

# 有限应变测量的关键原理——摩尔圆

刘瑞珣<sup>1</sup>, 吕古贤<sup>2</sup>, 刘德良<sup>3</sup>, 张 臣<sup>1</sup>, 任 宏<sup>4</sup>

LIU Rui-xun<sup>1</sup>, LÜ Gu-xian<sup>2</sup>, LIU De-liang<sup>3</sup>, ZHANG Chen<sup>1</sup>, REN Hong<sup>4</sup>

1. 北京大学地球与空间科学学院, 北京 100871; 2. 中国地质科学院地质力学研究所, 北京 100081;

3. 中国科技大学地球与空间科学学院, 安徽 合肥 230026; 4. 北京科技大学, 北京 100083

1. School of Earth and Space Sciences, Peking University, Beijing 100871, China;

2. Institute of Geomechanics, Chinese Academy of Geological Sciences, Beijing 100081, China;

3. School of Earth and Space Sciences, China University of Science and Technology, Hefei 230026, Anhui, China

4. University of science & Technology Beijing, Beijing 100083, China

**摘要:**20 世纪 60 年代,在板块理论建立的同时,对变形岩石和矿田构造作定量分析以替代定性分析的有限应变测量方法也建立了起来。定量分析的主要标志是将摩尔圆方法从力学引入到地质学,同时也引入矿田构造分析中,并且得到改进与发展。有限应变摩尔圆为分析岩石大变形而建立,极摩尔圆随后为分析广布于野外岩石中的一般剪切变形而建立。我国著名学者李四光在此之前将应力摩尔圆和库仑准则从力学领域介绍到构造地质学,尔后一些中国学者为改进和发展极摩尔圆方法作出了自己的贡献。本文以浅显的方式解释摩尔圆的基本概念和作图方法,附带做些练习和解答。

**关键词:**岩石有限应变测量;有限应变摩尔圆;极摩尔圆;一般剪切

**中图分类号:**O39; P54 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-2552(2011)04-0487-08

Liu R X, Lü G X, Liu D L, Zhang C, Ren H. Mohr circle:the fundemental principle of finite strain measurements. *Geological Bulletin of China*, 2011,30(4):487-494

**Abstract:** Finite strain measurement, the quantitative analysis instead of the qualitative analysis of deformed rocks, was founded in studying deformed rocks, and structure of orefield with the foundation of plate tectonic theories in 1960s. The main mark of the quantitative analysis was that the Mohr circle construction was introduced from mechanics into structural geology, and was improved and developed from then on. The finite strain Mohr circle was established for analysing large deformation problems, and the polar Mohr circle was established later for analysing general shear deformation of rocks which distributed widely in the field. The famous chinese geologist Lee J S was the first people who introduced the stress Mohr circle and the Coulomb criterion from the field of mechanics into structural geology. Some chinese geologists made their contribution in improving and developing the polar Mohr circle method. The basic conceptions and construct methods of Mohr circle were introduced simply and popularly in this paper with some exercises and their explanations.

**Key words:** finite strain measurement of rocks; finite strain Mohr circle; polar Mohr circle; general shear

## 1 摩尔圆引入地质学

### 1.1 地质理论的发展需要力学介入

#### 1.1.1 首先引入库仑准则

不论区域构造、中小构造,还是矿田构造,露头

上的构造分析都是不可缺少的。露头上的构造主要体现在岩石的破裂和变形上,多彩的构造形迹主要由这 2 种受力结果体现出来。既然岩石的破裂和变形都是受力产生的形迹,那么借用力学来分析构造形迹就成为必然途径。开始系统引用力学的地学领

收稿日期:2010-11-05;修订日期:2011-03-07

资助项目:国家自然科学基金项目(批准号:40992134、40772142、40972061)和中国地质调查局项目(编号:1212010813051)

作者简介:刘瑞珣(1938-),男,教授,博士生导师,构造地质学和显微构造学专业。E-mail:liuruixun@pku.edu.cn

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

域还不是构造地质学,而是工程地质学,那里涉及的力学直接与工程设计相关联,不借助力学几乎是不可能的。在构造地质领域,如何最早引入力学已很难追索,相信这是个逐渐发展的过程。但是中国著名的科学家李四光<sup>[1]</sup>最早在构造分析中使用摩尔圆和库仑破裂准则。李四光引用的是摩尔圆的基本形式,称为应力摩尔圆,它能全面反映弹性体内一点及其附近的应力状态,依据这种状态,可以预测哪个方向最容易发生剪破裂,这就是库仑准则对脆性破裂的理论解释。在弹性限度内,应力与应变有线性关系,于是随着应力摩尔圆也产生了应变摩尔圆,它解释了一点及其附近的应变状态。

#### 1.1.2 静力学解释刚性板块

随着构造地质研究的深入,仅适合弹性小变形的应力摩尔圆和应变摩尔圆已不能满足岩石大变形构造分析的需要。20 世纪 60 年代,与板块构造地质学说兴起的同时,构造学家兰姆赛等<sup>[2]</sup>研究出有限应变摩尔圆方法,从而引发了广泛的应变测量热潮。那时中国正处于政治动乱时期,地质学家没能参与应变测量热潮,那时的矿田构造分析也少用应变测量方法,但是已经有人介绍板块构造学说,所以大多数中国地质学家都知道 20 世纪 60 年代国际上兴起了“板块构造”学说,却少知道同时兴起的应变测量热潮。板块构造强调岩石圈的刚体性质,即不变形的特性。岩石圈在整体上视为刚性体,与岩石圈 2 亿年以来的发育历史符合得很好。当把现今几个大陆的轮廓拼合起来,尤其以 500m 水深的海岸线轮廓拼合起来,可以组成一个缝合很恰当的古陆。这表明 2 亿年以来各大陆的 shape 没有变化,符合刚体性质,否则必然不能严密拼合。此前的“大陆漂移说”虽然也想到了大陆运动,却没有把大陆看成刚体,所以不成为“板块学说”。刚体是力学中对不变形物体的抽象,板块构造说把大陆抽象为刚体,与大陆整体的性质符合得很好,因此用静力学处理大陆整块运动也是相当准确的。

#### 1.1.3 有限应变摩尔圆解释构造变形

但是岩石还有可以变形,并且可以大变形的一面。准确地描述大变形的构造形迹,不仅刚体静力学不能适用,而且只适用小变形的弹性力学也无能为力,于是引出了有限应变的概念,并在应变摩尔圆的基础上发展出“有限应变摩尔圆”,在力学上要借助时间因素,还运用了流变学。随后,提出了一系列有

限应变测量方法<sup>[3]</sup>,这些方法涉及的力学比板块学说涉及的力学要复杂。当这些方法介绍到中国时,差不多是在国际上最热潮的 10 年之后<sup>[3-4]</sup>,同时中国的几大构造地质学说正在考虑如何与国际上公认的板块学说接轨,所以在吸收变形构造和有限应变测量方法方面投入的力量不够,这在一定程度上影响了中国小构造分析传播的广度和热度。矿体往往出现在强变形甚至断裂的复合部位,这恰是构造分析的关键部位,理应深入研究。至今,很多构造分析的文章缺少露头上的细微研究,少有的一些研究也缺少矿田构造的实际资料,甚至存在力学概念的误解。尽管如此,有限应变测量工作在一些教学和科研单位还是开展起来了,并且有重要的进展。

### 1.2 摩尔圆在地质领域的发展

#### 1.2.1 一般剪切变形

有限应变测量方法的依据是有限应变摩尔圆,而有限应变摩尔圆主要建立在纯剪切变形的理论之上。自然界存在变形的另一端元简单剪切变形。纯剪切与简单剪切 2 个端元之间的一系列中间类型被称为一般剪切。这样,纯剪切和简单剪切就成为一般剪切的 2 个极端情况。纯剪切的特征表现为当一个原始圆变成椭圆时,其长轴和短轴始终分别由同条质点线承担,而且长短轴的方向始终不变。所以纯剪切变形又称为共轴变形(指承担主轴的质点线不变),还可称为非旋转变形(指主轴的方位不转动)。简单剪切的特征表现为原始圆在递进变形过程中所形成的椭圆的长轴和短轴分别由不同的质点线承担,而且长短轴的方向也不断在改变,改变的每一步,长、短轴总是互相垂直的。这 2 种情况恰是一般剪切的 2 个极端情况,最常见的剪切变形则是兼有纯剪切和简单剪切的混合状况,表现为初始承担长轴和短轴任务的质点线由纯剪切状态时的互相垂直逐渐变成不垂直,一对顶角变小(自然另一对顶角变大),一直变到简单剪切时的互相重合,变成只有一条质点线。这种状况可以比作推动一叠可滑动的卡片,逐层有依次增加的位移而滑动方向不变。

#### 1.2.2 涡度、极摩尔圆的应用

为描述这种既有压缩(或拉伸)又有旋转的一般剪切特征,Simpson 等<sup>[5]</sup>放弃笛卡尔直角坐标系,改用极坐标系,从而创立了适合一般剪切的极摩尔圆方法。采用极坐标以后,同时表示直线的长度变化和角度变化比用直角坐标系表示更方便。为描述物体

内各矢量的旋转,在采用极坐标的同时,还引用了涡度概念,又称旋量(vorticity)。这样,用极摩尔圆方法就可以解出一般剪切中纯剪切和简单剪切各占多少。极摩尔圆方法使构造变形分析又向前推进了一步。张进江等<sup>[6]</sup>最先把极摩尔圆方法和涡度概念介绍到中国,并最早把这种方法列入构造地质学专业的教学内容。

### 1.2.3 极摩尔圆的改进

Simpson 等<sup>[5]</sup>提出的极摩尔圆方法要求在野外必测的前提条件比较苛刻,必须测到变形前与剪切面垂直的标志线在变形后的方位,图解操作才能进行。这个条件在野外露头上很难满足,使用时往往把近乎垂直的标志线视为垂直,这样图解操作虽可进行,但精度却受到影响。Zhang 等<sup>[7]</sup>改进了极摩尔圆方法,解决了标志线与剪切面在变形前非垂直条件下的极摩尔圆图解操作问题,一下子把极摩尔圆方法的适用范围大大地拓展了,他们还用改进的极摩尔圆方法实测了小秦岭金矿区韧性剪切带的一般剪切变形量。这是中国矿区构造研究首次使用极摩尔圆方法,也是一个良好的开端。应变测量工作如能在矿区中广泛开展,对中国矿山地质和矿产开发工作一定有很大的推动作用。不过,在这方面的工作依然薄弱,在构造地质研究中做过扎实变形分析的实例也不多。

简单剪切属于等体积变形,即变形前后的体积不变,可理解为一些可滑层沿剪切方向的逐层滑动。纯剪切变形则常伴有体积损失,因为挤压同时还有侧向挤压。一般剪切既然是这 2 种变形的“混合物”,就占有一定比例的体积变化因素,通常是体积损失(减小)。遇到有体积变化的情况,极摩尔圆的解法也需要改进,如果不区分有无体积变化,一律以无体积变化为前提进行测量就会带来误差。在剪切带中通常存在压溶、化学反应引发的物质成分的带入带出,从而引起体积变化。这种变化在矿区表现得更明显:成矿物质的带入和沉淀,非成矿物质被淋滤带出等等。针对有体积变化的一般剪切变形,李海等<sup>[8-9]</sup>对极摩尔圆作了进一步改进,把体积变化考虑进去,提出了适合体积变化因素的极摩尔圆方法,并且用改进后的极摩尔圆方法测量了新疆天山桑树园子剪切带的一般剪切变形量。在摩尔圆原理运用于构造分析的过程中,中国学者做出了自己的贡献。

## 1.3 流变学的引入

李四光<sup>[1]</sup>将力学中的摩尔圆原理和库仑破裂准则引入地质学已经 60 多年,摩尔圆在地质构造领域有很大的发展,开展了有限应变测量方法,李四光也开创了“地质力学”理论。在中国各大构造学家的创新理论中地质力学所借助的力学原理最为系统。李四光主张的地球自转离心力的变化是推动构造运动的主要原因的提法受到质疑,按已测出的(现今技术达到的)地球自转速度变化的离心应力变化只有每克岩石几达因(体力),这样小的力不足以引发大规模的构造运动。这是当时的认识。现在,按照流变学的观点,可把岩石在地质条件下看作牛顿流体,小应力长时间的作用可引起大变形,即应变可以缓慢累积。初步计算,几达因的应力要引起一次应变达 10(即长度变为原长的 10 倍)的构造变形,需要 10 万年左右(数量级为  $10^{12} \sim 10^{13}$ s)的时间。如果推测地质历史上地球自转速度可能比现今有更大变化的话,这个时间还可以缩短,或者在此段时间内变形还可以加大。具体的流变学运算待以后提供,这里只是再次强调李四光所倡导的构造分析中借助力学的重要性。

随着构造地质学的发展,借助的力学原理也越来越多,有关流变学的概念和基础模型,笔者已有一些介绍<sup>[10-11]</sup>,这里就不重复了。应变测量中广泛应用的有限应变摩尔圆和极摩尔圆都源自应力摩尔圆,目前在应变测量中遇到的困难也恰是不熟悉最基本的应力摩尔圆的原理,若直接从力学教科书中探讨摩尔圆的原理,因专业对象不同,常让地质学家困惑,所以本文拟以只学过普通物理学中力学部分、没学过变形介质力学部分的同仁为对象,介绍应力摩尔圆的推导、性质和地质应用,并且尽量作浅显的说明,以二维应力条件为例。

## 2 摩尔圆简介

### 2.1 摩尔圆解法

#### 2.1.1 原始莫尔圆公式的推导(初等数学方法)

设想在变形体内取一均匀受力的单元体(图 1)。取 1 和 2 为 2 个互相垂直的方向,分别受到  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的压应力作用,设压应力为正,拉应力为负。现在考虑任一斜截面上的应力状况。法线为  $n$  的斜截面与法线为 1 的截面交角为  $\alpha$ 。我们先只考虑  $\sigma_1$  而不考虑  $\sigma_2$  的作用。此时  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别作用在 1 和 2 这 2 个截面



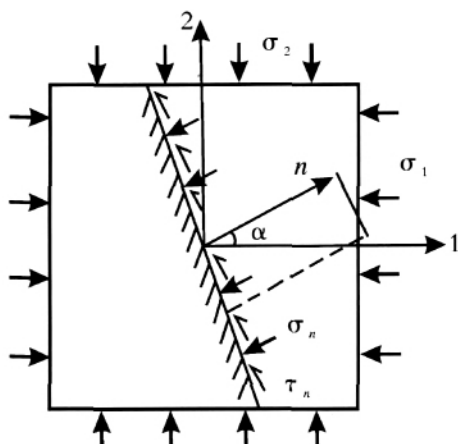


图1 受力物体内斜截面上的正应力和剪应力

Fig. 1 Normal stress and shear stress

put on the inner oblique section of the stressed body

示出与  $\sigma_1$  方向法线交角为  $\alpha$  的斜截面上的正应力  $\sigma_n$  和剪应力  $\tau_n$ 

上, 其上没有剪应力, 这 2 个截面称为主应力作用面,  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  据大小依次称为最大、最小主应力。  $\sigma_1$  在斜截面上的垂直分量为  $\sigma_1 \cos \alpha$ , 平行分量为  $\sigma_1 \sin \alpha$ , 分别是正压力和剪剪力。应力是单位面积上的受力, 现在该斜截面的面积比正截面 1 的面积大了, 若正截面面积为 1, 则斜截面面积为  $1/\cos \alpha$ 。斜截面上的正应力应是该面上的正压力除以该面面积, 即:

$$\sigma_{n1} = \frac{\sigma_1 \cos \alpha}{1/\cos \alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha$$

同样该面上的剪应力  $\tau_{n1}$  也可用同样的方法获得:

$$\tau_{n1} = \frac{\sigma_1 \sin \alpha}{1/\cos \alpha} = \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha$$

当再考虑  $\sigma_2$  的单独作用时, 斜截面  $n$  上的正应力  $\sigma_{n2}$  和剪应力  $\tau_{n2}$ , 依据以上分析, 仍用法线与 1 的夹角关系可分别表示为:

$$\sigma_{n2} = \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_{n2} = \sigma_2 \cos \alpha \sin \alpha$$

同一截面上同方位的应力可以叠加, 这样由 1 和 2 两个方向作用, 在斜截面上总的正应力  $\sigma_n$  为 2 个正应力分量的叠加:

$$\sigma_n = \sigma_{n1} + \sigma_{n2} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

斜截面上总的剪应力, 由于 2 个方向产生反向剪切, 所以总剪应力为 2 个方向剪应力之差:

$$\tau_n = \tau_{n1} - \tau_{n2} = \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_2 \cos \alpha \sin \alpha$$

利用三角学的倍角公式, 斜截面上的正应力  $\sigma_n$  和剪应力  $\tau_n$  可以另写成:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_2 \cos \alpha \sin \alpha \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

(1) 式和 (2) 式表示任意斜截面上正应力、剪应力与 2 个主应力的关系只随角度变化, 应力的变量分别是二倍角的余弦和正弦。考虑到 (1) 式和 (2) 式的变量都是  $2\alpha$ , 那么斜截面上的正应力和剪应力一定可以通过这个关系联系起来。我们将 (1) 式和 (2) 式移项, 使三角函数式移到同侧:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_n$$

然后将这 2 个式子平方并相加, 等式左侧就消掉了三角函数式, 为:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 = (\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2 + \tau_n^2$$

在直角坐标系中, 如果把  $\sigma_n$  和  $\tau_n$  看成 2 个变量, 则上式与圆的方程

$$r^2 = (x-a)^2 + y^2 \quad (3)$$

是一样的。  $\sigma_n$  和  $\tau_n$  都有实际的量值, 我们可以用  $\sigma_n$  做横坐标,  $\tau_n$  做纵坐标, 用标出量值的方法, 在方格纸上把这个圆画出来 (图 2)。在这个圆上可以判读出圆心坐标为  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$ , 相当于 (3) 式中的  $(a, 0)$ ;

半径为  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ , 相当于 (3) 式中的  $r$ 。圆周上的每一

点的坐标值代表一个内截面上的应力状态。例如以  $2\alpha$  为圆心角得到点  $N$ , 则  $N$  点的横坐标值  $OM$ 、纵坐标值  $MN$  分别等于法线为  $\alpha$  内截面上的正应力和剪应力值。  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  都落在横坐标上, 这 2 个点都只有横坐标值而纵坐标值都是 0, 表明这 2 个点所代表的应力的作用面上都没有剪应力, 称为主应力作用面, 或者主截面, 主截面上永远没有剪应力。

最先导出这个圆方程的是奥地利科学家摩尔 (Mohr O, 1882), 所以后人称为摩尔圆。由于后来发展出一系列有用的摩尔圆, 如应变摩尔圆、有限应变摩尔圆、极摩尔圆等, 并且在力学和力学以外的领域获得广泛应用, 所以原始的摩尔圆实为应力摩尔圆, 或简称应力圆。我们已经把压应力视为正, 那

么拉应力就为负,角度的设定依三角学第一象限逆时针转角为正,那么剪应力应以造成逆时针旋转趋势的为正,造成顺时针旋转趋势的为负。明确应力的正负,不论对用公式运算还是图解运算都是重要的。

### 2.1.2 摩尔圆的性质

摩尔圆导出后,也完善了摩尔圆的性质,可以形象地了解受力物体各方向的应力关系。几何学原理给出了摩尔圆的性质如下。

(1) 摩尔圆代表受力物体某一点的整体应力状态。经过这点的任意内截面上的正应力  $\sigma_n$  和剪应力  $\tau_n$  可以由摩尔圆圆周上对应点的坐标值表示,横坐标值代表正应力,纵坐标值代表剪应力,坐标值的正负与上述应力值的正负规定一致。应注意的是实际物体上截面的法线方位角  $\alpha$  在摩尔圆上表示为  $2\alpha$ 。图 1 上斜度为  $\alpha$  的截面上的正应力和剪应力就是图 2 中圆心角为  $2\alpha$  的  $N$  点的横坐标和纵坐标值,分别以  $OM$  和  $MN$  的长度表示。摩尔圆的圆周上有无数个点,代表实际物体无数不同斜度的截面上的应力值,整个圆就代表一个应力状态,圆心到坐标原点距离代表平均应力大小,半径长短代表最大剪应力的大小,直径代表差应力  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  的量值。如果画在有标度的纸上,一看摩尔圆的大小和距坐标原点的远近,就基本了解它的整个应力状态。

(2) 两个互相垂直截面上(即角差为  $90^\circ$ )的正应力和剪应力对应摩尔圆上一条直径(即角度为  $180^\circ$ )的 2 个端点的坐标值,这 2 个面上的剪应力总是量值相等、方向相反的。同时,所有互相垂直截面上的 2 个正应力之和等于 2 个主应力之和,在这个应力状态下是常数:  $\sigma_m + \sigma_n = \sigma_1 + \sigma_2 = C$ 。

(3) 任意 2 个相差  $180^\circ$  的截面,对应摩尔圆上的同一点,应力状况相同。

(4) 最大剪应力值是摩尔圆的半径,  $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ,作用在与主应力夹  $45^\circ$  角的截面上,摩尔圆上的角差是  $90^\circ$ ,即摩尔圆垂直直径的两端。最大剪应力作用面上的正应力值永远等于平均应力:  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ 。其值恰在圆心坐标上。最大剪应力值是差应力的一半,但不是差应力本身。

(5) 最大和最小正应力作用面上永远没有剪应力,又称最大和最小主应力,对应摩尔圆横坐标直径的两端。

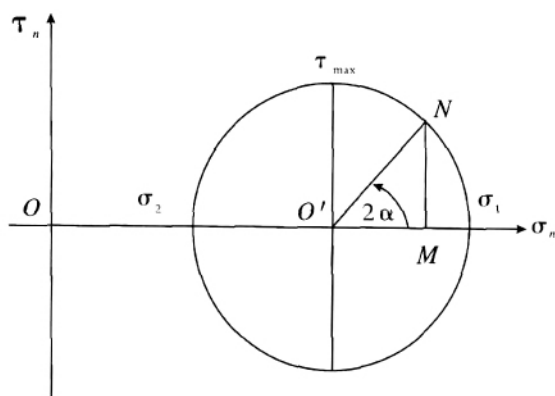


图 2 应力摩尔圆

Fig. 2 Stress Mohr circle

### 2.1.2 摩尔圆的推论

摩尔圆还告诉我们,应力不可用平行四边形法则进行合成和分解。上面导出的(1)式、(2)式表示与主应力  $\sigma_1$  法线夹  $\alpha$  角截面上的正应力和剪应力,两者都不是这 2 个主应力在此斜截面上投影的分量值。有的构造文章用平行四边形法则或余弦分量投影法来转换不同方向的应力,做法和结果都是错误的。最简便的正确方法就是通过摩尔圆求出相关方向的应力分量。

### 2.2 应用摩尔圆的举例

下边举几个例子,来熟悉摩尔圆方法并进一步认识摩尔圆的性质。

(1) 第一例:在 2 个互相垂直的方向上测到 2 个水平方向的应力,分别是南北向的压应力为  $500\text{MPa}$ ,东西向的压应力为  $100\text{MPa}$ ,2 个截面上都没有剪应力,求该处走向北西  $330^\circ$  的直立断面上承受多大的正应力和剪应力?

为解决此题,先按题意画一个小单元的受力图,依据题意,得知该截面的  $\alpha$  为  $-60^\circ$ (图 3)。可以用 2 种方法来解。首先用公式(1)和(2),代入给定数值解出正应力和剪应力。题目说 2 个截面上没有剪应力,那么这 2 个给定的应力都是主应力,即  $\sigma_1 = 500\text{MPa}$ ,  $\sigma_2 = 100\text{MPa}$ ,将已知应力和给定角度分别代入(1)式和(2)式,先代入(1)式:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ &= \frac{500 + 100}{2} + \frac{500 - 100}{2} \cos(-120^\circ) \\ &= 300 + 200(-\frac{1}{2}) = 200(\text{MPa})\end{aligned}$$

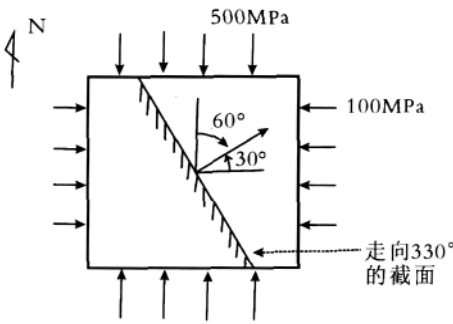


图3 第一例的单元体受力图

Fig. 3 Force diagram of the first example  
走向 330°截面的法线与正东相交 30°,与正北相交负 60°  
本例正北为  $\sigma_1$  方向,所以  $\alpha$  为  $-60^\circ$

再代入(2)式:

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{500-100}{2} \sin 2\alpha \\ &= 200 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}$$

结果是走向 330°的断面上有压应力 200MPa,有顺时针转动的剪应力 173MPa。

在摩尔圆中  $\alpha$  角是  $N$  截面法线与最大主应力  $\sigma_1$  的夹角,在图 3 上是  $-60^\circ$ ,所以  $2\alpha$  为  $-120^\circ$ 。

现在再用图解法解析这个问题(图 4)。先在纸上(最好用方格纸)作  $\sigma_n$  为横坐标轴、 $\tau_n$  为纵坐标轴、原点为  $O$  的坐标图。依题意在刻度相当于 500MPa 的  $\sigma_n$  轴上点出  $\sigma_1$ ,表示南北向主应力值。在刻度为 100MPa 的地方点出  $\sigma_2$ 。图 4 所用方格纸每小格代表 20MPa。 $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  一定在摩尔圆上,我们用半径  $(\sigma_1-\sigma_2)/2=200\text{MPa}$  和圆心点  $O'((\sigma_1+\sigma_2)/2,0)$  用圆规画圆。这个圆一定过  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ ,用量角器从  $\sigma_1$  开始量出  $-120^\circ$ ,找到圆周上一点  $n$ ,这个点的横、纵坐标值就是走向 330°断面上的正应力和剪应力值。从方格纸上可以读出来,该面上压应力为 200MPa,剪应力为  $-173\text{MPa}$  左右。比例尺大些的方格纸作图也相当精确。图 4 上的应力值分别由  $ON$  和  $Nn$  的线长来表示。在二维条件下,只要测出 2 个主应力就可以通过公式或者作图求出任意截面上的正应力和剪应力。作图法简便。依条件类推,只要测出 1 个主应力和某个截面上的正应力、剪应力,等于知道摩尔圆上 2 个点的位置,而且圆心在横坐标轴上,也是可以作图的。也就可以算出另

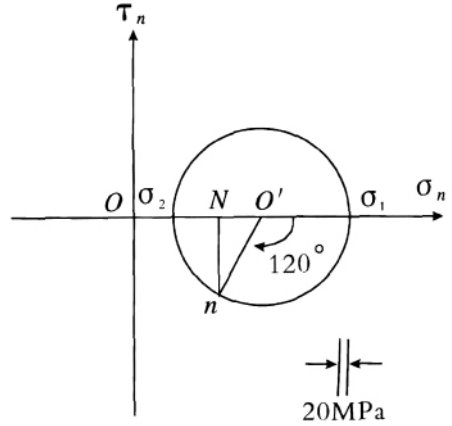


图4 第一例的应力摩尔圆图解

Fig. 4 Stress Mohr circle of the first example

一个主应力和任意截面上的应力。这样应力测量问题就转化成几何作图问题。由此推演出的应变测量问题就转化成为应变摩尔圆作图的问题。这就是应变测量的实质。

计算法和图解法的结果一样,当数字和角度随意时,会发现图解法比三角公式计算更方便,这种方便在有限应变摩尔圆用于应变测量时更能体现。

(2)第二例:岩体内在相互垂直的方向上分别测到压应力 100MPa 和拉应力 100MPa,没有剪应力,求法线与压应力方向成  $45^\circ$  角的截面上的正应力和剪应力。

本题可以与第一例一样用计算法和图解法解,现在我省去计算法,只用图解法来解(图 5)。

依题所给条件,我们知道代表这个应力状态的摩尔圆圆心坐标是  $((\sigma_1+\sigma_2)/2,0)$ ,代入实际值为  $(100-100)/2$ ,即圆心坐标为  $(0,0)$ ,就在坐标原点。半径为  $(\sigma_1-\sigma_2)/2=100\text{MPa}$ 。有了圆心和半径就可以直接画出摩尔圆,圆与横坐标轴交于  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  两点,从方格纸上读出分别为 100MPa 和  $-100\text{MPa}$ ,代表 2 个主应力。圆与纵坐标轴交于  $n$  和  $n'$  两点。在摩尔圆上与  $\sigma_1$  方向的两侧角差为  $2\alpha=90^\circ$ ,则在实际物体上是  $45^\circ$  方向。从图 5 上读出 2 个点的纵坐标值分别为 100MPa 和  $-100\text{MPa}$ ,横坐标值为零,表明 2 个  $45^\circ$  方向分别有量值均为 100MPa、方向相反的剪应力,却没有正应力。其受力状态如图 6 所示。

第二例的应力状态造成最大剪应力作用面上没有正应力,力学上称纯剪切状态。只有当 2 个主应力

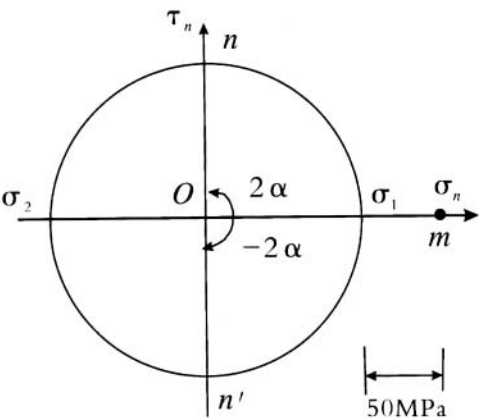


图 5 第二例和第三例的摩尔圆图解

Fig. 5 Mohr circle of the second and the third examples

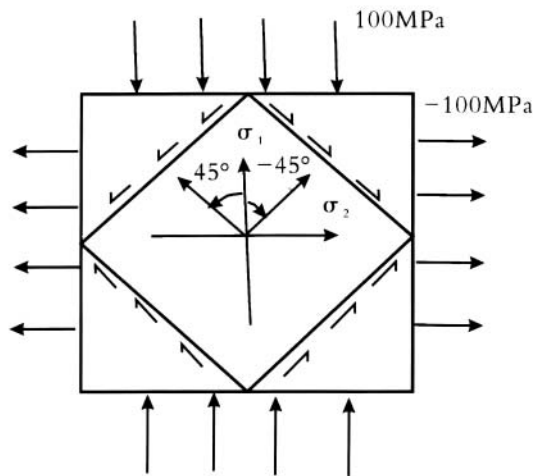


图 6 第二例的受力图

Fig. 6 Force diagram of the second example

大小相等、方向相反同时作用于物体时,在  $45^\circ$  斜截面上没有正应力,这时才会称为纯剪切状态。构造地质上也有纯剪切的观念,但没有力学上严格,似乎只要一个方向压缩,其垂直方向拉伸就算纯剪切作用,甚至只要一个方向压缩,或者一个方向拉伸,或者更不明确的受力状态也归入纯剪切作用。当与力学沟通时,我们应该知道纯剪切的原始意义。

(3)第三例:测到某深处 2 个垂直方向压应力均为  $150\text{MPa}$ ,且没有剪应力,问与 2 个方向夹  $45^\circ$  角的方向剪应力多大?

我们只用图解法来解这个问题。借助图 5,把  $\sigma_1=150$ 、 $\sigma_2=150$  和  $\tau_m=0$  的坐标点画在直角坐标系上,由于半径为零,所以得到重合在一起的  $m$  点。这个点可以看作半径为 0 的摩尔圆,这个点表明其应

力状态在任何方向上都只有正应力没有剪应力,所以  $45^\circ$  夹角方向同样没有剪应力。静止水中就相当于这种状态,水中不能承受剪应力,也不传递剪切波(横波)。这种状态又称静水压力状态。静水压力状态并不表明一定处于静水之中,固体中、岩石中只要 2 个主应力相等(在三维条件下要 3 个主应力相等),就可以视为静水压力状态,简称静压状态或均压状态,这种状态下各方向都没有剪应力。半径为 0 的摩尔圆只是 1 个点  $m$ ,它表示静压状态。

第三例中  $m$  点相当于半径为零的摩尔圆,该圆代表所有剪应力为零的应力状态,例如静止液体内的状态。我们前面曾强调过,应力不能作为矢量用平行四边形法则进行合成或分解,现在试比较一下这样分解的结果。用平行四边形法则,  $\sigma_1$  在  $45^\circ$  方向上的分量为正应力  $\sigma_1 \sin 45^\circ = 70.7\text{MPa}$ ,而剪应力  $\sigma_1 \cos 45^\circ = 70.7\text{MPa}$ 。  $\sigma_2$  在  $45^\circ$  方向上的分量为正应力  $\sigma_2 \cos 45^\circ = -70.7\text{MPa}$ ,剪应力  $\sigma_2 \sin 45^\circ = 70.7\text{MPa}$ ,两者相加,  $45^\circ$  截面上正应力为零,剪应力为  $141.4\text{MPa}$ 。而摩尔圆求出的正应力结果与此相同,剪应力却是  $100\text{MPa}$ 。出现这种错误的原因是违反了应力叠加的规则,应力是张量不是矢量,不适用矢量叠加或分解的原则。

3 结 论

3.1 地下应力的状态

地下条件常是三维状态,3 个主应力都是压应力。3 个主应力不相等的状况可以看成是一个均应力(以最小主应力为半径画的球)叠加一个差应力的状况。其均应力部分影响化学反应平衡,是变质作用压力因素的体现;其差应力部分引起物体变形,产生各种构造形迹。在地质条件下,均应力叠加差应力的状况很普遍,而只有均应力没有差应力,或者只有差应力没有均应力的状况是很偶然的。所以造山带常常也是变质带,变质带常常也是变形带或造山带。另外,摩尔圆的坐标体现的是应力空间,不是实体方位,受力图才体现实体方位。

3.2 多种摩尔圆

了解应力摩尔圆是掌握应变摩尔圆、有限应变摩尔圆和极摩尔圆的基础。限于文章篇幅,本文只介绍应力摩尔圆的基本概念,作为了解后续摩尔圆技法的铺垫。正像文章标题所指的有限应变测量的关键原理是应力摩尔圆。不论研究矿田构造还是区域



构造,只要涉及变形分析的定量化,就需要掌握摩尔圆原理。在以往的文献中笔者<sup>[12-13]</sup>曾不同程度地作过介绍,供读者参阅。

### 3.3 应力用张量运算

应力是张量,与标量、矢量有不同的运算规则。在力学教科书中常用张量公式运算应力关系,会比本文的步骤更简单快捷。但张量运算对许多地质学者会造成理解困难,为了使步骤浅显,本文不得不多作解释,造成文章冗长,特致歉意。

### 参考文献

- [1]李四光.地质力学之基础与方法[M].重庆:重庆大学出版社,1945.
- [2]兰姆赛,等著.单文琅,宋鸿林,蒋荫昌,等译.岩石的褶皱作用与断裂作用[M].北京:地质出版社,1985.
- [3]兰姆赛,等著.刘瑞珣,常志忠,张荣昌,等译.现代构造地质学方法,1卷,应变分析[M].北京:地质出版社,1991.
- [4]郑亚东,常志忠.岩石有限应变测量及韧性剪切带[M].北京:地质出版社,1985.
- [5]Simpson C, De Paor D G. Strain and Kinematic analysis in general shear zones[J]. J. Struct. Geol.,1993,15(1):1-20.
- [6]张进江,郑亚东.运动学涡度、极莫尔圆及其在剪切带定量分析中的作用[J].地质力学学报,1995,1(3):55-64.
- [7]Zhang J, Zheng Y. Polar Mohr constructions for strain analysis in general shear zones[J]. J. Struct. Geol.,1997, 19(5):745-748.
- [8]李海,郭召杰,刘瑞珣,等.极莫尔圆在测量有体积变化剪切带剪切位移量中的应用[J].中国科学(D 辑),2000,30(4):192-298.
- [9]Li H, Guo E, Liu R, et al. Polar Mohr diagram method and its application in calculating the shear displacement of general shear zones with volume loss[J]. Science in China (Series D),2000,43(2):151-157.
- [10]刘瑞珣.流变学基础模型的地质应用及启示[J].地学前缘,2007,14(4):1-65.
- [11]刘瑞珣,张秉良,张臣.描述岩石粘弹性固体性质的开尔文模型[J].地学前缘,2008,15(3):221-225.
- [12]刘瑞珣,吕古贤,王方正,等.变形分析的定量化与莫尔圆的引用与发展[J].中国地质,2003,30(2):120-122.
- [13]吕古贤,王方正,刘瑞珣.超高压变质的构造附加压力与形成深度[M].北京:科学出版社,2004.