

空间直角坐标转换大地坐标的直接解法

王仲锋<sup>1</sup>,杨凤宝<sup>2</sup>

(1. 长春工程学院 勘查与测绘学院,吉林 长春 130021;2. 吉林水利水电勘测设计研究院,吉林 长春 130021)

摘 要:根据地面点地心空间直角坐标与地心大地坐标的关系式,导出由空间直角坐标求解大地坐标的更为简洁的直接计算公式,并对计算误差进行分析讨论。理论分析和实际验算结果表明,该直接解法引起的纬度误差不大于 10<sup>-5</sup> s,可以满足精密的大地测量需要。

关键词:空间直角坐标;大地坐标;坐标转换;坐标系;大地测量

中图分类号:P228.4 文献标志码:A 文章编号:1006-7949(2010)02-0007-03

New study on direct calculation method to turn spacial  
rectangular coordinate into geodetic coordinate

WANG Zhong-feng<sup>1</sup>, YAN G Feng-bao<sup>2</sup>

(1. School of Prospecting and Surveying, Changchun Institute of Technology, Changchun 130021, China; 2. Survey Design and Research Lnstitute of Jilin Water Utilities, Changchun 130021, China)

Abstract :This paper deduces the simpler direct calculating formula from the relative formulas of spacial rectangular coordinate of point with its geodetic coordinate ; analyzes and discusses relative calculating errors. It is proved by the theoretical analyses and the practical caculating results that the latitude error is less than second. This precision can satisfy the need of precision geodetic survey.

Key words :spacial rectangular coordinate; geodetic coordinate; coordinate transformation; coordinate system; geodetic survey

由地面点的地心空间直角坐标求解其地心大地坐标的应用越来越广泛。例如,用 GPS 可直接测得地面点在 WGS-84 下的地心空间直角坐标,若要计算地面点在 WGS-84 下的高斯平面直角坐标,应首先将地心空间直角坐标转换为地心大地坐标。由于地面点的地心空间直角坐标求解其地心大地坐标时,“大地纬度 B 的计算比较复杂,通常采用迭代法<sup>[1]</sup>”进行求解。迭代法的公式虽然简明,但对一般用户而言,应用起来存在着诸多不便。文献[2]虽然给出两种直接计算大地纬度 B 的公式,但所给公式亦比较复杂,而且不够直观。从目前科技期刊中检索到的文献看,由地面点的地心空间直角坐标求解其地心大地坐标时,均使用迭代法。鉴于以上原因,本文导出直接计算大地纬度 B 的公式更为简单、直观。

1 公式推导

空间直角坐标与大地坐标的关系为

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L, \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B. \end{aligned} \tag{1}$$

当已知地面点的空间直角坐标 X、Y、Z 求其大地坐标 L、B 及大地高 H 时,有以下直接计算公式:

$$\begin{aligned} L &= \arctan(Y/X), \\ B &= \arctan \frac{Z \sin L}{Y(1 - e^2 + \quad)}, \\ H &= \frac{X}{\cos B \cos L} - N = \frac{Y}{\cos B \sin L} - N. \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} &= \frac{He^2}{N + H} + d, \\ &= \frac{H^0 e^2}{N^0 + H^0}, \\ d &= \frac{N^0 g^0 g^2 \cos B^0 \sin L}{Y(1 - e^2)} \sin^2 B^0 - \frac{e^2 \sin^2 B^0}{4(1 - e^2 \sin^2 B^0)}, \\ N^0 &= a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B^0}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

收稿日期:2009-04-17  
作者简介:王仲锋(1962-),男,教授,博士。

$$H^0 = \frac{Y}{\cos B^0 \sin L} - N^0, \quad (5)$$

$$B^0 = \arctan\{Z \sin L / [Y(1 - e^2)]\}, \quad (6)$$

$$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2. \quad (7)$$

在式(2)中,可由式(1)直观导出  $L$  和  $H$ , 对于求  $B$  可做如下推导:

由式(1)知

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Y \sin L} &= \frac{Z \sin L}{Y} = \frac{[N(1 - e^2) + H]}{(N + H)} \tan B = \\ 1 - \frac{Ne^2}{N + H} \tan B &= \\ (1 - e^2) + (e^2 - \frac{Ne^2}{N + H}) \tan B &= \\ (1 - e^2) + \frac{He^2}{N + H} \tan B. \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$= \frac{He^2}{N + H}. \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)整理,即可得到式(2)中求解  $B$  的严密公式。

但是,由于  $N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$ ,  $H = (Y / \cos B \sin L) - N$ ,  $N$  和  $H$  均是  $B$  的函数,用式(3)求解时做近似处理,即将其中的  $N$  换成  $N^0$ ,  $H$  换成  $H^0$ ,这样避免迭代计算。从理论上讲,上述近似处理必将对  $B$  的解造成影响,但这种影响是微不足道的,基本上属于计算取舍误差的范畴。

## 2 公式分析

### 2.1 的最大值

由于

$$= \frac{He^2}{H + N} = \frac{He^2}{H + a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (10)$$

故

$$_{\max} = \frac{He^2}{H + N_{\min}} = \frac{He^2}{H + a}. \quad (11)$$

取西安 80 坐标系的参数,即  $a = 6\,378\,140$  m,  $e^2 = 0.006\,694\,385\,049$  取大地高  $H = 10\,000$  m (在地球表面上,这一高度实际上是少见的,它已超过了珠峰的高度)时,算得  $_{\max} = 1.05 \times 10^{-5}$ 。而在珠峰峰顶  $B = 27\,59\,16.942\,41$  雪面大地高  $H = 8\,821.401\,6$  m 时,  $= 9.239\,193 \times 10^{-6}$ 。可见是一个小量,在多数地区远远小于  $10^{-5}$ 。

### 2.2 $B^0$ 与 $B$ 的差值

由于是一个小量,故将

$$B = \arctan \frac{Z \sin L}{Y(1 - e^2 + )},$$

在  $= 0$  处用泰勒级数展开,并取一次项得

$$B = \arctan \frac{Z \sin L}{Y(1 - e^2)} -$$

$$\frac{YZ \sin L}{(Z \sin L)^2 + [Y(1 - e^2)]^2} = B^0 + B, \quad (12)$$

其中

$$B = - \frac{YZ \sin L}{(Z \sin L)^2 + [Y(1 - e^2)]^2}, \quad (13)$$

将式(1)代入式(13),可得

$$\frac{[N(1 - e^2) + H]}{(N + H)} = 1 - e^2 + \frac{He^2}{N + H} = (1 - e^2 + ), \quad (14)$$

整理得

$$B = - \frac{(1 - e^2 + ) \cos B \sin B}{(1 - e^2 + )^2 \sin^2 B + (1 - e^2)^2 \cos^2 B}, \quad (15)$$

考虑到是一个小量,故在上式右端的分子和分母中取  $(1 - e^2 + ) (1 - e^2)$ , 于是有(秒值)

$$B = - \frac{\sin 2B}{2(1 - e^2)} = - \frac{\sin 2B^2}{2(1 - e^2)}. \quad (16)$$

当取大地高  $H = 10\,000$  m 和  $B = 45^\circ$  (此时  $B = \max$ ) 时,代入

$$\begin{aligned} B &= - \frac{\sin 2B}{2(1 - e^2)} = \\ &= - \frac{\sin 2B}{2(1 - e^2)} \frac{e^2 H}{H + a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \end{aligned} \quad (17)$$

算得  $B_{\max} = 1.08$  (此时  $B = 45^\circ$ , 在中国的这一地区,  $H$  远远小于  $10\,000$  m)。在珠峰峰顶,  $B = 0.795\,06$ 。可见,就地面点而言,  $B^0$  与  $B$  的差值在极端情况下约差 1, 而多数地区均远远小于 1。

### 2.3 $N^0$ 与 $N$ 的差值

由于

$$\sin B = \sin(B^0 + B) = \sin B^0 + \cos B^0 B,$$

$$\sin^2 B = \sin^2 B^0 + \sin 2B^0 B + \cos^2 B^0 B^2$$

$$\sin^2 B^0 + \sin 2B^0 B = \sin^2 B^0 + .$$

其中

$$= \sin 2B^0 B, \quad (18)$$

故

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = a / \sqrt{1 - e^2 (\sin^2 B^0 + )} =$$

$$a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B^0 - e^2} =$$

$$a / (1 - e^2 \sin^2 B^0) (1 - [e^2 / (1 - e^2 \sin^2 B^0)]) =$$

$$N^0 / (1 - [e^2 / (1 - e^2 \sin^2 B^0)]),$$

即

$$N^0 = N \left( 1 - \frac{e^2}{(1 - e^2 \sin^2 B^0)} \right) =$$
$$N \left( 1 - \frac{e^2}{2} \right), \tag{19}$$

其中

$$\frac{N - N^0}{N} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{2(1 - e^2 \sin^2 B^0)}{B e^2 \sin 2B^0}, \tag{20}$$

由于  $\frac{N - N^0}{N}$  是一个很小的量,故将式(19)在  $\frac{N - N^0}{N} = 0$  处用泰勒级数展开,并取一次项可得

即

$$N - N^0 = \frac{B e^2 \sin 2B^0}{2(1 - e^2 \sin^2 B^0)} N$$
$$= \frac{e^2 \sin^2 2B^0}{4(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B^0)} N^0. \tag{21}$$

取  $B^0 = 45^\circ$  及  $B = 1$  时,  $(N - N^0)/N = 1/60\,000\,000$ 。可见,以  $B^0$  代替  $B$  计算出的  $N^0$  与  $N$  的相对误差很小。

2.4  $H^0$  与  $H$  的差值

由式(2)知

$$H = \frac{Y}{\cos B \sin L} - N,$$

故有

$$dH = d \frac{Y}{\cos B \sin L} - dN = \frac{Y}{\cos B \sin L} \tan B \, dB - dN =$$
$$(N + H) \tan B \, dB - dN, \tag{22}$$

其中

$$dH = H - H^0,$$
$$dN = N - N^0.$$

由式(22)看出,由于  $N$  的值较大, $dH$  受  $dB$  影响亦较大。考虑到式(16)、式(21)和式(22)可近似为

$$dH = \frac{Y \sin^2 B^0}{(1 - e^2) \cos B^0 \sin L} +$$
$$\frac{e^2 \sin^2 2B^0}{4(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B^0)} N^0. \tag{23}$$

2.5  $dH$  与  $dN$  对  $\alpha$  的综合影响

对式(9)求微分得

$$d\alpha = \frac{Ne^2}{(N + H)^2} dH - H \frac{dN}{N}.$$

将式(22)代入上式有

$$d\alpha = \frac{Ne^2}{(N + H)^2} (N + H) \tan B \, dB - dN - H \frac{dN}{N} =$$
$$\frac{Ne^2}{(N + H)} \tan B \, dB - \frac{dN}{N}.$$

再将式(21)、式(16)和式(2)及  $dB = B$  代入上式有

$$d\alpha = \frac{Ne^2}{(N + H)} B \tan B^0 - \frac{e^2 \sin 2B^0}{2(1 - e^2 \sin^2 B^2)} =$$
$$- \frac{Ne^2}{(N + H)} \tan B^2 - \frac{e^2 \sin 2B^0}{2(1 - e^2 \sin^2 B^0)} \frac{\sin 2B^0}{2(1 - e^2)} =$$
$$- \frac{Ne^2}{(N + H)} \sin^2 B^0 - \frac{e^2 \sin^2 2B^0}{4(1 - e^2 \sin^2 B^0)} (1 - e^2) =$$
$$- \frac{N^0 g^0 g^2 \cos B^0 \sin L}{Y(1 - e^2)} \sin^2 B^0 - \frac{e^2 \sin^2 2B^0}{4(1 - e^2 \sin^2 B^0)}.$$
$$\tag{24}$$

取  $\alpha = 0$ ,  $B = B^0$  代入上式得

$$d\alpha = - \frac{N^0 g^0 g^2 \cos B^0 \sin L}{Y(1 - e^2)} \sin^2 B^0 - \frac{e^2 \sin^2 2B^0}{4(1 - e^2 \sin^2 B^0)}.$$
$$\tag{25}$$

可知,式(24)便是式(3)中的第 2 项。

3 算 例

例 1 设  $L = 124^\circ$ ,  $B = 44^\circ$ ,  $H = 160\text{ m}$  取西安 80 坐标系的参数,利用式(1)算得  $X = -2\,569\,823.337\,900\text{ m}$ ,  $Y = 3\,809\,919.776\,743\text{ m}$ ,  $Z = 4\,408\,204.814\,268\text{ m}$  现用文中给出的公式直接反算  $B$ ,并与已知值进行比较。

解:因为

$$L = \arctan(Y/X) = 120^\circ 00' 00.000\,000\,016\,7,$$
$$B^0 = \arctan[Z \sin L / Y(1 - e^2)] = 44^\circ 00' 00.017\,401\,821\,3,$$
$$N^0 = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B^0} = 6\,388\,466.927\,439\,15\text{ m},$$
$$H^0 = \frac{Y}{\cos B^0 \sin L} - N^0 = 160.518\,608\,93\text{ m}.$$

所以

$$\alpha^0 = \frac{H^0 e^2}{H^0 + N^0} = 1.682\,008\,976\,623 \times 10^{-7},$$
$$d\alpha = - \frac{N^0 g^0 g^2 \cos B^0 \sin L}{Y(1 - e^2)} \sin^2 B^0 -$$
$$\frac{e^2 \sin^2 2B^0}{4(1 - e^2 \sin^2 B^0)} =$$
$$- 5.450\,996\,647\,4 \times 10^{-10} =$$
$$- 0.005\,450\,996\,647\,4 \times 10^{-7},$$
$$= \alpha^0 + d\alpha = 1.676\,557\,979\,976 \times 10^{-7},$$

$$B = \arctan \frac{Z \sin L}{Y(1 - e^2 + \alpha)} = 44^\circ 00' 00.000\,005\,150\,4,$$

$$B = \frac{\sin 2B^0}{2(1 - e^2)} = - 0.017\,396\,69,$$

$$B^0 + B = 44^\circ 00' 00.000\,005\,13,$$

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = 6\,388\,466.925\,631\text{ m},$$

$$H = \frac{Y}{\cos B \sin L} - N = 159.999\,927\text{ m}.$$

(下转第 12 页)

表 3 插值坐标结果比较

插值时间 / s	卫星坐标 X / m	卫星坐标 Y / m	卫星坐标 Z / m
356 410	- 6. 30 18 6	- 2. 562 48	- 3. 378 32
356 420	- 6. 27 64 6	- 2. 554 79	- 3. 372 98
356 430	- 6. 25 10 7	- 2. 547 09	- 3. 367 58
356 440	- 6. 22 57 0	- 2. 539 38	- 3. 362 12
356 450	- 6. 20 03 4	- 2. 531 67	- 3. 356 6
356 460	- 6. 17 50 0	- 2. 523 95	- 3. 351 01
356 470	- 6. 14 96 6	- 2. 516 23	- 3. 345 36

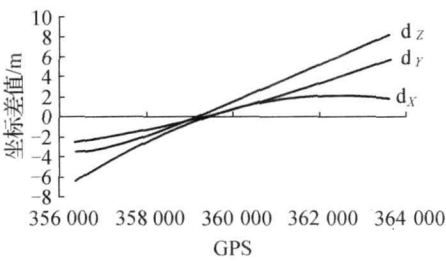


图 1 PRN2 精密星历广播星历比较图

4 结 论

在实验过程中,比较成功获取广播星历的所有卫星,时间持续一周。由于卫星分布、地域限制等因素,部分位于精密星历中的卫星接收不到广播星历,故没有参与比较。

1) 通过比较可以看出,内插后的精密星历和广播(上接第 9 页)

由以上计算过程可以看出,本例直接反算出的 B 与已知值仅差  $5.15 \times 10^{-6}$  s,  $B^0 + B$  与已知值仅差  $5.13 \times 10^{-6}$  s,完全可以满足精密大地测量的需要。

例 2 已知珠穆朗玛峰峰顶  $B = 27^\circ 59' 16.942\ 41''$ ,  $L = 86^\circ 55' 31.721\ 37''$ ,以及雪面大地高  $H = 8\ 821.401\ 6$  m,算得  $X = 302\ 726.854\ 413$  m,  $Y = 5\ 636\ 102.390\ 135$  m,  $Z = 2\ 979\ 527.619\ 433$  m,其坐标系为北京 54 坐标系,现用本文给出的公式直接反算 B,并与已知值进行比较。

利用直接法算得  $L = 86^\circ 55' 31.721\ 369\ 995\ 4''$ ,  $B^0 = 27^\circ 59' 17.737\ 337\ 001\ 1''$ ,  $N^0 = 6\ 382\ 951.343\ 716\ 11$  m,  $H^0 = 8\ 834.424\ 528\ 80$  m,  $d^2 = 9.251\ 332\ 686\ 987 \times 10^{-6}$ ,  $d = -0.013\ 638\ 803\ 118 \times 10^{-6}$ ,  $d^3 = 9.237\ 693\ 883\ 9 \times 10^{-6}$ ,  $B = 27^\circ 59' 16.942\ 411\ 62''$ ,  $N = 6\ 382\ 951.275\ 382$  m,  $H = 8\ 821.401\ 627$  m。

可以看出,本例直接反算出 B 与已知值差  $1.62 \times 10^{-6}$  s,完全可以满足精密大地测量的需要。

星历还是存在较大的误差,在 X 方向、Y 方向、Z 方向、都产生了 m 级的误差。由此可以看出,广播星历精度并没有很大的改进,对于高精度的测量工作还是选取精密星历为益。

2) 对于拉格朗日多项式,在插值广播星历时,阶数跟所选取得样本点个数相同,在一个时段内其插值精度受阶数影响,同时还受样本点间的时间间隔影响。插值阶数不宜过大,当阶数过大时会在插值区间两端产生较大跳动,中间部分则比较吻合,即所谓的龙格现象,一般在 5 阶左右较为合适。

3) 对于切比雪夫多项式,在插值精密星历时,要达到 cm 级的定位精度,至少需要 10 阶。10 阶以上对于坐标精度没有显著提高。

参考文献

[1] 崔先强,焦文海,秦显平. GPS 广播星历参数拟合算法的探讨[J]. 测绘科学,2006,31(1):25-26.  
[2] 李征航,黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 武汉:武汉大学出版社,2005.  
[3] 魏子卿,葛茂荣. GPS 相对定位的数学模型[M]. 北京:测绘出版社,1998.  
[4] 蔡艳辉,程鹏飞,李夕银. 卫星坐标的内插与拟合[J]. 全球定位系统,2003(3):10-13.  
[5] 李庆扬,关治,白峰杉. 数值计算原理[M]. 北京:清华大学出版社,20001.

[责任编辑:李铭娜]

4 结束语

根据地面点地心空间直角坐标与地心大地坐标的关系式,导出由空间直角坐标求解大地坐标的简明直接计算公式,并对计算误差进行分析讨论。理论分析和实际验算结果表明,该直接解法引起的纬度误差不大于  $10^{-5}$  s,可以满足精密大地测量需要。

参考文献

[1] 孔祥元,郭际明,刘宗泉. 大地测量学基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2007.  
[2] 周忠谟,易杰军,周琪. GPS 卫星测量原理与应用[M]. 北京:测绘出版社,1999.  
[3] 束婵方,李斐,沈飞. 空间直角坐标向大地坐标转换的新算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2009,34(5):14-16.  
[4] 李宏. 空间直角坐标至大地坐标的直接严密互换[J]. 测绘与空间地理信息,2007(6):48-50.  
[5] 张锐. 坐标转换中大地高对平面坐标和高程的影响[J]. 测绘工程,2005,14(4):17-20.

[责任编辑:李铭娜]