

高程误差对七参数转换的影响^{*}

王解先^{1,2)} 邱杨媛¹⁾

(1) 同济大学测量与国土信息系, 上海 200092
(2) 现代工程测量国家测绘局重点实验室, 上海 200092

摘 要 通过七参数空间坐标转换可将 WGS84 坐标转换至地方坐标, 但由于地方坐标点的大地高通常不能精确已知, 它对转换是否有影响? 需进行研究。从最小二乘原理出发, 推导了七参数的求取方法, 分析了大地高误差对七参数的影响, 以及由此对转换坐标产生的影响, 从理论上证明了在地面上 100 km × 100 km 的范围内, 即使公共点中地方坐标的高程存在误差, 其对坐标转换的影响仍然很小。

关键词 WGS84 坐标 地方坐标 空间转换 七参数转换 高程误差

中图分类号: P226^{+.3}

文献标识码: A

INFLUENCE OF ELLIPSOIDAL HEIGHT ERROR ON SEVEN-PARAMETER TRANSFORMATION

Wang Jiexian^{1,2)} and Qiu Yang Yuan¹⁾

(1) Department of Surveying and Geo-informatics, Tongji University, Shanghai 200092
(2) Key Laboratory of Advanced Engineering Survey of SBSM, Shanghai 200092

Abstract WGS84 coordinates can be transformed to local coordinates through seven-parameter space transformation, but the ellipsoidal height of local coordinates usually cannot be precisely known. It should be probed whether the imprecise height will affect the transformation. The least square approach is used for solving the transformation parameters. Moreover the changes of parameters caused by error of ellipsoidal height of local coordinates are deduced. Finally, it is demonstrated that even though the ellipsoidal heights are not precise enough, its influence on coordinate transformation can be ignored in the range of 100 km × 100 km.

Key words: WGS84, Local coordinates, space transformation, seven-parameter transformation, height error

1 前言

GPS 测量得到的是 WGS84 空间坐标, 而工程施工中通常使用平面地方坐标系, 要求得到地方平面坐标, 如北京 54。可以通过两种方式实现转换: 一是平面转换模型; 另一种是空间转换模型^[1~6]。

平面转换是将 GPS 测得的坐标经高斯投影化为平面坐标, 再根据重合点的已知平面坐标, 由平面转换模型, 求出平面转换参数, 从而将 GPS 测得的坐标化为当地坐标, 但平面转换模型是一个线形模型, 高斯投影变形误差不能顾及。空间转换模型较多采用, 其计算流程如下^[1]:

* 收稿日期: 2007-01-22

基金项目: 新世纪优秀人才支持计划

作者简介: 王解先, 男, 1963 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事卫星大地测量学研究. E-mail: wangjiexian@mail.tongji.edu.cn

1) 将 GPS 测得的 WGS84 坐标表示为空间直角坐标 $(X_{84} \ Y_{84} \ Z_{84})^T$;

2) 通过空间转换模型,将其转换为地方坐标系的空间直角坐标 $(X_{54} \ Y_{54} \ Z_{54})^T$,计算公式为:

$$\begin{pmatrix} X_{54} \\ Y_{54} \\ Z_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (1+k) \mathbf{R}_1(\alpha) \mathbf{R}_2(\beta) \mathbf{R}_3(\gamma) \begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中 $(x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ 为 3 个平移参数, $(\alpha \ \beta \ \gamma)^T$ 为 3 个旋转角参数, k 为一个尺度参数, \mathbf{R} 为旋转矩阵;

3) 将 $(X_{54} \ Y_{54} \ Z_{54})^T$ 转换为经纬度和大地高 $(B \ L \ h)^T$,再由经纬度经高斯投影得到地方平面坐标系的坐标,提供工程使用。

上面的式(1)称为七参数转换模型;若不考虑尺度参数($k=0$),称为六参数转换模型;若仅考虑 3 个坐标平移参数($k=0, \alpha=0, \beta=0, \gamma=0$),则称为三参数转换模型。

因此只要转换参数已知, GPS 测得的坐标,就容易转换为地方坐标。转换参数的求取方法通常是在已知地方坐标的点上用 GPS 测定 WGS84 坐标,将已知的地方坐标化为空间坐标形式,由式(1)按最小二乘求出转换参数。

问题是在实际应用中我国采用的平面坐标以椭圆为基准,高程以似大地水准面为基准,多数情况下,已知平面坐标的点上没有精确的大地高,很多情况下连水准高程都没有,只有米级精度的近似高程。这样,式(1)中的 $(X_{54} \ Y_{54} \ Z_{54})^T$ 不能精确得到,但其相应的经纬度是精确的。

本文将从理论和数值上证明,尽管高程不准确,但空间转换得到的平面坐标仍然是准确的。

2 高程变化引起的转换参数变化

如前所述,式(1)中的地方空间坐标 $(X_{54} \ Y_{54} \ Z_{54})^T$ 是由二维的高斯坐标 $(x_g \ y_g)^T$ 转换为经纬度 $(B \ L)^T$,再联合大地高 h 求得^[2,3]:

$$\begin{pmatrix} X_{54} \\ Y_{54} \\ Z_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h) \cos(B) \cos(L) \\ (N+h) \cos(B) \sin(L) \\ (N(1-e^2) + h) \sin(B) \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中的卯酉圈曲率半径 $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}$, a 和 e^2 为

地方坐标对应椭球的长半轴和偏心率。

通常地方坐标系与 WGS84 坐标系之间相差不大,旋转角为小量,式(1)可以简写为:

$$\begin{pmatrix} X_{54} \\ Y_{54} \\ Z_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix}$$

可以看出上式是一个线形模型,改写为:

$$\begin{pmatrix} X_{54} \\ Y_{54} \\ Z_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_{84} & 0 & -Z_{84} & Y_{84} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{84} & Z_{84} & 0 & -X_{84} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{84} & -Y_{84} & X_{84} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ k \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{P} + \begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中 \mathbf{A} 为系数矩阵, \mathbf{P} 为参数向量。

若有 n 个公共点,则可列出 n 个上述误差方程,对公共点 i ,其误差方程为:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{P} - \mathbf{I}_i \quad (4)$$

式中 \mathbf{P} 为待定的七个参数, \mathbf{I}_i 为常数项:

$$\mathbf{I}_i = \begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} X_{54} \\ Y_{54} \\ Z_{54} \end{pmatrix}_i$$

对所有点组成法方程,求得转换参数为:

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{C} \quad (5)$$

其中法方程系数阵 \mathbf{N} 和常数项 \mathbf{C} 为:

$$\mathbf{N} = \sum_1^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i, \mathbf{C} = \sum_1^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{I}_i$$

若某公共点 j 的大地高 h_j 改变 Δh_j ,其空间坐标 $(X_{54} \ Y_{54} \ Z_{54})_j^T$ 的变化量 $(\Delta X_{54} \ \Delta Y_{54} \ \Delta Z_{54})_j^T$ 可以由式(2)求得:

$$\begin{pmatrix} \Delta X_{54} \\ \Delta Y_{54} \\ \Delta Z_{54} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \\ \sin(B) \end{pmatrix}_j \Delta h \quad (6)$$

这样,第 j 个误差方程的常数项 \mathbf{I}_j 变为 \mathbf{I}'_j :

$$\mathbf{I}'_j = \mathbf{I}_j + \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \\ \sin(B) \end{pmatrix}_j \Delta h_j$$

总法方程变为:

$$(\sum_1^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i) (\mathbf{P} + \Delta \mathbf{P}) = \sum_1^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{I}_i + \mathbf{A}_j^T \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \\ \sin(B) \end{pmatrix}_j \Delta h_j$$

因此, j 大地高变化 Δh_j 引起的转换参数的变化量为:

$$\Delta \mathbf{P} = (\sum_1^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_j^T \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \\ \sin(B) \end{pmatrix}_j \Delta h_j \quad (7)$$

3 转换参数变化对转换坐标的影响

对测区内任意 GPS 测定点 q ,设测得的空间坐

标为 $(X_{84} \ Y_{84} \ Z_{84})_q^T$,由转换公式(3)可以求得其在地方坐标系内的空间坐标 $(X_{54} \ Y_{54} \ Z_{54})_q^T$,若转换参数变化 ΔP ,引起的地方空间坐标变化 $(\Delta X_{54} \ \Delta Y_{54} \ \Delta Z_{54})_q^T$ 为:

$$\begin{pmatrix} \Delta X_{54} \\ \Delta Y_{54} \\ \Delta Z_{54} \end{pmatrix}_q = A_q \Delta P = A_q \left(\sum_1^n A_i^T A_i \right)^{-1} A_j^T \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \\ \sin(B) \end{pmatrix} \Delta h_j \quad (8)$$

误差方程系数 A 与对应点的WGS84空间坐标有关,定义WGS84坐标中心点 p ,其坐标为:

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_1^n X_{84} \\ \sum_1^n Y_{84} \\ \sum_1^n Z_{84} \end{pmatrix}$$

地面点空间坐标的模约为6 400 km,对于地面上100 km × 100 km网(如整个上海市),各WGS84点与 p 点的差为50 km量级。任意点 i 的误差方程系数可改写为:

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_p & 0 & -Z_p & Y_p \\ 0 & 1 & 0 & Y_p & Z_p & 0 & -X_p \\ 0 & 0 & 1 & Z_p & -Y_p & X_p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & X_{84i} - X_p & 0 & -Z_{84i} + Z_p & Y_{84i} - Y_p \\ 0 & 0 & 0 & Y_{84i} - Y_p & Z_{84i} - Z_p & 0 & -X_{84i} + X_p \\ 0 & 0 & 0 & Z_{84i} - Z_p & -Y_{84i} + Y_p & X_{84i} - X_p & 0 \end{pmatrix}$$

因为网中任意点的空间坐标分量与中心点坐标之差在50 km量级上,比坐标值要小2个量级,因此上式可以写为:

$$A_i = A_p + \epsilon^{-2} (A_p) \quad (9)$$

式中的 ϵ^{-2} 表示二阶小量。

式(8)中的 $A_q \left(\sum_1^n A_i^T A_i \right)^{-1} A_j^T$ 变为:

$$A_q \left(\sum_1^n A_i^T A_i \right)^{-1} A_j^T = (A_p + \epsilon^{-2}) (n A_p^T A_p + \epsilon^{-2})^{-1} (A_p + \epsilon^{-2})^T \approx \frac{1}{n} A_p ((A_p^T A_p + \epsilon^{-2})^{-1}) A_p^T \approx E + \epsilon^{-2} \quad (10)$$

即该项近似为单位阵 E ,上式中的 n 为公共点个数。

因此,式(8)近似为:

$$\begin{pmatrix} \Delta X_{54} \\ \Delta Y_{54} \\ \Delta Z_{54} \end{pmatrix}_q \approx \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \\ \sin(B) \end{pmatrix} \Delta h_j \quad (11)$$

上式相应的经纬度大地高变化量为^[3]:

$$\begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \\ \Delta h \end{pmatrix}_q =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sin(B) \cos(L)}{M+h} & -\frac{\sin(B) \sin(L)}{M+h} & \frac{\cos(B)}{M+h} \\ -\frac{\sin(L)}{(N+h) \cos(B)} & \frac{\cos(L)}{(N+h) \cos(B)} & 0 \\ \cos(B) \cos(L) & \cos(B) \sin(L) & \sin(B) \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} \Delta X_{54} \\ \Delta Y_{54} \\ \Delta Z_{54} \end{pmatrix}_q \quad (12)$$

式中的 M 是子午圈曲率半径。

高斯坐标的变化量 $(\Delta x_g \ \Delta y_g)_q^T$ 近似为南北向和东西向的变化量:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_g \\ \Delta y_g \end{pmatrix}_q \approx (M+h) \begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \quad (13)$$

将式(11)和式(12)代入上式,并以中点 p 的经纬度代替 q 和 j 的经纬度值:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_g \\ \Delta y_g \end{pmatrix}_q = \begin{pmatrix} -\sin(B) \cos(L) & -\sin(B) \sin(L) & \cos(B) \\ -\sin(L) & \cos(L) & 0 \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \\ \sin(B) \end{pmatrix}_j \Delta h_j \approx \begin{pmatrix} -\sin(B) \cos(L) & -\sin(B) \sin(L) & \cos(B) \\ -\sin(L) & \cos(L) & 0 \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \\ \sin(B) \end{pmatrix}_p \Delta h_j \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta h_j \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式表明,若某公共点的地方坐标大地高存在误差,但求得转换参数后,转换出来点的平面坐标不变。

从上面的推导过程容易看出,即使公共点中多个点的大地高有误差,结果仍成立。

参考文献[1]已经从数值上验证了本文理论的正确性。

4 结论

将WGS84坐标转换至地方坐标通常借助七参数空间转换模型,而七参数的求解需要已知地方坐标系的空间直角坐标。然而在实际问题中,由于我国平面坐标系与高程系统分离,大多数情况下,平面坐标的点上没有精确的大地高,很多连水准高程都没有,只有米级精度的近似高程,地方坐标系的精确大地高难以获得。本文利用最小二乘原理,推导了七参数的求取方法,并对大地高误差对转换参数的影响,以及由此对坐标转换产生的影响进行了详细分析,从理论上证明:对于地面上(下转第38页)

- earthquake in the west to Kunlun mountain pass in 2001 with DInSAR[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2007, 27(3):12-17. (in Chinese)
- 7 游新兆,等. 大气折射对 InSAR 影响的定量分析[J]. 大地测量与地球动力学, 2003, 23(2):81-87.
- 7 You Xinzhaoh, et al. Quantitative estimation of effect of atmospheric refraction on InSAR[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2003, 23(2):81-87. (in Chinese)
- 8 乔学军,等. 利用 InSAR 技术获取三峡地区的数字高程模型[J]. 大地测量与地球动力学, 2003, 23(2):122-126.
- 8 Qiao Xuejun, et al. Acquisition of DEM of Three Gorges area by InSAR[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2003, 23(2):122-126. (in Chinese)
- 9 梁伟锋,王庆良. InSAR 技术在火山监测研究中的应用[J]. 大地测量与地球动力学, 2003, 23(4):120-124.
- 9 Liang Weifeng and Wang Qingliang. Application of InSAR to monitoring and studying volcano[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2003, 23(4):120-124. (in Chinese)
- 10 游新兆,等. 合成孔径雷达干涉测量原理与应用[J]. 大地测量与地球动力学, 2002, 22(3):109-116.
- 7 You Xinzhaoh, et al. Synthetic aperture interferometry and its application[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2002, 22(3):109-116. (in Chinese)
- 11 路旭,等. 用 InSAR 作地面沉降监测的试验研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2002, 22(4):66-70.
- 11 Lu Xu, et al. Experiment on land subsidence monitoring by InSAR[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2002, 22(4):66-70. (in Chinese)
- 12 Li Zhiwei, Ding Xiaoli, et al. Quantitative study of atmospheric effects in spaceborne InSAR measurements [J]. Journal of Central South University of Technology, 2005, 12(4):494-498.
- 13 李振洪,等. InSAR 数据处理中的误差分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2004, 29(1):72-76.
- 13 Li Zhenhong, et al. Error analysis in InSAR data processing[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2004, 29(1):72-76. (in Chinese)
- 14 Zhiwei Li. Modeling atmospheric effects on repeat-pass InSAR measurements[D]. Hong Kong Polytechnic University, 2004.
- 15 Zhenhong Li. Correction of atmospheric water vapour effects on repeat-pass SAR interferometry using GPS, MODIS and MERIS data[D]. University of London, 2005.
- 16 Lancaster P and Salkauskas K. Curve and surface fitting: an introduction [M]. London-Orlando: Academic Press, 1986.
- 17 Volker Janssen. GPS-derived tropospheric delay corrections to differential InSAR results[R]. ION GPS/GNSS 2003, 9-12 September 2003.
- 18 庄立伟,王石立. 东北地区逐日气象要素的空间插值方法应用研究[J]. 应用气象学报, 2003, 14(5):605-615.
- 18 Zhuang Liwei and Wang Shili. Spatial interpolation methods of daily weather data in Northeast China[J]. Journal of Applied Meteorological Science, 2003, 14(5):605-615. (in Chinese)
- 19 Williams S, Bock Y and Fang P. Integrated satellite interferometry: Troposphere noise, GPS estimates, and implications for synthetic aperture radar products[J]. Journal Of Geophysical Research, 1998, 103 (B11), 27 051-27 067.

(上接第 27 页) 100 km × 100 km 的范围, 即使公共点中地方坐标的高程存在误差, 在求得转换参数后, 转换出来点的平面坐标仍基本不变, 当多个公共点地方坐标高程有误差时, 该结论仍然成立, 这在一般的城市坐标系应用中都具有实用意义。

References

- 1 王解先,等. WGS84 与北京 54 坐标的转换问题[J]. 大地测量与地球动力学, 2003, 23(3):70-73.
- 1 Wang Jiexian, et al. Problem of coordinate transformation between WGS84 and Beijing 54[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2003, 23(3):70-73. (in Chinese)
- 2 王解先. 七参数转换中参数之间的相关性[J]. 大地测量与地球动力学, 2007, 27(2):43-46.
- 2 Wang Jiexian. Correlations among parameters in seven-parameter transformation model[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2007, 27(2):43-46. (in Chinese)
- 3 施一民. 现代大地控制测量[M]. 上海: 同济大学出版社, 2003.
- 3 Shi Yimin. Modern geodesy control surveying[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2003. (in Chinese)
- 4 武汉测绘科技大学控制测量教研室, 同济大学大地测量教研室合编. 控制测量学(下)[M] 北京: 测绘出版社, 1992.
- 4 Teaching and Researching Group on Control Survey of Wuhan College of Surveying and Mapping, Teaching and Researching Group on Geodesy of Tongji University (ed). Control survey (2nd V.) [M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 1992. (in Chinese)
- 5 朱华统,等. GPS 坐标系统的变换[M] 北京: 测绘出版社, 1994.
- 5 Zhu Huatong, et al. Transformation of GPS coordinate system [M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 1994. (in Chinese)
- 6 王解先. GPS 精密定轨与定位[M]. 上海: 同济大学出版社, 1997.
- 6 Wang Jiexian. Precise orbit determination and ground point-positioning of GPS[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1997. (in Chinese)