分形维数的定义及测定方法

陈建安

【摘　要】 文中概述了分形维数的定义及测定方法。由于分形维数在分形理论中是非常重要的概念，并且在分形应用中，分形维数又是定量地表示自相似的随机分形状态或现象的最基本的量。因此，了解并理解分形维数的定义和测定对分形应用具有重要的意义。

【关键词】 分形维数，数学基础，测定方法。

分形理论经过二十多年的发展已成为一门重要的学科，它被广泛应用到自然科学和社会科学的很多领域，成为当今前沿研究课题之一。

分形是组成部分以某种方式与整体相似的形体，它有如下显著的特点：① 精细的结构，即有任意小比例的细节；② 局部与整体都无法用传统的几何语言描述；③ 自相似形式；④ 可以用很简单的方法来定义或由迭代产生；⑤ 分形维数大于拓扑维数。

分形维数在分形理论中是非常重要的一个概念。它与欧式几何学维数表示整数自由度不同，分形维数属于非欧式几何学。通常Hausdorff 维数是分数的物体或事物称为分形。分形维数就是定量地表示自相似的随机形状和现象的最基本的量。

分形维数的定义与欧式几何学维数的定义不同，而且随着应用的不同，其分形维数的定义也会不同。本文概述了分形维数的几种主要定义方法和测定方法。

分形维数的几种定义方法

(1) Hausdorff 维数 D_H

设一个整体 U 划分为 N 个大小和形态完全相同的小图形，每一个小图形的线度是原图形的 r 倍，则 Hausdorff 维数为：

$$D_H = \lim_{r \to o} \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)} \tag{1}$$

其中 $N(r)$ 表示整体所包含的小图形的个数。

若把一个几何对象的线度放大 L 倍，放大几何体是原来几何体的 K 倍，则该对象的维数是：

$$D_H = \frac{\ln k}{\ln L} \tag{2}$$

(2) Lyapunov 维数 D_L

Lyapunov 维数是利用 Lyapunov 指数来定义的。考虑 N 维空间在某个时刻 t，两个点在方向为 i 的轴上相隔的距离为 $L_i(t)$，经过时间 τ 后，这两个点的距离为 $L_i(i+\tau)$，那么 Lyapunov 指数为：

$$\lambda_i = \frac{1}{\tau} \log \frac{L_i(t+\tau)}{L_i(t)}, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{3}$$

若 $\lambda_i > 0$（或 $\lambda_i < 0$），表示这两个点沿轴 i 方向按指数函数逐渐离开（或接近），这时 Lyapunov 分形维数为：

$$D_L = j - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_j}{\lambda_j} \tag{4}$$

其中，$j \equiv \min\{n | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < 0\}$，即 j 表示

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j$ 之和为负值时的最后一个 λ 的下标值。

(3) 相似维数 Ds

设分形整体 S 是由 N 个非重迭的部分 S_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ 组成的，如果每一部分 S_i 经过放大 $1/r_i$ 倍后可与 S 全等 ($0 < r_i < 1$, $i = 1, 2, \cdots, N$)，并且 $r_i = r$，则相似维数为：

$$Ds = \frac{\ln N}{\ln(1/r)} \tag{5}$$

如果 r_i, $i = 1, 2, \cdots, N$ 不全等，则定义：

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^{Dr} = 1 \tag{6}$$

(4) 容量维数 Dc

假设考虑的图形是 n 维欧氏空间 R^n 中的有限集合，用半径为 δ 的球填入该图形，若 $N(\delta)$是球的个数最小值，则容量维数为：

$$Dc = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)} \tag{7}$$

(5) 信息维数 Di

若考虑在 Hausdorff 维数中每个覆盖 U 中所含分形集元素的多少，并设 Pi 表示分形集的元素属于覆盖 U 中的概率，则信息维数为：

$$Di = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \ln P_i}{\ln \varepsilon} \tag{8}$$

在等概率 $P_i = 1/\delta(\varepsilon)$ 的情况下，$D_i = D_H$，即信息维数等于 Hausdorff 维数。

(6) 计盒维数 D_b

设 $A \in H(R^m)$，其中 R^m 是欧式空间，用边长为 $1/2^n$ 的封闭正方盒子覆盖 A，若 $Nn(A)$表示 A 中包含的盒子数，则计盒维数为：

$$D_b = \lim_{n \to 0} \frac{\ln Nn(A)}{\ln(2^n)} \tag{9}$$

(7) 并联维数 Dg

若分形中某两点之间的距离为 δ，其关联函数为 $C(\delta)$，则关联维数为：

$$Dg = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln C(\delta)}{\ln(1/\delta)} \tag{10}$$

其中 $C(\delta) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} H(\delta - |Xi - Xj|)$

$$= \sum_{i=1}^{N} P^2{}_i$$

除上述定义的几种分形维数外，还有模糊维数、布里格维数、广义维数、微分维数、分配维数、质量维数、填充维数等，限于篇幅在此不作论述。

分形维数的测定

分形维数的测定主要是通过实验的方法对分形图形或分形现象进行测度。根据测定对象的不同和采用的手段不同，常用测定分形维数的方法有以下几种。

(1) 改变观察尺度求维数

该方法是用圆、球、线段、正方形、立方体等具有特征长度的基本图形去近似分形图形。设 r 是基本图形的基准量，用 r 去近似分形图形，测得总数记为 $N(r)$。当 r 取不同值时，可测得不同的 $N(r)$ 值，这时有 $N(r) \propto r^{-D}$ 成立，则 D 就是该分形图形的维数。尤其当 r 取值越小，测得的 D 值越精确。计算 D 的公式见式(1)。用此方法可求复杂形状海岸线的维数、复杂工程或三维图形的分形维数等。

(2) 根据测度关系求维数

该方法是利用分形具有非整数维数的测度来定义维数的。设长度为 L，面积为 S，体积为 V，D 是分形图形被测度量 X 的维数，若把 L 扩大 K 倍，那么 $S^{\frac{1}{2}}$、$V^{\frac{1}{3}}$、$X^{\frac{1}{D}}$也都扩大 K 倍，这时有：$L \propto S^{\frac{1}{2}} \propto V^{\frac{1}{3}} \propto X^{\frac{1}{D}}$ 成立。该式子表明对不同分形图形可分别用尽可能小的单位长度、单位面积或单位体积对分形图形进行分割，以近似分形图形。该方法与改变观察尺度求维数的方法不同的是一旦所选的单位长度、单位面积或单位体积的量确定后就不可以改变。因此，要提高分形维数的测量精度应尽可能减小这些量的单位。

(3) 用分布函数求维数

该方法是通过观察某个对象的分布函数来求维数。设 r 是观测尺度，$P(r)$是大于(或小于)r 的观测对象的存在几率。若观测对象

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的分布密度记为 $P(S)$，则有 $P(r)=\int_r^{\infty} P(s)\,ds$。若考虑变换比例尺 $r\to\lambda r$，而分布类型不变，则有对任意 $\lambda>0$，$P(r)\propto P(\lambda r)$ 成立。能满足该式的函数类型只限于幂型，即 $P(r)\propto r^{-D}$，这个 D 就是所求的分形维数。D 的计算式为：$D=\dfrac{\ln P(r)}{\ln(1/r)}$

(4) 用相关函数求维数

该方法是用基本的统计量之一的相关函数来求分形维数。设空间随机分布的某量在坐标 X 处的密度为 $P(X)$，则相关函数 $C(r)$ 可定义为：$C(r)\equiv \mathrm{AVE}(P(x)\,P(x+r))$，其中 AVE(·)表示平均，$r$ 表示两点距离。一般作为相关函数 $C(r)$ 的函数类型有指数型 e^{-r/r_0} 和高斯型 e^{-r^2/r_0^2}，但由于它们存在特征距离 r_0，故它们不是分形。当相关函数为幂型时，由于不存在特征长度，则分布为分形，此时有：$C(r)\propto r^{-\alpha}$，α 为幂指数。它与分形维数 D 的关系为：$\alpha=d-D$，d 是欧氏空间维数。

(5) 用频谱求维数

该方法是通过观测随机变量的频谱来求维数。从频谱观点来看，改变观察尺度就是改变截止频率 f_c，即更细小的振动成分舍去的界限频率，如果某个变动是分形，那么即使变换截止频率 f_c 也不会改变频谱的形状，即变换观测尺度，其波谱形状也不会改变。具有这种性质的频谱 $S(f)$ 只限于幂型：$S(f)\propto f^{-\beta}$，其中 β 与分形维数的关系为：$\beta=c-aD$，其中 c 和 a 是常数。随着频谱曲线图的不同，c 和 a 常数值也是不同的。

在分析研究中，之所以对分形维数有很多定义是因为要找到对任何事物都适用的定义并不容易。由于测定维数的对象不同，就某一分形维数的定义而言，有些对象适用，而另一些就可能完全不适用，因而对不同定义的维数使用不同的名称把它们区分开。为了便于表示，通常把非整数值的维数统称为分形维数。

另外，在对实际分形进行测量时，常存在测量的分形维数值随码尺而变化的问题，即同一分形体由于选取的码尺的不同，会得到不同的分形维数值。分形维数不确定性的产生原因是由于：① 在分形维数的定义中，要求码尺趋于极限，这在测量中是很难实现的；② 实际分形体的结构层次是有限的，在无限层次分形体公式作用下，就可能产生分形维数的不确定性。所以，测量码尺 ε 存在一个合理的取值范围。当 $\varepsilon_{max}\geqslant\varepsilon\geqslant\varepsilon_0$ 时，测得的有限层次分形体的分形维数是一个确定值。其中 ε_0 是下临界点，ε_{max} 是上临界点；当 $\varepsilon<\varepsilon_0$ 或 $\varepsilon>\varepsilon_{max}$ 时，测得的分形维数 $D'<D$，而且 D' 是不确定的。因此，码尺的取值范围不是任意的。

分形维数的定义和测量都是在分形理论不断得到应用的前提下得到发展的。随着分形理论的广泛应用，必将要求对很多复杂的分形现象提出解决其分形维数的定义和测量方法，例如智能系统知识表示及其分形维数的计算等诸多问题。

参考文献

1. 董连科．分形理论及其应用．辽宁科学技术出版社，1991.

2. 张济忠．分形．清华大学出版社，1995.

3. Falconer K. Fractal geomtry mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, 1990.

4. BarnsLey M F. Fractals everywhere. Second Edition, Academic Press, Inc. 1993.

（西安电子科技大学）

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net