分形维数的若干应用

陈建安

【摘　要】 文章介绍了分形维数和多重分形维数在图象、语音、知识表示和智能控制等领域的最新应用，其中包括介绍多重分形维数的概念。通过文中对分形维数的介绍，可以使人们了解分形理论的最新应用以及仍需要解决的问题等。

【关键词】 分形维数，多重分形维数，图象，语音，知识表示，智能控制。

分形现象是自然界客观存在的现象。为了定量地表示分形自相似的随机形状和现象，人们提出分形维数的概念。通过对不同对象的描述，引出许多分形维数的定义和分形维数的测定方法。随着分形理论的发展，分形应用也得到了较大的发展，反映在生物学、地球物理学、化学、天文学、经济学、计算机图形学、材料科学、语言学、美学等社会科学和自然科学的许多方面。

为了反映分形理论的最新应用，本文在图象、语音、知识表示和智能控制等几个方面分别介绍分形维数和多重分形维数的应用，同时，在相关的应用中还介绍了多重分形维数的概念及存在的有关问题等。

象素与象距的分形维数估计

假设一个黑白照相机被用来观察二维物体。根据物体与相机距离的不同，分别记录这个物体，得到下列一对集合 (T_i, S_i)，$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$。其中 T_i 是物体与相机的第 i 个距离；S_i 是第 i 个象距对应的图象；相机的感光度是常数，随着物体与相机距离的增加，图象中的许多细节将变得模糊，仅仅留下一些重要特征是可以区别的。

假设每一个图象记录 S_i 包括一个黑象素集 B_i 和一个白象素集 W_i，则有 $S_i = (B_i, W_i)$，$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$。随着 T_i 距离的增加，黑象素集所表示的细节会逐渐消失。若用 L_i 表示 T_i 象距情况下，由黑象素所表示的物体特征，则有 $L_i = N(B_i) / N(B_i + W_i)$。其中 $N(F)$ 是集合 F 的基数。由于一幅图象的象素总数是常数，等于 $N(B_i, W_i)$，随着象距 T_i 的增加，黑象素的总数将逐渐减少，则函数 $L = f(T)$ 是非增加的。即如果 $T_i < T_{i+1}$，那么 $L_i > L_{i+1}$。

物体的象距和黑象素的特征函数 $L(T)$ 的具体表达式为：

$$L(T) = K \cdot T^{(1-D)} \qquad (1)$$

其中 $K > 0$，为观测常数；T 为象距；D 为对应的分形维数。若将(1)式取对数，则根据 L 与 T 的关系式可用计算机技术容易地定量估计分形维数为：

$$D = 1 - \frac{\log L / K}{\mathrm{Log}\, T} \qquad (2)$$

语音分形特性及多重分形维数

1. 多重分形维数的概念

多重分形维数在相空间嵌入的分形集结构中以非均匀性为特征。随着阶数 q 的增加，多重分形维数 Dq 显示出单调减少。假设

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

嵌入 d 维相空间中的一个吸引子可以被线性码尺 ε 分成 d 维超立方体 (supercubes)(又叫盒子)，覆盖在该空间的超立方体的总数是 $n(\varepsilon)$，混沌吸引子落入第 i 个盒子的概率是 P_i。通过第 i 个盒子计总数 Ni, i = 1, 2, ……, $n(\varepsilon)$, 概率 P_i 可用下式估计：

$$P_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}, (1 \leqslant i \leqslant n(\varepsilon)) \quad (3)$$

那么，第 q 阶的多重分形维数 D_q 为：

$$D_q = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log(\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} P_i^q)}{\log \varepsilon} (-\infty < q < +\infty) \quad (4)$$

若考虑中心为 X_i，半径为 ε 的 d 维超立方球体，落在该超立方体吸引子的点的概率为：

$$C_i(\varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H(\varepsilon - |X_i - X_j|) \quad (5)$$

其中 H(x)是 Heaviside 函数，被定义为：

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

比较(3)式和(5)式有 $P_i = C_i(\varepsilon)$，两者的差别只是选取的超立方体不同，而概率分布是相同的。如果 $\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} P_i^q$ 是在超立方体上获得的，那么

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} P_i^q = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} P_i C_i(\varepsilon)^{q-1} = \langle C_i(\varepsilon)^{q-1} \rangle \quad (7)$$

其中 〈·〉 表示在 Xi 上获得的全体平均。由(7)式代入(4)式，可得多重分形维数 D_q 的另一表示式

$$D_q = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log(\langle c_i(\varepsilon)^{q-1} \rangle)}{\log \varepsilon}, (-\infty < q < +\infty) \quad (8)$$

2. 语言分形维数和多重分形维数估计

复杂的语音数据涉及频率、幅度、发音方式等许多因素的波动，这些波动随时间变化而变化。如果把整个时间序列数据分成 n 个短时间间隔，在这些时间间隔内测量波动自由度，这样可以观测到波动度与时间的变化。这些波动具有明显的分形维数特征，其分形维数估计可以用频谱求维数的方法进行，也可以使用多重分形维数方法。

多重分形维数方法是将语音波形分成短时间间隔（窗口），可以估计在窗口内点的分形维数，然后滑动 △t 距离的窗口，再估计窗口内点的分形维数，重复此过程直到整个时间序列数据完成。若水平轴是时间，垂直轴是分形维数 D，可以观测到分形维数与时间的变化图。若 x 轴是时间，y 轴是阶 q，z 轴是多重分形维数 D_q，可以观测到三维变化图。

在每个窗口内对分形维数和多重分形维数的计算分别用前述的计算公式进行。通过对语音波形分形维数估计和多重分形维数估计，Sabanal 和 Nakagawa 将它们作为识别参数用于语音识别模型，可以获得识别结果，其最高识别率达 85%。

知识系统的分形维数

假设一个知识系统 K 可以表示成若干知识子集 K_i, i = 1, 2, …, n, 即

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \quad (9)$$

在实际的知识系统的表示中，其信息结构通常是很复杂的，有时甚至是难以定义的。若考虑每个子集又能被细分为若干不同的子集，即

$$K_i = \bigcup_{j=1}^{mi} (K_i)_j, j = 1, 2\cdots, m_i, i = 1, 2, \cdots, n \quad (10)$$

其中 n, m_i 分别表示不同子集内的知识数量。依次类推地进行细分，那么这样的知识结构就是一个分形结构。

对这样的分形结构估计其分形维数，目前还未见有报道。若用分形维数 D_i, i = 1, 2, , N 表示知识系统 K_i 的质量，那么当

$$D_i > D_{i+1}, (i = 1, 2\cdots, N) \quad (11)$$

时，根据分形维数越高，其分形结构越复杂的原理，可以推出第 (i + 1) 个知识系统 K_{i+1} 比第 i 个知识系统 K_i 更好。即知识系统 K_i 经过修改变成 K_{i+1}，这是在朝着知识系统不断改进和完善的方向发展。由此可以了解知识系统的分形维数是很有用的数值。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

智能控制中的分形维数应用

从控制策略来看，传统控制和智能控制是两个重要的控制形式。每一种控制形式又可以分别由各种不同的控制方法来实现。如传统控制包括反馈控制、自适应控制、最优控制、随机控制、滑模控制、线性控制、非线性控制、过程控制等；智能控制包括模糊控制、神经控制、专家控制等。其中的每一种控制方法又可以细分，如模糊控制又包括自适应模糊控制，自组织模糊控制、自学习模糊控制、最优模糊控制、模糊预测控制等很多控制方法。依次类推，传统控制和智能控制都可以再细分出各种控制策略。由于这种结构存在自相似和自仿射等分形特征，因此，这是一个分形结构，可以用分形维数来描述。

从控制对象和过程来看，传统控制及智能控制可以分为线性系统、非线性系统、不确定或难以定义的系统、随时间而变化的系统、环境识别系统等。而每一个系统又可以细分为若干类型，如一阶非线性系统、二阶非线性系统、……、高阶非线性系统、随时间变化非线性系统等。依次类推，被控对象和过程的描述可以划分得很细。同样，这也是一个分形结构，也可以用分形维数来描述。

若低维分形维数分别对应较低级的控制策略和较简单的控制对象/过程，而高维分形维数分别对应较高级的控制策略和较复杂的控制对象和过程，那么，分别求出控制策略的分形维数和控制对象/过程的分形维数，则有利于人们在实际控制应用中正确选择相应的控制策略。

由于控制对象/过程的描述和控制策略的描述涉及知识系统的描述，因此，如何描述知识系统的分形维数仍有待人们去研究。

人们已从理论上和实验上都发现分形的客观存在。分形不仅在图形学、美学、服装装饰和设计等领域显示出美丽多彩的图形，而且在量子学、材料学、机械学、通信、图象处理、语音识别等领域得到应用。其中的应用包括通信、图象、语音等各类数据压缩。

在知识系统中引进分形维数是一个好的想法，但目前对于如何求知识系统的分形维数仍是一个问题。作为智能控制策略的选择尽管可以用分形维数进行选择，但它不是唯一的优化选择标准 。随着分形理论的不断发展，分形学和混沌字一样会得到广泛的应用。

参 考 文 献

1. Falconer K. Fractal geometry mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, England, 1990.

2. Sabanal S and Nakagawa M. The fractal properties of vocal Sounds and their application in the speech recognition model. Choas. Sounds and their application in the speech recognition model. Choas. Solitons and Fractals, Applic. in Science and Engineering, 1996, 7(11): 1825 ~ 1844.

3. 陈建安，杨万海，徐乃平，孙云芝．智能控制的技术、方法及特点分析．电子科技，1997，3：15 ~ 19.

4. Barnsley M F. Fractals everywhere, Second Edition. Academic Press, London, 1993.

5. Panagiotopoulos P D and Panagouli O. Mechanics on fractal bodies. Datacompression using fractals. Chaos Solitons and Fractals, Applic in Science and Engineering, 1997, 8(2): 253 ~ 268.

6. 陈建安，戴冠中，徐乃平．智能控制的方法选择及其应用．机械科学与技术，已录用在 1998 年第 3 期。

（西安电子科技大学）

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net