第27卷第2期 大地测量与地球动力学 Vol. 27 No. 2
2007年4月 JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS Apr., 2007

文章编号:1671-5942(2007)02-0043-04

七参数转换中参数之间的相关性*

王解先[1,2)]
(1)同济大学测量与国土信息系,上海 200092
2)现代工程测量国家测绘局重点实验室,上海 200092)

摘 要 通过七参数空间坐标转换可将 *WGS*84 坐标转换至地方坐标。介绍了广义相关系数的求解方法,并对七参数转换模型中平移、旋转及尺度参数之间的广义相关系数进行了求解。从理论上证明了在小范围测区内七参数之间的强相关性,同时也验证了七参数模型的可行性和与三参数转换的等效性。

关键词 *WGS*84 空间坐标 地方坐标 七参数转换模型 广义相关
中图分类号:*P*226⁺.3 **文献标识码**:*A*

CORRELATIONS AMONG PARAMETERS IN SEVEN-PARAMETER TRANSFORMATION MODEL

Wang Jiexian[1,2)]
(1) *Dept. of Surveying and Geomatics, Tongji University, Shanghai* 200092
2) *Key Laboratory of Advanced Engineering Survey of SBSM, Shanghai* 200092)

Abstract The seven-parameter space transformation model can be used to obtain local coordinates from observed WGS84 coordinates. What is the generalized corrective coefficient is described. And the generalized corrective coefficients among parameters of shift, rotation angles, and scale in seven-parameter transformation model are calculated. The high correlations among the seven-parameters are testified when the transformation model is applied to a small region, the feasibility of the seven-parameter model and its equivalence to the there-parameter transformation in a small region are demonstrated.

Key words: WGS84, space coordinate, local coordinate, seven-parameter transformation model, generalized correction

1 前言

GPS 测量得到的是 WGS84 中的空间坐标,而工程施工中通常使用平面地方独立坐标系,要求得到地方平面坐标(如北京 54)。可以通过平面转换模型或空间转换模型转换得到[1~3]。

平面转换是将 GPS 测得的坐标经高斯投影化为平面坐标,再根据重合点的已知平面坐标,由平面转换模型,求出平面转换参数,从而将 GPS 测得的坐标化为当地坐标,但平面转换模型是一个线形模型,不能顾及高斯投影变形误差。

空间转换模型为[4]:

* **收稿日期**:2006-09-22
基金项目:新世纪优秀人才支持计划
作者简介:王解先,男,1963 年生,教授,主要从事卫星大地测量学研究. E-mail:wangjiexian@ mail. tongji. edu. cn

$$\begin{pmatrix} X_{54} \\ Y_{54} \\ Z_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (1+k)R(\alpha)R(\beta)R(\gamma)\begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中$(X_{54} \quad Y_{54} \quad Z_{54})^{\mathrm{T}}$为地方坐标的空间直角坐标形式,由地方坐标的高斯坐标形式反算为经纬度,再化成直角坐标得到;$(X_{84} \quad Y_{84} \quad Z_{84})^{\mathrm{T}}$为 WGS84 坐标的空间直角坐标形式,$(x_0 \quad y_0 \quad z_0)^{\mathrm{T}}$为 3 个平移参数,$(\alpha \quad \beta \quad \gamma)^{\mathrm{T}}$为 3 个旋转参数,$(k)$为 1 个尺度参数。

不考虑尺度参数(即 $k=0$),称为六参数转换模型,仅考虑 3 个坐标平移参数($k=0$、$\alpha=0$、$\beta=0$、$\gamma=0$)称为三参数转换模型。

在实际工程应用中,测区范围相对于地球而言一般很小,地球半径约有 6 400 km,对于地面上 100 ×100 km^2 范围的测区(相当于上海这样的大城市),式(1)两端公共点的空间坐标在数值上首位不变,即几乎相等,对于更小的测区,空间坐标的前几位数字都一样。这时,式(1)右端的$(1+k)R(\alpha)R(\beta)R(\gamma)\begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix}$对每个点都基本不变,即尺度和旋转参数对每个点的影响基本上是一样的,而平移参数对每个点的影响是相等的,因此从数值上可以看出,对于不太大的测区,尺度参数、旋转角参数与平移参数之间存在强相关。

本文将从数值上验证空间转换模型参数间的相关性,同时说明,尽管参数相关,但转换结果仍然可用。

2 广义相关系数

在求解 7 参数时,若公共点多于 3 个,便可用最小二乘求解 7 个转换参数,各个参数间的相关性可以由协方差元素求得,即为$\frac{\boldsymbol{Q}_{ij}}{\sqrt{\boldsymbol{Q}_{ii}}\sqrt{\boldsymbol{Q}_{jj}}}$,$\boldsymbol{Q}$ 为求解 7 个转换参数得到的协方差矩阵。

按文献[5],参数组与参数组之间的相关性称为广义相关性。将 7 个参数分成两组,3 个平移参数看成一组 $\underset{3\times1}{\boldsymbol{x}}$,将 3 个旋转参数和 1 个尺度参数看成另一组 $\underset{4\times1}{\boldsymbol{y}}$,将求解 7 个参数得到的协方差阵写为:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{xx} & \boldsymbol{V}_{xy} \\ \boldsymbol{V}_{yx} & \boldsymbol{V}_{yy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中:$\boldsymbol{V}_{xx}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$,$\boldsymbol{V}_{yy}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y})$,$\boldsymbol{V}_{xy}=\mathrm{cov}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{V}_{yx}^{\mathrm{T}}$。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的线性关联阵 $\boldsymbol{M}_{yx}$ 为:

$$\boldsymbol{M}_{yx}=\boldsymbol{V}_{yy}^{+}\boldsymbol{V}_{yx}\boldsymbol{V}_{xx}^{+}\boldsymbol{V}_{xy} \quad (3)$$

若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的相关秩为 r,$r=rk(\boldsymbol{M}_{yx})=rk(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,求出 $\boldsymbol{M}_{yx}$的特征根,非零特征根有 r 个,表示为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$,则 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的广义相关系数可以用以下几种方式表示:

1) $\sqrt[r]{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}$,用 $\rho_{xy}^{(1)}$ 表示;

2) $\frac{1}{r}(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i)$,用 $\rho_{xy}^{(2)}$ 表示;

3) $\max_{1\leqslant i\leqslant r}\lambda_i$,用 $\rho_{xy}^{(3)}$ 表示;

4) $\min_{1\leqslant i\leqslant r}\lambda_i$,用 $\rho_{xy}^{(4)}$ 表示;

5) $\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-1}\right)^{-1}$,用 $\rho_{xy}^{(5)}$ 表示;

要证明七参数转换模型中平移、旋转及尺度参数之间强相关性,只需证明其广义相关系数接近 1 即可。

3 数值上的分析

3.1 数据

设在一区域性 GPS 网中,有 4 个公共点,这 4 个点既有在 WGS84 上的坐标,又有在北京 54 上的坐标,其概略值列于表 1,该网范围:南北约 130 km;东西约 70 km。对工程而言,这是一个较大的 GPS 网,相当于我国最大城市覆盖的范围,但相对于地球仍是很小的一个区域。

表 1 公共点的概略坐标(单位:m)

Tab. 1 Compendious coordinates of common points (unit:m)

	X	Y	h
1	3 450 110	-116 661	66
2	3 487 161	-114 227	64
3	3 410 268	-79 150	141
4	3 321 857	-192 995	1

采用最小二乘方法,由式(1)求解 7 参数,为使法方程性能良好,平移参数单位取 m,旋转参数单位取 1/30 s,尺度参数取 $k\times10^{-6}$中的 k。所得协方差阵列于表 2。

各个参数之间的相关性为:$\frac{\boldsymbol{Q}_{ij}}{\sqrt{\boldsymbol{Q}_{ii}}\sqrt{\boldsymbol{Q}_{jj}}}$,见表 3。

表 3 表明 7 个参数之间的相关性并非十分强,最大的相关性出现在 $\boldsymbol{y}_0$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 之间,也仅为 0.942。

3.2 平移参数与旋转和尺度参数之间的相关性

按表 2 的协方差数据,将两组参数定义为:

表 2　七参数转换的协方差阵

Tab. 2　Covariance array of 7-parameter space transformation

	x_0	y_0	z_0	α	β	γ	k
x_0	86 950.210						
y_0	80 426.485	95 669.091			对		
z_0	−46 439.643	−49 456.092	39 596.937			称	
α	−96 660.562	−98 751.086	54 475.479	114 202.965			
β	23 280.667	18 703.349	−5 939.791	−20 901.928	14 367.259		
γ	−73 178.829	−82 938.277	52 797.817	85 715.924	−16 875.331	80 969.109	
k	752.542	−1 208.212	−854.901	0	0	0	260.563

表 3　7 参数之间的相关性

Tab. 3　Correlativities among 7 parameters

	x_0	y_0	z_0	α	β	γ	k
x_0	1	0.882	−0.791	−0.970	0.659	−0.872	0.158
δy		1	−0.804	−0.945	0.504	−0.942	−0.242
z_0			1	0.810	−0.249	0.932	−0.266
α				1	−0.516	0.892	0
β					1	−0.495	0
γ						1	0
k							1

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ k\end{pmatrix}$$

对 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 算得线性关联阵 $\boldsymbol{M}_{yx}$ 为:

$$\boldsymbol{M}_{yx}=\begin{bmatrix}0.733\,8 & -0.376\,3 & 0.234\,4 & 0\,000\,0\\ -0.374\,3 & 0.471\,0 & 0.329\,5 & 0.000\,0\\ 0.232\,6 & 0.328\,7 & 0.795\,2 & 0.000\,0\\ -0.000\,0 & -0.000\,0 & 0.000\,0 & 1.000\,0\end{bmatrix}$$

解得的特征根(精确至 4 位小数)为:−0.000 0,1.000 0,1.000 0,1.000 0。

由此可见 $\boldsymbol{M}_{yx}$ 是秩亏阵,其秩为 3,由广义相关系数的定义,由非零特征根可求出相关系数,$\rho_{xy}^{(i)}=1$ $(i=1,2,\cdots,5)$,故平移参数与另外 4 个参数强相关。

3.3　平移参数与旋转参数之间的相关性

将两组参数定义为:

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

由表 2 的协方差数据,由(3)式算得线性关联阵 $\boldsymbol{M}_{yx}$ 为:

$$\boldsymbol{M}_{yx}=\begin{bmatrix}0.733\,8 & -0.376\,3 & 0.234\,4\\ -0.374\,3 & 0.471\,0 & 0.329\,5\\ 0.232\,6 & 0.328\,7 & 0.795\,2\end{bmatrix}$$

解得特征根为 0.000 0,1.000 0,1.000 0。

由此可得到广义相关系数为 $\rho_{xy}^{(i)}=1$ $(i=1,2,\cdots,5)$,即平移参数与旋转参数之间是强相关的。

3.4　平移参数与缩放尺度参数之间的相关性

定义:

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=(k)$$

算得:

$$\boldsymbol{M}_{yx}=(1.000\,0)$$

特征根为 1.000 0,故平移参数与尺度参数之间的相关系数为 $\rho_{xy}^{(i)}=1$ $(i=1,2,\cdots,5)$,这也证明了坐标平移参数与尺度参数之间是强相关的。

3.5　旋转参数与尺度参数之间的相关性

定义:

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=(k)$$

算得:

$$\boldsymbol{M}_{yx}=(0)$$

特征根为 0.000 0,故旋转参数与尺度参数之间是完全不相关的。

4　结论

本文介绍了广义相关系数的求解方法,采用实测数据,对七参数转换模型中平移、旋转及尺度参数之间的相关系数进行了计算,并由此得出如下一些结论:

1) 在小区域(地面 100 × 100 km^2 范围)应用时,七参数转换模型中,3 个平移参数与 3 个旋转参数及尺度参数之间是强相关的。

2)3 个旋转参数与尺度参数之间并不相关。

在大部分的实际工程应用中,测区一般都很小。如果在同一测区测定两次或者已知点坐标有微小变化,由于七参数的相关性,求出的参数在数值上将会

差别很大,如平移参数的变化可能达到几十千米。然而只要没有粗差,转换残差仍然会很小,转换结果也不会有大的差异[4],七参数转换模型仍然是有效和可用的。另外如前所述,在小区域应用时,旋转参数和尺度参数对各点的影响基本一样,所起的作用将可以包含在平移参数中,因此七参数与三参数将是基本等价的。

References

1 王解先. GPS 精密定轨与定位[M]. 上海: 同济大学出版社,1997.

1 Wabg Jiexian. GPS precise orbit determination and positioning[M]. Shanghai: Tongji Publishing House, 1997. (in Chinese)

2 茹树青,吉长东,王宏宇. RTK 坐标转换中四参数法与七参数法精度比较[J]. 东北水利水电,2006,24(5):67 ~ 68.

2 Ru Shuqing, Ji Changdong and Wang Hongyu. Comparison between four parameters and seven parameters of RTK coordinate transformation[J]. Water Resources & Hydropower of Northeast China,2006,24(5):67 - 68. (in Chinese)

3 杨晓斌. 实时动态差分全球定位(DGPS RTK)技术及其在水上打桩定位中的应用[J]. 水运工程,2003,11:62 ~ 66.

3 Yang Shubin. DGPS RTK technique and its application in marine driving positioning[J]. Port & Waterway Engineering,2003,11:62 - 66. (in Chinese)

4 王解先,王军,陆彩萍. WGS84 与北京 54 坐标的转换问题[J]. 大地测量与地球动力学,2003,23(3):70 ~ 73.

4 Wang Jiexian, Wang Jun and Lu Caiping. Problem of coordinate transformation between WGS-84 and Beijing 54[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics,2003,23(3):70 - 73. (in Chinese)

5 张尧庭,方开泰. 多元统计分析引论[M]. 北京: 科学出版社,1983.

5 Zhang Yaoting and Fang Kaitai. Introduction of multielement statistics[M]. Beijing:Science Press,1983. (in Chinese)

(上接第 42 页)

方程 $\frac{\xi^2}{a^2e^4}+\frac{z^2}{b^2e'^4}=1$ 是一个旋转椭球方程。它的中心与地球中心重合,旋转轴与地球的旋转轴重合,长半轴为 be'^2,短半轴为 ae^2 与 OE 轴重合。这个旋转椭球的长、短半轴与 Zhang C D 给出的多值区的两个最大半径是相同的,但二者的空间区域不完全相同,我们确定的旋转椭球体包括了 Zhang C D 确定的多值区的范围。如果算法不完善,则或者无法给出这个椭球内部点的解,或者给出的解是错误的、发散的,或者是多值的。我们的算法给出了这个椭球体内任一点大地纬度的惟一解,不存在多值问题。这个椭球体很小,位于地球的内核中,只有在研究地球内核问题的时候才需要确定这个椭球体内某一点的位置。如果研究的目标都在地球的内核以外,Δ 均大于零,可以不考虑 $\Delta<0$ 的情况。

References

1 Bowring B R. Transformation from spatial to geographical coordinates[J]. Surv Rev. XXIII,1976, 181:323 - 327.

2 翟国君. 莫洛金斯基公式用于 X, Y, Z 到 B, L, H 的转换[J]. 测绘通报,1989, 3:8 ~ 10.

2 Zhai Guojun. The transformation from X, Y, Z to B, L, H by Molojinski equation[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 1989, 3:8 - 10. (in Chinese)

3 牛卓立. 空间直角坐标计算大地纬度的椭球参数变换法[J]. 测绘通报,2000,3:12 ~ 13.

3 Niu Zholi. Ellipsoidal parameter transformation method for calculation of geodetic latitude with space rectangular coordinates[J]. Bulletin of Surveying and Mapping,2000,3:12 - 13. (in Chinese)

4 Laskowski P. Is Newton's iteration faster than simple iteration for transformation between geocentric and geodetic coordinates? [J]. Bull G'eod. 1991,65:14 - 17.

5 Lin K C and Wang J. Transformation from geocentric to geodetic coordinates using Newton's iteration[J]. Bull G'eod., 1995,69:14 - 17.

6 Fukushima T. Fast transform from geocentric to geodetic coordinates[J]. J G'eod., 1999,73:603 - 610.

7 Pollard J. Iterative vector methods for computing geodetic latitude and height from rectangular coordinates[J]. J. G'eod., 2002, 76(1): 36 - 40.

8 Borkowski K M. Transformation of geocentric to geodetic coordinates without approximations[J]. Astron Space Sci, 1987,139:1 - 4.

9 Borkowski K M. Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates[J]. Bull G'eod 1989,63:50 - 56.

10 Vermeille H. Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates[J]. J. G'eod., 2002, 76(8): 451 - 454.

11 Zhang C D, Hsu H T, Wu X P, et al. An alternative algebraic algorithm to transform Cartesian to geodetic coordinates[J]. J. G'eod.,2005,79:413 - 420.

12 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京:高等教育出版社,1979.

12 The Editor and Writing Group of Mathematics Manual. Mathematics manual[M]. Beijing: Publishing House of High Education,1979. (in Chinese)

13 Nima. Department of defense world geodetic system 1984, its definition and relationships with local geodetic systems, 4th edn[R]. Tech Rep TR8350.2, National Imagery and Mapping Agency,1997.