解方程

$$\begin{cases} \nabla^2 g(x,z)=0 \\ g(x,z)|_{x=0}=g(x,z)|_{x=L}=0 \\ g(x,z)|_{z=-\infty}=0 \\ g(x,z)|_{z=z_0(x)}=g_0(x) \end{cases}$$

式中：$z_0(x)$ 为起伏地形的高程；$g_0(x)$ 为剖面上实测重力异常；L 为剖面长度。其坐标如图 1 所示。

用分离变量法解上述定解方程，并用有限项级数表示，可得近似式

$$g(x,z)\doteq\sum_{i=1}^{M}B_i e^{\lambda_i z}\sin\lambda_i x \qquad (1)$$

式中：$\lambda_i=i\pi/L$，$i=1,2,\cdots,M$；B_i 为待定系数，由 $g_0(x)$ 确定。在实际工作中，$g_0(x)$ 往往是离散采样数据，根据采样方式的不同，可采用不同的计算方法，如

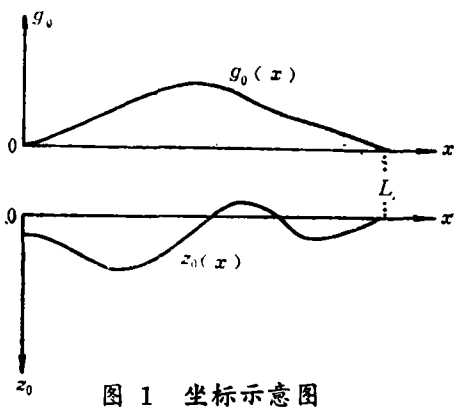


图 1 坐标示意图

1．起伏地形面上采样：可用奇异值分解法解矛盾方程，求得方程的最小二乘解 B_i[1]；

2．水平地形面上不等距采样：可用辛卜生求积法求 B_i[1]；

3．水平地形面上等间距采样：可用三角级数的快速递推法求 B_i[4]

式(1)是剖面上半空间重力异常分布的表达式，由它可得到二度异常的曲化平，网格化及各种换算公式（何玉辉等，1985）。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

异常的级数系数与界面的级数系数的关系

在二维情况下，设有一单密度界面：$h(x)=H+\Delta h(x)$，其中 H 为界面的“平均深度”（参考基准面），又设界面的剩余密度（密度差）为 σ，则地面（$z=0$）观测到的重力异常为

$$g(x,0)=2G\sigma\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{H}^{H+\Delta h(\xi)}\frac{\zeta d\zeta}{(x-\xi)^2+\zeta^2}$$

$$=G\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[1+\frac{2\Delta h(\xi)H+\Delta h^2(\xi)}{(x-\xi)^2+H^2}\right]d\xi \tag{2}$$

式中，G 为万有引力常数。

当 $H\gg\Delta h(x)$ 时，只取对数展开式中的 $\Delta h(x)$ 的一次项，得

$$g(x,0)=2G\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta h(\xi)H}{(x-\xi)^2+H^2}d\xi \tag{3}$$

令

$$\Delta h(x)=\sum_{i=1}^{M}A_i\sin\lambda_i x \tag{4}$$

代入式（3）得

$$g(x,0)=2G\sigma\sum_{i=1}^{M}A_i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H\sin\lambda_i\xi}{(x-\xi)^2+H^2}d\xi \tag{5}$$

作变量代换

$$\begin{cases}x'=\xi-x\\ dx'=d\xi\end{cases}$$

则得

$$g(x,0)=2G\sigma\sum_{i=1}^{M}A_i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H\sin\lambda_i(x'+x)}{x'^2+H^2}dx'$$

$$=2G\sigma\sum_{i=1}^{M}A_i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H[\sin\lambda_i x'\cos\lambda_i x+\cos\lambda_i x'\sin\lambda_i x]}{x'^2+H^2}dx' \tag{6}$$

因为奇函数在对称限上的积分为零，所以

$$g(x,o)=2G\sigma\sum_{i=1}^{M}A_i\sin\lambda_i x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H\cos\lambda_i x'}{H^2+x'^2}dx' \tag{7}$$

用傅氏余弦变换得

$$g(x,o)=2\pi G\sigma\sum_{i=1}^{M}A_i\sin\lambda_i x\exp(-\lambda_i H) \tag{8}$$

比较式（1）和式（8）得

$$A_i=\frac{B_i}{2\pi G\sigma}\exp\lambda_i H \tag{9}$$

式（9）就是二度异常的级数系数与界面级数系数的关系，若给定基准面深度 H 与剩余密度 σ，则可利用式（9）和式（4）求得界面起伏

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\Delta h(x) = \sum_{i=1}^{M} \frac{B_i}{2\pi G\sigma} \sin \lambda_i x \exp \lambda_i H \tag{10}$$

界面迭代反演的实现

1．给定原始布格重力异常 g_{0i}、已知点的位置及深度 z、参考基准面深度 z_0、界面密度差 σ 以及其它参数。

2．求取 g_{0i} 的傅氏级数系数 B_i，由它可以计算化平并网格化后的重力异常 g_i 及各种转换。

3．由式（9）和（4）求得 Δh_i，并以

$$\Delta h_i \Longleftarrow k_{1i} \cdot \Delta h_i \tag{11}$$

作为界面的初始起伏。式中 k_{1i} 为加速收敛因子，后面将作进一步阐述。

4．利用已知点深度修改基准面深度

$$z_0 \Longleftarrow z + \Delta h \tag{12}$$

并得界面的初始深度为

$$h_i \Longleftarrow z_0 - \Delta h_i \tag{13}$$

5．根据 z_0 和 h_i 确定的地质体模型作正演计算，得计算异常 g_i'。

6．求 g_i' 的级数系数 B_i' 以及 $\Delta B_i = B_i - B_i'$。

7．由式（9）和式（4）求得 $\delta\Delta h_i$，并以

$$\delta\Delta h_i \Longleftarrow k_{2i} \cdot \delta\Delta h_i \tag{14}$$

作为界面起伏的修正值，其中 k_{2i} 为加速收敛因子。

8．修改参考基准面

$$z_0 \Longleftarrow z_0 + \delta\Delta h \tag{15}$$

并得到修改后的界面深度为

$$h_i \Longleftarrow h_i - \delta\Delta h_i + \delta\Delta h \tag{16}$$

9．统计

$$\left[\sum_{i=1}^{M} (g_i - g_i')^2/N\right]^{1/2}$$

及

$$(\delta\Delta h_i)_{max} - (\delta\Delta h_i)_{min}$$

作为重力异常的拟合误差及埋深收敛情况的评价（N为测点数）。若它们分别满足预定要求，则迭代结束，否则重复步骤 5 至 9，直到满足要求为止。

加速收敛因子的设计

为了尽可能减小反演误差和加速反演速度，引入一个加速收敛因子。

加速收敛因子的设计方法是：首先探讨与方柱体等效的最佳“压缩质面”深度；然后探讨等效质面间的埋深与面密度的关系，从而导出加速收敛因子。

设有一密度为 σ 的方柱质体，其上下顶面埋深分别为 h_1 和 h_2，其质心在地表的投

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

影取为坐标原点，它在地表产生的重力异常为 $g_1(x)$ 。又设一面密度为 $\sigma(h_2-h_1)$、埋深为 h^* 的“压缩质面”，其在地表所产生的重力异常为 $g_2(x)$ 。则在范数

$$\begin{aligned}&\|g_1(x)-g_2(x)\|_\infty\\&=\left\|2G\sigma\int_{-a}^{a}d\xi\int_{h_1}^{h_2}\frac{\zeta d\zeta}{(x-\xi)^2+\zeta^2}-2G\sigma\int_{-a}^{a}\frac{(h_2-h_1)h^*}{(x-\xi)^2+h^{*2}}d\xi\right\|_\infty\\&=\min\end{aligned}\tag{17}$$

的条件下，求得最佳等效深度 h^* 为

$$h^*=(h_2-h_1)\Big/\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\tag{18}$$

式（18）说明，一个高度为（h_2-h_1）的方柱体所产生的重力异常，用 h^* 进行“压缩质面”反演，能得到较理想的（h_2-h_1）值。

设用任意压缩质面深度 h 进行反演，得到结果为 Δh，则 Δh 与 h_2-h_1 的关系可用

$$\begin{aligned}&\left\|2G\sigma(h_2-h_1)\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x+a}{h^*}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-a}{h^*}\right)-2G\sigma\Delta h\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-a}{h}\right)-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-a}{h}\right\|_\infty\\&=\min\end{aligned}\tag{19}$$

确定，故有

$$\frac{h_2-h_1}{\Delta h}=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{h}\right)\Big/\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{h^*}\right)\tag{20}$$

式中，a 为方柱体半宽度。

假若由原始重力异常 g_i 反演求得参考基准面 z_0 处的等效起伏 Δh_i，而实际起伏近似为

$$\begin{aligned}(h_2-h_1)_i&=\Delta h_i\cdot\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{z_0}\right)\Big/\mathrm{tg}^{-1}\left(a\ln\frac{z_{m1}+\Delta h_{m1}}{z_{m1}+\Delta h_{m1}-\Delta h_i}\Big/\Delta h_i\right)\\&=\Delta h_i\cdot k_{1i}\end{aligned}\tag{21}$$

则

$$k_{1i}=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{z_0}\right)\Big/\mathrm{tg}^{-1}\left(a\ln\frac{z_{m1}+\Delta h_{m1}}{z_{m1}+\Delta h_{m1}-\Delta h_i}\Big/\Delta h_i\right)\tag{22}$$

称 k_{1i} 为第一类加速收敛因子。

若根据重力异常的残差反演得 z_0 处的界面起伏修正量为 $\delta\Delta h_i$，则将其压缩到 h^* 处时的界面起伏的修正量应为

$$\begin{aligned}&\delta\Delta h_i\cdot\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{z_0}\right)\Big/\mathrm{tg}^{-1}\left[a\ln\frac{h_i}{z_0}\Big/(h_i-z_0)\right]\\&=\delta\Delta h_i\cdot k_{2i}\end{aligned}\tag{23}$$

其中

$$k_{2i}=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{z_0}\right)\Big/\mathrm{tg}^{-1}\left[a\ln\frac{h_i}{z_0}\Big/(h_i-z_0)\right]\tag{24}$$

称 k_{2i} 为第二类加速收敛因子。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

理论模型试算

为了检验本方法的正确性和使用效果，我们作了以下理论模型试算。

起伏地形上重力资料的反演

图2为低角度向斜界面在一简单地形起伏面上的正演重力异常及其反演结果。从中看出，本方法可以较好实现起伏地形面上观测重力值的界面反演。

加速收敛因子的效果试验

图3为高角度（60°）界面模型在一平面上正演异常及其反演结果。图中所示是加了加速收敛因子迭代4次的反演结果；若不加加速收敛因子，则需迭代14次，方能达到与其同样的精度。

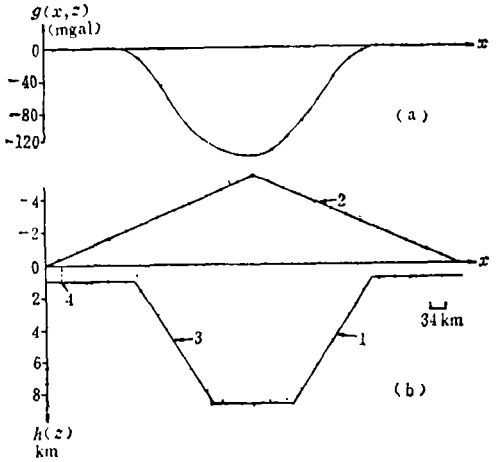


图2 起伏地形上观测重力资料的反演结果

测点数27，级数项数13，拓边4个点距

(a) 模型的正演异常曲线；

(b) 1. 理论界面(实线)；2. 模型地面；3. 反演结果（点线）；4. 已知点位置及深度

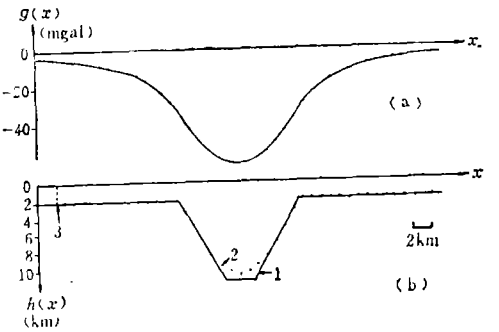


图3 高角度界面模型及其正反演结果

测点数45，级数项数30，拓边5个点距

(a) 模型的正演异常曲线；

(b) 1. 理论界面(实线)；2. 反演结果(点线)；3. 已知点位置及深度

基准面深度的影响

图4给出一界面模型及其正演异常曲线，模型的实际基准面为 $z_0 = 1$km，分别用1km、3.5km的参考基准面作反演，最终结果均与理论界面相接近。因此说，本方法几乎不受基准面选择的影响，这从根本上克服了以往诸多方法的反演结果因基准面深浅不同而升降的弊病。在实际工作中，参考基准面的深度宜等于或小于界面的最小深度，以确保反演的稳定性。

抗干扰能力试验

图5所示曲线是在图4模型的正演异常上叠加了±10mgal的随机误差的结果，以此作为“实测异常”进行反演。图中给出了两种不同级数项数（$M = 26$，$M = 13$）的反演结果。从中看出，本方法可以通过对项数 M 的选择，来提高信噪比，得到既充分压制干扰又逼近真实界面的反演结果。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

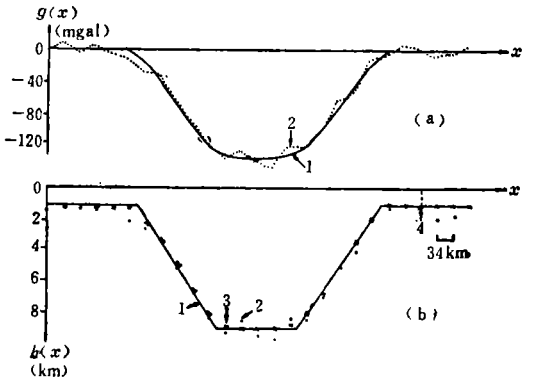


图 4 参考基准面深度的影响试验

测点数 27，级数项数 13，拓边 4 个点距

(a) 模型的正演异常曲线；

(b) 1. 理论界面；2. 基准面深度为 3.5km 的反演结果；3. 基准面深度为 1km 的反演结果；4. 已知点位置及深度

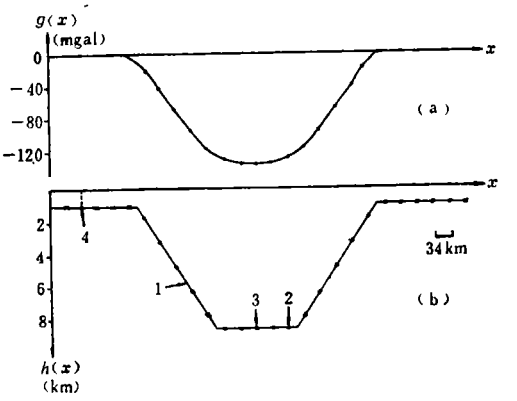


图 5 抗干扰能力试验

测点数 27，拓边 4 个点距

(a) 1. 界面的正演异常曲线；2. 叠加 < ±10mgal 随机误差后的异常曲线；

(b) 1. 理论界面；2. 级数项数为 26 时的反演结果；3. 级数项数为 13 时的反演结果；4. 已知点位置及深度

对三度异常的推广

前面仅就二度异常讨论了正弦级数法反演理论。对于三度异常，也可作完全类似的探讨，其基本公式如下

$$g(x,y,z) = \sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2} B_{ij}\sin(\lambda_i x)\sin(\lambda_j y)\exp z(\lambda_i^2+\lambda_j^2)^{1/2} \tag{25}$$

$$A_{ij} = \frac{B_{ij}}{2\pi G\sigma}\exp H(\lambda_i^2+\lambda_j^2)^{1/2} \tag{26}$$

$$\Delta h(x,y) = \sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2} A_{ij}\sin(\lambda_i x)\sin(\lambda_j y)$$

$$= \sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2} \frac{B_{ij}}{2\pi G\sigma}\sin(\lambda_i x)\sin(\lambda_j y)\exp H(\lambda_i^2+\lambda_j^2)^{1/2} \tag{27}$$

式中：$\lambda_i = \frac{i\pi}{L_x}$；$\lambda_j = \frac{j\pi}{L_y}$，$L_x$、$L_y$ 分别为测区范围在 x 和 y 方向的边长；H 为界面的平均深度。

$$k_{1i} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{ab}{z_0(a^2+b^2+z_0^2)^{1/2}} \Big/ \mathrm{tg}^{-1}\frac{ab}{z^*(a^2+b^2+z^{*2})^{1/2}} \tag{28}$$

$$k_{2i} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{ab}{z_0(a^2+b^2+z_0^2)^{1/2}} \Big/ \mathrm{tg}^{-1}\frac{ab}{(z_0h_i)^{1/2}(a^2+b^2+z_0h_i)^{1/2}} \tag{29}$$

式中：$z^* = [(z_{m1}+\Delta h_{m1})(z_{m1}+\Delta h_{m1}-\Delta h_i)]^{1/2}$；$a$，$b$ 分别为方柱体在 x，y 方向的边长，其余符号同前。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

讨论与结论

用解析法反演地质界面起伏的文章曾发表过不少，如压缩质面法，u 函数法等，但这些方法有很大的局限性：其一是只能反演平面规则测网的重力数据，并要求事先经过圆滑处理；其二是它要求事先给定“平均深度”，直接影响结果的精度。本文所述方法，通过理论推导及理论模型试算证明有以下优点：①能反演任意起伏地形上观测的重力资料，事先毋需对异常进行圆滑处理；②反演结果几乎不受基准面的影响；③加速收敛因子的引入，大大提高了反演精度及反演速度；④迭代思想的引入，使该方法无论对深部地壳界面还是浅部沉积层、无论对起伏平缓地段还是剧烈地段均适用。

本文的模型试验是在 PC—1500 机上实现的，对实际资料的处理尚有待验证。

参考文献

[1] 上海计算技术研究所：《电子计算机算法手册》，上海教育出版社，1982

[2] 刘元龙，王谦身：用压缩质面法反演重力资料及估算地壳构造，《地球物理学报》，20（1）1977：59～69

[3] 林振明，阳 明：具有已知深度点的条件下解二度单一密度界面反问题的方法，《地球物理学报》，28（4）1985：311～321

GZY-50 型车装全液压钻机通过部级技术鉴定

由东煤地质局哈尔滨科研所设计、黑龙江肇州液压件厂试制的 GZY-50 型车装全液压钻机于 1987 年 1 月 10 日在辽宁省兴城市通过部级技术鉴定。

GZY-50 型车装全液压钻机是由主机（包括回转、提升、钻具夹持等机构）、动力设备、操纵台和其它附属装置组成。主机具有体积小、重量轻、结构紧凑、无级调速、操作简便和运转平稳等优点，适用于煤田、石油、地质和地震勘探的爆炸激发，也适用水文观测及工程地质的钻探。

鉴定会认为，这种钻机在钻机结构、液压系统、钻具连接、钻头设计上都有所创新，零部件全部国产化，整机标准化程度高，工艺先进，设计资料及测试、试验数据完整齐全，是目前我国地震勘探中较为理想的新型钻机。

野外生产试验表明，这种钻机可在流沙层、砂砾层中钻进，能够保证有效地下药、安全爆炸。该钻机还可进行干式螺旋钻进，实现了不提钻下炸药的新工艺，适用于无水地区、流砂层、砂砾层和粘土层的钻孔激发，而且能够准确地把炸药下放到最佳激发深度，这对提高原始地震采集质量是很有利的。

鉴定会认为，该机的研制成功为我国地震勘探钻机增加了新的机型，达到了国内外同类产品的先进水平。建议通过技术鉴定，申报专利，尽快批量生产，满足用户急需。

蒋士钧

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net