大地电磁测深法

朱仁学

2003

目　录

第一章　地球的大地电磁场----------1
§1.1　大地电磁场分类及特征----------1
§1.2　大地电磁场源----------8
第二章　水平层状介质中的大地电磁场----------9
§2.1　基本理论----------9
§2.2　均匀半空间的大地电磁场----------10
§2.3　二层介质的大地电磁场----------14
§2.4　N 层介质模型地面阻抗----------18
第三章　视电阻率和相位曲线----------22
§3.1　二层介质的视电阻率---------- 22
§3.2　三层介质的视电阻率曲线---------- 28
§3.3　大地电磁相位曲线的性质---------- 37
第四章　二维三维介质中的电磁场性质---------- 45
§4.1　标量阻抗的局限性---------- 45
§4.2　阻抗张量和倾子矢量的性质---------- 47
§4.3　构造方向的确定和二维度指标---------- 57
第五章　若干二维构造上大地电磁场解析解---------- 62
§5.1　垂直断层上的大地电磁场---------- 62
§5.2　岩脉上的大地电磁场---------- 71
第六章　大地电磁测深数据处理---------- 79
§6.1　仪器与野外工作方法---------- 79
§6.2　时频变换—傅里叶分析---------- 84
§6.3　用最小二乘法估算张量阻抗要素---------- 90
§6.4　大地电磁测深数据的实时处理---------- 94
§6.5　测量噪音影响及消除方法---------- 98
第七章　大地电磁测深资料的定量解释----------103
§7.1　层状模型的目标函数----------103
§7.2　梯度法----------107
§7.3　高斯法----------109
§7.4　马夸特法----------110
§7.5　博斯蒂克反演法----------112
参考文献----------114

前　言

大地电磁测深(Magnetotelluric 简称 MT)是一种以天然存在的区域性分布的交变电磁场为场源的电磁勘探法。这类天然电磁场具有很大的能量，很宽的频带，可以穿过巨厚的岩石圈，为研究几十乃至上百公里深的地壳与上地幔提供信息。这种新的勘探方法不需要大功率供电设备又有如此巨大的勘探深度，它不受高阻层屏蔽，它野外装备轻便，它效率高、成本低，从而引起了地球物理工作者的兴趣。近十几年来大地电磁测深法得到了很大的发展，在理论上以张量阻抗代替了标量阻抗，利用张量阻抗所确定的视电阻率可以完整地、稳定地描述地质构造，与观测坐标和极化方向无关。另一方面电子技术，计算技术的成就也促进了大地电磁测深法的发展。

近 10 几年来大地电磁测深技术应用领域日益扩大；已经成为研究深部地质构造和寻找油气田的基本勘探方法之一。大地电磁测深法可用于研究岩石圈的电性结构，探测地壳内部和上地幔的良导电层。由于岩石电阻率和温度之间存在密切关系，因而在地热研究、地热资源调查，尤其是深部热研究中大地电磁测深也日益发挥重要作用。大地电磁测深法的发展形势可谓是方兴未艾。

本书第一章扼要介绍了作为场源的天然大地电磁场的一般特征；第二章至第五章叙述了大地电磁测深法的数学物理基础。包括水平均匀各向同性介质、以及水平非均匀介质中的大地电磁场，讨论了大地电磁测深视电阻率曲线和相位曲线的性质。第六章介绍了大地电磁测深数据的处理，包括野外观测数据的获得，数据处理的原理与方法。第七章介绍了资料解释方法。

由于作者水平有限，时间又紧，书中必有许多错误和缺点，热忱地希望广大读者批评指正。

编　者

2002.6

再版序言

本书作者于 1992 年写过《大地电磁测深法》。十年之后，于 2002 年，积多年的教学经验和科研成果，重写了《大地电磁测深法》。从内容来说，后者与前者有很大不同，从形式来说，后者与前者有很大差异，总之，体现了与时具进之精神。但由于本书的目的是为大学本科生之用，其深度不能过深，尤其是受到学时的限制（32 学时），其篇幅不能过长，所以本书并未写出大地电磁测深法的所有内容。但对于 32 学时的本科教学来说，其内容和篇幅是适当的。经过一年的教学使用，证明了这一点。

2002 年印刷的《大地电磁测深法》已经用完（按学生人数印刷），2003 年又快到用该书的时候了，因此必需再次印刷。借再次印刷之机，作者对前版中的笔误进行了更正，并对少数之处进行了修改，在不花大的工作量的情况下，使其更加完善。

青出于蓝而胜于蓝
书出于前而胜于前

编者
2003

第一章　地球的大地电磁场

大地电磁测深是在地面上观测具有区域性乃至全球性分布特征的天然交变电磁场来研究地下岩层的电学性质及其分布特征的一种勘探方法。地球磁场是不断变化的，这种变化按周期长短分为两种类型，即长周变化和瞬时变化。

1．长周变化，长周变化需在一个很长的时间周期，几百年甚至更长的地质年代中显示出来，其影响可能很大。一般认为这种变化的原因在地球内部。大地电磁测深中一般不用这种长周变化的磁场。

2．瞬时变化，即变化周期较短的变化。由地球外部的原因所引起。大地电磁测深就是观测这种瞬时变化的地磁场及其所感应的大地电流场。人们早就认识到电磁场的这种变化，并用于解决地质问题，如大地电流勘探法以及基于观测地磁日变的地磁测深法。显然对这种天然瞬变电磁场源的正确认识将有助于我们更有效地利用它，并发展以天然场为能源的电磁勘探方法。

§1.1　大地电磁场分类及特征

一．大地电磁场分类

在大地电磁测深中所观测的天然瞬变电磁场具有很宽的频率范围，大致从 10^{4}Hz 到 10^{-4}Hz。不同频率的电磁场迭加在一起，形成一个非常复杂的电磁振动。在这个频率范围内的电磁振动按其频率高低、振幅大小、振动形式及分布特征可分为三类：雷电干扰，磁暴和磁亚暴，地磁脉动。每类都有各自的不完全相同的激发机制。

第一类　雷电干扰，或称天电。主要指大气圈中的放电现象所引起的电磁干扰。频率大于 1Hz。在赤道两侧南北回归线间有一个雷雨活动区，就世界范围来说，中非、马来西亚、巴西形成三个雷雨活动中心。在这些地区每年雷雨日在 100 天以上，个别地方超过 200 天。当然从总的来说，雷电夏季比冬季强。一天的任何时刻都可能发生雷电现象，但峰值多半出现在当地时间的下午。

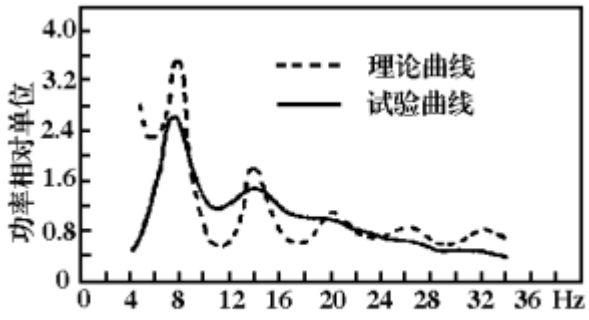


图 1.1　天电频谱（共振）

因为电离层和地面之间可以形成一个很好的波导，以雷电形式出现的电磁场在电离层的下界面和地面之间来回反射，并传播到很远的地方。波导的高度白天约 60 公里，夜晚约 90 公里。尽管雷电也有很宽的频带，然而由于波导的作用，使得某些频率成份有所增强，而另一些频率成份有所削弱。图 1.1 给出了雷电干扰的频谱曲线。由图看出，在 8,14,20,26Hz 附近，由于共振明显地出现较强的峰值。在 2kHz 以上波导具有强烈的吸收作用，磁场剧烈衰减（图 1.2）。

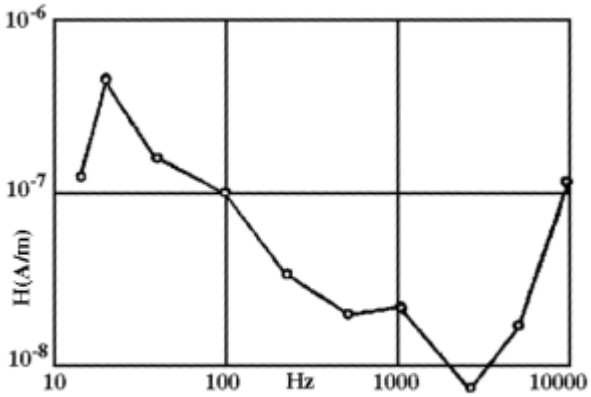


图 1.2　天电的频谱（2kHz 衰减）

雷电干扰的强度与场源的距离有关，图 1.3 说明随着距离的增加，信号幅度减小，另外由图看出，雷电干扰的频率集中在几十 Hz 到 10000Hz 之间，并且其中有 2 个峰值。此频率在大地电磁测深中作为高频使用。如前所述，世界上的三个雷雨活动中心在赤道附近，因此雷电干扰的强度在低纬度区比高纬度区强。一般说，观测点离场源都比较远，所以可将这种场看成是均匀的。

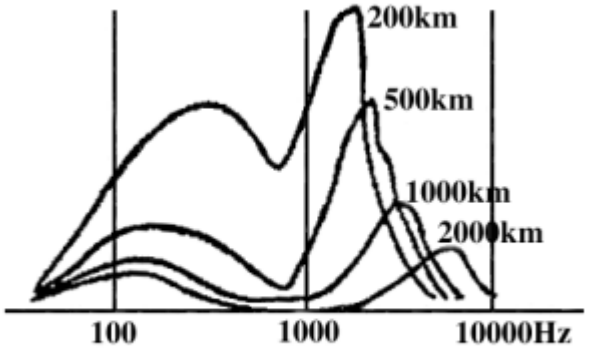


图 1.3　天电信号的振幅谱与距离的关系

第二类　磁暴与磁亚暴。这种地磁扰动的特征是磁场强度变化剧烈，尤其是水平分量变化很大，呈现极不规则形状。

（1）. 磁暴。磁暴可能具有地方性，只在有限的纬度和经度范围内观测到。也可能遍及全球，而且有很大的强度，后者也称为全球性磁暴。根据磁暴出现的形式，磁

暴又可分为急始型（SC）磁暴和缓始型（GC）磁暴。前者表现为各地磁要素（水平分量 H，磁偏角 D，垂直分量 Z）在平静的背景上突然发生跳跃，并能在全世界各地磁台上同时观测到（图 1.4a）；后者表现为各地磁要素缓慢地增加（图 1.4b）,所以不能精确地测定磁暴出现的时间。

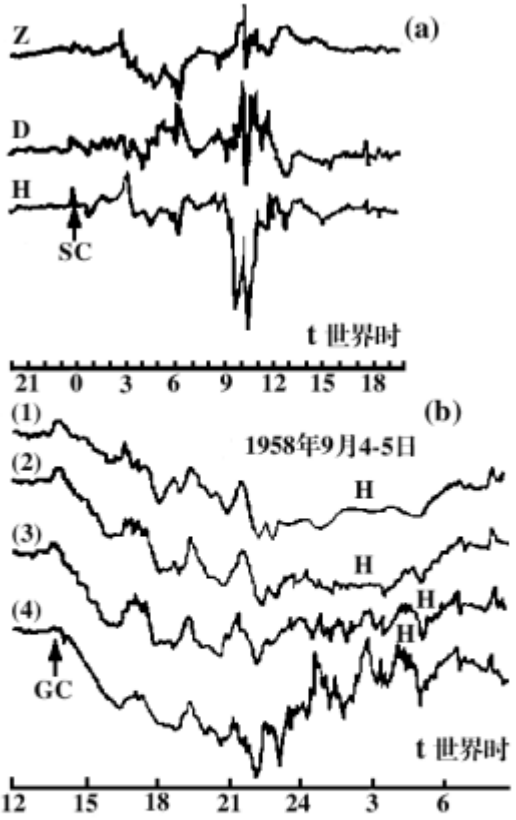


图 1.4　磁暴记录

a.　急始型磁暴(SC)　美国科列支台

b.　缓始型磁暴(GC)　(1) 日本女满别台

(2) 日本鹿屋台　(3) 菲律宾蒙廷卢帕台

(4) 美国科罗尔台

磁暴发生时，水平分量 H 开始增大（图 1.5），1-2 小时内增至最大，然后延续 2-6 小时，此阶段称为初相；然后 H 值降低，在几个小时之后达到极小，此阶段称为主相，一般保持 12-14 小时；随后逐渐恢复，称为恢复相，这过程可延续数天。磁场强度年平均值可达几百 nT，在不同年份其值变化很大，就单个磁暴来说强度可达几千 nT。

磁暴频率是指在一定的时间里磁暴发生的次数。首先注意到磁暴的频率与太阳活动性的关系非常密切，从图 1.6 看到在不同年份磁暴出现的频率 N 与太阳活动性的沃尔夫数 W（W=f+10g，f:黑子数，g:黑子群）有几乎相同的变化规律。在黑子活动强

的年份磁暴频率也高，而且大磁暴出现次数也增多。此外磁暴频率与季节关系也很密切，一年中春分和秋分期间大磁暴出现的次数增加。

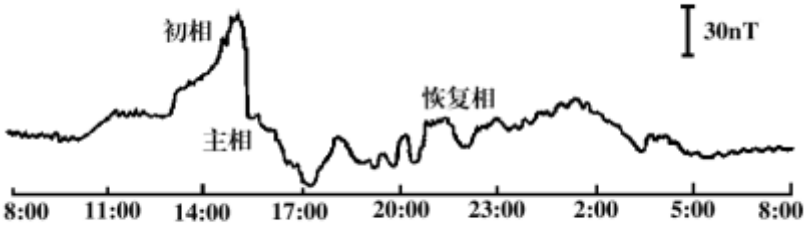


图 1.5　磁暴的形态特征（1973 年 10 月 16-17 兰州地震台）

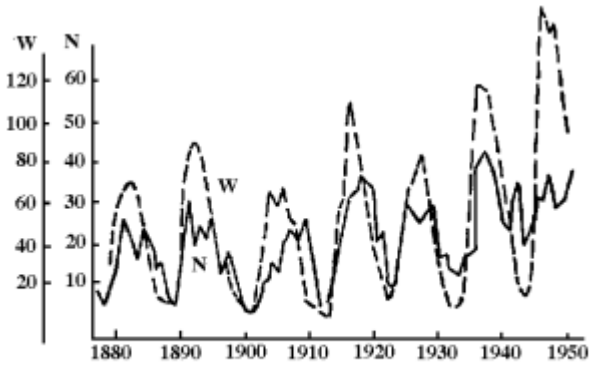


图 1.6　磁暴频率、沃尔夫数与频率的关系

(2).磁亚暴。磁亚暴多半出现在极区，因为其形状象海湾，所以又称湾扰或磁湾。在高纬度区湾扰幅度可达数百 nT，持续时间可达半小时或几小时。湾扰在平静的地磁场背景上以单个的或一个接一个的扰动形式出现。图 1.7 为甘肃天水地磁台记录到的电湾扰和磁湾扰。

在磁暴和磁亚暴出现的时侯，总有许多不同频率的振动迭加在大周期的振动上面，形成很复杂的振动。这样丰富的频率成分和较强的振动对大地电磁测深工作十分有利。

第三类　地磁脉动。这是一种具有似周期振动的特殊的短周期振动，地磁脉动是大地电磁测深最重要的场源。其振动周期大致为 0.5 秒到 1000 秒。国际地磁学与高层大气物理学协会（IAGA）1973 年在日本召开的第二届年会上将地磁脉动划分为两种类型：第 1 种为 Pc 型，具连续振动特征，大致呈似正弦型，并能延续较长时间；第 2 种为 Pi 型，具不规则振动特征，而且频谱变化较大。每一种又可分为若干小类，如表 1.1 所示。

表 1.1　地磁脉动的分类

类型	pc						pi		
周期（秒）	Pc1	Pc2	Pc3	Pc4	Pc5	Pc6	Pi1	Pi2	Pi3
	0.2-5	5-10	10-45	45-150	150-600	>600	1-40	40-150	>150

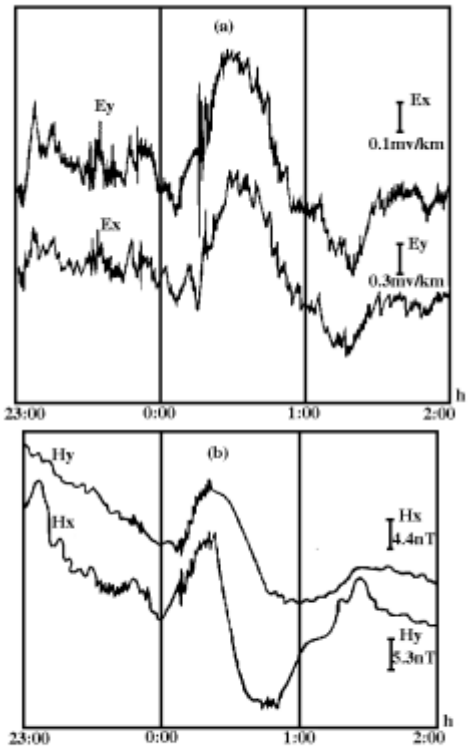


图 1.7　电湾扰(a) 和 磁湾扰(b)
(1971 年 5 月 10-11 日甘肃天水)

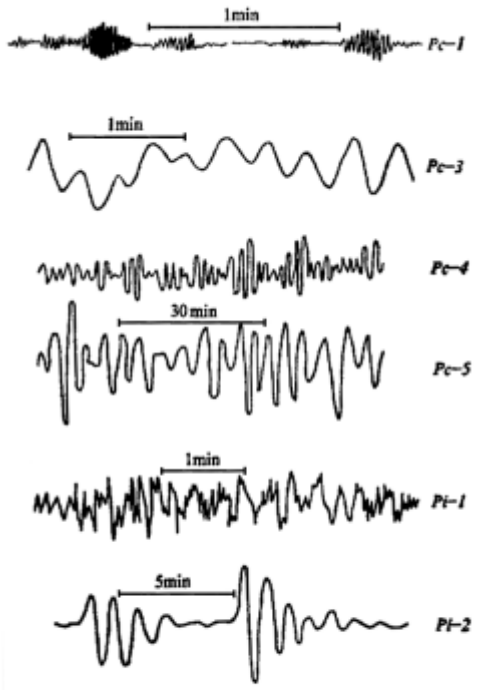


图 1.8　地磁脉动记录

二. 大地电磁场的特征

1. 形态特征。各类有各类的型态，如图 1.4，图 1.5，图 1.7，图 1.8。分类的根据主要是型态。

2. 时间特征。

（1）随机性，不能精确确定天然电磁场出现的时间。

（2）规律性，经长期观察，天然电磁场的出现在时间上有一定的规律性。如：与太阳活动有密切的关系，太阳黑子活动有 11 年的周期，大地电磁场亦有 11 年的周期，如图 1.6；大地电磁场的周年变化与地球公转周期一致；季节变化的极大值出现在二分点（春分和秋分）；大地电磁场具有 27 天左右的平均周期，这与太阳自转周期相稳合；pc 型趋于白天出现；pi 型趋于夜晚出现；磁暴约每年出现 10 次；磁湾约 3-4 天出现一次。

3 空间特征。与纬度有关，一般高纬度区强于中低纬度区，（但雷电是低纬度区

强，）范围较大，pc 型通常在 1000 公里范围内彼此相关，强磁暴在全球范围内可观测到，如图 1.4，说明在世界不同地区均可同时观测到。

4 频谱特征。图 1.9 给出了周期范围 10^4-10^{-4} 秒的大地电磁场振幅谱，它包括了从湾扰到各类电磁脉动（Pc、Pi）以及天电（ELF）等大地电磁现象所复盖的频率范围。可以看出，在这一频率范围内，大地电磁场在 1Hz 附近振幅较小，而在更低和更高的频率上振幅都增大。并且在周期大于 1 秒的频率范围内，在某些频率上显示出局部的极值。图 1.9 中电场曲线是在电阻率为 1 欧姆米时测得的，如电阻率增加 100 倍，则相应电场应增加 10 倍。由 图 1.1 看出，在频率 3-30Hz 范围内，有几个谐振频率，这是由雷电信号的苏曼谐振引起。

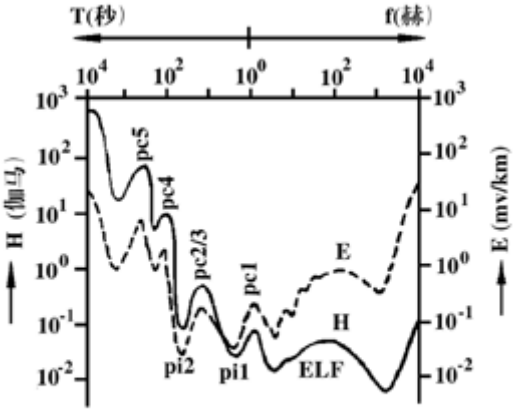


图 1.9　大地电磁场振幅谱

5 极化特征。大地电磁场的极化特征指的是大地电磁场的电场矢量和磁场矢量在方向上随时间变化的特征。如果大地电磁场矢量仅在量值上变化，称之为线性极化；如果大地电磁场矢量在量值上和方向上都在变化，称之为非线性极化。研究大地电磁场的极化特征，最直观的方法是作图法，只要构制大地电磁场的矢端曲线，即可了解场的极化特征。

大地电磁场极化特征与场源性质有关，尤其是磁场水平分量，它较少地受地下介质电性的影响，较多地具有原始场的特征，因而研究这种场的极化特征可以直接用于研究场源的性质。有人曾在某一较大区域同时布置几十台磁力仪，用以研究磁场的极化特征，如图 1.10 ，结果表明：不同周期的场和不同时间的场的极化方式具有明显的差异。为了在测深资料分析处理时获得稳定的阻抗张量元素，需要场源具有多样的极化方式。


图 1.11　电场极化方向矢端曲线

大地电磁场中的电场部分，除与场源性质有关外，还与地下介质的电性有关，某一地点地下电性是固定的，因此该地点的电场常具有一个较稳定的极化方向，如图 1.11 所示。研究表明，在巨大的沉积盆地中央，大地电流场多为非线性极化，在其边缘则多为线性极化。因而研究电场的极化特征有助于了解地下介质的电学性质。

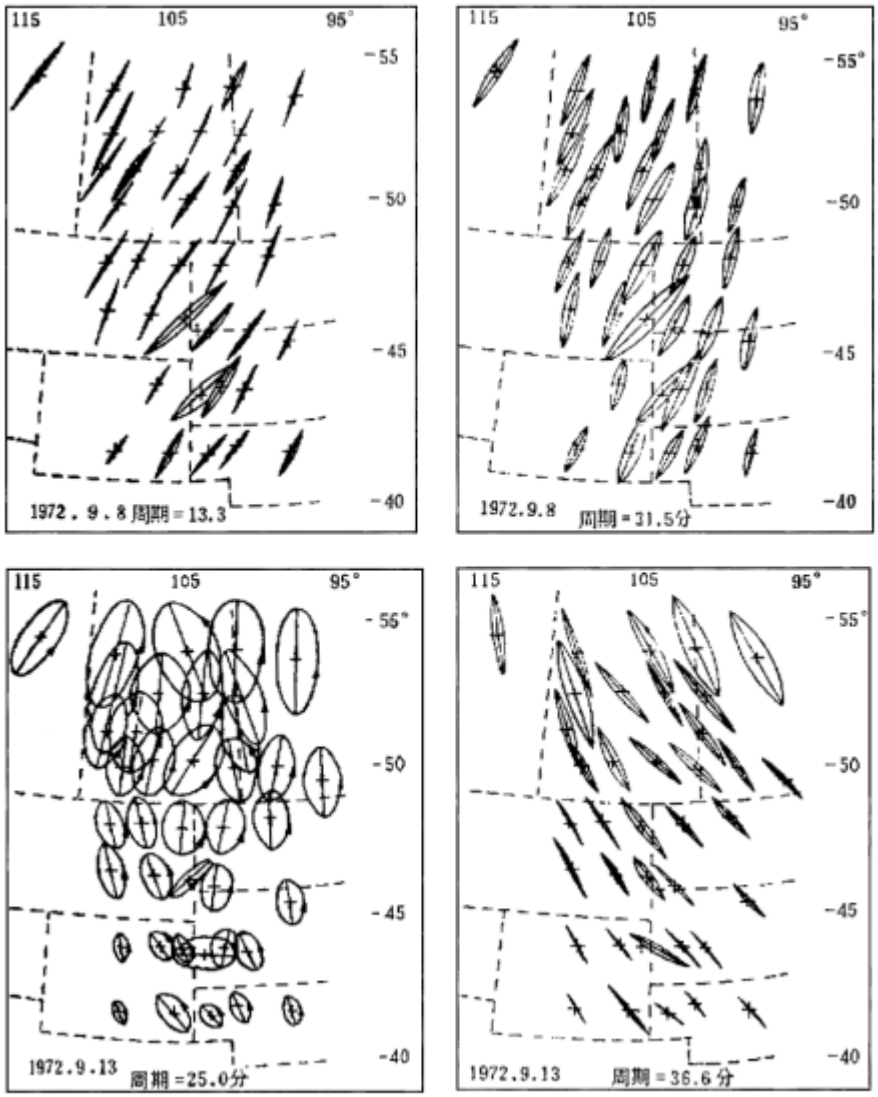


图 1.10　大地电磁场水平磁场极化情况

§1.2　大地电磁场源

大地电磁场与太阳的活动性、电离层的状态、地磁轴对太阳的定向有着密切的关系。太阳发射的带电微粒流破坏了电离层的电磁平衡，从而激起游离气体的自由振动，这样在电离层中产生了发射电磁波的复杂的电流体系，电离层中产生的磁偶极子和电偶极子可以看作大地电磁场的中周期变异的来源。

星际空间存在着由太阳发出的连续的等离子体流，这种等离子体流通常称作太阳

风。太阳风等离子体主要由电离了的氢（质子和电子）组成，其密度约为 10 个离子/立方厘米。它们以 300-500 公里/秒的平均速度不断地从太阳吹出，呈辐射状向外传播。

等离子体和地球磁场相互作用，使地球磁场限定在地球周围的一个有限的区域之内，称此区域为磁层，此区域的边界称磁层顶；而地球磁场又在排斥等离子体，地球周围成为等离子体的一个空腔（或空穴）。空腔的大小由等离子体的能量密度和地球磁场大小决定。此外，如果等离子体的速度远大于音速，则在空腔边界前面的区域可能产生分离的激波。图 1.12 给出了地球磁层结构的示意图。从图看出，当太阳风吹向地球时，地球磁场在向日面被压扁，而在背日面被拉长（磁尾），造成了磁层的不对称形状。在向日面从地心到磁层顶的距离约为 10 个地球半径，弓形激波面位于这一距离之外的几个地球半径处；在背日面细长的磁尾一直沿伸到 1000 个地球半径处。

太阳风等离子体可以进入磁层之中，一些电离层的等离子体也可以扩散并流向磁层，因此磁层内充满着等离子体。由于离子密度不均匀，而且随时间不断变化，因而产生了离子的扰动。离子扰动以磁流体动力波的形式传播，从而产生不同形式的电流体系。这些电流体系从太阳风中获得能量，而离子密度、速度、和磁场强度的变化可以整个地或局部地改变电流体系，从而引起了地球表面上的地磁变异，成为大地电磁测深所观测的大地电磁场和大地电流场。

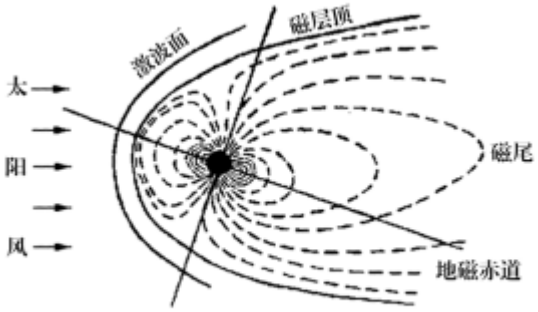


图 1.12　地球磁层结构

太阳的活动除了具有粒子辐射（即太阳风）之外还存在着电磁辐射。由于太阳发射的紫外线和 X 射线的作用，在距地球 60-1000 公里的高度上形成了电离层的等离子体，可以形成水平的传导，特别是在 90-140 公里的高度上，磁层的磁流现象可以产生很大的水平电流薄层。太阳电磁辐射的变化，必将引起这些电流体系的变化，从而引起大地电磁场的变化，成为大地电磁场源。

上述大地电磁场源主要作为低频场源。而高频场源主要来自雷电活动（见前）。

第二章　水平层状介质中的大地电磁场

§2.1　基本理论

在吉洪诺夫(A.H. Тихонов)，卡格尼亚德(L.Cagniard)经典理论中假设：(1)场源位于高空，形成垂直入射到地面的均匀的平面电磁波；(2)地质模型为水平的层状介质；(3)每层介质的电性是均匀的各向同性的。我们选用笛卡尔右手坐标系，x、y轴在地表水平面内，z 轴垂直向下。由于波前平行与地面，故一次场无垂直分量，设电场为 E_{1x}，则磁场为 H_{1y}。由于地下介质在任一水平面内都是均匀的，所以二次场也只有 E_{2x}，H_{2y} 分量，并且沿水平方向是均匀的。所以总的电磁场由下列分量组成：

$$E=(E_x\,,0\,,0)\,,\qquad H=(0\,,H_y\,,0)$$

且各分量对 x、y 的导数都为零，即：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0\qquad \frac{\partial E_x}{\partial y}=0\qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}=0\qquad \frac{\partial H_y}{\partial y}=0$$

任何电磁场问题的解都是基于 Maxwell 方程组，合理化实用单位制中的 Maxwell 方程组在均匀媒质中为：

$$\nabla\times H=j+\frac{\partial D}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot E=0 \tag{2.3}$$

$$\nabla\cdot H=0 \tag{2.4}$$

并且还有：$B=\mu H\,,\ j=\sigma E\,,D=\varepsilon E$ (2.5)

对(2.2)式两边取旋度，并用 μH 代替 B，得到：

$$\nabla\times\nabla\times E=-\mu\frac{\partial(\nabla\times H)}{\partial t} \tag{2.6}$$

将(2.1)式及(2.5)式代入(2.6)后有：

$$\nabla\times\nabla\times E=-\mu(\sigma\frac{\partial E}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}) \tag{2.7}$$

利用矢量恒等式及(2.3)式，上式左端为：

$$\nabla\times\nabla\times E=\nabla(\nabla\cdot E)-\nabla^2E=-\nabla^2E \tag{2.8}$$

(2.7)式简化为：

$$\nabla^2E=\mu\varepsilon\frac{\partial^2E}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t} \tag{2.9}$$

(2.9)式称为电场的波动方程式。对磁场矢量同样有：

$$\nabla^2H=\mu\varepsilon\frac{\partial^2H}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.10}$$

取时间因子为$e^{-i\omega t}$，(2.9)式简化为：

$$\nabla^2 E = -(\mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega)E = -k^2 E \tag{2.11}$$

其中$k = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega}$为传播常数，或称波数。式(2.11)称为亥姆霍兹方程。(2.11)式中$\mu\varepsilon\omega^2$表示位移电流的作用，$i\mu\sigma\omega$表示传导电流的作用。在大地电磁测深中应用的频率范围一般为 0.001~1000Hz，介质的电阻率一般为 1~1000Ω M，于是位移电流和传导电流的最大比值为5×10^{-5}。所以可忽略位移电流的影响。因此在大地电磁测深中，实际上处理的是似稳电磁场。这样传播常数的表达式简化成：

$$k = \sqrt{i\mu\sigma\omega} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+i) \tag{2.12}$$

由此可知，k 为复数，设实部为 a，虚部为 b，则上式可写成：

$$k = a + ib = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + i\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{2.13}$$

所以

$$a = b = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{2.14}$$

在直角坐标系中，将(2.11)式中的$\nabla^2 E$展开：

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

并考虑到只有 Ex 和 Hy 分量，而且它们对 x，y 的偏导数为零，所以(2.11)式变为：

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \tag{2.15}$$

根据(2.10)，类似地对磁场有：

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} + k^2 H_y = 0 \tag{2.16}$$

上二式的解为：

$$E_x = Ae^{ikz}e^{-i\omega t} + Be^{-ikz}e^{-i\omega t} \tag{2.17}$$

$$H_y = Ce^{ikz}e^{-i\omega t} + De^{-ikz}e^{-i\omega t} \tag{2.18}$$

其中第一项表示入射波，第二项表示反射波，A、B、C、D 为由边界条件确定的常数。K 可分解为三个坐标分量 k_x、k_y、k_z 。但在满足吉洪诺夫，卡格尼亚德所做的假设条件下，波沿 z 轴方向传波，k 仅有 k_z 分量，或说 $k=k_z$ 。

§2.2 均匀半空间的大地电磁场

设平面电磁波垂直入射，在均匀半空间中，因没有反射界面，所以无反射波。(2.17)、(2.18)式无第二项，(2.17)式变为（略去角标 x）：

$$E = Ae^{ikz}e^{-i\omega t} \tag{2.19}$$

将(2.13)代入上式，并设地面的电场幅值为E_0，得：

$$E = E_0 e^{-bz} e^{-i\omega t + iaz} = E_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z} e^{-i(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z)} \qquad (2.20)$$

这表示是沿 z 方向传播的衰减的单谐波。传播常数的虚部 b 决定衰减的程度，而实部 a 决定传播的波长。

我们把波在地下介质中传播时，其振幅值衰减到地面振幅值的 1/e 的深度定义为趋肤深度（或穿透深度）δ。由(2.20)式看出：

$$\delta = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2\rho T 10^7}{8\pi^2}} = \frac{10^3}{2\pi}\sqrt{10\rho T} \approx 503\sqrt{\rho T} \quad (m) \qquad (2.21)$$

其中 T 为电磁场的周期。上式说明，周期越长，介质的电阻率越高，穿透深度越深。这一点构成了大地电磁测深的物理基础。图 2.1 给出了穿透深度随周期和介质电阻率变化的情况。若知道三个参数中的两个，则可求出第三个。这个图在大地电磁测深工作的设计阶段是有用的。

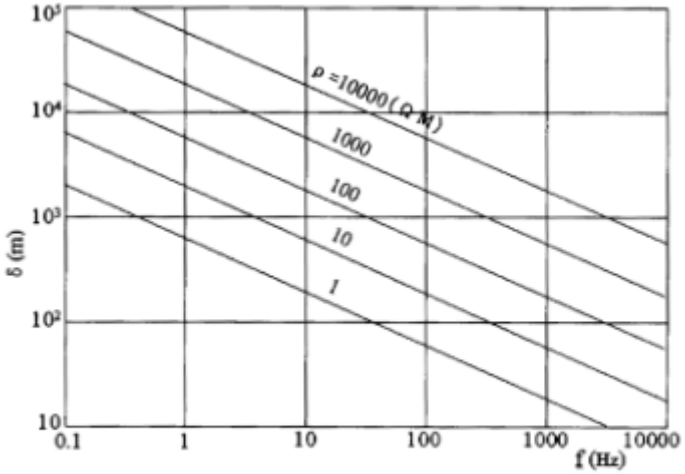


图 2.1　穿透深度与频率和电阻率之间的关系

再看(2.20)式中的因子：$e^{-i(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z)}$　　(2.22)

若使 $z = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega\mu\sigma/2}}$，则(2.22)式变为 $e^{-i(\omega t - 2\pi)}$，即相位改变了 2π，我们把相位改变 2π 的距离定义为波长 λ，所以有：

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega\mu\sigma/2}} = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\delta = 10^3\sqrt{10\rho T} \quad (m) \qquad (2.23)$$

或　$\lambda = \sqrt{10\rho T} \quad (km)$

任何单谐平面波都可分解成 $E_{//}$ 极化方式或 TE（横电）波型和 $H_{//}$ 极化方式或 TM (横磁)波型。下面分别进行讨论：

1.　$E_{//}$ 极化方式。电磁场分量为：E=(E_x , 0 , 0) , H=(0 , H_y , 0)，根据(2.2)式：

$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$，并考虑到：$E_y = 0$，$E_z = 0$，$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$，得到：

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y$$

由(2.19)有：$\frac{\partial E_x}{\partial z} = ikE_x$

所以上二式右端相等：$ikE_x = i\omega\mu H_y$

于是有：$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} \tag{2.24}$$

比值$\frac{E_x}{H_y}$具有电阻的量纲，称为阻抗，记为Z_{xy}

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{i\omega\sigma\mu}} = \sqrt{\omega\mu\rho}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \tag{2.25}$$

阻抗Z_{xy}的模为：

$$\left|Z_{xy}\right| = \sqrt{\omega\mu\rho} \tag{2.26}$$

阻抗Z_{xy}的相位为：$Arg(Z_{xy}) = -45^\circ$ (2.27)

2. $H_{//}$极化方式。电磁场分量为：E=(0，E_y，0)，H=(H_x，0，0)，根据(2.2)式：

$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$，并考虑到：$E_x = 0$，$E_z = 0$，$\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$，得到：

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu H_x$$

由(2.19)有：$\frac{\partial E_y}{\partial z} = ikE_y$

所以上二式右端相等：$ikE_y = -i\omega\mu H_x$

于是有：$$\frac{E_y}{H_x} = -\frac{\omega\mu}{k} = -\frac{\omega\mu}{\sqrt{i\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\omega\mu\rho}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

比值$\frac{E_y}{H_x}$称为阻抗Z_{yx}，$Z_{yx} = \sqrt{\omega\mu\rho}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$ (2.28)

阻抗Z_{yx}的相位为：$Arg(Z_{yx}) = 135^\circ$ (2.29)

由此可以看出，对于垂直入射到均匀半空间的平面电磁波，无论$E_{//}$极化方式还是$H_{//}$极化方式，阻抗的模均为$\sqrt{\omega\mu\rho}$，但相位分别为-45°（$E_{//}$极化方式）

和 135°（$H_{//}$ 极化方式）。

可以证明当平面电磁波非垂直入射时，在均匀半空间情况下，不同极化方式的平面电磁波不管以什么角自空中射入地面，求得的阻抗的模值均为：

$$\left|Z_{TE}\right| = \left|Z_{TM}\right| = \left|Z\right| = \left|\sqrt{-i\omega\mu\rho}\right| = \sqrt{\omega\mu\rho} \tag{2.30}$$

这与垂直入射平面波时的结果相同。该式说明：阻抗的模与介质电阻率的平方根成正比，与频率的平方根成正比。

(2.30)式中的阻抗称为标量阻抗，以区别于以后要讲的张量阻抗的概念。由(2.30)式可得：$\left|Z\right|^2 = \omega\mu\rho$，从而有：

$$\rho = \frac{\left|Z\right|^2}{\omega\mu} = \frac{T}{2\pi\times 4\pi\times 10^{-7}}\left|\frac{E_x}{H_y}\right|^2 = \frac{T}{2\pi\times 4\pi\times 10^{-7}}\left|\frac{E_y}{H_x}\right|^2 \tag{2.31}$$

绝对实用单位制（MKSA）中，电场单位是：V/m，磁场单为是：A/m。

大地电磁法中常用单位，电场是：mV/km，磁场是：nT。

绝对实用单位与大地电磁法中常用单位之间的转换关系是：

电场：$1V/m = 10^6\, mV/km$

磁场：$1A/m = 4\pi\times 10^{-3} Oe = 4\pi\times 10^{-3}\times 10^5\, nT = 4\pi\times 10^2\, nT$

所以按大地电磁法中常用的单位，计算电阻率的公式为：

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{T}{8\pi^2\times 10^{-7}}\left|\frac{10^{-6}E}{H}4\pi\times 10^2\right|^2 = 2T\times 10^{-1}\left|\frac{E}{H}\right|^2 \\ &= 0.2T\left|\frac{E}{H}\right|^2 = 0.2T\left|Z\right|^2\end{aligned} \tag{2.32}$$

在均匀半空间情况下，阻抗相角为定值：

$$Arg(Z) = -\frac{\pi}{4} \qquad （E_{//} 极化方式） \tag{2.33}$$

$$Arg(Z) = \frac{3\pi}{4} \qquad （H_{//} 极化方式） \tag{2.34}$$

(2.32)式说明，在均匀半空间情况下，利用某一测点某一频率的相互垂直的电磁场水平分量振幅值，就可计算出该点该频率的介质的电阻率。

在非均匀情况下，以实测阻抗代入式(2.32)，计算出的量称为视电阻率，记为 ρ_a

$$\rho_a = 0.2T\left|Z\right|^2 \quad 或 \quad \rho_a = \frac{1}{\omega\mu}\left|Z\right|^2 \tag{2.35}$$

ρ_a 是频率的函数，它是给定频率下电磁场影响范围内介质性质的综合反映。显然，根据趋肤深度的概念，ω 较大时，ρ_a 反映较浅的介质，ω 越小，反映介质的范围越深。

§2.3　二层介质的大地电磁场

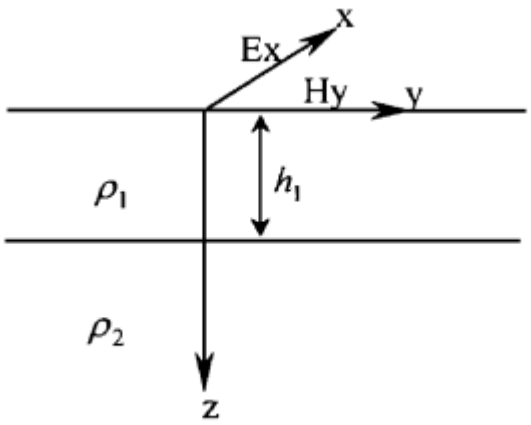


图 2.2　二层介质模型

在如图 2.2 所示的二层介质情况下，设第一层的电阻率和厚度分别为 ρ_1 和 h_1，第二层的电阻率为 ρ_2。根据(2.17)和(2.19)式，第一层和第二层中的电场强度分别为（略去时间因子 $e^{-i\omega t}$）：

$$E_x^{(1)} = A_1 e^{ik_1 z} + B_1 e^{-ik_1 z} \qquad (0 \le z \le h_1) \tag{2.36}$$

$$E_x^{(2)} = A_2 e^{ik_2 z} \qquad (z \ge h_1) \tag{2.37}$$

这里用上角标表示层位。(2.2)式展成分量形式后为：

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y \text{，即 } H_y = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{2.38}$$

将式(2.36)代入(2.38)得：$H_y^{(1)} = \dfrac{k_1}{\omega\mu}(A_1 e^{ik_1 z} - B_1 e^{-ik_1 z})$ (2.39)

将式(2.37)代入(2.38)得：$H_y^{(2)} = \dfrac{k_2}{\omega\mu} A_2 e^{ik_2 z}$ (2.40)

由电场切线分量连续的条件：$E_x^{(1)}\Big|_{z=h_1} = E_x^{(2)}\Big|_{z=h_1}$，有：

$$A_1 e^{ik_1 h_1} + B_1 e^{-ik_1 h_1} = A_2 e^{ik_2 h_1} \tag{2.41}$$

由磁场切线分量连续的条件：$H_y^{(1)}\Big|_{z=h_1} = H_y^{(2)}\Big|_{z=h_1}$，有：

$$\frac{k_1}{\omega\mu}(A_1 e^{ik_1 h_1} - B_1 e^{-ik_1 h_1}) = \frac{k_2}{\omega\mu} A_2 e^{ik_2 h_1}$$

即

$$\frac{k_1}{k_2}(A_1 e^{ik_1 h_1} - B_1 e^{-ik_1 h_1}) = A_2 e^{ik_2 h_1} \tag{2.42}$$

由(2.41)和(2.42)得：

$$k_2(A_1e^{ik_1h_1}+B_1e^{-ik_1h_1})=k_1(A_1e^{ik_1h_1}-B_1e^{-ik_1h_1})$$

从上式解出：

$$B_1=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{i2k_1h_1}A_1 \tag{2.43}$$

为书写简便，取 $K_{12}=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}=\frac{1-k_2/k_1}{1+k_2/k_1}=\frac{1-\sqrt{\rho_1/\rho_2}}{1+\sqrt{\rho_1/\rho_2}}$ (2.44)

K_{12} 是第一层与第二层界面的反射系数。所以(2.43)式可写为：

$$B_1=K_{12}e^{i2k_1h_1}A_1 \tag{2.45}$$

将(2.45)代入(2.36)和(2.39)式，得到第一层电磁场水平分量表达式为：

$$E_x^{(1)}=(e^{ik_1z}+K_{12}e^{i2k_1h_1}e^{-ik_1z})A_1 \tag{2.46}$$

$$H_y^{(1)}=\frac{k_1}{\omega\mu}(e^{ik_1z}-K_{12}e^{i2k_1h_1}e^{-ik_1z})A_1 \tag{2.47}$$

在地面 z=0 处，上二式简化成：

$$E_x^{(1)}(0)=(1+K_{12}e^{i2k_1h_1})A_1 \tag{2.48}$$

$$H_y^{(1)}(0)=\frac{k_1}{\omega\mu}(1-K_{12}e^{i2k_1h_1})A_1 \tag{2.49}$$

这样地面阻抗可写成：

$$Z_2(0)=Z_{xy}=\frac{E_x^{(1)}(0)}{H_y^{(1)}(0)}=Z_{01}\frac{1+K_{12}e^{i2k_1h_1}}{1-K_{12}e^{i2k_1h_1}} \tag{2.50}$$

$Z_2(0)$ 表示地面的阻抗，下角标 2 表示地电模型的层数，括号中的 0 表示地面。$Z_{01}=\frac{\omega\mu}{k_1}$ 表示第一层介质的特征阻抗，即第一层扩展到整个下半空间时的地面阻抗值。

二层介质的阻抗也可以写成另外的形式，(2.44)式代入(2.50)式，有：

$$Z_2(0)=Z_{01}\frac{k_1(1+e^{i2k_1h_1})+k_2(1-e^{i2k_1h_1})}{k_1(1-e^{i2k_1h_1})+k_2(1+e^{i2k_1h_1})} \tag{2.51}$$

分子分母各项都乘以 $\frac{\omega\mu}{k_1k_2}$ 后得到：

$$Z_2(0)=Z_{01}\frac{Z_{02}(1+e^{i2k_1h_1})+Z_{01}(1-e^{i2k_1h_1})}{Z_{02}(1-e^{i2k_1h_1})+Z_{01}(1+e^{i2k_1h_1})} \tag{2.52}$$

(2.51)式上下同除以 $k_2(1-e^{i2k_1h_1})$ 后可以整理成：

$$Z_2(0)=Z_{01}\frac{\frac{k_1}{k_2}\frac{(1+e^{i2k_1h_1})}{(1-e^{i2k_1h_1})}+1}{\frac{k_1}{k_2}+\frac{(1+e^{i2k_1h_1})}{(1-e^{i2k_1h_1})}}=Z_{01}\frac{1-\frac{k_1}{k_2}\frac{(e^{i2k_1h_1}+1)}{(e^{i2k_1h_1}-1)}}{\frac{k_1}{k_2}-\frac{(e^{i2k_1h_1}+1)}{(e^{i2k_1h_1}-1)}} \tag{2.53}$$

由于 $$\frac{e^{i2k_1h_1}+1}{e^{i2k_1h_1}-1}=cth(ik_1h_1)=\frac{1}{th(ik_1h_1)} \tag{2.54}$$

其中 $cth(x)$ 和 $th(x)$ 分别为 x 的双曲余切和双曲正切函数。所以(2.53)式可写成：

$$Z_2(0)=Z_{01}\frac{1-\frac{k_1}{k_2}cth(ik_1h_1)}{\frac{k_1}{k_2}-cth(ik_1h_1)} \tag{2.55}$$

比值 $\frac{k_1}{k_2}$ 可写成：$\frac{k_1}{k_2}=cth[cth^{-1}(\frac{k_1}{k_2})]$，所以由式(2.55)可得到：

$$\frac{Z_2(0)}{Z_{01}}=\frac{1-cth[cth^{-1}(\frac{k_1}{k_2})]\cdot cth(ik_1h_1)}{cth[cth^{-1}(\frac{k_1}{k_2})]-cth(ik_1h_1)} \tag{2.56}$$

利用双曲三角函数恒等式：$cth(x-y)=\frac{1-cth(x)cth(y)}{cth(x)-cth(y)}$ (2.57)

(2.56)式可写成：

$$\frac{Z_2(0)}{Z_{01}}=cth[cth^{-1}(\frac{k_1}{k_2})-ik_1h_1]=-cth[ik_1h_1-cth^{-1}(\frac{k_1}{k_2})] \tag{2.58}$$

或 $$Z_2(0)=Z_{01}\cdot cth[-ik_1h_1+cth^{-1}\sqrt{\rho_2/\rho_1}] \qquad (\rho_2>\rho_1) \tag{2.59}$$

由于实自变量的双曲反余切 $cth^{-1}(x)$ 的定义域是 x>1，所以上式只适用于 $\rho_2>\rho_1$ 的情况。

当 $\rho_2<\rho_1$ 时，需采用双曲反正切 $th^{-1}(x)$ 的形式，将(2.55)式上下同乘以 $\frac{k_2}{cth(ik_1h_1)}$ 后得到：

$$Z_2(0)=Z_{01}\frac{k_2th(ik_1h_1)-k_1}{k_1th(ik_1h_1)-k_2} \tag{2.60}$$

将上式同除以 k_2，并利用 $\frac{k_1}{k_2}=th[th^{-1}(\frac{k_1}{k_2})]$，得到：

$$\frac{Z_2(0)}{Z_{01}}=-\frac{th(ik_1h_1)-th[th^{-1}(\frac{k_1}{k_2})]}{1-th[th^{-1}(\frac{k_1}{k_2})]\cdot th(ik_1h_1)} \tag{2.61}$$

再利用双曲三角函数恒等式：$th(x-y)=\frac{th(x)-th(y)}{1-th(x)\cdot th(y)}$，(2.61)式变为：

$$\frac{Z_2(0)}{Z_{01}} = -th[ik_1h_1 - th^{-1}(\frac{k_1}{k_2})] = th[-ik_1h_1 + th^{-1}\sqrt{\rho_2/\rho_1}] \quad (\rho_2 < \rho_1) \quad (2.62)$$

下面讨论几种特殊情况下的阻抗的性质：

1．首先考虑高频时的性质，当 $f \to \infty$ 时，$k_1 \to \infty$，所以 $e^{i2k_1h_1} \to 0$，于是由(2.50)式看出：$Z_2(0) \to Z_{01}$，这就是说，在高频时二层介质的地面阻抗接近于第一层的地面阻抗，第二层影响很小。

2．再看低频端（ρ_2 为一般情况），当 $f \to 0$ 时，$k_1 \to 0$，所以 $e^{i2k_1h_1} \to 1$，于是由(2.50)式得到：

$$Z_2(0) = Z_{01}\frac{1+K_{12}}{1-K_{12}} = Z_{01}\frac{k_1+k_2+k_1-k_2}{k_1+k_2-k_1+k_2} = \frac{\omega\mu}{k_1}\frac{k_1}{k_2} = \frac{\omega\mu}{k_2} = Z_{02}$$

这时，第一层的影响相对变小，所以尽管测量是在第一层的表面上进行的，但地面阻抗主要由下面一层的电性来决定。地面阻抗的渐近性质证实了大地电磁测深方法的工作原理是正确的。即随着工作频率的降低勘探深度会逐渐增加，因而在地面上测量到的不同频率的阻抗值可以用来获取地下介质电阻率随深度变化的信息。

3．高阻基底低频情况下的性质，当 $\rho_2 >> \rho_1$ 时，$K_{12} \approx 1$。我们研究低频端的渐近性质，这时 $|i2k_1h_1| << 1$，于是(2.50)式中的指数函数可展成台劳级数，取前两项得：

$$e^{i2k_1h_1} \approx 1 + i2k_1h_1$$

将上式和 $K_{12} = 1$ 代入(2.50)式，得到：

$$Z_2(0) = \frac{\omega\mu}{k_1}\frac{1+1+i2k_1h_1}{1-1-i2k_1h_1} = \frac{\omega\mu}{k_1}\frac{1+ik_1h_1}{-ik_1h_1}$$

$$= -\frac{\omega\mu}{k_1}\frac{1}{ik_1h_1} = -\frac{\omega\mu}{ii\omega\mu\sigma_1h_1} = \frac{1}{\sigma_1h_1} = \frac{1}{s_1} \quad (2.63)$$

其中 $s_1 = \sigma_1h_1$ 为第一层的纵向电导。

工作频率一旦落入(2.63)式成立的区间后，阻抗具有下列三个特点：(1)只与第一层的纵向电导有关，而不能单独地反映出这两个参数 $(\sigma_1$和$h_1)$；(2)是一个常数，不随频率变化；(3)阻抗的相位为零。

4．良导基底低频情况下的性质。这时 $\rho_2 << \rho_1, K_{12} = -1$，式(2.50)简化成：

$$Z_2(0) = Z_{01}\frac{1-e^{i2k_1h_1}}{1+e^{i2k_1h_1}}$$

在低频端，$|i2k_1h_1| << 1$，类似前述，指数函数展成台劳级数，并取前两项，代入上式得到：

$$Z_2(0) = Z_{01}\frac{1-(1+i2k_1h_1)}{1+(1+i2k_1h_1)} = -Z_{01}\cdot ik_1h_1$$

$$= -\frac{\omega\mu}{k_1}\cdot ik_1h_1 = -i\omega\mu h_1 = 8\pi^2 10^{-7}\frac{h_1}{T}e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad (2.64)$$

或写成： $$\left|Z_2(0)\right| = 8\pi^2\cdot 10^{-7}\frac{h_1}{T}$$

$$Arg[Z_2(0)] = -\frac{\pi}{2}$$

由此看出，在低阻基底低频时，地面阻抗与第一层的厚度成正比，而与 ρ_1 无关，与信号周期 T 成反比。

5. 阻抗值与深度的关系

由式(2.46)和(2.47)可得到第一层中任意深度 z 处的阻抗为：

$$Z_2(z) = Z_{01}\frac{1+K_{12}e^{i2k_1(h_1-z)}}{1-K_{12}e^{i2k_1(h_1-z)}} \qquad (2.65)$$

上式同(2.50)比较可以看出，第一层深度 z 处的阻抗可看成是第一层厚度减小为 $h = h_1 - z$，而 ρ_1，ρ_2 不变时的二层地电断面的阻抗，也就是说，深度 z 处的阻抗与地面到 z 处的介质无关，只与 z 以下的介质有关。当 $z = h_1$ 时，也就是说第一层底部处（即第二层顶面处）的阻抗，与整个第一层的介质无关，只与第二层介质有关，等于第二层顶面处的阻抗值 Z_{02},这与界面处阻抗连续的条件是一致的。

上述讨论在海上大地电磁方法中具有特殊意义，海上大地电磁方法是在海底进行观测，因而得到的阻抗值只与海底以下的电性有关，而与海水层的电性及厚度无关。

§2.4 N 层介质模型地面阻抗

由于是多层介质（图 2.3），因此除最底层无反射波外，以上各层均有反射波，所以方程(2.15)的解除最底层外均有 2 项：

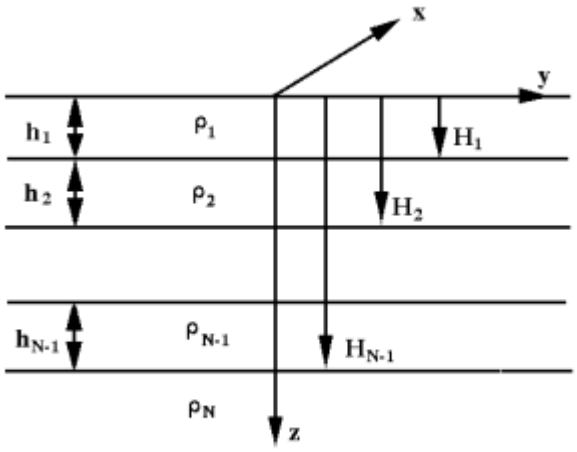


图 2.3 N 层介质模型

$$E_x = (Ae^{ikz} + Be^{-ikz})e^{-i\omega t} \tag{2.66}$$

在第一层中有：$E_x^{(1)} = (A_1 e^{ik_1 z} + B_1 e^{-ik_1 z})e^{-i\omega t}$ (2.67)

由(2.2)式得到：$\frac{\partial E_x^{(1)}}{\partial z} = i\omega\mu H_y^{(1)}$ (2.68)

(2.67)式对 z 求导数得：

$$\frac{\partial E_x^{(1)}}{\partial z} = ik_1(A_1 e^{ik_1 z} - B_1 e^{-ik_1 z}) \tag{2.69}$$

由(2.68)和(2.69)有：

$$H_y^{(1)} = \frac{k_1}{\omega\mu}(A_1 e^{ik_1 z} - B_1 e^{-ik_1 z}) \tag{2.70}$$

(2.67)除以(2.70)得：

$$Z_N^{(1)}(z) = \frac{E_x^{(1)}}{H_y^{(1)}} = \frac{\omega\mu}{k_1}\frac{A_1 e^{ik_1 z} + B_1 e^{-ik_1 z}}{A_1 e^{ik_1 z} - B_1 e^{-ik_1 z}} \tag{2.71}$$

分子分母同除以 $A_1 e^{ik_1 z}$ 得：

$$Z_N^{(1)}(z) = \frac{\omega\mu}{k_1}\frac{1 + \frac{B_1}{A_1}e^{-i2k_1 z}}{1 - \frac{B_1}{A_1}e^{-i2k_1 z}} \tag{2.72}$$

利用恒等式：$\frac{B_1}{A_1} = e^{\ln(\frac{B_1}{A_1})}$,(2.72)式变为：

$$Z_N^{(1)}(z) = \frac{\omega\mu}{k_1}\frac{1 + e^{-2(ik_1 z - \frac{1}{2}\ln\frac{B_1}{A_1})}}{1 - e^{-2(ik_1 z - \frac{1}{2}\ln\frac{B_1}{A_1})}} \tag{2.73}$$

利用双曲余切定义公式：$cth(x) = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$，并令 $x = ik_1 z - \frac{1}{2}\ln\frac{B_1}{A_1}$，(2.73)式变为：

$$Z_N^{(1)}(z) = \frac{\omega\mu}{k_1} cth(ik_1 z - \frac{1}{2}\ln\frac{B_1}{A_1}) \tag{2.74}$$

第一层中深度为 z_1 和 z_2 处的阻抗分别为：

$$Z_N^{(1)}(z_1) = \frac{\omega\mu}{k_1} cth(ik_1 z_1 - \frac{1}{2}\ln\frac{B_1}{A_1}) \tag{2.75}$$

$$Z_N^{(1)}(z_2) = \frac{\omega\mu}{k_1} cth(ik_1 z_2 - \frac{1}{2}\ln\frac{B_1}{A_1}) \tag{2.76}$$

由(2.76)式有：$cth(ik_1z_2-\frac{1}{2}\ln\frac{B_1}{A_1})=\frac{k_1}{\omega\mu}Z_N^{(1)}(z_2)$

从而有：$$\frac{1}{2}\ln\frac{B_1}{A_1}=ik_1z_2-cth^{-1}[\frac{k_1}{\omega\mu}Z_N^{(1)}(z_2)] \tag{2.77}$$

将(2.77)代入(2.75)得：

$$Z_N^{(1)}(z_1)=\frac{\omega\mu}{k_1}cth[ik_1(z_1-z_2)+cth^{-1}(\frac{k_1}{\omega\mu}Z_N^{(1)}(z_2))]$$

令 $z_1=0$（地面），$z_2=H_1$（第一层底面），则 $z_1-z_2=-H_1=-h_1$，于是地面阻抗为：$$Z_N^{(1)}(0)=\frac{\omega\mu}{k_1}cth[-ik_1h_1+cth^{-1}(\frac{k_1}{\omega\mu}Z_N^{(1)}(H_1))] \tag{2.78}$$

上式表明第一层表面的阻抗可用第一层底面的阻抗及第一层的 k_1，h_1 来确定。同理，第二层中的阻抗也有类似的关系：

$$Z_N^{(2)}(H_1)=\frac{\omega\mu}{k_2}cth[-ik_2h_2+cth^{-1}(\frac{k_2}{\omega\mu}Z_N^{(2)}(H_2))] \tag{2.79}$$

因为界面处的阻抗是连续的，即：$Z_N^{(1)}(H_1)=Z_N^{(2)}(H_1)$，所以将(2.79)代入(2.78)得：

$$Z_N^{(1)}(0)=\frac{\omega\mu}{k_1}cth\{-ik_1h_1+cth^{-1}[\frac{k_1}{k_2}cth[-ik_2h_2+cth^{-1}(\frac{k_2}{\omega\mu}Z_N^{(2)}(H_2))]]\} \tag{2.80}$$

依此类推，直到 N 层，最后得到：

$$\begin{aligned}Z_N^{(1)}(0)=\frac{\omega\mu}{k_1}cth\{-ik_1h_1+cth^{-1}[\frac{k_1}{k_2}cth[-ik_2h_2+cth^{-1}(\frac{k_2}{k_3}cth[-ik_3h_3+\\ \cdots cth^{-1}(\frac{k_{N-2}}{k_{N-1}}cth(-ik_{N-1}h_{N-1}+cth^{-1}\frac{k_{N-1}}{k_N}))])]]\}\end{aligned} \tag{2.81}$$

注意，上式最后一项似乎应为：$cth^{-1}(\frac{k_{N-1}}{\omega\mu}Z_N^{(N)})$，但最底层为无限厚的均匀介质，其阻抗为 $Z_N^{(N)}=\frac{\omega\mu}{k_N}$，所以，$cth^{-1}(\frac{k_{N-1}}{\omega\mu}Z_N^{(N)})=cth^{-1}\frac{k_{N-1}}{k_N}$

上述公式适用于 $\frac{k_{N-1}}{k_N}>1$ 的情况，当 $\frac{k_{N-1}}{k_N}<1$ 时，应采用双曲正切形式的公式。

N 层适用于任意层，也就是说，(2.81)式对一层（均匀半空间）来说，应与公式(2.25)一致；对二层来说，应与公式(2.59)一致。事实上，对一层来说，令(2.81)式中的 $h_1\to\infty$，则(2.81)式中仅保留第一项，忽略第二及以后的项，又由于当 $x\to\infty$ 时，$cth(x)=1$，所以有：$Z_1^{(1)}(0)=\frac{\omega\mu}{k_1}$，此时与一层（均匀半空间）情况推导的公式(2.25)一致。对二层来说，令(2.81)式中的 $h_2\to\infty$，则(2.81)式中仅保留前两项，忽略第三及以后的

项，又由于当 $x \to \infty$ 时，$cth(x) = 1$，所以有：$Z_2^{(1)}(0) = \frac{\omega\mu}{k_1} cth[-ik_1h_1 + cth^{-1}\frac{k_1}{k_2}]$，此时与二层情况推导的公式(2.59)一致。所以(2.81)式是更普遍的公式，以前的一层二层的公式只不过是(2.81)的特例。

下面讨论 N 层介质地面阻抗的几种极限情况。

1. 高频。$\omega \to \infty$，$\mathrm{Re}(-ik_jh_j) \to \infty$，$-ik_jh_j + cth^{-1}\frac{k_j}{k_{j+1}} \to -ik_jh_j$

$cth(-ik_jh_j) \to 1$，其中的 $j = 1, 2, \cdots N-1$，于是由式(2.81)得到高频时阻抗渐近值为：

$$Z_x^{(1)}(0) \to \frac{\omega\mu}{k_1} = Z_{01} \tag{2.82}$$

即高频时地面阻抗趋于第一层的特征阻抗，与底层的电性无关。

2. 低频。$\omega \to 0$，$\left|-ik_jh_j\right| << 1$，所以在(2.81)式中忽略 $-ik_jh_j$ 得到：

$$\begin{aligned} Z_N^{(1)}(0) &= \frac{\omega\mu}{k_1} cth\, cth^{-1}(\frac{k_1}{k_2} cth\, cth^{-1}\frac{k_2}{k_3}\cdots\frac{k_{N-1}}{k_N}) \\ &= \frac{\omega\mu}{k_1}\frac{k_1}{k_2}\frac{k_2}{k_3}\cdots\frac{k_{N-1}}{k_N} = \frac{\omega\mu}{k_N} = Z_{0N} \end{aligned} \tag{2.83}$$

即低频时地面阻抗趋于最底层的特征阻抗，与底层的电性有关。这又可分两种情况进行讨论：

(1).高阻基底。经过推导[ ]可得：

$$Z_N^{(1)}(0) = \frac{1}{\sigma_1h_1 + \sigma_2h_2 + \cdots + \sigma_{N-1}h_{N-1}} = \frac{1}{s} \tag{2.84}$$

由上式可见，这时地面阻抗的低频渐近公式是一个不随频率变化（低频范围内）的常数，其数值等于高阻基底以上各层纵向电导之和的倒数。

(2).良导基底。经过推导可得：

$$Z_N^{(1)}(0) = -i\omega\mu(h_1 + h_2 + \cdots + h_{N-1}) = -i\omega\mu H_{N-1} \tag{2.85}$$

这种情况下地面阻抗与电磁场变化的频率及良导基底以上各层的总厚度成正比。

第三章　视电阻率和相位曲线

在第二章公式(2.35)中已指出计算视电阻率的公式：$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu}|Z|^2$。在一维情况下，阻抗 Z 可由公式(2.81)来计算：

$$\begin{aligned} Z_N^{(1)}(0) &= \frac{\omega\mu}{k_1} cth\{-ik_1h_1 + cth^{-1}[\frac{k_1}{k_2} cth[-ik_2h_2 + cth^{-1}(\frac{k_2}{k_3} cth[-ik_3h_3 + \\ &\quad \cdots cth^{-1}(\frac{k_{N-2}}{k_{N-1}} cth(-ik_{N-1}h_{N-1} + cth^{-1}\frac{k_{N-1}}{k_N}))])]]\} \\ &= Z_{01}\cdot R_N(0) \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，$R_N(0) = cth\{-ik_1h_1 + cth^{-1}[\frac{k_1}{k_2} cth[-ik_2h_2 + cth^{-1}(\frac{k_2}{k_3} cth[-ik_3h_3$

$$\cdots cth^{-1}(\frac{k_{N-2}}{k_{N-1}} cth(-ik_{N-1}h_{N-1} + cth^{-1}\frac{k_{N-1}}{k_N}))])]]\} \tag{3.2}$$

称为变换阻抗。所以计算视电阻率的公式可写成：

$$\rho_a = \frac{|Z_{01}|^2\cdot|R_N(0)|^2}{\omega\mu} = \rho_1\cdot|R_N(0)|^2 \tag{3.3}$$

对于均匀半空间，$h_1\to\infty$，在(3.2)中只取第一项，$cth(-ik_1h_1)\to 1$，$R_N(0)=1$，所以由(3.3)知　　$\rho_a = \rho_1$

此式说明，在均匀半空间情况下，所求出的视电阻率就是真电阻率，是一个常数，不随频率的变化而变化。(3.3)式也可写成：

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = |R_N(0)|^2 = \frac{1}{|Z_{01}|^2}|Z_N(0)|^2$$

量板上的理论曲线都是以 ρ_1 作为单位，按上式进行计算的。

视电阻率 ρ_a 仅仅利用了阻抗的幅值（或模）。大地电磁测深中另一个地球响应函数是阻抗的相位，也就是地面上电场水平分量和与之垂直的磁场水平分量之间的相位差，计算阻抗相位的公式是：

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[Z_N(0)]}{\mathrm{Re}[Z_N(0)]} \tag{3.4}$$

它也是频率和地电断面参数的函数，也反应了有关地电断面的性质。

§3.1　二层介质的视电阻率

一　二层介质的视电阻率公式及渐近性质

由(2.59)式和(3.3)式可得出二层介质的视电阻率公式为：

$$\rho_a = \rho_1\left|cth(-ik_1h_1 + cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}})\right|^2 \qquad (\rho_2 > \rho_1) \tag{3.5}$$

或　　$\rho_a = \rho_1 \left| th(-ik_1h_1 + th^{-1}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}) \right|^2$　　$(\rho_2 < \rho_1)$　　(3.6)

下面分几种情况进行讨论。

1．　高频部分

当$\omega \to \infty$时，$|ik_1h_1| \to \infty$，即在图形左部，因$cth(\infty) \to 1, th(\infty) \to 1$，所以$\rho_a = \rho_1 \cdot 1 = \rho_1$，即高频渐近线趋于第一层的电阻率。

下面再讨论ρ_a是如何趋于ρ_1的。

根据(2.12 式和(2.23)式，可以得到k与λ的关系：

$$k = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1+i)\frac{2\pi}{\sqrt{\omega\mu\sigma/2}} = (1+i)\frac{2\pi}{\lambda} \tag{3.7}$$

上式两边乘以h_1得：$k_1h_1 = (1+i)\frac{2\pi h_1}{\lambda_1}$　　(3.8)

取　$\frac{2\pi h_1}{\lambda_1} = x$，$cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = y$，则　$k_1h_1 = (1+i)x$，所以二层介质的变换阻抗可写成：

$$\begin{aligned} R_2(0) &= cth(-ik_1h_1 + cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}) \\ &= cth[-i(1+i)x + y] = cth(x + y - ix) \\ &\quad 利用\ cth(\theta-\varphi) = \frac{cth\theta \cdot cth\varphi - 1}{cth\varphi - cth\theta} \\ &= \frac{cth(x+y)\cdot cth(ix) - 1}{cth(ix) - cth(x+y)} \\ &\quad 再利用\ cth(ix) = -ictg(x) \\ &= \frac{cth(x+y)\cdot(-ictg(x)) - 1}{-ictg(x) - cth(x+y)} = \frac{1 + icth(x+y)\cdot ctg(x)}{ictg(x) + cth(x+y)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

为了分开实部及虚部，分子分母同乘以$[-ictg(x) + cth(x+y)]$，(3.9)变为：

$$\begin{aligned} R_2(0) &= \frac{[1 + icth(x+y)\cdot ctg(x)][-ictg(x) + cth(x+y)]}{ctg^2(x) + cth^2(x+y)} \\ &= \frac{cth(x+y)(1+ctg^2(x)) + i[cth^2(x+y)ctg(x) - ctg(x)]}{ctg^2(x) + cth^2(x+y)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

所以相对视电阻率为：

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = |R_2(0)|^2 = \frac{1 + cth^2(x+y)ctg^2(x)}{ctg^2(x) + cth^2(x+y)} \tag{3.11}$$

$R_2(0)$的相位公式为：

$$Arg[R_2(0)] = tg^{-1}\frac{\mathrm{Im}[R_2(0)]}{\mathrm{Re}[R_2(0)]} = \frac{ctg(x)[cth^2(x+y)-1]}{cth(x+y)[ctg^2(x)+1]} \tag{3.12}$$

再来分析公式(3.11)，当 $x = \frac{2\pi h_1}{\lambda_1} \to \infty$，即 $\frac{\lambda_1}{h_1} \to 0$，也即在曲线左部，由于 $cth(\infty) \to 1$，所以(3.11)式变为：$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1+1\cdot ctg^2(x)}{ctg^2(x)+1} = 1$，说明相对视电阻率曲线左边趋于 1。

另外当 $ctg^2(x) = ctg^2(\frac{2\pi h_1}{\lambda_1}) = 1$ 时，即 $ctg(\frac{2\pi h_1}{\lambda_1}) = \pm 1$ 时，有

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = \frac{1+cth^2(x+y)\cdot 1}{1+cth^2(x+y)} = 1$$

也就是当 $\frac{2\pi h_1}{\lambda_1} = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} = \frac{8}{1+2n}$　　$n = 0, 1, 2, \cdots$ (3.13)

即 $\frac{\lambda_1}{h_1} = 8, \frac{8}{3}, \frac{8}{5}, \frac{8}{7}, \cdots$，时，就有 $\rho_a = \rho_1$

因此我们发现视电阻率曲线与 $\rho_a = \rho_1$ 有一系列交点，这些点的横坐标与第二层介质的电阻率无关，所以视电阻率曲线以振荡方式趋近于左支渐近线 ρ_1，但是它们的振幅是比较小的，而且随着频率的增大，振荡变得愈来愈小。

2. 低频部分

当 $\omega \to 0, |k_1 h_1| \to 0$，(3.5)式第一项可忽略，于是有：

$$\rho_a = \rho_1 \left| cth(cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}) \right|^2 = \rho_1 (\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}})^2 = \rho_2$$

这时的视电阻率趋于第二层的电阻率 ρ_2

由(2.55)式，二层介质的地面阻抗公式可写成：

$$Z_2(0) = Z_{01}\frac{k_2 - k_1 cth(ik_1h_1)}{k_1 - k_2 cth(ik_1h_1)} \tag{3.14}$$

随着频率的减小，ik_1h_1 越来越小，可利用近似公式：$\underset{x\to 0}{cth(x)} \to \frac{1}{x}$，(3.14)式变为：

$$\begin{aligned} Z_2(0) &= Z_{01}\frac{k_2 - k_1\frac{1}{ik_1h_1}}{k_1 - k_2\frac{1}{ik_1h_1}} = \frac{\omega\mu}{k_1}\frac{ik_1h_1k_2 - k_1}{k_1ik_1h_1 - k_2} \\ &= \omega\mu\frac{ik_2h_1 - 1}{ik_1^2h_1 - k_2} = \omega\mu\frac{1 - ik_2h_1}{k_2 - ik_1^2h_1} \end{aligned} \tag{3.15}$$

下面分四种情况对上式作进一步的分析。

(1) 第二层为高阻，但有限

由于是低频，满足$|k_1h_1|<<1$,又由于$\rho_2>\rho_1$ 因而有$|k_2|<|k_1|$ ， $|k_2h_1|<|k_1h_1|$，从而有 $|k_2h_1|<<1$ ，所以可忽略(3.15)式中分子的第二项，从而得到；

$$Z_2(0)=\omega\mu\frac{1}{k_2-ik_1^2h_1}=\omega\mu\frac{1}{\sqrt{i\omega\mu\sigma_2}-i\cdot i\omega\mu\sigma_1h_1}$$

$$=\frac{1}{\sigma_1h_1+\sqrt{i\frac{\sigma_2}{\omega\mu}}}=\frac{1}{s_1+\sqrt{\frac{\sigma_2}{\omega\mu}}e^{i\frac{\pi}{4}}} \tag{3.16}$$

$$\rho_a=\frac{1}{\omega\mu}|Z_2(0)|^2=\frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{1}{s_1+\sqrt{\frac{1}{\omega\mu\rho_2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right|^2 \tag{3.17}$$

由上式可见，在低频范围内，视电阻率与第一层的纵向电导s_1 和第二层的电阻率ρ_2以及频率有关。还可看出，随着频率的减小（或周期的增大），分母中第二项起的作用越来越大，当第一项可忽略时，电阻率就趋于ρ_2了。但如果s_1和ρ_2较大时，即满足条件 $s_1>>\sqrt{\frac{1}{\omega\mu\rho_2}}$ 时，$\rho_a\to\frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{1}{s_1}\right|^2$ ，这时视电阻率与频率成反比，或者说与周期成正比，这个过渡区间称为 S 区间。显然s_1和ρ_2越小，这个不等式越不易满足，S 区间越来越窄。

(2) 第二层为绝缘体

因$\sigma_2\to0$，(3.16)式简化为$Z_2(0)=\frac{1}{s_1}$ ，这时地面阻抗为实常数$\frac{1}{s_1}$，不随频率变化，且相位为 0。在这种情况下，通过测量地面阻抗，只能获得第一层纵向电导s_1这种综合参数的信息，而不能分别地确定σ_1和h_1这两个参数，这时视电阻率为：

$$\rho_a=\frac{1}{\omega\mu}|Z_2(0)|^2=\frac{10^7\cdot T}{8\pi^2}\cdot\frac{1}{s_1^2}=\frac{10^7\cdot T}{8\pi^2}(\frac{\rho_1}{h_1})^2 \tag{3.18}$$

即在基底为绝缘体这种极限情况下，视电阻率曲线的低频渐近线与周期 T 成正比（为斜直线）。见图 3.1 中$\mu_2=\infty$的线。

（3）第二层为良导体，但电阻率大于 0

因低频，有$|ik_1h_1|<<1$ ，$|ik_1^2h_1|<<k_1$ ，又因$\rho_2<\rho_1$ ，$k_1<k_2$，所以有$|ik_1^2h_1|<<k_2$，于是可忽略(3.15)分母中的第二项，得到

$$Z_2(0)=\omega\mu\frac{1-ik_2h_1}{k_2}=\omega\mu(\frac{1}{k_2}-ih_1) \tag{3.19}$$

所以有　　$$\rho_a=\frac{1}{\omega\mu}|Z_2(0)|^2=\omega\mu\left|\frac{1}{k_2}-ih_1\right|^2=\frac{8\pi^2\cdot10^{-7}}{T}\left|\frac{1}{k_2}-ih_1\right|^2 \tag{3.20}$$

由上式看出，当$\left|\frac{1}{k_2}\right|<|ih_1|$，即$\sqrt{\frac{\rho_2}{\omega\mu}}<h_1$，也即$\rho_2<\omega\mu h_1^2$，上式中的第二项起主要作用，这时视电阻率与T成反比，形成一个过渡区间，这个区间称为H区间。显然随着ρ_2的增加和h_1的减小，这个不等式越不易满足，H区间变得越来越窄。由(3.20)式还可看出，频率超过H区间继续减小时，第一项起主要作用，第二项可忽略，$\rho_a=\omega\mu\left|\frac{1}{k_2}\right|^2=\omega\mu\frac{1}{\omega\mu\sigma_2}=\rho_2$，即在低频端曲线趋于$\rho_2$

(4) 第二层为理想良导体

此时，$\rho_2\to 0, k_2\to\infty$，(3.20)式第一项可忽略，得到

$$\rho_a=\omega\mu h_1^2=\frac{8\pi^2\cdot 10^{-7}}{T}h_1^2=(\frac{1}{356}\frac{h_1}{\sqrt{T}})^2 \qquad (3.21)$$

由(3.21)式看出，这时ρ_a与第一层的ρ_1无关，另外ρ_a与T成反比，随T的增加而下降，呈一条下降的斜直线。见图3.1中$\mu_2=0$的线。

二 二层介质上视电阻率曲线的双对数坐标表示

利用(3.8)式，公式(3.5)可以改写成：

$$\rho_a=\rho_1\left|cth[-i(1+i)\frac{2\pi h_1}{\lambda_1}+cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}]\right|^2=\rho_1F(\frac{\lambda_1}{h_1},\mu_2) \qquad (3.22)$$

其中，$\mu_2=\frac{\rho_2}{\rho_1}$，由此看出，二层介质上的视电阻率曲线取决于三个参数，即$\rho_1,\frac{\lambda_1}{h_1},\mu_2$

大地电磁测深曲线一般是画在双对数坐标中，(3.22)式可写成：

$$\log\rho_a=\log\rho_1+\log F[(\log\lambda_1-\log h_1),\mu_2] \qquad (3.23)$$

取$\log\rho_a$为函数（纵坐标），$\log\lambda_1$为自变量（横坐标），μ_2为参变量。ρ_1和h_1的变化都不会改变视电阻率曲线的形状，ρ_1只会使曲线沿垂直方向发生位移，h_1只会使曲线沿水平方向发生位移，从而可以减少曲线的数目。

在计算理论曲线时，取ρ_1和h_1作为单位，或说电阻率用ρ_1来归一，厚度用h_1来归一，(3.23)式变为

$$\log(\frac{\rho_a}{\rho_1})=\log F[\log(\frac{\lambda_1}{h_1}),\mu_2] \qquad (3.24)$$

由(2.23)式知$\lambda_1=2\pi\delta=\sqrt{10\rho_1T}\ (km)$，所以$\frac{\lambda_1}{h_1}=\frac{\sqrt{10\rho_1T}}{h_1}=\sqrt{10T}$，上式变为

$$\log(\frac{\rho_a}{\rho_1})=\log F[\log(\sqrt{10T}),\mu_2] \qquad (3.25)$$

即理论曲线横坐标轴取为$\log(\sqrt{10T})$。

也有人将横坐标轴取为$\log(\sqrt{T})$，这相当于将上述取法的曲线沿水平方向移动

$\log(\sqrt{10})$。还有人将横坐标轴取为$\log(T)$，这相当于将第二种取法的曲线沿水平方向放大了一倍。

理论曲线的参考点取为$\frac{\rho_a}{\rho_1}=1,\frac{\lambda_1}{h_1}=8$。

图 3.1 为二层介质理论视电阻率曲线。

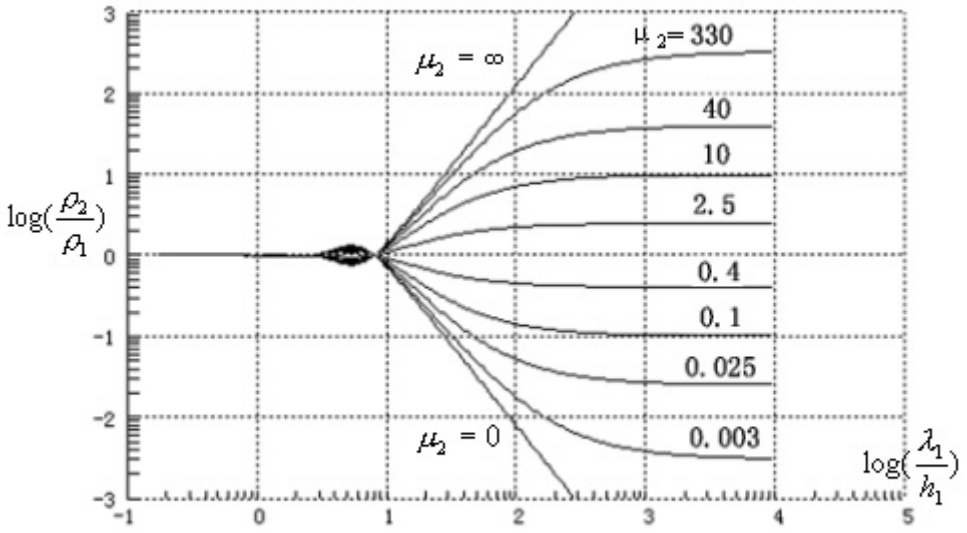


图 3.1　二层介质理论视电阻率曲线

三　二层理论曲线特征总结：

1. 在$\frac{\lambda_1}{h_1}<8$的区间内，ρ_a以振荡方式趋近于ρ_1，第二层的作用很小，仅影响假极值的大小。

2. 当$\rho_2>\rho_1$，在参考点右边，随 T 的增大，ρ_a增大，最后趋于ρ_2，$\mu_2=\frac{\rho_2}{\rho_1}$越大，S 区间越大。

3. 当$\rho_2\to\infty$时，由(3.18)、(2.23)知，$\frac{\rho_a}{\rho_1}=\frac{10^7\cdot T\rho_1}{8\pi^2h_1^2}=\frac{1}{8\pi^2}\frac{\lambda_1^2}{h_1^2}$，两边取对数得：

$$\log(\frac{\rho_a}{\rho_1})=2\cdot\log(\frac{\lambda_1}{h_1})-\log(8\pi^2) \tag{3.26}$$

这时低频渐近线为一上升的斜直线，斜率为 2，交角为$63°26'$，交点横坐标为$\frac{\lambda_1}{h_1}=8.9$。

4. 当$\rho_2<\rho_1$时，在参考点右边，随 T 的增大，曲线单调下降，逐渐趋于ρ_2，ρ_2/ρ_1越大，H 过渡带越小。

5. 当 $\rho_2 \to 0$ 时，由(3.21)知，$\frac{\rho_a}{\rho_1}=\frac{8\pi^2}{10^7\cdot\rho_1 T}h_1^2=\frac{8\pi^2}{(\frac{\lambda_1}{h_1})^2}$，两边取对数得：

$$\log(\frac{\rho_a}{\rho_1})=\log(8\pi^2)-2\cdot\log(\frac{\lambda_1}{h_1}) \tag{3.27}$$

这时低频渐近线为一下降的斜直线，斜率为-2，交角为 $-63°26'$，交点横坐标为 $\frac{\lambda_1}{h_1}=8.9$。

6. μ_2 互为倒数的（如 $\mu_2=2$ 和 $\mu_2=\frac{1}{2}$）曲线上下对称。

证明如下：考虑参数为 $\rho_1'\ \ h_1\ \ \rho_2'$ 和 $\rho_1''\ \ h_1\ \ \rho_2''$，且 $\rho_1''=\frac{1}{\rho_1'}\quad \rho_2''=\frac{1}{\rho_2'}$ 的两种层状介质，因为 $\mu_2'=\frac{\rho_2'}{\rho_1'}\quad \mu_2''=\frac{\rho_2''}{\rho_1''}$，所以 $\mu_2'=\frac{\frac{1}{\rho_2''}}{\frac{1}{\rho_1''}}=\frac{1}{\frac{\rho_2''}{\rho_1''}}=\frac{1}{\mu_2''}$

$$\frac{\rho_a'}{\rho_1'}=\left|cth(-ik_1h_1+cth^{-1}\sqrt{\mu_2'})\right|^2 \tag{3.28}$$

$$\frac{\rho_a''}{\rho_1''}=\left|cth(-ik_1h_1+cth^{-1}\sqrt{\mu_2''})\right|^2 \tag{3.29}$$

利用恒等式 $cth(a+cth^{-1}b)=\frac{1}{cth(a+cth^{-1}\frac{1}{b})}$，(3.29)式变为：

$$\frac{\rho_a''}{\rho_1''}=\frac{1}{\left|cth(-ik_1h_1+cth^{-1}\frac{1}{\sqrt{\mu_2''}})\right|^2}$$

$$=\frac{1}{\left|cth(-ik_1h_1+cth^{-1}\sqrt{\mu_2'})\right|^2}=\frac{1}{\frac{\rho_a'}{\rho_1'}} \tag{3.30}$$

上式两边取对数得：$\log(\frac{\rho_a''}{\rho_1''})=-\log(\frac{\rho_a'}{\rho_1'})$，所以上下对称。

这种性质对于相位曲线也是成立的，而且对任意层数的水平介质也适用。

上面第 1,6 条对于直流电测深不成立。

§3.2　三层介质的视电阻率曲线

一.　三层介质的视电阻率公式

由(2.81)式可得到三层介质地面阻抗为：

$$Z_3(0)=Z_{01}cth\{-ik_1h_1+cth^{-1}[\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}cth(-ik_2h_2+cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}})]\} \tag{3.31}$$

由(3.8)　$k_1h_1=(1+i)\frac{2\pi h_1}{\lambda_1}$，可得到$-ik_1h_1=\frac{2\sqrt{2}\pi}{\lambda_1/h_1}e^{-i\frac{\pi}{4}}$。

同理有$-ik_2h_2=\frac{2\sqrt{2}\pi}{\lambda_2/h_2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$，再定义$\mu_2=\frac{\rho_2}{\rho_1}$, $\mu_3=\frac{\rho_3}{\rho_1}$, $\upsilon_2=\frac{h_2}{h_1}$，

又因$\lambda_2=\lambda_1\sqrt{\mu_2}$，所以$-ik_2h_2=\frac{2\sqrt{2}\pi}{\lambda_1/h_1}\frac{\upsilon_2}{\sqrt{\mu_2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(3.31)式可写成：

$$Z_3(0)=Z_{01}cth\{\frac{2\sqrt{2}\pi}{\lambda_1/h_1}e^{-i\frac{\pi}{4}}+cth^{-1}[\sqrt{\mu_2}cth(\frac{2\sqrt{2}\pi}{\lambda_1/h_1}\frac{\upsilon_2}{\sqrt{\mu_2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}+cth^{-1}\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}})]\}$$

$$=Z_{01}R_3(\mu_2,\mu_3,\upsilon_2,\frac{\lambda_1}{h_1}) \tag{3.32}$$

R_3为三层介质的变换阻抗。所以三层介质的视电阻率为：

$$\rho_a=\frac{1}{\omega\mu}|Z_3(0)|^2=\rho_1\left|R_3(\mu_2,\mu_3,\upsilon_2,\frac{\lambda_1}{h_1})\right|^2$$

或是：　$$\frac{\rho_a}{\rho_1}=\left|R_3(\mu_2,\mu_3,\upsilon_2,\frac{\lambda_1}{h_1}\right|^2 \tag{3.33}$$

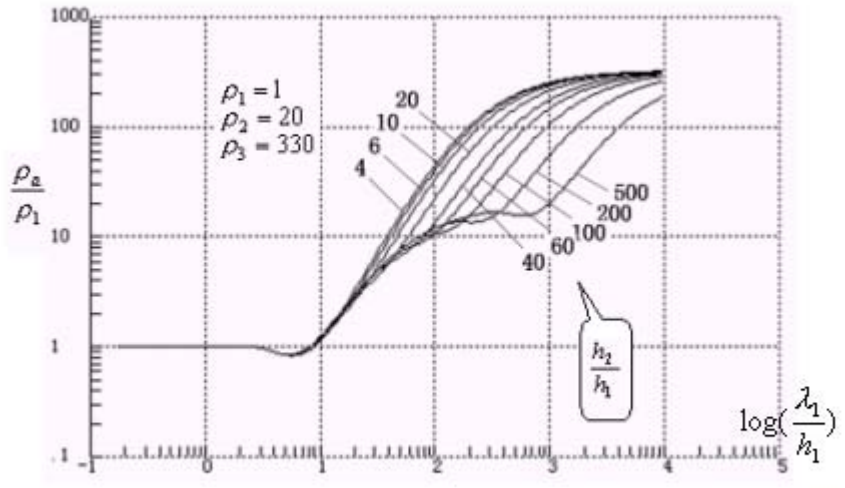


图 3.2　A 型三层介质的视电阻率理论曲线

这里有四个自变量，显然不能在一张量板上画出所有情况的曲线，只能分张画出，将

μ_2，μ_3作为标题，$\frac{\lambda_1}{h_1}$作横轴，υ_2作为参变量。

三层介质视电阻率曲线根据各层电阻率之间的关系可分为四种类型：①当$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$时为A型，②当$\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$时为H型，③当$\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$时为K型，④当$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$时为Q型。图3.2~图3.5分别为A、H、K、Q型视电阻率曲线。

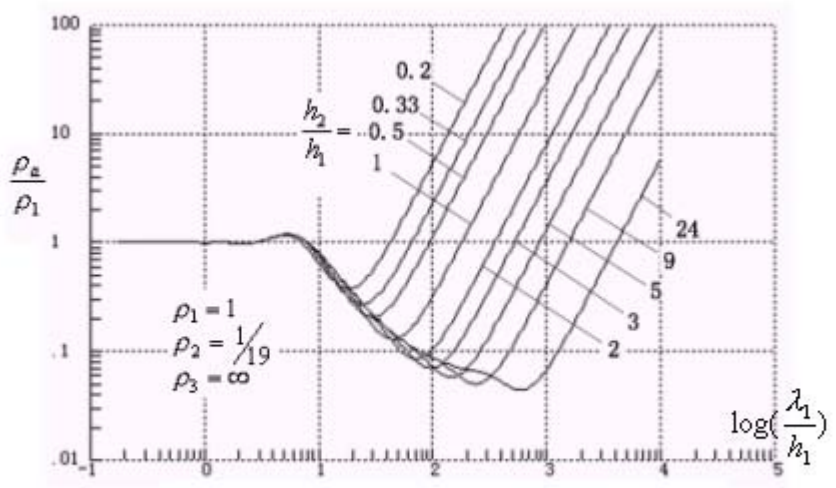


图 3.3　H型三层介质的视电阻率理论曲线

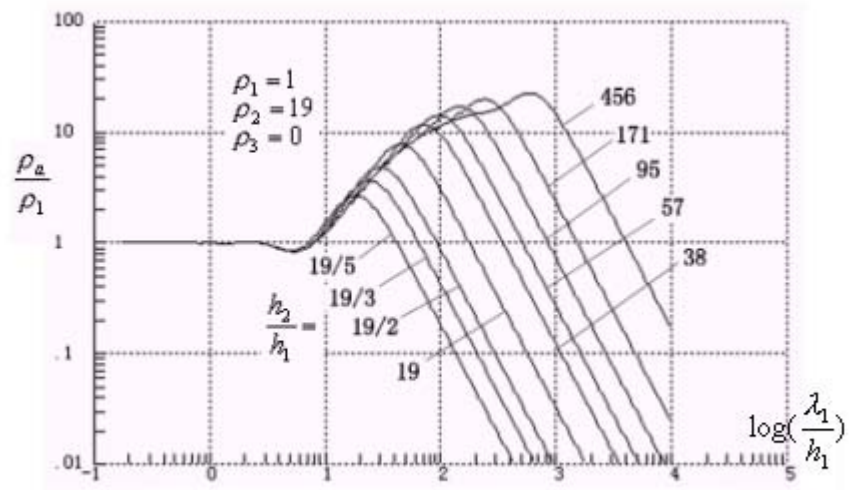


图 3.4　K型三层介质的视电阻率理论曲线

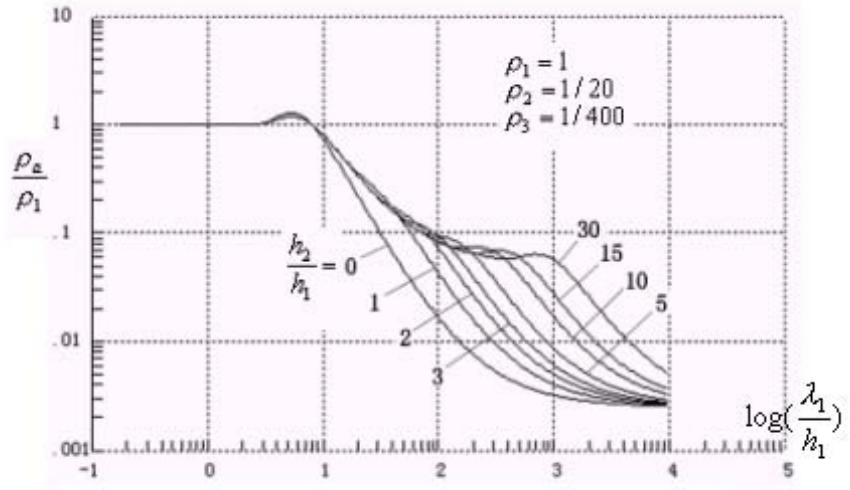


图 3.5　Q 型三层介质的视电阻率理论曲线

二　三层介质视电阻率曲线的渐近性质

先研究**高频情况**，当 $\omega \to \infty$ 时，$|k_1 h_1| >> 1, |k_2 h_2| >> 1$ ，根据 $cth(\infty) \to 1$ ，(3.31)式可化成与二层高频时一样的公式，所以三层高频曲线与二层高频曲线一样，无需重复讨论。

再讨论**低频情况**，这时认为 $|k_1 h_1| << 1, |k_2 h_2| << 1$，根据曲线类型分两种情况讨论

(1) A 型和 H 型曲线。这时 $\left|\frac{k_3}{k_2}\right| < 1$，三层介质地面阻抗公式可化为：

$$Z_3(0) = \frac{\omega\mu}{k_1}\left[\frac{1 - \frac{k_3 + \omega\mu s_2}{k_1} th(ik_1 h_1)}{\frac{k_3 + \omega\mu s_2}{k_1} - th(ik_1 h_1)}\right] \tag{3.34}$$

由于 $|k_1 h_1| < 1$，所以可忽略上式分子中的第二项，再代入 $th(ik_1 h_1) = ik_1 h_1$，上式变为：

$$Z_3(0) = \frac{\omega\mu}{k_1}\frac{1}{\frac{k_3 + \omega\mu s_2}{k_1} - ik_1 h_1} = \frac{\omega\mu}{k_3 + \omega\mu s_2 - ii\omega\mu\sigma_1 h_1}$$

$$= \frac{1}{\frac{k_3}{\omega\mu} + s_2 + \sigma_1 h_1} = \frac{1}{s + \sqrt{\frac{\sigma_3}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}}} \tag{3.35}$$

其中 $s = s_1 + s_2$ ，为上面两层纵向电导之和。

显然上式可以推广到一般的 N 层情况：

$$Z_N(0)=\frac{1}{s+\sqrt{\frac{\sigma_N}{\omega\mu}}e^{i\frac{\pi}{4}}} \tag{3.36}$$

s 为上部 N-1 层的纵向电导之和。

由(3.35)可求得三层 A 型和 H 型低频视电阻率公式为：

$$\rho_a=\frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{1}{s+\sqrt{\frac{\sigma_3}{\omega\mu}}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right|^2 \tag{3.37}$$

当 $s>>\sqrt{\frac{\sigma_3}{\omega\mu}}$ 时，可忽略(3.37)式中分母的第二项，则

$$\rho_a=\frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{1}{s}\right|^2=\frac{10^7\cdot T}{8\pi^2 s^2} \tag{3.38}$$

这就是说，在低频情况下，当 $\rho_3>\rho_2$ 时,即 A 型、H 型，且当 $s>>\sqrt{\sigma_3/\omega\mu}$ 时，视电阻率仅与上面两层的总纵向电导有关，而与其中的单个参数无关。

(2) Q 型和 K 型曲线。这时 $\frac{k_2}{k_3}<1$，再利用 $|k_2h_2|<1$，可求得低频时三层介质上地面阻抗公式为：

$$Z_3(0)=\frac{\omega\mu}{k_1}\frac{k_1(1-ik_3h_2)-k_3th(ik_1h_1)}{k_3-k_1(1-ik_3h_2)th(ik_1h_1)} \tag{3.39}$$

考虑到 $|k_1h_1|<1$，上式中分母上的第二项相对第一项可以忽略，再代入 $th(ik_1h_1)=ik_1h_1$，上式可写成：

$$\begin{aligned}Z_3(0)&=\frac{\omega\mu}{k_1}\frac{k_1(1-ik_3h_2)-k_3ik_1h_1}{k_3}=\omega\mu\frac{1-ik_3(h_2+h_1)}{k_3}\\&=\omega\mu\frac{1-ik_3H}{k_3}=-i\omega\mu H+\frac{\omega\mu}{k_3}\\&=\omega\mu(-iH+\frac{1}{k_3})=\omega\mu(He^{-i\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{k_3})\end{aligned} \tag{3.40}$$

式中 $H=h_1+h_2$，三层 Q 型和 K 型低频视电阻率公式为：

$$\rho_a=\omega\mu\left|He^{-i\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{k_3}\right|^2 \tag{3.41}$$

上式可推广应用于 N 层情况，只不过 H 为上 N-1 层厚度之和。

由(3.40)式可见，在条件 $H>>\frac{1}{|k_3|}$ 成立的频率范围内，忽略(3.40)式中的第二项，地面阻抗为：$Z_3(0)=-i\omega\mu H$，视电阻率为：

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu}\left|Z_3(0)\right|^2 = \omega\mu H^2 = \frac{8\pi^2 \cdot 10^{-7}}{T} H^2 \tag{3.42}$$

这就是说，在低频情况下，当 $\rho_3 < \rho_2$ 时，即 Q 型、K 型，且当 $H >> 1/\left|k_3\right|$ 时，视电阻率仅与上面两层的总厚度 H 有关，而与其中的单个参数无关。

三　三层介质视电阻率曲线的对称性

三层介质视电阻率曲线在一定条件下也有对称性，具体说是 H 型和 K 型有对称性，Q 型和 A 型有对称性。

利用三角函数恒等式：$cthx = \frac{1}{thx}$　，　$cth^{-1}x = th^{-1}\frac{1}{x}$，

及　$th(x + th^{-1}y) = cth(x + cth^{-1}y)$，可得：

$$cth\{-ik_1h_1 + cth^{-1}[\sqrt{\mu_2}\,cth(\frac{2\pi}{\lambda_1/h_1}\frac{\upsilon_2}{\sqrt{\mu_2}}(1+i) + cth^{-1}\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}})]\}$$

$$= \frac{1}{cth\{-ik_1h_1 + cth^{-1}[\sqrt{\mu_2'}\,cth(\frac{2\pi}{\lambda_1/h_1}\frac{\upsilon_2'}{\sqrt{\mu_2'}}(1+i) + cth^{-1}\sqrt{\frac{\mu_3'}{\mu_2'}})]\}} \tag{3.43}$$

由上式看出，对称的条件是：

(1)　第一层厚度相等，即 $h_1' = h_1$

(2)　电阻率互为倒数，即 $\rho_2' = \frac{1}{\rho_2}$，$\rho_3' = \frac{1}{\rho_3}$，$\rho_1' = \frac{1}{\rho_1}$，从而

$$\mu_2' = \frac{1}{\mu_2}，\mu_3' = \frac{1}{\mu_3}$$

(3)　第二层相对厚度对第二层相对电阻率开方之比相等，即 $\frac{\upsilon_2}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\upsilon_2'}{\sqrt{\mu_2'}}$，也就是 $\upsilon_2' = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{\mu_2}}\sqrt{\mu_2'} = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{\mu_2}}\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\upsilon_2}{\mu_2}$，不妨设带 ' 的为 A、K 型曲线的参数，不带 ' 的为 Q、H 型曲线的参数（反过来假设也可得出同样结论），显然 $\mu_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$，所以 $\upsilon_2' > \upsilon_2$，即 A、K 型第二层的厚度大于对称的 Q、H 型第二层的厚度。也就是说，要想产生可对比的响应，高阻的厚度应比低阻的厚度大。或者说，低阻具有较高的灵敏度。

四　三层介质视电阻率曲线的等值性

等值性是指某些地电断面虽然组成它们的地层的参数互不相同，但是对应的视电阻率曲线却在测量误差允许的范围内几乎区别不开。这种现象多出现在地电断面中间有薄层的情况下。

因中间层较薄时有 $\frac{h_2}{h_1}<<1$，再加频率较低时有 $\left|k_2h_2\right|<<1$，于是有 $cth(-ik_2h_2)=-\frac{1}{ik_2h_2}$，所以有

$$\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}cth\left[-ik_2h_2+cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}\right]=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\frac{1+cth(-ik_2h_2)cthcth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}}{cth(-ik_2h_2)+cthcth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\frac{1+\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}cth(-ik_2h_2)}{cth(-ik_2h_2)+\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}}=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\frac{1-\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}\frac{1}{ik_2h_2}}{-\frac{1}{ik_2h_2}+\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\frac{ik_2h_2-\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}}{-1+\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}ik_2h_2}=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\frac{\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}(-1+ik_2h_2\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_3}})}{-1+ik_2h_2\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}}\frac{1-\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_3}}(ik_2h_2)}{1-\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}(ik_2h_2)} \tag{3.44}$$

应用上式，中间有薄层的低频情况下的三层视电阻率公式可写成：

$$\rho_a=\rho_1\left|cth\left\{-ik_1h_1+cth^{-1}\left[\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}cth(-ik_2h_2+cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}})\right]\right\}\right|^2$$

$$=\rho_1\left|cth\left\{-ik_1h_1+cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}}\frac{1-\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_3}}(ik_2h_2)}{1-\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}(ik_2h_2)}\right\}\right|^2 \tag{3.45}$$

下面分两种情况对上式进行讨论。

(1)　在 H 型和 A 型情况下。由于 $\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_3}}<1, h_2$ 很小，所以有 $\left|\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_3}}(ik_2h_2)\right|<<1$，忽略上式分子的第二项，于是有：

$$\rho_a=\rho_1\left|cth\left\{-ik_1h_1+cth^{-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_3}}-\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}(ik_2h_2)}\right\}\right|^2 \tag{3.46}$$

考虑到 $ik_2h_2\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}=ik_2h_2\frac{k_2}{k_1}=-\frac{\omega\mu\sigma_2h_2}{k_1}=-\frac{\omega\mu s_2}{\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}}=i\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}\rho_1s_2=ik_1\rho_1s_2$

所以(3.46)变为：$$\rho_a=\rho_1\left|cth\left\{-ik_1h_1+cth^{-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_3}}-ik_1\rho_1s_2}\right\}\right|^2 \tag{3.47}$$

由上式看出，当 H 型和 A 型地电断面中第二层为薄层时，视电阻率值只和这一层的纵向电导 S_2 有关，在一定范围内改变这一层的电阻率 ρ_2 和厚度 h_2 而保持 S_2 不变时，视电阻率曲线几乎没有什么变化，这称为 **S 等值性**。与直流测深中的等值法则是相同的。

（2）在 K 型和 Q 型情况下。由于 $\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}=\frac{k_2}{k_3}<1$, h_2 又很小，所以有 $\left|\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}ik_2h_2\right|<<1$，忽略(3.45)式中分母的第二项得到：

$$\rho_a=\rho_1\left|cth\left\{-ik_1h_1+cth^{-1}\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}}[1-\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_3}}(ik_2h_2)]\right\}\right|^2$$

$$=\rho_1\left|cth\left\{-ik_1h_1+cth^{-1}(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}}-ik_1h_2)\right\}\right|^2 \tag{3.48}$$

由上式看出，在 K 型和 Q 型地电断面中，当第二层为薄层时，视电阻率曲线只和这一层的厚度 h_2 有关，而与它的电阻率 ρ_2 几乎没有关系，这称为 **H 等值性**。这不同于直流电测深中的情况，在直流电测深中，对 K 型和 Q 型地电断面来说，只要保持横向电阻 $T_2=\rho_2h_2$ 不变，视电阻率曲线就变化很小，以致在观测误差范围内识别不出，这称为 T 等值性。

图 3.6 和图 3.7 分别给出了 S 等值性和 H 等值性的作用范围。图中纵坐标是 $\frac{h_2}{h_1}$，横坐标是 $\frac{\rho_2}{\rho_1}$，等值性作用范围的大小和这两个相对参数有关。该图的使用方法是：对任意给定的 $\rho_2/\rho_1=\frac{1}{32},\frac{1}{16},\frac{1}{8}\cdots$ 值和任意的 h_2/h_1 值找到一个交点，并且通过它划一条直线与等值线（虚线）平行，并与实线相交于两点，所获得的线段，其端点的坐

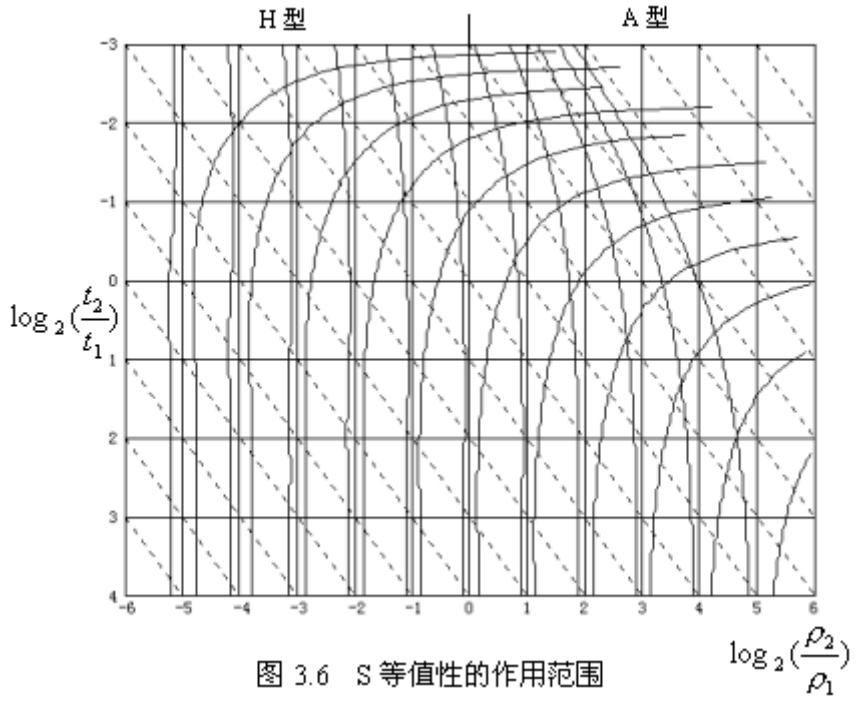


图 3.6　S 等值性的作用范围

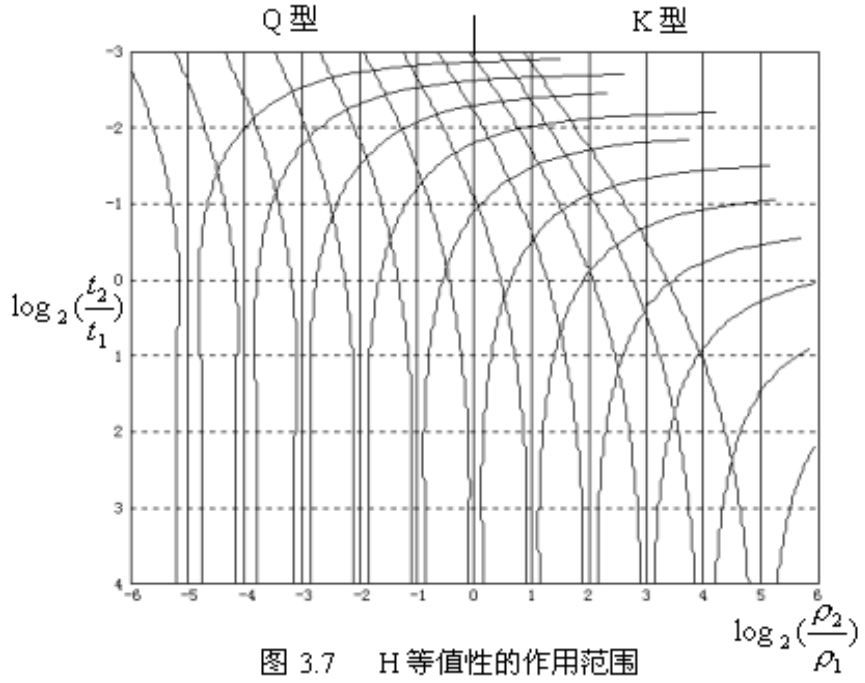


图 3.7　H 等值性的作用范围

标确定了对测深曲线的形状没有影响的 ρ_2/ρ_1 和 h_2/h_1 的变化范围。由图看出，等值性的问题是随着 h_2/h_1 的减小和 ρ_2/ρ_1 的增大变得越来越严重。当 $h_2/h_1>2$ 和 $\rho_2/\rho_1<\frac{1}{40}$ 时就无等值性了。大地电磁测深 S 等值性的作用范围较之直流测深中 S 等值性的作用范围要窄，这就说明大地电磁测深方法较之直流测深方法有较高的分辩能力。

§3.3　大地电磁相位曲线的性质

一　大地电磁阻抗相位范围

经理论研究发现，一维模型阻抗相位范围是：

$$0\sim-\frac{\pi}{2}\qquad（时间因子为 e^{-i\omega t} 时）$$

$$0\sim\frac{\pi}{2}\qquad（时间因子为 e^{i\omega t} 时）$$

相位的上述性质可作为一维模型条件下接受和摒弃数据的标准之一。在二维和三维模型情况下，一般来说尚不能保证相位在此范围之内，但在大多数情况下仍保持了上述性质。

二　阻抗幅值与相位之间的关系

根据复变函数理论，对在复自变量平面（z=x+iy）内的围线上及其内解析的函数来说，在该域内任一点 a 处的复变函数值可以由围线上复变函数值的积分表示出

$$\int_c\frac{f(z)}{z-a}dz=\begin{cases}2\pi i f(a) & a在c内\\ \pi i f(a) & a在c上\\ 0 & a在c外\end{cases}$$

或写成

$$f(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c\frac{f(z)}{z-a}dz & a在c内\\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_c\frac{f(z)}{z-a}dz & a在c上\\ 0 & a在c外\end{cases}\qquad(3.49)$$

上式称为柯西积分公式。

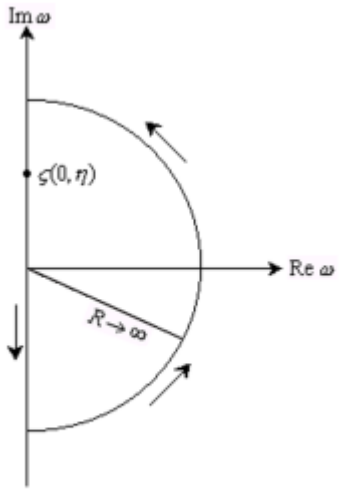


图 3.8　积分围线

如把围线 c 取为如图 3.8 所示右半圆，并把点取在围线上虚轴上的任一点 $\zeta(0,\eta)$ 处，则由(3.49)式得到：

$$f(\zeta)=\frac{1}{i\pi}P\left[\int_c\frac{f(z)}{z-\eta}dz\right]=\frac{1}{i\pi}P\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(0,y)}{y-\eta}dy\right] \tag{3.50}$$

P 表示取积分主值。设复函数 f 的实部为 U，虚部为 V，则有：

$$\left.\begin{aligned} f(\zeta)=f(0,\eta)=U(0,\eta)+iV(0,\eta) \quad & \text{在点}\zeta\text{处} \\ f(z)=f(0,y)=U(0,y)+iV(0,y) \quad & \text{在虚轴上} \end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

将(3.51)代入(3.50)得到：

$$\begin{aligned} U(0,\eta)+iV(0,\eta)&=\frac{1}{i\pi}P\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(0,y)+iV(0,y)}{y-\eta}dy\right] \\ &=\frac{1}{\pi}P\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V(0,y)}{y-\eta}dy\right]-i\frac{1}{\pi}P\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(0,y)}{y-\eta}dy\right] \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{根据左边实部=右边实部有：}\ U(0,\eta)=\frac{1}{\pi}P\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V(0,y)}{y-\eta}dy\right] \\ &\text{根据左边虚部=右边虚部有：}\ V(0,\eta)=-\frac{1}{\pi}P\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(0,y)}{y-\eta}dy\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

上二式在 $y=\eta$ 处有一奇点，为了去掉奇点，分别加下面的 0 值函数：

$$V(0,\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{y-\eta}=0 \qquad U(0,\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{y-\eta}=0$$

在复频率平面内考虑问题，(3.53)式可写成：

$$U(0,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V(0,y)-V(0,\eta)}{y-\eta}dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V(\omega)-V(\omega_0)}{\omega-\omega_0}d\omega \tag{3.54}$$

$$V(0,\eta)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(0,y)-U(0,\eta)}{y-\eta}dy=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(\omega)-U(\omega_0)}{\omega-\omega_0}d\omega \tag{3.55}$$

上式给出了在复频率平面右半部分解析的函数在虚频率轴上实部与虚部之间的关系。

下面将说明如何把(3.55)式应用到大地电磁阻抗中来。已知大地电磁阻抗函数 $Z(\omega)$ 可用振幅和幅角表示成：$Z(\omega)=|Z(\omega)|e^{i\theta}$。两边取对数得：

$$\ln Z(\omega)=\ln|Z(\omega)|+i\theta \tag{3.56}$$

理论证明，在一维介质情况下大地电磁阻抗 $Z(\omega)$ 具有正实性质，即在复频率平面的右半部分阻抗函数无极点和零点，因此函数 $\ln Z(\omega)$ 在复频率平面的右半部分也无极点，是解析的，因此可套用(3.55)式，其实部和虚部应满足：

$$\begin{aligned} \theta(\omega_0)&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|Z(\omega)|-\ln|Z(\omega_0)|}{\omega-\omega_0}d\omega \\ &=-\frac{2\omega_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\ln|Z(\omega)|-\ln|Z(\omega_0)|}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega \\ &=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{L(\omega)-L(\omega_0)}{\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}}\frac{d\omega}{\omega}=-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(\omega)-L(\omega_0)}{e^{u}-e^{-u}}du \end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{L(\omega)-L(\omega_0)}{sh(u)}du-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{L(\omega)-L(\omega_0)}{sh(u)}du \tag{3.57}$$

式中 $L(\omega)=\ln|Z(\omega)|$ ， $u=\ln(\omega/\omega_0)$ ， $sh(u)=\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}$ 为双曲正弦函数。利用微分关系： $d\left[-\ln cth(-\frac{u}{2})\right]=\frac{1}{sh(u)}du$ ，对(3.57)进行分部积分：

$$\theta(\omega_0)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}[L(\omega)-L(\omega_0)]d\left[-\ln cth(-\frac{u}{2})\right]-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[L(\omega)-L(\omega_0)]d\left[-\ln cth(-\frac{u}{2})\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left\{[L(\omega)-L(\omega_0)]\left[-\ln cth(-\frac{u}{2})\right]\right\}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{dL(\omega)}{du}\ln cth(-\frac{u}{2})du$$

$$-\frac{1}{\pi}\left\{[L(\omega)-L(\omega_0)]\left[-\ln cth(\frac{u}{2})\right]\right\}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{dL(\omega)}{du}\ln cth(\frac{u}{2})du \tag{3.58}$$

因为当 $u\to-\infty$ 时 , $\ln cth(-\frac{u}{2})\to 0$; $u\to\infty$ 时 , $\ln cth(\frac{u}{2})\to 0$;

当 $u\to 0$ 时 , $L(\omega)\to L(\omega_0)$ ，故在(3.58)式中第一、三项为零。故(3.58)式变为：

$$\theta(\omega_0)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dL(\omega)}{du}\ln cth\left|\frac{u}{2}\right|du \tag{3.59}$$

又因为： $cth\left|\frac{u}{2}\right|=\frac{e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}}-e^{-\frac{u}{2}}}=\frac{e^{\ln\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}}+e^{\ln\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}}}{e^{\ln\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}}-e^{\ln\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}}}=\frac{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}+\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}}{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}-\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}}=\left|\frac{\omega+\omega_0}{\omega-\omega_0}\right|$ (3.60)

为书写简便，上式省去了中间各项的绝对值符号。

所以(3.59)式又变为： $\theta(\omega_0)=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{d\ln|Z(\omega)|}{du}\ln\left|\frac{\omega+\omega_0}{\omega-\omega_0}\right|du$ (3.61)

上式说明某一频率处的相位响应与振幅响应在双对数坐标中的变化率 $d\ln|Z(\omega)|/du$ 成正比，但是不只是与该频率处的变化率成正比，而是与整个频率谱上的变化率有关，不同频率的变化率对 ω_0 处的相位的贡献不是相同的，而是由加权因子 $\ln\left|\frac{\omega+\omega_0}{\omega-\omega_0}\right|$ 决定。加权因子 $\ln\left|\frac{\omega+\omega_0}{\omega-\omega_0}\right|$ 的值在 ω_0 处达到极大值，随着远离 ω_0 而衰减，如图 3.9 所示。

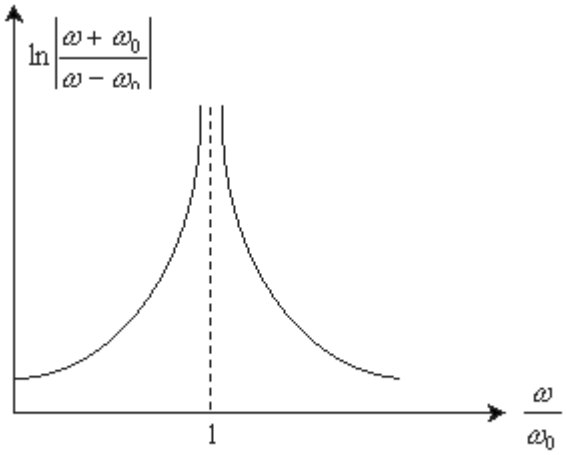


图 3.9　权因子

通过以上讨论可以看出，在一维介质情况下相位响应不会提供异于振幅响应所能提供的有关大地电磁场特征的新信息。但相位响应还是有其一定的意义，首先，当无完整的振幅资料时，可用相位资料进行解释，当有两种资料时，用两种资料进行解释总比用一种资料解释强，可以改进解释的效果。第二，相位响应和振幅响应之间的关系并不是一对一的关系，它们与地电断面之间的关系是彼此不同的，具有不同的勘探深度，相位响应可以以较高频率的资料获得地电断面较深部的信息。

三　一维介质大地电磁阻抗相位曲线

1 均匀半空间的阻抗相位。(2.27)和(2.29)式已经指出，均匀半空间情况下的阻抗相位是：

$$Arg(Z_{xy}) = -45°　　（E_{//}极化）$$

$$Arg(Z_{yx}) = 135°　　(H_{//}极化)$$

这时，相位值与场的周期和介质的电阻率无关，始终保持为一常数，其物理意义是地下不同深度处电场与磁场之间的相位差为一常数。

2　二层介质的阻抗相位。阻抗与变换阻抗的关系为：$Z_n(0) = Z_{01}R_n(0)$，写成指数形式为：$|Z_n(0)|e^{i\theta_z} = |Z_{01}|e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot |R_n(0)|e^{iArgR_n(0)}$

所以　　$\theta_z = -45° + ArgR_n(0)$

高频时 $ArgR_n(0)$ 已由(3.12)式给出：

$$Arg[R_2(0)] = tg^{-1}\frac{\mathrm{Im}[R_2(0)]}{\mathrm{Re}[R_2(0)]} = \frac{ctg(x)[cth^2(x+y)-1]}{cth(x+y)[ctg^2(x)+1]}$$

从上式看出，如果 $ctg(x)=0$，则 $Arg[R_2(0)]=0$，也就是说，如果

$$x = \frac{2\pi h_1}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ , 或 } \quad \frac{\lambda_1}{h_1} = \frac{4}{2n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

即 $\frac{\lambda_1}{h_1}=4,\frac{4}{3},\frac{4}{5},\frac{4}{7},\cdots$时， $R_2(0)$ 的相位为 0。所以 $Z_2(0)$ 的相位：

$$\theta_z = Arg[Z_2(0)] = -45° + Arg[R_2(0)] = -45° + 0 = -45°$$

这就说阻抗相位曲线左端（即高频时）也以振荡方式趋于 $-45°$，交点位置为 $4,\frac{4}{3},\frac{4}{5},\frac{4}{7}\cdots$，最大的一个交点为 4。

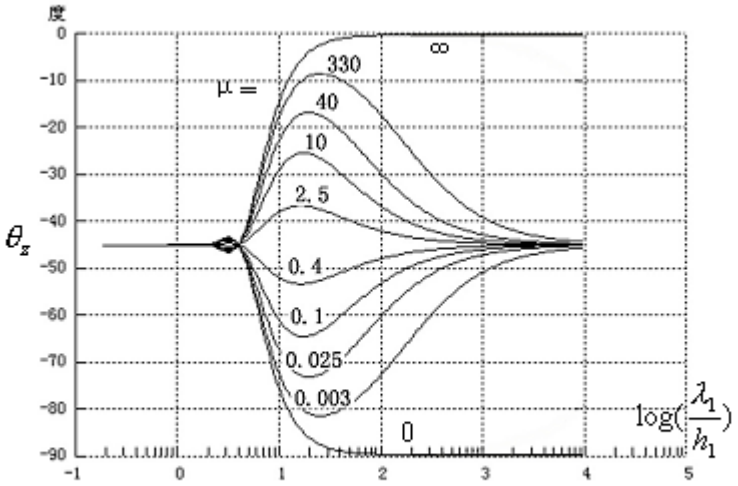


图 3.10　二层介质的阻抗相位理论曲线

相位曲线一般是画在单对数坐标中，横轴用对数坐标，表示 λ_1/h_1，纵轴用算术坐标，表示相位值。上面提到的最大的一个交点（$-45°,4$）作为曲线对比时的参考点。图 3.10 为二层介质的相位理论曲线。由图看出，在参考点右边，①当 $\rho_2>\rho_1$ 时，相位响应曲线先是随周期的增大而增大，达到一极大值，然后又逐渐减小，趋于 $-45°$，即趋于均匀半空间时特征阻抗的相位值。②当 $\rho_2\to\infty$ 时，相位曲线由 $-45°$ 单调地趋于零度，这与前面讨论的基底为绝缘体时 S 区间内阻抗曲线的特点的第三条是一致的。③当 $\rho_2<\rho_1$ 时，相位曲线随周期的增加而逐渐减小，达到一极小值后又逐渐上升，最后趋于 $-45°$，即趋于均匀半空间时特征阻抗的相位值。④当 $\rho_2\to 0$ 时，相位曲线由 $-45°$ 单调地下降，最后趋于 $-90°$，这也与二层介质基底为良导体时阻抗在 H 区间的特性是一致的。⑤与振幅响应曲线相同，μ_2 互为倒数的相位曲线也互为对称。

3　三层介质的阻抗相位。三层介质的阻抗相位曲线在图 3.11~3.14 中给出，分别对应 A、H、K、Q 四种类型的地电断面。其特点是：①在上升之前出现极小，在下降之前出现极大。②高频渐近值和低频渐近值均为 $-45°$，即曲线两端均趋于 $-45°$。

从图 3.11~3.14 可以看出，三层介质相位曲线的两端均趋于 $-45°$。但在实际野外测量中不一定能得到这样的曲线，因为实测时不一定用这样宽的频带，所以实测时可能只得到其中的一段曲线，一般是得到左段曲线，而右段曲线需使用很低的频率才能得到。如要达到图中横坐标为 4 的位置，$\log(\sqrt{10T})=4$，周期 T 应为 10^7 秒。如在

测量中最长周期用 1000 秒，则曲线只能达到 2 的位置。

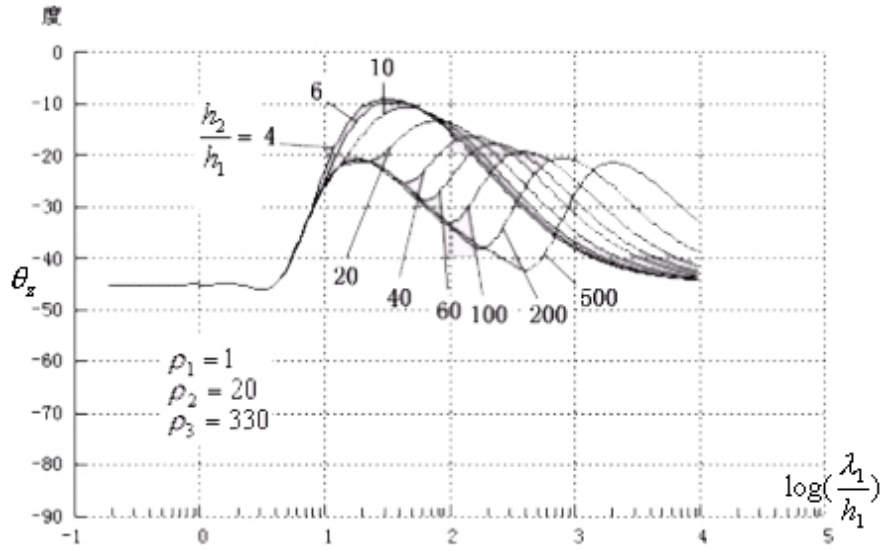


图 3.11　A 型三层介质的阻抗相位曲线

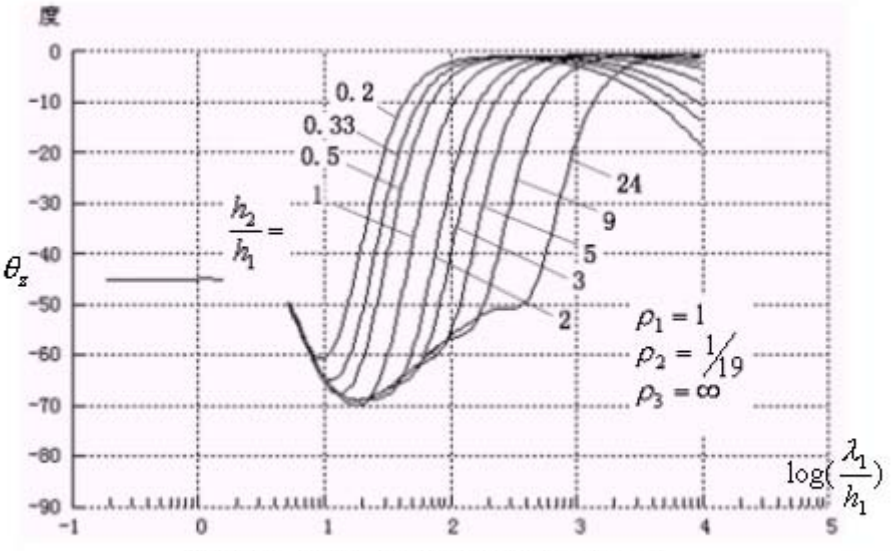


图 3.12　H 型三层介质的阻抗相位曲线

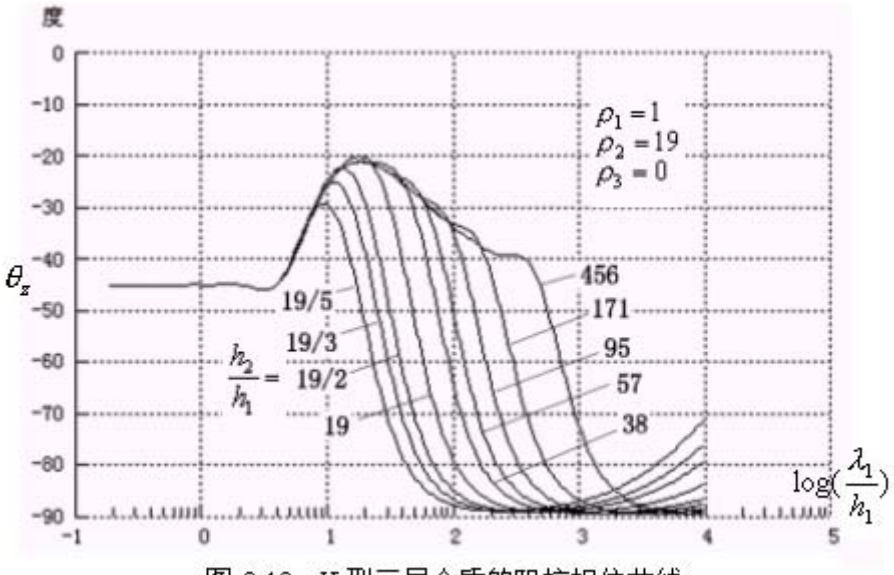


图 3.13　K 型三层介质的阻抗相位曲线

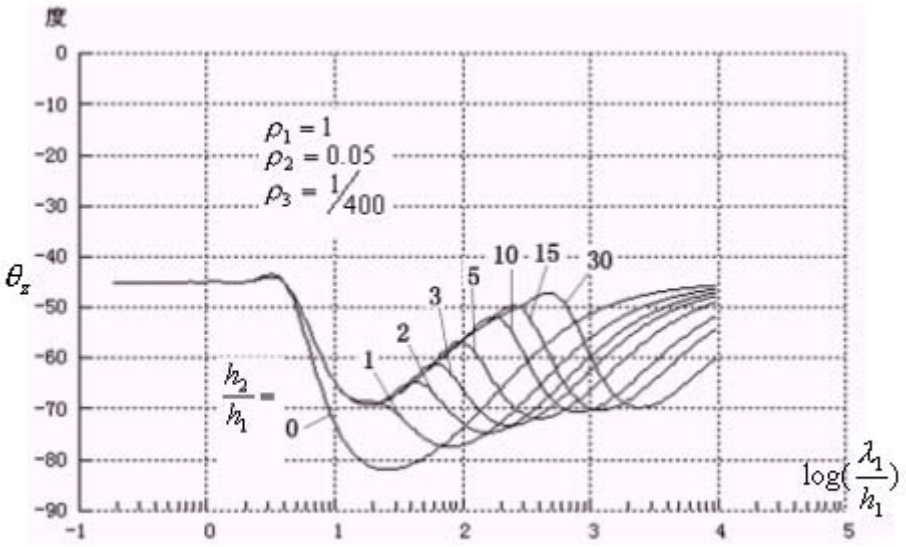


图 3.14　Q 型三层介质的阻抗相位曲线

第四章　二维三维介质中的电磁场性质

迄今为止，讨论过的介质都是一维的，即介质的电性只在一个方向有变化，具体地说只沿垂向方向有变化，而沿水平方向是均匀的。但实际的地质体，一般来说，电性可能沿两个方向或三个方向都有变化。我们把电性在两个方向都变化的地质体称为二维介质。把电性在三个方向都变化的地质体称为三维介质。对二维介质，通常认为在垂向和一个水平方向电性发生变化，而另一个水平方向电性不变化。把这个电性不变化的方向称为二维介质的走向方向。在直角坐标中，一般 z 表示垂向方向，x 表示走向方向（对二维介质）。这就是说，对二维介质，在 z 和 y 方向电性发生变化。对三维介质，在 z、x 和 y 三个方向电性都发生变化。在非一维情况下，标量阻抗已不再适用，将要引入张量阻抗的概念。

§4.1　标量阻抗的局限性

在各向同性介质中，导电率是一标量，根据欧姆定律

$$j = \sigma E \tag{4.1}$$

可知，电场强度 E 与电流密度 j 具有相同方向。由麦克斯韦方程组中第一方程(2.1)可知，磁场与电流方向垂直，由此可以推论出，电场方向与磁场方向是垂直的。这就决定了水平均匀各向同性介质中描述相互垂直的水平电磁场分量之间关系的大地电磁表面阻抗也具有标量性质。

在各向异性或二维、三维介质中，与上述不同，导电率是一张量。这时电场强度 E 与电流密度 j 之间的关系由下式给出：

$$j = \begin{bmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = [\sigma]E \tag{4.2}$$

其中 $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \cdots \sigma_{zz}$ 等为张量导电率的元素。由上式可见，j 与 E 的方向不再相同，但磁场强度的方向总与 j 的方向垂直，由此导致电场强度的方向不与磁场方向垂直。这时，水平电磁场分量之间关系变为由下式描述

$$E_x = Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y \tag{4.3}$$

$$E_y = Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y \tag{4.4}$$

写成矩阵形式为：

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = [Z]H \tag{4.5}$$

这时表征水平电磁场分量之间关系的大地电磁表面阻抗变为一张量，$Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yx}, Z_{yy,}$ 称为张量阻抗元素。

一般情况下，导电率张量是对称的，即 $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$，这时总可以找到某一方位的坐标系，在其中，导电率张量成为对角的，即(4.2)式变成:

$$\begin{bmatrix} j_{x'} \\ j_{y'} \\ j_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

这时坐标轴的方向称为各向异性主轴方向。在各向异性主轴方向上，电场方向与电流密度方向一致，即与相应的磁场方向保持垂直，这时式(4.3)、(4.4)变为：

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z_1 \\ Z_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

式中 Z_1, Z_2 为对应各向异性主轴方向的主阻抗元素，$Z_1 \neq Z_2$，辅助阻抗为 0。这时的阻抗仍具有标量阻抗的性质。

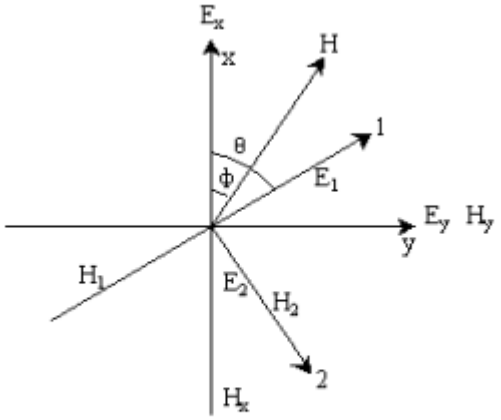


图 4.1　各向异性介质表面电场和磁场分量之间的关系

但当测量方向 x,y 与各向异性主轴方向 1,2 不一致时（见图 4.1），如仍沿用传统的标量阻抗则其数值将是不稳定的，随磁场极化方向的变化而变化。这可以从下面的推导中得到说明。根据图 4.1 可算出标量阻抗为：

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_1 \cos\theta - E_2 \sin\theta}{-H_1 \sin\theta + H_2 \cos\theta} \tag{4.8}$$

$$Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} = \frac{E_1 \sin\theta + E_2 \cos\theta}{H_1 \cos\theta + H_2 \sin\theta} \tag{4.9}$$

$$H_1 = -H\cos(\theta - \varphi) \tag{4.10}$$

$$H_2 = -H\sin(\theta - \varphi) \tag{4.11}$$

在各向异性主轴方向上，电磁场分量之间的关系为：

$$E_1 = Z_1 H_2 \tag{4.12}$$

$$E_2 = Z_2 H_1 \tag{4.13}$$

将(4.10)- (4.13)代入(4.8)、（4.9），整理后得到：

$$Z_{xy}=\frac{E_x}{H_y}=\frac{-Z_1\sin(\theta-\varphi)\cos\theta+Z_2\cos(\theta-\varphi)\sin\theta}{\sin\varphi} \tag{4.14}$$

$$Z_{yx}=\frac{E_y}{H_x}=\frac{Z_1\sin(\theta-\varphi)\sin\theta+Z_2\cos(\theta-\varphi)\cos\theta}{\cos\varphi} \tag{4.15}$$

由上式看出，在各向异性介质(包括横向不均匀的二、三维构造)情况下，当测量方向与主轴方向不一致时，传统的标量阻抗与磁场极化方向 φ 有关，因而当后者随时间变化时，同一测点根据不同记录段求出的相同频率的标量阻抗是不同的，导致数据分数。而且标量阻抗还随测量方向的不同而不同。所以不能唯一地表征地下介质的电学性质。尽管当测量方向为主轴方向时，可用标量阻抗，但一般我们并不知道主轴方向，也就无法将测量方向定在主轴方向上，而只能使用任意方向。这时如使用标量阻抗，将是不稳定的，我们需要使用(4.5)式所示的张量阻抗。

§4.2　阻抗张量和倾子矢量的性质

一　二维模型大地电磁场分量之间的关系

这时控制电磁场的 Maxwell 方程除（2.3）外，（2.1）、（2.2）、（2.4）均与一维时相同，（2.3）式变为 $\nabla\cdot(\sigma E)=0$，因为对于非均匀介质，导电率 σ 不是常数。

1. 设坐标系 x', y', z' 与构造方向一致，模型的走向方向为 x' 轴方向。在 x', y', z' 坐标系中场分量表示成 E'_x, E'_y, E'_z, H'_x, H'_y, H'_z。对场源所做的假设是：①大地电磁场是单谐变化的，其时间因子为 $e^{-i\omega t}$；②入射场仍视为垂直入射的平面电磁波；③场的变化是低频的，可忽略位移电流的作用。在这些假设条件下，式(2.1)-(2.4)可展成分量形式如下：

由(2.1)式有

$$\frac{\partial H'_z}{\partial y'}-\frac{\partial H'_y}{\partial z'}=\sigma E'_x \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial H'_x}{\partial z'}=\sigma E'_y \quad * \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial H'_x}{\partial y'}=-\sigma E'_z \quad * \tag{4.18}$$

由(2.2)式有

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y}{\partial z'}=i\omega\mu H'_x \quad * \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'}=i\omega\mu H'_y \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial y'}=-i\omega\mu H'_z \tag{4.21}$$

由 $\nabla\cdot(\sigma E)=0$ 有

$$\frac{\partial(\sigma E'_y)}{\partial y'}+\frac{\partial(\sigma E'_z)}{\partial z'}=0 \quad * \tag{4.22}$$

由(2.4)式有　　$$\frac{\partial H'_y}{\partial y'}+\frac{\partial H'_z}{\partial z'}=0 \qquad (4.23)$$

由上式看出，电磁场各分量分成独立的两组：一组由带*的公式组成，其中只涉及 H'_x，E'_y，E'_z，因为这时唯一的磁场 H'_x 方向垂直于入射平面，称为横磁波型（TM），也因为 H'_x 的方向平行于二维构造走向，由此得名磁场平行极化方式（$H_{//}$）。另一组由不带*号的公式组成，它们只涉及 E'_x，H'_y，H'_z，类似于上述依据，这组电磁场分量称为横电波型（TE），或称电场极化方式（$E_{//}$）。

由上述可见，当选取坐标系方向与构造主轴方向一致时，电磁场能分成独立的两组波型，这一点具有很重要的意义，因为：①在求二维模型条件下大地电磁场问题的解析解和数值解时，Maxwell 偏微分方程组的求解问题可化成标量函数的二阶偏微分方程的求解问题，这给推导及计算带来很大方便。②类似与一维模型时的情况，任一水平坐标轴的电场分量只和与其垂直的水平磁场分量有关，而和与其平行的水平磁场分量无关。但与一维模型不同的地方是：由两对独立的互相正交的水平电磁场分量确定出的阻抗值不相等，（即使绝对值也不相等）。我们把这两个阻抗值分别记为 Z_{TM}，Z_{TE}，即有：

$$E'_x=Z_{TE}H'_y$$
$$E'_y=Z_{TM}H'_x$$

或写成：　　$$[E']=\begin{bmatrix}0 & Z_{TE}\\ Z_{TM} & 0\end{bmatrix}[H']=[Z'][H'] \qquad (4.24)$$

在第二章一维情况时，由公式(2.30)有：$|Z_{TE}|=|Z_{TM}|$；而现在（非一维情况）$|Z_{TE}|\neq|Z_{TM}|$。

2. **坐标系为任意方位**。设以 x,y,z 表示任意方位直角坐标系中三个坐标轴的方向，如图 4.2 所示。

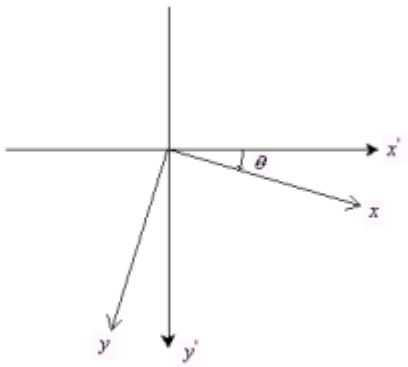


图 4.2　坐标系旋转

它与 x',y',z' 之间的相对关系为：z 与 z' 重合都铅垂向下，水平坐标轴 x,y 相对

x', y' 顺时针旋转了θ角，则旋转后坐标系中的电磁场分量可用原坐标系中的电磁场分量表示成：

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E'_x\cos\theta + E'_y\sin\theta \\ E_y &= -E'_x\sin\theta + E'_y\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= H'_x\cos\theta + H'_y\sin\theta \\ H_y &= -H'_x\sin\theta + H'_y\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

(4.25)写成矩阵形式为：

$$[E]=\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix}=[v][E'] \tag{4.27}$$

同理对(4.26)有

$$[H]=[v][H'] \tag{4.28}$$

其中$[v]$称旋转矩阵，由式(4.27)和(4.28)可得到：

$$[E']=[v]^{-1}[E] \tag{4.29}$$

$$[H']=[v]^{-1}[H] \tag{4.30}$$

由于$[v]$是正交矩阵，故有：

$$[v]^{-1}=[v]^{T}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

所以由式(4.29)和(4.30)可得到：

$$\left.\begin{aligned} E'_x &= E_x\cos\theta - E_y\sin\theta \\ E'_y &= E_x\sin\theta + E_y\cos\theta \end{aligned}\right. \tag{4.32}$$

$$\left.\begin{aligned} H'_x &= H_x\cos\theta - H_y\sin\theta \\ H'_y &= H_x\sin\theta + H_y\cos\theta \end{aligned}\right. \tag{4.33}$$

式(4.25)、（4.26）和(4.32)、(4.33)就是两种坐标下电磁场相互转换的公式。将(4.24)式代入(4.27)得到：

$$[E]=[v][E']=[v][Z'][H']$$

再将(4.30)代入上式得到：

$$[E]=[v][Z'][v]^{T}[H] \tag{4.34}$$

将$[v],[Z'],[v]^{T}$的值代入上式得到：

$$\left.\begin{aligned} E_x &= Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y \\ E_y &= Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y \end{aligned}\right. \tag{4.35}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx} &= \frac{1}{2}(Z_{TE}+Z_{TM})\sin 2\theta \\ Z_{xy} &= \frac{1}{2}(Z_{TE}-Z_{TM})+\frac{1}{2}(Z_{TE}+Z_{TM})\cos 2\theta \\ Z_{yx} &= \frac{1}{2}(Z_{TM}-Z_{TE})+\frac{1}{2}(Z_{TE}+Z_{TM})\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

$$Z_{yy} = -\frac{1}{2}(Z_{TE} + Z_{TM})\sin 2\theta$$

注意：上式中的Z_{TE}, Z_{TM} 为坐标系与走向一致时的阻抗，$Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yx}, Z_{yy}$ 为任意方向时的阻抗，上式给出了两种坐标系中阻抗的转换关系。如定义：

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2}(Z_{TE} + Z_{TM}) \\ Z_2 &= \frac{1}{2}(Z_{TE} - Z_{TM}) \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

式(4.34)可写成：
$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \sin 2\theta & Z_2 + Z_1 \cos 2\theta \\ -Z_2 + Z_1 \cos 2\theta & -Z_1 \sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

也可写成：
$$[E] = [Z][H] \tag{4.39}$$

比较(4.34)和(4.39)式可得：
$$[Z] = [v][Z'][v]^T \tag{4.40}$$

这就是说，任意方向的阻抗可由坐标系与二维构造方向一致时的阻抗计算出来，反之亦然。此时的阻抗为一个二阶张量，在坐标系为一般方向时，一个电场分量不仅与它垂直的磁场分量有关，还和与其平行的磁场分量有关。

如果此时仍用一维模型时的标量阻抗，显然丢掉了一个方向的信号，显然是错误的。由第一节知标量阻抗与磁场的极化方向有关，当场源极化方向改变时，同一测点上根据不同段求出的标量阻抗是不同的，致使数据分散。

由(4.39)也即（4.38）确定的张量阻抗与场源极化方向φ无关，所以是稳定的。

由(4.38)可看出，张量阻抗元素与坐标系的方位θ有关。但如果测量方向与构造方向平行$(\theta = 0)$，电磁场分量可分解成彼此独立的两种波型，由(4.38)知阻抗张量成为对角的：

$$[Z] = \begin{bmatrix} 0 & Z_2 + Z_1 \\ -Z_2 + Z_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z_{TE} \\ Z_{TM} & 0 \end{bmatrix}$$

由相互正交的两组电磁场水平分量可决定出两个不同的阻抗元素值Z_{TE}和Z_{TM},它们可以表征二维构造的电性特征。

但是，在实际的工作中，不可能事先准确的知道构造的方向，因而也就不可能沿着它们进行测量，以后我们将要讲到，可通过一定的判别准则估计出二维构造的走向方向，然后通过(4.40)式计算出走向方向的阻抗$[Z']$，从而确定二维构造的电性特征。

二　三维模型时大地电磁场场分量之间的关系

在三维模型条件下，与二维模型时不同，六个电磁场分量都耦合在一起，不能分解成独立的相互无关的波型组。但可以证明，与二维模型时相似，电磁场分量之间仍存在复系数线性关系。

仍假设入射场为垂直入射的平面波。这时入射场可分离成两个相互正交的平面波E_{xi}和E_{yi}。显然在每一种线性平面波情况下，电场和磁场的每一个分量都应与入射波的复振幅成正比，即当入射线性极化波为E_{xi}时有：

$$\left.\begin{aligned} E_x &= a_1 E_{xi} \\ E_y &= a_2 E_{xi} \\ H_x &= b_1 E_{xi} \\ H_y &= b_2 E_{xi} \\ H_z &= c_1 E_{xi} \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

入射波为E_{yi}时有：

$$\left.\begin{aligned} E_x &= a_3 E_{yi} \\ E_y &= a_4 E_{yi} \\ H_x &= b_3 E_{yi} \\ H_y &= b_4 E_{yi} \\ H_z &= c_2 E_{yi} \end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

根据场的迭加原理，对于一般的垂直入射平面波$E_i = iE_{xi} + jE_{yi}$来说，各电磁场分为：

$$\left.\begin{aligned} E_x &= a_1 E_{xi} + a_3 E_{yi} \\ E_y &= a_2 E_{xi} + a_4 E_{yi} \\ H_x &= b_1 E_{xi} + b_3 E_{yi} \\ H_y &= b_2 E_{xi} + b_4 E_{yi} \\ H_z &= c_1 E_{xi} + c_2 E_{yi} \end{aligned}\right\} \tag{4.43}$$

写成矩阵形式为：

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{bmatrix} \\ H_z &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

可以证明$[B]$是非奇异的，则由(4.44)第二式得到：

$$\begin{bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \end{bmatrix} = [B]^{-1} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

将(4.45)代入(4.44)第一式得到：

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = [A][B]^{-1} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

其中$[Z]$称为阻抗张量，$[Z] = [A][B]^{-1}$ (4.47)

将(4.45)代入(4.44)第三式得到：

$$H_z = [C][B]^{-1} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

其中$[T]$称为倾子(Tipper),$[T] = [C][B]^{-1}$ (4.49)

上面说明了，在一般三维情况下，水平电场与水平磁场之间存在复系数线性关系，通过阻抗张量$[Z]$联系起来；垂直磁场与水平磁场之间也存在复系数线性关系，通过倾子联系起来。在形式上与二维介质的情况相似。

三　三维介质时张量阻抗及旋转特征

它与二维介质时的不同之点在于三维介质时电磁场分量不能分解成独立的两组波型，也就是说一般情况下（存在垂直的对称面时例外）阻抗张量不能对角化，因而不存在起始的特征方位。假设原坐标系为 x', y', z' ，电磁场水平分量之间的关系为：

$$\begin{aligned} E'_x &= Z'_{xx}H'_x + Z'_{xy}H'_y \\ E'_y &= Z'_{yx}H'_x + Z'_{yy}H'_y \end{aligned} \tag{4.50}$$

写成矩阵形式为：$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = [Z'] \begin{bmatrix} H'_x \\ H'_y \end{bmatrix}$

如图 4.2 所示，以 z' 轴为旋转轴，沿顺时针方向旋转 θ 角，构成新的坐标系 x, y, z 。仿(4.34)式的推导可得到：

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z'_{xx} & Z'_{xy} \\ Z'_{yx} & Z'_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

其中第一式为：

$$\begin{aligned} E_x &= \left[Z'_{xx}\cos^2\theta + Z'_{yy}\sin^2\theta + (Z'_{yx} + Z'_{xy})\sin\theta\cos\theta\right]H_x \\ &\quad + \left[Z'_{xy}\cos^2\theta - Z'_{yx}\sin^2\theta + (Z'_{yy} - Z'_{xx})\sin\theta\cos\theta\right]H_y \\ &= Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y \end{aligned} \tag{4.52}$$

于是有：$$Z_{xx} = \left(\frac{Z'_{xx} + Z'_{yy}}{2}\right) + \left(\frac{Z'_{xx} - Z'_{yy}}{2}\right)\cos 2\theta + \left(\frac{Z'_{xy} + Z'_{yx}}{2}\right)\sin 2\theta \tag{4.53}$$

$$Z_{xy} = \left(\frac{Z'_{xy} - Z'_{yx}}{2}\right) + \left(\frac{Z'_{xy} + Z'_{yx}}{2}\right)\cos 2\theta - \left(\frac{Z'_{xx} - Z'_{yy}}{2}\right)\sin 2\theta \tag{4.54}$$

类似地可得到 Z_{yx} 和 Z_{yy} 的表达式。

如果定义：

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z'_{xx} + Z'_{yy}}{2} \quad , \quad Z_2 = \frac{Z'_{xx} - Z'_{yy}}{2} \\ Z_3 &= \frac{Z'_{xy} + Z'_{yx}}{2} \quad , \quad Z_4 = \frac{Z'_{xy} - Z'_{yx}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4.55}$$

则转轴后张量阻抗各元素可表示成：

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx} &= Z_1 + Z_2\cos 2\theta + Z_3\sin 2\theta \\ Z_{xy} &= Z_4 + Z_3\cos 2\theta - Z_2\sin 2\theta \\ Z_{yx} &= -Z_4 + Z_3\cos 2\theta - Z_2\sin 2\theta \\ Z_{yy} &= Z_1 - Z_2\cos 2\theta - Z_3\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.56}$$

如再定义：

$$Z_0(\theta) = Z_3\cos 2\theta - Z_2\sin 2\theta \tag{4.57}$$

则式(4.56)变为：

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx} &= Z_1 - Z_0(\theta + 45°) \\ Z_{xy} &= Z_4 + Z_0(\theta) \\ Z_{yx} &= -Z_4 + Z_0(\theta) \\ Z_{yy} &= Z_1 + Z_0(\theta + 45°) \end{aligned}\right\} \tag{4.58}$$

由式(4.58)和(4.55)可以验证，由张量元素构成的以下的一些量是不变量，即当坐标系

旋转时它们是不变的常量。其中主要的有：

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx}+Z_{yy}&=2Z_1=Z'_{xx}+Z'_{yy}\\ Z_{xy}-Z_{yx}&=2Z_4=Z'_{xy}-Z'_{yx}\\ Z_{xx}Z_{yy}-Z_{xy}Z_{yx}&=Z'_{xx}Z'_{yy}-Z'_{xy}Z'_{yx}\end{aligned}\right\} \qquad (4.59)$$

四　坐标系旋转（θ 变化）时，张量阻抗各元素在复平面中的轨迹

由(4.58)看出，因 Z_1 和 Z_4 是不随 θ 变化的常量，所以(4.58)式张量各元素在平面中的轨迹主要取决于 $Z_0(\theta)$ 这一项。

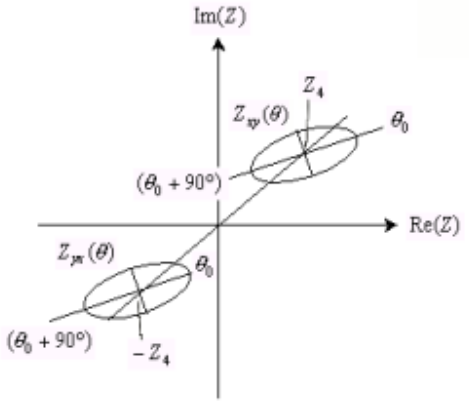


图 4.3　三维介质中张量元素 Zxy , Zyx 在复平面中的旋转轨迹

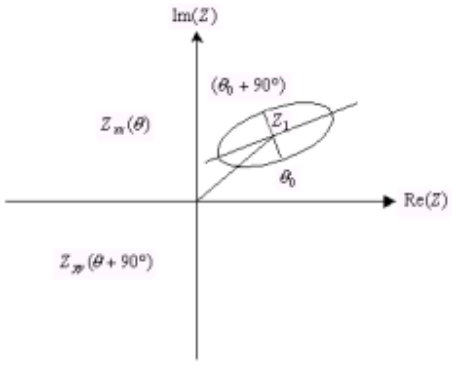


图 4.4　三维介质中张量元 Zxx , Zyy 在复平面中的旋转轨迹

1.　在三维情况下，可以证明，$Z_0(\theta)$ 这个函数在复平面中随 θ 变化而构成的轨迹是一个中心在原点处的椭圆，并且是一个周期为180° 的函数。图 4.3、图 4.4 给出了各张量阻抗元素在复平面中的旋转轨迹。

三维情况下轨迹的特点：

(1). 都是椭圆，周期为180°，即 θ 角变化180° 时沿轨迹旋转一周。

(2). Z_{xy} 的中心在 Z_4，Z_{yx} 的中心在 $-Z_4$，Z_{xx} 和 Z_{yy} 的中心在 Z_1。

(3). Z_{xx} 和 Z_{yy} 的轨迹为同一椭圆，但不同步，它们之间的关系满足下式：

$$Z_{xx}(\theta)=Z_{yy}(\theta+90°)$$

(4). Z_{xy} 和 Z_{yx} 轨迹的中心在复平面内相对原点是对称的，且流动点运动同步。

2．二维情况下轨迹的特点：

(1). 由于在二维情况下在一个特殊方向（即构造主轴方向）上，Z'_{xx} 和 Z'_{yy} 为零，由(4.59)的第一式知：Z_1 为零，而 Z_1 又为旋转不变量，也就是说在任意方向 Z_1 皆为零，所以 Z_{xx} 和 Z_{yy} 轨迹的中心在原点。

(2). 当坐标系与构造主轴方向一致时，Z'_{xx} 与 Z'_{yy} 皆为零，因而 $Z_2=\dfrac{Z'_{xx}-Z'_{yy}}{2}$

也为零，所以 $Z_0(\theta)$ 简化为 $Z_3\cos 2\theta$。这时随着 θ 的变化，$Z_3\cos 2\theta$ 的实部和虚部相应地成正比变化，退化为直线轨迹。所以二维情况下 $Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yx}, Z_{yy}$ 均为直线轨迹。

3．一维情况下轨迹的特点：

由于在一维情况下，任意方向 Z'_{xx} 和 Z'_{yy} 为零，所以 Z_1 为零，Z_2 为零；又由于在任意方向，Z'_{xy} 和 Z'_{yx} 大小相等方向相反，所以 Z_3 为零，$Z_4 = Z'_{xy}$；因 Z_2 和 Z_3 为零，由(4.57)知：$Z_0(\theta)=0$；因 Z_1 为零，$Z_0(\theta)=0$，于是由(4.58)知：

$$\left.\begin{aligned} Z_{xx} &= 0 \\ Z_{xy} &= Z_4 = Z'_{xy} \\ Z_{yx} &= -Z_4 = -Z'_{xy} = Z'_{yx} \\ Z_{yy} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

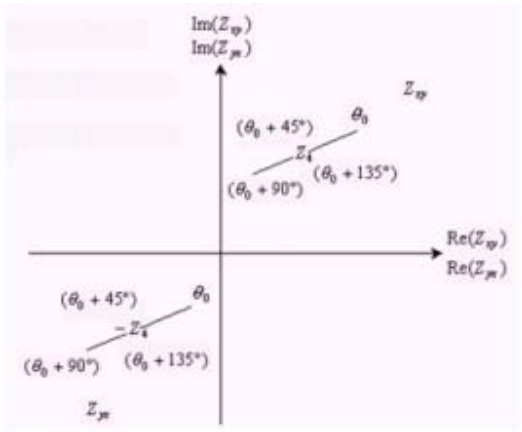


图 4.5　二维介质时张量阻抗元素图 Z_{xy}, Z_{yx} 在复平面中的旋转轨迹

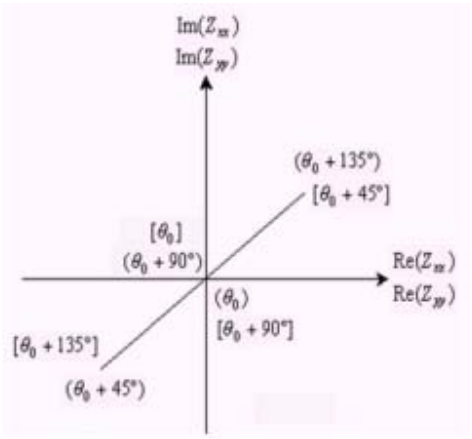


图 4.6　二维介质时张量阻抗元素图 Z_{xx}, Z_{yy} 在复平面中的旋转轨迹

所以 Z_{xx} 和 Z_{yy} 退化为位于原点的点，Z_{xy} 退化为位于 Z'_{xy} 的点，Z_{yx} 退化为位于 Z'_{yx} 的点，而且坐标系旋转时不变化，即成为标量。

五　垂直磁场与水平磁场之间的关系

在大地电磁测深方法中，假设场源是垂直入射的平面波，即一次场中不存在垂直分量。在横向均匀的一维介质条件下，二次场中也不会产生垂直磁场。只有在横向不均匀的二维介质和三维介质时才会出现垂直磁场分量。上面(4.48)已经证明过，垂直磁场分量与两个水平分量之间存在如下的复系数线性关系：

$$H_z = T_{zx}H_x + T_{zy}H_y = \left[T_{zx}, T_{zy}\right]\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

其中 $T = \left[T_{zx}, T_{zy}\right]$ 称为倾子（Tipper）。

1．二维情况下

我们知道，在二维情况下，当坐标系的 x 轴平行于构造走向时电磁波可分解成两组波型，一组是 E_x, H_y, H_z，为 $E_{//}$ 或 TE 波型，就是说在坐标系取这种方位时，H_z 与 H_y 及 E_x 有关，这时式(4.61)变成：

$$H_z = T_{zy} H_y$$

即 T_{zy} 取极大值，而 T_{zx} 变为零。这种结果的物理意义是：在二维情况下，当 x 轴方向与构造走向方向一致时，无限长线电流元 E_x 产生的磁场是在 $y-z$ 平面内，应有 H_y 及 H_z 分量。由于沿 y 轴方向电性有变化，致使场在该方向是不均匀的，因此各 E_x 线电元产生的磁场垂直分量不能完全相互抵消，其剩余部分形成了 H_z。由式（4.21）有：$\dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z$，可见，$H_z$ 的大小反映了场（也就是介质电性）沿倾向方向 y 上的不均匀程度，为此目的采用规格化的相对量 H_z / H_y 更为合适。

另一组波型是 H_x, E_y, E_z，无限长线电流 E_y 产生的磁场是在 $x-z$ 平面内，本应有 H_x 及 H_z 分量，但由于沿 x 轴方向介质电性均匀，因此沿该方向场也均匀分布，所以相邻的 E_y 线电流元产生的磁场垂直分量相互完全抵消（如图 4.7），于是只有 H_x 分量了。

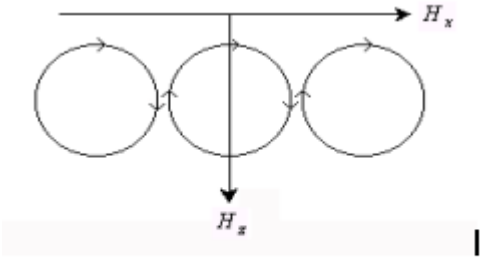


图 4.7　二维情况下 TH 极化时 Hz 互相抵消

下面再看倾子 T 与坐标的关系。

如上所述，在二维情况下，当坐标系的 x' 轴平行于构造走向时，有：

$$H'_z = T'_{TE} H'_y = T'_{TE}(\sin\theta H_x + \cos\theta H_y) = T'_{TE}\sin\theta H_x + T'_{TE}\cos\theta H_y \qquad (4.62)$$

其中：T'_{TE} 是测量方向与构造方向重合时取极大值的倾子分量。因为 $H_z = H'_z$，所以由(4.61)和(4.62)得到任意方向的倾子和构造方向的倾子的关系：

$$T_{zx} = T'_{TE}\sin\theta \quad , \quad T_{zy} = T'_{TE}\cos\theta \qquad (4.63)$$

由上式可知，随着 θ 的变化，T_{zx} 的实部和虚部成正比变化，T_{zy} 的实部和虚部也成正比变化，即 T_{zx} 和 T_{zy} 在复平面中的轨迹是通过坐标原点的直线，变化的周期是 $360°$，T_{zx} 和 T_{zy} 的轨迹不同步，相位差为 $90°$，如图 4.8 和图 4.9。

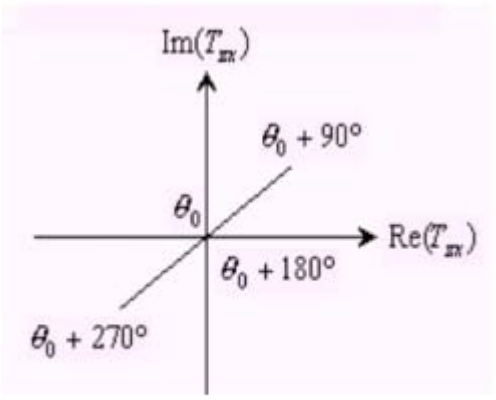


图 4.8　二维介质倾子元素 Tzx 在复平面中的轨迹

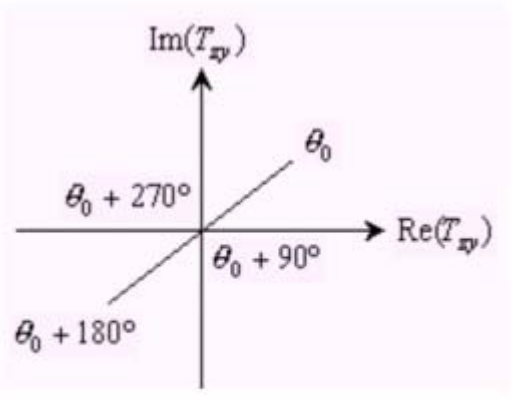


图 4.9　二维介质倾子元素 Tzy 在复平面中的轨迹

2．三维情况下

在三维情况下，大地电磁场分量不能分解成独立的两组波型，因此磁场的垂直分量总是和两个水平分量同时有关，例如在 x',y',z' 坐标系中有：

$$H'_z = T'_{zx}H'_x + T'_{zy}H'_y$$

当测量坐标系旋转 θ 角后（顺时针方向为正），在新坐标系 x,y,z 中磁场垂直分量和两个水平分量之间的关系为：

$$H'_z = H_z = T'_{zx}H'_x + T'_{zy}H'_y = T_{zx}H_x + T_{zy}H_y \qquad (4.64)$$

其中：

$$T_{zy} = T'_{zy}\cos\theta - T'_{zx}\sin\theta = T_0(\theta)$$

$$T_{zx} = T'_{zy}\sin\theta + T'_{zx}\cos\theta = -T_0(\theta+90°) \qquad (4.65)$$

将式(4.65)与式(4.57)、(4.58)做比较，可得到如下结论：(1). 倾子元素的轨迹是椭圆，周期是 360°；(2). 椭圆轨迹的中心在原点。图 4.10 为三维情况下倾子元素 T_{zx}、T_{zy} 在复平面中的轨迹。

六　倾子的三个不变量

倾子有三个不随坐标系旋转而变化的不变量，它们都能提供有关构造的信息。而且在二维情况下当 x 轴为走向方向时，倾子元素 T'_{zx} 为零，只有元素 T'_{zy}。这三个不变量是：

1．倾子的大小

$$T = \sqrt{T_{zxr}^2 + T_{zxi}^2 + T_{zyr}^2 + T_{zyi}^2}$$

2．倾子的相位

$$\phi = \frac{(T_{zxr}^2 + T_{zxi}^2)tg^{-1}(T_{zxi}/T_{zxr}) + (T_{zyr}^2 + T_{zyi}^2)tg^{-1}(T_{zyi}/T_{zyr})}{T^2} \qquad (4.66)$$

这是 T_{zx} 及 T_{zy} 二个倾子元素的相位的加权和。在二维构造方向上时，它变为：

$$\phi=\frac{(T'^{2}_{zyr}+T'^{2}_{zyi})tg^{-1}(T'_{zyi}/T'_{zyr})}{T^{2}}=tg^{-1}(T'_{zyi}/T'_{zyr}) \tag{4.67}$$

即退化为倾子元素T'_{zy}的相位。

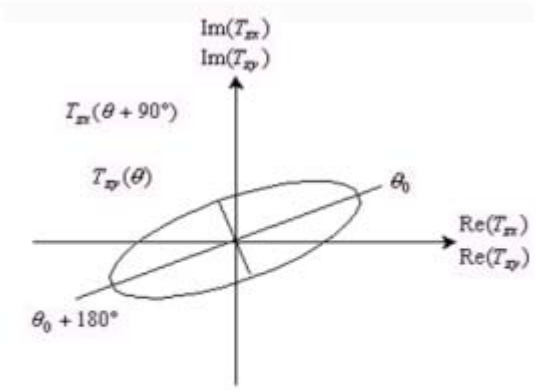


图 4.10　三维介质时倾子元素在复平面中的旋转轨迹

3．倾子的二维偏离度：

$$S_T=\frac{2(T_{zxr}T_{zyi}-T_{zxi}T_{zyr})}{T^{2}} \tag{4.68}$$

在二维构造方向上时，因$Z_{zxr}=0, Z_{zxi}=0$，所以$S_T=0$，所以它可用于度量介质偏离二维结构的程度。

§4.3　构造方向的确定和二维度指标

一　构造方向的确定

对于二维地质体，存在如何确定构造方向的问题。大致有如下一些方法：

1．　利用阻抗张量元素的椭圆轨迹确定构造方向。由第一节知道，当坐标系与走向方向一致时，$|Z_{xy}|$和$|Z_{yx}|$最大，由式（4.58）知：$Z_{xy}=Z_4+Z_0(\theta)$，$Z_{yx}=-Z_4+Z_0(\theta)$。而Z_4是常数，不随θ变化，所以实际上当坐标系与走向方向一致时，$|Z_0(\theta)|$最大。为计算方便，代之以求$|Z_0(\theta)|^2$的最大。由（4.57）式知：$Z_0(\theta)=Z_3\cos 2\theta-Z_2\sin 2\theta$，将此代入$\frac{\partial|Z_0(\theta)|^2}{\partial\theta}=0$中，求得：

$$\theta_0=\frac{1}{4}tg^{-1}\frac{2(x_2x_3+y_2y_3)}{(x_2^2+y_2^2)-(x_3^2+y_3^2)}\pm\frac{1}{4}n\pi \tag{4.69}$$

其中x_2, y_2为Z_2的实部和虚部，x_3, y_3为Z_3的实部和虚部。

另外，在构造主轴方向上应满足$|Z'_{xy}|+|Z'_{yx}|$为最大或$|Z'_{xx}|+|Z'_{yy}|$为最小。但为

便于计算，代之以 $\left|Z'_{xy}\right|^2+\left|Z'_{yx}\right|^2$ 为最大，或 $\left|Z'_{xx}\right|^2+\left|Z'_{yy}\right|^2$ 为最小，利用公式：$\frac{\partial\left(\left|Z'_{xy}\right|^2+\left|Z'_{yx}\right|^2\right)}{\partial\theta}=0$，或利用 $\frac{\partial\left(\left|Z'_{xx}\right|^2+\left|Z'_{yy}\right|^2\right)}{\partial\theta}=0$，同样可得到(4.69)。(4.69)式也可写成另一种形式：

$$\theta_0=\frac{1}{4}tg^{-1}\frac{(Z_{xx}-Z_{yy})(Z_{xy}+Z_{yx})^*+(Z_{xx}-Z_{yy})^*(Z_{xy}+Z_{yx})}{\left|Z_{xx}-Z_{yy}\right|^2-\left|Z_{xy}+Z_{yx}\right|^2}\pm\frac{1}{4}n\pi \qquad (4.70)$$

应当指出的是，上式是 4 倍角的公式，而且正切函数的周期是180°，所以根据阻抗张量元素的极值条件确定出的方向是多解的，具体地说是 8 个解，每隔 45° 有一个。这一现象的物理解释是求得的解中包含了满足极大和极小两种极值条件的解。如图 4.11 和图 4.12 所示。图 4.11 为 $\left|Z'_{xy}\right|^2+\left|Z'_{yx}\right|^2$ 极化图，图 4.12 为 $\left|Z'_{xx}\right|^2+\left|Z'_{yy}\right|^2$ 极化图。极大极小相互隔开，应当排除极小的解，这可通过对相邻的两个方向（差 45° ）计算出函数值，例如 $\left|Z'_{xy}\right|^2+\left|Z'_{yx}\right|^2$，然后舍去取较小值的那个解及其相应的（夹 90° 或其整倍数的）另外 3 个解。剩下的 4 个解所确定的两个方向即为构造的主方向，包括倾向及走向。所以说仅根据阻抗元素的测量值是不能区分出走向和倾向的。解决这个问题的办法是：①借助于工作地区内已知的地质资料来确定；②利用垂直磁场分量的测量资料求出倾子，由其旋转特性来确定倾向方向。

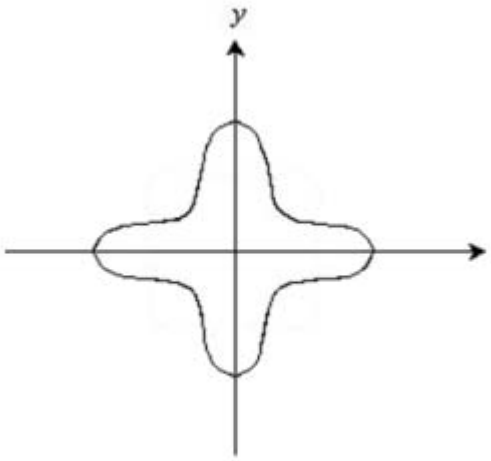


图 4.11　$\left|Z'_{xy}\right|^2+\left|Z'_{yx}\right|^2$ 极化图

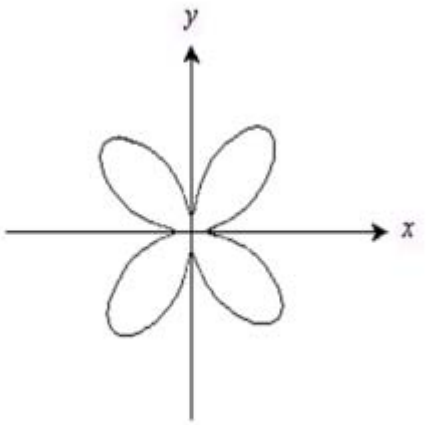


图 4.12　$\left|Z'_{xx}\right|^2+\left|Z'_{yy}\right|^2$ 极化图

2．利用倾子确定走向（方法一）

前面已经讨论过，在二维构造主方向上垂直磁场与水平磁场分量之间的关系为：

$$H_z=T'_{zy}H'_y$$

使倾子 $\left|T_{zy}\right|^2$ 为极大或倾子 $\left|T_{zx}\right|^2$ 为极小的 y 方向是倾向方向。根据式(4.65)，令其对 θ 求导数，并令其为零，于是得到：

$$\theta_0 = \frac{1}{2} tg^{-1} \frac{2(T'_{zxr}T'_{zyr} + T'_{zxi}T'_{zyi})}{(T'^2_{zxr} + T'^2_{zxi}) - (T'^2_{zyr} + T'^2_{zyi})} \tag{4.71}$$

由于正切函数的周期是180°，上式是倍角正切函数，所以上式是多解的，在0°～360°范围内有4个解，每隔90°一个，其中包括使T_{zx}为极大的两个方向。用试算法去掉两个极大的，留下两个极小的方向即为走向方向。

3．利用倾子确定走向（方法二）

在二维情况下，走向方向倾子与任一方向倾子的关系为：

$$T_{zx} = T'_{zy}\sin\theta \qquad T_{zy} = T'_{zy}\cos\theta \tag{4.72}$$

其中T'_{zy}为坐标系为走向方向的倾子，T_{zx},T_{zy}为任一方向的倾子。由此得到：

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{T_{zx}}{T_{zy}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{T_{zxr} + iT_{zxi}}{T_{zyr} + iT_{zyi}}\right) \tag{4.73}$$

由于θ是实数，所以T_{zx}/T_{zy}是实数，即T_{zx}/T_{zy}的复角为零，或说分子T_{zx}和分母T_{zy}的幅角相等，即：$tg^{-1}\left(\frac{T_{zxi}}{T_{zxr}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{T_{zyi}}{T_{zyr}}\right)$，因而

$$\frac{T_{zxi}}{T_{zxr}} = \frac{T_{zyi}}{T_{zyr}} = c \text{（常数）} \tag{4.74}$$

所以$T_{zxi} = cT_{zxr}$，$T_{zyi} = cT_{zyr}$，由(4.73)有：

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{T_{zxr} + icT_{zxr}}{T_{zyr} + icT_{zyr}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{T_{zxr}(1+ic)}{T_{zyr}(1+ic)}\right) = tg^{-1}\frac{T_{zxr}}{T_{zyr}} \tag{4.75}$$

由(4.74)有：
$$\frac{T_{zxi}}{T_{zyi}} = \frac{T_{zxr}}{T_{zyr}} \tag{4.76}$$

由(4.75)和(4.76)有：$\theta = tg^{-1}\left(\frac{T_{zxr}}{T_{zyr}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{T_{zxi}}{T_{zyi}}\right)$ (4.77)

但在一般（非二维）情况下，它们并不相等，所以代之以加权平均作为走向的估计值：

$$\theta_0 = \frac{\left(T^2_{zxr} + T^2_{zyr}\right)tg^{-1}\left(T_{zxr}/T_{zyr}\right) + \left(T^2_{zxi} + T^2_{zyi}\right)tg^{-1}\left(T_{zxi}/T_{zyi}\right)}{T^2} \tag{4.78}$$

由测量轴x逆时针方向旋转θ_0角即为构造的走向方向。

4．试算法

上面均是用解析公式确定构造方向，另外还有一种试算的方法，每隔一定的角度，例如2°，计算出$|Z_{xx}|^2 + |Z_{yy}|^2$或$|T_{zx}|^2$一次，最后根据极小值对应的旋转角确定出构造方向。

上面的讨论都是针对二维介质而言的，因为只有二维模型才有确定的构造方向。但在实际情况下，很少有理想的二维构造，至多只不过是在某一方向上延伸的距离相

对来说比较大而已。这时可把它看作准二维模型，仍可按上述方法近似地确定出视构造方向。

二　介质二维度指标

对比二维模型和三维模型张量阻抗元素及倾子元素在复平面中的轨迹可以得出一些可用于判断介质接近二维程度的大地电磁参数。具体地说有如下几种：

1．　二维偏离度（Skewness）

由于在二维模型时张量阻抗元素 Z_{xx}和Z_{yy} 在复阻抗平面内的轨迹的中心在原点处，$Z_{xx}+Z_{yy}=0$，而在三维情况时 Z_{xx}和Z_{yy} 在复阻抗平面内的轨迹的中心在 $Z_1=\frac{1}{2}\left(Z'_{xx}+Z'_{yy}\right)$ 处；Z_{xy}和Z_{yx} 的轨迹的中心在二维和三维情况时都在 $Z_4=\frac{1}{2}\left(Z'_{xy}-Z'_{yx}\right)$处，而且$Z_1$和$Z_4$ 都是不变量。因此可以取比值$\left|Z_1\right|/\left|Z_4\right|$做为判断介质逼近二维的程度，即定义：

$$S=\frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_4\right|}=\frac{\left|Z'_{xx}+Z'_{yy}\right|}{\left|Z'_{xy}-Z'_{yx}\right|} \tag{4.79}$$

为二维偏离度，可用于度量模型接近二维的程度，S 越小，介质结构越接近二维。

但应指出的是，$Z_{xx}+Z_{yy}=0$只是介质为二维构造的必要条件，还不是充分条件。因为纵然$Z_{xx}+Z_{yy}=0$，但可能并不存在能使Z_{xx}和Z_{yy}分别为零的坐标系方位。介质为二维构造的充分条件是：Z_{xx},Z_{yy}和$Z_{xy}+Z_{yx}$具有相同的幅角，并且它们的幅角是不变量（即不随坐标系旋转而变化）。

2．　椭圆轨迹的偏心率

定义为：
$$\beta(\theta)=\frac{Z_{xx}-Z_{yy}}{Z_{xy}+Z_{yx}} \tag{4.80}$$

在三维情况下，将(4.58)式代入上式得：

$$\beta(\theta)=-\frac{Z_0(\theta+45°)}{Z_0(\theta)} \tag{4.81}$$

上式一般为复数。在二维情况下，将式(4.36)代入(4.80)式得到：

$$\beta(\theta)=\frac{(Z_{TE}-Z_{TM})\sin 2\theta}{(Z_{TE}-Z_{TM})\cos 2\theta}=tg(2\theta) \tag{4.82}$$

这时 $\beta(\theta)$ 退化为一实数，即 $\beta(\theta)$ 的虚部为零，或说 $\beta(\theta)$ 的虚部与实部的比为零。所以可以用 $\beta(\theta)$ 的虚部与实部的比（椭圆轨迹的偏心率）做为判断介质二维程度的指标。

3．　椭率

定义为椭圆的短轴与长轴之比，即为：

$$\beta_0=\frac{B_0}{A_0}=\left.\frac{Z_{xx}-Z_{yy}}{Z_{xy}+Z_{yx}}\right|_{\theta=\theta_0}=-\frac{Z_0(\theta_0+45°)}{Z_0(\theta_0)}=\beta(\theta_0)\qquad(4.83)$$

或说椭率就是在构造方向上的偏心率。前面已说过，二维情况下当旋转坐标系时，阻抗元素在复平面中的轨迹退化为直线（见图 4.5，4.6），也就是说椭率为零，所以可以用椭率的大小来表征介质偏离二维的程度。β_0 越小，模型结构越接近于二维。

以上三条是用阻抗元素确定介质的二维偏离度。下面还有三条是用倾子元素确定介质的二维偏离度。

4． 倾子二维偏离度

(4.68)式已经定义了倾子二维偏离度：

$$S_T=\frac{2(T_{zxr}T_{zyi}-T_{zxi}T_{zyr})}{T^2}$$

在二维构造方向上时，因 $Z_{zxr}=0, Z_{zxi}=0$，所以 $S_T=0$，所以它可用于度量介质偏离二维结构的程度。

5． 倾子椭圆轨迹的偏心率

定义：$$\beta_T(\theta)=\frac{T_{zx}}{T_{zy}}\qquad(4.84)$$

在三维情况下，将式(4.65)代入上式可得：

$$\beta_T(\theta)=\frac{T_{zx}}{T_{zy}}=-\frac{T_0(\theta+90°)}{T_0(\theta)}\qquad(4.85)$$

上式一般为复数。在二维情况下，将式(4.63)代入上面的定义式得到：

$$\beta_T(\theta)=\frac{T_{zx}}{T_{zy}}=tg\theta\qquad(4.86)$$

它是一个实数。所以可以用倾子元素的偏心率 $\beta_T(\theta)$ 的虚部与实部之比做为指示介质偏离二维程度的参数。

6． 倾子椭圆椭率

与阻抗椭率类似，可用倾子椭圆椭率（即主轴方向上的倾子椭圆轨迹的偏心率）：

$$\beta_{T0}=\beta_T(\theta_0)=\left.\frac{T_{zx}}{T_{zy}}\right|_{\theta=\theta_0}\qquad(4.87)$$

做为指标。在二维时倾子元素椭圆轨迹也退化为直线（见图 4.8,4.9）,即椭率为零。所以 β_{T0} 越小，介质越接近于二维结构。

第五章　若干二维构造上大地电磁场解析解

非一维情况下，要用解析方法求大地电磁场的严格的数学解，即使在二维构造情况下，仍是比较困难的问题，到目前为止，也只能对少数几何形状简单的二维构造得到了解答。在一般的二维和三维构造情况下，都要借助数值方法求近似解，这将在下章中做详细讨论。在本章内我们将给出一些极简单二维构造条件下大地电磁场问题的解析解。

§5.1　垂直断层上的大地电磁场

这里要研究的地质构造是一个延伸无限长（y 方向）的垂直断层，断层两边介质的电阻率分别为ρ_1和ρ_2，这两种介质位于同一基底上，基底的表面是水平的，位于 h 深度处。为了便于用解析法求解，设基底的电阻率为无穷大或零。对 TE 和 TM 两种极化模式分别进行讨论，坐标系及地质模型如图 5.1 所示，断层走向为 y 方向，z 轴向下。

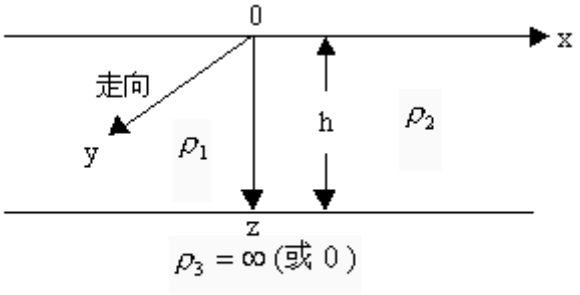


图 5.1　坐标系及地质模型

1、TE 极化高阻基底垂直断层

在 TE 极化情况下，电场只有 Ey 分量，磁场只有 Hx、Hz 分量，电场 Ey 是 x、z 的函数。由麦克斯韦第一方程　$\nabla \times H=\sigma E$ ，再考虑到 Ez=0，Ex=0，得到

$$E_y=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \tag{5.1}$$

由麦克斯韦第二方程　$\nabla \times E=-i\omega\mu H$,可得

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}=i\omega\mu H_x\ ,\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}=-i\omega\mu H_z$$

即 $$H_x = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z} \tag{5.2}$$

$$H_z = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{5.3}$$

(5.2)、(5.3)式代入(5.1)式，可得到

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = K^2 E_y \tag{5.4}$$

其中 $K = \sqrt{i\omega\mu\sigma}$

因电场只有 y 分量，为了书写方便，以下电场不再写角标 y，把断层两侧的电场看成是由正常场和二次场组成的，即

$$E_1 = E_1^0 + P_1 \tag{5.5}$$

$$E_2 = E_2^0 + P_2 \tag{5.6}$$

其中 E_1^0、E_2^0 看成是不受断层影响的正常场，即看成是一维二层介质引起的场，它不随 x 变化，它只与 z 有关，在 ρ_1 一侧由(5.4)式有

$$\frac{\partial^2 E_1^0}{\partial z^2} = i\omega\mu\sigma E_1^0 \tag{5.7}$$

(5.7)式的一般解为

$$E_1^0 = A_1 e^{\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}z} + B_1 e^{-\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}z} \tag{5.8}$$

因而由(5.2)式及(5.8)式得到正常磁场表达式为

$$H_{1x}^0 = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}A_1 e^{\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}z} - \sqrt{i\omega\mu\sigma_1}B_1 e^{-\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}z}\right) \tag{5.9}$$

在地面上（z=0）正常磁场为一常数，设为 H_0。由(5.9)式得

$$\frac{\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}}{i\omega\mu}(A_1 - B_1) = H_0 \tag{5.10}$$

在高阻基底表面和其中磁场是常量，而根据极限条件在无限深处磁场为零，所以在高阻基底表面（z=h）磁场为零，由(5.9)式得

$$\frac{\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}}{i\omega\mu}(A_1e^{\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}h}-B_1e^{-\sqrt{i\sigma\mu\sigma_1}h})=0 \tag{5.11}$$

设 $h_1=\sqrt{\omega\mu\sigma_1}h$ ，则(5.10)、(5.11)式可分别写成

$$A_1-B_1=H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}} \tag{5.12}$$

$$A_1e^{\sqrt{i}h_1}-B_1e^{-\sqrt{i}h_1}=0 \tag{5.13}$$

解(5.12)、(5.13)式得到

$$A_1=-H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}}\frac{e^{-\sqrt{i}h_1}}{2\sinh(\sqrt{i}h_1)}$$

$$B_1=-H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}}\frac{e^{\sqrt{i}h_1}}{2\sinh(\sqrt{i}h_1)}$$

同理在 ρ_2 一侧，类似于(5.8)式，有

$$E_2^0=A_2e^{\sqrt{i\omega\mu\sigma_2}z}+B_2e^{-\sqrt{i\omega\mu\sigma_2}z} \tag{5.14}$$

$$A_2=-H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_2}}\cdot\frac{e^{-\sqrt{i}h_2}}{2\sinh(\sqrt{i}h_2)}$$

$$B_2=-H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_2}}\frac{e^{\sqrt{i}h_2}}{2\sinh(\sqrt{i}h_2)}$$

其中　$h_2=\sqrt{\omega\mu\sigma_2}h$

由断层引起的二次电场 P_1 、P_2 也应满足亥姆霍兹方程，在 ρ_1 一侧为

$$\frac{\partial^2P_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P_1}{\partial z^2}=i\omega\mu\sigma_1P_1 \tag{5.15}$$

因 y 方向无限延伸，P_1 是 x、z 的函数，用分离变量法，(5.15)式的解可写成如下形式

$$P_1=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)g_n(z) \tag{5.16}$$

由于在地表上（z=0）和基底表面上（z=h）的磁场为常数，而在处断层无限远处磁场为正常场，即二次场为零，所以在这两个平面上二次磁场处处为零，也就是说在这两个平面上二次电场为常量，于是 $g_n(z)$可写成自变量为 $\frac{n\pi z}{h}$ 的余弦级数形式

$$g_n(z)=\cos(\frac{n\pi z}{h})$$

(5.16)式变为

$$P_1=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\cos(\frac{n\pi z}{h}) \tag{5.17}$$

(5.17)式代入(5.15)式得到

$$\frac{d^2f_n(x)}{dx^2}-\frac{n^2\pi^2}{h^2}f_n(x)=i\frac{h_1^2}{h^2}f_n(x)$$

上式的解的一般形式为

$$f_n(x)=a_{1n}e^{\pm\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}\,x/h} \tag{5.18}$$

因距断层无穷远处（x→—∞），二次场为零，所以(18)式中的指数只取正号

$$f_n(x)=a_{1n}e^{\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}\,x/h}$$

上式代入(5.17)式得

$$P_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_{1n}\cos(\frac{n\pi z}{h})e^{\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}\,x/h} \tag{5.19}$$

同理在 ρ_2 一侧，应有

$$P_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos(\frac{n\pi z}{h})e^{-\sqrt{n^2\pi^2+ih_2^2}\,x/h} \tag{5.20}$$

下面利用边界条件确定系数 b_n，在断层面 x=0 处电场切分量应连续

$$E_1\big|_{x=0}=E_2\big|_{x=0}$$

由(5.5)、(5.6)式得到 $(E_1^0+P_1)\big|_{x=0}=(E_2^0+P_2)\big|_{x=0}$

即 $$(P_1-P_2)\big|_{x=0}=(E_2^0-E_1^0)\big|_{x=0} \tag{5.21}$$

将(5.19)和(5.20)代入(5.21)，可知 $E_2^0-E_1^0$ 也必为余弦级数形式

$$E_2^0-E_1^0=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos(\frac{n\pi z}{h}) \tag{5.22}$$

由余弦级数理论知　$b_n=\frac{2}{h}\int_0^h(E_2^0-E_1^0)\cos(\frac{n\pi z}{h})dz$

将(5.8)、(5.14)代入上式，经过仔细的积分得到

$$b_n=2H_0h\omega\mu\frac{h_1^2-h_2^2}{(ih_2^2+n^2\pi^2)(ih_1^2+n^2\pi^2)}$$

下面再利用在 x=0 的界面上磁场切线分量连续的条件求系数a_{1n}和a_{2n}

$$H_{1z}\big|_{x=0}=H_{2z}\big|_{x=0}$$

由关系式 $H_z=-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E}{\partial x}$ 有　$(-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_1}{\partial x})\big|_{x=0}=(-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_2}{\partial x})\big|_{x=0}$

即　$(\frac{\partial(E_1^0+P_1)}{\partial x})\big|_{x=0}=(\frac{\partial(E_2^0+P_2)}{\partial x})\big|_{x=0}$

因 E_1^0、E_2^0 与 x 无关，所以有　$(\frac{\partial P_1}{\partial x})\big|_{x=0}=(\frac{\partial P_2}{\partial x})\big|_{x=0}$

将(5.19)、(5.20)代入上式，得到

$$a_{1n}\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}+a_{2n}\sqrt{n^2\pi^2+ih_2^2}=0 \tag{5.23}$$

将(5.8)和(5.14)代入(5.22)得到　$a_{1n}-a_{2n}=b_n$ (5.24)

联立方程(5.23)和(5.24)，解得

$$a_{1n}=2H_0h\omega\mu\frac{h_1^2-h_2^2}{(ih_1^2+n^2\pi^{2)})(ih_2^2+n^2\pi^2)(1+\frac{\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}}{\sqrt{n^2\pi^2+ih_2^2}})}$$

$$a_{2n}=2H_0h\omega\mu\frac{h_2^2-h_1^2}{(ih_2^2+n^2\pi^2)(ih_1^2+n^2\pi^2)(1+\frac{\sqrt{n^2\pi^2+ih_2^2}}{\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}})}$$

ρ_1一侧地面电场为

$$E_1 = (E_1^0 + P_1)\big|_{z=0} = -H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}}cth(\sqrt{i}h_1) + H_0 2h\omega\mu(h_1^2 - h_2^2)U_1$$

其中 $U_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}\,|x|/h}}{(ih_1^2+n^2\pi^2)(ih_2^2+n^2\pi^2)(1+\frac{\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}}{\sqrt{n^2\pi^2+ih_2^2}})}$　　(5.25)

ρ_1一侧地面阻抗为

$$Z_1 = -\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}}cth(\sqrt{i}h_1) + 2h\omega\mu(h_1^2-h_2^2)U_1$$

$$= \omega\mu h[-\frac{\sqrt{i}}{h_1}cth(\sqrt{i}h_1) + 2(h_1^2 - h_2^2)U_1] \qquad (5.26)$$

将(5.25)、(5.26)式中 h 的脚标 1，2 互换，即得到 ρ_2 一侧的地面阻抗表达式。最后由下式求视电阻率和相位　$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu}|Z|^2$　，$\theta = \tan^{-1}(\frac{I_m(Z)}{R_e(Z)})$

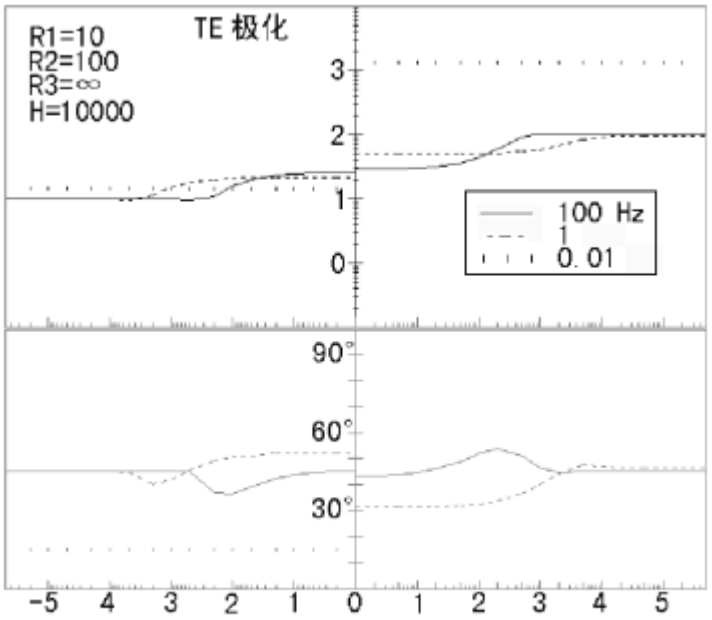


图 5.2　高阻基底垂直断层 TE 极化 MT 响应

图中上部为视电阻率（对数坐标），竖坐标上的数字为视电阻率取对数后的值，如 2 表示是 100ΩM。图的下部为相位。横坐标表示到断层的距离，单位为米，为了能看清断层附近的影响情况又能看清远离断层处的影响情况，采用了对数坐标，如 3 表示到断层的距离为 1000 米。图中给出了三种频率的电磁响应。

2、TE 极化低阻基底垂直断层

不再作详细推导，仅给出推导结果。但需注意的是：在导体表面（z=h）不是磁场为零而是电场为零。地面电场为常量，根据相对 z=h 平面的对称性，将深度扩展二倍，这样在地面和 z=2h 处电场均为常量，于是可用自变量为 $\frac{n\pi z}{2h}$ 的余弦级数来表示。又要满足 z=h 处的电场为零，所以 n 只能取奇数。经过与高阻基底类似的推导，可得 ρ_1 一侧阻抗为

$$Z_1=\omega\mu[-\sqrt{i}\frac{h}{h_1}\tanh(\sqrt{i}h_1)+32(h_1^2-h_2^2)hU_1] \tag{5.27}$$

其中

$$U_1=\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n^2\pi^2+4ih_1^2}\,|x|/2h}}{(n^2\pi^2+i4h_1^2)(n^2\pi^2+i4h_2^2)(1+\frac{\sqrt{n^2\pi^2+i4h_1^2}}{\sqrt{n^2\pi^2+i4h_2^2}})} \tag{5.28}$$

ρ_2 一侧阻抗可将(5.27)、（5.28）式中 h 的角标 1 和 2 互换而得到。

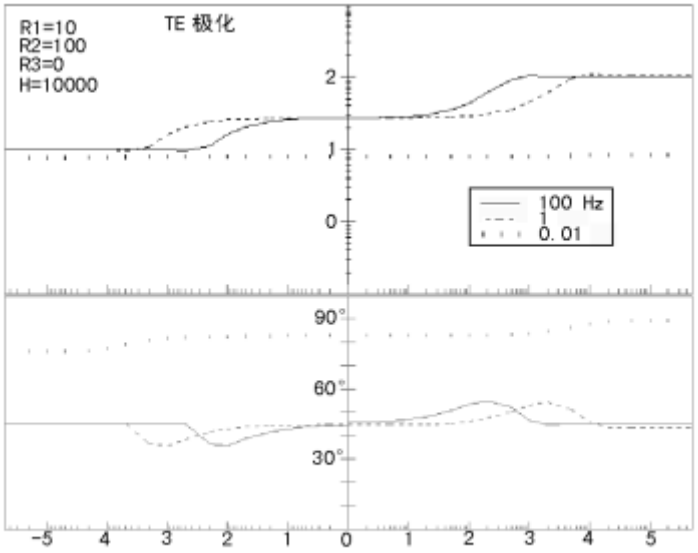


图 5.3　低阻基底垂直断层 TE 极化 MT 响应

3、TM 极化高阻基底垂直断层

不作详细推导，仅给出推导结果，感兴趣的读者可参看文献 1。ρ_1 一侧的阻抗为

$$Z_1=\frac{\omega\mu h}{h_1^2}[-\sqrt{i}h_1\frac{1+i\tanh(h_1/\sqrt{2})\tan(h_1/\sqrt{2})}{\tanh(h_1/\sqrt{2})+i\tan(h_1/\sqrt{2})}+2\pi^2 i(h_1^2-h_2^2)U_1] \qquad (5.29)$$

其中 $U_1=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{n^2 e^{-\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}\,|x|/h}}{(n^2\pi^2+ih_1^2)(n^2\pi^2+ih_2^2)(1+\frac{h_2^2\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}}{h_1^2\sqrt{n^2\pi^2+ih_2^2}})}$ (5.30)

ρ_2 一侧的阻抗也只须将 h 的角标 1 和 2 互换即可。

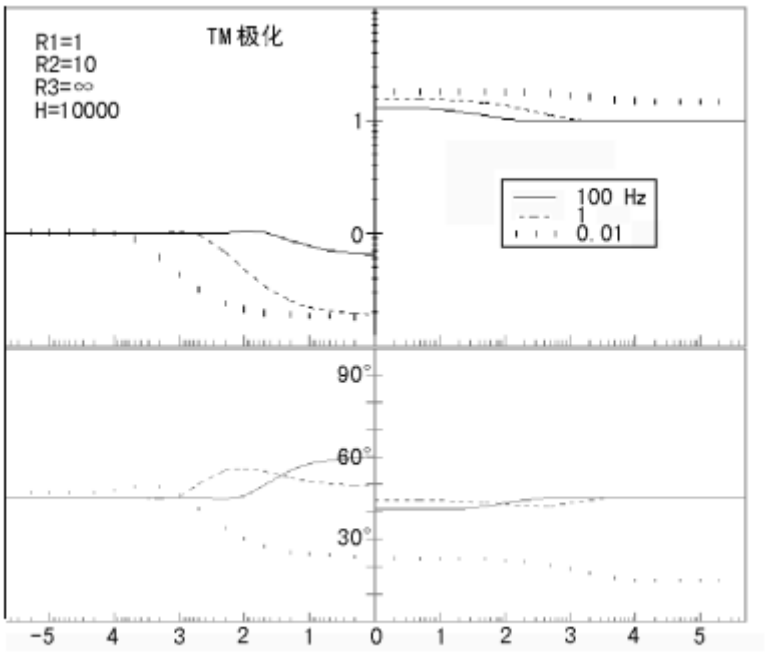


图 5.4　高阻基底垂直断层 TM 极化 MT 响应

4、TM 极化低阻基底垂直断层

不作详细推导，仅给出推导结果，感兴趣的读者可参看文献 1。ρ_1 一侧阻抗为

$$Z_1=\frac{\omega\mu h}{h_1^2}[-\sqrt{i}h_1\frac{\tanh(h_1/\sqrt{2})+i\tan(h_1/\sqrt{2})}{1+i\tanh(h_1/\sqrt{2})\tan(h_1/\sqrt{2})}+8\pi^2 i(h_1^2-h_2^2)U_1] \qquad (5.31)$$

其中 $U_1 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \dfrac{n^2 e^{-\sqrt{n^2\pi^2+4ih_1^2}\,|x|/2h}}{(n^2\pi^2+i4h_1^2)(n^2\pi^2+i4h_2^2)\left(1+\dfrac{h_2^2\sqrt{n^2\pi^2+i4h_1^2}}{h_1^2\sqrt{n^2\pi^2+i4h_2^2}}\right)}$　　(5.32)

ρ_2 一侧的阻抗也只须将 h 的角标 1 和 2 互换。

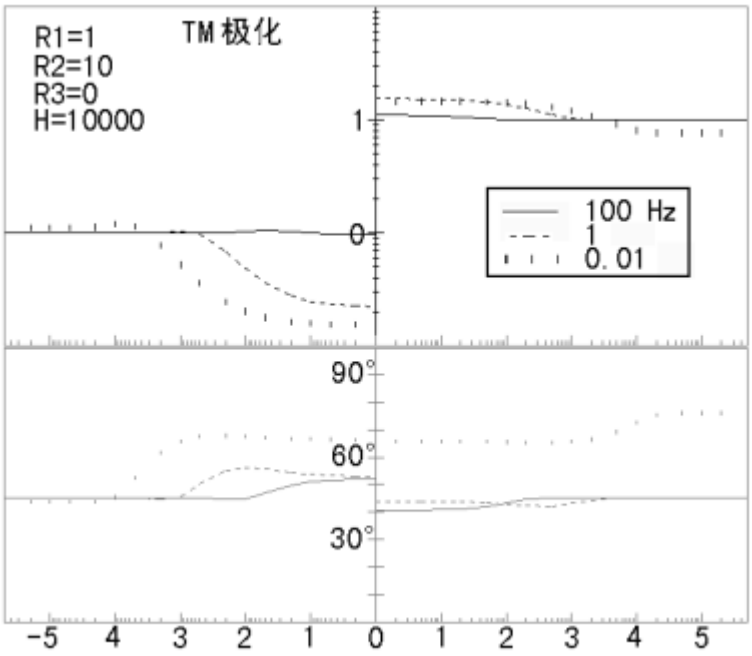


图 5.5　低阻基底垂直断层 TM 极化 MT 响应

由前面的几个图可以看出：

1. 在 TE 极化情况下，不论高阻基底还是低阻基底，当频率较高时，断层附近的视电阻率受到断层的影响，低阻一侧视电阻率高于真电阻率，高阻一侧视电阻率低于真电阻率，断层似乎是一种“滤波器”，它力求使断层两侧的视电阻率趋于连续，但当频率较低时无这种作用。

2. TM 极化情况下，在断层附近的视电阻率受到断层的影响，在低阻一侧视电阻率低于真电阻率，在高阻一侧高于真电阻率。断层似乎是一种“放大器”，它放大了断层两侧的电阻率差别。并且随着频率的降低，这种放大作用越明显。

3. 在 TM 极化情况下，当频率较高时，断层具有分离相位的作用，且分离方向相同，高阻一侧相位低于 45^0，低阻一侧相位高于 45^0。

第二节　岩脉上的大地电磁场

这里要研究的地质模型是一个走向上（y 方向）无限延伸的垂直岩脉，其下部为高阻（为推导方便设电阻率为∞）基底或低阻（设电阻率为 0）基底，基底表面是水平的，深度为 h，岩脉的电阻率为 ρ_1，宽度为 L，岩脉两边介质的电阻率为 ρ_2，坐标系及地质模型如图 5.6 所示。

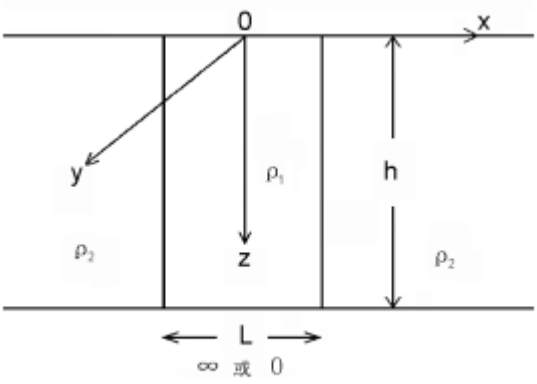


图 5.6　岩脉模型及坐标系

.　下面分四种情况分别进行讨论。

1　TE 极化高阻基底岩脉

在 TE 极化情况下，电场只有 Ey 分量，磁场只有 Hx、Hz 分量，电场 Ey 是 x、z 的函数.由麦克斯韦方程得到

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}=i\omega\mu\sigma E_y$$

因电场只有 y 分量，为了书写方便，以下电场不再写角标 y。把岩脉上和两侧的电场看成是由正常场（E^0）和二次场（P）组成的，在岩脉上电场写成 $E_1=E_1^0+P_1$,在两侧电场写成 $E_2=E_2^0+P_2$

（1） 在岩脉上

E_1^0 看成是仅由 ρ_1（无限宽,无 ρ_2）和电阻率为∞的第二层（或电阻率为 0 的第二层）组成的二层介质的电场,它仅是 z 的函数,满足

$$\frac{\partial^2 E_1^0}{\partial z^2}=i\omega\mu\sigma_1 E_1^0$$

上式的一般解为 $E_1^0=A_1e^{\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}Z}+B_1e^{-\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}Z}$

根据电场与磁场之间的关系,可得到正常磁场表达式为

$$H_{1x}^0=\frac{1}{i\omega\mu}(A_1\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}e^{\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}Z}-B_1\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}e^{-\sqrt{i\omega\mu\sigma_1}Z})$$

设 $h_1=\sqrt{\omega\mu\sigma_1}h$,再根据地面上（z=0）正常磁场为一常数（设为 H_0）,在高阻基底表面（z=h）正常磁场为 0,得到方程组:

$$A_1e^{\sqrt{i}h_1}-B_1e^{-\sqrt{i}h_1}=0$$

$$A_1-B_1=H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}}$$

解得

$$A_1=-H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}}\frac{e^{-\sqrt{i}h_1}}{2\sinh(\sqrt{i}h_1)}$$

$$B_1=-H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}}\frac{e^{\sqrt{i}h_1}}{2\sinh(\sqrt{i}h_1)}$$

由岩脉引起的二次电场 P_1 应满足

$$\frac{\partial^2P_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P_1}{\partial z^2}=i\omega\mu\sigma_1P_1 \tag{5.33}$$

因 y 方向无限延伸,P_1 是 x、z 的函数,(5.33)式的解可写成如下形式

$$P_1=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)g_n(z) \tag{5.34}$$

由于在地表上和基底表面上二次磁场为零,所以在该二平面上二次电场为常量,于是 $g_n(z)$可写成余弦级数形式,(5.34)式变为

$$P_1=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\cos(\frac{n\pi z}{h}) \tag{5.35}$$

(5.35)式代入(5.33)式得到

$$\frac{d^2f_n(x)}{dx^2}-\frac{n^2\pi^2}{h^2}f_n(x)=i\frac{h_1^2}{h^2}f_n(x)$$

上式的解的一般形式为 $f_n(x)=a_{1n}e^{\pm q_1 x/h}$ (5.36)

其中 $q_1=\sqrt{n^2\pi^2+ih_1^2}$

(5.36)式代入(5.35)式得

$$P_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_{1n}\cos(\frac{n\pi z}{h})(e^{-q_1 x/h}+e^{q_1 x/h}) \qquad (-\frac{L}{2}\le x\le\frac{L}{2}) \tag{5.37}$$

（2） 在两侧

根据类似的考虑,可得

$$E_2^0=A_2e^{\sqrt{i\omega\mu\sigma_2}Z}+B_2e^{-\sqrt{i\omega\mu\sigma_2}Z}$$

$$P_{2右}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos(\frac{n\pi z}{h})(e^{-q_2 x/h}) \qquad (x\ge\frac{L}{2}) \tag{5.38}$$

$$P_{2左}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos(\frac{n\pi z}{h})(e^{q_2 x/h}) \qquad (x\le-\frac{L}{2})$$

其中 $q_2=\sqrt{n^2\pi^2+ih_2^2}$， $h_2=\sqrt{\omega\mu\sigma_2}h$

因两侧是对称的,仅计算一侧即可。

（3） 利用边界条件求系数

利用边界上电场切线分量连续的条件

$$E_1\Big|_{x=\frac{L}{2}}=E_2\Big|_{x=\frac{L}{2}}$$

即 $(E_1^0+P_1)\Big|_{x=\frac{L}{2}}=(E_2^0+P_2)\Big|_{x=\frac{L}{2}}$， 也即 $(P_1-P_2)\Big|_{x=\frac{L}{2}}=(E_2^0-E_1^0)\Big|_{x=\frac{L}{2}}$ (5.39)

将(5.37)和(5.38)代入(5.39)得

$$E_2^0-E_1^0=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos(\frac{n\pi z}{h}) \tag{5.40}$$

$$b_n=2H_0h\omega\mu\frac{h_1^2-h_2^2}{q_2^2q_1^2}$$

将(5.37),(5.38),(5.40)代入(5.39)得

$$2a_{1n}\cosh(q_1 L/2h) - a_{2n}e^{-q_2 L/2h} = b_n \tag{5.41}$$

利用磁场切线分量在边界上连续的条件

$$H_{1z}\Big|_{x=\frac{L}{2}} = H_{2z}\Big|_{x=\frac{L}{2}}$$

可得到

$$2a_{1n}q_1\sinh(q_1 L/2h) = -a_{2n}q_2 e^{-q_2 L/2h} \tag{5.42}$$

联立方程(5.41)和(5.42),解得

$$a_{1n} = \frac{q_2}{q_2 - q_1}e^{q_1 L/2h}b_n$$

$$a_{2n} = \frac{q_1}{q_2 - q_1}e^{q_2 L/2h}b_n$$

（4） 求电场及阻抗

岩脉上地面电场为

$$E_1 = (E_1^0 + P_1)\big|_{z=0}$$

$$= -H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}}ctgh(\sqrt{i}h_1) + \sum_{n=1}^{\infty}a_{1n}e^{-q_1 x/h} \quad (0 \le x \le \frac{L}{2}) \tag{5.43}$$

将上式除以磁场 H_0 即得岩脉上地面阻抗 Z_1.

岩脉右侧地面电场

$$E_2 = (E_2^0 + P_2)\big|_{z=0}$$

$$= -H_0\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_2}}ctgh(\sqrt{i}h_2) + \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}e^{-q_2 x/h} \quad (x \ge \frac{L}{2}) \tag{5.44}$$

将上式除以磁场 H_0 即得岩脉右侧地面阻抗 Z_2.

最后由下式求视电阻率和相位

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu}|Z|^2, \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{I_m(Z)}{R_e(Z)})$$

图 5.7 是 TE 极化高阻基底情况下 MT 电磁响应之例

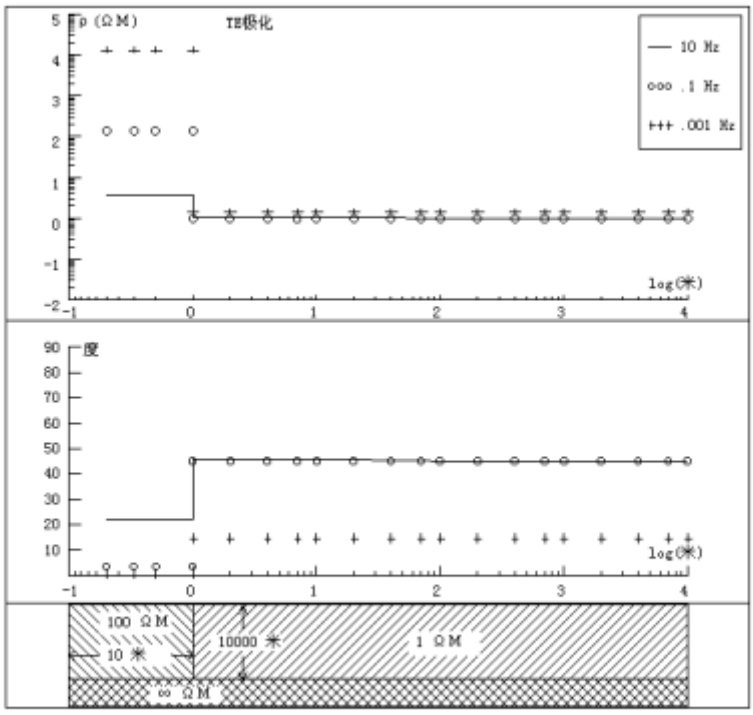


图 5.7　TE 极化高阻基底 MT 电磁响应

2　TE 极化低阻基底岩脉

不再作详细推导,仅给出推导结果。但应注意的是：在低阻基底导体表面（z=h）不是磁场为零而是电场为零，地面电场为常量。根据相对 z=h 平面的对称性，将深度扩展二倍,这样在地面和 z=2h 处电场均为常量,于是可用自变量为 $\frac{n\pi z}{2h}$ 的余弦级数来表示 $g_n(z)$ 函数，而又要满足 z=h 处的电场为零，所以 n 只能取奇数。经过与高阻基底类似的推导，可得岩脉上和右侧地面阻抗分别为：

$$Z_1 = -\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}}tgh(\sqrt{i}h_1) + 2\sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_{1n}\cosh(v_1\frac{|x|}{2h}) \quad (|x| \le \frac{L}{2}) \tag{5.45}$$

$$Z_2 = -\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma_2}}tgh(\sqrt{i}h_2) + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_{2n}e^{-v_2|x|/2h} \qquad (|x| \ge \frac{L}{2}) \tag{5.46}$$

其中

$$a_{1n}=\frac{v_2 b_n}{2v_2\cosh(v_1 L/4h)+v_1\sinh(v_1)e^{(v_2-v_1)L/4h}}$$

$$a_{2n}=-\frac{v_1 b_n}{2v_2\coth(v_1 L/4h)+v_1 e^{-v_1 L/4h}}$$

$$b_n=32\omega\mu h\frac{h_1^2-h_2^2}{v_1^2 v_2^2}$$

$$v_1=\sqrt{n^2\pi^2+i4h_1^2}\ ,\qquad v_2=\sqrt{n^2\pi^2+i4h_2^2}$$

图 5.8 是 TE 极化低阻基底 MT 电磁响应之例。

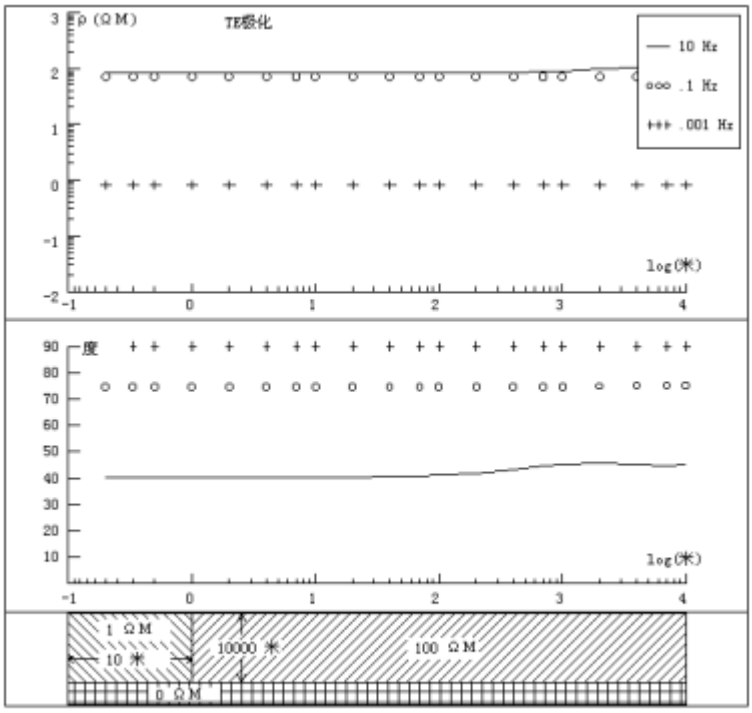


图 5.8　TE 极化低阻基底 MT 电磁响应

3　TM 极化高阻基底岩脉

忽略推导过程，仅给出最后结果，感兴趣的读者可参看文献 1。岩脉上方的地面阻抗为：

$$Z_1=\sqrt{i}\frac{\omega\mu h}{h_1}\coth(\sqrt{i}h_1)-2\pi^2 i\frac{\omega\mu h}{h_1^2}(h_1^2-h_2^2)U_1 \qquad (5.47)$$

其中： $$U_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cosh(\frac{k_{1n}x}{h})}{k_{1n}^2k_{2n}^2[\cosh(\frac{k_{1n}l}{2h})+\frac{k_{1n}h_2^2}{k_{2n}h_1^2}\sinh(\frac{k_{1n}}{2h})]}$$

岩脉两侧的地面阻抗为：

$$Z_2=\sqrt{i}\frac{\omega\mu h}{h_2}\coth(\sqrt{i}h_2)-2\pi^2 i\frac{\omega\mu h}{h_2^2}(h_2^2-h_1^2)U_2 \qquad (5.48)$$

其中： $$U_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\exp(\frac{k_{2n}l}{2h})\sinh(\frac{k_{1n}l}{2h})\exp(-\frac{k_{2n}|x|}{h})}{k_{1n}^2k_{2n}^2[\sinh(\frac{k_{1n}l}{2h})+\frac{k_{2n}h_1^2}{k_{1n}h_2^2}\cosh(\frac{k_{1n}l}{2h})]}$$

图 5.9 是 TM 极化高阻基底 MT 电磁响应之例。

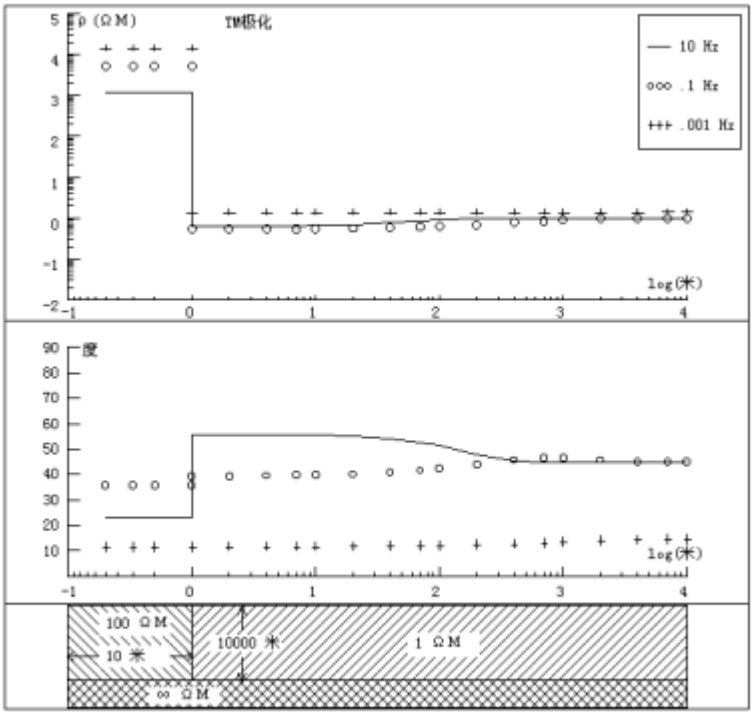


图 5.9 TM 极化高阻基底 MT 电磁响应

4 TM 极化低阻基底岩脉

忽略推导过程，仅给出最后结果，感兴趣的读者可参看文献 1。岩脉上方的地面阻抗为：

$$Z_1 = \sqrt{i}\frac{\omega\mu h}{h_1}\tanh(\sqrt{i}h_1) - 8\pi^2 i\frac{\omega\mu h}{h_1^2}(h_1^2 - h_2^2)U_1 \tag{5.49}$$

其中：　$$U_1 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{n^2\cosh(k_{1n}x/2h)}{k_{1n}^2k_{2n}^2[\cosh(\frac{k_{1n}l}{4h}) + \frac{k_{1n}h_2^2}{k_{2n}h_1^2}\sinh(\frac{k_{1n}l}{4h})]}$$

在岩脉两侧地面阻抗为：

$$Z_2 = \sqrt{i}\frac{\omega\mu h}{h_2}\tanh(\sqrt{i}h_2) - 8\pi^2 i\frac{\omega\mu h}{h_2^2}(h_2^2 - h_1^2)U_2 \tag{5.50}$$

其中：　$$U_2 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{n^2\exp(k_{2n}l/4h)\sinh(k_{1n}l/4h)\exp(-k_{2n}x/2h)}{k_{1n}^2k_{2n}^2[\sinh(k_{1n}l/4h) + \frac{k_{2n}h_1^2}{k_{1n}h_2^2}\cosh(\frac{k_{1n}l}{4h})]}$$

图 5.10 是 TM 极化低阻基底 MT 电磁响应之例。

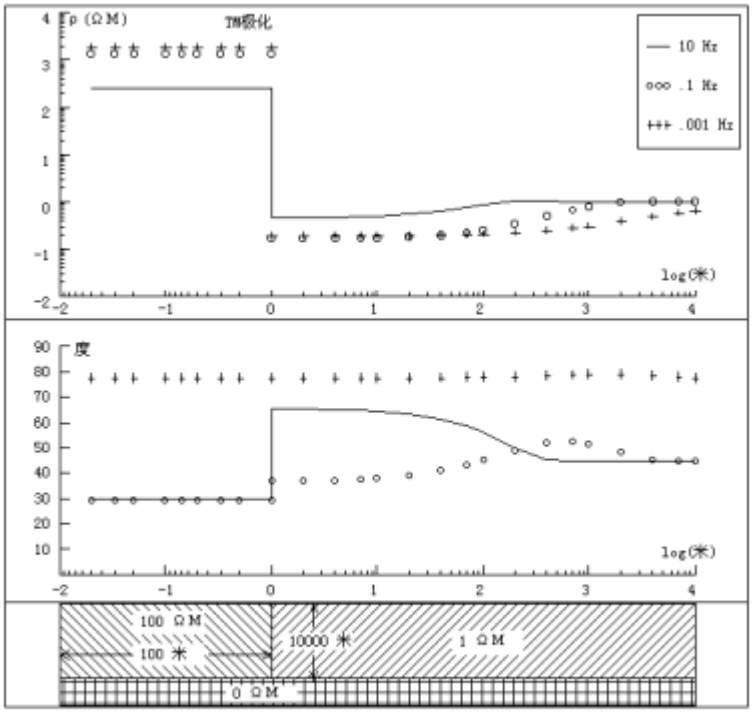


图 5.10　TM 极化低阻基底 MT 电磁响应

第六章　大地电磁测深数据处理

大地电磁测量是在地表上记录彼此正交的电场和磁场分量，经过适当的数学处理能得到反映地下地电结构的视电阻率曲线、相位曲线及其它有关资料。本章将叙述与大地电磁测深有关的问题，包括仪器与野外工作方法，数据处理的原理和技术，最后再讨论噪音影响等问题。

§6.1　仪器与野外工作方法

一　仪器

为适应石油、地热等矿产资源勘探与地壳构造研究的需要，在大地电磁测深中所记录的大地电磁场信号的频率大致从 10^{-4}Hz 到 10^{4}Hz。在这样宽的频率范围内，天然电磁场强度变化很大，从图 1.9 可看出，磁场强度最小出现在 1Hz 至 10Hz 附近，大约只有 10^{-3}nT，往高频和低频方向场强逐渐增加。在磁暴发生时最大值可达 100nT，变化范围竟达 5、6 个数量级，这就要求观测系统应具有很宽的通频带、很高的灵敏度、很强的抗干扰能力、以及很大的动态范围。

为了保证数字处理的精度，特别是低频信号的精度，需要取得足够长的数据段以便尽量减小截断效应的影响，一个测点上往往要连续记录 5、6 个小时甚至更长时间。在这样长的时间内测点周围的条件，比如温度、湿度将有很大变化，因此又要求仪器必需具有很好的稳定性，很小的温度漂移。

就大地电磁测深仪器的结构而言，它主要包括模拟系统和数字采集系统两部分。模拟系统包括接收微弱信号的电、磁场传感器、前置放大器和滤波器。滤波器主要有去假频滤波和抗 50Hz 工业电流谐波干扰的陷波器。数字采集系统是将前面采集到的模拟信号进行数字采样，记录在磁盘上。除这两部分以外还需要保证各部份协调工作的控制系统以及电源系统和监视系统。

电极　对于单站方法，通常采用四个电极作为电场接收器。以测点为中心，东南西北四个方向各埋设一个，南北向两个电极接收南北向（称 x 向）电场，东西向两个电极接收东西向（称 y 向）电场。以相对方向的两个电极间的电位差求出平均场强作为该测点的电场强度。电极距不能过长，因为：①过长，所求出的平均场强不能代表该点的真正场强；②过长会增加铺线的困难；③过长可能使信号过大，超出仪器的输入范围。电极距也不能过短，因为：①过短可能使信号过小，减小了信噪比，影响测量精度；②过小易受地表不均匀性的影响。一般为 100 米左右。

电极分金属电极和不极化电极两类。前者如铅板电极，这类电极易受极化作用影响，需要较长的稳定时间，因此在观测时往往要提前埋设。后者，不极化电极有铜-硫酸铜、铅-氯化铅等不同类型，它们的稳定性都优于金属电极。由于所记录的大地电场很微弱，所以电极选择不当或埋设不合理也会带来严重的噪声。比如两个电极附近温度、湿度、岩石电阻率相差很大，或者不极化电极的瓷罐的渗透性有明显差异都会影响观测精度。图 6.1 为 LGB-1 型不极化电极。

磁传感器　磁传感器也称磁探头，用于测量微弱的地磁脉动信号。目前用得最广的还是感应式传感器。在坡莫合金棒上缠饶数万匝线圈做成长螺线管，通过测量感应线圈中的感应电动势来测量磁场强度的变化。

感应线圈中的电动势为：

$$\varepsilon = -nA\frac{dB}{dt}$$

其中 A 为线圈的截面积，n 为圈数。感应线圈中的电动势与磁感应强度随时间的变化率成正比。显然这对于探测高频信号相对有利。对地磁脉动来说，高频信号正好比低频信号弱得多。因此这种磁传感器有一定的优越性。图 6.2 为一种磁探头外形

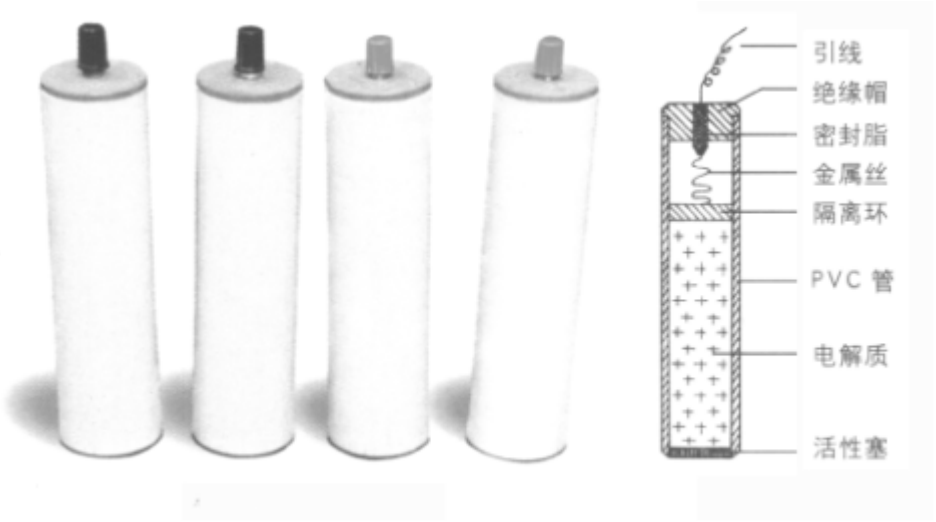


图 6.1　LGB-1 型不极化电极

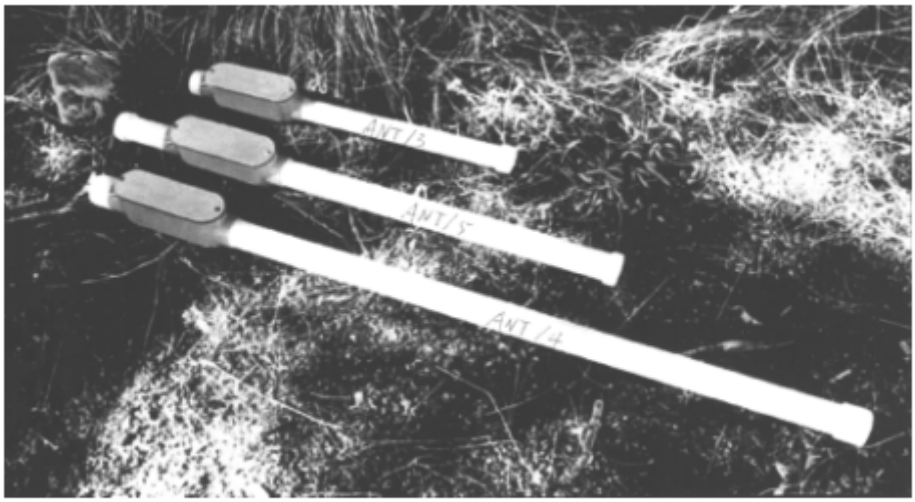


图 6.2　ANT 型磁探头

除感应式传感器外，超导磁力仪是近年来新发展的测量地磁变异的仪器。超导磁力仪是将磁通转换成电压的仪器。尤其对于低频信号的测量，超导磁力仪是一种先进

的磁传感器。但由于技术较复杂，价格昂贵，目前尚不能普及。

大地电磁测深仪 目前较新型的大地电磁测深仪有：德国 METRONIX 公司的 GMS-06 大地电磁测深仪（图 6.3），美国 ZONGE 公司的 GDP-32^{II} 大地电磁测深仪(图 6.4)，加拿大 PHOENIX 公司的 V5 大地电磁测深仪（图 6.5）。



图 6.3　GMS-06　MT 仪



图 6.5　V5　MT 仪



图 6.4　GDP32II MT 仪

二　野外工作方法

大地电磁测深的野外工作包括选点、布极、观测等内容。我们观测的是频率为10^{-4}~10^{3}Hz 的近似平面波的天然电磁场。一切无线电波、工业游散电流等都被视为干扰。在工业发达的地区干扰现象往往特别严重，加之大地电磁场非常微弱，所以严格操作方法，有效地避免或抑制干扰、提高原始数据质量对大地电磁测深尤为重要。

1．选点

从根本上说测点的选择是由地质任务所确定的，但在具体工作中应尽量考虑地形与环境因素。测区地形应开阔、平坦、一般地形高差不大于极距长度的 10%。注意避免在小丘、河谷附近布置测点。测点要尽量远离电台、电站、高压输电线、铁道等工业设施。此外也应注意两个电极周围的地表条件，如温度、湿度、地表岩石的电阻率等应大致相同，避免极化电位差不同因素造成的影响。

近年来大地电磁测深中广泛使用了远参考站的方法。为了能使用参考站的电磁信号作为基站的信号检测的参考信号，需要保证两站的大地电磁场信号相关而噪音不相关，因此应避开同一噪音源的干扰，但两站间距离也不能太大，一般不超过 5km。

2．布极

布极分单站测量和多站测量。

(1) 单站测量。电极一般布置成“十”字形，x 轴通常取磁北方向，y 轴指向东。角度误差小于 1°。不极化电极应与土壤紧密接触，注意清除植物根系。两对电极间距离相等，误差不超过极距的 1%，并取等长的电线连接，避免传输线长短不一造成的干扰。测量电线用屏蔽电缆接入仪器车。

在受地形限制不适于“十”型布极时，也可采用“L”型或“T”型。同样注意保持测线彼此垂直，中心点可设置在角顶。电极距长度的选择根据大地电场强度而定。

水平磁场传感器一般离中心 10 米左右，方向互相垂直，埋入地下 30~40 厘米。垂直磁场传感器有两种类型，一种也是磁棒，和水平的传感器相同，垂直埋入地下，另一种采用边长为几米的空心廻线，水平地置于地表。注意避免与其它信号传输线交叉或相距太近。

参考站的布极方式与基站相同，两站间可用屏蔽电缆连接，也可用其它方式，如同步钟，无线电传输来联络。

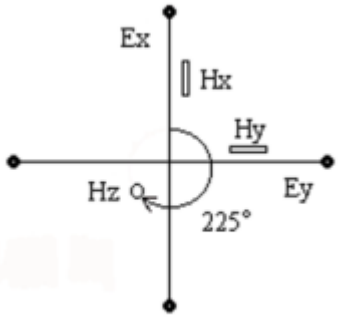


图 6.6 “十”字型布极方法

“十”字型布极方式如图 6.6 所示。

(2) 多站测量。目前大地电磁测深已向多站同时测量方向发展，一方面同时使用多台仪器在不同测站测量，使用 GPS 同步。另一方面一台仪器同时接多组电极，（4 个电极为一组）在多站测量。以 GMS-06 仪器为例，其连线方法如图 6.7 所示。

以 GDP32^{II} 仪为例，多站布线方法如图 6.8

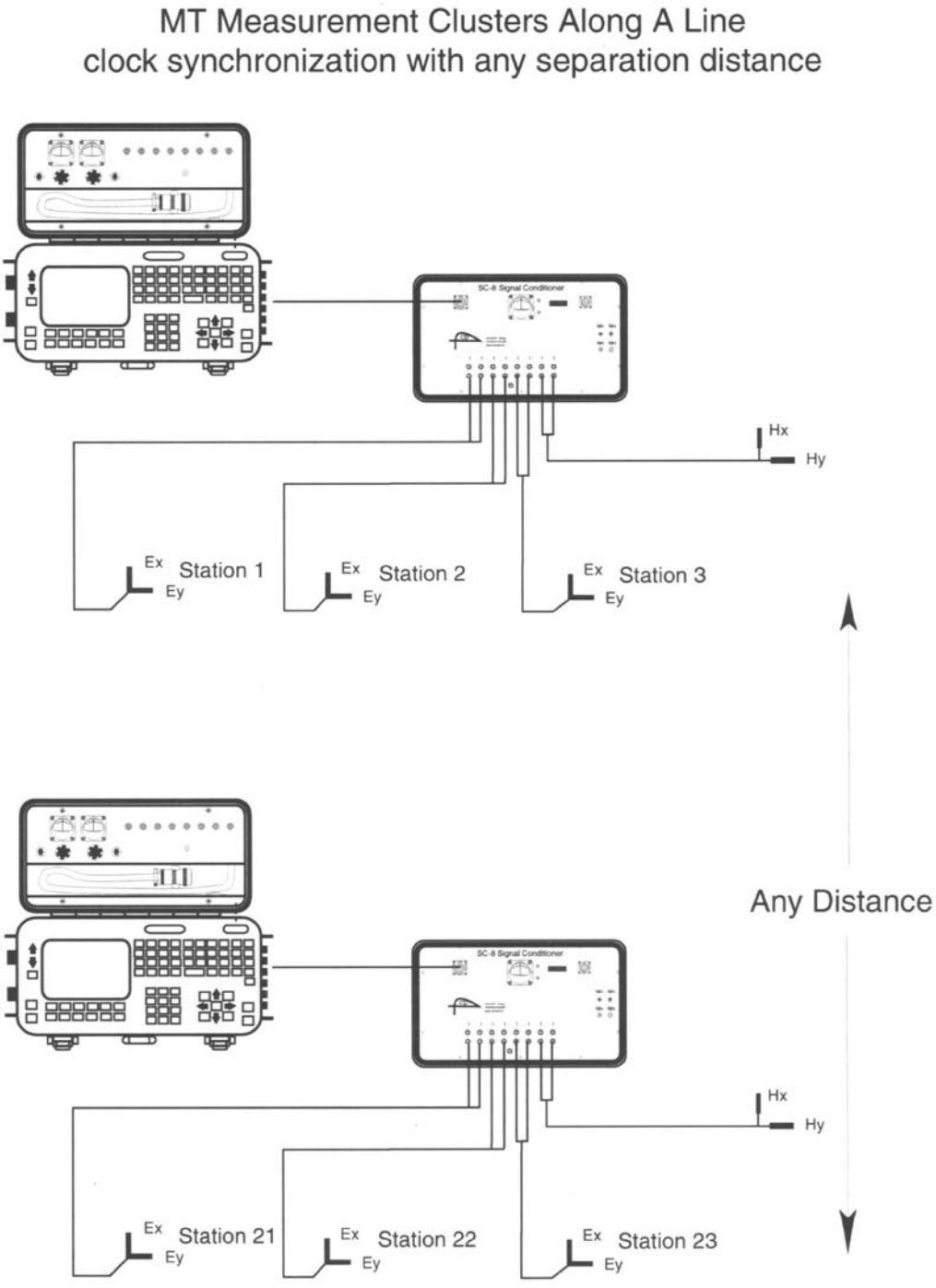
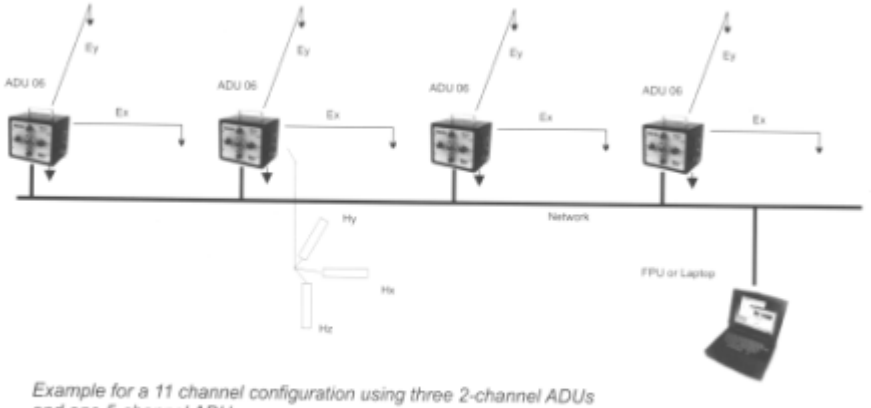


图 6.8　GDP32II MT 仪多站布线示意图



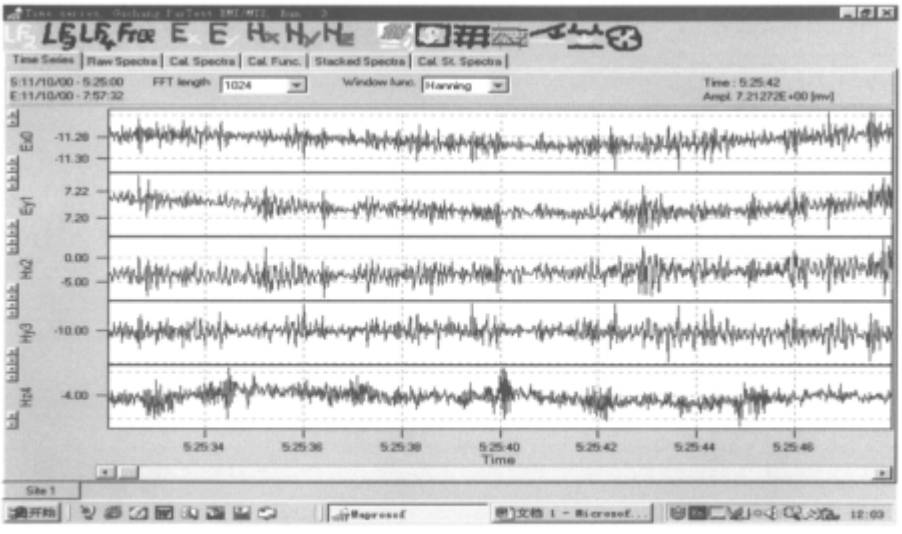
Example for a 11 channel configuration using three 2-channel ADUs and one 5-channel ADU

图 6.7　GMS-06 MT 仪多站布线示意图

3．观测

在正式观测前对仪器各部分要进行认真检查，包括电池电压是否足够使用，应开的开关是否打开，连线是否接错，接地电阻是否正常。在正确无误后进行正式记录。在一点上记录时间的长短与勘探深度有关，一般要求电磁波最低频成分的穿透深度大于目标体深度。此外在考虑到数据处理时截断效应的影响，记录长度至少要大于要分析的信号的最大周期的 5 至 6 倍。

某些仪器在测量时不能显示时间域信号，某些仪器在测量时能显示时间域信号。如图 6.9 为 GMS-06 仪器在测量时在监视器（笔记本电脑）上显示的时间域信号。



2000 年 11 月 10 日在河北固城测量的时间序列，测量时间为 3 个小时。

图 6.9　五道大地电磁场时序信号

§6.2　时频变换—傅里叶分析

在野外测量时首先得到的是时间域信号，而以后的阻抗计算、视电阻率的计算都是在频率域中进行，因此需要将时间域电磁场信号先变为频率域信号。傅里叶分析是获取频谱信息的基本方法，在大地电磁测深数据处理中广泛使用。任一个大地电磁场都可以看成是一个连续的时间函数 x(t)。为便于计算机处理需要将 x(t)离散化，形成一个时间序列，同时还要作其它必要的处理。这个过程可以称为预处理。

1．预处理　经采样后形成的时间序列为：

$$x(n\Delta) \qquad n=1,2,\cdots,N$$

Δ 为采样间隔。根据采样定理：

$$\Delta \le \frac{1}{2f_N}$$

f_N 为折叠频率，表示在采样间隔为 Δ 时，时间序列 $x(n\Delta)$ 所能恢复的信号的最高频率。在时间信号中凡高于这个频率的成分应该在采样之前滤去，否则将出现假频效应。图 6.10 是表示假频效应的示意图。图中 t_1,t_2,t_3,t_4 为采样点，$\Delta=\pi/2$，折叠频率 $f_N=1/\pi$，这时凡频率小于 f_N 的信号都可以通过离散傅里叶变换而求得。但高于这个频率的成分就不这样简单了。比如图中 sin3t 谐波，在这样的采样间隔下不可能恢复，这是很自然的。因为 3 个周期只有 4 个采样点，平均每个周期只有 1.3 个采样点，它可能被误为是 sint 的信号，并且叠加到它的上面。而且凡高于 f_N 的频率成分都可能以 f_N 为中心折叠到低频部分，造成所谓高频混淆，即假频效应。因此对不同的采样档应该配置相应的去假频滤波器。一般去假频滤波都在硬件中实现，有时却需要在软件中实现。

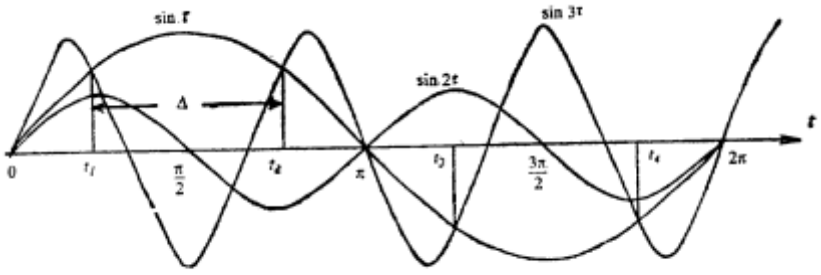


图 6.10　假频效应示意图

对于大地电磁场来说，**如果**将它看成以 $2T_0$ 为周期的复杂振动的话，那么在任一段区间[-T_0，T_0]上，就可以分为无限多个简谐振动，用傅里叶级数表达为：

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i2n\pi f_0 t} \tag{6.1}$$

X_n 为傅里叶系数：$X_n=\dfrac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} x(t)e^{-i2n\pi f_0 t}dt$ (6.2)

$f_0 = 1/2T_0$ 为基频。这个频谱在频率域内具离散的特征，$|X_n|$ 和 $ArgX_n$ 分别为它的振幅谱和相位谱。

然而，**实际上**大地电磁场并不像设想的那样是一个周期性振动，可以用傅里叶级数表达。野外所提供的记录都是一个无限连续的非周期性振动。处理这类信号应该运用傅里叶积分。(6.1)、(6.2)将为下面一对傅里叶积分所代替：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \tag{6.3}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \tag{6.4}$$

$X(f)$ 为无限长的非周期性的大地电磁场的频谱，它与周期性信号的频谱的主要区别在于这是一个连续谱，她可以在 $(-\infty, \infty)$ 整个频率域内的任一点上取值。根据尤拉公式，(6.4)式可写成：

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \\ &= A(f) + iB(f) \end{aligned}$$

相应的振幅谱和相位谱为：

$$|X(f)| = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)} \quad , \qquad ArgX(f) = tg^{-1}\frac{B(f)}{A(f)}$$

然而，我们注意到(6.4)式中的积分限是 $-\infty$到∞，这意味着被积函数 $x(t)$ 应该无限长。这个要求实际上无法满足，因为任何记录都只是有限的，或者说仅是从长记录中截取一段，比如从-T 到 T。这就将(6.4)所定义的区间 $(-\infty, \infty)$ 的广义积分变为区间 $[-T, T]$ 上的定积分，相当于用下式代替(6.4):

$$\tilde{X}(f) = \int_{-T}^{T} g(t)x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

其中 $g(t)$ 为一矩形函数，定义为：

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

根据傅里叶变换理论知道：$\tilde{X}(f) = G(f) * X(f)$ (6.5)

*表示褶积，$\tilde{X}(f)$ 为经截断后信号的频谱，$X(f)$ 为无限长信号的真实频谱，$G(f)$ 为矩形函数的频谱：

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt = \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f}$$

显然

$$\tilde{X}(f) \neq X(f)$$

这个影响通常称为截断效应。这也是数据处理中不可避勉的噪音，应该消除或尽可能减小它的影响。

图 6.11a 为矩形函数（矩形窗）及其频谱曲线，图 6.11b 为汉宁窗及其频谱曲线。从图可看到 G(f)时正时负，它们对结果的影响是不同的。首先看中间的主叶部分，在区间 $[-1/2T, 1/2T]$ 内，$G(f) \ge 0$。因为权系数皆为正，所以与原始谱褶积的结果使

X(f)被光滑了，从而降低了分辨能力。

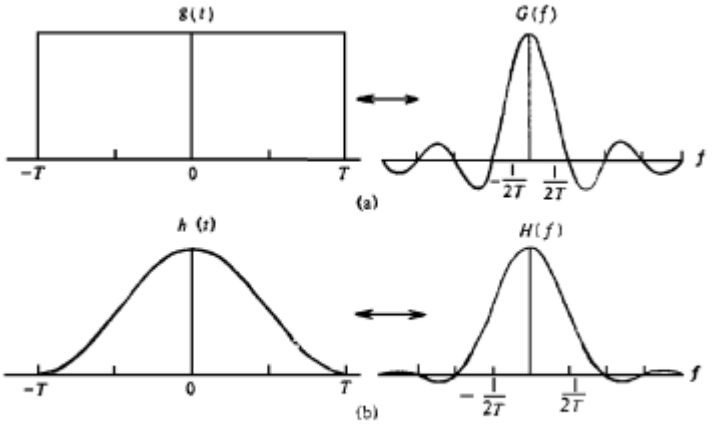


图 6.11 矩形窗(上)及汉宁(下)窗函数及它们的频谱

从图 6.12 看到数据长度对频谱分辨力的影响，数据长度越短，频谱畸变越大。为了使谱分析的结果尽可能接近原始谱，希望减小加权平均的范围，要求主叶愈窄愈好。

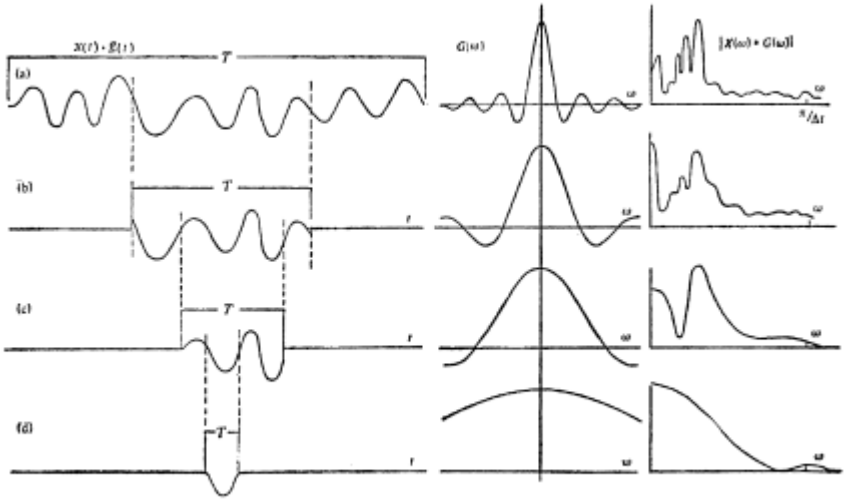


图 6.12 矩形窗长度对频谱分辨力的影响

再看边叶上，$f<-1/2T$，$f>1/2T$ 上的影响。在这里 G(f)时正时负，所以它和原始谱褶积结果会造成一部分频谱丢失，即所谓时窗泄漏。显然边叶起伏愈大这种破坏作用也愈大。因此为了克服这种影响希望边叶衰减愈快愈好。

从图 6.12 上还可看出，如果增加 T 可以使主叶变窄，也能使边叶很快衰减。然而这将意味着增加数据量、增加计算机时间和存储容量，因此这不是理想的减小截断效应影响的方法。

另一个可供选择的办法是修改窗函数 g(t), 从而得到一个理想的频谱函数 G(f)。如果它的主叶很窄，边叶衰减又快，那么截断效应的影响将会大为降低。可惜这两个

要求往往是矛盾的，只能取一个折衷方案。下面介绍两种在大地电磁测深中经常使用的窗口函数。

(1). 汉宁窗，又称余弦窗。定义为：

$$h_1(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1+\cos\dfrac{\pi t}{T}) & |t|\le T\\ 0 & |t|>T\end{cases} \tag{6.6}$$

它的频谱为：
$$H_1(f)=\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi f}\cdot\frac{1}{1-(2Tf)^2} \tag{6.7}$$

图 6.11b 上给出了频谱曲线。

(2). 哈明(Hamming)窗，它与汉宁窗有相似的形式

$$h_2(t)=\begin{cases}0.54+0.46\cos\dfrac{\pi t}{T} & |t|\le T\\ 0 & |t|>T\end{cases} \tag{6.8}$$

它的频谱为
$$H_2(f)=\frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f}\cdot\frac{0.54-0.08(2Tf)^2}{1-(2Tf)^2}$$

汉宁窗和哈明窗的频谱具有很小的边叶，大约是矩形频谱的 1/10。这从图 6.11b 上可以看出。但是它的主叶却宽了一倍，这是不利的。尽管如此仍不失为一种较理想的折衷方案。

若原始时间序列为 $x(n\Delta)$，窗函数的时间序列为 $h_1(n\Delta)$，则修改后的时间序列为

$$\tilde{x}(n\Delta)=x(n\Delta)\cdot h_1(n\Delta)\qquad n=1,2,3,\cdots,N$$

对上式进行傅里叶变换，并利用(6.5)式得：

$$\tilde{X}(f)=X(f)*H_1(f)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\lambda)H_1(f-\lambda)d\lambda$$

式中 λ 为积分变量。$\tilde{X}(f)$ 的值将决定于整个频率域（从 $-\infty$ 到 ∞) 被积函数的值。当 $f=f_0$ 时，上式写为：

$$\tilde{X}(f_0)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\lambda)H_1(f_0-\lambda)d\lambda$$

如果出现下列情况：$X(f_1)>>X(f_0)$，以致有

$$X(f_1)H_1(f_0-f_1)>X(f_0)H_1(f_0-f_0)=X(f_0)H_1(0)$$

可以认为这时对频谱 $\tilde{X}(f_0)$ 贡献最主要的并不是 $X(f_0)$，而是 $X(f_1)$。这也造成傅里叶变换的结果 $\tilde{X}(f)$ 偏离原始谱 $X(f)$。这种影响是由原始谱变化剧烈所引起的。由于天然电磁场的振幅谱起伏很大，可能出现这种现象。这种由原始谱不平坦而造成的影响通常称为旁侧效应。消除的方法就是预白。即在窗口校正前修改原始谱形状，使原始谱趋于白噪声谱。实现方法就是设计一个零相位的预白滤波器。

应该注意，预白滤波器根据当地大地电磁场的振幅谱的性质而定。在我国华北地区曾使用了三个权系数的预白滤波器，$C_0=-0.243, C_1=0.514, C_2=-0.243$，取得了较好的效果。预白滤波以后时间序列为

$$\tilde{x}_n=C_0x_n+C_1x_{n-1}+C_2x_{n-2}$$

图 6.13 给出了它的振幅特性及大地电磁场振幅谱。当然预白只消除原始谱中趋势性的变化，并不能消除个别尖峰的影响。而且并非所有地区都要作这种处理。

最后，还应指出，经预白以后的谱已经改变了原始谱的形状，一般说来还应补偿掉预白的影响，使之恢复为原始谱。这个过程称为“色化”或“去白”。但在大地电磁测深中只要我们对电磁场各分量都取相同的预白滤波器，即可避免以后的“色化”过程。因为这相当于在计算阻抗要素时，分子分母乘以相同的系数。

2．傅里叶系数（电磁场频谱）的计算　对原始时间序列作预处理以后便可进行傅里叶变换。一般使用快速傅里叶变换（FFT），并且有人将两道信号组成一个复数序列（一道作复数的实部，另一道作复数的虚部），用以提高计算速度。但由于所得到的只是基频和各次谐波的频谱，当转换为对数坐标后出现高频密低频稀的现象。为了克服这个困难，可适当增加记录档次，使每个档都相应地确定记录长度和基频。从而避免由 FFT 所带来的频谱信息分布上的过稀或过密现象。

傅里叶变换后得到傅里叶系数的实部 C_j 和虚部 S_j

$$X(f_j)=C_j+iS_j$$

由此求得振幅谱和相位谱为

$$A_j=\sqrt{C_j^2+S_j^2}$$

$$\theta_j=tg^{-1}\frac{S_j}{C_j}$$

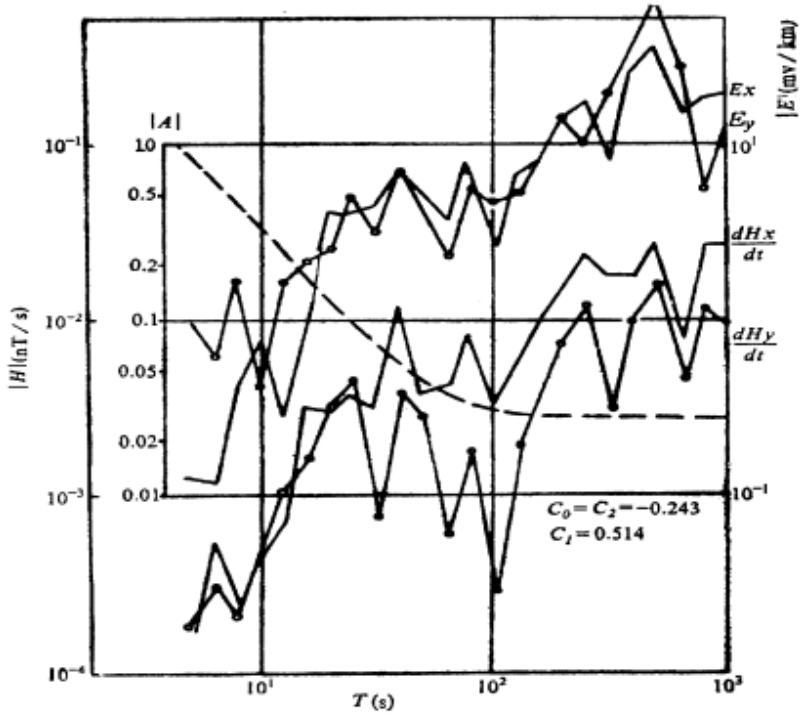


图 6.13　电场振幅谱、磁场微分谱与预白滤波器(虚线)的振幅特性

由傅里叶分析所取得的只是用数字表示的大地电磁信号振幅的大小。还需要消除观测系统的响应，也就是根据标定的结果进行数字（格值）校正，求得大地电磁场强度。振幅校正为

$$F_j = g_j A_j$$

g_j 为电道或磁道观测系统的振幅响应，即格值，以 mV/mm 或 nT/mm 表示。F_j 用 mV 或 nT 表示。对电道，还需除以电极距才能得到用 mV/km 表示的大地电场强度。对相位校正有

$$\phi_j = \theta_g + \theta_j$$

θ_g 为观测系统的相位特性。根据校正后的振幅和相位可求出各大地电磁场分量的实部和虚部

$$\mathrm{Re}\,X_j(f) = F_j \cos\phi_j \quad , \qquad \mathrm{Im}\,X_j(f) = F_j \sin\phi_j$$

§6.3　用最小二乘法估算张量阻抗要素

由第二章的讨论知道视电阻率决定于公式：

$$\rho_{ij} = 0.2T\left|Z_{ij}\right|^2$$

因此要求得视电阻率首先应准确地求取各张量阻抗要素。由第四章(4.46)、(4.48)式知道，在频率域中电磁场满足下列方程组：

$$E_x = Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y \tag{6.9}$$

$$E_y = Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y \tag{6.10}$$

$$H_z = T_{zx}H_x + T_{zy}H_y \tag{6.11}$$

式中每个量，包括阻抗和倾子都是复数。现以(6.9)为例来讨论阻抗要素的计算方法。若对某一频率的电磁场作两次独立观测，则应有：

$$E_x^{(1)} = Z_{xx}H_x^{(1)} + Z_{xy}H_y^{(1)}$$

$$E_x^{(2)} = Z_{xx}H_x^{(2)} + Z_{xy}H_y^{(2)}$$

上标表示观测的次数。将上面两式联立，即可得到所要求的阻抗要素。

$$Z_{xx} = \frac{E_x^{(1)}H_y^{(2)} - E_x^{(2)}H_y^{(1)}}{H_x^{(1)}H_y^{(2)} - H_x^{(2)}H_y^{(1)}}$$

$$Z_{xy} = \frac{E_x^{(1)}H_x^{(2)} - E_x^{(2)}H_y^{(1)}}{H_x^{(1)}H_y^{(2)} - H_x^{(2)}H_y^{(1)}}$$

Z_{xx}, Z_{xy} 有唯一解的条件是上式中的分母不等于零，即：

$$H_x^{(1)}H_y^{(2)} - H_x^{(2)}H_y^{(1)} \neq 0$$

这意味着当场线性极化时阻抗将是不稳定的。同样，利用(6.10)式可以确定另外两个阻抗要素 Z_{yx}, Z_{yy}：

$$Z_{yx} = \frac{E_y^{(1)}H_y^{(2)} - E_y^{(2)}H_y^{(1)}}{H_x^{(1)}H_y^{(2)} - H_x^{(2)}H_y^{(1)}}$$

$$Z_{yy}=\frac{E_y^{(1)}H_x^{(2)}-E_y^{(2)}H_y^{(1)}}{H_x^{(1)}H_y^{(2)}-H_x^{(2)}H_y^{(1)}}$$

但实际上这是不行的。因为实际数据中包含着噪音，仅根据两组观测数据不能准确地确定阻抗要素。为了尽可能减小噪音影响，必需采集大量数据来求它们的平均结果。通常根据最小二乘方原理求阻抗要素的最佳估计值。下面将讨论这个方法。

令
$$E_{xc}=Z_{xx}H_x+Z_{xy}H_y \tag{6.12}$$

式中 H_x、H_y 为实测值，E_{xc} 为理论计算值，因为存在观测误差，这个数值并不等于实际观测值 E_x，现定义均方差函数

$$\begin{aligned}\varphi&=\sum_{i=1}^{N}\left|E_{xi}-E_{xci}\right|^2\\&=\sum_{i=1}^{N}\left[(E_{xi}-E_{xci})(E_{xi}-E_{xci})^*\right]\end{aligned}$$

*表示共轭，N 为总的观测次数。将(6.12)代入上式便得

$$\varphi=\sum_{i=1}^{N}\left[E_{xi}-(Z_{xx}H_{xi}+Z_{xy}H_{yi})\right]\left[E_{xi}^*-(Z_{xx}^*H_{xi}^*+Z_{xy}^*H_{yi}^*)\right] \tag{6.13}$$

欲使方差 φ 最小则应有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Z_{xx}}=0 \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Z_{xy}}=0 \tag{6.15}$$

因为 Z_{xx}、Z_{xy} 都是复数，所以(6.13)式又可写成

$$\begin{aligned}\varphi=\sum_{i=1}^{N}&\left\{E_{xi}-\left[(\mathrm{Re}\,Z_{xx}+i\,\mathrm{Im}\,Z_{xx})H_{xi}+(\mathrm{Re}\,Z_{xy}+i\,\mathrm{Im}\,Z_{xy})H_{yi}\right]\right\}\cdot\\&\left\{E_{xi}^*-\left[(\mathrm{Re}\,Z_{xx}-i\,\mathrm{Im}\,Z_{xx})H_{xi}^*+(\mathrm{Re}\,Z_{xy}-i\,\mathrm{Im}\,Z_{xy})H_{yi}^*\right]\right\}\end{aligned}$$

首先对 Z_{xx} 的实部和虚部求偏导数，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\,\mathrm{Re}\,Z_{xx}}=\sum_{i=1}^{N}\Big[&-E_{xi}H_{xi}^*+Z_{xx}H_{xi}H_{xi}^*+Z_{xy}H_{yi}H_{xi}^*\\&-E_{xi}^*H_{xi}+Z_{xx}^*H_{xi}^*H_{xi}+Z_{xy}^*H_{yi}^*H_{xi}\Big]\\\frac{\partial\varphi}{\partial\,\mathrm{Im}\,Z_{xx}}=\sum_{i=1}^{N}\Big[&E_{xi}H_{xi}^*-Z_{xx}H_{xi}H_{xi}^*-Z_{xy}H_{yi}H_{xi}^*\\&-E_{xi}^*H_{xi}+Z_{xx}^*H_{xi}^*H_{xi}+Z_{xy}^*H_{yi}^*H_{xi}\Big]\end{aligned}$$

使上面二式为零，联立整理后便有

$$\sum_{i=1}^{N}E_{xi}H_{xi}^*=Z_{xx}\sum_{i=1}^{N}H_{xi}H_{xi}^*+Z_{xy}\sum_{i=1}^{N}H_{yi}H_{xi}^* \tag{6.16}$$

式中 $H_{xi}H_{xi}^*$ 为 H_{xi} 的自功率谱，$E_{xi}H_{xi}$、$H_{yi}H_{xi}$ 为互功率谱。同样对(5.15)式将有

$$\sum_{i=1}^{N}E_{xi}H_{yi}^*=Z_{xx}\sum_{i=1}^{N}H_{xi}H_{yi}^*+Z_{xy}\sum_{i=1}^{N}H_{yi}H_{yi}^* \tag{6.17}$$

(6.16)、(6.17)式表明大地电磁阻抗要素可通过场强的自、互功率谱的平均值来确定。若用< >符号表示功率谱平均，(6.16)、(6.17)可以写成如下的简单形式

$$< E_x H_x^* >= Z_{xx} < H_x H_x^* > + Z_{xy} < H_y H_x^* >$$

$$< E_x H_y^* >= Z_{xx} < H_x H_y^* > + Z_{xy} < H_y H_y^* >$$

(6.9)式可以有不同的表达形式，如

$$H_x = \frac{E_x}{Z_{xx}} - \frac{Z_{xy}}{Z_{xx}} H_y \tag{6.18}$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_{xy}} - \frac{Z_{xx}}{Z_{xy}} H_x \tag{6.19}$$

$$E_x = \frac{Z_{xx}}{Z_{yx}} (E_y - Z_{yy} H_y) + Z_{xy} H_y \tag{6.20}$$

对它们都可以定义相应的均方差函数，并求其极小，从而得出决定阻抗要素的方程式。对(6.18)，令

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \left| H_{xi} - (\frac{E_{xi}}{Z_{xx}} - \frac{Z_{xy}}{Z_{xx}} H_y) \right|^2 = \min$$

将有

$$< E_x E_x^* >= Z_{xx} < H_x E_x^* > + Z_{xy} < H_y E_x^* >$$

$$< E_x H_y^* >= Z_{xx} < H_x H_y^* > + Z_{xy} < H_y H_y^* >$$

对(6.19)，令

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \left| H_{yi} - (\frac{E_{xi}}{Z_{xy}} - \frac{Z_{xx}}{Z_{xy}} H_{xi}) \right|^2 = \min$$

将有

$$< E_x E_x^* >= Z_{xx} < H_x E_x^* > + Z_{xy} < H_y E_x^* >$$

$$< E_x H_y^* >= Z_{xx} < H_x H_y^* > + Z_{xy} < H_y H_y^* >$$

对(6.20)，令

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \left| E_{xi} - \frac{Z_{xx}}{Z_{yx}} (E_{yi} - Z_{yy} H_{yi}) - Z_{xy} H_{yi} \right|^2 = \min$$

将有

$$< E_x E_y^* >= Z_{xx} < H_x E_y^* > + Z_{xy} < H_y E_y^* >$$

$$< E_x H_y^* >= Z_{xx} < H_x H_y^* > + Z_{xy} < H_y H_y^* >$$

除了这些之外，还可以定义不同形式的均方差函数。然而确定 Z_{xx}、Z_{xy} 的公式只有4个，即

$$< E_x E_x^* >= Z_{xx} < H_x E_x^* > + Z_{xy} < H_y E_x^* > \tag{6.21}$$

$$< E_x E_y^* >= Z_{xx} < H_x E_y^* > + Z_{xy} < H_y E_y^* > \tag{6.22}$$

$$< E_x H_x^* >= Z_{xx} < H_x H_x^* > + Z_{xy} < H_y H_x^* > \tag{6.23}$$

$$< E_x H_y^* >= Z_{xx} < H_x H_y^* > + Z_{xy} < H_y H_y^* > \tag{6.24}$$

其中任意两个联立都可获得一组计算阻抗要素 Z_{xx}、Z_{xy} 的公式。如此可以有6种联立方式，即对每一个阻抗要素都有6种不同的计算方法。以 Z_{xy} 为例它们是

$$Z_{xy}=\frac{<H_xE_x^*><E_xE_y^*>-<H_xE_y^*><E_xE_x^*>}{<H_xE_x^*><H_yE_y^*>-<H_xE_y^*><H_yE_x^*>} \tag{6.25}$$

$$Z_{xy}=\frac{<H_xE_x^*><E_xH_x^*>-<H_xH_x^*><E_xE_x^*>}{<H_xE_x^*><H_yH_x^*>-<H_xH_x^*><H_yE_x^*>} \tag{6.26}$$

$$Z_{xy}=\frac{<H_xE_x^*><E_xH_y^*>-<H_xH_y^*><E_xE_x^*>}{<H_xE_x^*><H_yH_y^*>-<H_xH_y^*><H_yE_x^*>} \tag{6.27}$$

$$Z_{xy}=\frac{<H_xE_y^*><E_xH_x^*>-<H_xH_x^*><E_xE_y^*>}{<H_xE_y^*><H_yH_x^*>-<H_xH_x^*><H_yE_y^*>} \tag{6.28}$$

$$Z_{xy}=\frac{<H_xE_y^*><E_xH_y^*>-<H_xH_x^*><E_xE_y^*>}{<H_xE_y^*><H_yH_y^*>-<H_xH_y^*><H_yE_y^*>} \tag{6.29}$$

$$Z_{xy}=\frac{<H_xH_x^*><E_xH_y^*>-<H_xH_y^*><E_xH_x^*>}{<H_xH_x^*><H_yH_y^*>-<H_xH_y^*><H_yH_x^*>} \tag{6.30}$$

对(6.10)式运用与上述完全相同的方法可以获得计算另外两个要素 Z_{yx}、Z_{yy} 的公式：

$$<E_yE_x^*>=Z_{yx}<H_xE_x^*>+Z_{yy}<H_yE_x^*> \tag{6.31}$$

$$<E_yE_x^*>=Z_{yx}<H_xE_y^*>+Z_{yy}<H_yE_y^*> \tag{6.32}$$

$$<E_yH_x^*>=Z_{yx}<H_xH_x^*>+Z_{yy}<H_yH_x^*> \tag{6.33}$$

$$<E_yH_y^*>=Z_{yx}<H_xH_y^*>+Z_{yy}<H_yH_y^*> \tag{6.34}$$

若将上述 4 式两两联立，也可列出 6 种估算 Z_{yx}、Z_{yy} 的公式。

概括所有的 6 种估算阻抗要素 Z_{xx}、Z_{xy}、Z_{yx}、Z_{yy} 的方法，可以写成下列统一形式：

$$Z_{xx}=\frac{<E_xA^*><H_yB^*>-<E_xB^*><H_yA^*>}{<H_xA^*><H_yB^*>-<H_xB^*><H_yA^*>} \tag{6.35}$$

$$Z_{xy}=\frac{<E_xA^*><H_xB^*>-<E_xB^*><H_xA^*>}{<H_yA^*><H_xB^*>-<H_yB^*><H_xA^*>} \tag{6.36}$$

$$Z_{yx}=\frac{<E_yA^*><H_yB^*>-<E_yB^*><H_yA^*>}{<H_xA^*><H_yB^*>-<H_xB^*><H_yA^*>} \tag{6.37}$$

$$Z_{yy}=\frac{<E_yA^*><H_xB^*>-<E_yB^*><H_xA^*>}{<H_yA^*><H_xB^*>-<H_yB^*><H_xA^*>} \tag{6.38}$$

其中 A^*、B^* 分别为 E_x^*、E_y^*、H_x^*、H_y^* 的 6 种不同的组合，如图 6.14。但当 A^*、B^* 取 E_x^*、H_y^* 或取 E_y^*、H_x^* 时(图 6.14 中的第⑤⑥种情况下)，在一定的条件下相应的解是不稳定的。这是因为：（1）在场源非线性极化情况下，H_x 与 H_y 不相关，将有 $<H_xH_y^*>$、$<H_yH_x^*>$ 趋于零。(2) 当介质是一维，或者沿二维介质的电性主轴方向

观测时，电场（或磁场）只与它正交方向上的磁场（或电场）有关，这时除 $<E_xH_y^*>$、$<H_yE_x^*>$、$<E_yH_x^*>$、$<H_xE_y^*>$外，其余的互功率谱也将趋于零。于是(6.27)、(6.28)式是不稳定的。因此在 6 种求解阻抗要素的方程中，实际上只有 4 种能给出稳定的结果，通常只采用这 4 种估算阻抗要素方法。

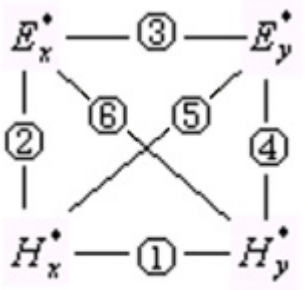


图 6.14　A^* B^*的 6 种取法

以上所涉及的计算功率谱的平均值，严格说来是对某一个确定的频率而言，对于诸多频率这样就需要较长的观测时间取得较多的数据段。但是若考虑到阻抗要素在一个窄的频带内变化不大，那么在一个频率上的功率谱的平均值可以用包括这频率在内的一个窄频率带上的功率谱的平均值代替，从而大大减少数据量，节省很多观测时间，甚至只要一段合适的数据就可以求得阻抗要素的估计值。比如计算$<E_xH_y^*>$可写为

$$<E_xH_y^*>=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}E_{xi}H_{yi}^*$$

M 为某一个确定的频率带内的频率点数。

数据质量判别指标

分析公式(6.25)~(6.30)，我们看到(6.25)式中电场分量出现的次数较多，而(6.30)式中磁场分量出现的次数较多，这说明由前者计算的阻抗值易于受电场噪音的干扰，而后者易受磁场噪音的干扰。这也意味着不同的计算方法抗干扰的能力是不同的。显然取它们的平均结果优于某一种方法的计算结果。

$$\bar{Z}_{ij}=\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}Z_{ij}^{(k)}\qquad i,j=x,y \tag{6.39}$$

对 Z_{xy} 来说，只取(6.25)、(6.26)、(6.29)、(6.30) 4 种算法，因此 L=4。(6.27)、(6.28) 2 种算法是不稳定的。

如果不存在噪音的话，4 种算法的结果是相同的，并且等于 4 种算法的平均值。如果噪音很大，则某种算法的结果就偏离 4 种算法的平均值。因此每种算法的计算结果相对于平均值的偏离程度可以作为衡量数据质量的一种指标。全信息矢量相干度 CP 就是用来判别数据质量的指标，CP 定义如下：

$$CP_{ij}=1-\frac{D_{ij}}{\left|\bar{Z}_{ij}\right|}\qquad i,j=x,y \tag{6.40}$$

其中 $\bar{Z}_{ij}$ 如(6.39)，　　$D_{ij}=\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}\left|Z_{ij}^{(k)}-\bar{Z}_{ij}\right|$

L=1,2,3,4 表示不同的计算方法，L 可能小于 4，这是因为并非在所有情况下每种算法都能给出稳定的结果。如果数据是精确的，则 D=0，CP 取最大值 1，数据质量愈差 CP 愈小于 1。只有 CP 接近于 1 的那些频率点上的阻抗及视电阻率值才可靠。

以上所讨论的只是测量方向上阻抗的计算方法。而我们所需要的是主轴方位上的阻抗值。为此应求得主轴方位，并计算主轴阻抗。至于如何求主轴方位，阻抗在不同方位上如何换算，在第四章已作了介绍。

§6.4 大地电磁测深数据的实时处理

大地电磁数据的实时处理是随微型计算机的普及而发展起来的新技术。传统的处理方法是将野外采集到的数据记录在磁带上，然后在计算中心处理。这样处理周期长，不能及时指导野外生产。因此野测观测数据的实时处理就成为人们普遍感兴趣的问题。

在大地电磁测深中所记录的都是频率很低的电磁信号。尤其在记录长周期时，采样间隔可以低到几秒，几十秒，甚至更低。这样当采集数据时计算机大部分时间不工作。因此有可能充分发挥计算机的效能使数据采集和处理同时进行。

D.E.怀特等提出了一种适用于大地电磁数据处理的级联分样技术，解决了实时处理问题。

假定原始数据的采样间隔为 Δ_0，采样数目为 n+1，则数据长度为 $n\Delta_0$，对这个时间序列进行傅里叶变换便可以获得离散的频谱信息，其基频为 $1/n\Delta_0$。若对原始数列实行二分样，即每隔一点取一个数构成新的时间序列，那么采样间隔为 $\Delta_1 = 2\Delta_0$。如果采样数目保持不变的话，那么这个新数据的谱分析结果的基频为 $1/n\Delta_1 = 1/2n\Delta_0$，基频降低了一倍。谱分析可以获得又一组离散的傅里叶系数。如此每一级都在前一级的基础上实行二分样，构成新的时间序列，这样不断地通过改变基频而将时间域上的大地电磁记录变换到频率域。这时对傅里叶变换来说计算方法不是主要问题。考虑到视电阻率曲线的频点大致按对数等间隔地分布，只需要恰当地选择采样长度，以及每一级分样所要计算的谐波就可达到这个目的。怀特建议 n 取为 32，每一级都只计算 6 次和 8 次谐波的傅里叶系数,结果可使频点大约按对数等间隔分布，见图 6.15，同时也保证数据长度至少是谐波周期的 6 倍，有效地避免截断效应的影响，同时避免可能残余的假频效应。

在级联分样中不断地扩大采样间隔，折叠频率 f_n 也在不断降低，需要相应地设计去假频滤波器。怀特设计了一个 5 点去假频滤波器，权系数为 $h_0=h_4=1.0$，$h_1=h_3=3.41421356$，$h_2=4.87100924$，其频率特性如图 6.16。这个滤波器可适用于各级，图 6.17 为多级滤波分样的示意图。从图上可以看出每一级采样都是在前一级基础上经过分样和 5 点滤波后组成.

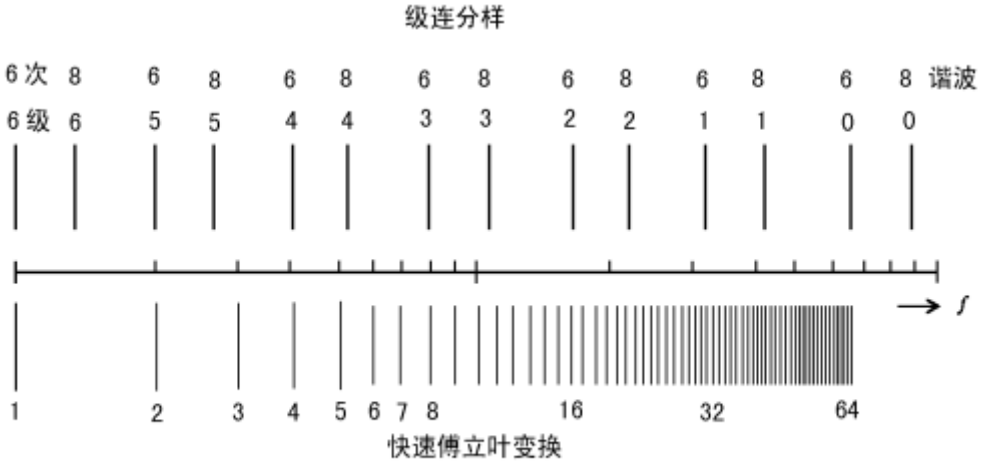


图 6.15　频率点分布图

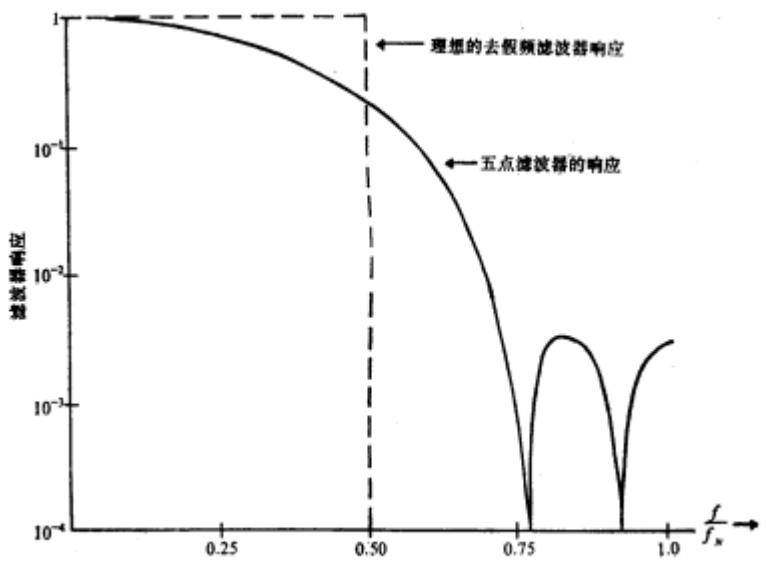


图 6.16　五点去假频滤波器频率响应

傅里叶系数计算式如下：

$$X(f)=\sum_{n=0}^{31}h(n\Delta)x(n\Delta)(\cos\frac{Nn\pi}{16}-i\sin\frac{Nn\pi}{16}) \tag{6.41}$$

其中 $h(n\Delta)$ 为汉宁窗口系数；$x(n\Delta)$ 为时间序列，N＝6，8。图 6.18 为实时傅里叶变换原理框图。

和传统的数据处理方法一样，在每个频点上需要计算功率谱的平均值，因此要对多组 32 点的时间序列进行傅里叶分析。可是考虑到频率很低时，采样间隔可能达到几十或几百秒，这样每取一个 32 点记录花费时间太多。为了适当节约时间，可使采样段部分地重叠。当然这样虽然节省时间，但数据的独立性将受到损失。

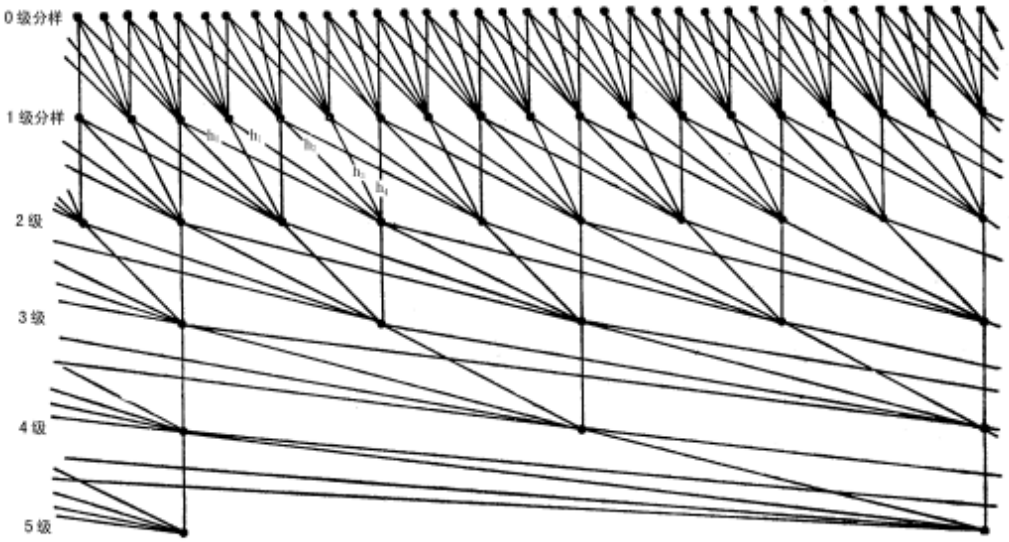


图 6.17　多级分样滤波示意图

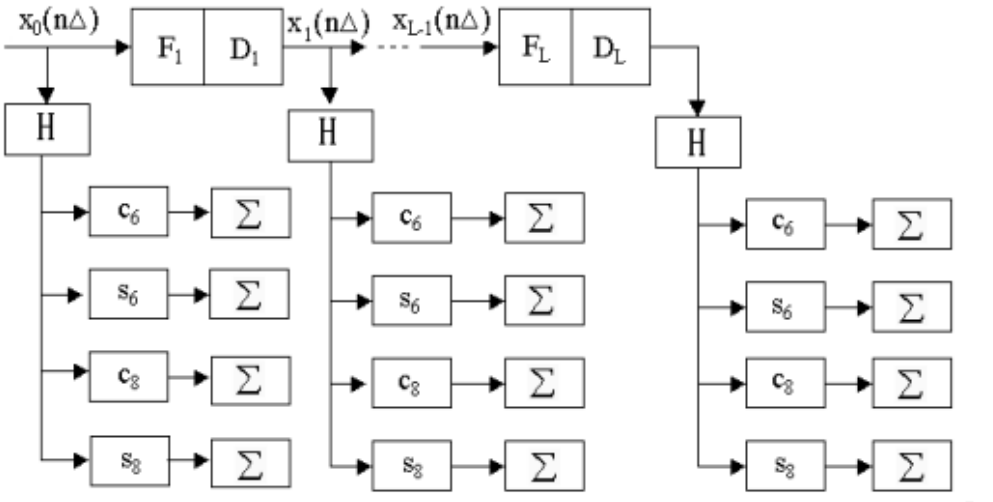


图 6.18　实时傅里叶变换原理框图

§6.5　测量噪音影响及消除方法

大地电磁测深中所观测的天然电磁场具信号弱、频带宽的特征，因而极易受各种噪音的干扰。影响的结果使视电阻率曲线分散，观测的重复性很差。噪音的消除也就成了大地电磁测深工作中研究的重要课题之一。

一、测量噪音的影响

测量噪音可以分为观测系统噪音和环境噪音两部分。前者指仪器和观测系统布置不当，如传感器、导线掩埋不合理而造成的噪音。一般可以改善装置给予消除。后者指观测点附近不稳定的非平面波性质的电磁场，主要是输电线、无线电台、各种工业游散电流所造成的干扰。在工业发达、人口稠密地区这类干扰因素普遍存在，影响比较严重。

假设所观测的电磁信号为 a(t)、b(t)，它们的频谱为 A(f)、B(f)，可表达为

A(f)=As(f)+An(f)

B(f)=Bs(f)+Bn(f)

下标 s、n 分别表示信号和噪音分量。

我们知道阻抗通过(6.35)一(6.38)式表达，可简单地写作

$$Z_{ij}^{l} = N^{l} / D^{l} \qquad (i, j = x, y) \tag{6.42}$$

$l = 1, 2, 3, 4$ 表示不同计算方法。若考虑噪音,上式又可写成

$$Z_{ij}^{l} = \frac{N_s^l + N_n^l}{D_s^l + D_n^l} = \frac{N_s^l / D_s^l + N_n^l / D_s^l}{1 + D_n^l / D_s^l} \tag{6.43}$$

因此阻抗要素的质量完全取决于自、互功率谱的质量。对自功率谱有

$$\langle AA^* \rangle = \langle AA^* \rangle_s + \langle A_s A_n^* \rangle + \langle A_s^* A_n \rangle + \langle AA^* \rangle_n \tag{6.44}$$

对互功率谱，有

$$\langle AB^* \rangle = \langle AB^* \rangle_s + \langle A_s B_n^* \rangle + \langle B_s^* A_n \rangle + \langle AB^* \rangle_n \tag{6.45}$$

假设各道的噪音都是随机的，这意味着不仅噪音与信号不相关，而且各道间噪音也互不相关，如果参加平均的数据量足够大，上二式就变为

$$\langle AA^* \rangle = \langle AA^* \rangle_s + \langle AA^* \rangle_n \tag{6.46}$$

$$\langle AB^* \rangle = \langle AB^* \rangle_s \tag{6.47}$$

可见自功率谱的估算值中包含噪音功率谱，是有偏估计，又因为它们都是正实数，所以随机噪音影响总使自功率的估算值偏高。互功率谱为无偏估计，可避免随机噪音的干扰。如果各观测道间没有共同的噪音源，就可近似地认为噪音是不相关的，否则，就没有理由认为噪音是不相关的。

当在水平均匀介质或沿二维介质的主轴方向上测量时，阻抗可写成

$$Z_{ij}=\frac{\langle E_i H_j^*\rangle}{\langle H_j H_j^*\rangle}$$

或

$$Z_{ij}=\frac{\langle E_i E_i^*\rangle}{\langle H_j E_i^*\rangle}$$

可见电道中的噪音将使阻抗估算值偏高，而磁道中的噪音将使估算值偏低。

在一般的水平非均匀介质下情况比较复杂。

总之可以认为阻抗要素的估算误差更多地来源于自功率谱，因此改善自功率计算质量或避免使用自功率谱将是提高阻抗计算质量的有效途径。

二　不相关噪音的消除方法

1. 循环运算法

循环运算法是假设噪音仅存在于自功率谱估算值中，它的基本思路是：以四种阻抗的平均值 $\overline{Z}_{ij}$ 作为阻抗的改善值代入阻抗计算公式(6.35)-(6.38),求改善的自功率谱 $\overline{P}$ 的平均值`，然后再用改善的自功率谱 $\overline{P}$ 的平均值和互功率谱的平均值重新求阻抗元素，再用四种阻抗的平均值作改善值重复计算。

(1) 求阻抗平均值: $\overline{Z}_{ij}=\frac{1}{4}\sum_{L=1}^{4}Z_{ij}^{(L)}$

(2) 求自功率谱：以 $\overline{Z}_{ij}$ 作为 Z_{ij} 代入阻抗计算公式(6.35)-(6.38),以 $A^*=E_x^*$、$B^*=E_y^*$ 为例，由计算 Zxy 的公式(6.36)知

$$Z_{xy}=\frac{\langle E_x E_x^*\rangle\langle H_x E_y^*\rangle-\langle E_x E_y^*\rangle\langle H_x E_x^*\rangle}{\langle H_y E_x^*\rangle\langle H_x E_y^*\rangle-\langle H_y E_y^*\rangle\langle H_x E_x^*\rangle}$$

$$=\frac{P_{Ex}\langle H_x E_y^*\rangle-\langle E_x E_y^*\rangle\langle H_x E_x^*\rangle}{D_1} \qquad (6.48)$$

其中　　$D_1=\langle H_y E_x^*\rangle\langle H_x E_y^*\rangle-\langle H_y E_y^*\rangle\langle H_x E_x^*\rangle$

由(6.48)解出　$$P_{Ex}=\frac{Z_{xy}D_1+\langle E_xE_y^*\rangle\langle H_xE_x^*\rangle}{\langle H_xE_y^*\rangle}\tag{6.49}$$

用类似的方法可求得 P_{Ey}，P_{Hx}，P_{Hy}，并求 4 种算法的平均值。

(3) 然后再利用这些改进的自功率谱重新求各阻抗元素。如此多次循环计算，来消除自功率谱中噪音的影响，从而提高张量阻抗元素的计算精度。

2. 互功率谱法

互功率谱法的基本思路是把 4 个互功率谱和 4 个阻抗元素作为 8 个未知数求解。即用互功率谱来代替自功率谱，从而达到消除自功率谱中噪音的影响，由(6.35)-(6.38)式得到 8 个独立的方程：

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \langle|E_x|^2\rangle=Z_{xx}b^*+Z_{xy}c^*\\
&(2)\quad a=Z_{xx}d^*+Z_{xy}e^*\\
&(3)\quad b=Z_{xx}\langle|H_x|^2\rangle+Z_{xy}f^*\\
&(4)\quad c=Z_{xx}f+z_{xy}\langle|H_y|^2\rangle\\
&(5)\quad \langle|E_y|^2\rangle=Z_{yx}d^*+Z_{yy}e^*\\
&(6)\quad d=Z_{yx}\langle|H_x|^2\rangle+Z_{yy}f^*\\
&(7)\quad e=Z_{yx}f+Z_{yy}\langle|H_y|^2\rangle\\
&(8)\quad a^*=Z_{yx}b^*+Z_{yy}c^*
\end{aligned}\tag{6.50}$$

这里 a、b、c、d、e、f　及其共轭量是互功率谱，定义为：

$a=\langle E_xE_y^*\rangle$, $b=\langle E_xH_x^*\rangle$, $c=\langle E_xH_y^*\rangle$, $d=\langle E_yH_x^*\rangle$, $e=\langle E_yH_y^*\rangle$, $f=\langle H_xH_y^*\rangle$

显然对以上 8 个方程求解，可以得到以互功率谱来代替自功率谱，并实现阻抗的计算。

3. 加权的平均互功率谱法

该方法是以场的分量乘以方程(6.9)、(6.10)，求得以互功率的加权平均表示阻抗元素的估计值，这一方法可以完全避免引入自功率。

用 $A^*=\rho E_y^*$, $B^*=\eta E_y^*$ 分别乘以(6.9)，用 $C^*=\mu E_x^*$, $D^*=\upsilon E_x^*$ 分别乘以

(6.10)，可构成如下四个方程：

$$\langle E_x A^* \rangle = Z_{xx}\langle H_x A^* \rangle + Z_{xy}\langle H_y A^* \rangle \tag{6.51}$$

$$\langle E_x B^* \rangle = Z_{xx}\langle H_x B^* \rangle + Z_{xy}\langle H_y B^* \rangle \tag{6.52}$$

$$\langle E_y C^* \rangle = Z_{yx}\langle H_x C^* \rangle + Z_{yy}\langle H_y C^* \rangle \tag{6.53}$$

$$\langle E_y D^* \rangle = Z_{yx}\langle H_x D^* \rangle + Z_{yy}\langle H_y D^* \rangle \tag{6.54}$$

式中$\langle E_x A^* \rangle, \langle E_x B^* \rangle, \langle E_y C^* \rangle, \langle E_y D^* \rangle$ 等相当于加权的互功率谱平均值

$\langle \rho E_x E_y^* \rangle, \langle \eta E_x E_y^* \rangle, \langle \mu E_y E_x^* \rangle, \langle \upsilon E_y E_x^* \rangle$ ，当加权函数 $\rho, \eta, \mu, \upsilon$ 取以下三组值时：

	ρ	η	μ	υ
1	1	$H_x E_y^*$	1	$H_x E_x^*$
2	1	$H_y E_y^*$	1	$H_y E_x^*$
3	$H_x E_y^*$	$H_y E_y^*$	$H_x E_x^*$	$H_y E_x^*$

(6.51)-(6.54)都不包含自功率谱，可以用这三组加权函数求出张量元素的三种解。将这三种解加以平均，可以得到不受不相关噪音影响的 Z_{ij} 值。

4　用近参考道的办法估算阻抗

上面 2 和 3 中讨论的方法，在 Zxx=0, Zyy=0 时，解是不稳定的，因此在一维情况下和二维情况下的测量方向平行于走向或垂直于走向时，方法 2 和方法 3 就不合适。为了适用各种地质情况，求得一个不为自功率噪音偏倚的阻抗估算值，可以引用一个第五（电或磁）参考信号道的测量方法。如图 6.19，在第三个方向测量电场 Er，作为参考道，此时可列出求解阻抗张量元素的方程组：

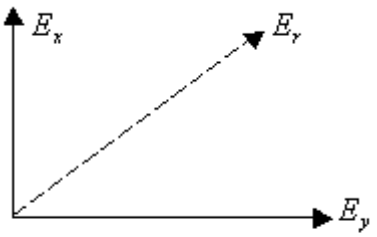


图 6.19　近参考道

$$\langle E_x E_r^* \rangle = Z_{xx}\langle H_x E_r^* \rangle + Z_{xy}\langle H_y E_r^* \rangle$$

$$\langle E_x E_y^* \rangle = Z_{xx}\langle H_x E_y^* \rangle + Z_{xy}\langle H_y E_y^* \rangle$$

$$\langle E_y E_r^* \rangle = Z_{yx}\langle H_x E_r^* \rangle + Z_{yy}\langle H_y E_r^* \rangle \qquad (6.55)$$

$$\langle E_y E_x^* \rangle = Z_{yx}\langle H_x E_x^* \rangle + Z_{yy}\langle H_y E_x^* \rangle$$

由上式看出，式中不出现自功率谱，可以消除不相关噪音的影响。并且 Er 与 Ex、Ey 相关，互功率谱不为零，不会导致分母为零，所以在任何构造情况下对阻抗的估算都是稳定的。

以上讨论的 4 种方法只能克服不相关噪音的影响。为了克服相关噪音，提出了下面的远参考道法。

三　相关噪音的消除方法

远参考道法　为了克服相关噪音的影响，考虑到相隔较远的不同测点的噪音相关性一般很小。因此在离开测点较远的另一个地方再设立两个电磁场测量道，这些测量道称为远参考道。远参考道可以离开测点几公里至二三十公里。考虑到电场分量易受地下局部构造影响，一般选择磁道测量。远参考道应该保证同步地进行测量，一般用高精度的石英钟同步，现在一般用 GPS 同步。

如果应用磁场作为远参考道，设为 Hxr、Hyr ，用它参与阻抗张量元素计算

$$\langle E_x H_{xr}^* \rangle = Z_{xx}\langle H_x H_{xr}^* \rangle + Z_{xy}\langle H_y H_{xr}^* \rangle$$

$$\langle E_x H_{yr}^* \rangle = Z_{xx}\langle H_x H_{yr}^* \rangle + Z_{xy}\langle H_y H_{yr}^* \rangle$$

$$\langle E_y H_{xr}^* \rangle = Z_{yx}\langle H_x H_{xr}^* \rangle + Z_{yy}\langle H_y H_{xr}^* \rangle \qquad (6.56)$$

$$\langle E_y H_{yr}^* \rangle = Z_{yx}\langle H_x H_{yr}^* \rangle + Z_{yy}\langle H_y H_{yr}^* \rangle$$

这些方程组中不存在自功率谱的平均值，互功率平均值则是由测点和远参考点的磁场分量求得的，它们对噪音有较大的抑制作用。解上面的方程组得到：

$$Z_{xx} = \left[\langle E_x H_{xr}^* \rangle\langle H_y H_{yr}^* \rangle - \langle E_x H_{yr}^* \rangle\langle H_y H_{xr}^* \rangle\right] / D$$

$$Z_{xy} = \left[\langle E_x H_{yr}^* \rangle\langle H_x H_{xr}^* \rangle - \langle E_x H_{xr}^* \rangle\langle H_x H_{yr}^* \rangle\right] / D$$

$$Z_{yx} = \left[\langle E_y H_{xr}^* \rangle\langle H_y H_{yr}^* \rangle - \langle E_y H_{yr}^* \rangle\langle H_y H_{xr}^* \rangle\right] / D \qquad (6.57)$$

$$Z_{yy} = \left[\langle E_y H_{yr}^* \rangle\langle H_x H_{xr}^* \rangle - \langle E_y H_{xr}^* \rangle\langle H_x H_{yr}^* \rangle\right] / D$$

其中　　$D = \langle H_x H_{xr}^* \rangle\langle H_y H_{yr}^* \rangle - \langle H_x H_{yr}^* \rangle\langle H_y H_{xr}^* \rangle$

第七章　大地电磁测深资料的定量解释

大地电磁测深资料的定量解释的任务是根据地表测得的地球响应，比如视电阻率、相位、表面阻抗等，通过一定的数学处理（反演）求得一个合理的地电模型，定量地给出不同电性介质在地下的分布规律。

通过各种数学方法可以在一定意义下求取多种地球模型，但并不是说这些模型都有明确的地球物理和地质意义。解释人员可以根据已有的资料和认识，舍弃那些不合理的模型。通常把那些在地质上、地球物理上合理的模型称为可接受的模型。因此也可以说反演的任务就是在众多的可能解中寻找可接受的地电模型。

本章主要讨论一维大地电磁资料的反演问题。可以设想一维大地的电性分布为层状分布和连续分布两种形式。前者，地球模型可以通过各层的电阻率 ρ_i 和厚度 h_i 描述；后者，电阻率可描述为随深度变化的连续函数。相应地有层状模型反演法和连续模型反演法。

§7.1　层状模型的目标函数

设地球是由有限多个水平岩层所组成，每层的电阻率和厚度皆为常数。这样的模型可用一个矢量表示

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$$

其中 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,N)$ 即为各层的电阻率 $\rho_1,\cdots\rho_K$ 和厚度 $h_1,\cdots,h_{K-1}$，K 为层数，N=2K-1，为地电参数的总数。

假若在地表上测得的视电阻率曲线 ρ_a 也用矢量表示

$$\rho_a=(\rho_{a1},\rho_{a2},\cdots,\rho_{aM})$$

$\rho_{ai}(i=1,2,\cdots,M)$ 为观测频率上的视电阻率数值，M 为观测的频点总数，并且有 M>N。反演任务就是根据视电阻率曲线来确定各层的电阻率和厚度。

解这类反演问题的基本途径仍然是寻找一条和实测视电阻率曲线重合最好的理论曲线，这条理论曲线的参数 λ 便作为实测曲线的反演结果。

大家知道，事实上不可能要求理论曲线与实测曲线完全重合，只能要求它们符合得最好。所谓符合得最好通常就是指在最小二乘方意义下使求得的理论模型的数据和实测数据之间的均方差为最小。为此，可定义均方差函数

$$\phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{M}\left[\rho_{ai}-\rho_{ci}(\lambda)\right]^2 \tag{7.1}$$

ρ_c 是理论电阻率，使上式为最小的必要条件是

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{7.2}$$

然而 $\rho_c(\lambda)$ 是个很复杂的函数，为了克服求偏导数的困难，可将 $\rho_c(\lambda)$ 线性化，即展成台劳级数并略去高次项，得到

$$\rho_{ci}(\lambda)=\rho_{ci}(\lambda^{(0)})+\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\rho_{ci}}{\partial\lambda_j}\right)^{(0)}(\lambda_j-\lambda_j^{(0)}) \tag{7.3}$$

用矩阵形式表示为：

$$R_c=R_c^{(0)}+P\Delta\lambda \tag{7.4}$$

其中

$$R_c=[\rho_{c1}\quad\rho_{c2}\cdots\rho_{cM}]^T$$

$$R_c^{(0)}=[\rho_{c1}^{(0)}\quad\rho_{c2}^{(0)}\cdots\rho_{cM}^{(0)}]^T$$

$$P=\begin{bmatrix}\frac{\partial\rho_{c1}^{(0)}}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\rho_{c1}^{(0)}}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{\partial\rho_{c1}^{(0)}}{\partial\lambda_N}\\ \frac{\partial\rho_{c2}^{(0)}}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\rho_{C2}^{(0)}}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{\partial\rho_{C2}^{(0)}}{\partial\lambda_N}\\ \vdots & \vdots\ \cdots\ \vdots\\ \frac{\partial\rho_{Cm}^{(0)}}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\rho_{Cm}^{(0)}}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{\partial\rho_{Cm}^{(0)}}{\partial\lambda_N}\end{bmatrix} \tag{7.5}$$

$$\Delta\lambda=[\lambda_1-\lambda_1^{(0)}\quad\lambda_2-\lambda_2^{(0)}\cdots\lambda_N-\lambda_N^{(0)}]^T \tag{7.6}$$

由偏导数构成的矩阵 P 又称雅可比矩阵。(7.3)中的 $\lambda^{(0)}$ 为一个确定的初始模型。将(7.3)代入(7.1)得到

$$\phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{M}\left[\rho_{ai}-\rho_{ci}(\lambda^{(0)})-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\rho_{ci}}{\partial\lambda_j}\right)^{(0)}(\lambda_j-\lambda_j^{(0)})\right]^2 \tag{7.7}$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)&=[\varepsilon-P\Delta\lambda]^T[\varepsilon-P\Delta\lambda]\\&=\varepsilon^T\varepsilon-2\varepsilon^TP\Delta\lambda+\Delta\lambda^TP^TP\Delta\lambda\end{aligned} \tag{7.8}$$

其中 $\varepsilon=R_a-R_c^{(0)}$，$R_a=[\rho_{a1},\rho_{a2},\cdots\rho_{aM}]^T$

因为(7.3)只是理论视电阻率的近似表达式，不可能保证按(7.7)求极值所确定的 $\phi(\lambda)$ 就是最小值，因此需要不断修改 λ，使均方差函数逐次降低。当满足 $\phi(\lambda)\le\delta$ 时，相应的 λ 即为反演结果，δ 是给定的小数，表示拟合精度。

综上所述，解反演问题的步骤可归纳如下：

1．选择初始模型 $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_N^{(0)})^T$，计算理论视电阻率曲线 $\rho_c(\lambda^{(0)})$；

2．计算 $\phi(\lambda^{(0)})=\sum_{i=1}^{M}\left[\rho_{ai}-\rho_{ci}(\lambda^{(0)})\right]^2$，判断 $\phi(\lambda^{(0)})\le\delta$ 是否成立，若成立则结束，否则做第 3 步；

3．计算 $\left(\frac{\partial\rho_c}{\partial\lambda_j}\right)^{(0)}$，构成雅可比矩阵，求模型修改量 $\Delta\lambda^{(0)}$；

4．修改模型参数 $\lambda_j^{(1)}=\lambda_j^{(0)}+\Delta\lambda_j^{(0)}$；

5．返回第 2 步。

由此可以看出解反问题都需要求视电阻率对各个模型参数的偏导数$\frac{\partial \rho_{ci}}{\partial \lambda_j}$以及修改量$\Delta\lambda$。因为$\rho_a = 0.2T|Z|^2$，所以要求$\frac{\partial \rho_{ci}}{\partial \lambda_j}$实际上是要求$\frac{\partial Z}{\partial \lambda}$。帕特里克给出求阻抗偏导数的递推算法。假定地表输入阻抗为Z_1，它对第m层厚度h_m的偏导数可表示为

$$\frac{\partial Z_1}{\partial h_m} = \frac{\partial Z_1}{\partial Z_2}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial Z_3}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial Z_{m-1}}{\partial Z_m}\cdot\frac{\partial Z_m}{\partial h_m} \tag{7.9}$$

同样对第m层电阻率的偏导数可表达为

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \rho_m} = \frac{\partial Z_1}{\partial Z_2}\cdot\frac{\partial Z_2}{\partial Z_3}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial Z_{m-1}}{\partial Z_m}\cdot\frac{\partial Z_m}{\partial \rho_m} \tag{7.10}$$

由此可看出，计算地表阻抗对某一层地电参数的偏导数，只需要计算$\partial Z_{m-1}/\partial Z_m$、$\partial Z_m/\partial \rho_m$、$\partial Z_m/\partial h_m$。它们分别为上一层表面阻抗对下一层表面阻抗的偏导数，以及某一层表面阻抗对该层电阻率与厚度的偏导数。根据阻抗递推公式可以求得

$$\frac{\partial Z_m}{\partial \rho_m} = \frac{Z_m}{2\rho_m} + \frac{2\omega\mu}{\Delta^2\rho_m}\left[\rho_m Z_{m+1} - t_m(Z_{0m}^2 + Z_{m+1}^2)\right]e^{2ik_m h_m} \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial Z_K}{\partial \rho_K} = \frac{Z_K}{2\rho_K} \qquad \text{（对于最后一层）}$$

$$\frac{\partial Z_m}{\partial h_m} = \frac{4\omega\mu}{\Delta^2}(Z_{0m}^2 + Z_{m+1}^2)e^{2ik_m h_m} \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial Z_j}{\partial Z_{j+1}} = \frac{4i\omega\mu\rho_j}{\Delta^2}e^{2ik_j h_j} \tag{7.13}$$

其中 $\Delta = Z_{0j}(1+e^{2ik_j h_j}) + Z_{j+1}(1-e^{2ik_j h_j}) \qquad (j=1,2,\cdots m)$

在大地电磁测深中常常使用视电阻率及张量阻抗的相位作为反演数据。若将阻抗用复数形式表达，可以得到下面的两个表达式

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial \lambda_j} = \frac{2}{\omega\mu}\left[\mathrm{Re}\,Z_1\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial \lambda_j}\right) + \mathrm{Im}\,Z_1\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial \lambda_j}\right)\right] \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} = \frac{\mathrm{Re}\,Z_1\cdot\mathrm{Im}(\frac{\partial Z_1}{\partial \lambda_j}) + \mathrm{Im}\,Z_1\cdot\mathrm{Re}(\frac{\partial Z_1}{\partial \lambda_j})}{|Z_1|^2} \tag{7.15}$$

Re、Im为实部与虚部。

此外考虑到各岩层的电阻率和厚度变化范围很大，可以达到几个数量级。在迭代过程中这些大参数的影响可能使某些修改量$\Delta\lambda_j$很大而导致反演失败。为了克服上述困难，必需对实测的原始数据和反演参量作一些修改。

第一，重新定义目标函数如下：

$$\phi=\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{\rho_{ai}-\rho_{ci}-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\rho_{ci}}{\partial\lambda_j}\right)^{(0)}\Delta\lambda_j}{\rho_{ai}}\right]^2 \tag{7.16}$$

对目标函数作这样处理，使之趋于平坦。

第二，对所有地电参数皆用对数值表示。令

$$x_j=\ln\lambda_j$$

于是

$$\frac{\partial\rho_{ci}}{\partial x_j}=\frac{\partial\rho_{ci}}{\partial\lambda_j}\cdot\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_j}=\lambda_j\frac{\partial\rho_{ci}}{\partial\lambda_j}$$

这样修改后的 ε 和 P 将为

$$\varepsilon=\left[\frac{\rho_{a1}-\rho_{c1}}{\rho_{a1}}\quad\frac{\rho_{a2}-\rho_{c2}}{\rho_{a2}}\cdots\frac{\rho_{aM}-\rho_{cM}}{\rho_{aM}}\right]^T \tag{7.17}$$

$$P=\begin{bmatrix}\frac{\lambda_1}{\rho_{a1}}\frac{\partial\rho_{c1}}{\partial\lambda_1} & \frac{\lambda_2}{\rho_{a1}}\frac{\partial\rho_{c1}}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{\lambda_N}{\rho_{a1}}\frac{\partial\rho_{c1}}{\partial\lambda_N}\\ \frac{\lambda_1}{\rho_{a2}}\frac{\partial\rho_{c2}}{\partial\lambda_1} & \frac{\lambda_2}{\rho_{a2}}\frac{\partial\rho_{c2}}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{\lambda_N}{\rho_{a2}}\frac{\partial\rho_{c2}}{\partial\lambda_N}\\ \vdots & \vdots\quad\cdots\quad\vdots\\ \frac{\lambda_1}{\rho_{aM}}\frac{\partial\rho_{cM}}{\partial\lambda_1} & \frac{\lambda_2}{\rho_{aM}}\frac{\partial\rho_{cM}}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{\lambda_N}{\rho_{aM}}\frac{\partial\rho_{cM}}{\partial\lambda_N}\end{bmatrix} \tag{7.18}$$

修改后的参量 $\lambda_j^{(k+1)}$ 由下式决定。因为

$$x_j^{(k+1)}=x_j^{(k)}+\Delta x_j^{(k)}$$

$$\ln\lambda_j^{(k+1)}=\ln\lambda_j^{(k)}+\Delta x_j^{(k)}$$

所以

$$\lambda_j^{(k+1)}=\lambda_j^{(k)}e^{\Delta x_k^{(k)}} \tag{7.19}$$

上式确定了第 k 次迭代后的地电参数值。并根据这个数来判断均方差的大小，决定过程是否终止。

由上式可知，求层状模型反演问题实质上就是求使多元函数 ϕ 为最小值时的 x 值，所以通常采用数学上的最优化的理论和方法。在大地电磁测深中运用较多的有梯度法、高斯法、马夸特法和广义逆矩阵法。

运用这些方法首先都要考虑如何选择初始模型。初始模型是决定反演次数的关键。为了选择好的初始模型，应充分考虑已有的地球物理资料，特别是电测井和岩石电性资料。本章后面将要介绍的 Bostick 近似反演结果可以提供一种较理想的初始模型。

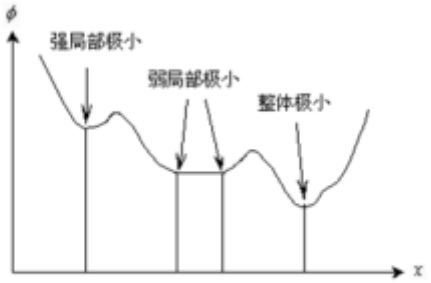


图 7.1　局部极小与整体极小图示

从最优化理论知道，$\phi(x)$ 有局部极小

点和整体极小点之分。如图 7.1 所示，单变量函数的局部极小点和整体极小点并不相同，而反演的结果并不能决定解是局部的还是整体的极小。因此需要选择不同的初始模型进行试算以求得合理的地电断面。

§7.2 梯度法

梯度法是一种直接寻找均方差函数 $\phi(x)$ 极小点的方法。假定选择一个初始模型

$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_N^{(0)})$$

对应的均方差函数为 $\phi_0(x)$。然后修改模型，使均方差函数逐次降低。即对模型

$$x^{(1)},x^{(2)},\cdots x^{(k)},\cdots$$

有

$$\phi(x^{(1)})>\phi(x^{(2)})>\cdots>\phi(x^{(k)})>\cdots$$

问题是沿什么途径搜寻新模型才能保证均方差函数降低。大家知道多元函数 $\phi(x)$ 的梯度向量 $\nabla\phi(x)$ 给出 $\phi(x)$ 增加最快的方向，这个方向与过 $x^{(k)}$ 点 $\phi(x)$ 的等值面成正交，$\phi(x)$ 的梯度向量定义为

$$\nabla\phi(x)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\frac{\partial\phi}{\partial x_2},\cdots\frac{\partial\phi}{\partial x_N}\right)^T$$

若在 $x^{(0)}$ 处取一单位向量 u

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_N)^T$$

$u_1,u_2,\cdots,u_N$ 为 u 在坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 上的分量，则 $\phi(x)$ 在单位矢量 u 上的变化率为

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to0}\frac{\phi(x^{(0)}+tu)-\phi(x^{(0)})}{tu}\\&=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)_{x=x^{(0)}}u_1+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)_{x=x^{(0)}}u_2+\cdots+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_N}\right)_{x=x^{(0)}}u_N\\&=\nabla\phi(x^{(0)})^Tu=(\nabla\phi(x^{(0)}),u)\end{aligned}$$

$(\nabla\phi(x^{(0)}),u)$ 为向量 $\nabla\phi(x^{(0)})$ 与向量 u 的内积，也就是梯度向量 $\nabla\phi(x)$ 在 u 方向的投影。显然当 u 方向与 $\nabla\phi(x)$ 一致时，$\phi(x)$ 变化率最大，即增长最快，反之，在 $\nabla\phi(x)$ 的负方向上可获得与 $\nabla\phi(x)$ 减小最快的方向。

由此可令修改量 Δx_j 的步长为

$$\Delta x_j^{(k)}=-\alpha(\frac{\partial\phi}{\partial x_j})^{(k)} \tag{7.20}$$

其中 α 为控制迭代步长大小的因子。

将 $\phi(x)$ 在 $x^{(k)}$ 点展成台劳级数，略去高次项，可以写出迭代后的均方差表达式

$$\phi^{(k+1)}(x)=\phi^{(k)}(x)+\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial\phi}{\partial x_j})^{(k)}\Delta x_j^{(k)} \tag{7.21}$$

将(7.20)代入上式得到

$$\phi^{(k+1)}(x)=\phi^{(k)}(x)-\alpha\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial\phi^{(k)}(x)}{\partial x_j})^2$$

由上式得到

$$\alpha=\frac{\phi^{(k)}(x)-\phi^{(k+1)}(x)}{\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial\phi^{(k)}(x)}{\partial x_j})^2}$$

因为均方差函数$\phi(x)\geq 0$，而且逐次降低，所以，$0\leq\phi^{(k)}(x)-\phi^{(k+1)}(x)<\phi^{(k)}(x)$，若使$\phi^{(k+1)}(x)=0$，即取极小值，则有

$$\alpha=\frac{\phi^{(k)}(x)}{\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial\phi^{(k)}(x)}{\partial x_j})^2} \tag{7.22}$$

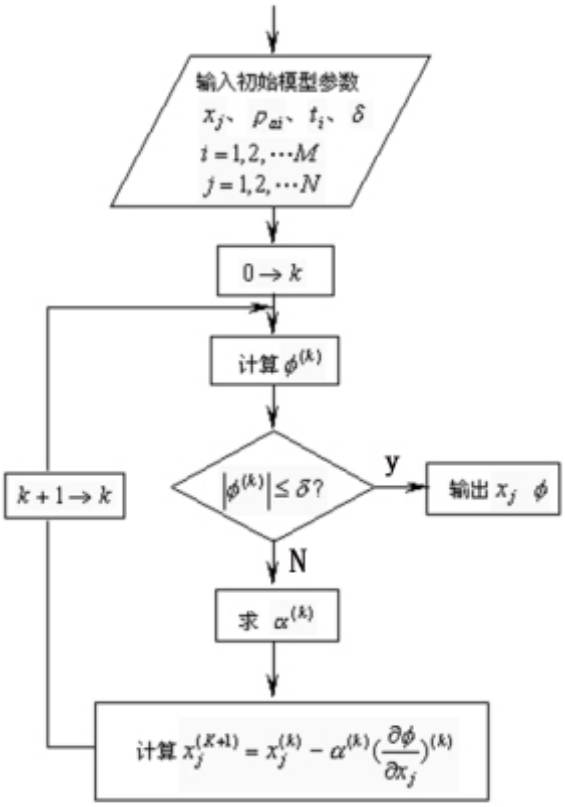


图 7.2　梯度法计算框图

第 (k) 次迭代后的参数可表达为

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - \alpha \frac{\partial \phi^{(k)}}{\partial x_j}$$

$$= x_j^{(k)} - \frac{\phi^{(k)}(x)}{\sum_{j=1}^{N} (\frac{\partial \phi^{(k)}(x)}{\partial x_j})^2} \cdot \frac{\partial \phi^{(k)}(x)}{\partial x_j}$$

一般 α 可取为一个大于零而小于 1 的常数。

梯度法计算框图如图 7.2

应该指出，因为沿均方差函数 $\phi(x)$ 的负梯度方向求参数的修改量，所以在迭代过程中总可以保证 $\phi(x)$ 逐次降低，然而降低速度并非是很快的。这是因为所谓减小最快只是对 $x^{(k)}$ 点附近而言，从整个过程说又是另外一回事了。尤其当逐步接近极小点时，收敛路经往往呈“之”字形摆动而使收敛速度变得很慢。

根据梯度法的这个特点，在反演中常作为一种辅助方法。可以从一个不太好的初始模型开始，在最初迭代中使用它，然后再改用其它收敛较快的方法。

§7.3　高斯法

高斯法又称最小二乘法。在大地电磁测深中方差函数 $\phi(x)$ 以平方和的形式出现，所以高斯法成为解大地电磁反问题的主要方法之一。(7.2)式给出 $\phi(x)$ 为极小的必要条件，而方差(7.8)式也可写成

$$\phi(x) = \varepsilon^T \varepsilon - 2\varepsilon^T P\Delta x + \Delta x^T P^T P\Delta x$$

求 ϕ 对 x 的偏导数为

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2P^T \varepsilon + 2P^T P\Delta x$$

使之为零，则有

$$P^T P\Delta x = P^T \varepsilon$$

写成

$$A\Delta x = G \qquad (7.23)$$

其中

$$A = P^T P\,, \qquad G = P^T \varepsilon$$

(7.23) 即是高斯法的法方程组。解此线性方程便可求得修改量 Δx 。

$$\Delta x = A^{-1} G \qquad (7.24)$$

A^{-1} 为 A 的逆。(7.7)式直接对地电参数求偏导数并使之为零也可得出相同的结果。

从(7.23)式的条件可以看出高斯法与梯度法不同，它的改正量 Δx 沿着 $\phi(x)$ 等位面的切线方向搜索，在极小点附近它直接指向极小点。因此在极小点附近它比梯度法有较好的收敛能力，而且矩阵为正定矩阵，所以总是可以收敛的。对初始模型的要求，高斯法比梯度法较为严格，因为只有在极小点附近，忽略台劳级数展开式中的高次项才不致造成大的误差。

还应指出，在解方程组(7.24)时，要求矩阵 A 为非奇异矩阵，其秩应为 N，否则方程组呈病态而无解。而在大地电磁测深中由于等值性的影响，A 的秩常常小于 N。

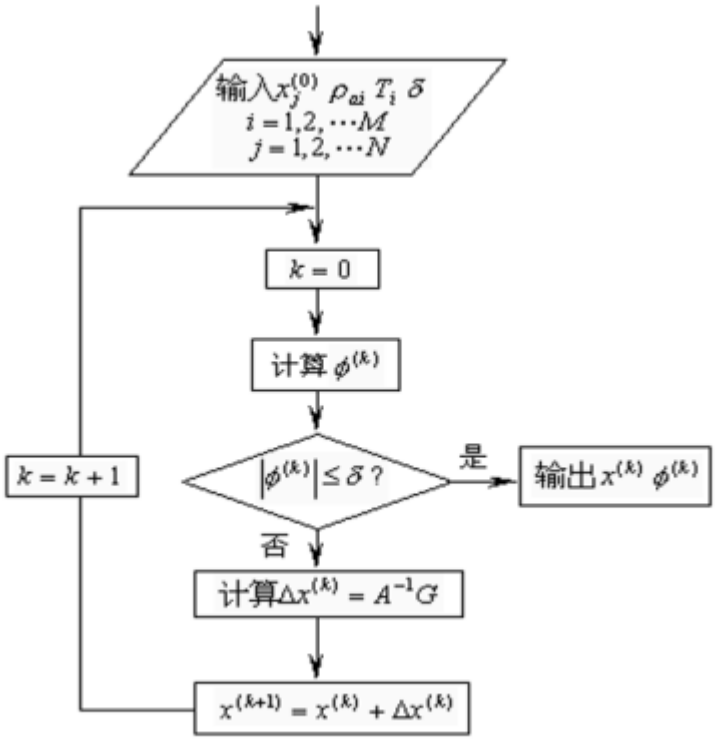


图 7.3　高斯法计算框图

假若地电剖面中出现等值性剖面时，比如 H 等值性，这时视电阻率实际上与该层的电阻率无关，而在 S 等值性时，可以使相应的两个列向量 $\partial\rho_{ci}/\partial\rho_j$ 与 $\partial\rho_{ci}/\partial h_j$ 线性相关。这两种（指 H 等值性和 S 等值性）情况下都会使矩阵 P 的秩小于 N，矩阵 $A=P^TP$ 也成为奇异矩阵。相应的这些参数常称为不灵敏参数。因此在用高斯法解大地电磁测深反问题时，对地电剖面往往要求剖面中不出现薄的电性层。这在一定程度上限制了高斯法的适用范围。

高斯法计算框图如图 7.3

§7.4　马夸特法

马夸特(Marquardt)法又称阻尼最小二乘法，它是对高斯法的有效改进。在解大地电磁反问题中取得较为广泛的应用。如前所述，由于等值性的影响使雅可比矩阵 P 的秩小于 N。矩阵 P^TP 出现零或接近零的特征值，方程(7.23)为病态而无解。马夸特法将(7.23)式改写为

$$(A+\alpha I)\Delta x = G \tag{7.25}$$

其中 I 为单位矩阵，α 为一个正数。这样就改善矩阵 A 主对角线要素，即增大矩阵的特征值。从几何上说，使修改向量 Δx 的方向处于高斯法和梯度法的方向之间，也就

是说它与 $\phi(x)$ 等位面的交角在 $0°\sim 90°$ 之间。

显然，当 $\alpha=0$ 时，（7.25）就是高斯法的法方程(7.23)。当 α 很大时，忽略 A，(7.25) 变为　　$\alpha I\Delta x=P^T\varepsilon$

$$\Delta x=\frac{1}{\alpha}P^T\varepsilon \tag{7.26}$$

考虑到(7.1)式，$\phi(x)$ 的梯度可表示为

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_j}=-2\sum_{i=1}^{M}(\rho_{ai}-\rho_{ci})\frac{\partial\rho_{ci}}{\partial x_i}\qquad(j=1,2,\cdots,N)$$

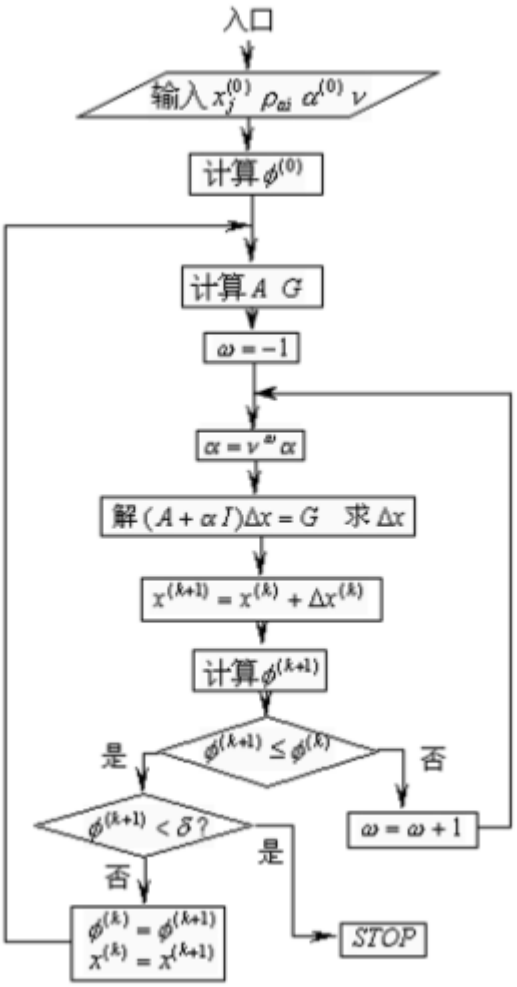


图 7.4　马夸特法程序框图

或写成　　$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -2P^T\varepsilon \tag{7.27}$$

比较（7.26）与(7.27),可知，当α很大时，马夸特法改正量Δx的方向与梯度法相同，均为$P^T\varepsilon$。而且当α逐渐加大时，Δx的步长愈来愈小，最后将趋于零；当α减小时，它们接近高斯法的方向，具有较大的步长。而且可以证明在同一步长下马夸特法的方向最好。由此可见α控制了修改量Δx的方向与步长，因此α又称为阻尼因子。

正确地选择阻尼因子，既要保证方差函数$\phi(x)$逐次降低，又要较快地收敛到极小点，α不能太大，也不能太小。一般情况下可在试算中确定阻尼因子α的大小。在第k次迭代中对选定的α，通过解方程(7.25)，得出Δx，如果

$$\phi(x+\Delta x) > \phi(x)$$

表明这个解不能使方差下降，应适当增加α，重新进行计算。若

$$\phi(x+\Delta x) < \phi(x)$$

说明α可以适当减小，以加快收敛速度。实际计算时可以从一个较大的α值开始，比如令$\alpha=10$，然后逐次以某一个固定因子ν降低。图(7.4)为马夸特法程序框图。

当地球模型中存在明显的 H 或 S 等值性时，马夸特法也能获得满意的拟合效果。但马夸特法不能对反演的结果进行评估。

§7.5　博斯蒂克反演法

博斯蒂克(Bostick)反演法是一种具有代表性的近似的反演技术，尽管结果不够精确，但运算简便，能直观地给出地下电阻率随深度的变化形式，所以得到广泛的应用。在大地电磁测深数据实时处理和现场处理的系统中大多配备了这个反演程序。

博斯蒂克反演是以低频区视电阻率曲线尾支渐近线的特征为基础。图 7.5 是两条二层断面的视电阻率曲线，其第一层电阻率相等，基底电阻率分别为零和无限大。我们知道在低频渐近线上视电阻率分别满足下列方程

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu S^2} \qquad \text{当 } \rho_2 = \infty \tag{7.28}$$

$$\rho_a = \omega\mu H^2 \qquad \text{当 } \rho_2 = 0 \tag{7.29}$$

S、H 分别是第一层纵向电导和第一层的厚度。

在 S 线与 H 线交点的左侧，即相对高频部分视电阻率近乎相等，也就是说在这些频点它们几乎不受断面下层电阻率的影响，而且电阻率接近 S 与 H 线交点处的视电阻率。可以设想，当第二层电阻率发生任何改变时这个结论依然成立。因此可以用交点上的数值相当准确地给出该频点所对应深度以上的电阻率，而与以下空间的电阻率无关。

渐近线交点坐标ρ_a，ω应满足(7.28)、(7.29)，由此可以确定某一深度以上地层的导电性，两式联立消去ω、μ，得

$$\rho_l = \frac{H}{S}$$

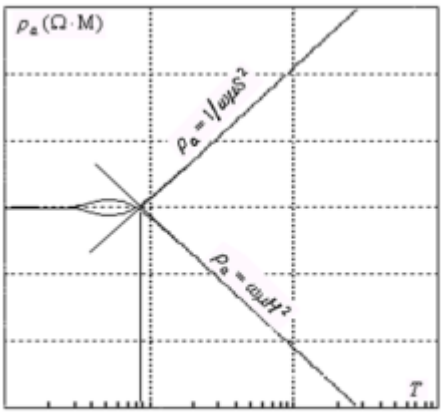


图 7.5 博斯蒂克反演原理图

ρ_1 为基底以上岩层的平均电阻率。这表明通过视电阻率曲线上任一点都可确定出一个平均电阻率，它仅与断面中的某一深度 H 及其以上介质的纵向电导 S 有关。

假设地层电性是随深度连续变化的函数，则纵向电导 S 可表示为下式

$$S(H)=\int_0^H \sigma(z)dz \tag{7.30}$$

对 H 求导数，得到

$$\sigma(H)=\frac{dS(H)}{dH}=\frac{dS/d\omega}{dH/d\omega}=\frac{\frac{S}{\omega}\frac{d\log S}{d\log\omega}}{\frac{H}{\omega}\frac{d\log H}{d\log\omega}} \tag{7.31}$$

对(7.28)、(7.29)式取对数，得

$$\log\rho_a=-\log\omega-2\log S-\log\mu$$

$$\log\rho_a=\log\omega+\log\mu+2\log H \tag{7.32}$$

上式分别对 $\log\omega$ 求导数，经整理后可得

$$\frac{d\log H}{d\log\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}-1\right) \tag{7.33}$$

$$\frac{d\log S}{d\log\omega}=-\frac{1}{2}\left(\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}+1\right) \tag{7.34}$$

(7.33)、(7.34)代入(7.31)后得到

$$\sigma(H)=\frac{S}{H}\frac{1+\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}}{1-\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}}$$

或
$$\rho(H)=\frac{H}{S}\frac{1-\dfrac{d\log\rho_a}{d\log\omega}}{1+\dfrac{d\log\rho_a}{d\log\omega}}=\rho_a(\omega)\frac{1-\dfrac{d\log\rho_a}{d\log\omega}}{1+\dfrac{d\log\rho_a}{d\log\omega}} \tag{7.35}$$

由(7.29)又可得到

$$H=\sqrt{\frac{\rho_a}{\omega\mu}} \tag{7.36}$$

(7.35)和(7.36)就是博斯蒂克反演的基本公式，可在实测视电阻率上读出不同频率的ω与ρ_a，并求得不同频率的导数$d\log\rho_a/d\log\omega$，代入(7.36)求得深度值，代入(7.35)求得视电阻率值。最后作出一条深度—-电阻率曲线，这就是 Bostick 反演结果。

但考虑到测量误差，而且对实测曲线求导数会使误差增加。因此在实施博斯蒂克反演时应设法避免对实测曲线直接求导数。一种办法是对实测曲线求出拟合函数（如拟合多项式），由拟合函数再求导数。另一种办法是，当相位曲线比较光滑时，考虑到在一维介质中大地电磁阻抗是最小相位函数，振幅与相位之间的关系可以由希尔伯特转换公式（3.53 式）和$\ln Z(\omega)=\ln|Z(\omega)|+i\theta(\omega)$给出：

$$\theta(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|Z(g)|}{g-\omega}dg$$

再考虑到$|Z(g)|=\sqrt{\omega\mu\rho_a}$，由此得到近似公式

$$\theta(\omega)\approx\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}$$

则有
$$\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}=\frac{4}{\pi}\theta(\omega)-1$$

上式代入(7.35)得

$$\rho(H)=\rho_a(\omega)\left(\frac{\pi}{2\theta(\omega)}-1\right) \tag{7.37}$$

(7.36)与(7.37)也是经常使用的博斯蒂克反演公式。$\theta(\omega)$可从相位曲线上读出。由上式看出，用相位值进行博斯蒂克反演避勉了求导数。

参考文献

[1] 陈乐寿，王光谔：大地电磁测深法，地质出版社，1990
[2] 朴化荣：电磁测深法原理，地质出版社，1990
[3] 刘国栋，陈乐寿：大地电磁测深研究，地震出版社，1984
[4] 陈乐寿，刘任，王天生：大地电磁测深资料处理与解释，石油工业出版社，1989
[5] 刘国栋，邓前辉：电磁方法研究与勘探，地震出版社，1993
[6] 朱仁学：大地电磁测深中相位微分的研究，地球物理学报，1999,42 卷增刊, p.209-218
[7] 朱仁学：断层的大地电磁响应的研究，长春科技大学学报，1999, 29 卷 3 期, p.290-294
[8] 朱仁学等：大地电磁测深资料解释的新方法，长春科技大学学报，2000, 30 卷 3 期, p.271-274
[9] 朱仁学等：大地电磁张量阻抗的旋转不变量的分析，物探化探译丛，1998, 第 6 期,p.78-90
[10] 朱仁学等：MT 方法对一维地质体探测能力的研究，长春科技大学学报，2001, 31 卷 3 期, p.302-305
[11] 薛琴访：场论，地质出版社，1978
[12] 马西奎：电磁场理论及应用，西安交通大学出版社，2000
[13] A.A.Kaufman, G.V.Keller：The Magnetotelluric Sounding Methed, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York 1981
[14] H.P.Patra and K.Mallick：Geosounding Principles, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York 1980
[15] D.Rankin：The Magnetotelluric Effect on a Dike, Geophysics,1962,Vol.27,p.666-676
[16] D.W.Oldenburg：One-dimensional Inversion of Natural Source Magnetotelluric Ohservalions, Geophysics, 1979, Vol.44, p.1218-1244,
[17] D.Loewenthal：On the Phase Constraint of the Magnetotelluric Impedance, Geophysics, 1975, Vol. 40, p.325-330
[18] I. D.Erceville, G.Kunetz ： The Effect of a Fault on the Earth’s Natural Electromagnetic Field, Geophysics, 1962,Vol 27 , p.651-665