

一个用于边坡稳定分析的通用条分法

张鲁渝

(后勤工程学院 军事土木工程系, 重庆 400041)

摘要: 介绍了通用条分法的基本方程。与经典公式的不同在于, 它直接将条间力合力的大小和方向作为未知数, 通过定义不同的条间力倾角函数, 可以方便地模拟各种严格条分法, 如 Spencer 法、Morgenstern-Price 法以及基于力平衡的简化法, 如不平衡推力法、陆军工程师团法、罗厄法等。方程的求解采用了 Rapid Solver 法, 算例分析表明, 通用条分法 GLE 具有较高的数值精度和实用价值, 且方程形式简单、易于编程。

关键词: 边坡工程; 通用条分法; 边坡稳定; 极限平衡

中图分类号: TU 441; U 416.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2005)03-0496-06

GENERALIZED LIMIT EQUILIBRIUM METHOD FOR SLOPE STABILITY ANALYSIS

ZHANG Lu-yu

(Department of Civil Engineering, Logistical Engineering University of PLA, Chongqing 400041, China)

Abstract: The basic equations of generalized limit equilibrium method (GLE) are introduced, in which the difference from the classical methods is that the value and direction of interslice force are regarded as unknowns. The Rapid Solver is adopted to solve equations. Through defined function of interslice force angles, GLE can emulate rigorous methods such as Spencer and Morgenstern-Price methods, as well as other simplified methods satisfying force equilibrium, such as the unbalance thrust force method, Corps of Engineers, and Lowe-Karafiath method and etc.. The results show that GLE is a practical method with high precision and has the advantages of simple formulation to program easily.

Key words: slope engineering; generalized limit equilibrium method; slope stability; limit equilibrium

1 引言

极限平衡法可分为简化法和严格法 2 类。对于同一算例, 满足力和力矩平衡条件的严格法给出的安全系数基本相同, 偏差一般不会大于 5%^[1]; 而只满足力平衡或力矩平衡的简化法的计算结果离散性较大, 且仅满足力平衡的方法比仅满足力矩平衡的方法离散性更大。各种简化方法反映了早期手算的

需要, 随着计算机软硬件技术的飞速发展, 在边坡稳定分析中以精度更高的严格法代替简化法已成为必然。

严格法最终可归结为包含 2 个未知数的非线性方程组的求解, 此时会遇到数值收敛问题。许多学者对此做了有益的尝试, 如文[2]提出的 Rapid Solver 法, 其基本原理是寻找力平衡曲线 $f(F_t, \lambda)$ 与力矩平衡曲线 $f(F_m, \lambda)$ 的交点 (F, λ) , F 为坡体的安全系数, λ 是与条间力倾角函数有关的常数。它

收稿日期: 2003-07-15; **修回日期:** 2003-09-22

作者简介: 张鲁渝(1974-), 男, 2004 年于重庆后勤工程学院获博士学位, 现为清华大学博士后, 主要从事岩体本构及边坡稳定分析方面的研究工作。E-mail: zly1974@163.net.

有效地将二维迭代过程转化为一维迭代, 在国外应用较广。文[3, 4]从二维迭代入手, 推导了可用于 Newton-Raphson 迭代所需的导数公式, 可实现二阶收敛, 是一种较为快速的收敛法。上述 2 种方法各有千秋, 前者编程实现简单, 对迭代初值要求不高, 但求解速度与精度相对后者较低; 后者需要用到根值附近的导数值, 且实现编程又较前者复杂。

本文首先介绍了通用条分法 GLE(generalized limit equilibrium method)的基本方程^[5]。它直接将条间力合力的大小和方向作为未知数, 通过定义不同的条间力倾角函数, 可以方便地模拟各种严格条分法, 如 Spencer 法^[6]、离散化的 Morgenstern-Price(M-P)法(M-P 的积分形式见文[7, 8])及各种基于力平衡的简化法, 如不平衡推力法、陆军工程师团法、罗厄法等。方程的求解基于 Rapid Solver 法, 本文详细地给出了 Rapid Solver 法的求解过程。算例分析表明, GLE 具有较高的数值精度和实用价值, 且方程形式简单、易于编程。

2 基本理论

严格法要求土条满足所有的静力平衡条件, 即 2 个力平衡条件及 1 个力矩平衡条件^[5]。以土条为隔离体, 其受力分析如图 1 所示。

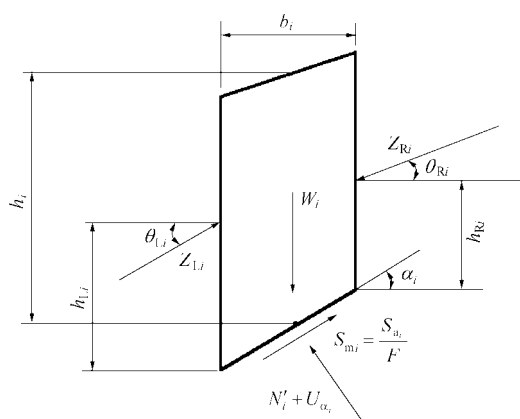


图 1 土条受力分析图

Fig.1 Force acting on a typical slice

为简化书写, 省去了各分量下标 i (土条编号)。符号含义如图 1 所示: F 为安全系数; S_a 为条底可获得的抗剪力, $S_a = cl + N' \tan \varphi$, c , φ , l 分别为条底粘聚力、摩擦角、长度; S_m 为条底发挥的抗剪力; U_α 为孔隙水压力; W 为土条重力; N' 为条

底有效法向力; α 为条底倾角; h 为土条平均高度; Z_L , Z_R 为土条左、右端水平条间力; h_L , h_R 表征条间力作用位置; θ_L , θ_R 为土条左、右条间力水平倾角。

2.1 平衡方程

2.1.1 土条底线平行方向的力平衡方程

$$S_m + Z_L \cos(\alpha - \theta_L) - Z_R \cos(\alpha - \theta_R) - W \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

根据莫尔-库仑强度准则, 有

$$S_m = \frac{S_a}{F} = \frac{c}{F} + N' \frac{\tan \varphi}{F} = c_m + N' \tan \varphi_m \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得

$$N' \tan \varphi_m = Z_R \cos(\alpha - \theta_R) - Z_L \cos(\alpha - \theta_L) + W \sin \alpha - c_m \quad (3)$$

2.1.2 土条底线法向方向的力平衡方程

$$N' + Z_R \sin(\alpha - \theta_R) - Z_L \sin(\alpha - \theta_L) - W \cos \alpha - U_\alpha = 0 \quad (4)$$

将式(4)代入式(3), 得

$$\left. \begin{aligned} Z_R &= A_8 Z_L [\cos(\alpha - \theta_L) + \sin(\alpha - \theta_L) \tan \varphi_m] + \\ &A_8 [W \cos \alpha (\tan \varphi_m - \tan \alpha) + c_m - U_\alpha \tan \varphi_m] \\ A_8 &= \frac{1}{\cos(\alpha - \theta_R) [1 + \tan \varphi_m \tan(\alpha - \theta_R)]} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2.1.3 土条的力矩平衡方程

以土条底线中点为取矩中心, 建立土条的力矩平衡方程为

$$Z_L \cos \theta_L \left(h_L - \frac{b}{2} \tan \alpha \right) + Z_L \frac{b}{2} \sin \theta_L - Z_R \cos \theta_R \left(h_R + \frac{b}{2} \tan \alpha \right) + Z_R \frac{b}{2} \sin \theta_R = 0 \quad (6)$$

整理并简化式(6), 可得

$$h_R = \frac{Z_L}{Z_R \cos \theta_R} \left[h_L \cos \theta_L - \frac{b}{2} (\cos \theta_L \tan \alpha - \sin \theta_L) \right] + \frac{b}{2} (\tan \theta_R - \tan \alpha) \quad (7)$$

2.2 垂直条间力倾角的假定

在说明这个问题之前, 有必要明确为什么要进行条间力倾角假定。如果滑体共被划分为 n 个土条, 则可建立的方程总数及未知数总数见表 1, 2。如无特别说明, 下文条间力均指垂直条间力。

表 1 可建立的方程总数

Table 1 Equations associated with given methods

方程数	建立方程的条件
$2n$	2 个方向的力平衡方程, 式(1), (4)
n	每个土条的力矩平衡方程, 式(6)
n	条底切向力与法向力的莫尔-库仑准则, 式(2)
$4n$	方程总数

表 2 未知数总数

Table 2 Unknowns associated with given methods

未知数个数	未知数
1	安全系数 F , 假定各土条 F 相同
n	条底法向有效力 N'
n	条底切向力 S_m
$n-1$	垂直条间力 Z
$n-1$	垂直条间力倾角 θ
$n-1$	垂直条间力作用点
$5n-2$	未知数总数

由表 1, 2 分析可知, 已建立的方程总数为 $4n$, 而未知数总数却为 $5n-2$ 。很显然这是个超静定问题, 要想求解, 必须对 $n-2$ 个未知数进行假设, 使其变为静定可解。由此, 条间力倾角的假定便成为求解方程组的必然。通常假定条间力的倾角满足形式为

$$\theta = \lambda f(x) \quad (8)$$

式中: θ 为条间力倾角, 共有 $n-1$ 个。因各 θ 间具有相同的 λ (表征了条间法向力与切向力所满足的比例关系), 即只有 $n-2$ 个独立的未知数得到假定, 此时方程组的方程总数与未知数总数相等。 $f(x)$ 是一已知函数, $f(x)$ 的不同也就成了各种极限平衡法的区别。如 $f(x)=1$ 时, 为 Spencer 法。对于 Morgenstern-Price 法, $f(x)$ 可取多种函数形式, 如图 2, 3 所示。

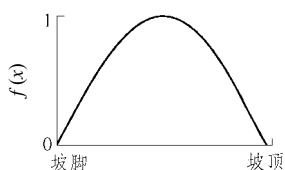


图 2 半正弦函数

Fig.2 Half-sine function

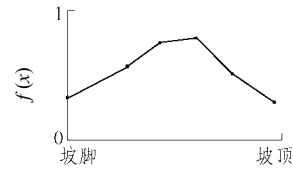


图 3 自定义函数

Fig.3 User-defined function

图 3 所示自定义函数具有非常有用的功能, 利用它可以模拟实现多种需要条间力函数的条分法, 如陆军工程师团法、罗厄法, 以及不平衡推力法。具体如何应用详见算例分析。 $f(x)$ 的构造如图 4 所示, 可得

$$f(x) = \sin \left[\left(\frac{x-a}{b-a} \right) \pi \right] \quad (9)$$

式中: x 为条间力水平坐标, a 为坡角水平坐标, b 为坡顶水平坐标。

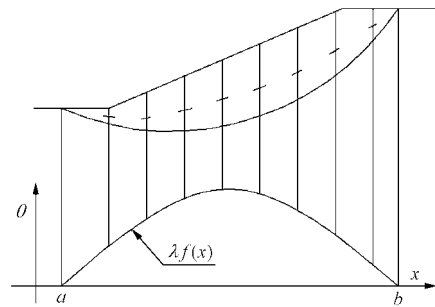


图 4 条间力倾角的计算示意图

Fig.4 Calculation diagram of interslice force angles

3 数值迭代求解步骤

如图 5 所示, 本文给出的通用条分法与经典的 Morgenstern-Price 法的区别仅在于数值迭代求解上, 而基本理论与 M-P 法实质并无区别。

(1) 假定条间力倾角函数 $f(x)$ 。

(2) 确定安全系数 F 的迭代初值及 λ 值。从坡脚第 1 条土条开始, 已知第 1 条土条的 Z_L 等于 0, Z_L 的作用点位置 h_L 也等于 0, 可由式(5), (7)分别求得第 1 条土条的 Z_R 及作用点 h_R , 并以此作为第 2 条土条的 Z_L 及 h_L 。以此递推, 可求得最右端土条(坡顶)的 Z_R , h_R 。

(3) 对于最右端土条的 Z_R , h_R , 如满足力平衡条件, 则 $Z_R=0$, 此时力平衡对应的安全系数为 F_f , 否则调整 F , 按式(5)递推求解, 直到 $Z_R=0$, 得到 F_f 。如满足力矩平衡条件, $h_R=0$, 此时力矩平衡

对应的安全系数为 F_m ，否则调整 F ，按式(7)递推求解，直到 $h_R = 0$ ，得到 F_m 。通常 F_f ， F_m 并不相等。注意本步骤中 λ 值不变，由此可得到力平衡点 (λ, F_f) 及力矩平衡点 (λ, F_m) 。判断是否为 0 时，一般要设定一个容差 $\varepsilon = 10^{-3}$ 。

(4) 改变 λ ，按步骤(2)，(3)进行递推求解，得到 1 组新的力平衡点 (λ, F_f) 及力矩平衡点 (λ, F_m) 。

(5) 求一系列 λ 值(一般 5 个左右)对应的力平衡点及力矩平衡点，在 λ - F 坐标系中连接对应的点，得到力平衡与力矩平衡曲线。两曲线交点的纵坐标即为满足力平衡又满足力矩平衡的 F 。

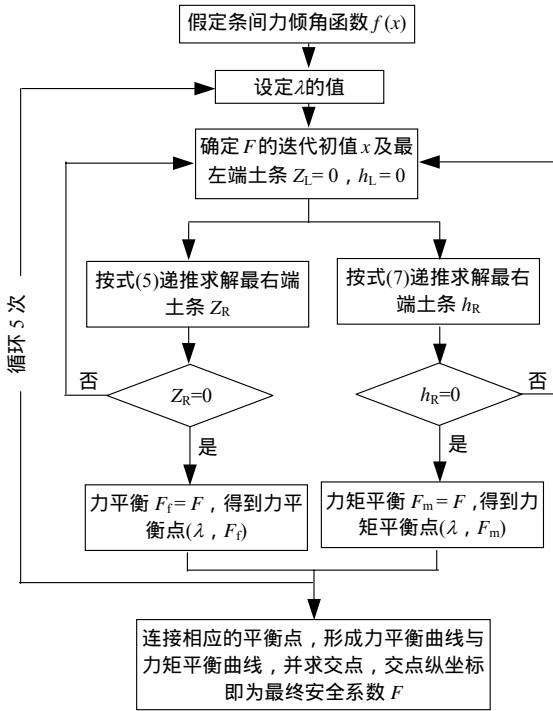


图 5 通用条分法求解步骤框图

Fig.5 The structure chart of solving GLE

4 算例分析

本文算例 1 沿用文[9]的考题，土质参数 $c=29$ kPa， $\varphi=20^\circ$ ， $\gamma=18.8$ kN/m³，算例 1~3 的土质参数及坡面几何参数均相同，且 3 个算例坡面坡度均为 2:1，滑面几何参数分别如图 6~11 所示。对于组合滑面(算例 2)，其圆弧段圆心与算例 1 相同。所有算例的求解均采用作者编制的 ZSlope 稳定分析软件^[10]计算。

通过对 3 种不同滑面类型的边坡进行稳定分析，计算结果见图 9~11，结果分析见表 3。结果显

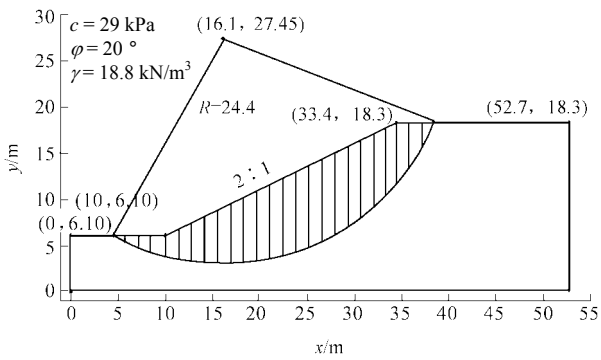


图 6 圆弧滑面计算简图

Fig.6 Calculation diagram for circle slip

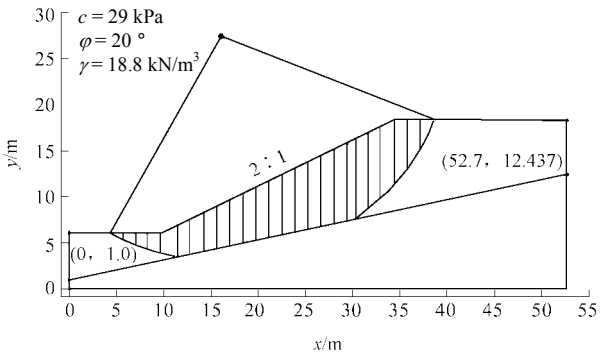


图 7 组合滑面的计算简图

Fig.7 Calculation diagram for composite slip

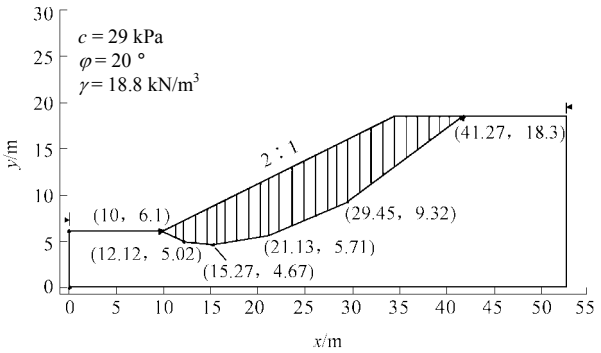
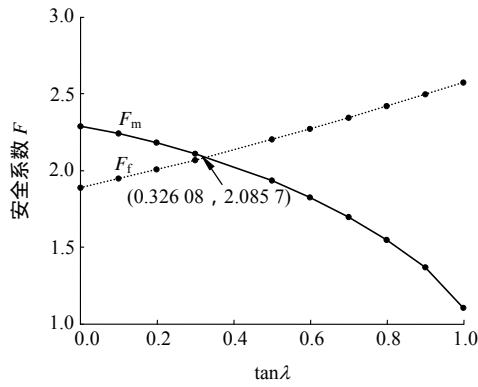


图 8 折线滑面的计算简图

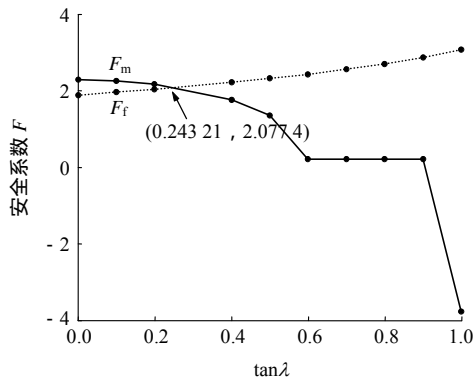
Fig.8 Calculation diagram for polyline slip

示，本文建议的通用条分法具有较高的计算精度，且其计算结果与相应经典方法相对误差均在 1%之内。如果力平衡曲线与力矩平衡曲线有 2 个交点，取第 1 个交点。同时也可看出，由于要计算一系列 λ 所对应的力平衡点及力矩平衡点，需要大量的迭代计算，因而计算效率较低，如果只求解单个滑面的安全系数，则计算效率不是问题，但在成千上万个滑面中搜索临界滑面时便会遇到麻烦。

不平衡推力法^[11]在我国工业与民用建筑及铁道部门广为应用。它仅满足力平衡，其基本假定是



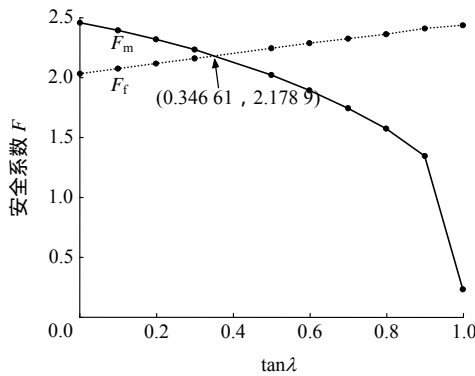
(a) $f(x)$ = half-sine



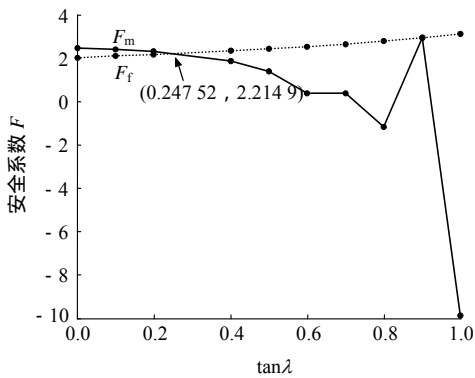
(b) $f(x)$ = 1

图 9 圆弧滑面计算结果

Fig.9 Calculation results for circular slip



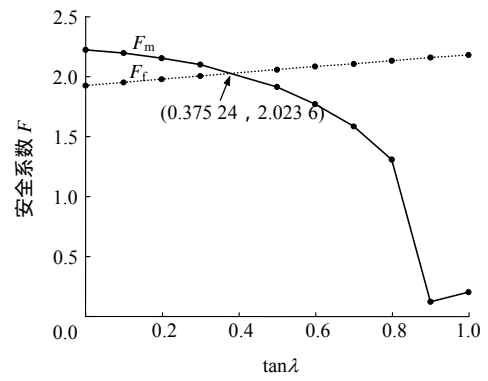
(a) $f(x)$ = half-sine



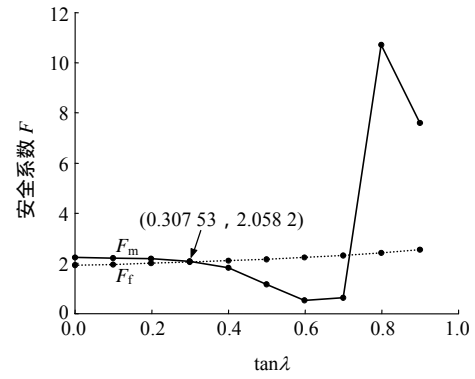
(b) $f(x)$ = 1

图 10 组合滑面计算结果

Fig.10 Calculation results for composite slip



(a) $f(x)$ = half-sine



(b) $f(x)$ = 1

图 11 折线滑面计算结果

Fig.11 Calculation results for polyline slip

表 3 各算例安全系数计算结果分析

Table 3 Results of safe factors for all examples

算例	方法				误差/%	
	1	2	3	4	方法 1 对方法 3	方法 2 对方法 4
	GLE 法($f(x)$ 为 half-sine)	GLE 法 ($f(x)=1$)	Morgenstern- Price 法	Spencer 法		
1	2.085	2.077	2.079	2.096	- 0.289	- 0.906
2	2.179	2.215	2.182	2.237	- 0.137	- 0.983
3	2.024	2.058	2.033	2.074	- 0.443	- 0.771

注：Morgenstern-Price 条间力函数为 half-sine。

条间力合力的方向与相邻土条底面平行。应用 GLE 通用条分法实现不平衡推力法非常方便，只需根据土条划分情况定义条间力倾角函数即可，条间力倾角函数 $f(x)$ 的构造见式(9)，图 12 是根据算例 3 得到的条间力倾角函数。如在递推过程中不对条间力为负的情况进行归零处理，则安全系数为 2.051，如对条间力进行归零处理，处理后的安全系数为 2.004。陆军工程师团法、罗厄法条间力倾角函数的构造与不平衡推力法类似，恕不赘述。

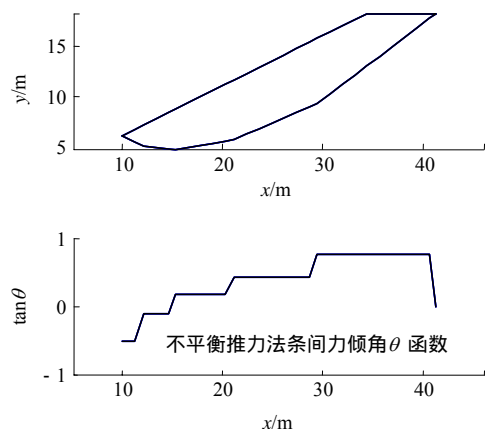


图 12 不平衡推力法条间力倾角函数

Fig.12 Interstice force angle function for unbalance thrust force method

5 结 论

(1) 本文给出的通用条分法 GLE 的基本方程, 与经典公式的不同在于, 它直接将条间力合力的大小和方向作为未知数。

(2) 方程的求解基于 Rapid Solver 法, 此算法不需要对方程求导, 因而编程简单, 但收敛速度较慢。

(3) 通过不同条间力倾角函数的定义, 利用本文给出的公式可以方便地模拟各种严格条分法, 如 Spencer 法、Morgenstern-Price 法以及不平衡推力法、陆军工程师团法、罗厄法, 算例分析表明, 本文建议的方法具有较高的数值精度和实用价值。

参考文献(References):

- [1] Fredlund D G, Zhang Z M, Lam L. Effect of the axis of moment equilibrium in slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1992, 29(3): 456–465.
- [2] Fredlund D C. State of the art: analytical methods for slope stability analysis[A]. In: Proceedings of the 4th International Symposium on Landslides[C]. Toronto: Ont, 1984. 229–250.
- [3] 陈祖煜. 边坡稳定分析——极限平衡法的改进和应用[博士学位论文][D]. 北京: 清华大学, 1991.(Chen Zuyu. Updating the limit equilibrium method for slope stability analysis and its applications[Ph. D. Thesis][D]. Beijing: Tsinghua University, 1991.(in Chinese))
- [4] 朱大勇, 钱七虎. 严格极限平衡条分法框架下的边坡临界滑动场[J]. 土木工程学报, 2000, 33(5): 68–74.(Zhu Dayong, Qian Qihu. Critical slip fields of slopes satisfied all conditions of limit equilibrium for slices[J]. China Civil Engineering Journal, 2000, 33(5): 68–74.(in Chinese))
- [5] Lee W A, Lee T, Sharma S, et al. Slope Stability and Stabilization Methods[M]. New York: Wiley-Interscience Publication, 1996.
- [6] Spencer E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces[J]. Geotechnique, 1967, 17(1): 11–26.
- [7] Morgenstern N, Price V E. The analysis of the stability of general slip surfaces[J]. Geotechnique, 1965, 15(1): 79–93.
- [8] 陈祖煜. 土坡稳定分析通用条分法及其改进[J]. 岩土工程学报, 1983, 5(4): 11–27.(Chen Zuyu. The generalized method of slices for slope stability analysis and it modifications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1983, 5(4): 11–27.(in Chinese))
- [9] Fredlund D G, Krahn J. Comparison of slope stability methods of analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1977, 14(3): 429–439.
- [10] 张鲁渝. 边坡稳定分析软件 ZSlope 的开发[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(16): 2 830–2 835.(Zhang Luyu. The development of software for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(16): 2 830–2 835.(in Chinese))
- [11] 张鲁渝, 郑颖人, 时卫民. 边坡稳定分析中有关不平衡推力法的讨论[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(1): 177–182.(Zhang Luyu, Zheng Yingren, Shi Weimin. The discuss of problem or slope stability analysis by imbalance thrust method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(1): 177–182.(in Chinese))