

辽宁工程技术大学

硕士学位论文

变形监测数据处理与分析方法研究

姓名：彭广亮

申请学位级别：硕士

专业：大地测量学与测量工程

指导教师：徐爱功

20061125

摘 要

本文主要分析了变形监测的概况,介绍了 GPS 技术在变形监测应用中取得的成果与存在的不足。探讨了 GPS 监测网的优化设计,并在实际中提出很多方法,以提高 GPS 网的精度和可靠性。考虑到工程中基准点的稳定性及有无基准点的情况,相应地采取不同的 GPS 基线网数据处理方法,分别为:自由网平差、秩亏自由网平差和自由网拟稳平差。在变形分析过程中,选用了水准监测数据进行分析实验。首先对数据进行奇异值检验,其次为了从不等周期的变形数据中获得等周期的数据,对原有数据进行多种插值方法的比较,最后用多项式回归分析和灰色系统分析两种方法对数据进行拟合及预测。在精度评定通过的情况下,对下一期的变形量进行了预测,达到了较高的精度,说明了方法是正确可靠的。

关键字:变形监测;优化设计;自由网平差;插值;回归分析;灰色系统

Abstract

In this article the summary of deformation monitoring is described, and the result and shortage of GPS technology in the application of deformation monitoring is introduced. Then the optimization of GPS net is discussed, and many methods are also proposed to enhance the precision and reliability of GPS net. According to the stability of the datum point and whether there are datum points in real project, different methods are chosen to process the GPS base network, such as adjustment of free network, rank defect network adjustment and imitative stable adjustment of free network. In the process of distortion analysis, the data of leveling monitoring is selected to carry on the experiments. Firstly the data is checked to make sure that there are not outliers. Secondly many methods are chosen to interpolate the data, and periodic data can be got from the Non- periodic data. Finally the polynomial regression analysis and the gray system analysis are used to fit the data and make prediction. With the high precision, not only the changing size of the next period is predicted and higher precision is achieved, but also the result verifies that the methods are correct and reliable.

Keywords: deformation monitoring; the optimum design; adjustment of free network;
interpolation; regression analysis; the gray system

1 绪论

1.1 变形监测的内容、目的和意义

变形是自然界普遍存在的现象,它是指变形体在各种荷载作用下,其形状、大小及位置在时间域和空间域的变化^[1]。变形体的变形在一定范围内被确认为允许的,如果超出允许值,则可能引发灾难。自然界的变形危害现象很普遍的,如地震、滑坡、岩崩、地表沉降、火山爆发、溃坝、桥梁与建筑物的倒塌等。

所谓变形监测就是采用多种方法测定工程建筑物变形的工作^[2]。其任务是确定在各种荷载和外力作用下,变形体的形状、大小及位置变化的空间状态和时间特征。变形监测的工作是人们通过变形现象获得科学知识、检验理论和假设的必要手段。

变形体的范畴可以大到整个地球,小到一个工程建(构)筑物的块体,它包括人工和自然的构筑物。根据变形体的范围,可将变形监测的研究对象划分为这样3类:

(1) 全球性变形研究,如监测全球板块运动、地极运动、地球自转速率变化、地潮等;

(2) 区域性变形研究,如地壳形变监测、城市地面沉降;

(3) 工程和局部性变形研究,如监测工程建筑物的三维变形、滑坡体的滑动、地下开采引起的地表移动和下沉等。

变形监测的内容,应根据变形体的性质与地基情况来定。在精密工程测量中,最具有代表性的变形体有大坝、桥梁、矿区、高层(耸)建筑物、防护堤、边坡、隧道、地铁、地表沉降等。

随着社会的进步和国民经济的发展,国家的建设也加快了脚步,许多工程应运而生。众所周知,工程建筑物在施工和运营期间,由于受到多种外力的影响,会产生变形,变形如果超出了允许的范围,就会影响建筑物的正常使用,严重时还会危害建筑物的安全,给社会和人民生命财产带来巨大的损失。尽管工程建筑物在设计时采用了一定的安全系数,使其能安全承受所考虑的各种外荷载的影响,但由于设计中不可能对工程的工作条件、承载能力及其他因素做出完全准确的估计,施工质量也不可能完美无缺,运营过程中还可能发生某些不利的影响,因此国内外,仍有些工程出现事故。如:法国67m高的马尔巴塞(Malpasset)拱坝1995年垮坝;美国93m高的提堂(Teton)

土坝 1976 年溃决；我国板桥和石漫滩两座土坝 1975 年洪水漫坝失事等^[2]。可见保证工程建筑物安全是一个很重要的现实问题。为此变形监测的首要目的是要掌握变形体的实际性能、状况，为判别其安全提供必要的技术支持。

目前，灾害的监测和防治已越来越受到全社会的普遍关注，诸多国际学术组织，如国际大地测量协会 (IAG)、国际测量师联合会 (FIG)、国际岩石力学协会 (ISRM)、国际大坝委员会 (ICOLD)、国际矿山测量协会 (ISM) 等经常定期或不定期地召开学术研讨会进行学术交流等。经广大测量科技工作者和工程技术人员近 30 年的共同努力，在变形监测领域取得了丰硕的理论研究成果，并发挥了实用效益。以我国为例：

(1) 利用地球物理大地测量反演理论，于 1993 年准确地预报了 1996 年发生的丽江大地震；

(2) 1985 年 6 月 12 日长江三峡新滩大滑坡的成功预报，确保灾害损失减少到最低限度；

(3) 隔河岩大坝外观变形 GPS 自动化监测系统在 1998 年长江流域抗洪错峰中发挥的巨大作用，确保了安全渡汛，避免了荆江大堤灾难性的分洪。

科学、准确、及时地分析和预报工程及工程建筑物的变形情况，对工程建筑物的施工和运营管理极为重要，变形监测工作的意义重点表现在两方面：首先是实用上的意义，主要是掌握各种建筑物和地质构造的稳定性，为安全性诊断提供必要的信息以便发现问题并采取措施；其次是科学上的意义，包括更好地理解变形的机理，验证有关工程设计的理论和地壳运动的假说，进行反馈设计以及建立有效的变形预报模型。

1.2 变形监测技术和发展趋势

变形监测技术和方法正在由传统的单一监测模式向点、线、面立体交叉的空间模式发展。在变形体上布置变形观测点，在变形区影响之外的稳定地点设置固定观测站，用高精度仪器定期监测变形区内网点的三维 (X, Y, Z) 位移变化是获得变形体变形的一种行之有效的外部监测方法。这些方法主要包括高精度地面监测技术、摄影测量方法和 GPS 监测系统。

1.2.1 地面监测技术及其发展趋势

在 20 世纪 80 年代以前，变形监测主要是采用常规大地测量和某些特殊测量技术。常规大地测量是采用经纬仪、水准仪、测距仪、全站仪等常规测量仪器测定点的变形值，它是目前变形监测的主要手段。其优点是：(1) 能

够提供变形体整体的变形状态,监测面积大,可以有效地监测、确定变形体的变形范围和绝对位移量;(2)观测量通过组成网的形式可以进行测量结果的校核和精度评定;(3)适用于不同的监测精度要求、不同形式的变形体和不同的外界条件。但外业工作量大,布点受地形条件影响,不易实现自动化监测。在大多数国家中,传统的常规大地测量方法仍然是人类进行工程建筑物变形监测的主要手段。而且在一些有关的技术领域内,其他技术(如现代空间定位技术)尚无法替代传统的常规大地测量方法。例如在工程建筑物的沉降方面,精密水准测量目前仍然是精度最高、成果最可靠且简便易行的方法。所以传统的测量方法,在国民经济建设中仍有巨大的作用。特殊测量手段包括应变测量、准直测量和倾斜测量,它具有测量过程简单、可监测变形体内部的变形、容易实现自动化监测等优点,但通常只能提供局部的和相对的变形信息。

地面测量技术发展方向的代表是测量机器人,其在工程测量和三维工业测量以及变形监测等领域正越来越广泛地得到应用。比如在小浪底、二滩、贵州普定等大坝外部变形监测中的应用,其试验成果明显优于常规方法。

1.2.2 摄影测量方法及其发展趋势

摄影测量技术包括地面摄影测量技术和航空摄影测量技术。近10年来,近景摄影测量在隧道、桥梁、大坝、滑坡、结构工程及高层建筑变形监测等方面得到了应用,其监测精度可达到毫米级。与其它变形监测技术相比较,近景摄影测量的优点是:(1)可在瞬间精确记录下被摄物体的信息及点位关系;(2)可用于规则、不规则或不可接触物体的变形监测;(3)像片上的信息丰富、客观而又可长期保存,有利于进行变形的对比分析;(4)监测工作简便、快速、安全。近几年发展起来的数字摄影测量技术,也在建筑物及滑坡等变形监测中得到了成功的应用,并显示出良好的应用前景。此外,空中摄影测量技术亦在较大范围的地面变形监测中得到了应用。但由于摄影距离不能过远,且大多数的测量部门不具备摄影测量所需的仪器设备,所以摄影测量技术在变形监测中的应用尚不普及。

近年来,随着计算机技术的飞速发展,摄影测量已进入了数字摄影测量时代。通过将摄影的相片转换成数字(用数字来表示每一个像素的灰度值)影像或用特殊摄影机直接获取被摄物体的“数字影像”,然后利用数字影像处理技术和数字影像匹配技术获得同名像点的坐标,进而计算对应物点的空间坐标。整个过程是由计算机完成的,因此也称“计算机视觉”。这种处理

方式可以是“离线”(事后处理)的,也可以是“在线”(实时处理)的。后者称为实时地面摄影测量。地面摄影测量的这种进步将会在变形监测中发挥越来越大的作用。

1.2.3 GPS 技术及其发展趋势

全球定位系统 GPS 的应用是测量技术的一项革命性变革。在变形监测方面,与传统方法相比较, GPS 技术不仅具有精度高、速度快、操作简便等优点,而且利用 GPS 和计算机技术、数据通信技术及数据处理与分析技术进行集成,可实现从数据采集、传输、管理到变形分析及预报的自动化,达到远程在线实时监控的目的。其特点主要有:(1)测站间无需通视;(2)可同时提供监测点的三维位移信息;(3)全天候监测;(4)监测精度高;(5)操作简便易于实现监测自动化;(6)GPS 大地高可用于垂直位移监测。近些年来随着 GPS 卫星定位技术的发展和精度的提高,使 GPS 技术在变形监测方面得到了广泛的应用,特别是在板块运动、地表沉降、大坝自动化监测、陆海垂直运动监测、滑坡监测等方面,获得了令人满意的结果和精度,为管理和决策提供了重要的依据^[4]。随着技术的进步, GPS 技术在变形监测方面将有更长远的发展。

GPS 技术应用于变形监测的发展趋势,可概括为以下几个方面^[6]:

(1) 建立 GPS 变形监控在线实时分析系统

对于大坝、大型桥梁、高层建(构)筑物、滑坡和地区性地壳变形监测,研究建立技术先进而又实用的 GPS 变形监控在线实时分析系统是一个重要的发展趋势。这种系统由数据采集、数据传输和数据处理与分析等几个主要部分组成,可以使监测数据得到及时的分析和处理,从而实时地评价变形的现状和预测其发展趋势,为灾害发生的可能性分析与预报提供科学依据,这对于处于活跃阶段的滑坡体变形及断层的相对运动监测具有特别重要的意义。由于建立连续运行的 GPS 网络系统进行大坝和滑坡等变形监测,成本较为昂贵,因此,研究低成本的 GPS 一机多天线变形在线实时监测分析系统,也是一个颇有实际意义的研究方向。

(2) 建立“3S”(GPS、GIS、RS)集成变形监测系统

随着计算机技术、无线电通讯技术、空间技术及地球科学的迅猛发展,“3S”技术已从各自独立发展进入相互集成融合的阶段。“3S”技术集成,可为分析、研究包括变形信息在内的各种灾变信息之间的相互关系提供技术支撑,特别是时态 GIS (Temporal GIS, 简称 TGIS) 技术的应用,它可以描

述四维空间的地质现象,除具有一般 GIS 的功能外,还能够记载研究区域内各种地质现象随时间的演绎过程,这对滑坡等地质灾害的监测预报具有非常重要的作用。因此,研究“3S”集成变形监测系统,也是变形监测技术的重要发展趋势之一。

(3) 建立 GPS 与其它变形监测技术集成组合的综合变形监测系统

为了克服 GPS 技术用于变形监测的不足和局限性,根据变形监测的对象和目的,将 GPS 与其它变形监测技术(如 INSAR、摄影测量和特殊变形测量技术等)组合形成综合变形监测系统,可实现不同监测技术之间的优势互补。例如,将 GPS 与 INSAR 组合成 GPS/INSAR 变形监测系统,可从离散点位测定进入到四维形变场 (x,y,z,t) 的整体动态精确测定,使 GPS 变形监测技术应用范围更加广阔。现在 GPS 等空间测地技术不仅可以应用于水库大坝及各种滑坡的精密外观形变监测,而且已经用于研究板块运动、亚板块运动等问题,这在过去是不敢想象的。GPS 等空间测地技术集成组合应用于大范围、整体性的地壳运动监测,将使地壳形变观测在空间域的控制能力和分辨能力方面得到极大的提高,这也为 GPS 等空间测地技术用于大型工程的变形监测带来了新的机遇,为推进高精度变形监测的研究注入新的活力。

(4) 将小波分析理论用于 GPS 动态变形分析

为了克服经典 Fourier 分析不能描述信号的时频特征缺陷,可将小波变换用于 GPS 动态变形分析,即利用小波变换的高频和低频的高分辨率特性,实现 GPS 动态监测数据的滤波、变形特征信息的提取以及不同变形频率的分离^[6]。通过小波变换提取变形特征的研究工作已经起步,但尚未取得实质性的研究成果。在第 21 届国际大地测量与地球物理联合会(IUGG)大会上。国际大地测量协会(IAG)将“小波理论及其应用”确定为大地测量新理论的研究方向之一。在 1999 年召开的第 22 届 IUGG 大会上,“小波理论及其在大地测量和地球动力学中的应用”再次被 IAG 确定为 GIV 分会(大地测量理论与方法)的新的研究课题。由此可见开展小波理论及其应用研究的重要性。小波分析为高精度变形特征提取提供了一种数学工具,可解决其他方法无法解决的难题,对非平稳信号消噪有着其它方法无法比拟的优点。因此,小波分析理论在 GPS 动态变形监测的数据处理与分析方面将发挥重要作用。

1.3 本论文的研究内容

本论文的研究内容主要可以分为两个方面:(1) GPS 变形监测网的优化设计和数据处理;(2) 常规地面监测(水准测量)所得成果的变形分析。

具体的研究框架如图 1-3-1 所示。

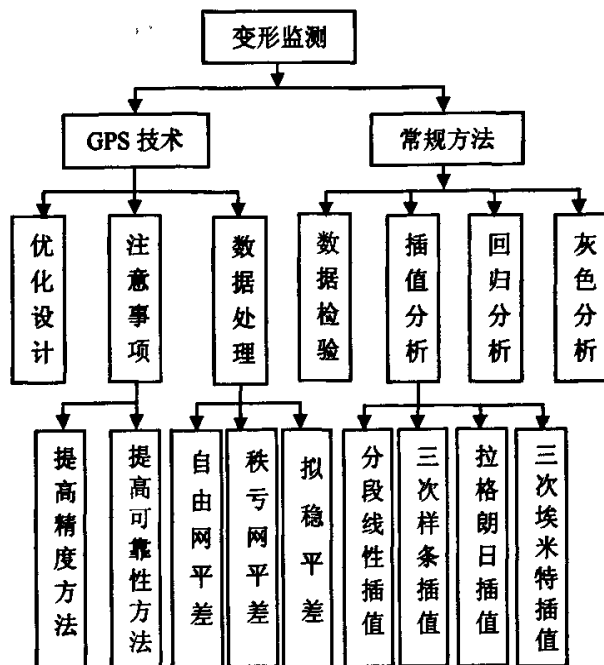


图 1-3-1 本论文的研究框架

2 GPS 在变形监测中的应用

2.1 概述

2.1.1 GPS 系统概况

GPS 系统是 1973 年开始筹建的, GPS 计划经历了方案论证(1974~1978 年)、系统论证(1979~1987 年)、生产试验(1988~1993 年)三个阶段。1978 年发射了第一颗试验卫星(属 Block I), 至 1988 年共发射了 11 颗 Block I 型卫星。经过近 10 年的试验和研究, 证实了该系统是成功的并具有良好的特性。1989 年 2 月开始发射第一颗工作卫星(Block II), 至 1994 年底 21 颗加 3 颗备用的卫星已经升空, Block II 卫星设计寿命 7.5 年, 星上装有两台铯钟、两台铷钟, 可存贮 180 天信息^[7]。十多年来, 我国的测绘工作者在 GPS 定位基础理论研究和应用开发方面做了大量工作。并已成功发射了自己的第一代 GPS 试验系统——北斗导航卫星系统。近几年我国又建成了北京、武汉、上海、西安、拉萨、乌鲁木齐等地的永久性 GPS 跟踪站, 进行对 GPS 卫星的精密定轨, 为高精度的 GPS 定位测量提供观测数据和精密星历服务, 并致力于我国自主的广域差分 GPS(WADGPS)方案的建立, 参与了全球导航卫星系统(GNSS)和 GPS 广域增强系统(WAAS)的筹建。

2.1.2 GPS 技术在变形监测中的应用

2.1.2.1 GPS 技术应用于高精度变形监测的可行性分析

GPS 定位技术的高效率、高精度、不受距离限制和全天候作业模式及观测和数据处理的高度自动化等诸多优点, 使 GPS 定位技术在大坝、坝区高边坡安全监测中得到应用。早在 1992 年 7 月由 E. Frei 等人在瑞士南部地区的 Maggia 谷区 Naret 大坝进行了 GPS 网的观测和重复测量试验, 该网共有 5 个点, 他们使用 WILD200 双频 GPS 定位系统进行观测并与以 ME5000 精密测距仪和 T3000 精密电子经纬仪的观测结果进行了比较, 两种方法的测量结果比较和 GPS 重复测量结果的差值表明: 只要采取合理的观测方案和严格的操作程序, 注意克服天线的偏心 and 指向误差(对于大坝变形监测网, GPS 天线是固定在观测墩上的), GPS 观测精度可以达到 1mm 左右的精度。在国内, 除了隔河岩大坝建立了 GPS 监控系统(精度可达 1mm 左右)外, 在大坝安全监控网的研究中, 主要是通过试验模拟、或与常规的测量比较、或是在已建的常规变形监测网用 GPS 进行试验研究, 其目的是通过 GPS 观测数据的处理,

来分析 GPS 观测精度能否达到大坝(边坡)变形监测的要求。试验结果证明: GPS 静态观测精度可以达到 $1\sim 3\text{mm}$ 的精度,可以满足大坝(边坡)变形监测的要求^[8]。武汉大学的徐绍铨教授于 2002 年在这方面的可行性研究表明:用 IGS 星历, GAMIT 软件解算, $1\sim 2\text{h}$ 观测水平位移测定的中误差优于 $\pm 1.0\text{mm}$, 5h 观测优于 $\pm 0.5\text{mm}$; GPS 自动化监测系统 6h 解,其平面和垂直位移精度优于 $\pm 1.0\text{mm}$, 2h 解算的精度优于 $\pm 1.5\text{mm}$, 可得出结论:用 GPS 完全可以代替常规方法用于大坝外观及滑坡变形监测和高精度变形监测^[9]。

2.1.2.2 GPS 技术应用于监测的作业模式

GPS 用于变形监测的作业方式可分为周期性和连续性两种模式 (Episodic and Continuous Mode)。

(1) 周期性监测模式

当形变体的变形速率相当缓慢(如地壳运动,处于缓慢变形阶段的滑坡体位移等),在局部时间域和空间域内可以认为稳定不动时,可利用 GPS 进行周期性变形监测,监测频率视具体情况可为数月、一年或甚至数年之久。此时采用 GPS 静态相对定位方法测量,将 2 台以上 GPS 接收机安置在观测点上同步观测一段时间,观测时段长度和时段个数依监测精度的要求而定。一般采用边连接方式构成监测网,数据处理与分析在事后进行,用后处理软件进行基线解算,经过平差计算求得观测点的三维坐标。这种方法尤其适用于长边监测网,边长相对精度可高达 10^{-9} 。

(2) 连续性监测模式

连续性变形监测指的是采用固定监测仪器进行长时间的数据采集,获得变形数据系列,此时监测数据是连续的,具有较高的时间分辨率。根据变形体的不同特征, GPS 连续性监测可采用静态相对定位和动态相对定位两种数据处理方法进行观测,一般要求变形响应的实时性。例如,大坝在超水位蓄洪时,必须时刻监视其变形状况,要求监测系统具有实时的数据传输和数据处理与分析能力^[10]。对于桥梁的静、动载试验和高层建筑物的振动测量等,其监测的主要目的在于获取变形信息及其特性,数据处理与分析可以在事后进行。对于建在活动的滑坡体上的城区、厂房,需要实时了解其变化状态,以便及时采取措施,保证人民的生命财产安全,可采用全天候实时监测方法,即建立 GPS 自动化监测系统。系统的精度可按要求设定,目前最高监测精度可达到亚毫米级。系统的响应速度快,从控制中心敲击键盘开始,几分钟内可以了解到监测点位置的实时变化情况。

2.1.2.3 GPS 技术应用于变形监测所取得的成果

固定的、连续的、自动化的 GPS 大坝变形监测系统是 GPS 变形监测的发展方向,它可以连续或动态地监测大坝的变形,特别是在特殊时期(如洪水期、泄洪、地震等),可以连续地对大坝变形进行监测。美国加利福尼亚的 Pacoima 大坝于 1995 建立了 GPS 自动化变形监测系统,该坝为 113 高的混凝土大坝,建成于 1926 年,并经历了 1971 年和 1994 年两次地震。该 GPS 连续监测系统由坝上两个监测点和一个距坝 2.5km 的基准点、以及距坝约 30km 的南加利福尼亚综合 GPS 网(SCIGN)中的三个点组成,数据处理采用 GAMIT 软件和 IGS 的精密星历,每六个小时的观测数据作为一个测段,两年的观测数据处理结果表明:几个月的观测数据量可以探测大坝的 mm 级变形,一天的观测 GPS 的精度为 4~6mm。我国第一个大坝外观变形 GPS 自动化监测系统于 1998 年 4 月在隔河岩大坝正式投入运行。该系统由湖北清江水电开发公司与武汉测绘科技大学合作开发完成。GPS 自动化监测系统由数据采集、传输、处理(包括分析、管理)三大部分组成。GPS 数据采集系统由七台 GPS 接收机组成,其中 GPS1, GPS2 为基准站, GPS3~GPS7 为坝面外观监测站,其中 GPS3 位于坝肩, GPS6 位于拱冠。隔河岩大坝 GPS 自动化监测系统 6 小时解,其平面和垂直位移精度优于 $\pm 1.0\text{mm}$ 。2 小时解算精度优于 $\pm 1.5\text{mm}$ 。这样的观测精度可以满足大坝变形监测的精度要求。该系统经过七年多的运行,表明系统稳定可靠,取得了比较满意的结果^[11]。

2.2 GPS 变形监测网的数据处理与不足之处

2.2.1 GPS 数据处理方法^[12]

GPS 高精度变形监测网的基线解算和平差计算,目前一般是采用瑞士 BERNESE 大学研制开发的 BERNESE 软件或美国麻省理工学院研制开发的 GAMIT/GLOBK 软件和 IGS 精密星历。BERNESE 和 GAMIT/GLOBK 软件均为科研用途的高精度 GPS 数据处理软件,其数据处理分为两个主要方面:一是对 GPS 原始数据进行处理后获得同步观测网的基线解;二是对各同步观测网的解进行整体平差和分析,获得 GPS 网的整体解。数据处理的重点都在于对同步网的基线处理,而在网的平差分析方面,特别是多个子网的系统误差分析、粗差分析及随机误差处理方面,目前还没有很理想的方法。国内目前较有影响的 GPS 平差软件有:原武汉测绘科技大学研制的 GPSADJ 系列平差处理软件和同济大学的 TGPPS 静态定位后处理软件,这两种软件主要用于完成经过商用 GPS 基线处理软件处理以后的三维和二维 GPS 网的平差。

GPS 空间三维基线向量网平差常采用以下三种平差类型^[13]:

(1) 三维无约束平差。我们知道, GPS 基线向量本身已隐含尺度基准和方位基准, 因此在三维平差中可只选某一点的固定坐标进行网平差, 即无约束平差。三维无约束平差在 GPS 网平差中, 有十分重要的作用, 它可发现基线向量中存在的粗差和系统误差。通过检验发现基线向量随机模型误差, 可客观评价 GPS 网本身的内符合精度。

(2) 三维约束平差。以国家大地坐标系或地方坐标系的某些点固定坐标, 以及固定边长和固定方位为网的基准, 将其作为平差中的约束条件, 并在平差中考虑 GPS 网与地面网之间的转换系数。因此, 这种形式的平差是在地面参考坐标系中进行的, 故称为 GPS 三维约束平差。该平差后获得的网的坐标为国家大地坐标系或地方坐标系, 因而约束平差是目前 GPS 网成果转换的有效方法。

(3) 三维联合平差。平差中处理 GPS 基线向量观测值和地面基准约束数据外, 还包含了地面常规网观测值, 如边长、方向、天文方位角、天顶距、水准高差乃至天文经纬度, 将这些数据一并进行平差, 也就是 GPS 网和地面网数据的联合平差, 其平差后网中的坐标仍属于地面坐标系。

综上所述我们处理 GPS 网数据的一般步骤是先进行无约束平差, 然后再进行约束平差, 这一过程中包含了成果的转换工作, 但由于监测网是多期重复性观测, 如果每次数据处理过程中都要进行成果的转换, 那样势必会引入多种误差, 而这种误差在某些时候甚至遮盖了监测网微小的变形量, 不能反应出实际的变形情况。为了获得高精度的变形数据, 同时也能够反映实际的变化情况, 采用了直接在 WGS-84 坐标系下的无约束条件网平差^[14], 根据不同的工程情况采用不同的平差方法: 若基准点远离变形体的影响, 选用一个各期共同观测的基准点进行三维自由网平差 (也称经典自由网平差); 若监测点均位于变形体内, 则采用秩亏自由网平差; 若监测网中有一部分点相对于另一部分点是稳定的, 则采用拟稳平差^[15]。具体的平差模型, 将在本文第四章做详细介绍。

2.2.2 GPS 应用于变形监测存在的问题

GPS 应用于变形监测, 已取得许多试验研究成果。但现阶段, 在高山峡谷、地下、建筑物密集地区和密林深处, 由于卫星信号被遮挡及多路径效应的影响, 其监测精度和可靠性不高甚至无法进行监测。应用 GPS 技术, 也只能获取形变体上部分离散点的位移信息。另外, 根据一些滑坡 GPS 监测资料的分析结果, 目前 GPS 监测水平位移的精度较高, 而监测垂直位移的精度较

低（约比水平位移的监测精度低 2 倍），这种状况使得高精度变形监测中还难以利用 GPS 同时精确测定平面和垂直位移。由于 GPS 存在这些不足之处，目前它还不能完全替代其它变形监测技术，并且在必要时采用由 GPS 与其它技术（常规测量方法、GIS、RS、INSAR、近景摄影测量和特殊变形测量技术等）集成组合的变形监测系统。

目前，GPS 动态变形监测数据处理主要采用的是整周模糊度动态解算法 (Ambiguity Resolution On-The-Fly, 简称 OTF 法)，但该方法只能达到厘米级精度，不能满足高精度动态变形监测的需要。另外，对于动态变形监测，由于监测点在很短时间内的变形是微小的，表现为一种弱信号，而误差却成为强噪声，如何从受强噪声干扰的序列观测数据中提取微弱的特征信息，以提高变形监测的精度，是目前 GPS 动态监测系统应解决的一个关键技术问题。目前，这一问题通常是采用数据平滑或 Kalman 滤波的方法在时域内进行处理。对于变形的频率和幅值等主要变形特征的分析，则通常采用频谱分析法将时域内的数据序列通过 Fourier 级数转换到频域内进行分析。但由于这些方法本身存在的缺陷，现阶段对于非平稳、非等时间间隔观测信号的变形特征提取还存在局限性。

2.3 本章小结

本章主要讨论了 GPS 系统的概况，以及其应用于高精度变形监测的可行性，以往的试验证明，GPS 的观测精度在采取相应措施后能完全满足变形监测高精度的要求，并介绍了国内外成功利用 GPS 进行变形监测的实例。分析了 GPS 监测网的几种数据处理方法，分别有：三维无约束平差，三维约束平差和三维联合平差，在比较其优劣的基础上，分析了在变形监测网中，为了反映出实际的变形量、获得高精度的监测结果，应选用三维无约束平差的方法。最后介绍了 GPS 应用于变形监测存在的问题，以便在实际应用中引起注意。

3 变形监测的优化设计

3.1 控制网优化设计概述

测图控制网、施工控制网、和变形监测网可统称为测量控制网。控制网优化设计是测量领域一个重要的研究课题。在十九世纪六十年代, 赫尔默特 (F.R.Helmert) 发表《合理测量之研究》, 史伯赖 (O.Schreiber) 提出基线网最适当权分配理论, 可以说是最早出现的测量控制网优化设计方面的论述。由于计算工具落后及测量手段单一, 在此后的很长时间内, 测量控制网的优化设计走的是规范化设计的道路。随着计算机技术的飞速发展, 二十世纪六十年代以来, 许多测量工作者在运用数学规划方法进行控制网优化设计方面进行了尝试, 并取得了一些重要的研究成果^[16]。80 年代以来, 优化设计问题在国内外得到了广大测量工作者的重视, 并且在理论上和应用上都取得了显著的成果。测量控制网的优化设计有两方面的含义: (1) 在布设控制网时, 希望在现有的人力、物力和财力条件下, 使控制网具备最高的精度、灵敏度和可靠性; (2) 控制网在满足精度、灵敏度和可靠性要求的前提下, 使控制网的成本 (费用) 最低^[17]。

3.1.1 控制网优化设计的分类

一个测量控制网的建立通常要经过下列过程: 建网的目的、要求和范围, 经过图上规划和野外选点, 确定网的参考系和图形并造标埋石, 然后根据观测纲要对选定的图形进行观测, 最后进行数据处理。这些过程的确定都有一个质量问题, 也就是设计的优劣问题^[18]。对于控制网而言, 按照 Grafarend 提出的, 目前国际上所公认的分类方法, 将控制网优化设计问题分为四类: 零类设计 (ZOD); 一类设计 (FOD); 二类设计 (SOD); 三类设计 (THOD)。

上述四类设计也可按间接平差原理, 以哪些作为已知参数, 哪些作为未知参数来划分。设平差模型为:

$$V = BX - L \quad \text{权为 } P \dots\dots\dots (3-1-1)$$

法方程为: $B^T P B X - B^T P L = 0 \dots\dots\dots (3-1-2)$

解向量为: $X = N^{-1} W \dots\dots\dots (3-1-3)$

X 的协方差阵为: $Q_X = \sigma_0^2 N^{-1} \dots\dots\dots (3-1-4)$

上面的公式中与精度估算有关的参数 B , 称为设计矩阵或图形矩阵, 决定于设计图形; P 为观测值矩阵, 决定于观测精度; Q_X 为未知参数估值 X 的协因数阵, 表示 X 的精度。于是可将上述四类设计叙述如下^[19]:

(1) 固定参数是 B 、 P ，待定参数是 X 、 Q_x ，则称为零类优化设计。零类设计是选择参考系，即网的基准，基准包括网的坐标系统和起算数据。选择合适的基准使目标函数最优（即 Q_x 最小）。由于待定参数为 X 和 Q_x ，实际上是平差问题， Q_x 的大小是相对于起算数据而言的。为了判断网的自身精度（即内精度），可采用秩亏自由网平差，然后在不同基准之间进行相似变换，以选择一个最优基准。

(2) 固定参数是 P 、 Q_x ，待定参数是 B ，则称为一类优化设计。一类优化设计是网形设计，当给定网的精度和观测精度时，对网形设计的优化，即选择最佳的点位及合理的观测类型。实践中由于受地形、交通等外界条件的限制，点位选择的余地往往很小，所以一类优化设计主要是选择最佳观测量的类型。

(3) 固定参数是 B 、 Q_x ，待定参数是 P ，则称为二类优化设计。二类优化设计是观测精度的合理配置，即权的设计。二类设计的主要任务不仅要确定各种测量适宜的精度，而且要确定各类观测量在望中的最佳的分布和密度。即要确定不同类型观测量的最佳组合。

(4) 固定参数是 Q_x ，待定参数是 B 、 P （部分），则称为三类优化设计。三类优化设计是指加密和原网改造优化，是一类和二类设计解析法的综合，这类设计成果较少，计算难度较大。测量控制网优化设计的基本要求是在优化设计中，不仅要使测量结果达到工程的精度要求（约束条件），而且还要使费用较低（目标函数）；或给定预算费用（约束条件），使网的精度尽可能高。

3.1.2 控制网优化设计的质量标准

除此之外，为了检测粗差还要有可靠性要求。因此，网的优化设计一般应满足下列要求：

(1) 精确性——网中各元素要达到或高于预定的精度。例如，点位、边长、方位、方位角精度等；

(2) 可靠性——网中应具有一定数量的多余观测，构成几何条件，使控制网具有较高的自检功能，以避免粗差出现；

(3) 灵敏度——监测网能够发现某一变形的能力大小；

(4) 经济性——用最少的时间、人力、能以较少物力等实现网的精度和可靠性要求。此外，对于变形观测网还提出灵敏度要求，即在重复观测中进行各种假设检验。

3.1.3 控制网优化设计的方法

按照测量控制网优化设计的方法,优化设计的数学处理方法可分为两大类:解析法和模拟法两种^[20]。解析法是通过建立优化设计问题的数学模型,包括目标函数和约束条件,目标函数可以是精度、可靠性、灵敏度或费用等指标,约束条件也可以是上述指标中选择一种恰当的寻优算法,然后求出问题的严格最优解;模拟法是从初始方案出发,用虚拟(或近似)观测值做模拟平差(或估算),计算出各种精度、可靠性以及灵敏度等数值,借助设计者的知识和经验,通过计算机的屏幕显示、打印输出和人机对话的方式,对计算成果进行评价,对网形和观测方案进行修改,多次反复,最后得出一个达到设计要求的可行性方案。

比较上述两种方法可知,解析法的优点是所需机时一般较少,理论上比较严密,其最终结果是严格最优的。它的缺点是优化设计问题的数学模型比较复杂,有时难以建立。大多情况下,建立的目标函数和约束条件都是一种经过简化的数学模型,不能完全反映客观实际。最有代表性的例子是以费用为目标函数或约束条件时,都是以观测值的权的总和来代表建网费用,实际上这是很粗糙的,并且最终结果有时是理想化的,在实际中实施起来比较困难或者不可行。如网形不合理、过大的观测权和负权的出现。与解析法比较,模拟法具有以下优点:

(1) 适应性广,可用于除零阶段设计问题外的任何一阶段设计,特别是一类、二类和各种混合的设计问题。

(2) 设计结果的合理性和切实可行性。由于设计过程中融入了设计者的知识和经验,使最终结果一定是实际的,切实可行的。

(3) 计算模型简单,可直接利用平差模型和分析模型,一般不需要建立优化设计问题的数学模型,有利于一般人员掌握和生产单位的推广使用。

模拟法的缺点是所需的机时一般较多,最终结果相对于解析法而言,在严格的数学意义上可能并非最优,只是一种近似最优解,但是这种差别在实用上并不太重要。并且随着计算机技术的飞速发展,它的计算量大的缺点也得到了很大的克服,使其更加地适合推广应用。

3.2 GPS 控制网的优化设计

GPS 控制网同传统控制网有诸多不同,同一般的控制网相比较,GPS 控制网有着很多不同的特点^[21]:

(1) 层次结构不同:传统控制网具有层次结构,而 GPS 控制网则是非

层次结构。

(2) 图形不同: GPS 控制网的精度不受网点所构成的几何图形的影响。也就是说,在不改变基线数目和形式的基础上,单纯的改变点的位置不会影响网的精度, GPS 控制网的精度同边与边所成的角度无关。

(3) 必要基准条件不同:传统控制一般有三种必要起算数据, GPS 网的观测数据——基线向量中由于包含了尺度和方位信息,因此,理论上只需一个已知点的坐标来确定网的平移即可。

(4) 误差的积累不同:传统控制存在误差积累的特性,一般精度最差的边和方位角是远离已知点的边和方位角,而 GPS 控制网不存在这样的问题,没有误差的积累,而且误差分布比较均匀,各边的方位和边长的相对精度基本是相同的。

这些特点导致了 GPS 控制网的优化设计不完全等同于传统控制网的优化设计,所以具体的方法也有所不同。

3.2.1 GPS 控制网优化设计的等级分类

零级优化设计是在已知 GPS 控制网平差模型中的系数阵 B 和权阵 P 的基础上,求解协因数阵 Q_x 的过程。其实际上是一个平差的过程。

一级优化设计是在大致确定了总点数、总基线数的基础上,通过对网形的优化设计求出数学模型中系数阵 B ,使得 Q_x 达到设计要求的過程。

二级优化设计是在已确定网形,即确定了系数阵 B 和未知数协因数阵 Q_x 后,优化设计权阵 P 的过程。

三级优化设计是对精度没有达到限差要求的 GPS 控制网进行网的加密和改进,使其逐渐达到精度要求,也就是对网形结构强度的优化设计。

综上所述:GPS 控制网的优化设计主要有以下两类:一是 GPS 控制网基准的优化设计;二是 GPS 控制网图形结构强度的优化设计。

3.2.1.1 GPS 控制网基准的优化设计

传统控制网的基准优化设计是选择一个外部配置使得 Q_x 达到一定的要求,而 GPS 控制网的基准优化设计则有所区别。它主要对坐标未知参数 X 进行设计。基准选取的不同将会给平差未知数带来直接的影响。另外,由于 GPS 的尺度往往存在系统误差,也应提出对 GPS 控制网尺度基准的优化方案。

(1) GPS 控制网位置基准的优化设计

布设 GPS 控制网时,如果网中有高等级、高精度的已知点时,应将其连至 GPS 控制网中作为一点或多点基础。若网中无任何其它类型的已知起算点

数据时, 可将网中一点多次进行 GPS 观测得到的坐标作为网的位置基准, 或将多点多次观测得到的坐标作为网的基准和检核的依据。

(2) GPS 控制网尺度基准的优化设计

考虑到变形监测网的高精度要求, 应采用高精度的测距仪或全站仪施测 2~3 条基线边作为整网的尺度基准, 在无法提供外部尺度基准的情况下, 仍可采用 GPS 控制网观测值作为 GPS 控制网的尺度基准, 只是对作为尺度基准的观测量提出一些不同的要求。

3.2.1.2 GPS 控制网图形结构强度的优化设计

图形结构强度的优化设计, 也即网形的设计, 它是制定施测方案的基础。目前, GPS 控制网可大致分为两类: 一类是国家或区域性的高精度的 GPS 控制网; 另一类是局部性的 GPS 控制网, 它包括城市或矿区控制网以及各类工程控制网, 监测网等。为了进一步得到可靠的观测成果, 无论是哪一种 GPS 控制网, 都要进行网形结构的设计, 并制定相应的施测方案。

(1) 起算点(基准点)的选取^[22]

若要求所布设的 GPS 网的成果与旧成果吻合最好, 则起算点数量越多越好, 若不要求所布设的 GPS 网的成果完全与旧成果吻合, 则一般可选 3~5 个起算点, 这样既可以保证新老坐标成果的一致性, 也可以保持 GPS 网的原有精度。

为保证整网的点位精度均匀, 起算点一般应均匀地分布在 GPS 网的周围。要避免所有的起算点分布在网中一侧的情况。

(2) 工作点的选取

为保证对卫星的连续跟踪观测和卫星信号的质量, 要求测站上空应尽可能的开阔, 在 $10^{\circ} \sim 15^{\circ}$ 高度角以上不能有成片的障碍物。

为减少各种电磁波对 GPS 卫星信号的干扰, 在测站周围约 200m 的范围内不能有强电磁波干扰源, 如大功率无线电发射设施、高压输电线等。

为避免或减少多路径效应的发生, 测站应远离对电磁波信号反射强烈的地形、地物, 如高层建筑、成片水域等。

为便于观测作业和今后的应用, 测站应选在交通便利, 易于保存且上点方便的地方。

若要采用高程拟合的方法, 测定网中各点的正常高/正高, 则需在布网时, 选定一定数量的水准点, 水准点的数量应尽可能的多, 且应在网中均匀分布, 还要保证有部分点分布在网的四周, 将整个网包含在其中。

(3) 布网

在布设 GPS 网时边长不要太长,且适当地加入几条高精度的激光测距边,布网时应尽可能覆盖整个测区;

在布设 GPS 网时,各个点的可靠性与点位无直接关系,而与该点上所连接的基线数有关,点上所连接的基线数越多,点的可靠性则越高;

在布网时要使网中所有最小异步环的边数不大于 6 条。

3.2.2 提高 GPS 网精度和可靠性的方法

3.2.2.1 提高 GPS 网精度的方法^[23]

(1) 采用强制对中的观测墩,以减少安置在三角架上的 GPS 天线因风吹、日晒等因素产生的对中误差。

(2) 采用抗干扰能力强的天线,并在观测中将天线按指北方向进行定向。

(3) 选择足够的观测时间和恰当的观测窗口。研究试验表明:若观测时间较长,对收到的多组星历进行拟合,可提高星历精度,延长观测时间,还可减弱其它随机误差的影响,提高观测精度。

(4) 与已有的 WGS-84 系坐标点进行联测,减少对基线解算的影响。

(5) 制定合理的观测方案,保证有足够的多余观测,以利于粗差的剔除,防止误差的积累。

(6) 对网中距离较近的点一定要进行同步观测,以获得它们间的直接观测基线。

(7) 可以在全面网之上布设框架网,以框架网作为整个 GPS 网的骨架。

(8) 在布网时要使网中所有最小异步环的边数不大于 6 条。

(9) 引入高精度激光测距边,作为观测值与 GPS 观测值(基线向量)一同进行联合平差,或将它们作为起算边长。

(10) 为提高 GPS 网的尺度精度,可采用如下方法:增设长时间、多时段的基线向量。

3.2.2.2 提高 GPS 网可靠性的方法^[24]

增加观测期数(增加独立基线数)。网的可靠性与点位分布无关,单纯依靠延长观测时间不能明显提高网的可靠性,所以增加观测期数是提高网的可靠性的最佳方法。因为,随着观测期数的增加,所测得的独立基线数就会增加,而独立基线数的增加,对网的可靠性的提高是非常有益的。

保证一定的重复设站次数和重复基线。保证一定的重复设站次数,可确保 GPS 网的可靠性。一方面,通过在同一测站上的多次观测,可有效地发现设站、

对中、整平、量测天线高等人为误差；另一方面，重复设站次数的增加，也意味着观测期数的增加。不过，需要注意的是，当同一台接收机在同一测站上连续进行多个时段的观测时，各个时段间必须重新安置仪器，以更好地消除各种人为操作误差和错误^[26]。

保证每个测站至少与三条以上的独立基线相连，这样可以使得测站具有较高的可靠性。

3.2.3 布设 GPS 控制网的设计指标

在布设 GPS 网时，除了遵循一定的设计原则外，还需要一些定量的指标来指导我们的工作。在进行 GPS 网的设计时，经常需要采用效率指标、可靠性指标、精度指标和经费指标^[26]。

(1) 效率指标

在布设一个 GPS 网时，在测量点数、GPS 接收机数和平均重复设站次数确定后，完成该测量所需的理论最少观测期数就可以确定。但是，当按照某个具体的布网方式和观测作业方式进行作业时，要按要求完成整网的测量，所需的观测期数与理论上的最少观测期数会有所差异，理论最少观测期数与设计的观测期数的比值称之为效率指标 e 。

设 GPS 网中点的个数为 n ，用 m 台接收机进行观测，则该网的最少观测期数为：

$$S_{\min} = \text{INT}\left(\frac{n-1}{m-1}\right) \dots\dots\dots (3-2-1)$$

如重复设站率以 R 表示，则理论观测期数为：

$$S_R = \text{INT}\left(R \cdot \frac{n}{m}\right), R \geq 2 \dots\dots\dots (3-2-2)$$

其中 $\text{INT}(*)$ ，表示对括号里的变量*取整。为了检核、提高精度和可靠性，每个点设站独立观测两次以上^[27]。实际观测中，观测期数以 S 表示，则 S 应大于 S_R 。

网的效率指标定义如下：

$$e_1 = \frac{S_{\min}}{S_R} = \frac{m(n-1)}{Rn(m-1)} \dots\dots\dots (3-2-3)$$

$$e_2 = \frac{S_R}{S} = \frac{Rn}{Sm} \dots\dots\dots (3-2-4)$$

$$e = e_1 \times e_2 \dots\dots\dots (3-2-5)$$

由以上可知, e_1 是网中最少观测期数与理论观测期数 S_R 之比, 是网的理论设计效率, 其数值大小取决于 R , R 愈大 e_1 愈小, 理论设计效率愈低; e_2 为实际设计效率, 若 R 给定, S_R 也就确定了, 实际观测期数应与 S_R 一致。 e_2 按时完成时为 1 为最好, 一般 e_2 应大于 0.9, 若实际的 R 与给定的 R 相差太大, 则不符合设计要求; e 为总效率, 当 $R=2$ 时, e 一般接近 0.6。

(2) 可靠性指标

基线向量由于周跳修补的不完善, 整周末知数参数搜索结果不佳等原因, 难免会产生粗差。因此, 网的设计必须保证能检测粗差, 这就要求引入可靠性指标。设网中有 n 个点, 必要观测基线向量是 $n-1$, m 台接收机, S 期观测, 总的独立观测基线向量数 $P=S(m-1)$, 只有其中 $m-1$ 条是一期的独立基线向量数。若 $m=4$, 一期虽测了六条基线, 但其中只有三条独立, 其它三条是这些独立基线的线性组合。则网中多余基线向量数为:

$$r = S(m-1) - (n-1) \quad (3-2-6)$$

定义下式为全网平均可靠性指标

$$\eta = \frac{r}{P} = 1 - \frac{n-1}{S(m-1)} \quad (3-2-7)$$

当 $S=S_R$ 时, 实际设计效率最高, 此时

$$\eta_M = 1 - \frac{m(n-1)}{Rn(m-1)} \quad (3-2-8)$$

重复设站率 R 越高, 可靠性越高, η_M 也随着增大。当 $R=2$ 时, 平均可靠性达到 0.34 以上, 已有很好的可靠性了。国内外 GPS 规范一般要求 $R \geq 2$, 所以网的平均可靠性指标 η_M 宜在 0.33 以上。

(3) 精度指标

GPS 网的平差后精度与常规测量的一样, 用网中最弱边中误差、最弱方位角中误差以及最弱点位中误差反映。各级 GPS 网的测量精度用相邻点的弦长中误差 R 表示, 公式为:

$$\sigma = \sqrt{a^2 + (bd)^2} \quad (3-2-9)$$

式中 a 是固定误差, 单位为 mm , b 为比例误差, d 为相邻点间距离, 单位为 km 。文献[27]中规定了各级 GPS 网对 σ 的要求。

GPS 网平差后的精度与网中点的几何位置无关, 只与图形结构, 即基线设置和基线本身观测精度(权阵)有关, 也就是说增加同步观测图形和提高观测精度是提高 GPS 成果精度的基本方法。提高观测精度可按规范要求执行;

在网中总点数给定情况下，增加同步观测图形，就是要求重复设站率增高，可靠性也增大，不过 R 过大是很不经济的。

依据平差理论，一个网的观测量在网平差前后的权的比值，从整体上反映了平差带来的精度效益，对于 GPS 网也就反映于网形结构强度带来的精度效益。精度指标如下：

$$K = \frac{P-r}{P} = 1 - \frac{r}{P} = 1 - \eta \dots\dots\dots (3-2-10)$$

当 $K=1$ 时，平差值与观测值一致， K 愈小，精度平均增益愈大， η 也愈大。

(4) 经费指标

经费也取决于网点总数和重复设站率，设一台接收机观测一期的平均费用为 C ，则总费用为：

$$f = C \cdot S \cdot m \dots\dots\dots (3-2-11)$$

S 为观测期数， m 为接收机台数，当 $S=S_R, e_2=1$ 时有最高设计效率，这时根据式 (3-2-2)，可得

$$f_R = C \cdot \frac{Rn}{m} \cdot m = C \cdot R \cdot n \dots\dots\dots (3-2-12)$$

3.3 本章小结

本章第一节介绍了控制网优化设计四个分类，分别有零类、一类、二类和三类设计；设计的质量标准，分别有：精确性、可靠性、灵敏度和经济性；优化设计的方法，即解析法和模拟法，由于其各自的优缺点，实际中主要使用模拟法进行优化设计。第二节主要分析了 GPS 控制网与常规控制网的不同之处，主要有层次结构、图形、必要基准条件和误差的积累的不同；基准和图形强度的优化设计方法；在实际中提高 GPS 网精度和可靠性的方法以及四种设计指标的计算方法，分别有：效率指标、可靠性指标、精度指标和经费指标。的计算方法。

4 数据处理和分析模型

本章主要介绍对 GPS 观测数据进行的各种平差方法, 以及对处理成果进行相关的检验、处理和分析等。

4.1 GPS 变形监测网平差模型和精度评定

采用 GPS 建立的工程变形监测网, 可直接测定变形体的三维空间变形。GPS 变形监测网的数据处理(主要指监测网平差和变形分析)在方法上与过去没有什么本质区别, 只不过要复杂些。

GPS 变形监测网平差方法可分为静态平差和动态平差两种。静态平差是把各期的观测数据分别进行平差处理, 而不考虑两期之间的动态参数, 通过统一基准来进行变形分析; 动态平差是将监测网作为动态系统, 纳入监测点的变形参数, 将各期观测数据联合进行平差处理。在实际工程中一般采用静态平差法, 把基线向量及其协方差作为网平差的基本观测量。根据本文第二章的分析, 本节采用以下三种平差方法。

4.1.1 经典自由网平差

通常, 在建立工程变形 GPS 监测网时会考虑选择远离变形体的少数点(一般为 1-3 个)作为稳定的基准点。因此, 我们在对各期观测数据进行静态平差时, 可以选定一个共同的基准点作为位置基准进行 GPS 网空间三维无约束平差^[28]。

设某期 GPS 监测网, 已知基准点点号为 1, 其坐标为 $X_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$, 网点总数为 n , 特定点的近似坐标为 $X_i^0 = (x_i^0, y_i^0, z_i^0)^T (i = 2, 3, \dots, n)$, 其坐标改正数为 $dX_i = (dx_i, dy_i, dz_i)^T$, 特定点的坐标平差值为 $\hat{X}_i = (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)^T$ 。

以基线向量 $\Delta X_{ij} = (\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}, \Delta z_{ij})^T (i \neq j, j = 1, 2, \dots, n)$ 为观测值, 则对任一基线向量的误差方程为:

$$\begin{bmatrix} V_{\Delta x_{ij}} \\ V_{\Delta y_{ij}} \\ V_{\Delta z_{ij}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_j \\ dy_j \\ dz_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_{ij} - x_i^0 + x_j^0 \\ \Delta y_{ij} - y_i^0 + y_j^0 \\ \Delta z_{ij} - z_i^0 + z_j^0 \end{bmatrix} \dots\dots (4-1-1)$$

写成矩阵形式为:

$$V_g = -EdX_i + EdX_j - L_g, \text{ 权为 } P_g \dots\dots\dots (4-1-2)$$

式中, V_g 为基线向量 ΔX_{ij} 的改正数向量; E 为单位矩阵, L_g 为式 (4-1-1) 的最后一项。

对于一端为已知点的基线向量 ΔX_n (即 j 点为已知点时 $j=1$)，其误差方程为：

$$\begin{bmatrix} V_{\Delta x_n} \\ V_{\Delta y_n} \\ V_{\Delta z_n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_n - x_i^0 + x_1 \\ \Delta y_n - y_i^0 + y_1 \\ \Delta z_n - z_i^0 + z_1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4-1-3)$$

写成矩阵形式为：

$$V_n = -EdX_i - L_n, \text{ 权为 } P_n \dots\dots\dots (4-1-4)$$

同样的， i 点为已知点时 $i=1$ ，相应的矩阵形式为：

$$V_{1j} = EdX_j - L_{1j}, \text{ 权为 } P_{1j} \dots\dots\dots (4-1-5)$$

对于 GPS 网中 m 条独立基线向量，可得整体误差方程组为：

$$V = A \begin{matrix} dX \\ (3n-3) \times 1 \end{matrix} - L, \text{ 权阵为 } P \begin{matrix} 3m \times 1 \\ 3m \times 3n \end{matrix} \dots\dots\dots (4-1-6)$$

法方程为：

$$NdX - u = 0 \dots\dots\dots (4-1-7)$$

式中， $N = A^T P A$ ； $u = A^T P L$ 。解法方程后得到未知数为：

$$dX = N^{-1}u \dots\dots\dots (4-1-8)$$

各待定点坐标平差值为：

$$\hat{X}_i = X_i^0 + dX_i \dots\dots\dots (4-1-9)$$

相应的单位权方差估值为：

$$\hat{\sigma}_0^2 = V^T P V / (3m - 3n + 3) \dots\dots\dots (4-1-10)$$

坐标未知数互协因素阵为：

$$Q_{\hat{x}} = N^{-1} \dots\dots\dots (4-1-11)$$

4.1.2 秩亏自由网平差

当观测网中不设起始数据或不存在必要的起始数据时，而且又设网点坐标为待平差参数，误差方程系数阵列亏，这样的平差问题称为秩亏自由网平差。在高斯—马尔柯夫模型：

$$l = A \bar{X} + \Delta \text{ 或 } E(l) = A \bar{X} \dots\dots\dots (4-1-12)$$

$$D(l) = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \dots\dots\dots (4-1-13)$$

(式中真误差 Δ 的数学期望 $E(\Delta) = 0$ ，故有 (4-1-12) 中的第二式) 中，秩亏

d 的定义是:

$$d = t - R(A) \dots\dots\dots (4-1-14)$$

实际上就是平差网中缺少必要坐标起算数据个数。如没有起始数据的网,秩亏数等于必要起始数据个数。例如,水准网的秩亏数 $d=1$,测角网的 $d=4$,即两个待定点的平面坐标数;测边网的 $d=3$,即一个待定点的平面坐标和一条边的方位角;GPS网的 $d=3$,即一个点的三维坐标。

秩亏自由网的平差函数模型也为高斯—马尔柯夫模型,其中 $R(A)=r-t$,秩亏 $d=t-r$ 。

下面讲述秩亏方程组的各种解法。

(1) 最小二乘解

由(4-1-12)得误差方程为:

$$V = AX - l \dots\dots\dots (4-1-15)$$

按最小二乘原理:

$$V^T P V = \min \dots\dots\dots (4-1-16)$$

得法方程为:

$$N X = A^T P l \dots\dots\dots (4-1-17)$$

式中 $R(N)=R(A)=r$, N 为奇异阵,其凯利逆不存在,得不到唯一解。

由此可知,在秩亏自由网平差中,如果像经典平差那样,只要求遵循最小二乘原则求未知参数的解,将不可能取得唯一确定的估计量,这是这种平差的特点。为了确定唯一的估计量,需要在遵循平差基础原则——最小二乘原则基础上附加另外条件,这个条件的确定应该保证所求得的未知参数的估计量是最优的。这样的最优解是唯一存在的,它就是法方程的最小范数解。

(2) 最小范数解

设满足法方程的一个解为 $X=(x_1, x_2, \dots, x_r)^T$, 取其平方和的开方为:

$$\|X\| = (X^T X)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2} \dots\dots\dots (4-1-18)$$

称为向量 X 的范数,几何意义是向量的长度。如果在法方程的一般解中有一个解 X 满足其范数最小,这个解就称为最小范数解,最小范数解满足的条件,称为最小范数条件,其表达式为:

$$\|X\| = \min \text{ 或 } X^T X = \min \dots\dots\dots (4-1-19)$$

设 N_{μ}^{-} 是 N 的 N^{-1} 型一个广域逆,即满足: $NN_{\mu}^{-}N = N \dots\dots\dots (4-1-20)$

设有相容性方程组:

$$\begin{matrix} N & X & = & B \\ n \times m & m \times 1 \end{matrix} \dots\dots\dots (4-1-21)$$

其解存在, 设为 $Y_{m \times 1}$, 则有: $NY = B \dots\dots\dots (4-1-22)$

按照 (4-1-21) 式, 有: $NN_m^-NY = B$

或 $NN_m^-B = B \dots\dots\dots (4-1-23)$

此式称为方程组 (4-1-22) 的相容条件。由此可知:

$$X = N_m^-B \dots\dots\dots (4-1-24)$$

根据 (4-1-17) 式可得法方程有一个特解为:

$$X = N_m^-A^TPl \dots\dots\dots (4-1-25)$$

如果这个特解的范数 $\|N_m^-A^TPl\|$ 比起任何解的范数要小, 那它就是最小范数解。

在自由网平差中, 最小范数逆常取为 (已经过验证为正确, 详细请参考文献[4])

$$N_m^- = N^T(NN^T)^- \dots\dots\dots (4-1-26)$$

由于法方程系数阵 N 对称, $N^T = N$, 故有:

$$N_m^- = N(NN)^- \dots\dots\dots (4-1-27)$$

将 (4-1-27) 式带入到 (4-1-25) 式得法方程的最小范数解为:

$$X = N(NN)^- A^TPl \dots\dots\dots (4-1-28)$$

单位权方差估值为:

$$\hat{\sigma}_0^2 = V^T PV / (n-r) \dots\dots\dots (4-1-29)$$

4.1.3 自由网拟稳平差

在自由监测网中, 假定有一部分点对于另一部分是相对稳定的, 以网中点的高程或坐标作为未知数, 就有稳定未知数和不稳定未知数两类。设不稳定未知数的近似值为 \bar{X}_M^0 , 改正数为 $d\bar{X}_M$, 稳定未知数的近似坐标为 \bar{X}_F^0 , 改正数为 $d\bar{X}_F$, 则误差方程为:

$$V = AX - l = \begin{pmatrix} A_M & A_F \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_M \\ X_F \end{Bmatrix} - l \dots\dots\dots (4-1-30)$$

式中 $m+f=t$, m 为不稳定点数, f 为稳定点数, $R(A)=r < t, d=t-r, t > f > d$, $R(A_M)=m$ 。观测值权为 P , 满秩。按最小二乘原则 $V^T PV = \min$ 得法方程为 $NX = A^TPl$, 或

$$\begin{bmatrix} N_{MM} & N_{MF} \\ N_{FM} & N_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ X_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_M^T P l \\ A_F^T P l \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4-1-31)$$

其中 $N_{MM} = A_M^T P A_M$, $N_{FM} = A_F^T P A_M = N_{MF}^T$, $N_{MF} = A_M^T P A_F$, $N_{FF} = A_F^T P A_F$, $N = A^T P A$
 $R(N_{MM}) = m$, N_{MM} 满秩, $R(N) = r$, N 奇异, 则法方程不能得到唯一解。

消去不稳定的未知数 X_M , 可得仅有稳定未知数 X_F 的约化法方程:

$$(N_{FF} \cdot 1) X_F = A_F^T P l \cdot 1$$

或写成:
$$M X_F = \alpha^T P l \dots\dots\dots (4-1-32)$$

并令
$$M = N_{FF} \cdot 1 = N_{FF} - N_{FM} N_{MM}^{-1} N_{MF} \dots\dots\dots (4-1-33)$$

$$\left. \begin{aligned} A_F^T P l \cdot 1 &= A_F^T P l - N_{FM} N_{MM}^{-1} N_{MF} \\ \alpha^T &= A_F^T - N_{FM} N_{MM}^{-1} N_{MF} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-1-34)$$

经过约化后秩亏并未消除, M 仍有秩亏 d , 是奇异阵, (4-1-32) 式的解仍不唯一, 为了获得唯一最优解, 附加 X_F 的最小范数条件: $X_F^T X_F = \min$, 得:

$$X_F = M_m^- \alpha^T P l = \bar{\alpha} P l \dots\dots\dots (4-1-35)$$

式中 $\bar{\alpha} = M_m^- \alpha^T$, M_m^- 为 M 的 M^{-1} 型一个广域逆 (请参照式 (4-1-20)), 将式 (4-1-35) 代入式法方程得:

$$X_M = N_{MM}^{-1} (A_M^T P l - N_{MF} X_F) \dots\dots\dots (4-1-36)$$

单位权方差估值为:

$$\hat{\sigma}_0^2 = V^T P V / (n - r) \dots\dots\dots (4-1-37)$$

4.1.4 三种平差间的关系^[29]

(1) 经典自由网平差和秩亏自由网平差

如果 GPS 监测网点均位于变形体内, 应采用秩亏自由网平差法。此时, GPS 网的位置基准为各网点近似坐标的平均值, 即为网的重心基准, 该网在平差后是不变的。

理论已经证明, 秩亏自由网平差的结果可直接由经典自由网平差 (以下简称经典平差) 结果进行转换得到。设秩亏自由网平差时, GPS 网点的平差坐标为 $\bar{X}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)^T (i=1, 2, \dots, n)$, 其近似坐标为 $\bar{X}_i^0 = (\bar{x}_i^0, \bar{y}_i^0, \bar{z}_i^0)^T$, 改正数为 $d\bar{X}_i = (d\bar{x}_i, d\bar{y}_i, d\bar{z}_i)^T$, 则有:

$$\bar{X}_i = \bar{X}_i^0 + d\bar{X}_i \dots\dots\dots (4-1-38)$$

由于重心位置基准在平差前后保持不变, 即有:

$$\frac{1}{n} \sum \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum \bar{X}_i^0 \dots\dots\dots (4-1-39)$$

由式 (4-1-38) 对所有 GPS 点坐标求平均值, 顾及式 (4-1-39), 则有:

$$\sum d\bar{X}_i = 0 \dots\dots\dots (4-1-40)$$

很明显, GPS 网秩亏平差坐标与经典平差之间仅存在一常数差, 设为 $\delta\bar{X} = (\delta\bar{x}, \delta\bar{y}, \delta\bar{z})^T$, 则有:

$$\bar{X}_i = \hat{X}_i + \delta\bar{X} \dots\dots\dots (4-1-41)$$

$$\delta\bar{X} = \bar{X}_i - \hat{X}_i = \bar{X}_i^0 - \hat{X}_i + d\bar{X}_i \dots\dots\dots (4-1-42)$$

在 n 个 GPS 点上对上式求和得:

$$\delta\bar{X} = \frac{1}{n} \sum (\bar{X}_i^0 - \hat{X}_i) \dots\dots\dots (4-1-43)$$

将上式代入式 (4-1-41), 得:

$$\bar{X}_i = \hat{X}_i + \frac{1}{n} \sum (\bar{X}_i^0 - \hat{X}_i) \dots\dots\dots (4-1-44)$$

这样便实现了由经典平差的坐标 \hat{X}_i 转换成秩亏自由网平差的坐标 \bar{X}_i 。

对上式求全微分, 可得秩亏自由网平差后 GPS 点坐标平差值的互协因素阵 $Q_{\bar{X}}$ 为:

$$Q_{\bar{X}} = (I - \frac{1}{n}E)Q_{\hat{X}}(I - \frac{1}{n}E)^T \dots\dots\dots (4-1-45)$$

式中, I 为 $3n$ 阶单位阵; E 由 $n \times n$ 个 3×3 单位阵组成。可见, $Q_{\bar{X}}$ 也可直接由经典平差的 GPS 坐标平差值的互协因素阵计算得到。

(2) 经典自由网平差和自由网拟稳平差

对于 GPS 监测网, 如果按拟稳平差, 设非稳定点平差后的坐标为:

$$\bar{X}_{M_i} = \bar{X}_{M_i}^0 + d\bar{X}_{M_i}, i=1,2,\dots,k_M \dots\dots\dots (4-1-46)$$

稳定点平差后的坐标为:

$$\bar{X}_{F_j} = \bar{X}_{F_j}^0 + d\bar{X}_{F_j}, i=1,2,\dots,k_F \dots\dots\dots (4-1-47)$$

上两式中, \bar{X}, \bar{X}^0 及 $d\bar{X}$ 分别代表坐标的平差值、坐标近似值及其改正数, k_M 为非稳定点数, k_F 为稳定点数。

当 GPS 监测网采用拟稳平差时, 其位置基准为稳定点的重心坐标, 该重心坐标平差前后是保持不变的, 也即平差前所取的稳定点的近似坐标平均值等于各稳定点平差后坐标的平均值即

$$\frac{1}{k_F} \sum \bar{X}_{F_j} = \frac{1}{k_F} \sum \bar{X}_{F_j}^0 \dots\dots\dots (4-1-48)$$

则由式 (4-1-47) 可知:

$$\frac{1}{k_F} \sum d\bar{X}_{F_j} = 0 \dots\dots\dots (4-1-49)$$

与前述的秩亏自由网平差相类似, GPS 网拟稳平差坐标与经典平差坐标

之间仅存在一常数项, 设为 $\delta\bar{X} = (\delta\bar{x}, \delta\bar{y}, \delta\bar{z})^T$, 则有:

$$\bar{X}_{M_i} = \hat{X}_{M_i} + \delta\bar{X}_{M_i} \quad \dots\dots\dots (4-1-50)$$

$$\bar{X}_{F_j} = \hat{X}_{F_j} + \delta\bar{X}_{F_j} \quad \dots\dots\dots (4-1-51)$$

将式 (4-1-47) 代入上式得:

$$\delta\bar{X} = \bar{X}_{F_j} - \hat{X}_{F_j} = \bar{X}_{F_j}^0 - \hat{X}_{F_j} + d\bar{X}_{F_j} \quad \dots\dots\dots (4-1-52)$$

用上式对 k_F 个稳定点求和, 并顾及式 (4-1-49) 得:

$$\delta\bar{X} = \frac{1}{k_F} \sum (\bar{X}_{F_j} - \hat{X}_{F_j}) \quad \dots\dots\dots (4-1-53)$$

将上式代入式 (4-1-50) 和式 (4-1-51) 得:

$$\bar{X} = \hat{X} + \frac{1}{k_F} \sum (\bar{X}_{F_j} - \hat{X}_{F_j}) \quad \dots\dots\dots (4-1-54)$$

这样便实现了由经典平差坐标 \hat{X}_i 到拟稳平差坐标 \bar{X}_i 的转换。

对上式求全微分, 可得拟稳平差坐标的互协因素阵 $Q_{\bar{X}}$ 为:

$$Q_{\bar{X}} = (I - \frac{1}{k_F} E_F) Q_{\hat{X}} (I - \frac{1}{k_F} E_F)^T \quad \dots\dots\dots (4-1-55)$$

式中, I 为 $3n$ 阶单位阵; E_F 为 $3n$ 阶方阵, 其中除以稳定点所对应的列由 3×3 的单位阵组成, 其它列元素均为零。

4.2 数据的奇异值检验和插补

4.2.1 观测数据序列的奇异值检验

对于任何一个监测系统, 其观测数据中难免会存在奇异值, 在变形分析的开始有必要将该奇异值剔除。下面介绍一种使用的奇异值检验方法。

对于观测数据序列 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 描述该序列数据变化的特征为:

$$d_j = 2x_j - (x_{j+1} + x_{j-1}) \quad (j=2, 3, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots (4-2-1)$$

这样由 n 个观测数据可得 $n-2$ 个 d_j 。这时, 由 d_j 值可计算数据序列变化的统计均值 \bar{d} 和均方差 $\hat{\sigma}_d$:

$$\bar{d} = \sum_{j=2}^{n-1} \frac{d_j}{n-2} \quad \dots\dots\dots (4-2-2)$$

$$\hat{\sigma}_d = \sqrt{\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(d_j - \bar{d})^2}{n-3}} \quad \dots\dots\dots (4-2-3)$$

根据 d_j 与均差的绝对值与均方差的比值:

$$q_j = \frac{|d_j - \bar{d}|}{\hat{\sigma}_d} \dots\dots\dots (4-2-4)$$

当 $q_j > 3$ 时, 则认为 x_j 是奇异值, 应舍弃。

4.2.2 数据的插补

由于各种主、客观的限制, 当实测资料出现漏测时, 或在数据处理时需要用到某个未知数值或等间隔观测值时, 则可利用已有的相邻测次或相邻测点的可靠资料进行插补工作^[30]。插补的方法主要有两种: (1) 按照内在物理联系进行插补; (2) 按照数学方法进行插补。本文主要介绍用数学方法进行插补。

4.2.2.1 线性插值法

习惯上我们称插补为插值, 下面介绍几种插值方法^[31]。

设已知某个函数关系 $y=f(x)$ 的列表函数值见表 4-2-1,

表 4-2-1 函数的对应值

x	x0	x1	...	xn
y	y0	y1	...	yn

而 $x \neq x_i (i=0,1,\dots,n)$ 问应该如何估值 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 。对于函数关系 $y=f(x)$, 我们所知道的仅仅上述表列值, 它们常常是间接求得的。例如是由实验(观测)得来的, 或者是从级数或微分方程求得的等。

给定点 x_0, x_1, \dots, x_n 为插值结点, 称函数 $\varphi(x)$ 为函数 $f(x)$ 的关于 x_0, x_1, \dots, x_n 的插值函数, 称 $y=f(x)$ 为被插函数。

严格的说, 插值方法一词只用于 \bar{x} 落在给定点 x_0, x_1, \dots, x_n 之间的情形, 所以也称它为内插法。如果 \bar{x} 落在给定点 x_0, x_1, \dots, x_n 之外, 并且仍以插值函数 $\varphi(x)$ 在 \bar{x} 处近似地代替 $f(\bar{x})$, 则一般称这种近似计算函数的方法为外插法。

我们可以使用插值方法估计 y , 插值方法的目的是寻求简单的连续函数 $\varphi(x)$, 使它在 $n+1$ 个点 x_0, x_1, \dots, x_n 处取给定值 $\varphi(x_i)=y_i=f(x_i) (i=0,1,\dots,n)$, 而在别处希望它也能近似地代表函数 $f(x)$ 。因为 $\varphi(x)$ 已是有解析表达式的简单函数, 所以它在 $x=\bar{x}$ 处的值可以按表达式精确地计算出来。这样我们就可以将 $\varphi(\bar{x})$ 看成 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 的近似值了。

线性插值也叫两点插值, 已知函数 $y=f(x)$ 在给定互异点 x_0, x_1 上的值为 $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$ 线性插值就是构造一个一次多项式

$$P_1(x)=ax+b \dots\dots\dots (4-2-5)$$

使它满足条件:

$$P_1(x_1) = y_1, \quad P_1(x_2) = y_2 \dots\dots\dots (4-2-6)$$

其几何解释就是一条直线, 通过已知点 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ 。由解析几何方法可知, 过两点的直线方程可写为:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad (\text{点斜式}) \dots\dots\dots (4-2-7)$$

或改写成:

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \quad (\text{对称式}) \dots\dots\dots (4-2-8)$$

容易验证, $P_1(x)$ 就是所求的一次多项式, 称其为 $f(x)$ 的线性插值多项式。由于线性插值方法计算方便, 在实际中得到了广泛的应用。

4.2.2.2 Lagrange 插值法

由于线性插值是用直线去代替曲线, 因而一般要求 $[x_0, x_1]$ 比较小, 且 $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上变化比较平稳, 否则线性插值的误差可能很大。而这在实际中很不适用。为了克服这一缺点, 用多项式代替曲线, 下面介绍 Lagrange 插值方法。

设 $y = f(x)$ 是实变量 x 的单值函数, 且已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个互异点 x_0, x_1, \dots, x_n 处的值 y_0, y_1, \dots, y_n , 即

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (4-2-9)$$

试构造一个次数不超过 n 的多项式:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \dots\dots\dots (4-2-10)$$

使之满足条件:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (4-2-11)$$

为了求得系数 a_0, a_1, \dots, a_n (当然 n 不能较大), 方便的方法是先构造一组基函数 $l_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, 使

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \dots\dots\dots (4-2-12)$$

若作出这样的 $l_k(x)$, 则 $P_n(x)$ 的次数 $\leq n$, 另外, 由上式可得:

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (4-2-13)$$

即 $P_n(x)$ 满足插值条件 (4-2-11)。于是问题归结为求基函数 $l_k(x)$ 。

根据 (4-2-12) 式, x_k 以外的所有的结点都是 $l_k(x)$ 的根, 因此令

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \lambda(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n) \\ &= \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x-x_j) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4-2-14)$$

又由 $l_k(x_k)=1$ 得:

$$\lambda = \frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad \dots\dots\dots (4-2-15)$$

所以有:

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4-2-16)$$

代入 (4-2-13) 式即得 $P_n(x)$ 的表达式:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \right) y_k \quad \dots\dots\dots (4-2-17)$$

上式称为拉格朗日插值多项式。

4.2.2.3 分段线性插值法

用拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 作为区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的近似函数, 在大多数情况下, $P_n(x)$ 的次数越高, 逼近 $f(x)$ 的效果就越好, 但是对于高次多项式插值问题而言, 往往会造成插值多项式 $P_n(x)$ 的收敛性与稳定性变差, 反而逼近效果不理想, 甚至发生龙格现象, 即在理论上并不能保证当 n 趋于无穷大时 $P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛于 $f(x)$ 。关于这一点, 在20世纪初就为龙格(Runge)所发现: 在 $[-1,1]$ 上用 $n+1$ 个等距节点作被插值函数 $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ 的插值多项式 $L_n(x)$ 则随着 n 的增大, $L_n(x)$ 振荡越来越大。计算结果与理论证明表明, 当 n 趋于无穷大时, $L_n(x)$ 在区间中部收敛于 $y(x)$, 但是对于满足条件 $0.726 \leq |x| < 1$ 的 x , $L_n(x)$ 并不收敛于 $y(x)$ 。

上述例子说明, 使用高次多项式插值是危险的, 因此在实际计算中不能使用高次插值。这反而启发我们使用分段插值方法, 即将区间 $[a,b]$ 分成一些小小区间, 在每一个小小区间上用低次多项式进行插值, 在整个插值区间 $[a,b]$ 上就得到一个分段低次多项式插值函数。区间的拆分可以是任意的, 各小小区间上插值多项式的次数的选取也可按具体问题的要求而选择。分段低次多项式

插值通常有较好的收敛性和稳定性, 算法简单。但插值函数光滑性变差。常用的分段多项式插值法有两类: 一类是下面将要介绍的分段线性插值法; 另一类是后面将要介绍的三次样条插值法。

假设区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $y(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 上的函数值 $y(x_j) = y_j$ 则得到 x, y 平面上的 $n+1$ 个数据点 (x_j, y_j) 。连接相邻数据点 (x_{j-1}, y_{j-1}) 、 (x_j, y_j) 得到 n 条线段, 它们组成一条折线。把区间 $[a, b]$ 上这 n 条折线段表示的函数称为被插函数 $y(x)$ 关于这 $n+1$ 个数据点的分段线性插值函数, 记作 $I(x)$, 则 $I(x)$ 具有如下性质:

(1) $I(x)$ 可以分段表示, 在每个小区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上, 它是线性函数, 即

$$I(x) = y_{j-1} \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j} + y_j \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, x_{j-1} \leq x \leq x_j, \dots \dots \dots (4-2-18)$$

(2) $I(x_j) = y_j, j = 0, 1, \dots, n$ $I(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\dots \dots \dots (4-2-19)$

若构造插值基函数:

$$l_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \dots \dots \dots (4-2-20)$$

$$I(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x) \dots \dots \dots (4-2-21)$$

用计算 x 点的插值时, 只用到 x 左右的两个节点, 计算量与节点个数 $n+1$ 无关。但 n 越大, 分段越多, 插值误差就越小。

4.2.2.4 三次样条插值法

分段线性插值函数在节点处的一阶导数一般不存在, 光滑性不高, 这影响了它在诸如机械加工等领域 (希望插值曲线光滑) 中的应用。在船舶、飞机等设计中, 面对已知的一些数据点 $(x_j, y_j), j = 0, 1, \dots, n$, 绘图员的做法是: 首先将这些数据点描绘在平面图纸上, 再把一根富有弹性的细直条 (称为样条) 弯曲, 使其一边通过这些数据点, 用压铁固定细直条的形状, 沿样条边沿绘出一条光滑曲线。往往要用几根样条分段完成上述工作, 这时应当让样条在连接处也保持光滑。

根据力学理论进行分析, 这样画出的曲线, 在相邻两数据点之间实际上是次数不高于3的多项式, 在整个区间上有连续的曲率。对绘图员用样条画

出的曲线进行数学模拟, 于是导出了样条函数的概念。

定义于区间 $[a, b]$ 上的分段函数 $S(x)$, 若满足:

(1) $S(x)$ 在每一小区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上是一个三次多项式函数;

(2) $S(x)$ 在整个区间 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数。

则称 $S(x)$ 为 $[a, b]$ 上关于部分 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的一个三次样条函数。

从而三次样条插值问题为: 给定函数 $g(x)$ 在 $n+1$ 个节点 x_0, x_1, \cdots, x_n 的函数值 y_0, y_1, \cdots, y_n , 求一个三次样条函数 $S(x)$, 使其满足:

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n \quad (4-2-22)$$

其中函数 $S(x)$ 称为 $g(x)$ 的三次样条插值函数。

对于三次样条插值函数而言, 在每一个小区间上有四个待定参数, 共有参数 $4n$ 个。而在每一小区间上, 由插值条件可得到 2 个方程, 共计 $2n$ 个方程。光滑性要求 $S(x)$ 在每一内部节点一阶、二阶导数连续, 从而其左右导数相等, 这样每一个内部节点可产生 2 个方程, 共计 $2(n-1)$ 个。这样就得到 $4n$ 个待定参数所满足的 $2n+2(n-1)=4n-2$ 个方程, 为保证待定参数的唯一性, 还差两个方程。为此, 常用的方法是对边界节点除函数值外的附加要求, 这就是所谓的边界条件。根据实际问题的不同, 三次样条插值常用到下列三类边界条件。

(1) μ 边界条件: $S'(a) = y'_0$, $S'(b) = y'_n$ 即给定端点处的一阶导数值。由这种边界条件建立的样条插值函数称为 $g(x)$ 的完备三次样条插值函数。特别地, $y'_0 = y'_n = 0$ 时, 样条曲线在端点处呈水平状态。

(2) M 边界条件: $S''(a) = y''_0$, $S''(b) = y''_n$ 即给定端点处的二阶导数值。特别地 $y''_0 = y''_n = 0$ 时, 称为自然边界条件。

(3) 周期边界条件: 当 $y = g(x)$ 是以 $b-a = x_n - x_0$ 为周期的周期函数时, 要求 $S(x)$ 也是周期函数, 故端点处满足 $S'(a+0) = S'(b-0)$, $S''(a+0) = S''(b-0)$, 此条件称为周期条件。

给出任一种边界条件, 都可以得到两个独立的方程。这样 $4n$ 个独立方程可唯一确定三次样条插值函数的 $4n$ 个参数, 从而三次样条插值函数在理论上是唯一确定的。

4.2.2.5 分段三次 Hermite (埃尔米特) 插值法

分段线性插值函数 $I(x)$ 的导数是间断的, 若在节点 $x_i (i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 上, 除已知函数值 y_i 外还给出导数值 $y'_i = m_i (i=0, 1, \cdots, n)$, 这样就可构造一个导数连续的分段插值函数 $I(x)$ 它满足条件:

(1) $I(x) \in C^1[a, b]$, ($C^1[a, b]$ 代表区间 $[a, b]$ 上一阶导数连续的函数集合);

(2) $I(x) = y_i$, $I'(x_i) = y'_i$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$;

(3) $I(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是三次多项式。

则 $I(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的表达式为:

$$I(x) = \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right)^2 \cdot \left(1 + 2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) y_i + \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 \cdot \left(1 + 2 \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) y_{i+1} \dots (4-2-23)$$

$$+ \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right)^2 \cdot (x - x_i) y'_i + \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 \cdot (x - x_{i+1}) y'_{i+1}$$

若在整个区间 $[a, b]$ 上定义一组分段三次插值基函数 $\alpha_j(x)$ 及 $\beta_j(x)$,
($j = 0, 1, 2, \dots, n$) 则 $I(x)$ 可表示为:

$$I(x) = \sum_{j=0}^n [y_j \alpha_j(x) + y'_j \beta_j(x)] \dots (4-2-24)$$

其中 $\alpha_j(x)$ 和 $\beta_j(x)$ 分别表示为:

$$\alpha_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right)^2 \cdot \left(1 + 2 \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j} \right), & x_{j-1} \leq x \leq x_j (j=0 \text{ 略去}) \\ \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \right)^2 \cdot \left(1 + 2 \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right), & x_j \leq x \leq x_{j+1} (j=n \text{ 略去}) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \dots (4-2-25)$$

$$\beta_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right)^2 \cdot (x - x_j), & x_{j-1} \leq x \leq x_j (j=0 \text{ 略去}) \\ \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \right)^2 \cdot (x - x_j), & x_j \leq x \leq x_{j+1} (j=n \text{ 略去}) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \dots (4-2-26)$$

以上即为分段三次 Hermite (埃尔米特) 插值法。

插值技术 (或方法) 远不止这里所介绍的这些, 但在解决实际问题时, 对于一位插值问题而言, 前面介绍的插值方法已经足够了。剩下的问题关键在于什么情况下使用、怎样使用和使用何种插值方法的选择上。

拉格朗日插值函数在整个插值区间上有统一的解析表达式, 其形式关于节点对称, 光滑性好。但缺点同样明显, 这主要体现在高次插值收敛性差 (龙格现象); 增加节点时前期计算作废, 导致计算量大; 一个节点函数值的微小变化 (观测误差存在) 将导致整个区间上插值函数都发生改变, 因而稳定性差等几个方面。因此拉格朗日插值法多用于理论分析, 在采用拉格朗日插值方法进行插值计算时通常选取 $n < 7$ 。

分段线性插值函数（仅连续）与三次样条插值函数（二阶导数连续）虽然光滑性差，但他们都克服了拉格朗日插值函数的缺点，不仅收敛性、稳定性强，而且方法简单实用，计算量比较小，因而应用十分广泛。

4.3 变形分析的模型

4.3.1 回归分析

对数据变化趋势的分析，主要采用曲线拟合（在存在明显线性的情况下，应该采用线性拟合的方法）的方法，也称为曲线回归、趋势外推或趋势曲线分析，它是迄今为止研究最多，也最为流行的定量预测方法^[32]。

人们常用各种光滑曲线来近似描述事物发展的基本趋势，即

$$Y_t = f(t, \theta) + \varepsilon_t \quad \text{..... (4-3-1)}$$

式中， Y_t 为预测对象； ε_t 为预测误差； $f(t, \theta)$ 根据不同情况和假设，可取不同的形式，而其中的代表某些待定的参数。典型的趋势模型主要有：多项式趋势模型；对数趋势模型；幂函数趋势模型；指数趋势模型；双曲线趋势模型；修正指数模型；逻辑斯蒂（Logistic）模型；龚伯茨（Gompertz）模型。考虑到实际中的应用，本文主要阐述多项式趋势模型。

4.3.1.1 多项式回归分析

设变量 x ， y 的回归模型为

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots + \beta_p x^p + \varepsilon \quad \text{..... (4-3-2)}$$

其中 p 为多项式的次数或阶数， $\beta_i (i=0,1,\cdots,p)$ 是多项式的系数， ε 为残差，且服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ ， $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots + \beta_p x^p$ 称为回归多项式，上面的回归模型称为多项式回归。为了便于计算和分析，令 $x_i = x^i, i=0,1,\cdots,p$ ，多项式回归模型变为多元线性回归模型，下面转求多元线性回归。

4.3.1.2 多元线性回归分析

设变量 Y 与 X_1, X_2, \cdots, X_p 之间有线性关系：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon \quad \text{..... (4-3-3)}$$

其中 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ， $\beta_i (i=0,1,\cdots,p)$ 都是未知参数，设 $(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{np}, y_n)$ ， $i=1,2,\cdots,n$ 是 $(X_1, X_2, \cdots, X_p, Y)$ 的 n 次独立观测值，令

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

将 (4-3-3) 写成矩阵形式为： $y = X\beta + \varepsilon \quad \text{..... (4-3-4)}$

用最小二乘的方法求回归方程系数, 首先求最小二乘函数:

$$Q(\beta) = (y - X\beta)^T (y - X\beta) \dots\dots\dots (4-3-5)$$

得 β 的最小二乘估值为:
$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y \dots\dots\dots (4-3-6)$$

从而得到经验回归方程为:
$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \dots + \hat{\beta}_p X_p \dots\dots\dots (4-3-7)$$

残差向量为:
$$\hat{\varepsilon} = y - X \hat{\beta} \dots\dots\dots (4-3-8)$$

令:
$$(\hat{\sigma})^2 = (\hat{\varepsilon})^T \left(\hat{\varepsilon} \right) / (n - p - 1) \dots\dots\dots (4-3-9)$$

在多元线性回归中, 有时无法用图来判断 $E(Y)$ 是否随 X_1, X_2, \dots, X_p 线性变化, 即 Y 与 X_1, X_2, \dots, X_p 之间是否有明显的线性关系, 故必须作显著性检验。

(1) 回归方程的显著性检验^[33]

为了验证 Y 与 X_1, X_2, \dots, X_p 之间是否有明显的线性关系, 做如下假设:

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$$

构造因变量总偏差平方和:
$$SS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \dots\dots\dots (4-3-10)$$

自变量引起的因变量总的变化, 回归平方和:

$$U = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \dots\dots\dots (4-3-11)$$

残差平方和:
$$Q = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 \dots\dots\dots (4-3-12)$$

其中 \hat{y}_i 为回归方程的计算值, \bar{y} 为其平均值, y_i 为实际的观测值 ($i = 1, 2, \dots, n$), 根据数学知识, 容易证明:

$$SS = U + Q \dots\dots\dots (4-3-13)$$

显然, U 在 SS 中占的比重越大, 模型 (4-3-4) 越有意义, 定义:

$$R^2 = U / SS \dots\dots\dots (4-3-14)$$

R^2 称为相关系数, 取值为 (0,1), R^2 越大, 说明自变量对因变量影响越大。一般地, 相关系数绝对值在 0.8~1 范围内, 可判断回归自变量与因变量具有较强的线性相关性。

当 H_0 成立时, 有:
$$F = \frac{U/p}{Q/(n-p-1)} \sim F(p, n-1-1) \dots\dots\dots (4-3-15)$$

对于给定的显著水平 α , 检验 H_0 的拒绝域为:

$$F > F_{1-\alpha}(p, n-p-1) \dots\dots\dots (4-3-16)$$

当回归方程经过检验是显著的, 且每个系数都不显著为零, 则此方程可以作预测。对于给定的 X_0 , 将其待入回归方程, 得到预测值为:

$$\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{01} + \dots + \hat{\beta}_p x_{0p} \dots\dots\dots (4-3-17)$$

相应的置信度为 $1-\alpha$ 的预测区间为 $(\hat{y}_0-L, \hat{y}_0+L)$, 其中

$$L = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)\sigma\sqrt{1+x_0^T(X^TX)^{-1}x_0} \quad (4-3-18)$$

(2) 采用相对误差来检验多项式预测的精度^[27], 即

$$q_k = \frac{|\hat{y}_0 - y_0|}{y_0} \times 100\% \quad (4-3-19)$$

其中 \hat{y}_0 为给定的 X_0 的预测值, y_0 为对应于 X_0 的实测值。

4.3.2 灰色系统分析

若采用线性回归的方法不但计算繁杂, 而且其在长期预测的精确度上也很低、预测性差, 模型的稳定性能也较差。因此, 我们利用时间序列建立灰色系统分析模型, 它对于信息不完整(或不完全)情况, 具有良好的适用性, 即 GM(1, 1) 模型^[34]。灰色系统分析可从杂乱无章的、有限的、离散的数据中找出数据的规律(而且对数据量的要求较低一般为 4~5 个起始数据即可进行灰色分析), 然后建立相应的灰色模型进行预测, 通过对原始随机数列采用生成信息的处理方法来弱化其随机性, 使原始数据序列转化为易于建模的新序列, 灰色系统常用的生成方式有累加生成、累减生成和映射生成等, 若观测数据(如变形监测等)具有时间累积效应, 因此采用累加生成法, 即将数列各时刻数据逐个累加得到新的数据与数列, 最终得到一条通过系统的原始序列累加生成的点群最佳拟合曲线, 并用此曲线对未来的情况进行预测^[35]。

4.3.2.1 数据的检验

在采用灰色系统进行分析之前, 应当对原始数据进行验证, 以证明其是否满足灰色系统的要求。

(1) 光滑性检验

设给定原始时间序列 $x^{(0)}(t)$ 有 n 个观测值, $x^{(0)}(t) = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, 数据处理: 将原始数据列 $x^{(0)}(t)$ 做累加生成, 1-AGO (Accumulated Generating Operation, AGO) 即

$$x^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^t x^{(0)}(i), t=1, 2, \dots, n \quad (4-3-20)$$

得到一个新序列 $x^{(1)}(t) = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$ 。对 $x^{(0)}(t)$ 进行准光滑性检验得:

$$\rho(t) = \frac{x^{(0)}(t)}{x^{(1)}(t-1)}, t=2, 3, \dots, n \quad (4-3-21)$$

当 $\rho(t) < 0.5$, 满足准光滑条件, 这里 $\rho(t)$ 为光滑比。

(2) 指数规律检验

由于灰色分析采用的拟合与预测的函数中含有指数函数,在采用灰色分析时应先对数据序列进行准指数规律检验。

检验 $x^{(0)}$ 是否具有准指数规律:

$$\sigma^{(0)}(t) = \frac{x^{(0)}(t)}{x^{(0)}(t-1)}, t=2,3,\dots,n \quad (4-3-22)$$

令 $a = \max(\sigma^{(0)}(t)), b = \min(\sigma^{(0)}(t)), \delta = a - b$, 当 $\delta < 0.5$ 时, 称 $x^{(0)}$ 具有指数规律, 可以对其进行建立 GM(1, 1) 模型。这里 $\sigma^{(0)}(t)$ 称为序列 $x^{(0)}$ 的级比。

4.3.2.2 GM(1, 1) 模型

设原始时间序列 $x^{(0)}(t)$, GM(1, 1) 模型算法步骤如下:

(1) 数据处理: 累加生成, 请参照公式 (4-3-20);

(2) GM(1, 1) 模型的动态微分方程:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = \mu \quad (4-3-23)$$

式中: a 为发展灰数, μ 为内生控制灰数;

(3) 构成数据矩阵 B 与数据列 Y_n : 设 \hat{a} 为待估参数向量, $\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ \mu \end{bmatrix}$, 利用最小二乘法求解可得:

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y_n \quad (4-3-24)$$

$$\text{其中: } B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x^{(0)}(1) + x^{(0)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x^{(0)}(2) + x^{(0)}(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[x^{(0)}(n-1) + x^{(0)}(n)] & 1 \end{bmatrix}, Y_n = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)]^T.$$

综上所述, 可以把灰色分析的过程简化如下:

(1) 建立时间响应离散化

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{\mu}{a})e^{-ak} + \frac{\mu}{a}, k=0,1,2,\dots \quad (4-3-25)$$

(2) 将 k 值代入离散模型式计算预测累加值 $\hat{x}^{(1)}(t)$;

(3) 将预测累加值还原为预测值:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) \quad (4-3-26)$$

(4) 模型检验;

(5) 当 $k < n$ 时, 称 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 为模型模拟值或拟合值; 当 $k = n$ 时, 称 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 为模型滤波值; 当 $k > n$ 时, 称 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 为模型预测值。

4.3.2.3 GM(1, 1) 模型检验

对模型精度即模型拟合程度评定的方法有残差大小检验、关联度检验和后验差检验三种^[36]。残差大小检验是对模型值和实际值的误差进行逐点检

验；关联度检验是考察模型值与建模序列曲线的相似程度；后验差检验是对残差分布的统计特征进行检验，它由后验差比值 C 和小误差概率 P 共同描述。灰色模型的精度通常用后验差方法检验。

按预测模型进行计算 $\hat{x}^{(0)}(t)$ ，并进行累减生成（Inverse Accumulated Generating Operation，简称 IAGO，是 AGO 的逆运算） $\hat{x}^{(0)}(t)$ ， $(t=1,2,\dots,n)$ ，计算残差：

$$e(t) = x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t), t=1,2,\dots,n \quad (4-3-27)$$

记原始数据序列 $x^{(0)}$ 及残差数列 e 的方差分别为 S_1^2, S_2^2 ，则：

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x^{(0)}(t) - \bar{x}^{(0)})^2 \quad (4-3-28)$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e(t) - \bar{e})^2$$

式中， $\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(0)}(t)$ ， $\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e(t)$ 。

计算后验差比值： $C = S_2 / S_1 \quad (4-3-29)$

小误差概率： $p = \{e(t) | < 0.6745 S_1\} \quad (4-3-30)$

模型精度等级 = max { p 所在级别， c 所在级别}，详细评判标准见表 4-3-1。

表 4-3-1 各指标的数值与其对应的精度

精度等级		1 级（好）	2 级（合格）	3 级（勉强合格）	4 级（不合格）
要求	P	>0.95	>0.80	>0.70	≤0.70
	C	<0.35	<0.60	<0.65	≥0.65

若此模型经残差检验、关联度检验、后验差检验都能通过，则可以用所建模型进行预测，否则，需要进行残差修正。

在采用数学方法进行沉降预测时，应当遵守下面的原则：

(1) 不要迷信数学模型，尤其是在缺乏准确的数据时，要根据情况选择合适的方法；

(2) 不要只依赖一种预测方法；

(3) 适当地缩短预测期可以提高预测的准确性；

(4) 不要把定量预测和定性预测绝对分开，两类方法应有机地结合起来。

4.4 本章小结

本章第一节主要介绍了 GPS 监测网的数据处理，根据不同的实际情况可以选择不同的方法，分别有：经典自由网平差，秩亏自由网平差和自由网拟稳平差，在分析三种方法原理的基础上，介绍了由经典自由网平差结果向后

两种转换的方法。第二节介绍了对观测所得的数据进行奇异值检验的方法，以及在数据缺失或为了得到等周期观测数据时所采用的插补方法，分别有线性插值法，Lagrange 插值法，分段线形插值法，三次样条插值法和分段三次 Hermite（埃尔米特）插值法，这几种方法各有优劣，在实际应用中应谨慎选择。第三节介绍了变形分析的几种模型，分别为多项式回归模型和灰色系统分析模型。在多项式回归分析中介绍了采用显著性检验的方法来评定该多项式拟合的可靠性，以及相对误差来评定预测结果的精度。在灰色系统分析中，介绍了对原始数据的光滑性和指数规律检验通过的情况下，用该系统对数据进行拟合及预测，并给出了评定模型精度等级的指标，便于实际中的分析比较。

5 变形监测实测数据处理与分析

5.1 GPS 变形监测网的平差

GPS 监测网的数据数据处理程序是基于 VC++ 6.0 平台开发（可参考文献 [19]），采用三维无约束平差方法，以 GPS 基线向量为观测值，以其方差阵的逆阵为权，进行平差计算，以网中一点的坐标作为固定网点坐标的起算数据^[37]。数据的格式说明如下：

头文件

坐标系 总点数 基线向量数 已知点数 先验方差（可用后验方差取代）

已知点坐标 X Y Z

其它点近似坐标 X Y Z

点 i 点 j

点 i 与点 j 的方差、协方差及其权阵

由于已知数据的数据量较大，将其放在后面的附录 A 中。程序运行后，首先进行自由网平差如图 5-1-1 所示，将原始数据存放在文件名为“GPS 原始数据.txt”中，找到路径后，打开已知数据，如图 5-1-2 所示。



图 5-1-1 进行经典自由网平差界面



图 5-1-2 打开文件对话框

打开后出现提示框，告知数据处理完毕，如图 5-1-2 所示。

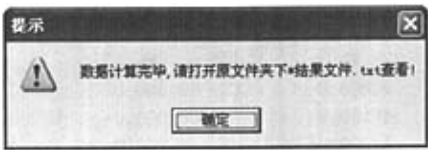


图 5-1-3 计算完毕提示框

找到结果文件“GPS 原始数据结果文件.txt”，打开后，便可看到自由网三维平差的结果，由于数据量较大，只摘取部分于表 5-1-1 中。

其中单位权中误差不到 1cm，说明平差结果是可靠的，精确度是很高的。由于 1 号点为已知点，故其坐标改正数全为 0。假设在实际工程中，不设起始数据或不存在必要的起始数据，而且又设网点坐标为待平差参数，误差方程系数阵列亏，这样的平差问题成为秩亏自由网平差，仍以上面的已知数据为例，进行模拟秩亏自由网平差，最终结果如表 5-1-2 所示。

在自由监测网中，假定有一部分点对于另一部分是相对稳定的，这就需要采用自由网拟稳平差的方法，假定前三个点距变形体较远是相对稳定的，进行模拟平差后，结果如表 5-1-3 所示。

根据不同的实际情况，可以选取不同的方法，上面的实验证明了此方法的实用性。

表 5-1-1 自由网平差改正数

自由网平差坐标改正数:				
编号	测站点	dX	dY	dZ
1	WTS	0	0	0
2	HDT	-0.000 9	0.008 5	0.004 8
3	BBS	0.008 5	0.001 0	-0.006 4
4	BNS	0.000 8	0.002 1	0.002 7
5	FBB	0.000 3	0.016 9	0.007 7
6	SNZ1	0.000 9	-0.002 1	-0.002 7
7	SNZ2	-0.002 9	0.013 0	0.011 2
8	SZD1	-0.009 2	0.012 0	0.002 5

续表 5-1-1 自由网平差改正数

自由网平差后坐标:				
编号	测站点	纵坐标 X	横坐标 Y	竖坐标 Z
1	WTS	-2 474 926.843	4 056 416.776	4 240 604.318
2	HDT	-2 481 375.483	4 053 745.783	4 239 383.763
3	BBS	-2 480 310.093	4 053 343.912	4 240 199.641
4	BNS	-2 481 000.894	4 053 718.956	4 239 493.748
5	FBB	-2 480 207.714	4 053 092.523	4 240 472.510
6	SNZ1	-2 480 851.594	4 053 647.461	4 239 566.214
7	SNZ2	-2 480 433.119	4 053 521.439	4 239 929.199
8	SZD1	-2 480 392.796	4 053 509.893	4 239 962.887
单位权中误差为:		MO= 0.7614 (厘米)		

表 5-1-2 秩亏自由网平差结果

秩亏自由网平差坐标改正数:				
编号	测站点	dX	dY	dZ
1	WTS	0.000 3	-0.006 4	-0.002 5
2	HDT	-0.000 6	0.002 1	0.002 3
3	BBS	0.008 8	-0.005 4	-0.008 9
4	BNS	0.001 1	-0.004 3	0.000 3
5	FBB	0.000 6	0.010 5	0.005 2
6	SNZ1	0.001 2	-0.008 5	-0.005 1
7	SNZ2	-0.002 6	0.006 6	0.008 8
8	SZD1	-0.008 9	0.005 6	0.000 0

续表 5-1-2 秩亏自由网平差结果

秩亏自由网平差后坐标:				
编号	测站点	纵坐标 X	横坐标 Y	竖坐标 Z
1	WTS	-2 474 926.843	4 056 416.770	4 240 604.316
2	HDT	-2 481 375.482	4 053 745.776	4 239 383.761
3	BBS	-2 480 310.093	4 053 343.906	4 240 199.639
4	BNS	-2 481 000.894	4 053 718.949	4 239 493.746
5	FBB	-2 480 207.714	4 053 092.517	4 240 472.507
6	SNZ1	-2 480 851.594	4 053 647.455	4 239 566.212
7	SNZ2	-2 480 433.119	4 053 521.432	4 239 929.197
8	SZD1	-2 480 392.795	4 053 509.887	4 239 962.884

表 5-1-3 拟稳平差结果

拟稳平差坐标改正数:				
编号	测站点	dX	dY	dZ
1	WTS	-0.002 6	-0.003 2	0.000 6
2	HDT	-0.003 4	0.005 4	0.005 3
3	BBS	0.006 0	-0.002 2	-0.005 9
4	BNS	-0.001 7	-0.001 1	0.003 3
5	FBB	-0.002 3	0.013 7	0.008 2
6	SNZ1	-0.001 6	-0.005 3	-0.002 1
7	SNZ2	-0.005 5	0.009 8	0.011 8
8	SZD1	-0.011 7	0.008 9	0.003 0

续表 5-1-3 拟稳平差结果

拟稳平差后坐标:				
编号	测站点	纵坐标 X	横坐标 Y	竖坐标 Z
1	WTS	-2 474 926.846	4 056 416.773	4 240 604.319
2	HDT	-2 481 375.485	4 053 745.780	4 239 383.764
3	BBS	-2 480 310.096	4 053 343.909	4 240 199.642
4	BNS	-2 481 000.897	4 053 718.952	4 239 493.749
5	FBB	-2 480 207.716	4 053 092.520	4 240 472.510
6	SNZ1	-2 480 851.597	4 053 647.458	4 239 566.215
7	SNZ2	-2 480 433.122	4 053 521.435	4 239 929.200
8	SZD1	-2 480 392.798	4 053 509.890	4 239 962.887

5.2 观测数据的奇异值检验

在常规的内、外业中，有很多数据的记录、处理和存档输入是需要手工来完成的，而在这过程当中，难免会出现差错，这就需要对结果进行必要的检查，如果还要由人工来完成，那工作量势必很大，为此设计了专门的程序进行检查。算例如下：

某市的一大楼，在建设过程中，为了监视其沉降情况，在其四个侧面布设了 12 个点进行一等水准监测，本文选择了其中的 6 个点，共有 19 期，339 天的沉降量进行分析。原始数据的编排为 7 行 20 列，为了在文档中显示，做了相应调整，第一列的 1~6 为点号，以后各列为 19 期的观测所得的沉降量（单位为 mm），如表 5-2-1 所示。

用 MATLAB 6.5 编程^[38]，参照第四章第二节公式，编写了可执行程序“jiancha.m”，原始数据存放在“x.m”文件中，在 MATLAB 6.5 命令窗口，输入“jiancha.m”，回车后，运行如图 5-2-1 所示。

表 5-2-1 水准观测结果										
时间(天)	0	50	76	132	146	159	173	189	202	217
1	0	-0.63	-1.75	-0.77	-0.82	0.48	0.72	-0.49	-0.04	-0.42
2	0	-0.75	-2.71	-2.06	-2.08	-1.08	-1.49	-2.59	-2.29	-2.91
3	0	-1.59	-2.33	-2.06	-1.84	-1.78	-1.89	-3.74	-3.17	-3.90
4	0	-0.92	-1.74	-1.92	-1.61	-1.23	-1.50	-2.18	-1.78	-2.52
5	0	-0.68	-1.35	-1.48	-1.30	-0.60	-0.99	-1.65	-1.06	-1.84
6	0	-0.78	-2.23	-2.42	-2.54	-1.70	-2.35	-3.26	-2.89	-4.06

续表 5-2-1 水准观测结果										
时间(天)	234	247	260	273	287	298	313	325	339	
1	-0.38	-1.67	-1.41	-0.89	-2.45	-2.42	-3.70	-3.13	-3.83	
2	-3.12	-4.48	-4.55	-4.18	-5.16	-6.01	-6.79	-6.44	-7.19	
3	-4.27	-5.78	-6.17	-5.98	-6.97	-7.53	-7.74	-7.43	-7.62	
4	-2.55	-3.69	-4.15	-3.85	-4.57	-5.78	-6.43	-6.51	-7.23	
5	-1.73	-2.85	-2.84	-2.85	-3.69	-4.93	-5.88	-5.87	-6.79	
6	-3.64	-5.23	-4.73	-5.06	-5.93	-7.16	-7.62	-7.86	-8.57	

从图 5-2-1 中可知，该数据中没有奇异值，为了验证该程序奇异值检查的有效性，我们人为修改了部分数据，把 2 号点的第 3 期数据由-2.71 改为 2.71，3 号点的第 6 期数据由-1.78 改为 1.78，5 号点的第 13 期数据由-2.84 改为 1.84，再次运行程序“jiancha.m”后，结果如图 5-2-2 所示。结果和我们人为修改的一致，图 5-2-2 中完全把这些奇异给检查出来，结果和预先假设的一样，从而说明了奇异值检验的有效性。



图 5-2-1 奇异值检查结果

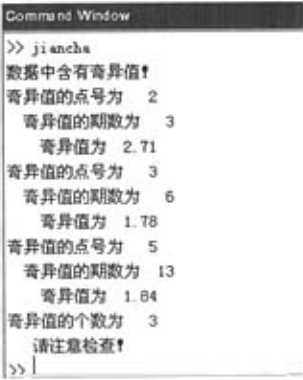


图 5-2-2 检查结果

5.3 观测数据的插值试验

在变形监测的外业施测阶段，由于天气、施工、开始的设计等多种原因，都容易导致观测数据的不等周期性，甚至无周期性而言，在这种情况下，为了分析沉降的变化趋势，在需要等周期的观测数据的情况下，就要用到插值的方法。而插值方法选取的好坏，对最终的分析将会产生很大影响。为了能选用好的插值方法，选取其中的 5 号点全部数据进行分析，采用 4 种插值方法进行比较，分别为：线形插值、三次样条插值、分段三次 Hermite（埃尔米特）插值和拉格朗日插值，编译的程序为“chazhi.m”，运行后显示插值结果如图 5-3-1 所示。

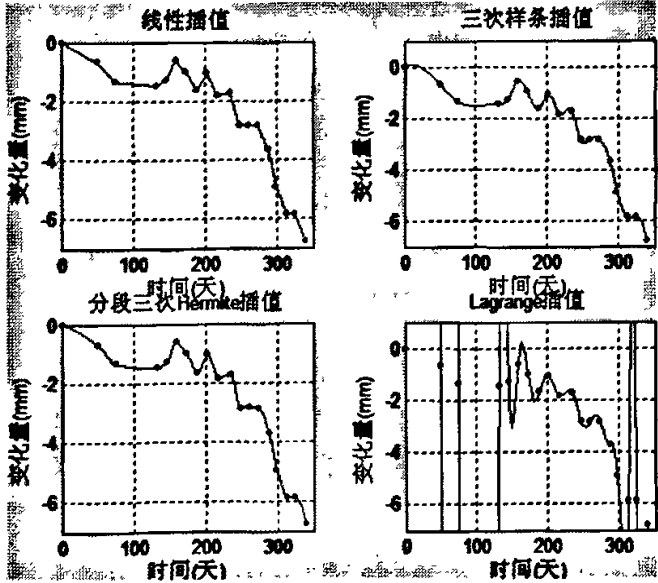


图 5-3-1 四种方法插值结果

从上面的四个图中，容易发现：线形插值其原理是相邻两点间的连线，没有任何光滑性可言，效果不理想；三次样条插值的光滑性最好，可是在起点附近，曲线呈先升后降趋势，这有背于实际情况，对该种方法应该谨慎选择使用；分段三次 Hermite 插值，插值数据及其导数都是连续的，在顾及光滑性的同时，更符合实际情况，效果很好；Lagrange 插值，由于数据量偏大，致使插值的次数很高（18 次），出现了严重的龙格现象，只在中间的数据能满足要求，此种方法在处理数据量偏大时不可取。

下面画出其它各点用三次 Hermite 插值法的插值曲线图，如图 5-3-2 所示。相应的观测数据的插值结果如表 5-3-1 所示。

插值后的数据为等周期（19 期）的 339 天的沉降观测数据，每一期的时间近似为 18.8 天，这种等周期的数据为我们以后的分析提供了很大帮助，同时也可以同样的方法来得到其它周期的数据，如 10 天，15 天等，这样就为进一步的分析监测点在某一时间段内的变化量提供了依据。

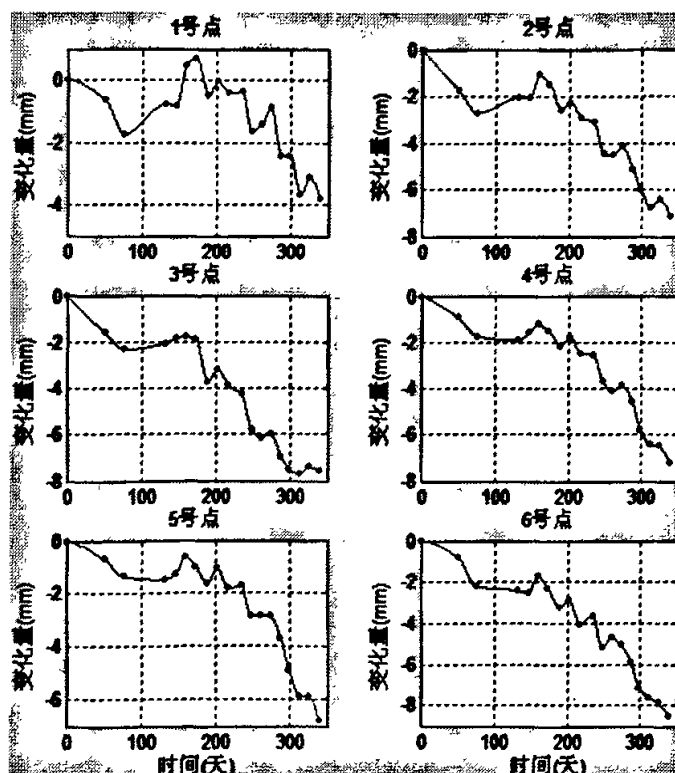


图 5-3-2 6 个点的三次 Hermite 法插值图

表 5-3-1 三次 Hermite 法插值结果

期数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-0.109	-0.389	-0.881	-1.748	-1.508	-1.032	-0.770	-0.469	0.702
2	0	-0.645	-1.308	-2.032	-2.709	-2.549	-2.234	-2.060	-1.786	-1.346
3	0	-0.624	-1.216	-1.815	-2.329	-2.296	-2.201	-2.061	-1.809	-1.844
4	0	-0.259	-0.635	-1.128	-1.735	-1.838	-1.900	-1.920	-1.450	-1.406
5	0	-0.176	-0.460	-0.846	-1.346	-1.422	-1.466	-1.480	-1.054	-0.864
6	0	-0.134	-0.480	-1.093	-2.223	-2.315	-2.356	-2.419	-2.293	-2.148

续表 5-3-1 三次 Hermite 法插值结果

期数	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	-0.484	-0.144	-0.398	-1.574	-1.259	-2.070	-2.582	-3.333	-3.83
2	-2.586	-2.438	-3.011	-4.371	-4.478	-4.769	-6.235	-6.565	-7.19
3	-3.731	-3.335	-4.077	-5.608	-6.133	-6.607	-7.602	-7.540	-7.62
4	-2.177	-1.979	-2.535	-3.531	-4.092	-4.247	-5.984	-6.475	-7.23
5	-1.648	-1.274	-1.780	-2.767	-2.841	-3.323	-5.216	-5.874	-6.79
6	-3.257	-3.211	-3.832	-5.112	-4.767	-5.586	-7.304	-7.754	-8.57

5.4 回归分析

仍以上面的 5 号点数据为例，从其插值的图像容易看出，该点的沉降趋势呈曲线变化，初步选定用 4 次及以上阶次多项式来拟合该点的变化过程，并从中选取一个合适的多项式来拟合该点，并做相应的分析、预测和精度评定。在 Matlab6.5 下，编写了“nihe.m”程序，分别进行 4、5、6、7 次多项式拟合，运行后显示曲线如图 5-4-1 所示。

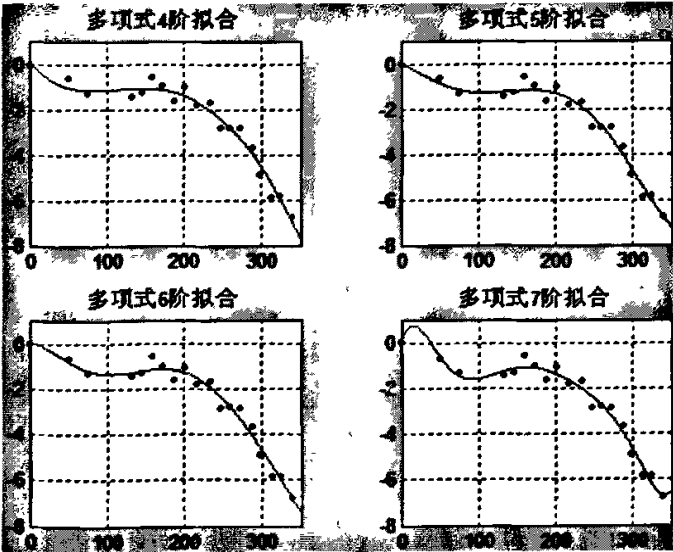


图 5-4-1 5 号点的不同阶次拟合图

从图上容易看出，4 次、5 次和 6 次的结果较相近，而随着多项式次数的升高，到了 7 次就出现很明显的龙格现象（参阅第四章第二节），根据我们的数学知识，在龙格现象发生以前的多项式次数中，应该有更好的拟合结

果。下面我们具体分析在前三次情况下的拟合情形，为了便于以后的预测和相应的结果评价，选定前 18 期的观测数据进行分析。建立 y 关于 x 的多项式函数，选择观测天数为 x ，累计的沉降量为 y ，由于 x 相对于 y 数值显得很大，尤其是在 5 次多项式拟合的情况下， x 的值最大可达到 10^{13} ，这样拟合所得的系数将会很小，为了避免这种情况的发生，取 $x/100$ 后的值代入计算，当然，这样不会对最终的拟合结果有任何影响。编译程序为“huigui.m”，运行后结果如图 5-4-2、5-4-3 和 5-4-4 所示。

4次多项式拟合					
多项式系数b(0)-b(4)值为					
0.0740	-3.5787	3.4025	-1.1451	0.0779	
相应的置信区间为					
-0.7845	-7.1974	-1.1727	-3.2259	-0.2330	
0.9125	0.0399	7.9777	0.9356	0.3887	
相关系数 r^2 = 0.9620					
F = 82.3408					
与F对应的概率p = 0.0000					

图 5-4-2 4 次多项式拟合结果

5次多项式拟合					
多项式系数b(0)-b(5)值为					
0.0231	-1.4516	-1.9260	3.3574	-1.4743	0.1881
相应的置信区间为					
-0.8355	-7.6449	-15.2646	-7.4129	-5.1290	-0.2531
0.6816	4.7418	11.4086	14.1278	2.1803	0.6292
相关系数 r^2 = 0.9646					
F = 65.3498					
与F对应的概率p = 0.0000					

图 5-4-3 5 次多项式拟合结果

6次多项式拟合						
多项式系数b(0)-b(6)值为						
0.0131	0.5853	-6.8745	11.7115	-6.0740	1.3733	-0.1160
相应的置信区间为						
-0.6892	-13.2643	-52.8722	-36.7129	-33.9610	-5.7597	-0.6124
0.9154	14.4349	35.1233	63.1359	21.8130	8.5083	0.5805
相关系数 r^2 = 0.9650						
F = 50.5520						
与F对应的概率p = 0.0000						

图 5-4-4 6 次多项式拟合结果

三种情况下，相关系数 r^2 分别为 0.9620、0.9646 和 0.9650，都接近于 1，说明回归方程是显著的，当然其值越大说明效果越明显； F 值分别为 82.3408、65.3498 和 50.5520，查 F 分部分位数表得 $F_{1-\alpha}(k,n-k-1)$ 分别为 3.18、3.11 和 3.09，(其中 $\alpha=0.05$ 为显著水平， k 为拟合的多项式次数， n 为原数据个数)很明显三种情况下的 F 值都大于其对应的 $F_{1-\alpha}(k,n-k-1)$ 值，且 F 值越大说明回归方程越显著；与 F 对应的概率 p 几乎为 0，显然 $p < \alpha$ ，即回

归模型均成立，三种情况均能很好地拟合原始数据。为了确定唯一的拟合模型，做初步比较：（1）相关系数比较，三种情况下，数值大小相当，5次和6次的较大；（2） F 值比较，4次和5次的较大，说明回归方程比较显著；（3）与 F 对应的概率 p ，由于数值都很小，几乎为0，难以得出结论。为了进一步分析，下面比较了三种情况下各自拟合的残差和其置信区间，如图5-4-5、5-4-6和5-4-7所示。

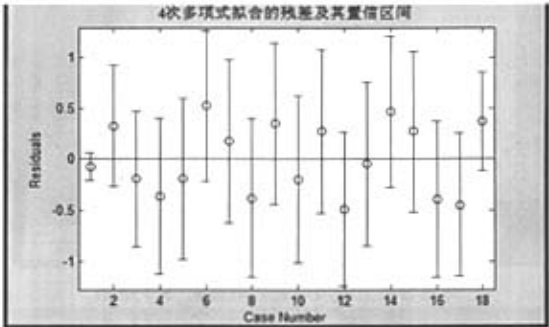


图 5-4-5 4 次拟合残差及其置信区间

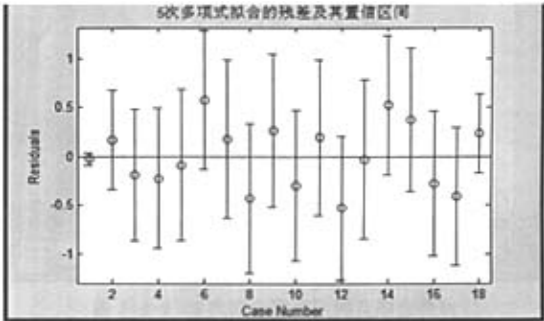


图 5-4-6 5 次拟合残差及其置信区间

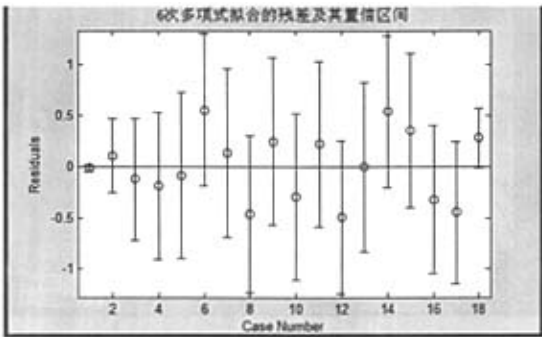


图 5-4-7 6 次拟合残差及其置信区间

从三组残差图容易看出，5次和6次情况下残差距零点比4次情况下的

较近，在 6 次情况下的最后一点的置信区间，只是刚好包含零点，说明在高次多项式情况下，容易存在不确定的因素，如龙格现象等。为了更直观地分析，分别比较了各次情况下拟合图和其置信区间图，如图 5-4-8、5-4-9 和 5-4-10 所示。

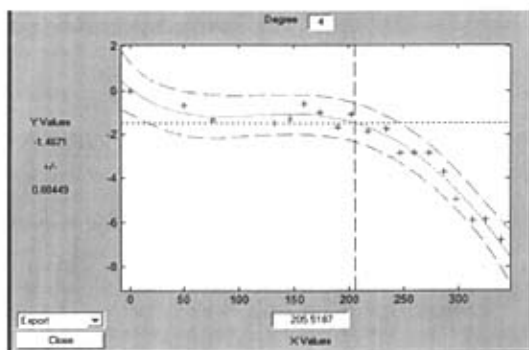


图 5-4-8 4 次拟合置信区间及拟合曲线

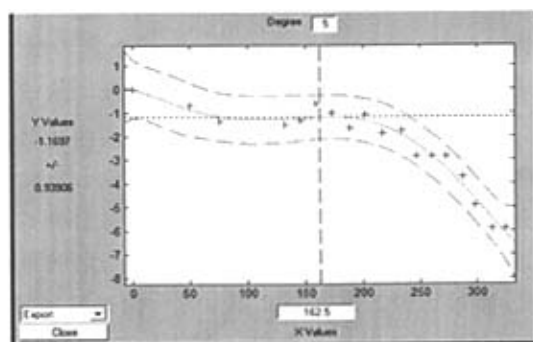


图 5-4-9 5 次拟合置信区间及拟合曲线

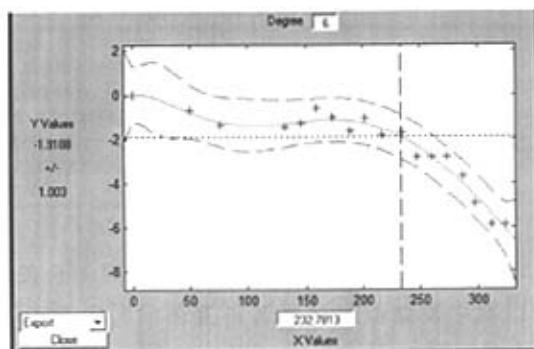


图 5-4-10 6 次拟合置信区间及拟合曲线

从其中的红色曲线（上下的曲线）可以看出，采用 6 次多项式拟合的结果，容易在两端出现异常情况，不宜用其进行预测。通过上面的比较可得，4 次和 5 次多项式拟合的结果较好。下面进行量化分析，对 4 次和 5 次的拟合结果做比较，如图 5-4-11 所示。

计算4阶和5阶拟合函数的值与实际值的差值									
Columns 1 through 9									
0	-0.6800	-1.3500	-1.4800	-1.3000	-0.5000	-0.9900	-1.8500	-1.0800	
0.0740	-1.0030	-1.1572	-1.1187	-1.1082	-1.1197	-1.1858	-1.2733	-1.4138	
0.0231	-0.8513	-1.1841	-1.2528	-1.2087	-1.1753	-1.1669	-1.2179	-1.3255	
-0.0740	0.3230	-0.1928	-0.3613	-0.1918	0.5197	0.1758	-0.3767	0.3538	
-0.0231	0.1713	-0.1859	-0.2272	-0.0913	0.5753	0.1789	-0.4321	0.2655	
Columns 10 through 18									
-1.8400	-1.7300	-2.8500	-2.8400	-2.8500	-3.8900	-4.9300	-5.8800	-5.8700	
-1.6447	-2.0076	-2.3654	-2.7987	-3.3121	-3.9593	-4.5394	-5.4355	-5.2420	
-1.5415	-1.9227	-2.3187	-2.8048	-3.3743	-4.0658	-4.6494	-5.4879	-5.1055	
-0.1953	0.2778	-0.4846	-0.0413	0.4821	0.2593	-0.3906	-0.4445	0.3720	
-0.2985	0.1927	-0.5313	-0.0352	0.5243	0.3758	-0.2808	-0.4121	0.2355	
4阶的残差为: 2.0086									
5阶的残差为: 1.8738									

图 5-4-11 4 次和 5 次的拟合值与残差值

上面的数据中每一行分别显示了：原始数据、4、5 阶的拟合值、4、5 阶拟合值与原始数据的差值，比较最后两行数据可以发现，5 阶时的差值基本上要比 4 阶时的小，后面的残差（差值的平方和）更说明了这一点。

经过上面的 4 种比较，综合分析每一次的比较结果，最终选定 5 次多项式进行该点沉降量的拟合及预测，拟合的结果及精度在上面已经做了大量的分析，下面来进行更重要的一步：用 5 次多项式进行预测。按照开始的想发，用前 18 期的数据进行多项式拟合，用拟合出的多项式进行第 19 期观测值的预测，结果如图 5-4-12 所示。

当 x0 = 339	
采用 5 阶多项式的预测结果为:-6.7755	
相应的置信区间为: -8.8441	-4.9068
采用 4 阶多项式的预测结果为:-7.2859	
相应的置信区间为: -8.7009	-5.8709
采用 6 阶多项式的预测结果为:-7.0757	
相应的置信区间为: -9.7388	-4.4127

图 5-4-12 三个阶次的预测结果

为了进一步的分析和比较，上图中同时计算了在 4 次和 6 次多项式情况下的预测值和置信度为 95% 的置信区间。原始数据中第 19 期的沉降量为 -6.79，在 5 阶时的预测与之差值仅为 -0.0145，相对误差为 0.214%，误差很小；在 4 阶时预测值与之差为 0.4959，相对误差为 7.303%，误差较大；在 6 阶时差值为 0.2857，相对误差为 4.208%，也较大但可以接受，可见在 5 次

时的预测精度是最高的,说明选用该次数多项式对该点进行拟合、预测的正确性,通过4次和6次的比较也进一步说明了用多项式进行该数据拟合的可靠性和正确性。

下面按照上述的步骤,经过多种分析比较,选择合适的多项式次数分别对其余各点进行多项式拟合和预测,并进行相应的精度评定。对应于点1、2、3、4、6,分别选定拟合的次数为:4、4、6、4、5,画出的拟合及置信区间如图5-4-13~图5-4-17所示。

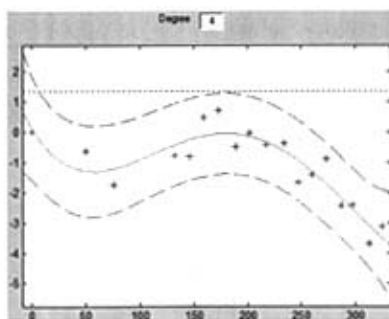


图 5-4-13 1 号点的 4 次拟合结果

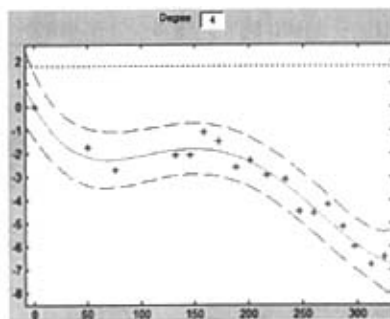


图 5-4-14 2 号点的 4 次拟合结果

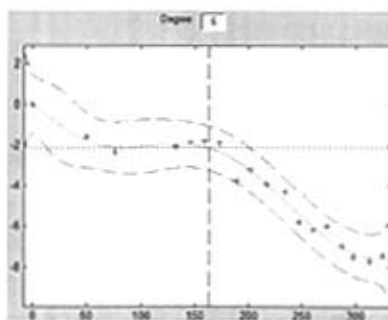


图 5-4-15 3 号点的 6 次拟合结果

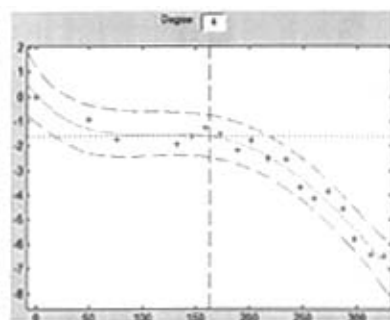


图 5-4-16 4 号点的 4 次拟合结果

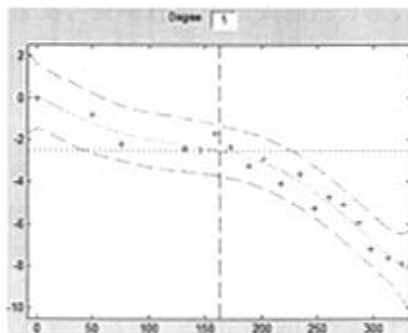


图 5-4-17 6 号点的 5 次拟合结果

对应于各个点，选定好拟合的次数后，紧接着就用选定的该次数多项式对该点进行预测分析，结果如表 5-4-1 所示。

表 5-4-1 所有点的预测结果

点名	拟合次数	预测值	置信区间			实测值	差值	相对误差
1	4	-3.916 2	-5.974 5	-1.858 0		-3.83	0.086 2	2.25
2	4	-6.817 2	-8.487 6	-5.146 9		-7.19	-0.372 8	5.18
3	6	-7.576 0	-10.480 0	-4.671 9		-7.62	-0.044 0	0.58
4	4	-7.478 4	-8.799 8	-6.157 0		-7.23	0.248 4	3.44
5	5	-6.775 5	-8.644 1	-4.906 8		-6.79	-0.014 5	0.21
6	5	-8.445 9	-10.852 2	-6.039 7		-8.57	-0.124 1	1.45

上面的数据中，除拟合次数和相对误差外，其余的单位均为 mm，2 号点的预测值相对误差较大，画出所有点的变化曲线图如图 5-4-18 所示。

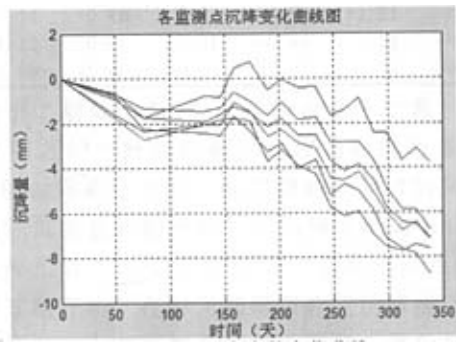


图 5-4-18 所有点的变化曲线

由于图形较为紧凑，选取时间区间为 250 天~300 天所对应的曲线进行区分，从上至下对应的点分别为：1、5、4、2、6、3，通过分析，容易发现 2 号点刚开始的沉降量变化最大（图 5-4-18 中红线所示），最后两期的变化量也较大，变化趋势变得复杂，仅用多项式回归的方法难以达到很高的精度，但总的来说相对误差为 5.18 还是可以接受的。综合分析，6 个点的相对误差平均值为 2.19，精度很高，说明选用多项式回归方法，进行该组数据拟合和预测是可靠和正确的。

5.5 灰色系统分析

在做灰色系统分析之前，应对数据进行相应的检验，按照第四章第二节的公式要求，由于灰色系统所要求的为等周期的观测数据，而就上面的数据而言很难达到要求，于是做相应的变换如表 5-5-1 所示。

表 5-5-1 经过变换后的数据

期数 (天)	1 (0)	2 (50)	3 (26)	4 (56)	5 (14)	6 (13)	7 (14)	8 (16)	9 (13)	10 (15)
1	0	-0.63	-1.12	0.98	-0.05	1.30	0.24	-1.21	0.45	-0.38
2	0	-0.75	-1.96	0.65	-0.02	1.00	-0.41	-1.10	0.30	-0.62
3	0	-1.59	0.26	0.27	0.22	0.06	-0.11	-1.85	0.57	-0.73
4	0	-0.92	-0.82	-0.18	0.31	0.38	-0.27	-0.68	0.40	-0.74
5	0	-0.68	-0.67	-0.13	0.18	0.70	-0.39	-0.66	0.59	-0.78
6	0	-0.78	-1.45	-0.19	-0.12	0.84	-0.65	-0.91	0.37	-1.17

续表 5-5-1 经过变换后的数据

期数 (天)	11 (17)	12 (13)	13 (13)	14 (13)	15 (14)	16 (11)	17 (15)	18 (12)	19 (14)
1	0.04	-1.29	0.26	0.52	-1.56	0.03	-1.28	0.57	-0.70
2	-0.21	-1.36	-0.07	0.37	-0.98	-0.85	-0.78	0.35	-0.75
3	-0.37	-1.51	-0.39	0.19	-0.99	-0.56	-0.21	0.31	-0.19
4	-0.03	-1.14	-0.46	0.3	-0.72	-1.21	-0.65	-0.08	-0.72
5	0.11	-1.12	0.01	-0.01	-0.84	-1.24	-0.95	0.01	-0.92
6	0.42	-1.59	0.50	-0.33	-0.87	-1.23	-0.46	-0.24	-0.71

表格中，对应于“期数（天）”一项的内容分别表示为观测的周期数和本次观测与上次观测之间的时间间隔，对应的数值为当次变化量（单位为mm）。取 1 号点为例做周期行分析：前四期的观测时间间隔没有任何规律可言，从第五期开始，每次观测的平均时间间隔大约为 14 天，理论上经过等周期变换后，选取前几期（一般为 4~5 期）数据便可以进行灰色系统分析；变化量分析：从第五期开始，在时间间隔很相近的情况下，该点的沉降量变化很复杂，可以参考上一小节的拟合图或本章第三节的插值图，从直观上来说难以满足灰色分析所要求的准指数变化规律。

为了便于灰色分析，从第二节的原始数据表中选取了各点的具有相同变化趋势和近似周期的数据，分别为 9、11、13、15 和 17 期，取前四期的数值进行分析并预测下一期的变化量，选取的数据如表 5-5-2 所示。由于周期（时间间隔）不等，先对该数据进行等周期变换，取时间间隔为 28.3 天，选用的插值方法为本章第三节所选定的三次 Hermite 插值法。用插值所得的数据进行灰色分析，并预测下一周期（28.3 天后）的数据，即 315.3 天的数据，而原始数据中只有第 313 天的数据，由于时间相差较短，取其作为参考。下面以 1 号点为例，进行灰色分析，编译程序为“huiseyuce.m”，运行后显示结果如图 5-5-1 所示。

表 5-5-2 选取的实验数据

观测时间(天)	202 (0)	234 (32)	260 (26)	287 (27)	313 (26)
1	-0.04	-0.38	-1.41	-2.45	-3.7
2	-2.29	-3.12	-4.55	-5.16	-6.79
3	-3.17	-4.27	-6.17	-6.97	-7.74
4	-1.78	-2.55	-4.15	-4.57	-6.43
5	-1.06	-1.73	-2.84	-3.69	-5.88
6	-2.89	-3.64	-4.73	-5.93	-7.62

```
>> huisyuce
对原始数据的插值结果为:
-0.0400 -0.3185 -1.3584 -2.4500
光滑性检验:
9.5000 3.9332 1.4287
不满足光滑性要求!
准指数规律检验:
6.5335
不满足指数规律!
灰色分析:
拟合值为:
-0.0400 -0.8451 -1.3246 -2.7200
下一期预测值为:
-5.5854
精度评定: 后验差比值C为 0.1494
```

图 5-5-1 1号点灰色预测结果

表 5-5-3 对其余 5 个点的灰色分析结果进行了统计。

表 5-5-3 其余点的预测结果

点名	光滑性检验值			指数规律检验值	预测值	参考值	C
2	1.362 4	0.861 6	0.527 4	0.778 7	-6.725 4	-6.79	0.221 0
3	1.347 0	0.848 8	0.521 1	0.771 9	-9.028 2	-7.74	0.222 4
4	1.432 6	0.987 6	0.549 8	0.811 0	-6.193 0	-6.43	0.305 7
5	1.632 1	1.056 9	0.673 7	0.861 4	-5.408 6	-5.88	0.125 2
6	1.259 5	0.736 7	0.534 6	0.687 0	-7.609 1	-7.62	0.022 4

从上面的结果来看,在六个点的光滑性和指数规律都比较差(均小于 0.5 为满足要求)的情况下,用灰色分析方法对数据进行拟合及预测,其后验差比值 C 均小于 0.35,精度等级为“1 级(好)”,说明精度还是很高的(参照本论文第四章第三节第二小节)。其中 1、3 号点的预测值与参考值相差较大,分析如下:1 号点的光滑性检验和指数规律检验的数值很大,与灰色系统所要求的小于 0.5 相距甚远,这样预测的结果很不理想就在所难免;3 号点的数据在中间两期中变化量较大,致使预测的结果比参考值大了很多。综上所述,在工程实际中影响变形的因素又很多,而仅仅根据数学公式来进行预测实际的变化量,很难达到高精度的要求。在本节实验中,选用的数据,在不满足灰色系统要求的情况下,仍有部分(4 个)点有较高的预测精度,总体来说灰色系统预测的可靠性还是很高的。

5.6 本章小节

本章主要介绍了对应于第四章各种方法的实验。其中第一节是关于 GPS 基线向量网的数据处理,在 VC++6.0 平台下,编译了 GPS 基线向量网的自由网平差程序,在平差结果达到满意的情况下,将其结果分别转换为秩亏自由网平差和自由网拟稳平差的结果,这样对应于监测网的实际情况,我们可以选择适用的数据处理方法。第二节及以后是关于水准监测所获得成果的变形分析,其中第二节是关于奇异值的检验,经模拟验证所采用的方法是切实有效的,可以在实际中进行应用。第三节是关于数据的插值,介绍了四种插值方法,通过分析在比较其优劣的基础上,选定了三次 Hermite 插值法对数据进行等周期变换。第四节是回归分析,介绍了经过多种精度评定后,选择了次数更加合适的多项式进行数据的拟合及预测分析。从最终的结果来看,说明了选用多项式回归分析是正确可靠的,用该次多项式进行预测,结果是可取的。第五节灰色系统分析,由于采用的数据本身的缺陷,观测的周期不等,而且变化规律复杂等,在对原始数据进行变换处理后,并用本章第三节所分析的三次 Hermite 插值法对数据进行等周期变换,经初步检验分析,变换后的数据光滑性和指数规律检验都未能达到要求,在这种情况下,用灰色系统分析方法进行拟合及预测,所得的结果除两个点预测失败以外,其余各点的预测精度还是很高的,说明了灰色系统分析方法的适用性和高精度性。

6 结论和展望

本论通过文主要研究了变形监测的两个方面内容：一个是关于 GPS 监测网的优化和数据处理；再一个是关于常规水准监测方法所得数据的变形分析。主要结论如下：在 GPS 方面，本文从实际应用中分析了外业过程中所要注意的事项，以尽量提高外业的观测的精度和可靠性，在数据处理过程中，分析了针对不同的实际情况采用不同的数据处理方法，分别为：自由网平差、秩亏自由网平差和自由网拟稳平差，并编译程序实现了自由网平差的数据处理，并实现了由自由网平差的结果分别向后两种平差结果的转换。这样在实际中，便可以处理各种情况下的 GPS 监测网数据。在变形分析方面，选用某市一大楼一等水准沉降监测的数据进行实验，分别有奇异值检验、插值分析、数据的回归分析及灰色系统分析，经过实验研究表明：

(1) 在 GPS 控制网优化设计方面，探讨了在外业施测中采用多种方法，以提高网的精度和可靠性，并尽量降低成本。

(2) 在 GPS 变形监测网数据处理中，根据监测网有无基准点及基准点的稳定情况，分别采用了经典自由网平差，秩亏自由网平差和自由网拟稳平差的方法，实验表明这种方法更切合于工程实际，且精度是可靠的。

(3) 对水准数据的奇异值检验，由于在监测过程中，数据的读取、纪录、处理及录入等都难免需要人工参与，这样最终的结果就有可能存在人为误差，如数据的正、负号错误等，通过奇异值的检验，可以有效地发现数据中的奇异值，以便做进一步的检查。

(4) 数据的插补。在实际中由于各种原因的影响（如施工、天气等），获得的观测数据可能为非等周期的，或者由于多种原因导致数据的缺失，而为了进行变形分析，就需要等周期的数据，在这种情况下，就需要对原始数据进行插值。本文主要介绍了四种插值方法，分别为：分段线性插值，Lagrange 插值，三次样条插值和分段三次 Hermite（埃尔米特）插值，通过对这几种方法优劣的比较，最终选定了分段三次 Hermite 插值法来对数据进行插补。

(5) 回归分析。由于变形的不确定性，为了获得变形的总体趋势，需要对观测的数据进行拟合，在这一过程中多项式拟合的方法较为常用，而多项式拟合随着次数的升高，在其拟合图形的两端会出现龙格现象，为避免此种情况发生，在分析比较多种指标基础上，对不同点选用不同的多项式拟合次数，并对下一期的观测数据进行预测，结果表明该方法是切实有效的，预

测值是可靠的。

(6) 灰色系统分析。在变形监测过程中, 由于变形的情形是复杂的, 影响变形的因素又有很多, 这样在对变形数据进行拟合及预测过程中, 不能只采用一种方法, 而是需要采用多种方法进行比较分析, 这样才能得到比较可靠的结果, 进而为实际的工程服务。本文在进行灰色分析过程中, 在数据并不满足要求的情况下, 仍在多数点上达到了较高的预测精度, 说明了灰色系统分析方法具有很强的适用性。

由于各种原因, 本论文在研究变形监测数据处理和变形分析方法过程中, 存在一些不足, 主要有: (1) 关于 GPS 数据处理方面的, 在平差结果评定中, 仅用单位权中误差来评定结果的好坏, 未加入其它的精度评定指标; (2) 变化量的预测中采用了两种方法, 未加入其它更好的方法进行分析, 如 Kalman 滤波、人工神经网络、小波分析等。在论文的书写过程中, 通过对变形监测和变形分析的学习, 对这方面的知识和发展趋势有了更深入的了解, 作者认为本文的研究和分析可以从以下几个方面做进一步的探讨:

(1) 在 GPS 变形监测数据充足的情况下, 对 GPS 的变形监测进行相关分析。

(2) 在多项式回归分析中, 考虑到多种变形因素 (如气温等), 从而建立多元多项式回归分析模型, 那样势必提高模型拟合及预测的精度。

(3) 本文对水准监测数据进行了分析和预测, 在条件允许的情况下, 研究由其它监测方法 (如 GPS 技术等) 获得的三维方向上的变形分析。

(4) 在灰色分析中, 研究建立动态灰色预测模型和指数平滑法改进的灰色灰色模型^[39]。

(5) 在变形分析过程中, 加入其它的分析模型, 如时间序列分析模型, Kalman 滤波模型及人工神经网络模型等, 然后对模型进行比较分析, 以选定更适用的分析模型。

攻读硕士学位期间已发表的学位论文

1. 彭广亮, 徐爱功, 焦朋, 控制网数据处理及优化设计, 辽宁工程技术大学学报, 2005. 4, 第 24 卷增刊, P31~33

致 谢

时光荏苒，光阴似箭，转眼间两年半的硕士学习和生活即将告一段落，回顾这短短的两年多时间，感慨颇深。

首先，应该感谢我的导师徐爱功教授。徐老师的热心帮助和悉心指导，使我能在学校安心学习和愉快生活，顺利地完成毕业设计和学位论文的写作。徐老师深厚的学术造诣、严谨、求实的治学态度、朴实无华的生活作风、谦和儒雅的学者风范以及埋头苦干的工作精神，将使我毕生受益。两年多来，得到了徐老师多方面的关心、指导，在此表示深深地感谢！

其次，要感谢曾给过我关怀和指导的宋伟东教授、赵泉华老师以及我读本科时的赵长胜教授、马明栋教授和周兴东教授等，是他们的关心和爱护，使我得以成长和发展的，我将在心里永远地铭记并感激他们！

再次，我在学习过程中尤其是本论文的创作过程中，引用了大量的文献资料，给我的论文写作提供了巨大的帮助，在此对作者表示感谢！

还有，要感谢我的同窗好友姜志文硕士、张伟硕士、宋立杰硕士、宫雨生硕士、隋心硕士以及山东科技大学的蔡乾广硕士等，是这些同学的热心帮助为我解决了很多困难，在此祝愿他们工作顺利！

最后，是要感谢我的家人。求学多年，我的祖母、叔叔和婶婶一直全力支持我和鼓励我，在此表示感激。尤其是我的祖母，含辛茹苦把我抚养成人，因积劳成疾，病危之时我却没有及时赶到，未能见她老人家最后一面，深感悔恨，如今只能在心里对她深深地愧疚和思念着！还要感谢我的女朋友张丽娜，她和她的家人多年来一直默默地支持、照顾我，给我提供了各方面的帮助，在此表示深深地感激！

回首多年来求学路艰辛，是老师的指导、朋友的帮助，家人的关心使我成长至今，在此对所有曾给过我关心和帮助的人表示感谢，愿好人一生平安！

附录 A

表 1 GPS 基线向量原始数据

SDPL.0 版 观测值 HEAD				
WGS84	1	7	14	0.8
WTS	-2 474 926.843		4 056 416.776	4 240 604.318
HDT	-2 481 375.482		4 053 745.774	4 239 383.758
BBS	-2 480 310.102		4 053 343.911	4 240 199.648
BNS	-2 481 000.895		4 053 718.954	4 239 493.745
FBB	-2 480 207.714		4 053 092.506	4 240 472.502
SNZ1	-2 480 851.595		4 053 647.463	4 239 566.217
SNZ2	-2 480 433.116		4 053 521.426	4 239 929.188
SZD1	-2 480 392.786		4 053 509.881	4 239 962.884
BBS	WTS			
-5 383.241 7	2.434 657 1E-06			
-3 072.865 3	-1.909 068 9E-06	2.726 146 9E-06		
-404.685 7	-1.994 116 9E-06	2.107 507 0E-06	3.095 593 0E-06	
BNS	WTS			
-6 074.050 7	1.011 167 0E-06			
-2 697.821	-9.127 459 7E-07	2.130 821 0E-06		
-1 110.569 6	-1.328 068 9E-06	1.717 640 0E-06	3.670 011 0E-06	
FBB	WTS			
-5 280.871 7	7.917 460 0E-07			
-3 324.252	-9.638 970 4E-07	2.202 355 1E-06		
-131.808 1	-3.461 329 9E-07	6.117 180 1E-07	9.466 920 1E-07	
HDT	WTS			
-6 448.639 7	6.338 830 2E-07			
-2 670.995 9	-7.849 279 8E-07	1.628 106 0E-06		
-1 220.557 3	-7.619 769 9E-07	1.353 886 0E-06	1.734 148 0E-06	
SNZ1	WTS			
-5 924.750 5	5.169 444 2E-06			
-2 769.319 8	-8.377 795 9E-06	1.575 642 3E-05		
-1 038.109	-7.045 141 0E-06	1.317 790 3E-05	1.221 276 6E-05	
SNZ2	WTS			
-5 506.279 4	1.333 757 0E-06			
-2 895.327 1	-1.332 446 0E-06	3.224 494 1E-06		
-675.109 9	-1.199 003 0E-06	3.959 837 2E-06	7.218 126 0E-06	
SZD1	WTS			
-5 465.952	2.127 625 1E-06			
-2 906.873 1	-2.303 811 0E-06	4.258 895 8E-06		
-641.431 5	-7.555 290 2E-07	1.851 019 0E-06	2.066 304 9E-06	
BBS	HDT			
1 065.381 1	2.439 104 9E-06			
-401.868 7	-1.912 357 0E-06	2.728 577 1E-06		
815.886 4	-1.999 764 9E-06	2.111 680 9E-06	3.102 766 0E-06	

续表 1 GPS 基线向量原始数据

BNS	HDT			
374.587 5	1.036 701 0E-06			
-26.826 6	-9.406 439 9E-07	2.161 304 1E-06		
109.984 2	-1.362 794 0E-06	1.755 716 0E-06	3.749 066 1E-06	
FBB	HDT			
1 167.768 5	4.988 151 9E-06			
-653.274	-9.742 419 0E-06	2.529 505 0E-05		
1 088.741	-3.764 329 9E-06	9.557 547 9E-06	5.316 367 2E-06	
SNZ1	HDT			
523.887 5	5.169 444 2E-06			
-98.317	-8.377 795 9E-06	1.575 642 3E-05		
182.455 6	-7.045 141 0E-06	1.317 790 3E-05	1.221 276 6E-05	
SNZ2	HDT			
942.366 3	1.333 757 0E-06			
-224.354 5	-1.332 446 0E-06	3.224 494 1E-06		
545.426 9	-1.199 003 0E-06	3.959 837 2E-06	7.218 126 0E-06	
SZD1	HDT			
982.686 3	2.073 099 0E-06			
-235.898 7	-2.249 345 0E-06	4.204 489 9E-06		
579.122 9	-7.351 189 9E-07	1.830 631 0E-06	2.058 664 0E-06	
WTS	HDT			
6 448.639 7	6.336 870 2E-07			
2 670.995 9	-7.847 650 1E-07	1.627 993 0E-06		
1 220.557 3	-7.621 520 1E-07	1.354 050 0E-06	1.734 789 0E-06	

参考文献

- [1] 黄声享, 尹晖, 蒋征. 变形监测数据处理[M], 武汉: 武汉大学出版社, 2003.
- [2] 张正禄. 工程测量学[M], 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
- [3] Joseph Fiksel. Risk analysis in the 1990s[J], Risk Analysis, 1990, 10(2):195~196.
- [4] 高伟, 徐绍铨. 长江中游大地形变 GPS 监测及精度分析[J], 长江科学院院报, 2005. 2, 22 (1), 28~31.
- [5] 肖荣, 胡友健, 王晓华. GPS 技术在变形监测中的应用综述[J], 工程地球物学报, 2005. 4, 2 (2), P160~165.
- [6] 张勤, 蒋廷臣, 王秀萍. 小波变换在变形监测中的应用研究[J], 测绘工程, 2005. 3, 14 (1), P8~10.
- [7] 刘基余. GPS 卫星导航定位原理与方法[M], 北京: 科学出版社, 2003.
- [8] Zhu Wenyao, etc. Crustal Motion of Chinese Mainland Monitored by GPS[J], Science in China (Series D), 2000, 43(4), 394~400.
- [9] 徐绍铨, 程温鸣, 李征航. GPS 在大坝和滑坡安全监测中应用的研究[J], 水力发电 2003. 29 (1), 61~64.
- [10] Xu Caijun, etc. GPS Measurement of Present-day Uplift in The Southern Tibet[J], Earth Planets Space, 2000, 52, 735~739.
- [11] 兰孝奇. GPS 精密变形监测数据处理方法及其应用研究, 河海大学, 博士学位论文, 2005. 3.
- [12] 王晓华, 胡友健, 肖荣. GPS 技术应用于变形监测的综述[J], 淮阴工学院学报, 2005. 6, 14 (3), P36~39.
- [13] 李征航, 黄劲松. GPS 测量与数据处理[M], 武汉: 武汉大学出版社, 2005.
- [14] 周拥军, 施一民. GPS 网的模拟优化设计[J], 测绘工程, 2001. 9.
- [15] 兰孝奇, 华锡生, 黄晓时, 崔晓东. GPS 监测大坝三维变形的应用[J], 水电自动化与大坝监测, 2004. 8, 28 (4), 48~50.
- [16] 童君莉. 浅析 GPS 控制网优化设计[J], 科技广场, 2005. 5, 38~39.
- [17] 艾则孜·买提吐尔逊. 变形监测网优化设计的研究, 河海大学硕士学位论文, 2001. 6.
- [18] 彭广亮, 徐爱功, 焦朋. 控制网数据处理及优化设计[J], 辽宁工程技术大学学报, 2005. 4, 24, 31~33.
- [19] 马明栋. VC++6.0 控制测量程序设计[M], 内蒙古: 内蒙古大学出版社, 2002.
- [20] 黄明华, 平面控制网优化设计方法探讨[J], 西部探矿工程, 2005. 1, 总第 104 期.
- [21] 王建敏, 石金峰, 王鸿雁. GPS 网的优化设计与粗差剔除[J], 辽宁工程技术大学学报, 2003. 4, 22 (2), 192~195.
- [22] 汤璞, 沈洁. GPS 工程控制网的布设及数据处理有关问题的探讨[J], 城市勘察, 2004, 1, 2~4.
- [23] 栾元重, 韩李涛. 矿区 GPS 变形监测与变形分析[J], 测绘工程, 2002. 6, 11 (2), 49~51.
- [24] 李国波, 方广杰. GPS 测量控制网网形的优化设计[J], 湘潭师范学院学报(自然科学版), 2004. 9, 26 (3), 12~14.
- [25] Shanlong Kuang. A strategy for GPS survey planning: choice of optimum baselines[J]. Surveying and Land Information System. Vol. 54. No. 4. 1994. 187~201.
- [26] 李学义, 郝建军, 韩云峰. GPS 网的优化设计与成果质量评估[J], 黑龙江水利科技, 2004. 1 59~59.
- [27] 全球定位系统(GPS)测量规范(GB/T18314-2001) [M], 北京: 中国标准出版社, 2001. 5.

- [28] 陶本藻. 自由网平差与变形分析[M], 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 2001.
- [29] 赵长胜, 石金峰. 测量平差[M], 北京: 教育科学出版社, 2000.
- [30] 白迪谋, 李仲勤. 工程建筑物变形观测和变形分析[M], 成都: 西南交通大学出版社, 2002.
- [31] 吴勃英. 数值分析原理[M], 北京: 科学出版社, 2003.
- [32] 尹志政, 张家生. 灰色模型在大坝变形监测与预报中的应用[J], 研究与探讨, 2002. 4, 13~15.
- [33] 庄楚强, 吴亚森. 应用数理统计基础[M], 广州: 华南理工大学出版社, 2003.
- [34] 蒋泽中, 陈天利, 谢涛, 灰色理论在高层建筑沉降监测中的应用[J], 建筑技术开发, 2003. 8, 30 (8), 41~43.
- [35] 鹿利军, 杜子涛. 灰色系统理论在建筑物变形分析中的应用[J], 测绘与空间地理信息, 2006. 2, 29 (1), 95~97.
- [36] 兰孝奇, 严红萍, 刘精攀. 灰色系统预测模型在沉降监测中的应用[J], 勘察科学技术, 2006, 1, 55~57.
- [37] 马明栋, 王之勋, 沈蔚, GPS 基线向量网平差模型与程序设计[J], 辽宁工程技术大学学报 (自然科学版), 2001. 6, 20 (3), 275~277.
- [38] 宋兆基, 徐流美. Matlab 6.5 在科学计算中的应用[M], 北京, 清华大学出版社, 2005.
- [39] 史玉峰, 宁津生. 指数平滑法改进灰色模型及其在变形数据分析中的应用[J], 煤炭学报 2005. 4, 30 (2), 206~209.

作者: [彭广亮](#)
学位授予单位: [辽宁工程技术大学](#)

相似文献(10条)

1. 期刊论文 [罗天文](#). [LUO Tian-wen](#) 贵阳市花溪水库大坝水平变形监测控制网的优化设计 -水利科技与经济

2007, 13(6)

从精度、可靠性、建网费用、灵敏度和可区分度等分析入手,结合贵阳市花溪水库大坝水平位移监测控制网进行了研究,对高精度网的优化设计和具体的实施结果进行比较分析。

2. 学位论文 [岳东杰](#) 水利水电工程变形监测中GPS技术与数据处理研究 2006

随着科学技术、电子技术的飞速发展,新的监测技术也不断引入到水利水电工程的变形监测中,新技术的应用必然带来监测技术、数据处理等一系列的技术问题需要解决。GPS作为现代测量技术的代表,因其独特的优点近年也逐渐在水利水电工程变形监测领域发挥作用。滑坡、高边坡、大坝的变形监测越来越需要这种自动化程度高、精度高的技术。但由于GPS有别于常规的监测技术,它本身获取的数据以及变形监测数据序列都需要进行有效的处理,才能满足变形监测的需要。GPS变形监测中,各种误差影响的分析与有效处理;GPS变形监测网的优化设计与平差理论;基准的选取与统一;变形监测数据序列的分析与处理。针对上述亟待解决的问题,本文主要在下列几个方面展开研究,并取得了如下成果:

1. 在分析GPS测量过程中的误差来源与影响规律的基础上,深入研究与分析了不同组合观测量对GPS处理结果的影响,对不同观测量的组合的影响进行了试验分析,得出GPS变形监测中观测量的优选方法。

2. 系统分析了GPS网的质量标准、优化设计,推导了GPS变形监测网平差的统一模型,提出基于灵敏度的GPS变形监测网的网形设计技术与方法。根据GPS变形监测网的特点,分析了GPS网的质量标准;推导了GPS变形监测网平差的统一模型,采用该模型可以实现不同期GPS观测的基准统一,避免将系统误差引入变形量,影响变形分析的可靠性。

3. 根据GPS网的特点提出基于稳健估计的GPS变形监测网的基准选取与统一,将稳健估计与坐标转换相结合,达到稳定统一基准的目的。通过稳健估计不但可以发现不稳定点,同时也实现了两期基准的统一。

4. 在回顾与分析GPS周跳探测与修复方法与技术的基础上,提出GPS周跳探测与修复的小波分析技术。深入分析了周跳的特点以及不同观测量组合中周跳的小波变换表现,对GPS周跳探测的小波变换技术提出了指导性意见。

5. 研究提出了基于小波分析的综合分析预测模型,将小波分析、时间序列分析等进行有机结合,达到变形分析预报的目的。小波分析技术具有较好的时频分析能力,可以将变形序列根据不同频率进行分离,从而较好地显示变形序列的规律,以便采用恰当的模型进行描述。时序分析具有提取弱信号的能力,但时序分析建模又对序列提出了平稳性的要求,这样大大限制了时间序列处理实际问题的能力。将不同的处理方法有机结合,实现对序列的综合分析,经理论分析与实际验证,该方法可以大大提高序列的分析预测精度。

3. 期刊论文 [陶华学](#). [王允选](#). [Tao Huaxue](#). [Wang Youxuan](#) 现代变形监测多目标非线性动态优化设计的一个新方法 -

勘察科学技术1999, "" (3)

变形监测网在空间和时间上都是动态的,在变形监测优化设计模型中,绝大多数函数关系都是非线性的,在优化设计中采用多项指标综合评价决策方案的优劣,更科学、合理和准确。针对这点,该文提出了多目标非线性动态优化设计的一个新方法。

4. 期刊论文 [朱龙元](#). [万先斌](#) 柘林水库主坝区变形监测平面网优化设计 -江西水利科技2004, 30(z1)

根据柘林水库主坝区的特点及规范要求,采用程序通过多个方案优化设计选择一个最优方案,并估算出该网精度指标及可靠性指标。

5. 学位论文 [谢润华](#) 深基坑开挖的变形规律及内支撑优化设计研究 2005

本文在回顾和总结了深基坑围护结构的研究现状和发展趋势的基础上,分析了深基坑工程常用的几种设计方法及各自的特点和适用范围。由于在深基坑围护体系的设计和施工中,现场监测已成为确保基坑工程成功的重要因素,本文在深入分析了瑞虹新城二期商场与会所深基坑工程监测数据及桩基试验资料的基础上,提出了深基坑变形的一般规律、相关的预测方法和桩基的设计方法。

由于有限单元法已逐渐成为研究深基坑变形的有效工具,本文对有限元的理论进行了一般介绍,然后运用考虑材料非线性问题的有限元法来模拟瑞虹新城二期商场与会所基坑开挖过程,并将计算结果与实测数据进行比较来分析深基坑工程在不同施工阶段的变形和受力规律。

运用有限元程序对影响围护结构内力与变形的因素(包括连续墙刚度、插入深度、支撑刚度及被动区土体加固等)进行研究,提出了如何合理选用深基坑围护设计参数的一些方法。然后本文对深基坑优化设计的方法进行了一般介绍,并利用有限元分析的一些结论,对围护结构内支撑系统的优化设计提出意见,供设计施工人员参考。

6. 期刊论文 [彭元生](#). [张可能](#). [杨传德](#). [Peng Yuansheng](#). [Zhang Keneng](#). [Yang Chuande](#) 许家洞古滑坡复活特性分析

与治理方案优化 -岩土工程技术2007, 21(2)

从地貌形态、古滑坡特征调查、滑坡发育的地质环境和滑坡变形监测分析,认为许家洞斜坡原来为一古滑坡;并基于此进行了滑带土抗剪强度的试验分析和滑坡稳定性对地下水位的敏感性分析,提出了滑坡治理设计的优选方案,经工程实践证明达到了降低工程造价和确保治理效果等目的,也可为类似滑坡的调查与治理提供参考。

7. 学位论文 [齐鑫](#) 预应力锚杆肋梁和土钉墙复合支护结构的模拟研究 2005

预应力锚杆肋梁和土钉墙复合支护结构是把预应力锚杆肋梁支护结构和土钉墙支护结构结合使用的新兴的基坑支护结构。是在实践的基础上总结出来的支护方式,缺乏使用的理论依据和合适的设计方法。本文依据实际的基坑支护,总结出了切实可行的设计方法。

本文总结当前流行的支护结构,并以此为基础,重点分析了预应力锚杆肋梁支护结构。用有限元软件sap对用预应力锚杆肋梁方法支护的基坑进行计算。并把这种支护方式和传统的支护结构锚桩支护、土钉支护进行了比较,相同基坑用预应力锚杆肋梁支护,基坑的最大水平位移是6.49mm,纵横肋梁的最大弯矩发生在纵梁上,值是26.19kN·m,锚杆的最大抗拔力205.26kN;锚桩支护的桩体最大弯矩204.23kN·m,锚桩支护不能计算除桩体之外的位移,两种支护用材比较,预应力锚杆肋梁支护结构相对于锚桩结构大约可以节省20%混凝土和40%钢筋。预应力锚杆肋梁支护和土钉墙支护比较,预应力锚杆肋梁支护主动控制变形,支护结构整体性好;土钉支护被动控制变形,用大力神软件计算的土钉的最大位移是7mm,土钉支护的土体的位移不能计算。这说明预应力锚杆肋梁支护结构在主动控制变形,减小基坑变形量,平衡受力等方面优于传统的锚桩支护和土钉墙支护。

经过对预应力锚杆肋梁支护结构的受力机理、变形特点、纵横肋梁在支护中起的作用的了解。并充分考虑土钉墙支护结构的特点。设计试验,依据实际施工的基坑,用测斜管测的基坑的深层水平位移、钢筋计测的纵横肋梁中钢筋的应力,应变片测的锚杆应变,处理得出预应力锚杆肋梁和土钉墙复合支护结构实际工作时的纵横肋梁承受的弯矩、锚杆承受的轴力、基坑开挖面的变形情况,并以此为依据寻找合适的设计方法。

在广泛了解基坑设计方法的基础上,经过比较,选择用数值方法作为预应力锚杆肋梁和土钉墙复合支护结构的设计方法。用大型有限元程序ANSYS作为解决这个问题的手段。对于涉及的材料:土体采用理想弹塑性本构关系;混凝土、钢筋采用线弹性本构关系。为土体、混凝土、锚杆、纵横肋梁选择恰当的单元类型,建立合适的计算模型,实际模拟预应力锚杆肋梁和土钉墙复合支护的基坑在自重作用下的性状。在基坑的-7m、-10m、-15m处测出的预应力锚杆的最大轴力分别为40.55kN、82.024kN、70.204kN;相对应的模拟值为41.514kN、79.018kN、68.046kN。基坑支护的纵横肋梁的最大弯矩实测值,纵梁24.19kN·m、横梁12.78kN·m;模拟值纵梁25.36kN·m、横梁14.35kN·m。测量基坑水平位移的测斜管是从-3m处开始测量的,测的-3m处的位移25.03mm,模拟的结果是26.01mm。通过模拟数值和实际测的数据的对比,可以得出下结论,数值模拟可以准确的计算出预应力锚杆肋梁和土钉墙复

合支护基坑的受力、变形情况，并容易发现设计中的不足和缺陷，直观的进行设计优化，达到设计的最佳效果。

本文的研究工作体现了理论研究与实际应用的有机结合，对基坑的设计方法进行了尝试性的拓展，为预应力锚杆肋梁和土钉墙复合支护结构提供了方便可行的设计方法，并用实际测出的数据进行了验证。同时也为相关领域的研究工作提供了借鉴。

8. 期刊论文 裴灼炎,赵全麟,朱丽如 三峡永久船闸高边坡变形监测设计及成果分析 -人民长江2001, 32(11)

三峡永久船闸高边坡变形及稳定是船闸施工安全和运行正常的变形量,掌握岩体变形特性,进而分析预测岩体的变形趋势,对指导边坡开挖及动态设计,确保船闸后期施工和运行期的安全是至关重要的课题.变形监测的优化设计、成功实施及准确的监测成果是完成这个课题的重要保证.永久船闸监测设计遵照“突出重点,兼顾全局,统一规划,分期实施”的总原则进行,变形监测项目主要有表层岩体变形监测,深层岩体变形监测.永久船闸高边坡变形监测系统主要由水平和垂直位移监测网、监测点、倒垂线、引张线、伸缩仪等项目组成,通过三峡工程永久船闸变形监测的设计与实施,证实三峡永久船闸高边坡变形监测资料能正确反映岩体变形情况,为危险块体及岩体裂缝的处理及时提供了准确的监测数据,使施工措施和设计更完善.

9. 学位论文 侯智勇 滑坡变形监测信息管理系统的集成化开发与研制 2004

本文针对大地测量法滑坡周期性变形监测数据处理过程中一些问题,采用系统集成的思想,在VisualC++开发平台下,集成Access、MATLAB、MapObjects、Office等优秀软件和功能,初步设计和实现了滑坡变形监测信息管理系统。

本文描述了系统集成的基础—COM和常用的集成方法,提出了本系统的集成方案,并详细讨论了集成MATLAB实现数值计算功能的方法、步骤和执行效率,还讨论了系统的数据可视化需求及MapObjects组件的功能和集成方法。

本文对监测网的优化设计和平差计算功能模块做了详细设计和具体实现,讨论了模块实现的算法流程、数据结构、实现步骤和成果输出等。本文通过一个实例的计算验证了系统的可行性,与传统的方法相比本系统具有快捷和高效等优点。

10. 会议论文 包欢,徐忠阳,张良琚,朱江,卫建东 自动变形监测系统在广州地铁结构变形监测中的应用 2001

本文主要介绍了以TCA自动化全站仪为基础组成的自动变形监测系统,并叙述了广州地铁“非地铁施工时地铁结构变形监测”科研项目的现场方案及优化设计,实际应用表明,该系统稳定可靠,可以胜任地铁结构变形监测的工作。

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Thesis_Y1094989.aspx

下载时间: 2010年6月20日