图像的分形维数计算方法及其应用

冯志刚[1], 周宏伟[2]
(1.镇江师范专科学校数学系, 江苏 镇江 212003; 2. 中国矿业大学(北京校区)岩石力学与分形研究所, 北京 100083)

[摘 要] 分形几何给人们提供了研究不规则几何对象的思想和方法, 分形维数能够表征自然界中所获取的图像的某些特性,这已经得到了广泛的研究和认可. 本文基于计算机图像的存储原理,研究了分形维数的计算方法, 给出了计算图像分形维数的象素点覆盖法. 作为实际应用例子,在水泥沙浆单轴压载过程中, 应用电子扫描镜拍摄了不同应力应变情况下的损伤形貌, 计算了各阶段损伤区域的分形维数, 从某种意义上揭示了材料损伤及其演化发展的特性.

[关键词] 分形维数; 像素点覆盖法; 损伤区域

[中图分类号] O184; TP301.6 [文献标识码] A [文章编号] 1007-1741(2001)06-0092-04

分形几何(Fractal Geometry)是由法国数学家Benoit B. Mandelbrot 开创出的一门新的数学分支,迄今仅二十几年的历史. 与传统的几何(例如Euclid 几何、微分几何)不同, 分形几何能够在更深层次上更加深刻地描述、研究和分析那些自然界中普遍存在的杂乱无章的、不规则的、随机的自然现象. 因此, 分形几何一经提出就得到了自然科学工作者乃至社会科学工作者的广泛关注. 当然, 与人为构造出的纯数学分形相比, 自然界中所固有的物理分形具有随机性、复杂性和尺度有限性(即尺度在某一正区域$[r, \xi]$内具有分形特性)等特性. 虽然在自然界中不存在严格意义上的数学分形,但是在进行科学研究的过程中, 人们可以对具有某些分形特性的对象建立近似的分形模型,然后应用分形作为工具,对这些对象进行分析和研究.

维数是分形几何理论中最重要基本概念之一, 目前已经有许多维数的定义, 主要包括 Hausdorff 维数、计盒维数(Box-counting dimension)、修正计盒维数、填充维数等等. Hausdorff 维数是分形几何理论的基础, 可以说分形几何的理论体系是建立在这一基础之上, 但是Hausdorff 维数只适合分形几何的理论推导,只能通过分析的方法获得一小类规则的纯数学分形的Hausdorff 维数,它对实际应用中提出的分形维数的计算问题无能为力. 鉴于此, 人们提出了计盒维数的概念,虽然它存在着某些缺陷,但是由于它易于进行程序化计算, 得到了理论与应用工作者的广泛关注,事实上在分形理论应用研究中提出的许多维数的概念都是计盒维数的变形.

1 分形维数

在实际应用中, 通常所说的分形维数都是指计盒维数. 设 F 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个非空有界集合, $N_\delta(F$ 是直径最大为 δ, 可以覆盖 F 的集的最少个数, 则 F 的下、上计盒维数定义为[1]

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(F}{-\log \delta} \quad (1$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim_{\delta \to 0^+}} \frac{\log N_\delta(F}{-\log \delta} \quad (2$$

如果这两个值相等, 则称其共同的值为 F 的计盒维数, 记为 $\dim_B F$, 即

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(F}{-\log \delta} \quad (3$$

计盒维数有一系列的等价定义[1~3], 其中有一个被称为网格覆盖法. 考虑 $\boldsymbol{R}^n$ 中的δ- 坐标网立方体, 即下列形式的立方体

[收稿日期] 2001-05-11
[基金项目] 江苏省教育厅自然科学基金资助项目(99KJD110012
[作者简介] 冯志刚(1962-, 男, 江苏武进人, 镇江师范专科学校副教授, 博士.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$[m_1\delta,(m_1+1)\delta]\times\cdots\times[m_n\delta,(m_n+1)\delta]$

其中 $m_1, \cdots, m_n$ 都是整数, 设 $N'_\delta(F)$ 是 $\delta-$ 网立方体与 F 相交的个数, 用 $N'_\delta(F)$ 代替式(1)～(3)中的 $N_\delta(F)$ 时, 可得到式(1)～(3)相同的值.

事实上, 在式(1)～(3)中, 为考虑当 $\delta\to 0$ 时的极限, 只要考虑通过任意满足 $\delta_{k+1}\geqslant c\delta_k$ 且趋于零的递减序列$\{\delta_k\}$, 当 $\delta_k\to 0$ 时的极限, 其中 $0<c<1$; 特别地, 可考虑 $\delta_k=c^k$ 的情形.

然而, 对于自然界中的物理分形或者存储在计算机内的分形图像, 其分形嵌套结构既有上限, 同时一定也有下限, 它只能分割到有限代, 到了晶粒、原子或者像素点尺寸, 就不能像数学分形那样再继续分割下去了. 例如, 存储在计算机中的图像, 当 δ 进入到像素点的尺度以后, 它就是一个二维的集合, 不再具有分形的性质. 因此, 当讨论图像的分形性质时, 必须限制在一定的尺度范围之内, 至少不能小于一个像素点的尺度.

同样, 在计算物理分形或者存储在计算机内分形图像的分形维数时, 也不可能让 $\delta\to 0$. 可以在适当范围内选取一组离散的 δ 值, $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$, 计算出相应的盒子数 $N_{\delta_n}(F)$, 然后在双对数坐标系中用直线拟合数据点$(-\log\delta_n, \log N_{\delta_n}(F))$(图 1), 斜率就作为其分形维数的近似值.

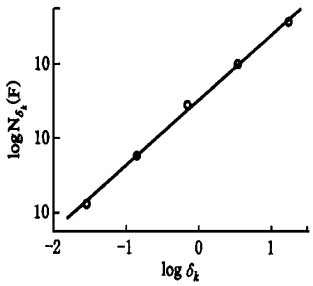


图 1　双对数图
Fig. 1　log- log plot

2　图像分形维数的像素点覆盖法

考虑已经储存在计算机内的图像, 它是由大小为 δ_* 的点(像素点)组成. 首先把图像进行二值化处理, 使得图像上的每一个像素点为黑或白两种颜色, 图 2 是某二值图的一小部分经放大以后得到的示意图, 其中 δ_* 为一个像素点的尺寸. 然后编写程序, 把二值化图像转化成一个数据文件, 其行列数分别对应于二值图的行列数, 而每一个数据取值 1 和 0, 取决于它所对应的点是黑还是白(图 3). 如果是黑色, 则对应的数据取 1, 否则取 0.

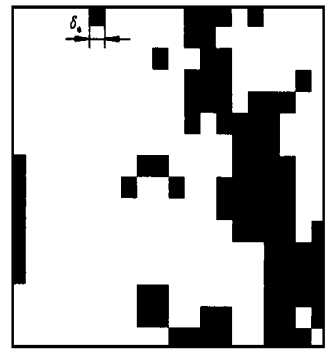


图 2　二值图(已放大处理)
Fig. 2　Two-value picture(has been zoomed in)

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,	0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,	0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1,	1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0,	0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0 0, 0, 1, 0
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,	0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0,	1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1,	1, 1, 0, 0 1, 0, 0, 0 1, 0, 0, 0 1, 1, 0, 0
1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,	0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,	0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,	0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0,	1, 1, 0, 0 1, 1, 0, 0 1, 1, 0, 1 1, 1, 1, 1
1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0,	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0,	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0,	1, 1, 1, 1 1, 1, 1, 1 1, 1, 0, 1 1, 1, 1, 0

图 3　包含 1 和 0 两个值的数据文件
Fig. 3　Data file only with 1 and 0

然后把得到的数据文件依次划分成若干块, 使得每一块的行数和列数均为 k, 把所有那些包含 1 的块的个数记作 N_{δ_k}(简记为 N_k), 例如, 图 3 中 $k=4$, 而 $N_4=17$. 通常取 $k=1, 2, 4, \cdots, 2^i$, 即以 1 个、2 个、…、2^i 个像素点的尺寸为边长作块划分, 从而根据上面方法, 就可以得到盒子数 N_1, N_2, N_4, …, N_{2^i}. 因为

$$\delta_*=\frac{\text{图像的长度 } l}{\text{图像一行中像素点的个数}} \qquad (4$$

所以, 行和列都由 k 个像素点组成的块的边长为 $\delta_k=k\delta_*$ ($k=1, 2, 4, \cdots, 2^i$). 在双对数坐标平面内, 以最小二乘法用直线拟合数据点$(-\log\delta_k, \log N_k)$, $k=1, 2, 4, \cdots, 2^i$, 所得到的直线的斜率 D 就是该图像的物理计盒维数. 以上过程如图 4 所示.

根据分形维数的定义, 块的尺寸越小, 计算出的图像的维数越精确. 因此, 可以取一个像素点的尺寸作为尺度下限. 但是, 为了避免奇异情形的发生, 在计算分形维数的过程中, 要求有适当多的测试点, 至于尺度上限可根据具体情况和具体要求进行确定.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

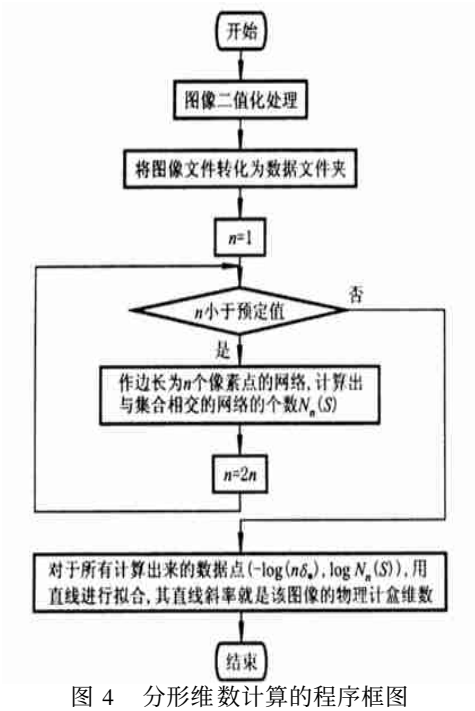


图 4 分形维数计算的程序框图

Fig. 4 The program diagram of calculation of fractal dimension

3 分形维数在损伤力学中的应用

诱发材料宏观物理力学性能劣化的内部微裂纹或微空隙发育、演化行为称为损伤. 选择恰当的损伤变量描述损伤及其演化规律, 建立损伤宏观力学响应与微细观结构效应之间的定量关系是损伤力学研究最基本的问题之一.

传统的损伤变量概念是通过损伤演化过程中有效面积与表观面积的相对变化关系进行定义的[4], 即

$$\omega = \frac{A_D}{A} = 1 - \frac{A_{ef}}{A} \qquad (5$$

式中 A 为表观面积, A_D 为损伤面积, A_{ef} 为有效承载面积.

事实上, 材料在荷载情况下, 其损伤是在一个相当广泛的尺度范围内进行的, 由于实验条件的限制, 即使是在高倍放大镜下, 材料的微细观尺度损伤有时也难以观察到. 因此, 用上面的损伤变量 ω 很难反映出材料损伤的微细观效应.

与传统规则几何相比, 分形几何能够在更深层次上、在更加广的尺度范围内描述材料损伤过程中的不规则性和复杂性. 因此, 用分形维数来刻画材料的损伤不失为一种合理的尝试.

以水泥沙浆的单轴压载为例, 进行了实验研究. 本实验是在中国矿业大学 — 岛津材料测试中心的岛津SEM 高温疲劳试验系统上完成, 该系统可以实现静、动态加载时材料微细观结构变化和缺陷演化的实时观测; 可以实现外部应力状态与内部微细观变化的一一对应.

在水泥沙浆单轴压载过程中, 应用电子扫描镜可以观察到不同应力应变情况下的损伤形貌. 图 5 是在实验过程中采集到的 10 幅损伤形貌图片之一. 对于这 10 幅图片, 由上面引进的像素点覆盖法就可以计算出了它们各自的分形维数(见表 1.

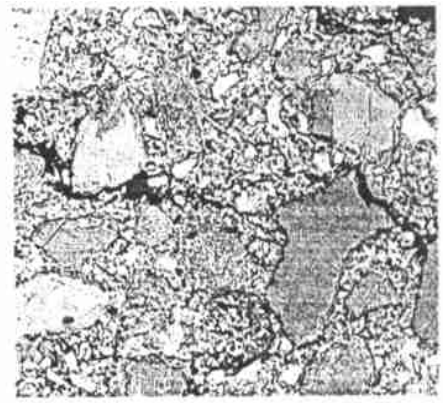


图 5 水泥沙浆损伤形貌

Fig. 5 Damage appearance of cement

通过对水泥沙浆单轴压载过程中 10 个时期的损伤区域分形维数的计算, 可以看到随着加载过程中循环次数的不断增加, 应变量在不断增加, 而损伤区域的分形维数也随之增大, 它对应着材料的损伤在不断加剧. 因此, 损伤区域的分形维数可以作为一个损伤变量, 它可以用来描述材料的损伤及其演化. 关于损伤区域的分形维数与宏观力学量的问题, 尚待进一步研究.

表 1 单轴压载过程中不同时期的应变及其对应损伤区域的分形维数

Tab. 1 Strains and fractal dimensions of corresponding damage fields at various times during the singe- axle loading

循环周次	115	130	159	167	184	197	214	223	235	246
应 变	0.010 25	0.011 07	0.013 57	0.014 84	0.015 78	0.017 42	0.020 08	0.022 95	0.027 46	0.030 74
分形维数	1.239 61	1.245 19	1.277 57	1.335 41	1.471 11	1.487 23	1.540 83	1.589 57	1.669 12	1.778 30

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

4 结 论

对于任意一个储存在计算机中的分形图像, 可以通过文中提出的像素点覆盖法计算其分形维数. 而且可以取到的尺度是构成图像的最小尺寸——像素点的尺寸. 因此, 按照这种方法计算得到的维数是较为精确的.

对于水泥沙浆单轴压载整个过程中 10 个时期所对应的损伤区域, 应用像素点覆盖法计算了它们的分形维数, 从计算的结果可以发现, 随着应变的不断增加, 材料损伤不断加剧, 损伤区域的分形维数随之加大. 因此, 损伤区域的分形维数可以作为一个损伤变量. 而分形维数与材料损伤及其演化的作用之间的数学关系、数学模型需要进一步的探讨.

[参 考 文 献]

[1] Falconer K J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications [M]. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 1990. 中文版: 法尔科内. 分形几何—数学基础及其应用[M]. 谢和平, 等编译. 重庆: 重庆大学出版社, 1991.

[2] Falconer K J. Techniques in Fractal Geometry [M]. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 1996. 中文版: 法尔科内. 分形几何中的技巧[M]. 曾文曲, 等译. 沈阳: 东北大学出版社, 1999.

[3] Xie H, Wang J A. Direct Fractal Measurement of Fracture Surfaces [J]. Int J Solids & Structures, 1999, 36: 3073- 3084.

[4] 谢和平. 岩石混凝土损伤力学[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1990.

Computing Method of Fractal Dimension of Image and Its Application

FENG Zhi-gang[1], *ZHOU Hong-wei*[2]

(1. Department of Mathematics, Zhenjiang Teacher's College, Zhenjiang, Jiangsu 212003, China; 2. Institute of Rock Mechanics and Fractals, China University of Mining and Technology (Beijing Campus), Beijing 100083, China)

Abstract: Fractal geometry provides people with ideas and methods used to study irregular geometric objects. Fractal dimension can indicate some characteristics of image obtained from nature. A wide research and approval are obtained in this field. Based on the storing principles of images in computer, a computing method of fractal dimension is studied in this paper. A computing method of fractal dimension of image, pixel-covering method, is given. As an example of its application, damage appearances of cement under various stresses and strains during the single-axle loading are recorded with electronic scanning microscope. Fractal dimensions of the damage fields at various times are calculated. It reveals the features of the material damage and its development in a sense.

Key words: fractal dimension; pixel-covering method; damage field

(责任编辑　朱银昌)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net