

有限元和边界元法

朱加铭

哈尔滨工业大学

目 录

| | |
|-----------------------------|----|
| 第 1 章 绪论..... | 5 |
| 1.1 引言..... | 5 |
| 1.2 一个简例..... | 6 |
| 1.3 有限单元法分析过程的描述..... | 11 |
| 1.3.1 结构离散化建立计算模型..... | 11 |
| 1.3.2 单元分析..... | 11 |
| 第 2 章 平面问题的有限单元法..... | 14 |
| 2.1 三角形应变单元..... | 14 |
| 2.1.1 连续体的离散化..... | 14 |
| 2.1.2 位移模式..... | 14 |
| 2.1.3 用结点位移表示应变..... | 16 |
| 2.1.4 用结点位移表示应力..... | 17 |
| 2.2 形函数的性质 面积坐标..... | 18 |
| 2.2.1 形函数的性质..... | 18 |
| 2.2.2 面积坐标..... | 20 |
| 2.4 整体刚度方程的建立 整体刚度矩阵..... | 26 |
| 2.5 等效结点力 荷载列阵..... | 31 |
| 2.6 约束条件的处理..... | 34 |
| 2.7 解题步骤和注意事项..... | 36 |
| 2.7.1 解题步骤..... | 36 |
| 2.7.2 注意事项..... | 37 |
| 2.8 解答的收敛性..... | 38 |
| 2.9 热应力计算..... | 39 |
| 2.9.1 热应力..... | 39 |
| 2.9.2 平面应力问题..... | 40 |
| 2.9.3 平面应变问题..... | 41 |
| 2.10 矩形单元..... | 42 |
| 2.10.1 概述..... | 42 |
| 2.10.2 位移模式..... | 43 |
| 2.10.3 单元应变..... | 44 |
| 2.10.4 单元应力..... | 45 |
| 2.10.5 单元刚度矩阵..... | 45 |
| 2.10.6 等效结点力..... | 46 |
| 2.10.8 矩形单元和三角形常应变单元比较..... | 46 |
| 第 3 章 平面问题有限元法程序设计..... | 49 |
| 3.1 概 述..... | 49 |
| 3.1.1 建立离散化模型, 输入已知信息..... | 49 |
| 3.1.2 形成、组集结构刚度矩阵..... | 49 |
| 3.1.3 载荷、约束信息量处理..... | 49 |
| 3.1.4 求解结构整体刚度方程..... | 49 |
| 3.1.5 计算应力等其它力学量..... | 49 |
| 3.1.6 输出计算结果..... | 49 |
| 3.2 常应变单元的主要公式和程序设计..... | 50 |

| | |
|--------------------------------------|-----|
| 3.2.1 常应变单元的主要公式..... | 50 |
| 3.2.2 程序框图和程序设计重点..... | 51 |
| 3.2.3 程序结构..... | 52 |
| 3.2.5 标识符说明及程序中的数据组织..... | 53 |
| 3.2.6 主程序..... | 54 |
| 3.3 原始数据输入..... | 54 |
| 3.4 形成材料弹性矩阵..... | 55 |
| 3.5 形成单元刚度矩阵..... | 55 |
| 3.6 形成结构整体刚度矩阵..... | 57 |
| 3.6.1 存贮方法..... | 57 |
| 3.6.2 关于有限元结点的合理编序..... | 58 |
| 3.6.3 等带宽存贮技术, 形成组集结构整体刚度矩阵的子程序..... | 59 |
| 3.7 形成结构整体荷载列阵..... | 60 |
| 3.8 约束条件的处理..... | 60 |
| 3.9 结构整体刚度矩阵方程的求解..... | 61 |
| 3.9.1 高斯消元法原理..... | 62 |
| 3.9.2 对称带状稀疏方程组的高斯消元法..... | 63 |
| 3.10 单元应力分析..... | 66 |
| 第 4 章 轴对称空间问题的有限单元法..... | 74 |
| 4.1 概述..... | 74 |
| 4.2 三角形截面环单元..... | 75 |
| 4.2.1 单元的位移函数..... | 75 |
| 4.2.2 单元应变..... | 75 |
| 4.2.3 单元应力..... | 76 |
| 4.3 单元刚度矩阵..... | 77 |
| 4.4 等效结点力计算..... | 79 |
| 4.4.1 体积力..... | 79 |
| 4.4.2 表面力..... | 80 |
| 4.5 采用四面体单元解一般空间问题..... | 82 |
| 4.5.1 单元的位移系数..... | 82 |
| 4.5.2 单元的应变与应力..... | 84 |
| 4.5.3 刚度矩阵..... | 85 |
| 4.5.4 等效结点计算..... | 86 |
| 第 5 章 等参数单元..... | 88 |
| 5.1 等参数单元的概念..... | 88 |
| 5.2 高斯求积法..... | 90 |
| 5.3 平面八结点等参单元..... | 93 |
| 5.3.2 单元刚度矩阵..... | 96 |
| 5.4 空间二十结点等参单元..... | 99 |
| 5.4.1 单元的应变矩阵和应力矩阵..... | 100 |
| 5.4.2 单元刚度矩阵..... | 103 |
| 5.4.3 单元等效结点力列阵..... | 104 |
| 第 6 章 杆件系统的有限元法..... | 108 |
| 6.1 概述..... | 108 |

| | |
|---|-----|
| 6.2 局部坐标系中梁单元的刚度矩阵与等效结点力..... | 108 |
| 6.2.4 局部坐标系中梁单元的单元刚度矩阵的计算..... | 112 |
| 6.2.5 等效结点力计算..... | 112 |
| 6.3 坐标变换 体坐标系中单元 刚度矩阵与等效结点力..... | 115 |
| 6.3.1 坐标变换方法..... | 115 |
| 6.3.2 转换矩阵 T..... | 115 |
| 6.4 结构整体刚度矩阵与节点载荷列阵 算例..... | 117 |
| 6.5 释放自由度..... | 119 |
| 第 7 章 动力学问题的有限单元法简述..... | 125 |
| 7.1. 动力学方程 质量矩阵及阻尼矩阵..... | 125 |
| 7.2 特征值问题..... | 128 |
| 7.3 动力响应 逐步积分法..... | 129 |
| 7.3.1 动力响应问题..... | 129 |
| 7.3.2 逐步积分法..... | 129 |
| 第 8 章 平面问题的边界元法..... | 134 |
| 8.1 基本解..... | 134 |
| 8.1.1 δ 函数..... | 134 |
| 8.1.2 基本解..... | 135 |
| 8.2 边界积分方程..... | 139 |
| 8.2.1 积分方程..... | 139 |
| 8.2.2 边界积分方程..... | 141 |
| 8.3 边界积分方程的离散..... | 144 |
| 8.4.1 H_{ij} 的计算..... | 145 |
| 8.4.3 H_{ij} 、 G_{ij} ($i \neq j$) 的计算..... | 147 |
| 8.5 域内的位移和应力..... | 151 |
| 8.5.1 域内的位移..... | 151 |
| 8.5.2 域内的应力..... | 151 |
| 8.6 边界上的应力..... | 152 |
| 8.7.1 使用说明..... | 154 |
| 8.7.3 源程序..... | 155 |

第 1 章 绪论

1.1 引言

随着现代工业、生产技术的发展，不断要求设计高质量、高水平的大型、复杂和精密的机械及工程结构。为此目的，人们必须预先通过有效的计算手段，确切地预测即将诞生的机械和工程结构在未来工作时所发生的应力、应变、位移。但是传统的一些方法往往难以完成对工程实际问题的有效分析。弹性力学的经典理论，由于求解偏微分方程边值问题的困难，只能解决结构形状和承受载荷较简单的问题，对于几何形状复杂、不规则边界、有裂缝或厚度突变，以及几何非线性、材料非线性等问题往往遇到很多麻烦，试图按经典的弹性力学方法获得解析解是十分困难的，甚至是不可能的。因此，需要寻求一种简单而又精确的数值分析方法，有限单元法正是适应这种要求而产生和发展起来的一种十分有效的数值计算方法。

这个方法起源于 20 世纪 50 代中期航空工程中飞机结构的矩阵分析。1960 年美国的克劳夫 (W. Clough) 采用此方法进行飞机结构分析时，首次将这种方法起名为“有限单元法” (The Finite Element Methods)。

有限单元法的基本思想：在力学模型上将一个原来连续的物体离散成为有限个具有一定大小的单元，这些单元仅在有限个结点上相连接。对于每个单元，根据分块近似的思想，选择一种简单的函数来表示单元内位移的分布规律，并按弹性理论中的能量原理（或用变分原理）建立单元结点力和结点位移之间的关系，并在结点上引进等效力以代替实际作用于单元上的外力。最后，把所有单元的这种关系式集合起来，就得到一组以结点位移为未知量的代数方程组，解这些方程组就可以求出物体上有限个离散结点上的位移。

有限单元法与有限差分法、古典变分法虽然都是近似解法，但近似的本质是不同的。众所周知，微分方程式能正确反映所需分析的连续体的规律，差分法只是在数学上将微分方程用差分方程代替，而后进行数值运算，因此差分法可看成是数学上的近似。有限单元法则是在力学模型上作了近似（或者说是作了物理上的近似），它得到的结果是模型化了的结构的数值精确解。由于有限单元的分割和结点的配置比较灵活，即使边界较复杂，也可使边界结点落在实际边界上，因而可给出边界的较好的逼近，且可以在应力集中区域配置较多的结点，以提高解的精度。这都是差分法所不能做到的。有限单元法与古典变分法也有不同。古典变分法是用整体构造的逼近函数（含有若干个待定系数）去计算能量泛函。由能量泛函小条件导出的是求解待定系数的变分方程。而有限单元法是用分块（单元）构造单元的逼近函数（含有若干个结点基本未知量），去计算每个单元的能量泛函，而后通过集合得到整体结构的能量泛函，由能量泛函极小条件导出的是求解结点基本未知量的代数方程。鉴于分单元构造逼近函数远比整体构造逼近函数方便，有限单元法的实用性便大大超过了古典变分法。

有限单元法具有很多优点，主要有以下几点。

- 1、理论基础简明，物理概念清晰，且可在不同的水平上建立起对该法的理解。既可通过直观的物理途径来学习和运用这一方法，也可以为该法建立严格的数学基础。

2、具有灵活性和适用性，应用范围极为广泛。它不仅能成功地处理如应力分析中的非均匀材料、各向异性材料、非线性应力应变关系以及复杂边界条件等难题，且随着其理论基础和方法的逐步完善，还能成功地用来求解如热传导、流体力学及电磁场领域的许多问题。

3、该法在具体推导运算中，广泛采用了矩阵方法。矩阵代数能把繁冗的分析和运算用矩阵符号表示成非常紧凑简明的数学形式，因而最适合于电子计算机存贮，便于实现程序设计的自动化。

总之，有限单元法已被公认为应力分析的有效工具而受到普遍的重视和广泛应用。有限单元法随着所取未知量的不同，有所谓位移法、力法和混合法。本书只讨论最为普遍的位移法。

1.2 一个简例

在讨论连续体问题之前，为了对有限元处理问题的方法有一个明确的概念，我们先用一个大家在材料力学中所熟悉的例子，来说明如何确定单元的力学特性以及怎样从单元特性集合得到结构特性（力-位移关系）。

图 1-1 是一个由两根杆件组成的简单桁架。杆件的横截面面积都为 A ，弹性模量为 E ，长度分别为 l_1 ， l_2 。假设取每根杆件作为一个单元，各杆端部的铰链作为结点。桁架共有两个单元，三个结点，结点和单元的编号如图 1-1 (a)。

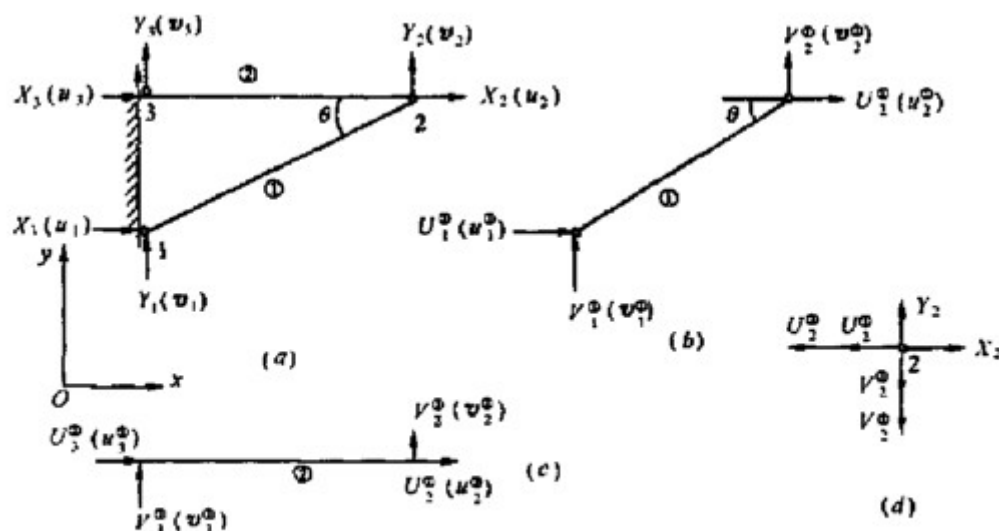


图 1-1

作用在结点上的外力（包括约束反力），称为结点载荷。在载荷作用下结点位置的变动称为结点位移。图 1-1 (a) 所示的简单桁架的结点载荷分量为 X_1 、 Y_1 、 X_2 、 Y_2 、 X_3 、 Y_3 ，桁架的结点位移分量为 u_1 、 v_1 、 u_2 、 v_2 、 u_3 、 v_3 。

结点与单元之间的作用力称为结点力。要注意，结点力和结点载荷不要相混淆，结点力是内力，结点载荷是外力。结点力要看是哪个单元与哪个结点相作用而确定。

现在来确定单元①的结点力与结点位移之间的关系。

图 1-1 (b) 中 $U_1^{\text{①}}$ 、 $V_1^{\text{①}}$ 、 $U_2^{\text{①}}$ 、 $V_2^{\text{①}}$ 分别为结点 1 和结点 2 施于单元①的结点力沿坐标轴 x 和 y 方向的分量， $u_1^{\text{①}}$ 、 $v_1^{\text{①}}$ 、 $u_2^{\text{①}}$ 、 $v_2^{\text{①}}$ 分别为结点 1 和结点 2 的位移沿 x 和 y 方向的分量。这里上标表示单元的号码，下标表示结点的号码（下

同)。结点载荷、结点力和结点位移均假设与坐标轴正方向一致为正。

因为杆件在结点处是铰接的，不存在结点力矩。每个结点的力和位移各有两个分量。即每个结点具有两个自由度，整个单元共有四个自由度，因此需要用以下四个方程来描述它的力—位移之间的关系：

$$\begin{cases} U_1^{(1)} = k_{11}u_1^{(1)} + k_{12}v_1^{(1)} + k_{13}u_2^{(1)} + k_{14}v_2^{(1)} \\ V_1^{(1)} = k_{21}u_1^{(1)} + k_{22}v_1^{(1)} + k_{23}u_2^{(1)} + k_{24}v_2^{(1)} \\ U_2^{(1)} = k_{31}u_1^{(1)} + k_{32}v_1^{(1)} + k_{33}u_2^{(1)} + k_{34}v_2^{(1)} \\ V_2^{(1)} = k_{41}u_1^{(1)} + k_{42}v_1^{(1)} + k_{43}u_2^{(1)} + k_{44}v_2^{(1)} \end{cases} \quad (1-1)$$

采用矩阵记号写成：

$$\begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ V_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ V_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (1-2)$$

简写为：

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= k^{(1)}\delta^{(1)} \\ \delta^{(1)} &= [u_1^{(1)} \quad v_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad v_2^{(1)}]^T \\ R^{(1)} &= [U_1^{(1)} \quad V_1^{(1)} \quad U_2^{(1)} \quad V_2^{(1)}]^T \end{aligned} \quad (1-3)$$

分别称为单元①的结点位移列阵和结点力列阵； $k^{(1)}$ 称为单元①的刚度矩阵。它的元素 k_{ij} （ $i, j = 1, 2, 3, 4$ ）称为刚度系数。 k_{ij} 的物理意义表示由 j 自由度方向产生单位位移，其余自由度方向的位移全为零时 i 自由度方向所需施加的力。

例如刚度矩阵 k 中的第一列各系数的物理意义说明如下：

若令（1-1）各式中

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= 1 \\ v_1^{(1)} = u_2^{(1)} = v_2^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

则得，

$$U_1^{(1)} = k_{11} \quad V_1^{(1)} = k_{21} \quad U_2^{(1)} = k_{31} \quad V_2^{(1)} = k_{41}$$

它们表示，当结点1沿X方向产生单位位移，而同时约束住单元①的所有其余的结点位移时，各结点施于单元①上的力（图1-2）。这些力组成一个平衡力系。它们表示单元①抵抗位移 $u_1^{(1)}$ 的刚度。这些力很容易由材料力学知识求得。

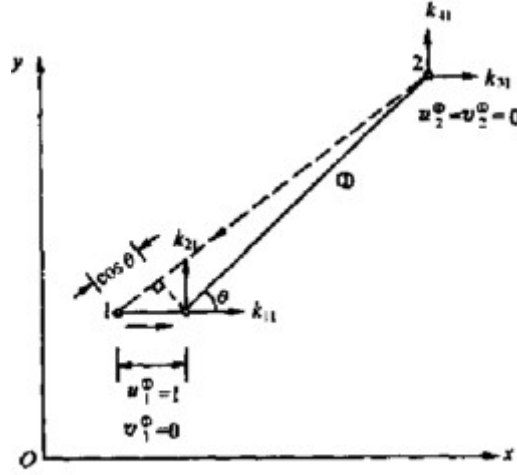


图 1-2

当位移 $u_1^0 = 1$ ，其余结点位移都等于零时，单元的长度将缩短 $\Delta l_1 = \cos \theta$ ，于是需要轴向压力为 $\frac{EA}{l_1} \Delta l_1 = \frac{EA \cos \theta}{l_1}$ ，这就是结点 1 作用于单元①上的力，它在 x 和 y 方向的分量分别是：

$$k_{11} = \frac{EA}{l_1} \cos^2 \theta$$

$$k_{21} = \frac{EA}{l_1} \cos \theta \sin \theta$$

结点 2 作用于单元①上的力，它的大小与之相等而方向相反，即

$$k_{31} = -\frac{EA}{l_1} \cos^2 \theta$$

$$k_{41} = -\frac{EA}{l_1} \cos \theta \sin \theta$$

继续对位移 v_1^0 、 u_2^0 、 v_2^0 做类似的分析，便可得到 k_1 中其他各列的元素。将所有的结果汇集在一起，得到，

$$\begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ V_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ V_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l_1} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (1-4)$$

单元①的刚度矩阵为，

$$k^{(1)} = \frac{EA}{l_1} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

同理(只要在式(1-4)中令 $\theta = \pi$, $l_1 = l_2$), 可求得作用于单元②的结点力和结点位移之间的关系如下，

$$\begin{Bmatrix} U_2^{(2)} \\ V_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ V_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (1-6)$$

简写成

$$\mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{k}^{(2)} \boldsymbol{\delta}^{(2)} \quad (1-7)$$

式中, $\mathbf{k}^{(2)}$ 是单元②的刚度矩阵, $\boldsymbol{\delta}^{(2)}$ 、 $\mathbf{R}^{(2)}$ 分别是单元②的结点位移列阵和结点力列阵。再次提醒注意, 这里的上标代表单元号码。

$$\mathbf{k}^{(2)} = \frac{EA}{l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

在单元分析的基础上, 由单元的力—位移关系, 加以集合便可得到结构的力—位移关系, 即结构的结点荷载与结点位移间的关系。方程组 (1-4) 和 (1-6) 是桁架被离散后的两个单元的结点力—位移方程, 虽然它们在形式上并无直接的联系, 然而在杆件单元重新组合成整体桁架后, 在荷载作用下, 桁架是平衡的, 位移也是协调的。这两个条件反映在单元的连接点上, 作用于结点上的结点荷载和结点力应满足平衡条件, 同时, 在单元连接点处的结点位移, 也应该满足位移的协调条件。这样, 单元与整体结构间的力学特性就被联系起来了。

图 1-1 中结构的结点位移分量 u_1 、 v_1 、 u_2 、 v_2 、 u_3 、 v_3 和单元结点位移分量 $u_1^{(1)}$ 、 $v_1^{(1)}$ 、 $u_2^{(1)}$ 、 $v_2^{(1)}$ 、 $u_3^{(1)}$ 、 $v_3^{(1)}$ (其中上标 1=1 或 2 表示单元的号码) 之间的协调关系为

$$\begin{cases} u_1 = u_1^{(1)} & v_1 = v_1^{(1)} \\ u_2 = u_2^{(1)} = u_2^{(2)} & v_2 = v_2^{(1)} = v_2^{(2)} \\ u_3 = u_3^{(2)} & v_3 = v_3^{(2)} \end{cases} \quad (1-9)$$

由根据各结点的平衡条件, 例如将结点 2 单独取出, 图 1-1 (d) 表示结点 2 在结点荷载 X_2, Y_2 和单元①、②施加给它的结点力分量 $U_2^{(1)}, V_2^{(1)}$ 和 $U_2^{(2)}, V_2^{(2)}$ (其大小与两单元的对应的结点力分量相等, 方向则相反) 作用下处于平衡状态。

由平衡条件

$$\begin{aligned} \sum X=0 & \quad \text{得} \quad X_2 = U_2^{(1)} + U_2^{(2)} \\ \sum Y=0 & \quad \text{得} \quad Y_2 = V_2^{(1)} + V_2^{(2)} \end{aligned}$$

展开方程组 (1-4), 取其第 3、4 两个方程和展开方程组 (1-6), 取其第 1、2 两个方程, 分别代入 (a)、(b) 式, 并将位移协调关系 (1-9) 代入, 得到结点 2 的两个平衡方程:

$$X_2 = U_2^{(1)} + U_2^{(2)} = \frac{EA}{l_1} (-\cos^2 \theta u_1 - \cos \theta \sin \theta v_1 + \cos^2 \theta u_2 + \cos \theta \sin \theta v_2) + \frac{EA}{l_2} (u_2 - u_3)$$

$$Y_2 = V_2^{(1)} + V_2^{(2)} = \frac{EA}{l_1} (-\cos \theta \sin \theta u_1 - \sin^2 \theta v_1 + \cos \theta \sin \theta u_2 + \sin^2 \theta v_2)$$

类似的, 可得到结点 1、3 的两组方程, 将它们汇集后就得到如下整体桁架的六个结

点荷载—结节点位移方程:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= U_1^{(1)} + U_1^{(2)} = \frac{EA}{l_1} (\cos^2 \theta u_1 + \cos \theta \sin \theta v_1 - \cos^2 \theta u_2 - \cos \theta \sin \theta v_2) \\
 Y_1 &= V_1^{(1)} = \frac{EA}{l_1} (\cos \theta \sin \theta u_1 + \sin^2 \theta v_1 - \cos \theta \sin \theta u_2 - \sin^2 \theta v_2) \\
 X_2 &= U_2^{(1)} + U_2^{(2)} = \frac{EA}{l_1} (-\cos^2 \theta u_1 - \cos \theta \sin \theta v_1 + \cos^2 \theta u_2 + \cos \theta \sin \theta v_2) + \frac{EA}{l_2} (u_2 - u_3) \\
 Y_2 &= U_2^{(1)} + V_2^{(1)} = \frac{EA}{l_1} (-\cos \theta \sin \theta u_1 - \sin^2 \theta v_1 + \cos \theta \sin \theta u_2 + \sin^2 \theta v_2) \\
 X_3 &= U_3^{(2)} = \frac{EA}{l_2} (-u_2 + u_3) \\
 Y_3 &= V_3^{(2)} = 0
 \end{aligned} \tag{1-10}$$

这些方程就是结构的力—位移关系。写成矩阵形式，有

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} \cos^2 \theta / l_1 & \cos \theta \sin \theta / l_1 & -\cos^2 \theta / l_1 & -\cos \theta \sin \theta / l_1 & 0 & 0 \\ \cos \theta \sin \theta / l_1 & \sin^2 \theta / l_1 & -\cos \theta \sin \theta / l_1 & -\sin^2 \theta / l_1 & 0 & 0 \\ -\cos^2 \theta / l_1 & -\cos \theta \sin \theta / l_1 & \cos^2 \theta / l_1 + 1/l_2 & \cos \theta \sin \theta / l_1 & -1/l_2 & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta / l_1 & -\sin^2 \theta / l_1 & \cos \theta \sin \theta / l_1 & \sin^2 \theta / l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/l_2 & 0 & 1/l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

(1-11)

或简写成

$$\mathbf{R} = \mathbf{k} \delta \tag{1-12}$$

这就是有限单元法所要建立的基本方程，也称整体刚度方程。式中 \mathbf{R} 为作用在结点上的荷载（包括反力）组成的列阵，称为荷载列阵； δ 是由基本未知量结点位移所组成的列阵；矩阵 \mathbf{K} 称为结构的整体刚度矩阵，由式（1-11）可知：

$$\mathbf{K} = EA \begin{bmatrix} \cos^2 \theta / l_1 & \cos \theta \sin \theta / l_1 & -\cos^2 \theta / l_1 & -\cos \theta \sin \theta / l_1 & 0 & 0 \\ \cos \theta \sin \theta / l_1 & \sin^2 \theta / l_1 & -\cos \theta \sin \theta / l_1 & -\sin^2 \theta / l_1 & 0 & 0 \\ -\cos^2 \theta / l_1 & -\cos \theta \sin \theta / l_1 & \cos^2 \theta / l_1 + 1/l_2 & \cos \theta \sin \theta / l_1 & -1/l_2 & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta / l_1 & -\sin^2 \theta / l_1 & \cos \theta \sin \theta / l_1 & \sin^2 \theta / l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/l_2 & 0 & 1/l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1-13)

建立整体刚度矩阵是运用有限单元法解题的核心内容，一旦建立了整体刚度矩阵 \mathbf{K} 和荷载列阵 \mathbf{R} ，就等于列出了有限单元法的基本方程。结构的整体刚度矩阵是

由单元刚度矩阵叠加组成的。从(1-13)式可以看出,其中上方虚线划出的正是单元①的刚度矩阵,右下方虚线划出的单元②的刚度矩阵,而两个长方形重叠部分中的元素,则是同位置上两个单元刚度矩阵的元素之和。因此,建立整体刚度矩阵的问题,又回到先要分析单元的特性,即先求出单元的刚度矩阵。

结构的整体刚度矩阵具有许多特性:

(1) 它是一个对称矩阵,且主对角线上的元数 K_{ii} 总是正的。否则,作用力的方向与由它引起的对应的位移的方向相反,这是不合理的。

(2) 它是一个奇异矩阵,即矩阵 K 的对应行列式 $|K|$ 的值等于零。这可以从行列式的性质得到证明,其物理原因是结构的几何约束尚未设置,可能产生刚体位移。只有加上几何边界条件(即位移边界条件),对刚度矩阵加以修改,排除刚体位移后,才能解出唯一的全部位移分量。

整体刚度矩阵还有其它一些特性,我们将在后面的有关内容中加以讨论。

通过这一简单的例子,说明了刚度矩阵的物理意义以及从单元刚度矩阵集成整体刚度矩阵的概念。这些都有普遍性,可以推广到连续体问题中去。

1.3 有限单元法分析过程的描述

对于一般连续体,有限单元法分析的过程可以归纳为四个部分。

1.3.1 结构离散化建立计算模型

上面已经提到,连续体的有限单元法可以通俗地看作是在力学模型上进行近似的一种计算方法。而这个近似的计算模型就是原结构的离散化模型,它是由若干个尺寸有限的单元在有限个结点上相互连接而成的。这个离散化模型的形式与单元的形狀、数目、大小、布置及结点的连接条件等因数有关。例如对平面问题,最简单的离散化模型是由许多三结点的三角形单元在结点处彼此铰接而成,各单元在边界上是不相联系的。图 1-3 是平面薄板的离散化模型。

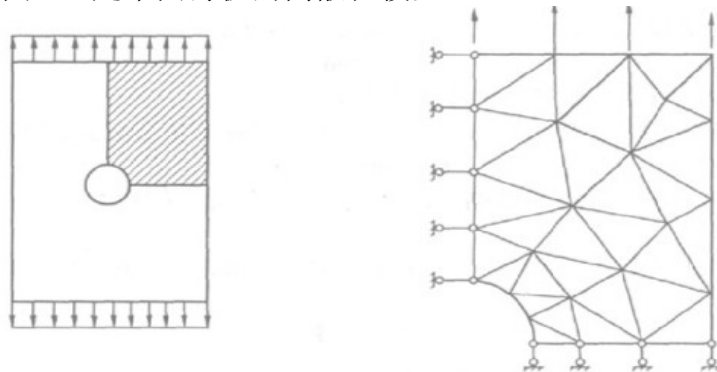


图 1-3

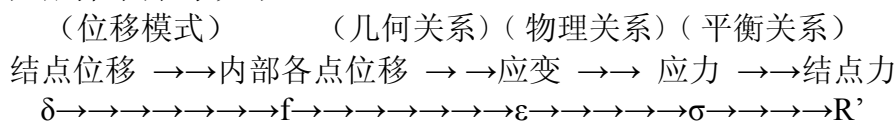
当然,这样的离散化模型与原来的连续体有很大的近似。但是,如果单元内部有合理的变形形式保证单元之间位移的协调性,将单元细分到一定程度时,就会得到令人满意的结果。

1.3.2 单元分析

在位移法中,我们以结点位移为基本未知量。单元分析的任务就是要建立单元结点力—结点位移的关系(也称单元刚度方程),即

$$\mathbf{R}' = \mathbf{k}\delta'$$

其步骤可用框图表示如下：



单元分析的主要工作有：

1. 选择位移模式

在结构的离散化完成以后，就可以对典型单元进行特性分析。在分析连续体问题时，为了能用结点位移来表示单元内任意一点处的位移、应变和应力，必须对单元位移的分布作一定的假设，也就是假设位移是坐标的某种简单的函数，这种函数称为位移模式或位移函数。

位移函数的适当选择是有限单元法中的关键。在有限单元法的应用中，普遍的选择多项式作为位移模式（具体情况见后面各章）。根据所选定的位移模式，就可以导出用结点位移表示单元内任意一点位移的关系式，其矩阵形式是

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}\delta' \quad (\text{a})$$

式中， \mathbf{f} 为单元内任意一点的位移列阵； δ' 为单元的结点位移列阵； \mathbf{N} 称为形函数矩阵，它的元素是计算点的位置坐标的函数。

2. 分析单元的力学特性

利用几何方程，由位移表达式（a）导出结点位移表示单元应变的关系式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta' \quad (\text{b})$$

式中， $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是单元内任意一点的应变列阵； \mathbf{B} 是应变矩阵。

利用物理方程，由应变的表达式（b）导出用结点位移表示单元应力的关系式，

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}'\delta = \mathbf{S}\delta' \quad (\text{c})$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是单元内任意一点的应力列阵， \mathbf{D} 是与单元材料性质有关的弹性矩阵， $\mathbf{S}=\mathbf{D}\mathbf{B}$ ，称为应力矩阵。

利用虚功原理建立作用于单元上的结点力和结点位移之间的关系式，即单元的刚度方程

$$\mathbf{R}' = \mathbf{k}\delta' \quad (\text{d})$$

式中， \mathbf{k} 称为单元刚度矩阵，在以后将导出

$$\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy dz \quad (\text{e})$$

3. 计算等效结点力

结构经过离散化后，假定力是通过结点从一个单元传递到另一个单元的，但是作为实际的连续体，力是从单元的公共边界传递到另一个单元的。因而，这种作用在单元边界上的表面力以及作用在单元上的体积力、集中力等都需要等效的结点力来代替所有作用在单元上的力。移置的方法是按照作用在单元上的等效结点力，在任何虚位移上的虚功都相等的原则（虚功等效）进行的。

1.3.3 整体分析，即集合所有单元的刚度方程，建立整个结构的刚度方程

这个集合过程包括两个方面：一是由单元刚度矩阵 \mathbf{k} 集成整体刚度矩阵 \mathbf{K} ；二是将作用于各单元的等效结点力列阵 \mathbf{R}' 集成总的载荷列阵 \mathbf{R} 。于是可得整个结构的刚度方程

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\delta \quad (\text{f})$$

式中， δ 为整个结构的结点位移列阵。这些方程在考虑了位移边界条件并作适当

的处理之后就可解出所有的未知结点位移。

1.3.4 计算应力

从求出的整体结点位移列阵 δ 中，逐个单元地取出该单元的结点位移列阵 δ' 代回公式 (c)，就可以求出各个单元任意点的力。

以上简单介绍了有限单元法解题的梗概，以便于大家对有限单元法建立一个完整的概念，进一步的讨论见以后各章论述。

第 2 章 平面问题的有限单元法

2.1 三角形应变单元

用有限单元法分析平面问题，最简单最常用的单元是三结点三角形单元。因这种单元中假设位移是线性变化的，单元内应变和应力都是常量，所以也称三角形常应变单元。

2.1.1 连续体的离散化

将一个受力的连续弹性体离散化，就是将连续体划分为有限个互不重叠、互不分离的三角形单元，这些三角形在其顶点（取为结点）处互相连接。所有作用在单元上的载荷，包括集中载荷、表面载荷和体积载荷，都按虚功等效的原则移置到结点上，成为等效结点载荷（移置方法见 2.5 节）。再按结构的位移约束情况设置约束支承。划分单元后，对所有的单元和结点分别从 1 开始按顺序加以编号。这样就得到了有限单元法的计算模型（图 2-1）。

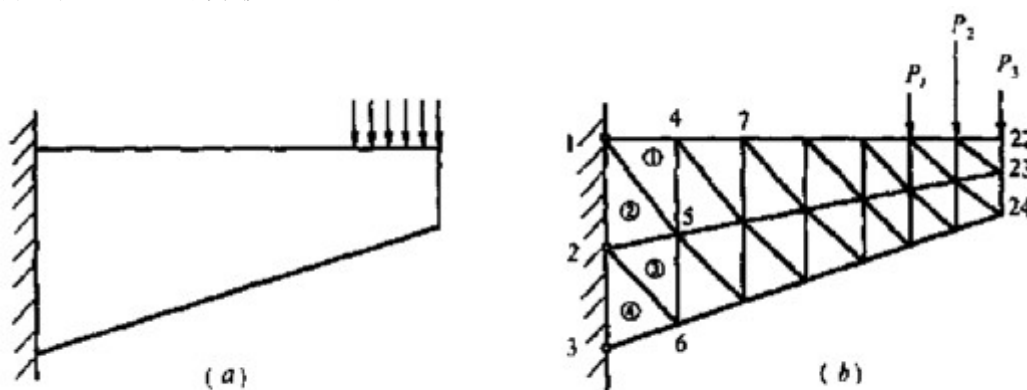


图 2-1

2.1.2 位移模式

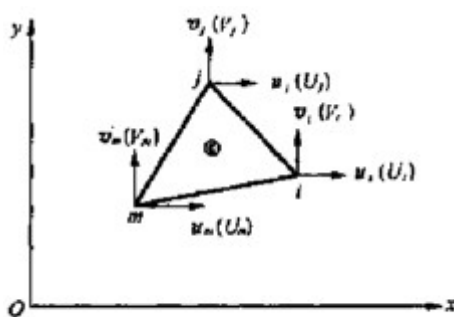


图 2-2

图 2-2 表示了一个典型的三角形单元 e ，三个结点为 i 、 j 、 m ，按逆时针方向排列。每一结点具有两个位移分量。整个单元共有六个结点位移分量。用列阵表示为

$$\delta^e = [\delta_i^T \quad \delta_j^T \quad \delta_m^T] = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m] \quad (2-1)$$

其中子矩阵

$$\delta_i = [u_i \quad v_i]^T \quad (i, j, m) \quad (a)$$

上式后面附有记号 (i, j) ，表示这个公式实际上代表三个公式，其余两个公式系由其中的下标： i, j, m 轮换得来。以后经常采用这种记号。式中 u_i, v_i 是结点（在 x 和 y 轴方向的位移）。

如果只知道结点位移，我们并不能直接求出单元内的应变和应力。因此，为了用结点位移表示单元应变和应力，我们必须假定单元内部任意一点的位移分量为坐标的某种函数，即需要假定一个位移模式（也就是说，对单元内的位移分布必须做一个假定）。按此位移模式，单元内各点的位移可以由单元结点位移通过插值来获得。现在，假定单元内各点的位移分量是坐标的线性函数，即设，

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (b)$$

式中， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ 是待定常数。在 i, j, k 三点，设它们的坐标分别为 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 、 (x_k, y_k) ，将其代入 (b) 式，可得，

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i & v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j & v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m & v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m \end{aligned} \quad (c)$$

按线性代数中的克莱姆法则，从 (c) 式左边三个方程可以求得

$$a_1 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{bmatrix}, \quad a_2 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{bmatrix}, \quad a_3 = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{bmatrix} \quad (d)$$

其中

$$2A = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

按解析几何， A 等于三角形 ijm 的面积。为使求得面积的值不致成为负值，结点 i, j, m 的次序必须是逆时针转向，如图 2-2 所示。

同理可以得到 a_4, a_5, a_6 ，再代回 (b) ，并稍加整理，得到单元位移模式（也称位移函数）如下：

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2A} [(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \\ v &= \frac{1}{2A} [(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m] \end{aligned} \quad (e)$$

式中，

$$a_i = \begin{bmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{bmatrix} = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = -\begin{bmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{bmatrix} = y_j - y_m, \quad c_i = \begin{bmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{bmatrix} = -(x_j - x_m) \quad (i, j, m) \quad (2-3)$$

从 $(2-3)$ 式不难发现有，

$$b_i + b_j + b_m = 0$$

$$c_i + c_j + c_m = 0 \quad (f)$$

由 $(2-2)$ 、 $(2-3)$ 式可得，

$$A = \frac{1}{2}(b_j c_m - c_j b_m) \quad (2-4)$$

为了简化位移模式 (e) 的表达式, 如令

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (i, j, m) \quad (2-5)$$

(e) 式就可以写成

$$\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned} \quad (2-6)$$

式 (2-6) 所表示的单元位移, 也可以写成矩阵形式

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N_i I \quad N_j I \quad N_m I] \delta' = N \delta' \quad (2-7)$$

式中 I 是二阶单位阵, N_i 、 N_j 、 N_m 是坐标的函数, 它们反映了单元的位移形态, 称为单元位移的形态函数, 简称为形函数。矩阵 N 则称为形函数矩阵。根据 (2-6) 式, 在单元的边界上位移也是线性变化的。既然两个相邻的单元在其公共结点上具有相同的结点位移, 因此在它们的公共边界上, 两个单元将具有相同的位移, 也就是说, 所选择的位移模式保证了两个相邻单元之间位移的连续性 (严格证明见 2.2 节)。

2.1.3 用结点位移表示应变

有了单元的位移模式, 就可利用平面问题的几何方程

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

求得应变分量。将 (2-6) 式代入上式, 就有

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \delta' \end{aligned} \quad (g)$$

将 (g) 式简写为,

$$\varepsilon = B \delta' \quad (2-8)$$

式中 B 可写成分块形式,

$$B = [B_i \quad B_j \quad B_m] \quad (2-9)$$

其子矩阵为,

$$B_i = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (2-10)$$

公式 (2-8) 是用结点位移表示单元应变的矩阵方程, 矩阵 \mathbf{B} 称为单元应变矩阵。由于单元面积 A 以及系数 b_i, c_i 等都是常量, 所以矩阵 \mathbf{B} 的元素都是常量, 因此, 应变 ε 的元素也是常量。也就是说, 在每一个单元中, 应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 都是常量, 故通常称这种单元为常应变单元。

2.1.4 用结点位移表示应力

在求出单元应变之后, 再利用物理方程, 便可导出以结点位移表示应力的关系式。

对于平面应力问题, 各向同性弹性材料的物理方程为,

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = D\varepsilon \quad (h)$$

其中

$$D = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

D 称为弹性矩阵。把 (2-8) 式代入 (h) 式, 得到

$$\sigma = \mathbf{DB}\delta \quad (2-12)$$

令

$$\mathbf{S} = \mathbf{DB} \quad (i)$$

则 (2-12) 式可写成

$$\sigma = \mathbf{S}\delta \quad (2-13)$$

这就是单元应力与结点位移的关系式, 其中 \mathbf{S} 称为应力矩阵。应力矩阵 \mathbf{S} 也可以写成分块形式,

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}[\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m] = [\mathbf{S}_i \quad \mathbf{S}_j \quad \mathbf{S}_m] \quad (2-14)$$

对于平面应力问题, \mathbf{S} 的子矩阵可以写成,

$$S_i = \mathbf{DB}_i = \frac{E}{2(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (2-15)$$

对于平面应变问题, 只要将上式中的 E 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu^2}$, 便得到

$$S_i = DB = \frac{E(1-\mu)}{2(1+\mu)(1-2\mu)A} \begin{bmatrix} b_i & \frac{\mu}{1-\mu}c_i \\ \frac{\mu}{1-\mu}b_i & c_i \\ \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}c_i & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}b_i \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

一般平面通用计算程序，可按平面应力公式编制，当需要计算平面应变问题时，只需将 E 、 μ 作上述代换即可。

从式 (2-14)、(2-15)、(2-16) 可以看出，应力矩阵 S 中的元素都是常量，所以每个单元的应力分量也是常量。在一个变化的应力场中，相邻的单元一般具有不同的应力，为此，在两单元的公共边界上，应力将有突变。但是随着单元的逐步取小，这种突变将急剧减小，并不妨碍有限单元法的解答收敛于正确解答。

2.2 形函数的性质 面积坐标

2.2.1 形函数的性质

如上节所述，形函数是定义于单元内部的、坐标的连续函数。在有限单元法中，当单元形状和相应的形函数确定以后，剩下的运算可依照标准步骤和普通公式进行。以后还将看到，一些复杂单元还可利用形函数表示单元各点在不同坐标系下的映射关系（如等参数单元）。因此，在有限单元法中，形函数的作用是十分重要的。

现以三角形常应变单元的形函数为例，来推出形函数的性质如下。

三角形常应变单元的形函数

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (i, j, m)$$

其中

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

由 (2-3) 式可知，常数 $a_i, b_i, c_i, a_j, b_j, c_j$ 和 a_m, b_m, c_m 依次是 $2A$ 的行列式的第一行、第二行和第三行各元素的代数余子式。根据行列式的性质：行列式的任一行（或列）的元素与其相应的代数余子式乘积之和等于行列式的值。而任一行（或列）的元素与其它行（或列）的元素的代数余子式乘积之和则等于零。从而可推出

1. 形函数 N 在结点 i 的值

$$N_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x_i + c_i y_i) = 1 \quad (a)$$

而在其余两结点 j, m 上的值

$$N_i(x_j, y_j) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x_j + c_i y_j) = 0 \quad (b)$$

$$N_i(x_m, y_m) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x_m + c_i y_m) = 0 \quad (c)$$

类似地有

$$N_i(x_i, y_i)=0, \quad N_j(x_j, y_j)=1, \quad N_m(x_m, y_m)=0 \quad (d)$$

$$N_m(x_i, y_i)=0, \quad N_m(x_j, y_j)=0, \quad N_m(x_m, y_m)=1 \quad (e)$$

将上面 (a) — (e) 诸式汇总后合写为,

$$\begin{aligned} N_i \text{ 在结点 } i \text{ 上} \quad N_i &= 1 \\ \text{在其余结点上} \quad N_i &= 0 \quad (i, j, m) \end{aligned} \quad (2-17)$$

2. 在单元任意一点上三个形函数之和等于 1。

证明如下:

$$\begin{aligned} & N_i(x, y) + N_j(x, y) + N_m(x, y) \\ &= \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y + a_j + b_j x + c_j y + a_m + b_m x + c_m y) \\ &= \frac{1}{2A} [2A + 0 \cdot x + 0 \cdot y] = 1 \end{aligned}$$

即

$$N_i(x, y) + N_j(x, y) + N_m(x, y) = 1 \quad (2-18)$$

由此可见, 三个形函数中只有两个是独立的。

3. 在三角形单元 i、j、m 的一边, 例如 ij 边上, 有

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= 1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \\ N_j(x, y) &= \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \\ N_m(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (f)$$

也就是说, 在 ij 边上的形函数与第三个顶点 m 的坐标无关。

证明: ij 边的直线方程为

$$\frac{y - y_i}{x - x_i} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

利用 (2-3) 式即有

$$y = -\frac{b_m}{c_m}(x - x_i) + y_i$$

代人(2-5)式的 $N_m(x, y)$ 和 $N_j(x, y)$, 得

$$\begin{aligned} N_m(x, y) &= \frac{1}{2A} \left\{ a_m + b_m x + c_m \left[-\frac{b_m}{c_m}(x - x_i) + y_i \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2A} (a_m + b_m x_i + c_m y_i) = 0 \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2A} \left\{ a_j + b_j x + c_j \left[-\frac{b_m}{c_m}(x - x_i) + y_i \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2A} \left\{ a_j + b_j x_i + c_j y_i + b_j (x - x_i) - \frac{b_m}{c_m} c_j (x - x_i) \right\} \\ &= \frac{1}{2A} \left[\frac{b_j c_m - b_m c_j}{c_m} (x - x_i) \right] \end{aligned}$$

因为 $b_j c_m - b_m c_j = 2A$, $c_m = x_j - x_i$;

故有 $N_j(x, y) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$

再由 (2-18) 式得

$$N_i(x, y) = 1 - N_j - N_m = 1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

利用这一性质，易证相邻单元的位移，分别进行线性插值之后，在公共边上连续的。

如图 2-3 所示，单元 ijm 和 ijn 具有公共边 ij 。由 (f) 式在 ij 边上

$$N_m(x, y) = N_n(x, y) = 0$$

不论按照哪个单元来计算，根据 (2-6) 式，公共边上的位移均由下式表示，

$$\mu = N_i \mu_i + N_j \mu_j$$

$$v = N_i v_i + N_j v_j$$

式中 N_i , N_j 如 (f) 式所示。可见在公共边上的位移 μ , v 的分布完全由公共边的两个结点 i , j 的位移所确定。所以相邻单元的位移是连续的。

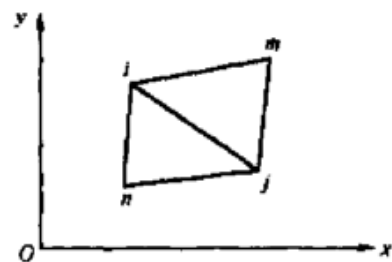


图 2-3

2.2.2 面积坐标

应用面积坐标作为离散化模型中单元的局部坐标进行单元分析是很方便的。

现在来引进面积坐标的概念。图 2-4 所示的三角形单元 ijm 中，任意一点 $P(x, y)$ 的位置，可以用如下的比值来确定，

$$L_i = \frac{A_i}{A} \quad L_j = \frac{A_j}{A} \quad L_m = \frac{A_m}{A}$$

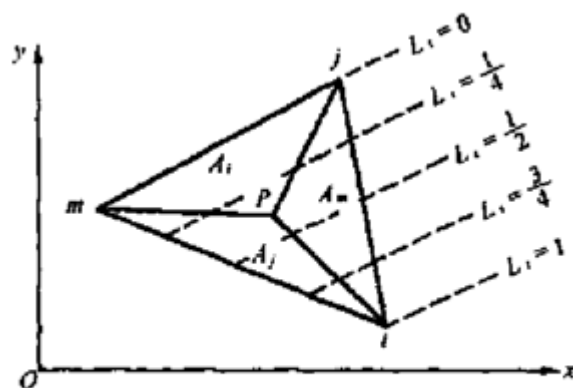


图 2-4

式中 A 为三角形 ijm 的面积。 A_i , A_j , A_m 分别是三角形 Pjm , Pmi , Pij 的面积。这三个比值称为 P 点的面积坐标。显然这三个面积坐标并不是完全独立的。由于 $A_i + A_j + A_m = A$ ，所以有关系式

$$L_i + L_j + L_k = 1 \quad (2-20)$$

这种面积坐标，只限于描述三角形单元内部任意一点的位置，在该三角形之外

并没有定义。因此它只能作为单元的局部坐标。根据面积坐标的定义，就知道它是一种大小大于 0 而不超过 1 的无因次坐标。以 L_i 为例，当 P 点和 i 点重合时， $A_i = A$ ，故 $L_i = 1$ ；当 P 点落在 jm 边上任一位置 $A_i = 0$ ，则有 $L_i = 0$ ；当 P 落在单元内平行于 jm 边上任一条线时，它将根据 P 点到 jm 边垂距的比值决定 L_i 的大小。显然，位于同一条平行于 jm 边的直线上任意点的 L_i 值相同。由此可知 L_i 的等值线将是一组平行于 jm 边的直线。它的大小从 0 到 1。如图 2-4 图中虚线所示。当然 L_i 的这些特点也将适用于 L_j 和 L_m 。

掌握面积坐标的上述特点后，极易写出三个给点的面积坐标是：

$$\begin{aligned} \text{结点 i} \quad L_i &= 1 & L_j &= 0 & L_m &= 0 \\ \text{结点 j} \quad L_i &= 0 & L_j &= 1 & L_m &= 0 \\ \text{结点 m} \quad L_i &= 0 & L_j &= 0 & L_m &= 1 \end{aligned}$$

面积坐标只适合于单元分析而不能用于整体分析，因此还必须建立面积坐标与直角坐标之间的关系。

三角形 Pjm 的面积是

$$A_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (a_i + b_i x + c_i y)$$

于是面积坐标

$$L_i = \frac{A_i}{A} = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

类似地有

$$\begin{aligned} L_j &= \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y) \\ L_m &= \frac{1}{2A} (a_m + b_m x + c_m y) \end{aligned}$$

若用矩阵表示，即有

$$\begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_m & b_m & c_m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2-21)$$

这就是用直角坐标表示面积坐标的表示式。

将 (2-21) 各式与 (2-5) 式对比，容易发现三角形常应变单元中的形函数 N_i ， N_j ， N_m 就是面积坐标 L_i ， L_j ， L_m 。

为了得到用面积坐标表示直角坐标的关系式，则可由 (2-21) 式反解导出其逆算式：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = 2A \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_m & b_m & c_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix}$$

利用 (2-3) 式容易得到

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = 2A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

或展开为

$$\begin{cases} 1 = L_i + L_j + L_m \\ x = L_i x_i + L_j x_j + L_m x_m \\ y = L_i y_i + L_j y_j + L_m y_m \end{cases} \quad (2-23)$$

这就是用面积坐标表示直角坐标的代数算式。上式表明，直角坐标 (x, y) 表示的多项式也可以用面积坐标表示为同阶的多项式。但面积坐标具有以下优点：他们与三角形的形状和方向无关，而且积分运算十分简单。

下面介绍一些面积坐标的函数对直角坐标的求导和求积公式。当面积坐标的函数对直角坐标求导时，可应用下列公式：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_j} \frac{\partial L_j}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_m} \frac{\partial L_m}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left(b_i \frac{\partial}{\partial L_i} + b_j \frac{\partial}{\partial L_j} + b_m \frac{\partial}{\partial L_m} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial L_j} \frac{\partial L_j}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial L_m} \frac{\partial L_m}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left(c_i \frac{\partial}{\partial L_i} + c_j \frac{\partial}{\partial L_j} + c_m \frac{\partial}{\partial L_m} \right) \end{cases} \quad (2-24)$$

求面积坐标的幂函数在三角形单元上的积分值时。可以应用积分公式

$$\iint L_i^\alpha L_j^\beta L_m^\gamma dx dy = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A \quad (2-25)$$

式中 α, β, γ 为整常数。

求面积坐标的幂函数在三角形一边上的积分值时，可以应用积分公式

$$\int_l L_i^\alpha L_j^\beta ds = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} l \quad (i, j, m) \quad (2-26)$$

式中 L 为该边的长度。

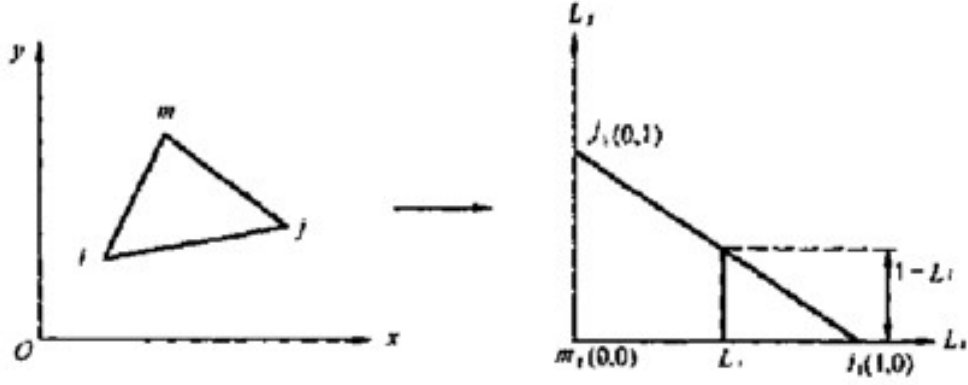
[注]式：(2-25)，(2-26) 的证明如下：

1. 预备公式

$$\int_0^a x^n (a-x)^p dx = \frac{n! p!}{(n+p+1)!} a^{n+p+1} \quad (n \geq 0, p \geq 0)$$

此式可由分部积分和递推方法验证。

设 L_i, L_j 为独立变量，则 $L_m = 1 - L_i - L_j$ ，变换式 (2-22) 可以把 $x-y$ 平面上的任意三角形 ijm 变换成 L_i-L_j 平面上的三角形 i, j, m ，如图 (a) 所示。



图(a)

$$\iint_A dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-L_i} |J| dL_i dL_j$$

其中

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_i} & \frac{\partial y}{\partial L_i} \\ \frac{\partial x}{\partial L_j} & \frac{\partial y}{\partial L_j} \end{vmatrix} = 2A$$

2. 式 (2-25) 的证明

$$\begin{aligned} \iint_A L_i^\alpha L_j^\beta L_m^\gamma dx dy &= 2A \int_0^1 \int_0^{1-L_i} L_i^\alpha L_j^\beta (1-L_i-L_j)^\gamma dL_i dL_j \\ &= 2A \int_0^1 L_i^\alpha \left[\int_0^{1-L_i} L_j^\beta (1-L_i-L_j)^\gamma dL_j \right] dL_i \\ &= 2A \int_0^1 L_i^\alpha \frac{\beta! \gamma!}{(\beta + \gamma + 1)!} (1-L_i)^{\beta + \gamma + 1} dL_i \\ &= 2A \frac{\beta! \gamma!}{(\beta + \gamma + 1)!} \frac{\alpha! (\beta + \gamma + 1)!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 1^{\alpha + \beta + \gamma + 2} \\ &= 2A \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} \end{aligned}$$

3. 式 (2-26) 的证明

由图 (b) 可知, 在 ij 边上任意点 P 离开 i 的距离为 s ,

$$L_i = 1 - L_j$$

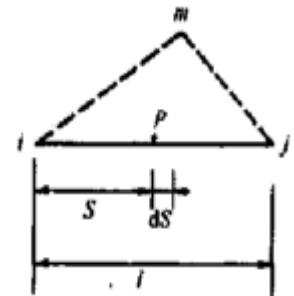
而

$$L_i = \frac{\text{三角形pim的面积}}{\text{三角形ijm的面积}} = \frac{s}{l}$$

所以

$$s = lL_i, \quad ds = l dL_i$$

所以



图(b)

$$\int_l L_i^\alpha L_j^\beta ds = l \int_0^1 (1-L_j)^\alpha L_j^\beta dL_i = l \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!}$$

2.3 单元刚度矩阵

现在用平衡方程来推导单元的结点力和结点位移之间的关系。在有限单元法中，通常用虚功方程推导比较方便。

图 2-5 (a) 示出了单元 e 的实际受力状态，它在等效结点力的作用下处于平衡状态，这些结点力用列阵表示为

$$\mathbf{R}' = [\mathbf{R}_i^T \quad \mathbf{R}_j^T \quad \mathbf{R}_m^T]^T = [\mathbf{U}_i \quad \mathbf{V}_i \quad \mathbf{U}_j \quad \mathbf{V}_j \quad \mathbf{U}_m \quad \mathbf{V}_m]^T \quad (a)$$

(等效结点力 \mathbf{R}' 的进一步讨论见 2.5 节)。单元内任意点的应力为 σ 。现假设单元发生了虚位移 (如图 2-5 (b))，结点 i、j、m 的虚位移表示为

$$\delta'' = [\delta u_i \quad \delta v_i \quad \delta u_j \quad \delta v_j \quad \delta u_m \quad \delta v_m]^T \quad (b)$$

单元内任意点的虚应变为 s' 。令实际受力状态 (a) 对虚位移状态 (b) 作虚功，于是，作用在单元上的外力在虚位移上

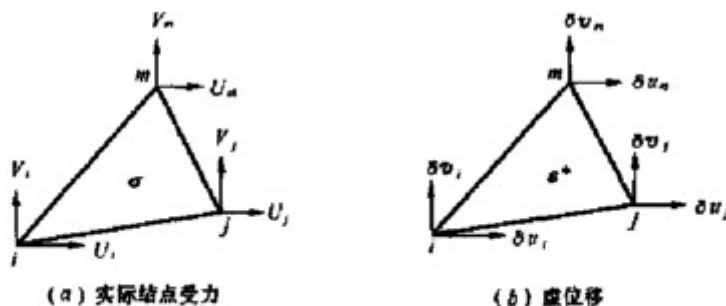


图 2-5

所作的虚功等于体内应力在虚应变上所作的虚功。设单元的厚度为 t ，则虚功方程为

$$(\delta'')^T \mathbf{R}' = \iint s'^T \sigma t dx dy \quad (c)$$

又设单元内的虚位移 f' 具有与实际位移相同的位移模式，即有

$$f' = N \delta''$$

参照 (2-8) 式，单元内的虚应变就有

$$s' = B \delta'' \quad (d)$$

将 (d) 式和 (2-12) 式: $\sigma = DB \delta'$ (c)，并把 $(\delta'')^T$ 提到积分号的前面，(c) 式可化成

$$(\delta'')^T \mathbf{R}' = (\delta'')^T \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta' t dx dy \quad (e)$$

由于虚位移 δ'' 是任意的，(e) 式两边与 $(\delta'')^T$ 相乘的矩阵应当相等，故得则 (2-27) 式可写成

$$\mathbf{R}' = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dx dy \delta' \quad (2-27)$$

$$\mathbf{k} = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dx dy \quad (2-28)$$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{k} \delta' \quad (2-29)$$

这就是表征单元的结点力与结点位移之间关系的刚度方程， \mathbf{k} 就是单元刚度矩阵。对于均质等厚度的三角形常应变单元，矩阵 \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 中元素都是常量， t 也是常量。再

注意到 $\iint dx dy = A$ ，于是 (2-28) 式可简化为

$$\mathbf{k} = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dA \quad (2-30)$$

与 1.2 节中曾讨论过的情况相类似，单元刚度矩阵 \mathbf{k} 中任一列的元素分别等于该单元的某个结点沿坐标方向发生单位位移时，在各结点上所引起的结点力。

将三角形常应变单元的刚度矩阵写成分块形式，有

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{6 \times 6} &= \mathbf{B}_{6 \times 3}^T \mathbf{D}_{3 \times 3} \mathbf{B}_{3 \times 6} \mathbf{A} t = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m]^T \mathbf{D} [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m] \mathbf{A} t \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} & \mathbf{k}_{im} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} & \mathbf{k}_{jm} \\ \mathbf{k}_{mi} & \mathbf{k}_{mj} & \mathbf{k}_{mm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-31)$$

其中 k_{rs} ($r = i, j, m, s = i, j, m$) 为 \mathbf{k} 的子矩阵

将式 (2-10) B_i 的 (2-11) 的 \mathbf{D} 代入上式，可得平面应力问题三角形常应变单元的子刚度矩阵公式为

$$k_n = \frac{Et}{4(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ c_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (r = i, j, m) \\ (s = i, j, m) \end{matrix} \quad (2-33)$$

对于平面应变问题，只须将上式中 E 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ； μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$ ，可得

$$k_n = \frac{E(1-\mu)t}{4(1+\mu)(1-2\mu)A} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r b_s \\ \frac{\mu}{1-\mu} c_r b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r b_s \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (r = i, j, m) \\ (s = i, j, m) \end{matrix} \quad (2-34)$$

例 1 等腰直角三角形 ijm ，厚度为 t ，腰长为 a ，两腰分别平行于 x 、 y 轴（见图 2-6），则该单元的弹性常数 E 、 μ 为已知，试写出它的单元刚度矩阵 \mathbf{k} 。解 这问题可看作平面应力问题。利用式 (2-31) 和 (2-33) 求 \mathbf{k} 。

(1) 求 b_i, c_i (i, j, m) 和 \mathbf{A}

由 (2-3) 式

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_m & (i, j, m) \\ c_i &= -x_j + x_m \end{aligned}$$

可得

$$b_i = a \quad b_j = 0 \quad b_m = -a$$

$$c_i = 0 \quad c_j = a \quad c_m = -a$$

(2) 利用 (2-33) 式求子矩阵 k_n ，再利用 (2-3) 形成 \mathbf{k} ，其结果为

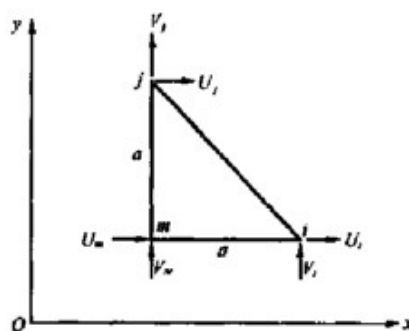


图 2-6

$$k = \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} & & & & \\ & \frac{1-\mu}{2} & \frac{1-\mu}{2} & & & \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} & \frac{1-\mu}{2} & 1 & & \\ \mu & 0 & 0 & 1 & & \\ -1 & -\frac{1-\mu}{2} & -\frac{1-\mu}{2} & -\mu & \frac{3-\mu}{2} & \\ -\mu & -\frac{1-\mu}{2} & -\frac{1-\mu}{2} & -1 & \frac{1+\mu}{2} & \frac{3-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

讨论

首先 k 为对称矩阵，但注意于矩阵 k 。并不是对称矩阵。其次单元刚度矩阵尾有一个重要性质：每一行（或列）元素之和为零。第三， k 为奇异矩阵，即 $\{k\}=0$ ， k^{-1} 是不存在的。第四， k 的元素决定于单元的形状、大小、方位和弹性常数，而与单元的位置无关，即不随单元或坐标轴的平行移动而改变。

2.4 整体刚度方程的建立 整体刚度矩阵

假设弹性体被划分为 n_e 个单元和 n 个结点，对每一单元都求出单元刚度矩阵后，就可得到 n_e 组形如（2-29）的单元刚度方程，把这些方程集合起来，便得到表征整个弹性体平衡的表达式——整体刚度方程。

为此目的，我们首先引进整个弹性体的结点位移列阵 $\delta_{2n \times 1}$ ，它是由各结点位移按结点的号码从小到大顺序排列组成的，即

$$\delta_{2n \times 1} = [\delta_1^T \quad \delta_2^T \quad \Lambda \quad \delta_n^T]^T \quad (a)$$

其中子矩阵

$$\delta_i = [u_i \quad v_i]^T \quad (i=1,2,\Lambda,n) \quad (b)$$

是结点 i 的位移分量。

再引进整个弹性体的载荷列阵 $R_{2n \times 1}$ ，它是移至到结点上的等效结点载荷，按结点号码从小到大顺序排列组成的，即

$$R_{2n \times 1} = [R_1^T \quad R_2^T \quad \Lambda \quad R_n^T]^T \quad (c)$$

其中子矩阵

$$R_i = [X_i \quad Y_i]^T = \left[\sum_{e=1}^{n_e} U_i' \quad \sum_{e=1}^{n_e} V_i' \right]^T \quad (i=1,2,\Lambda,n) \quad (d)$$

是结点 i 上的等效结点载荷。

为把 n_e 组形如（2-29）的单元刚度程

$$R_{6 \times 1}' = k_{6 \times 6} \delta_{6 \times 1}' \quad (e)$$

集合起来，我们将各单元的结点力列阵 $R_{6 \times 1}'$ 加以扩大，使之成为 $2n \times 1$ 阶列阵：

$$R_{2n \times 1}' = \left[\Lambda \quad (\mathbf{R}_1')^T \quad \Lambda \quad (\mathbf{R}_j')^T \quad \Lambda \quad (\mathbf{R}_m')^T \quad \Lambda \right]^T \quad (f)$$

其中子矩阵

$$R_i' = [U_i' \quad V_i']^T \quad (i,j,m) \quad (g)$$

是单元结点 i 上的等效结点力。

(f) 式中“...”元素均为零，矩阵号正上方的上标 i, j, m 表示在分块矩阵意义下见所占的列的位置。这里所写的 i, j, m 的次序恰好和结点号码排列的次序是一致的，但实际排列也可能不一致，这时只要按照 i, j, m 所对应的结点号码“对号”即可。下面构造刚度矩阵 $\mathbf{K}'_{2n \times 2n}$ 时标号约定也是这样，不再说明。

再将 (e) 式中 $\mathbf{k}_{6 \times 6}$ 加以扩大，使之成为 $2n \times 2n$ 前方阵 $\mathbf{K}'_{2n \times 2n}$ (也称单元贡献矩阵)，即

$$\mathbf{K}'_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} & 1 & i & j & m & n \\ \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \Lambda & k_{ii} & \Lambda & k_{ij} & \Lambda & k_{im} & \Lambda \\ \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \Lambda & k_{ji} & \Lambda & k_{jj} & \Lambda & k_{jm} & \Lambda \\ \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \Lambda & k_{mi} & \Lambda & k_{mj} & \Lambda & k_{mm} & \Lambda \\ \Lambda & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ i \\ j \\ m \\ n \end{matrix} \quad (\text{h})$$

这样 (e) 式可改写为

$$\mathbf{K}^e_{2n \times 2n} \delta^e_{2n \times 1} = \mathbf{R}^e_{2n \times 1} \quad (\text{i})$$

考虑到 \mathbf{k} 扩大以后，除了对应 i, j, m 双行和双列上的九个子矩阵外，其余都是零，故上式左边的单元位移列阵 $\delta^e_{2n \times 1}$ 可用整体的位移列阵 $\delta_{2n \times 1}$ 替代。把 (i) 式对 n_e 个单元作和，则得

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{K}^e_{2n \times 2n} \delta^e_{2n \times 1} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{R}^e_{2n \times 1} \quad (\text{j})$$

上式右边是全部单元的结点力列阵经扩大以后叠加在一起的，它应等于 (c) 式所表示的弹性体的载荷列阵。这是因为单元的结点力可分为两种类型：一类是由作用在单元上的载荷经等效移置到结点上成为结点力，这通常也称为等效结点载荷；另一类是由弹往体的内力即单元间相互作用的内力引起的等效结点力，这种由相邻单元公共边内力引起的等效结点力，在集合叠加过程中互相抵消。因此 (j) 式右边就是 (c) 式所表示的弹性体的载荷列阵，即

$$\mathbf{R}_{2n \times 1} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{R}^e_{2n \times 1} = [\mathbf{R}_1^T \quad \cdots \quad \mathbf{R}_n^T]^T \quad (\text{k})$$

(j) 式左边 $\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{K}^e_{2n \times 2n}$ 是弹性体所有单元刚度矩阵扩大到 $2n \times 2n$ 阶之后，作矩阵求和 (即所有单元贡献矩阵之和)，这个和矩阵称为整体刚度 (或称总刚度矩阵)，通常都记作 \mathbf{K} 。写成分块矩阵的形式为

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & \Lambda & K_{1i} & \Lambda & K_{1j} & \Lambda & K_{1m} & \Lambda & K_{1n} \\ M & & M & & M & & M & & M \\ K_{i1} & \Lambda & K_{ii} & \Lambda & K_{ij} & \Lambda & K_{im} & \Lambda & K_{in} \\ M & & M & & M & & M & & M \\ K_{j1} & \Lambda & K_{ji} & \Lambda & K_{jj} & \Lambda & K_{jm} & \Lambda & K_{jn} \\ M & & M & & M & & M & & M \\ K_{m1} & \Lambda & K_{mi} & \Lambda & K_{mj} & \Lambda & K_{mm} & \Lambda & K_{mn} \\ M & & M & & M & & M & & M \\ K_{n1} & \Lambda & K_{ni} & \Lambda & K_{nj} & \Lambda & K_{nm} & \Lambda & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

其中子矩阵

$$\mathbf{K}_{rs2 \times 2} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{K}_{rs2 \times 2} \quad \left(\begin{matrix} r=1,2,\Lambda,n \\ r=1,2,\Lambda,n \end{matrix} \right) \quad (2-36)$$

由于 (h) 式中很多位置上的子矩阵都是零，实际上 (2-36) 式不必对全部单元求和。只有当 \mathbf{K}_n 的下标 $r=s$ 或者属于同一单元的结点号时， \mathbf{K}_n 才不等于零，否则都等于零。

引入整体刚度矩阵以后，(j) 式可以写成

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{R} \quad (2-27)$$

这就是结构的整体刚度方程，它是包含有关于结点位移的 $2n$ 个线性方程。实际上，它就是对 n 个结点列出的全部 $2n$ 个平衡方程。

从上面讨论可以看出，由单元刚度方程集成结构的整体刚度方程，这个集合过程包括两个方面：由单元刚度矩阵 \mathbf{K}' 集成整体刚度矩阵 \mathbf{K} ，将作用于每个单元的等效结点力列阵 \mathbf{R}' （实质上只是等效结点载荷列阵）集成总的载荷列阵 \mathbf{R} 。

下面简要讨论整体刚度矩阵 \mathbf{K} 的性质。

1. 对称性

整体刚度矩阵 \mathbf{K} 是对称矩阵，为此只要证明 $K_{rs} = K_{sr}^T$

因为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{rs}^T &= \sum_{r=1}^{n_r} \mathbf{k}_{rs}^T = \sum_{r=1}^{n_r} (\mathbf{B}_s^T \mathbf{D} \mathbf{B}_r)^T \mathbf{t} \mathbf{A} \\ &= \sum_{r=1}^{n_r} (\mathbf{B}_r^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s) \mathbf{t} \mathbf{A} \\ &= \sum_{r=1}^{n_r} \mathbf{k}_{rs}^T = \mathbf{K}_{rs} \end{aligned}$$

由于 \mathbf{K} 是对称矩阵，故在实际计算时只需计算和存储在主对角线上以及在其一边的元素。

2. 整体刚度矩阵 \mathbf{K} 的主元素（主对角线上元素）总是正的。

\mathbf{K} 中每一列元素的物理意义为：要使弹性体的某一结点在某个坐标轴方向发生单位位移，而其他结点位移都保持为零时，在所有各结点上需要施加的结点力。这可从式 (2-37) 中看出，如令结点 1 在坐标轴 x 方向的位移 $\mu_1 = 1$ ，而其余的结点位移， $v_1 = \mu_1 = v_2 = \dots = v_{2n} = 0$ 便得到结点载荷列阵等于 \mathbf{K} 的第一列元素的列阵，即

$$[R_{1x} \ R_{1y} \ R_{2x} \ R_{2y} \ \Lambda \ R_{nx} \ R_{ny}]^T = [K_{11} \ K_{21} \ K_{31} \ K_{41} \ \Lambda \ K_{2n-1,1} \ K_{2n,1}]^T$$

由上述物理意义可知， K 中的元素，如 K_{33} 表示结点 2 在 x 方向产生单位位移，而其他位移均为零时，在结点 2 的 x 方向上必须施加的力，它自然应沿着单位位移方向，因而为正号。

3. 稀疏性及带形分布规律

整体刚度矩阵 K 是一个稀疏阵，如果遵守一定的结点编号规则，可使非零元素集中在主对角线附近，呈带状。因为离散化后结构的任一结点只与围绕它的相连单元发生联系，其它单元的结点位移不会引起该结点处的结点力，所以每一行 K 元素中含有大量的零元素。每一行的主元素到最后一个非零元素之间的所有元素总个数称之为该行的半带宽，所有半带宽中最大者称为 K 的最大半带宽，一般最大半带宽用 d 来记。其计算公式为

$$d = (\text{单元相邻结点码的最大差值} + 1) \times 2 \quad (2-38)$$

为节约计算机的存储单元，实际计算时应使 d 尽可能小。这就要求在结点编号时，尽量使直接相邻的两结点（属于同一单元）的号码之差尽可能小（详见第三章）。

4. 整体刚度矩阵 k 是一个奇异阵，在排除刚体位移后，它是正定的。

因为由式 (2-37) 可知，假如弹性体内全部结点位移都为零或者为一组任意的刚体位移（平动、转动），它们都应该对应着同样的不受力状态。若如此，式 (2-37) 就成为一个齐次方程

$$K_{2n \times 2n} \delta_{2n \times 1} = 0_{2n \times 1}$$

而式中的未知量 δ 又可以不为零（刚体位移），所以，此式中的系数矩阵 K 必定是一个奇异阵。之所以会出现上述情况，是因为还未引入位移约束所致。对于按位移求解的问题，位移边界条件往往是主要边界条件，必须引用的。如果问题本身具有足够的明确的边界条件，就排除了整个结构发生任意刚体位移的可能性。这样，只有当全部结点位移统统为零时，才对应不受力的状态。也就是说在排除刚体位移后， K 是正定的。约束条件的具体处理方法见 2.6 节。

为了对总刚度矩阵的形成过程有个更清楚的概念，下面举个例子。

例 2 已知如图 2-7 (a) 所示的悬臂深梁，在右端面作用着均布拉力，其合力为 P 。采用如图 2-7 (b) 所示的简单网格，设 $\mu = 1/3$ ，厚度为 t ，试求结点位移。

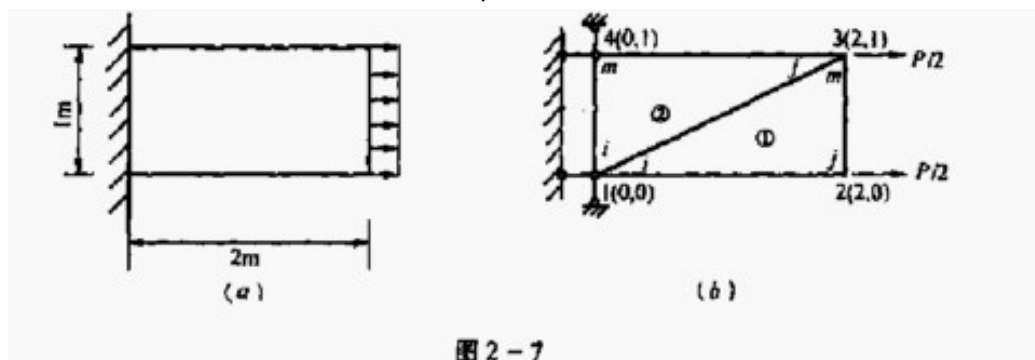


图 2-7

解：对于单元①， i, j, m 对应结点 1, 2, 3。

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_m = -1 & b_j &= y_m - y_i = 1 & b_m &= y_i - y_j = 0 \\ c_i &= x_m - x_j = 0 & c_j &= x_i - x_m = -2 & c_m &= x_j - x_i = 2 \end{aligned} \quad A=1$$

本题属平面应力问题， K 的系数为 $\frac{Et}{4(1-\mu^2)A} = \frac{9Et}{32}$ ，则

$$k^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} k_{11}^{\textcircled{1}} & k_{12}^{\textcircled{1}} & k_{13}^{\textcircled{1}} \\ k_{21}^{\textcircled{1}} & k_{22}^{\textcircled{1}} & k_{23}^{\textcircled{1}} \\ k_{31}^{\textcircled{1}} & k_{32}^{\textcircled{1}} & k_{33}^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \frac{3Et}{32} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 7 & -4 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & 13 & 2 & -12 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -12 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

单元贡献矩阵

$$K^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} k_{11}^{\textcircled{1}} & k_{12}^{\textcircled{1}} & k_{13}^{\textcircled{1}} & 0 \\ k_{21}^{\textcircled{1}} & k_{22}^{\textcircled{1}} & k_{23}^{\textcircled{1}} & 0 \\ k_{31}^{\textcircled{1}} & k_{32}^{\textcircled{1}} & k_{33}^{\textcircled{1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注意这儿的上标代表单元的号码。

对于单元②, i, j, m 对应于结点 1, 3, 4。

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_m = 0 & b_j &= y_m - y_i = 1 & b_m &= y_i - y_j = -1 \\ c_i &= x_m - x_j = -2 & c_j &= x_i - x_m = 0 & c_m &= x_j - x_i = 2 \end{aligned}$$

$$k^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} k_{11}^{\textcircled{2}} & k_{13}^{\textcircled{2}} & k_{14}^{\textcircled{2}} \\ k_{31}^{\textcircled{2}} & k_{33}^{\textcircled{2}} & k_{34}^{\textcircled{2}} \\ k_{41}^{\textcircled{2}} & k_{43}^{\textcircled{2}} & k_{44}^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \frac{3Et}{32} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & -2 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -3 & 2 & 7 & -4 \\ 2 & -12 & 2 & -1 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

单元贡献矩阵

$$K^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} k_{11}^{\textcircled{2}} & 0 & k_{13}^{\textcircled{2}} & k_{14}^{\textcircled{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{\textcircled{2}} & 0 & k_{33}^{\textcircled{2}} & k_{34}^{\textcircled{2}} \\ k_{41}^{\textcircled{2}} & 0 & k_{43}^{\textcircled{2}} & k_{44}^{\textcircled{2}} \end{bmatrix}$$

总刚度矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} + k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} \\ & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & 0 \\ \text{对称} & & k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} \\ & & & k_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3Et}{32} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 & 2 & 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & -4 & 0 & 2 & -12 \\ -3 & 2 & 7 & -4 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 13 & 2 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 7 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & -12 & 0 & 13 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & -3 & 2 & 7 & -4 \\ 2 & -12 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

有了总刚度矩阵后，再形成载荷列阵，即可得整体刚度方程。经约束处理后就求解结点位移。这些到 2.6 节中再完成。

2.5 等效结点力 荷载列阵

在有限单元法的分析中，根据离散思想，需将作用于单元的外力系（包括集中载荷，表面载荷、体积载荷及单元间的相互作用力），都按虚功等效的原则，移置到结点上成为等效结点力。所谓虚功等效，是指原力系与等效结点力在任何可能的微小位移（虚位移）上所做的功（虚功）都相等。另外上节已经指出，整体刚度方程 (2-37) 式右边的载荷列阵 R ，实际上是由全部单元因载荷引起的等效结点力（也称结点载荷）按结点号码顺序对叠加而成（因为相邻单元公共边内力引起的等效结点力，在叠加过程中必然互相抵消，故只剩下载荷所引起的等效结点力），即

$$R_{\bar{p}} = \sum_{e=1}^{n_e} R'_{\bar{p}} = [R^T_{\bar{p}1} \quad R^T_{\bar{p}2} \quad \Lambda \quad R^T_{\bar{p}n}]^T \quad (a)$$

其中单元的等效结点力 R' 是由作用在单元的荷载——集中力 P ，表面力 \bar{p} 和体积力 p 分别移置到结点上，再逐点加以合成得到的。

由虚功等效原则，有

$$(\delta'')^T R' = f'^T P + \int f'^T \bar{p} t ds + \iiint f'^T p t dx dy \quad (b)$$

上式等号左边表示单元等效结点力 R' 所作的虚功。等号右边的第一项是集中了 P 所作的虚功；第二项的积分沿着承受面力的单元边界进行，它表示对应单元上表面力 \bar{p} 所作的虚功；第三项的积分遍及整个单元，它表示体积力 p 所作的虚功； t 为单元的厚度。将 2.3 节中 $f' = N \delta'$ 代入，注意到结点虚位移列阵 δ'' 中元素都是常量，可将其移到积分号前面，于是 (b) 式化成

$$(\delta'')^T R' = (\delta'')^T (N^T P + \int f'^T \bar{p} t ds + \iiint f'^T p t dx dy) \quad (c)$$

再注意到 δ'' 是任意的，所以 (c) 式两边与之相乘的矩阵应当相等，故有

$$R' = R'_p + R'_{\bar{p}} + R'_p \quad (d)$$

$$\text{其中} \quad R'_p = N^T P \quad (2-39)$$

$$R_{\bar{p}}' = \int N^T \bar{p} t ds \quad (2-40)$$

$$R_p' = \iiint N^T p t dx dy \quad (2-41)$$

$R_p', R_{\bar{p}}', R_p'$ 分别是单元的集中力, 表面力, 体积力移置到结点上得到的等效结点力。再将 (d) 式代入 (a) 式, 荷载列阵可写成

$$\mathbf{R} = \sum_{r=1}^{n_e} (\mathbf{R}_p' + \mathbf{R}_{\bar{p}}' + \mathbf{R}_p') = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{\bar{p}} + \mathbf{R}_p \quad (2-42)$$

下面逐项加以讨论。

1. 集中力的等效荷载列阵 \mathbf{R}_p

设三角形单元内任意一点 $M(x_M, y_M)$ 受到集中荷载 P 的作用, 其沿 x, y 方向的分量分别为 P_x 和 P_y , 即

$$P = \begin{bmatrix} P_x & P_y \end{bmatrix} \quad (e)$$

由 (2-39) 式

$$R_p' = N^T P$$

有

$$R_p' = \begin{bmatrix} X_i & Y_i & X_j & Y_j & X_m & Y_m \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N_i P_x & N_i P_y & N_j P_x & N_j P_y & N_m P_x & N_m P_y \end{bmatrix} \quad (f)$$

故

$$X_i = N_i P_x \quad Y_i = N_i P_y \quad (i, j, m) \quad (g)$$

注意上式中的 N_i, N_j, N_m 是它们在 M 点函数值。即 $N_i(x_M, y_M), N_j(x_M, y_M), N_m(x_M, y_M)$ 。

逐点合成各单元上集中力的等效结点力, 按结点号码顺序 (每个结点按自由度顺序) 排列, 即可得到集中力的等效荷载列阵 \mathbf{R}_p 。

实际计算中, 在划分网格时一般将集中荷载作用点划成结点, 这样集中力的等效荷载列阵 \mathbf{R}_p 就容易写出。

2. 表面力的等效荷载列阵 $\mathbf{R}_{\bar{p}}$

作用在单元边界上的表面力移置到结点可得到各单元的表面力等效结点力。在各结点处合成以后, 按结点号码顺序 (每个结点按自由度顺序) 排列, 便组成弹性体的表面力等效荷载列阵 $\mathbf{R}_{\bar{p}}$, 即

$$R_{\bar{p}} = \sum_{r=1}^n R_{\bar{p}}' = \left[R_{\bar{p}1}'^T + R_{\bar{p}2}'^T + \dots + R_{\bar{p}n}'^T \right]^T \quad (i)$$

由于作用在单元边界上的内力, 在合成叠加过程中互相抵消, 因此上式中的结点只是作用在弹性体边界上的外表面力所引起。

根据 (2-40) 式, 单元 e 的表面力等效结点力为

$$R_{\bar{p}}' = \begin{Bmatrix} R_{\bar{p}i}' \\ R_{\bar{p}j}' \\ R_{\bar{p}m}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int N_i \bar{p} t ds \\ \int N_j \bar{p} t ds \\ \int N_m \bar{p} t ds \end{Bmatrix} \quad (j)$$

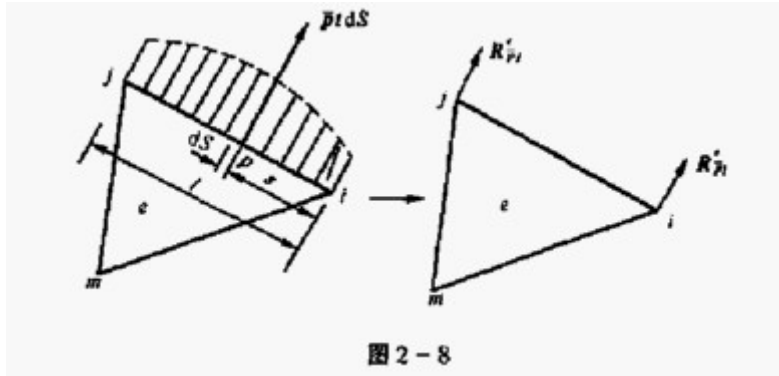


图 2-8

假如在图 2-8 中, 单元 e 只有 ij 边上作用有表面力 \bar{p} , ij 边长设为 1, 边上任意点 P 离开结点 i 的距离为 s, 根据式 (2-19), (2-20) 有

$$N_i = L_i = \frac{\text{三角形Pjm的面积}}{\text{三角形ijm的面积}} = \frac{l-s}{l} = 1 - \frac{s}{l}$$

$$N_j = L_j = \frac{\text{三角形Pim的面积}}{\text{三角形ijm的面积}} = \frac{s}{l}$$

$$N_m = L_m = 0$$

代入(j)式得

$$R'_{pi} = \int_0^l \left(1 - \frac{s}{l}\right) \bar{p} t ds$$

$$R'_{pj} = \int_0^l \frac{s}{l} \bar{p} t ds$$

$$R'_{pm} = 0$$

上面结果与按静力原理将表面力 \bar{p} 向结点 i 及 j 分解所得到的分力完全相同。

3. 体积力的等效载荷列阵 R_p

与表面力的情况相类似, 它是由单元体积力的等效结点力在备结点处合成以后, 按结点号码顺序 (每个结点按自由度顺序) 排列而成

$$R_p = \sum_{r=1}^n R'_p = [R'_{p1} + R'_{p2} + \dots + R'_{pn}]^T \quad (k)$$

单元 e 的体积力的等效结点力为

$$R'_p = \begin{Bmatrix} R'_{pi} \\ R'_{pj} \\ R'_{pm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \iint N_i p t dx dy \\ \iint N_j p t dx dy \\ \iint N_m p t dx dy \end{Bmatrix} \quad (1)$$

利用这些公式求载荷列阵, 就要进行积分运算。这里我们指出, 在线性位移模式的情况下, 按照静力学中平行力的合成分解原理得到的结点力, 与按虚功等效原则得到的结果完全一致。因此, 在实际计算等效结点力时, 可以直接应用静力学中关于平行力分解的许多结果。

下面列出一些常见结果, 便于应用。

1. 设单元 e 只在 ij 边上受有沿 x 方向的载荷 P, 其作用点距 i 及 j 的距离分别为 l_i 及 l_j (见图 2-9)。移置到各结点的等效结点力为:

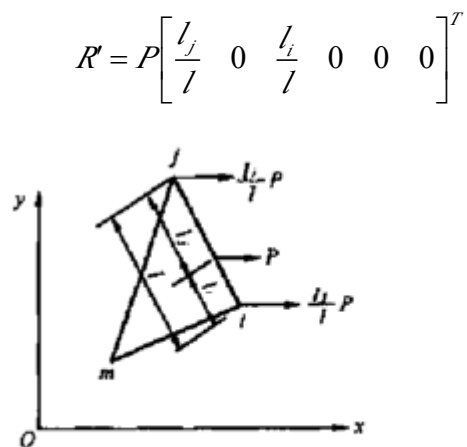


图 2-9

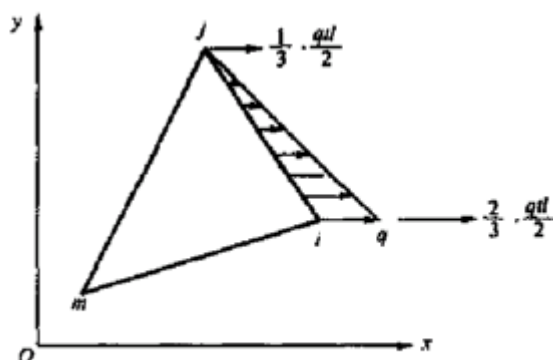


图 2-10

2. 如果 ij 边上受有沿 x 方向的按三角形分布的荷载，它在 i 点的集度为 q （见图 2-10），则有

$$R' = \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

这就是说，应当把总荷载的三分之二移置到结点 i ，三分之一移置到 j ，结点力方向与原荷载方向相同。据此，可以用叠加法求得边界上受任意线性分布荷载时的等效结点力列阵。

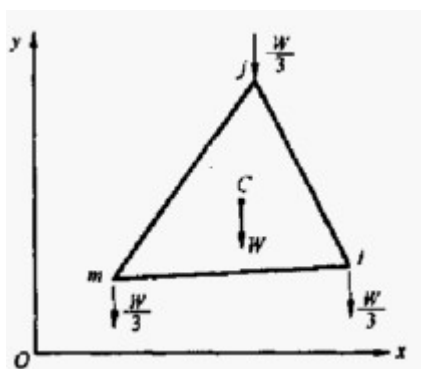


图 2-11

3. 设有均质、等厚的三角形单元 ijm ，它受有重力荷载 W 。作用在三角形形心 C （见图 2-11）。则有

$$R' = -\frac{W}{3} [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T$$

即只须把三分之一的重力移到每个结点上。

2.6 约束条件的处理

整体刚度矩阵和载荷列阵建立以后，便可得到整体刚度方程

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{R} \quad (2-37)$$

由于在建立整体刚度矩阵 \mathbf{K} 时，没有考虑弹性体具体的边界约束情况， \mathbf{K} 必然是奇异的。因此必须引入约束条件，在排除刚体位移，即消除 \mathbf{K} 的奇异性后才能从方程组 (2-37) 求解结点位移。在一般情况下，所考虑问题的边界往往已有一定的位

移约束条件。否则，适当指定某些结点的位移值，以避免出现刚体运动。经引用这些边界条件以后，待求结点未知量的数目和方程的数目便可相应地减少。然而，常用的且比较方便的做法是以某种方法引入已知的结点位移（包括零位移约束），而保持方程原有的数目不变，只是修正 \mathbf{K} 和 \mathbf{R} 中某些元素，以避免计算机存储作大的变动。

引入已知结点位移最常用的方法有两种。

一种方法是：若已知结点 i 在 y 方向位移 v_i 的值，则令 \mathbf{K} 中的元素 $K_{2i,3i}$ 为 1，而第 $2i$ 行和 $2i$ 列的其余元素都为零， \mathbf{R} 中的第 $2i$ 个元素则用位移 v_i 的已知值代入， \mathbf{R} 中的其他各行元素都减去结点位移的已知值与原来 \mathbf{K} 中这行的相应列元素的乘积。

为说明这一过程，现考察一个只有四个方程的简单例子：

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

设已知结点位移为 $u_1 = \beta_1, u_2 = \beta_2$ ，当引进上述已知结点位移后，方程(a)变成

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & K_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & K_{42} & 0 & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ R_2 - K_{21}\beta_1 - K_{23}\beta_3 \\ \beta_3 \\ R_4 - K_{41}\beta_1 - K_{43}\beta_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{b})$$

然后，就用这组维数不变的方程来求解所有的结点位移，其解答 $u_1 = \beta_1$ ， $u_2 = \beta_3$ ， v_1 ， v_2 仍为原方程的解答。这种方法又称为“化 1 置 0 法”。

另一种方法是：将 \mathbf{K} 中与结点位移有关的主对角元素乘上一个计算机可接受的充分大的数，例如 10^{15} ，同时将 \mathbf{R} 中的对应元素换上已知结点位移与同一个大数及主对角元素的乘积。用此方法来修正上面的例子，方程 (a) 将成为

$$\begin{bmatrix} K_{11}\gamma 10^{15} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\gamma 10^{15} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1\gamma K_{11}\gamma 10^{15} \\ R_2 \\ \beta_3\gamma K_{33}\gamma 10^{15} \\ R_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{c})$$

为看出方程 (c) 的解答，我们展开(c)的第一个方程

$$K_{11}\gamma 10^{15} u_1 + K_{12}v_1 + K_{13}u_2 + K_{14}v_2 = \beta_1\gamma K_{11}\gamma 10^{15} \quad (\text{d})$$

因为

$$K_{1i} \cdot 10^{15} \gg K_{1j} \quad (j=2,3,4)$$

在 (d) 式两边同除 $K_{11}\gamma 10^{15}$ 后，即得 $u_1 = \beta_1$ 。同理可得 $u_2 = \beta_3$ ， v_1 ， v_2 仍为原方解答。这种方法又称“乘大数法”。以上两种方法都保持了原来 \mathbf{K} 矩阵的稀疏，带状和对称等特性。

现在把 2.4 节中例题 2 做完。2.4 节中已经得到整体刚度矩阵 \mathbf{K} ，再由 2.5 节可得载荷列阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{P}{2} & 0 & \frac{P}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

位移约束条件为 $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$ （见图 2.7 (b)），将此约束条件引入整

体刚度方程，对其用“化 1 置 0 法”处理后得到

$$\frac{3Et}{32} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 7 & -4 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ & & & 13 & 2 & -12 & 0 & 0 \\ & & & & 7 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对称} & & & & 13 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

以上联立方程得

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.98 \\ 0.333 \\ 1.80 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{P}{Et}$$

2.7 解题步骤和注意事项

2.7.1 解题步骤

利用三角形常应变单元解平面问题，其具体步骤归纳如下。

1. 将要计算的弹性体划分成三角形单元网格，对结点进行编号。建立坐标系，列出结点坐标作为输入信息。
2. 单元编号，按逆时针顺序列出各单元三个结点的号码作为输入信息。
3. 计算载荷的等效结点力，列出结构载荷列阵作为输入信息。
4. 各单元按(2-3)式计算常数 $b_i, c_i, b_j, c_j, b_m, c_m$ ，再按(2-4)式计算单元面积 A 。
5. 按(2-33)或(2-34)和(2-31)式计算各单元的刚度矩阵。
6. 利用(2-36)式形成整体刚度矩阵中的非零子矩阵。
7. 约束条件处理。此前应输入有关位移约束的信息。
8. 解线性方程组(2-37)，求出结点位移。
9. 各单元内应力计算。

各单元内应力可利用 $\sigma = s\delta'$ 进行计算。它只须从整体结点位移列阵 δ 中取出各个单元的结点位移列阵 δ' ，逐个单元地按式(2-14)求出应力矩阵 S ，便可代入上述公式求应力。

若需求出各单元的主应力和主方向，则可按下式计算：

$$\begin{aligned} \sigma_{\max, \min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) \end{aligned} \quad (2-43)$$

式中 α 为 σ_{\max} 与x轴的夹角。

10. 结果整理。根据需要，对位移和应力结果绘制必要的图表，并进行分析，最后给出结论。

通常步骤4至9均由计算机完成。

2.7.2 注意事项

1. 对称性的利用

如果结构与载荷都有对称性可资利用，就能减少很多工作量。例如具有一个对称轴的结构，若载荷也对称，可取其中的一半作为分析对象，此时，位于对称轴上的结点无垂直对称轴方向的位移。如果对于x,y轴都对称，只需计算四分之一就行。

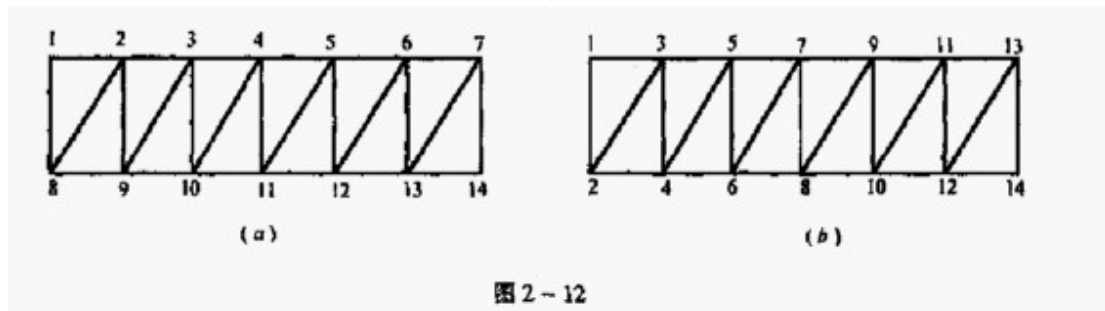
对于具有对称轴的结构，即使载荷不对称，也不反对称，此时，宁可将载荷分解为对称和反对称两部分，分别计算，然后将结果叠加，这样在第二步计算（如反对称部分）之前，只须修改少数几个数据——载荷列阵即可。

2. 结点的选择和单元的划分

有限单元法中单元的划分是很自由的，形状和尺寸可自由调整。通常集中载荷的作用点、分布载荷强度的突变点、分布载荷与自由边界的分界点、支承点等都应取为结点。同时不要把厚度不同或材料不同的区域划在同一个单元里。另外，任意一个三角形单元的顶点，必须同时也是其相邻三角形单元的顶点，而不能是相邻三角形单元的边上点。单元的数量要根据计算精度要求和计算机的容量来确定。显然单元划分得越小（单元数越多），计算结果就越精确，但数据准备的工作量也就越大，计算时间也就越长，且占用计算机的内存也就越多，甚至有可能超出计算机的容量。因此在保证精度的前提下，力求采用较少的单元。在划分单元时，对于重要的或应力变化急剧的部位，单元应划得小些，对于次要和应力变化缓慢的部位，单元可划得大些，“中间地带”以大小逐渐变化的单元来过渡。此外，根据误差分析，应力及位移的误差都和单元的最小内角的正弦成反比，所以单元的边长，力求接近相等，也就是说单元的三条边长尽量不要悬殊太大。

3. 结点的编号

在结点编号时，应注意尽量使同一单元的相邻结点的号码差值尽可能地小些，以使缩小刚度矩阵的带宽，节约计算机存储。如图2-12，(a)与(b)单元划分相同，(b)的编号要比(a)的编号为好，即结点应顺短边编号为好。



4. 单元结点 i, j, m 的次序

前面提到为了在计算中保证单元面积A不致出现负值，结点i、j、m的次序必须是逆时针转向。但这样做，在单元数量较大时，输入数据容易出错。实际上，i、j、m的次序可以任意安排，只要在有关计算公式中，单元面积A取绝对值，便可得到正确的结果。

5. 计算结果的整理

在位移方面一般无需进行什么整理工作。应力方面，因三角形常应变单元也是常应

力单元，算出的应力，通常都作为单元形心处的应力。为了由计算结果推出弹性体内某一点接近实际的应力值，通常可采用绕结点平均法或两单元平均法进行处理。绕结点平均法是将环绕该结点的所有单元应力的算术平均值视为该结点的应力。两单元平均法是将相邻单元应力的平均值视为其公共边界中点的应力值。实践证明这两种方法均可得到满意的结果。

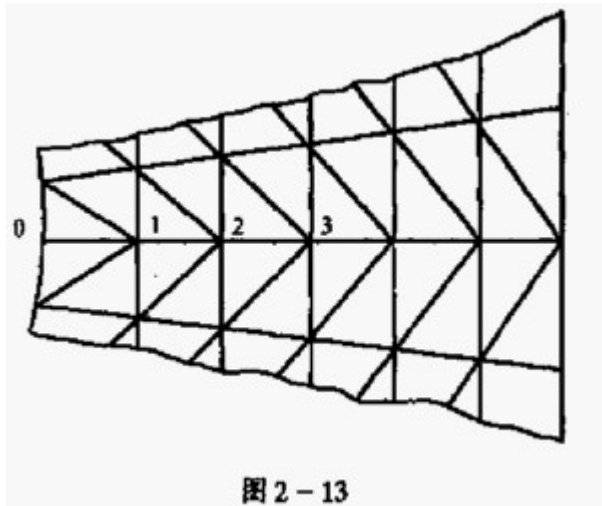


图 2-13

采用上述两种应力平均法时还必须注意两点：

(1) 相连单元间的应力连续性只有当相连单元具有相同厚度和材料时才存在，平均法才有意义。因此，对于那些不等厚度或不同材料的相连单元是不应当采用平均法直接整理应力成果的。

(2) 位于结构边界或介质间断线上的应力点是无法用两单元平均法得到应力值的，若用绕结点平均法也因其相连单元太少而不能得到较佳的近似值。这种情况往往改用内部应力点外推的办法去求它的近似值。以图 2-13 中的边界 0 处的应力为例，就是先用绕结点平均法算出内点 1、2、3 处的应力，再用如下的抛物线插值公式推算出来

$$f = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f_3$$

上式中 x_1, x_2, x_3 为三个插值点 1, 2, 3 的坐标。 f_1, f_2, f_3 为相应的给定函数值，将以上各值以及所要推算点的坐标 x 代入上式，便可求得函数的近似值。

2.8 解答的收敛性

我们知道，有限单元法的计算模型是用有限个自由度的单元集合体代替无限个自由度的连续体，它的解在数学形式上就是用一个有限项的多项式来代替一个连续的函数。因而所得的解必然存在着是否收敛于真实解的问题。我们总是希望所采用的方法，随着网格的逐步细分，能得到收敛于问题真实解的解答。从前面关于有限单元法的分析中可以看出，在单元形式确定以后，位移模式的选择是一个关键，因为载荷的移量、应力矩阵和刚度矩阵的建立等等，都依赖于位移模式。因此，为了能从有限单元法得出正确的解答，首先必须使位移模式能正确反映单元的真实位移形态。具体说来，为保证解答的收敛性，单元的位移模式必须满足如下三个条件。

1. 位移模式必须能反映单元的刚体位移。

每个单元的位移一般总是包含着两部分：一部分是由本单元的变形引起的，另一部

分是与本单元的变形无关的，即刚体位移，它是由于其它单元发生了变形而连带引起的。因此，为了正确反映单元的位移形态，位移模式必须能反映该单元的刚体位移。2.1 节中线性位移模式 (b) 是反映了单元刚体位移的。因为

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \alpha_1 + \alpha_2 x - \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} y + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} y$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y = \alpha_4 + \alpha_6 y + \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} x + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} x$$

上式中的 α_1, α_4 反映了刚体平移， $\omega = \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2}$ 反映了刚体的转动。

2. 位移模式必须能包含单元的常应变。

单元内各点处的应变一般也包含着与坐标无关的常应变和与坐标有关的可变应变两部分。对于小变形问题，当单元划分得较小时，单元内的应变变化很小，常应变就成为主要的基本的部分。当单元尺寸无限缩小时，每个单元中的应变应趋于常量。因此，除非位移模式中包含着常应变项，否则就没有可能收敛于正确解。2.1 节的线性位移模式 (b) 中与 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6$ 有关的线性项是提供单元中的常应变的。

3. 位移模式在单元内要连续、并使相邻单元间的位移必须协调。

当选择多项式来构成位移模式时，单元内的连续性要求总是满足的，单元间的协调性要求单元之间不开裂也不重叠（对于梁、板、壳单元还要求单元之间有斜率的连续性）。通常，当单元交界面上的位移取决于该交界面上结点的位移时，可以保证位移的协调性。

前两个条件是有限元解答能收敛于正确解答的必要条件或称为完备性条件，第三个条件是充分条件（或称为位移协调条件）。满足条件 1、2 的单元称为完备单元，满足条件 3 的单元称为协调单元。三角形常应变单元，同时满足三个条件，因此是完备的协调单元。

另外，已经证明，对于一个给定的位移模式，满足上面三个条件，其刚度系数的数值比精确的要大。这样在给定的载荷作用下，计算模型的变形比实际结构的变形小，因此，随着网格的细分，位移的近似解将由下方收敛于精确解，即得到真实解的下界。关于位移解答下限性质的能量法的证明，读者可参阅朱伯芳《有限单元法原理与应用》一书。

这里顺便指出，在某些梁、板以及壳体分析中，要使单元满足条件 3 比较困难，实践中也出现只满足条件 1、2 的单元，即完备而不协调的单元，其收敛性也是令人满意的。不协调单元的主要缺点是不能事先肯定其刚度与真实刚度的大小关系，是否收敛于真解，未得到严格的证明。但是另一方面，不协调单元一般没有协调单元那样刚硬，因此可能比协调单元收敛得快。

2.9 热应力计算

2.9.1 热应力

当物体温度发生变化时，物体的各微小部分将由于膨胀或收缩而产生线应变 αT ，其中 α 为材料的线膨胀系数， T 表示弹性体内任意点的温度改变值（从整个物体处于初始均匀温度状态算起）。在平面问题中， T 是坐标 x, y 及时间 t 的函数。如果物体各部分的热变形不受任何约束，且温度改变均匀，则虽有变形却不会引起应力。但

是如果各部分的温度变化不均匀，或者表面与其它物体相联系，即受到一定的约束，热变形不能自由地进行，就将产生主应力。这种由于温度变化而引起的应力称为“热应力”或“温度应力”。

2.9.2 平面应力问题

1. 应力-应变关系

热应力问题与一般应力分析问题相比较。主要在应力-应变关系上稍有差别。

由于温度变化，在各向同性材料中。线应变 αT 在所有各个方向都相同，而且并不伴随着任何剪应变。由于弹性体所受的外在约束以及体内各部分之间的相互约束，产生温度应力。这个应力又将按虎克定律引起应变。于是对于平面应力问题，总的应变分量为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha T \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) + \alpha T \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (a)$$

将(a)式移项，得

$$\begin{cases} \varepsilon_x - \alpha T = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y - \alpha T = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} - 0 = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (b)$$

与平面应力问题的物理方程相比，考虑热应力问题的应力——应变关系可以写成

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (c)$$

其中 ε_0 为由于温度改变引起的应变，即

$$\varepsilon_0 = \alpha T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (d)$$

将 $\varepsilon = B\delta'$ 代入(c)式得

$$\sigma = D(B\delta' - \varepsilon_0) \quad (2-44)$$

2. 热载荷

考虑到热应力，弹性体内应力的虚功将为

$$\iint \varepsilon'^T D(B\delta' - \varepsilon_0) t dx dy = (\delta')^T \left(\iint B^T D B t dx dy \delta' - \iint B^T D \varepsilon_0 t dx dy \right)$$

结点力所作的虚功为

$$(\delta')^T \mathbf{R}'$$

由虚功原理，有

$$\mathbf{R}' = \iint B^T D B t dx dy \delta' - \iint B^T D \varepsilon_0 t dx dy$$

也就是

$$\mathbf{R}' + \iint B^T D \varepsilon_0 t dx dy = k \delta' \quad (2-45)$$

上式左边第二项是由于考虑温度变化而增添出来的，它在上式中处于结点力的地

位，相当于考虑了温度变化而施加于结点一个假想的等效结点力，称为热荷载，用 H' 表示，即有

$$H' = \iint B^T D \varepsilon_0 t dx dy \quad (2-46)$$

对于平面应力问题，将(d)式代入上式得

$$H' = \iint B^T D \alpha T [1 \quad 1 \quad 0]^T t dx dy$$

将 (2-9) 和 (2-11) 式代入，得

$$H' = \frac{E \alpha t}{2(1-\mu)A} [b_i \quad c_i \quad b_j \quad c_j \quad b_m \quad c_m]^T \iint T dx dy \quad (2-47)$$

如果变温 T 的分布函数为已知时，上式中的积分可用数值积分求得。对于 T 为线性分布时，可写成

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_m T_m = L_i T_i + L_j T_j + L_m T_m$$

由积分公式 (2-25)，可得

$$\iint T dx dy = \frac{1}{3} (T_i + T_j + T_m) A \quad (2-48)$$

其中 T_i 、 T_j 、 T_m 分别为三个结点处的变温。在此情况下，热荷载列阵为

$$H' = \frac{E \alpha (T_i + T_j + T_m) t}{6(1-\mu)} [b_i \quad c_i \quad b_j \quad c_j \quad b_m \quad c_m]^T \quad (2-49)$$

3. 应力公式

根据结点位移计算单元应力，由 (2-44) 式

$$\sigma = DB \delta' - D \varepsilon_0 = DB \delta' - D \alpha T [1 \quad 1 \quad 0]^T$$

将 (2-11) 中 D 代入，并和以前一样用 S 代替 DB ，即得

$$\sigma = S \delta' - \frac{E \alpha T}{1-\mu} [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (2-50)$$

在每一单元中，上式右边第二项一般并不一定是常量，因为变温 T 不一定是常量。为了便于把变温应力和实际载荷引起的应力相叠加或相比较，通常就用三个结点处变温的平均值来代替式中的 T ，这样就有

$$\sigma = S \delta' - \frac{E \alpha (T_i + T_j + T_m) t}{3(1-\mu)} [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (2-51)$$

2.9.3 平面应变问题

与上面相似，平面应变问题的物理方程为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T = 0$$

将由其中第三式得来的 $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) - E \alpha T$ 代入前二式，得

$$\varepsilon_x = \frac{1-\mu^2}{E} (\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y) + (1+\mu) \alpha T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\mu^2}{E}(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x) + (1+\mu)\alpha T$$

移项以后，与有关剪应变及剪应力的物理方程联立，得

$$\varepsilon_x - (1+\mu)\alpha T = \frac{1-\mu^2}{E}(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y - (1+\mu)\alpha T = \frac{1-\mu^2}{E}(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x) \quad (e)$$

$$\gamma_{xy} - 0 = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \frac{2(1+\frac{\mu}{1-\mu})}{\frac{E}{1-\mu^2}}\tau_{xy}$$

将式 (e) 与式 (b) 对比，可见，除了 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 代替了 E， $\frac{\mu}{1-\mu}$ 代替了 μ 以外，还有 $(1+\mu)\alpha$ 代替 α 。于是在 (2-49) 中进行这样的代换以后，就得出在平面应变情况下，热载荷列阵为

$$H^e = \frac{E\alpha(T_i + T_j + T_m)t}{6(1-2\mu)} [b_i \quad c_i \quad b_j \quad c_j \quad b_m \quad c_m]^T \quad (2-52)$$

在 (2-51) 中进行同样的代换以后，应力公式为

$$\sigma = S\delta^e - \frac{E\alpha(T_i + T_j + T_m)t}{3(1-2\mu)} [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (2-53)$$

2.10 矩形单元

2.10.1 概述

三角形常应变单元是有限单元法中最早提出内单元之一。由于其简单，目前仍在应用；但由于单元内的应变和应力都是常量，而通常工程结构中的应力是随着坐标变化的，且有时变化急剧。因此，在应用三角形常应变单元时，必须布置大量的、密集的单元，才能得到较好的计算精度。这一节里，我们将介绍矩形单元，它也是常用的单元之一。单元的位移函数采用双线性的插值多项式，故可更好地反映弹性体中的位移状态和应力状态，从而采用比较少的单元就能得到较好的计算结果。设有矩形单元 1234，其边长分别为 2a 和 2b，矩形的两边分别与 x、y 轴平行。取矩形的四个角点作为结点，每个结点有两个结点位移分量和两个结点力分量。如图 2-14 所示。

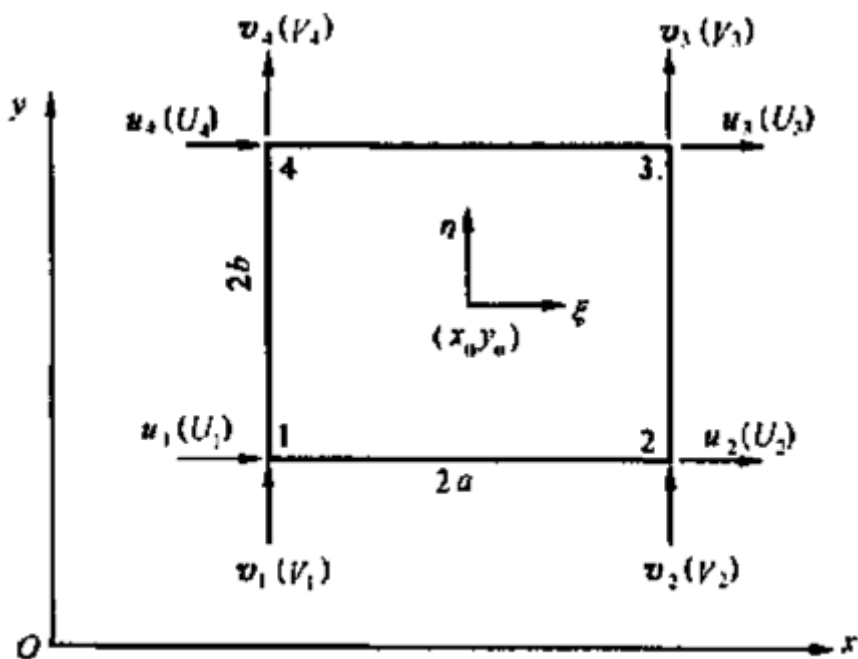


图 2-14

本节任务是建立单元刚度矩阵和单元结点力列阵，并在此基础上建立整体刚度矩阵和总结点载荷列阵，从而得出弹性体的整体刚度方程。

我们仍采用在三角形常应变单元中所用的分析方法和步骤。在单元分析中为了计算上的方便和简化，我们引用一个无量纲的局部坐标系 ξ 、 η ，局部坐标系的原点取在矩形的形心 (x_0, y_0) 上， ξ 、 η 轴分别与整体坐标轴 x 、 y 平行（如图 2-14），他们之间的坐标变换式为

$$\begin{cases} x = x_0 + a\xi & (-1 \leq \xi \leq 1) \\ y = y_0 + b\eta & (-1 \leq \eta \leq 1) \end{cases} \quad (2-54)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) \\ y_0 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_4) = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\ a &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_3 - x_4) \\ b &= \frac{1}{2}(y_4 - y_1) = \frac{1}{2}(y_3 - y_2) \end{aligned} \quad (2-55)$$

其中 (x_i, y_i) 是结点 i 的整体坐标， $i=1, 2, 3, 4$ 。

在局部坐标系中，结点 i 的坐标是 (ξ_i, η_i) ，它们的值分别是 ± 1 ，例如 $\xi_1 = -1, \eta_1 = -1$ 。

下面对矩形单元进行单元分析，分析讨论是在局部坐标系 ξ 、 η 中进行的。

2.10.2 位移模式

矩形单元共有四个结点，八个自由度，其位移模式中 can 包含八个位移参数，即

$$\text{可取} \quad \begin{cases} u = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ v = a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta \end{cases} \quad (\text{a})$$

位移模式 (a) 比三角形常应变单元中采用的线性位移模式增添了 $\xi\eta$ 项 (即相当于 xy 项), 这种位移是二个线性多项式 $(a'_1 + a'_2\xi)$ 、 $(a'_3 + a'_4\eta)$ 的乘积, 所以也称双线性模式。

将四个结点的局部坐标值代入 (a) 式, 可以列出八个结点位移分量方程, 从而得到两组关于 a 的四元联立方程, 即

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 - a_2 - a_3 + a_4 & v_1 &= a_5 - a_6 - a_7 + a_8 \\ u_2 &= a_1 + a_2 - a_3 - a_4 & v_2 &= a_5 + a_6 - a_7 - a_8 \\ u_3 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & v_3 &= a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ u_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 & v_4 &= a_5 - a_6 + a_7 - a_8 \end{aligned}$$

分别由两组方程解出八个位移参数 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 、 a_6 、 a_7 、 a_8 , 再将这些参数代入 (a) 式, 按结点位移分类合并, 得到

$$\begin{cases} u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \\ v = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \end{cases} \quad (\text{b})$$

其中 N_i ($i=1, 2, 3, 4$) 为形函数, 其表达式为

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned}$$

写成统一的表达式

$$N_i = \frac{(1+\xi_0)(1+\eta_0)}{4} \quad (\text{c})$$

式中

$$\xi_0 = \xi_i \xi, \quad \eta_0 = \eta_i \eta \quad (i=1,2,3,4)$$

将式 (b) 用矩阵记为

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = N\delta' \quad (\text{d})$$

其中 N 为形函数矩阵

$$N = [N_1 I \quad N_2 I \quad N_3 I \quad N_4 I] \quad (\text{e})$$

I 是二阶单位方阵, δ' 为单位结点位移列阵

$$\delta' = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T \quad (\text{f})$$

2.10.3 单元应变

利用几何方程求出单元应变为

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{Bmatrix} b \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ a \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ a \frac{\partial u}{\partial \eta} + b \frac{\partial v}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (g)$$

将 (b) 式代入, 得到

$$\varepsilon = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \delta' \quad (h)$$

式中

$$B_i = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} b \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & a \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ a \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & b \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} b\xi_i(1+\eta_0) & 0 \\ 0 & a\eta_i(1+\xi_0) \\ a\eta_i(1+\xi_0) & b\xi_i(1+\eta_0) \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \quad (2-56)$$

2.10.4 单元应力

利用 (2-14) 式, 可以得出用结点位移表示的单元应力

$$\sigma = D\varepsilon = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \delta' \quad (2-57)$$

式中

$$S_i = DB_i \quad (i=1,2,3,4) \quad (i)$$

对于平面应力问题

$$S_i = \frac{E}{4ab(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} b\xi_i(1+\eta_0) & \mu a\eta_i(1+\xi_0) \\ \mu b\xi_i(1+\eta_0) & a\eta_i(1+\xi_0) \\ \frac{1-\mu}{2} a\eta_i(1+\xi_0) & \frac{1-\mu}{2} b\xi_i(1+\eta_0) \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \quad (2-58)$$

2.10.5 单元刚度矩阵

仿照 2.3 节, 通过虚功方程仍可导出单元结点力 R^t 与结点位移 δ^t 之间关系的刚度方程, 即

$$R^t = k\delta^t \quad (j)$$

其中

$$k = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dx dy \quad (k)$$

k 即为单元的刚度矩阵, 写成分块形式

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

其中子矩阵可由下式计算

$$k_{ij} = \iint \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t dx dy = \iint \mathbf{B}_i^T \mathbf{S}_j t dx dy \quad (l)$$

若厚度 t 为常量，对于平面应力问题则得到 (1) 的显式如下

$$k_{ij} = tab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{S}_j d\xi d\eta$$

$$= \frac{Et}{4(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} \xi_i \xi_j \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{a}{b} \eta_i \eta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) & \mu \xi_i \eta_j + \frac{1-\mu}{2} \eta_i \xi_j \\ \mu \eta_i \xi_j + \frac{1-\mu}{2} \xi_i \eta_j & \frac{a}{b} \eta_i \eta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{b}{a} \xi_i \xi_j \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) \end{bmatrix}$$

(2-60)

对于平面应变问题，只要在 (2-58)、(2-60) 中将 E 换成 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ，将 μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$ ，即可得到相应的公式。

2.10.6 等效结点力

1. 矩形单元的等效结点力仍可用 2.5 节中公式 (2-39)、(2-40) 和 (2-41) 计算，只不过矩形单元具有四个结点 1、2、3、4，所以 \mathbf{R}^e 具有八个元素，即

$$\mathbf{R}^e = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{V}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \mathbf{V}_2 \quad \mathbf{U}_3 \quad \mathbf{V}_3 \quad \mathbf{U}_4 \quad \mathbf{V}_4]^T \quad (2-61)$$

下面给出两种常见载荷的结果

对于单元的自重 W ，载荷列阵

$$\mathbf{R}^e = -W \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T$$

即移置于每一结点的载荷都是四分之一的自重。

2. 如果单元在一个边界上受有三角形分布的表面力，在该边界上一个结点处为零，而在另一个结点处为最大，则将总表面力的三分之一移置到后一个结点。

2.10.7 整体刚度方程

与前述三角形常应变单元一样，将各单元的 \mathbf{k} 、 δ^e 和 \mathbf{R}^e 都扩大到整个弹性体自由度的维数，再进行叠加，便可得整个弹性体的刚度方程，它仍具有如下的形式

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{R} \quad (\text{m})$$

2.10.8 矩形单元和三角形常应变单元比较

从位移模式看，两者的位移模式均满足完备性和协调性，在矩形单元的位移模式 (a) 中， a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 、 a_6 、 a_7 与三角形单元相同，反映了刚体位移和常应变，在单元的边界上 ($\xi = \pm 1$ 或 $\eta = \pm 1$)，位移是按线性变化的，可见两个相邻单元的位移在公共边界上是连续的。

另外，式 (a) 为双线性位移模式，所以矩形单元中的应力分量都不是常量。由应力矩阵表达式 (2-58) 中可以看出，正应力分量 σ_x 的主要项 (不与 μ 相乘的项) 沿着 y 方向线性变化，正应力分量 σ_y 则沿着 x 方向线性变化，剪应力分量 τ_{xy} 则沿着 x 及 y 两个方向都线性变化。因此在用相间数目的结点时，矩形单元比三角形常应变单元能更好地反映应力急剧变化的情况，所以精度较高。但矩形单元也存在明显的缺点：从单元的几何形状看，矩形单元比三角形单元的适应性要差，一是不能适应斜交边界和曲线边界，二是不便于对不同部位采用大小不等的单元。为弥补这些缺

点，可以把矩形单元与三角形单元混合使用（图 2-15），当然这样做将使计算程序的编制和信息的准备更复杂一些。

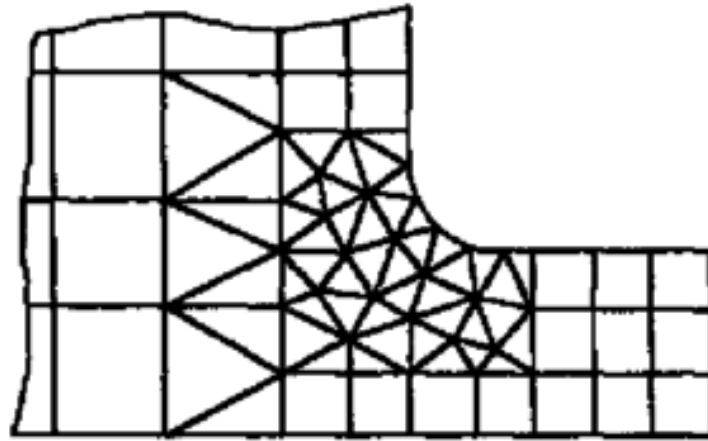
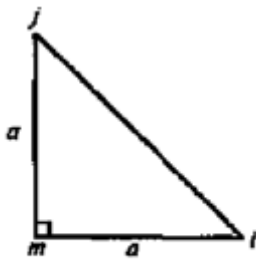


图 2-15

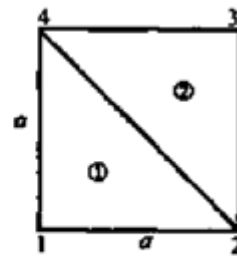
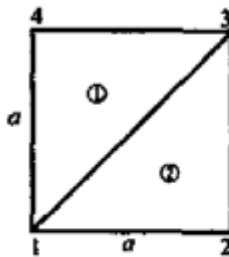
习题

2-1 图示一个平面应力状态的直角三角形单元，设 E 为常量， $\mu = \frac{1}{6}$ ， $t=1$ ，试求；

- 形函数矩阵 N
- 应力矩阵 S
- 单元刚度矩阵 K_s
- 当 $v_j = -1, u_i = v_i = u_j = u_m = v_m = 0$ 时单元的应力分量。



题 2-1 图



题 2-3 图

2-2 试证明单元刚度矩阵任一行（或列）的所有元素的总和等于零。

k 的每一行元素之和表示单元所有结点均沿 x 向和 y 向产生单位位移时相应的结点力分量。在这种情况下，单元只是作刚性平移，单元不产生应变，应力，结点力也为零，所以， k 每一行元素之和为零。根据对称，其每一列元素之和也必为零。

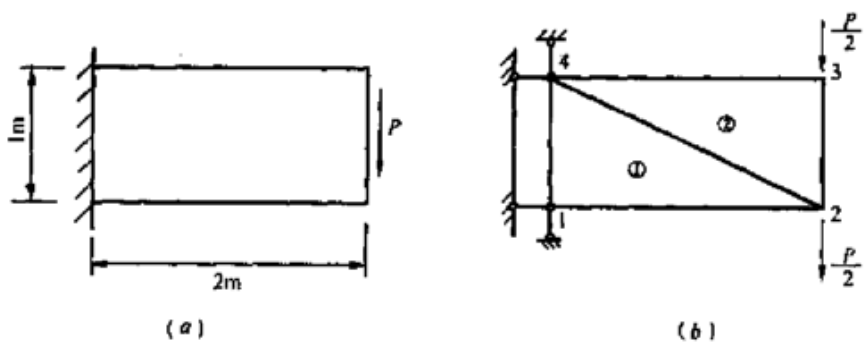
2-3 设有边长为 a 的正方形薄板。试按图示两种单元划分方式建立总刚度矩阵，并比较之。

2-4 已知如图（a）所示悬臂梁，在右端作用着均匀分布的剪力，其合力为 P ，采用图

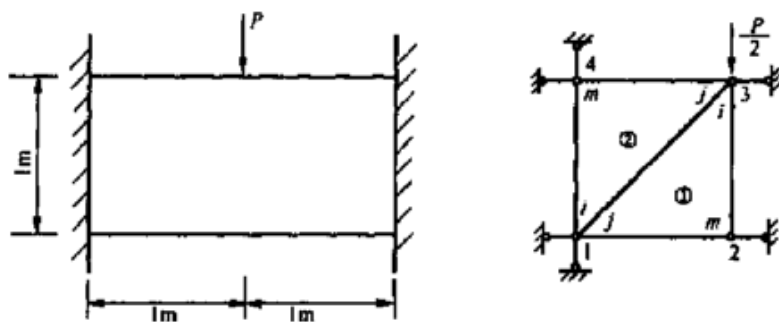
（b）所示的单元划分。设 $\mu = \frac{1}{3}$ ，厚度为 t ，弹性模量为 E ，试求结点位移。

答案:
$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{P}{Et} \begin{Bmatrix} -1.5 \\ -8.42 \\ 1.88 \\ -8.99 \end{Bmatrix}$$

2-5 图示为一固定端梁受集中力 P 作用，试用图示单元划分求出结点位移（按平面应力问题计算，取 E 为常量， $\mu = \frac{1}{6}, t = 1$ ）

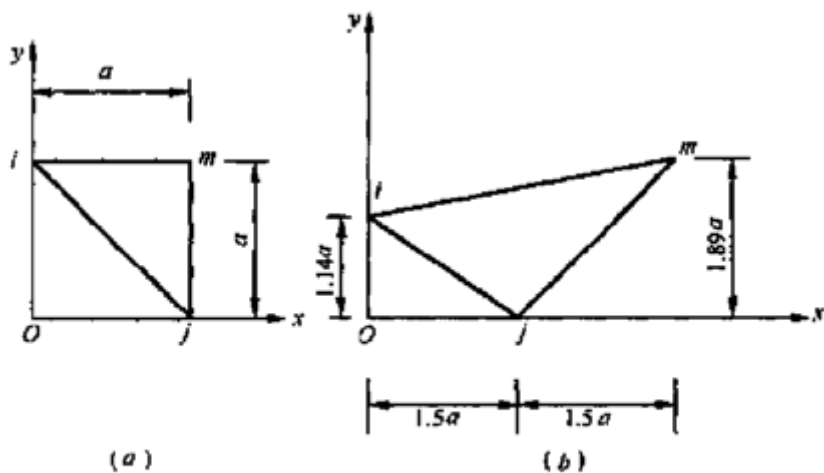


题 2-4 图



题 2-5 图

2-6 图示两种平面应力三角形单元，厚度为 t ，材料弹性模量为 E ，泊松比为 μ ，线膨胀系数为 α ，由于温度改变 T_0 ，试计算它的等效结点载荷（热载荷）。



题 2-6 图

第3章 平面问题有限元法程序设计

3.1 概述

用有限元法计算弹性连续介质平面问题，在电子计算机上实现，大致要经历如下步骤：

3.1.1 建立离散化模型，输入已知信息

首先，根据计算问题的要求和特点，按照选定的单元类型在连续计算域内合理设置结点。将计算区域划分为一定数目的单元，以构成有限元法的计算网络，实现连续介质的离散化。

对于大型的有限元法计算程序系统，通常都具有所谓“前处理”的功能。只要输入少量结构外形的尺度信息，计算机就能按设定的要求，对有限元网格进行自动剖分，并对它进行优化处理，在机器内自动生成离散化模型的各种信息量。有些程序系统还有很强的人机对话和图形功能。这将大量节省人力，提高计算工作的质量和效率。鉴于本书只介绍有限元法的基本原理和基本技术，“前处理”技术不拟详介，可参阅有关资料和书籍。

3.1.2 形成、组集结构刚度矩阵

由输入的原始数据，用 2.3 节所介绍的计算步骤，可以计算出各单元的单元刚度矩阵 k ，再按照 2.4 节所介绍的步骤，将单元刚度矩阵 k 中的每个元素，组合、汇集成结构的整体刚度矩阵 K 。

3.1.3 载荷、约束信息量处理

将所输入的载荷信息量进行加工，形成、组集结构载荷列阵 R 。见 2.5 节。再对输入的结点约束信息量进行处理，按照 2.6 节的方法，改变 K 与 R 中的相关元素，以消除原来矩阵 $K\delta = R$ 的奇异性。如果不加位移约束，结点位移列阵 δ 将有无穷多组解。

3.1.4 求解结构整体刚度方程

根据计算问题的要求和特点，选择适当的求解线性方程组的数学方法，求解结构整体刚度方程 $K\delta = R$ ，解得位移有限元法中的基本未知量——结点位移列阵 δ 。本书下文程序采用 Gauss 消元解法。

3.1.5 计算应力等其它力学量

求得给点位移后，不难通过选定的单元位移模式所导出的应变方程（2-8）式和单元应力方程（2-13）式，代入计算单元应变量和应力量。本书程序给出了常应变单元无应力及其主应力、应力主方向分析曲程序段。

3.1.6 输出计算结果

经过以上步骤，在计算机内已经算出诸如结点位移 δ ，单元应变、应力

ε' 、 σ' 等所需要的计算结果。通过计算机的输出设备（如：屏幕、打印机、图形设备等），可以将计算结果按需要采掘、处理、显示出来。

在大型有限元程序系统中，也有类似前面介绍过的“前处理”功能的所谓“后处理”功能，它能按需要对相应的力学场，以各种鲜明的表格、图形标识等形式形象地表现出来。这对于我们及时纠错，消化、分析计算结果，改进设计，提高计算工作的质量和效率非常有益。

本章将结合第二章对有限元法原理和计算公式的介绍，道过一个简单的三结点常应变单元有限元法结构计算通用程序，来介绍有限元程序的结构、设计方法和一些最常用的技巧。

3.2 常应变单元的主要公式和程序设计

3.2.1 常应变单元的主要公式

为便利介绍计算程序，将第二章推导的平面应力问题常应变单元的主要计算公式摘录如下：

位移模式

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \delta' = N \delta' \quad (3-1)$$

其中： $\delta' = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^T$

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (i, j, m) \quad (3-2)$$

式中 (i, j, m) 表示下标 i 可用 i, j, m 置换，循环共三个式子； a_i, b_i, c_i 是系数， A 是三角形单元的面积，由下面公式确定：

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i = y_j - y_m \\ c_i = -x_j + x_m \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} m \\ i \quad j \end{array} \right) \quad (3-3)$$

上式括号内的标记表示下
换，产生三个式子。

标变量 i, j, m 可以顺序轮

$$A = (b_j c_m - b_m c_j) / 2 \quad (3-4)$$

单元 i, j, m 应按顺时针顺序排列，才保证 A 不取负值。单元设置应保证 i, j, m 三点不共线 ($A \neq 0$)，否则结构分析失效。

应变公式

$$\varepsilon_{3 \times 1} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (3-5)$$

$$\mathbf{B}_{3 \times 6} = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m]^T \quad (3-6)$$

其中

$$\mathbf{B}_{i3 \times 2} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (3-7)$$

应力公式

$$\boldsymbol{\sigma}_{3 \times 1} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T = \mathbf{S}_{3 \times 6} \boldsymbol{\delta}'_{6 \times 1} \quad (3-8)$$

其中：

$$\mathbf{S}_{3 \times 6} = \mathbf{D}_{3 \times 3} \mathbf{B}_{3 \times 6} = [\mathbf{S}_i \quad \mathbf{S}_j \quad \mathbf{S}_m] \quad (3-9)$$

$$\mathbf{D}_{3 \times 3} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

$$\mathbf{S}_{i3 \times 2} = \mathbf{D}_{3 \times 3} \mathbf{B}_{i3 \times 2} = \frac{E}{2(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (3-11)$$

单元刚度矩阵公式

$$k_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} & \mathbf{k}_{im} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} & \mathbf{k}_{jm} \\ \mathbf{k}_{mi} & \mathbf{k}_{mj} & \mathbf{k}_{mm} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

其中

$$k_{rs2 \times 2} = \frac{Et}{4(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ c_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (r=i, j, m) \\ (s=i, j, m) \end{matrix}$$

结构整体刚度方程

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{R} \quad (3-14)$$

其中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \Lambda & \mathbf{K}_{1n} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \Lambda & \mathbf{K}_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \mathbf{K}_{n1} & \mathbf{K}_{n2} & \Lambda & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \Lambda \quad \delta_n]^T$$

$$\mathbf{R} = [R_1 \quad R_2 \quad \Lambda \quad R_n]^T$$

式中 n 是结构结点自由度总数。

3.2.2 程序框图和程序设计重点

依据有限元法的计算步骤，可以绘制出图 3-1 的程序设计框图。

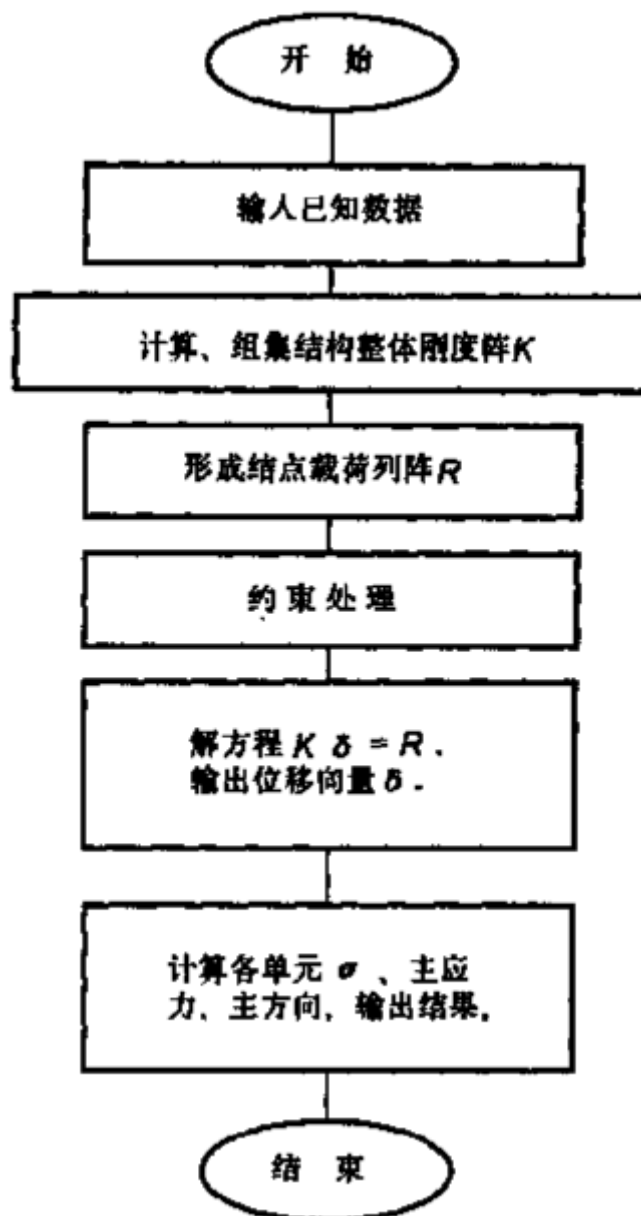


图 3-1

由框图可以看出，核心的步骤是构造和求解结构整体刚度方程组 $\mathbf{K}\delta = \mathbf{R}$ 。合理选择计算方法和提高它的编程质量，直接影响计算的效率和结果的精度。此步骤是程序设计的关键环节。

在有限元法的计算过程中，计算机内存容量的合理调配使用，对在确定的机型上，实现较大型问题的有效计算、提高计算质量也是一个关键问题。在有限元法的计算中，机器内存的绝大部分用量将用于存贮结构整体刚度矩阵 \mathbf{K} 的元素，对于某些多结点自由度的单元网格，通常形成 \mathbf{K} 所占有的内存和耗费的机时都是很大的。所以，合理选择形成、组集 \mathbf{K} 的算法和技术，寻求存贮 \mathbf{K} 元素的方法是程序设计所考虑的要点之一。

3.2.3 程序结构

本书介绍的程序是使用 FORTRAN 语言在微机上编制、调试的。程序采用模块式结构。这对程序设计、阅读、调试、改进都是非常便利的。程序由主程序和八个功能子程序模块构成。每个子程序模块都执行一项特定的功能。

这些子程序模块由主程序依先后顺序调度、串联，以实现预期的设计思想，完成有限元法计算。

模块介绍

现将各程序模块的名称和功能归纳列于下表：

表 3-1

| 程序块名称 | 功 能 |
|-------|---|
| main | 主程序，顺次调用子程序 in,md,mzz,mf,mb,gau,sg。 |
| in | 输入已知数据。 |
| md | 形成弹性矩阵 D 。 |
| cma | 形成各单元刚度矩阵 k' 。 |
| mzz | 调用 cma，形成所有单元刚度矩阵，并组集结构整体刚度矩阵 K 。 |
| mf | 形成结点载荷列阵 R 。 |
| mb | 对 K ， R 中的有关元素作约束处理。 |
| gau | 用高斯消元法解方程 $K\delta = R$ ， 输出计算结果（位移列阵 δ ）。 |
| sg | 计算各单元应力 $\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T$ 、主应力 σ_{\max} 、 σ_{\min} ，主方向角 θ 。并 输出计算结果。 |

3.2.5 标识符说明及程序中的数据组织

为便于模块间的通讯、联接和尽量节省计算机内存，我们将各块所共用的信息量作下述处理：对其中的简单变量取为调用子程序的形式参量；对其中的数组，按实际调用情况组合成四组公共变量。（见下文主程序中的 COMMON 说明语句）共设：无名、/C/、/C1/、/C2/四段。

在介绍源程序之前，将整个程序使用的主要变量的标识符及其内涵说明如下。其中的输入量的输入格式取自由格式。

1. 输入变量：

- nc: 结点总数。
- ne: 单元总数。
- np: 承受载荷的结点自由区数。
- nb: 承受理想约束的结点自由度数。
- nd: 等带宽存储 K 时的半带宽长度。

设相邻结点编号之差的最大值为 md ，则 $nd = (md+1) \times 2$ ，2 是结点自由度（见 3.6 节。）

- e0: 材料弹性模量 E
- pu: 材料泊松比 μ 。
- te: 单元厚度。

此外，还有数组输入量：xy(i,j),ie(i,j),jf(i),fj(i),ib(i)，将在公共变量中说明。

2. 输出变量：

- S1,S2,S3(F13,7):分别表示计算单元的应力分量 σ_x ， σ_y ， σ_{xy} 。
- Sa,Si,Set(F13,7):分别表示计算单元的主应力 σ_{\max} ， σ_{\min} 及主方向角 θ 。
- P(i):将在公共变量中说明。

3.公共变量：

- (无名): xy(i,j):表示结点 i 的坐标值。 $j=1,2$ 分别为 x,y 方向。
- /C/ie(i,j):单元结点整体编号信息量。 i :单元序号； $j=1,2,3$ 表示单元编码为 i,j,m 的

结点编号。

ek(i,j):单元刚度矩阵。(见(3-12)式.)为 6×6 对称方阵。

D(i,j):材料弹性矩阵。(见(3-10)式.)为 3×3 对称方阵。

S(i,j):单元应力矩阵。(见(3-9)式.)为 3×6 对称方阵。

/C1/:jf(i):承受集中荷载的结点自由度编号。

fj(i):承受自由度上所作用荷载值。

ib(i):承受理想约束的结点自由度编号。

/C2/:zz(i,j):采用等带宽技术(见 3.6 节)存放整体刚度矩阵元素。在求解结构整体刚度方程过程中存放中间变量(见 3.9 节)。

4. 其他变量

nj2:整体刚度矩阵阶段, 即结构结点自由度总数。 $nj2=2 \times nc$ 。

ae:单元面积 (见(3-4)式)

b(i,j):单元应变矩阵。为 3×6 的矩阵 (见(3-6)式)。

程序中使用的其他局部变量, 将在下文中结合程序具体介绍。

3.2.6 主程序

源程序由主程序和七个功能子程序模块构成。下面介绍主程序段 main,各 call 语句的意见模块介绍。

```
c  program main
    common xy(200,2)/C/ie(200,3),ek(6,6),D(3,3),S(3,6)/C1/jf(20)
1  fi(20),ib(80)/C2/zz(500,20),p(500)
    call in(nc,ne,np,nb,nd,nj2,e0,pu,te)      数据输入
    call md(e0,pu)                            形成弹性矩阵 D。
    call mzz(in,nj2,nd,ne,te)                形成整体结构刚度矩阵 K。
    call mf(np,nj2)                          形成结点荷载列阵 R。
    call mb(nb,nd)                           位移约束处理。
    call gau(nc,nj2,nd)                      解刚度方程, 求位移列阵  $\delta$ 。
    call sg(ne,te)                           单元应力分析。
    stop
end
```

3.3 原始数据输入

在计算机上用有限元作结构计算, 须先输入所需要的结构尺寸, 材料, 荷载, 约束等信息量, 作为算题的原始数据。由于本书只介绍有限元法的基本原理和实施, 假设有限元网格的结点设置, 单元划分等工作已经由手工预先完成。我们把所形成的有关原始数据, 通过子程序 in 输入计算机。

原始数据输入子程序

```
subroutine in(nc,ne,np,nb,nd,nj2,e0,pu,te)
common xy(200,2)/C/ie(200,3),ek(6,6),D(3,3),S(3,6)/C1/jf(20),
1  fi(20), ib(80)/C2/zz(500,20),P(500)
open(3,file='in')      打开输入文件:in。
read (3,*)nc,ne,np,nb,nd  3 是外部设备通道号;*是以自由格式输入
read(3,*) e0,pu,te
read(3,*) ((xy(i,j),j=1,2)i=1,nc) 下面顺序输入各输入信息量。
```

```

read(3,*) ((ie(i,j),j=1,3)i=1,ne)
read(3,*) (jf(i),i=1,np)
read(3,*) (fj(i),i=1,np)
read(3,*) (ib(i),i=1,nb)
nj2=nc+nc                      结构自由度总数
open(4,file='out',status='new') 打开输出文件 out.4:通道号。
return

```

在书写输入文件时，是使用输入语句所给出的变量表列出的各输入量，采用自由输入格式（接近书写形式，可参考算法语言书籍），顺次写入一个个的输入行，直至读完。在读入输入语句输入表的最后一行数据时，格式可以不填满。
在作输入，输出格式设计时，应考虑到数据排列的规律，顺序，以便阅读，检查。

3.4 形成材料弹性矩阵

在原始数据输入计算机之后，通常要先对数据进行加工，形成直接用于算题过程的新的信息量。计算中不随计算问题改变的常数参量也可以使用赋值语句由程序直接读入计算机。

程序中的材料弹性矩阵 D ，由子程序 `md` 形成。它将被用于形成单元刚度矩阵和单元应力矩阵。对子程序 `md` 介绍如下。

形成弹性矩阵子程序

```

cubroutine md(e0,pu)
common/C/ie(200,3),ek(6,6),D(3,3),S(3,6)
d(1,1)=e0/(1.0-pu*pu)
d(1,2)=e0*pu/(1-pu*pu)
d(2,1)=d(1,2)
d(2,2)=d(1,1)
d(1,3)=0.
d(3,1)=0.
d(2,3)=0.
d(3,2)=0.
d(3,3)=e0/(1+pu)/2
return
end

```

3.5 形成单元刚度矩阵

常应变单元形成单元刚度矩阵 k 的过程比较简单，不必计算数值积分。对于某些有较多结点自由度的单元，须采用数值积分的方法计算单元刚度矩阵的各元素。这些积分运算所耗机时，经常占整个有限元计算过程中较大的比率。由于本程序段将被多次调用，因而选择合理的计算方法及优化程序设计在此更为重要。

对照 3.2 中的有关公式和程序中所给出的注释，容易看懂下面的子程序 `cma`。

形成单元刚度矩阵子程序

```

subroutine cma(in,te)
common xy(200,20/C/ie(200,3),ek(6,6),D(3,3),S(3,6)
dimension b(3,6)          b(i,j) 存应变矩阵。

```

```

im=ie(in,1)          从单元结点信息数组 ie(i,j)中抄写 i,j,m 单元的结点编号。
je=ie(in,2)
me=ie(in,3)
cm=xy(je,1)-xy(im,1)  按公式 (3-3) 计算参数 bj,cj,bm,cm。
bm=xy(im,2)-xy(im,1)
cj=xy(im,1)-xy(me,1)
bj=xy(me,2)-xy(im,2)
ae=(bj*cm-bm*cj)/2    计算单元面积 ae(按(3-4)式)。
do  10i=1,3            对数组 b(i,j),s(i,j)清零。
do  10j=1,6            以下为生成应变矩阵 B 和应力矩阵 S 的过程。有关公式
                        见(3-6)及(3-9)式。
b(i,j)=0
s(i,j)=0
10  continue
    b(1,1)=-bj-bm
    b(1,3)=bj
b(1,5)=bm
b(2,2)=-cj-cm
b(2,4)=cj
b(2,6)=cm
b(3,1)=b(2,2)
b(3,2)=b(1,1)
b(3,3)=b(2,4)
b(3,4)=b(1,3)
b(3,5)=b(2,6)
b(3,6)=b(1,5)
do  20i=1,3
do  20j=1,6
b(i,j)=s(i,j)+d(i,k)*b(k,j)
20  continue
    do 30i=1,3
    do 30j=1,6
    do 30k=1,3
s(i,j)=s(i,j)+d(i,k)*b(k,j)
30  continue
    do  40i=1,6    以下为生成单元刚度矩阵 k 的过程。
do  40j=1,6
ek(i,j)=ek(i,j)+s(k,i)*b(k,j)*ae*te  见公式(3-12), (3-13)。
40  continue
    return
end

```

编制程序时，对在程序中多次重复出现的数组变量，尤其是高维数组变量，常在使用之前以简单变量来替代它。这样对简化程序书写和节省机时是有益的。对某些求和变量，工作前清零，恢复存贮单元初始状态，能消除编译过程或其它偶然因素可能的干扰，保证计算的可靠性。对于含有大量零元素的数组，还能简化程序的书写。

3.6 形成结构整体刚度矩阵

在形成各个单元刚度矩阵 k 以后，就可以对每个结点自由度，把包含此结点在内的所有相关结点（即与此结点存在有相同单元的各结点），在每个共同所在单元内对该结点自由度刚度的贡献相叠加，填入结构整体刚度矩阵内相对应位置，即进行刚度合成。用这种方法就形成了结构整体刚度矩阵 K 。

为了节省机器的存贮容量，在形成每个单元的刚度矩阵以后，立即“对号入座”，将各单元刚度矩阵元素直接叠加到结构整体刚度矩阵中相对应的元素上去。

在确定的计算机上，应用有限元法计算特定的结构分析问题，网格划分的疏密和合理与否，将直接影响计算结果的精度。一般说来，网格密些，计算精度就会高些，但是网格加密也会使所需要的机器存贮容量急剧增加。为了有效地提高计算机内存资源的使用效率，有很多专门的处理方法和技术。这里不可能一一展开讨论。但是，大量的实算统计结果表明对于较大的计算模型，计算过程中所使用的机器存贮容量绝大部分都被用来存放结构整体刚度矩阵的元素。可见，如何优化结构整体刚度矩阵元素的存贮格式，将是有限元法程序设计中必须认真研究解决的关键技术。对这个问题的抉择和处理，会直接影响结构整体刚度方程组求解时计算方法的选取和程序的编制。

3.6.1 存贮方法

下面着重介绍本书程序所采用的有关技术和方法，也顺便对其它方法稍加说明。关于结构整体刚度矩阵 K 的存贮，由 2.5 节知结构整体刚度矩阵具有对称性，我们可以只存贮 K 的主对角线及其以上的所有元素，称为矩阵的“上三角部分”（当然也可存贮下三角部分）。这样就可以少存贮将近一半的矩阵元素。又因为矩阵 K 是高度稀疏带状的（合理对结点进行编序即可实现这一点），我们可以只存贮 K 的上三角部分每行中由主对角线元素起始，直至最末一个非零元素为止的各元素，即只存贮半带宽以内的元素。由于短阵 K 每一行的半带宽 d_i （见图 3-2）不尽相同。从而，有两种处理方法：

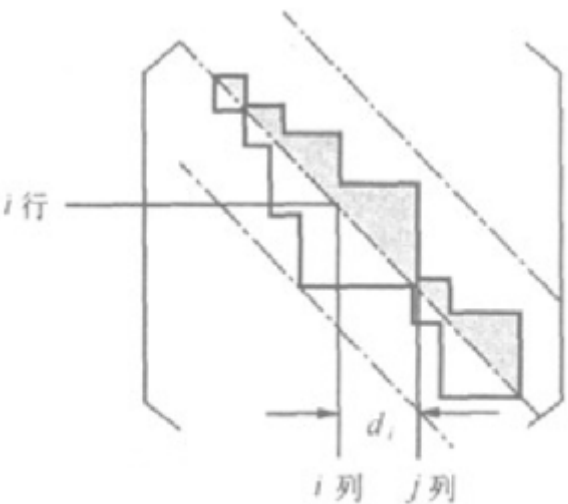


图 3-2

1. 等带宽存贮方法

先计算出每行的半带宽

$$\begin{aligned} d_i &= 2 \times (j-i) + 1 && \text{当 } i \text{ 为奇数,} \\ d_i &= 2 \times (j-i+1) && \text{当 } i \text{ 为偶数.} \end{aligned} \quad (3-16)$$

式中 $i=1,2,3,\dots,n$; j 为本行最后非零元素的列数, $j \geq i$ 。 d_i 的最大值 nd 称为最大半带宽。等带宽存贮法。是将每行 K 的元素由主对角线元素起, 连续存贮 nd 个元素。例外的情况是, 在上三角部分中。只存贮至本行的最末一个元素。即在倒数 $nd \sim 1$ 行的范围内 i 以后的单元自由度数将少于 nd 。用此方法将需要存贮图 3—2 所示的主对角线至点划线以内的上三角部分的所有元责。

这样构造的等带宽存贮的结构整体刚度矩阵 K^* , 可以用一个 $n \times nd$ 的二维数组来存贮。这个 K^* 与原结构整体刚度矩阵中各元素之间的换算关系将在 3.9 节中详细介绍。

这种存贮法的优点是程序设计简单, 计算中 K^* 元素的寻址方便。其缺点是对某些半带宽较短的行, 在最后一个非零元素之后, 还要存贮一些 K 中的零元素。因此, 其节省内存的效益不是很充分。

2. 变带宽存贮方法

在形成 K 后, 先由(3-16)计算出每行的半带宽长 d_i 。然后将结构整体刚度矩阵 K 中每一行半带宽以内的元素 (由主对角线元素起, 到最末一个非零元素), 从第一行到最后一行, 按行序首尾衔接起来, 构造成一个一维数组。用它可以表示变带宽的上三角都分的矩阵元素。用这种方法, 将在一维数组中, 存放图 3—2 所示变带宽上三角阵 K^* 中的各元素 (即图中阴影线区域内的元素)。

为了便于在一维数组中寻址, 引入一个起元素定位作用的数组 ($id[i]$); 存入每一行主对角线元素在一维数组中的序号, 它可以作为该行各元素寻址的基址。

变带宽存贮法的优点是节省内存容量的效益高于等带宽存贮法。缺点是程序设计和结构整体刚度矩阵的寻址计算要稍为复杂些。

应该指出, 两种存贮法, 都需要存贮一些非零元素。还需要存贮图 3—2 中第 i 行, 自由度序号在 i 与 j 之间的与自由度无关的对应列上的零元素。

3.6.2 关于有限元结点的合理编序

在结构整体刚度矩阵中, 能够对一个结点的各自由度上的刚度有贡献的, 只有此结点周围与此结点有共同单元相连系的那些结点自由度, 称之为相关结点自由度。因而, 对应 K 某行上的非零元素只能存在于与它相关的结点自由度的对应位置。

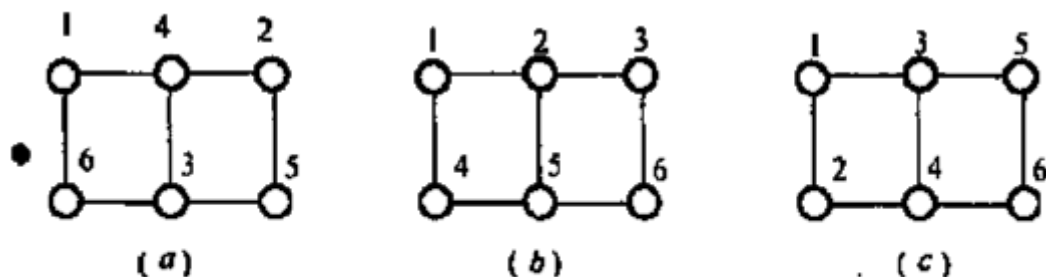


图 3—3

在计算具有大型有限元网格的问题时, 合理地编排结构结点的编号, 使结构整体刚度矩阵中各相关结点编序号之差尽可能小, 由 (3—16) 知, 就能有效减少各行带宽, 得到更窄带宽的带状稀疏结构整体刚度矩阵。从而更有效地节省内存。为说明这个问题, 讨论图 3—3 所示的简例。假如有限元网格和结点位置已经确定, 共设 6

个结点和 2 个矩形四结点单元。考察图 3—3 (a)、(b)、(c) 所示的三种结点编序。易求得三种编法的最大半带宽分别是 12, 10, 8。比较三种编序, 能够定性地得出如下结论: 对有效抑制 K 的带宽来说, 随机、无序地编码 (图 3—3 (a)) 不如有序地按行或列的顺序编码 (图 3-3 (b)、(c)); 按长向编码 (图 3—3(b)) 不如按短向编码 (图 3—3(c))。当然这里所说的长短, 不是指几何长度, 而是按拓扑长度计。即图 3—4 所示的网格长度, 我们认为与图 3—3 相同。

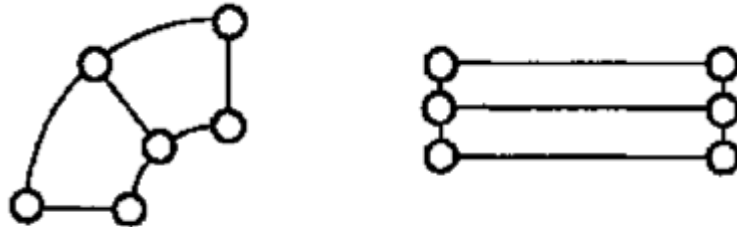


图 3—4

可见, 合理的结点编序, 就能通过抑制带宽, 得到高度稀疏带状结构整体刚度矩阵。对大型有限元网格, 认真作此项工作, 对节省计算机内存容量非常有意义。

3.6.3 等带宽存贮技术, 形成组集结构整体刚度矩阵的子程序

本程序采用等带宽存贮方法来编制。现结合源程序介绍有关步骤。

组集给构整体刚度矩阵子程序

```
subroutine mzz(in,nj2,nd,ne,te)
common xy(200,2)/C/ie(200,3),ek(6,6),D(3,3),S(3,6)
1 /C2/zz(500,20),p(500)
do 10i=1,nj2                                对症体刚度矩阵 K 清零。Nj2 为自由度总数; nd 为半
带带宽长。
do 10j=1,nd
10 zz(i,j)=0
do 20 in=1,ne                                对各单元循环。ne 单元总数。
call cma(in,te)                              调用子程序 cma,生成单元刚度矩阵 K。
do 20i=1,3                                    对单元结点 i,j,m 循环。
do 20ii=1,2                                  对结点自由度 x,y 循环。
ih=2*(i-1)+ii                                ih: 为被搜索自由度在单元刚度矩阵 k 中的序号。
jh=2*(ie(in,i)-1)+ii                        jh: 为被搜索自由度在整体刚度矩阵 K 中的序号。
do 20j=1,3                                    对 i,j,m 循环。
do 20jj=1,2                                  对结点自由度 x,y 循环。
il=2*(j-1)+jj                                在对应 ih,jh 的结点自由度上, 顺次循环本单
元上各结点自由度, 算出它们在 k,K 中的序号
iz=2*(ie(in,j)-1)+jj
j1=iz-jh+1
if(j1.gt.0)
zz(jh,j1)=zz(jh,j1)+ek(ih,il) 判断 ih, jh 影响元素是否位于 K 的上三角部分? 如果
是, 就将对应的 k 的元素累加到相应 k 的元素上去。
20 continue                                对单元循环结束。
return
end
```

3.7 形成结构整体荷载列阵

在弹性介质静力问题的计算中，外加作用因素很多。如集中力、分布力（包括引力、斥力等场力、惯性力一类体积力和面积分布的由力边界条件给定的接触力）。等直接载荷，也可能作用有因为温度改变、装配因素等其它干扰。这些外加作用因素都可遵循力学的等效原则（如静力等效、位移模式下的虚功等效）处理成作用在结构相邻结点上的等效结点载荷、由圣维南原理知道，这样的处理只对所处理处大约一个单元尺寸内的邻近区域内的各力学量产生明显的差异。有关的原理和处理方法，可参阅 2.5 节的介绍或其它有限元书籍和程序。

如在 3.3 节所述，假定上述载荷处理已经由人工完成，已经制备成了有关的结点载荷的信息量。这些信息可以经由 3.3 节所介绍的专用输入子程序中的输入语句输入计算机。

本节介绍的子程序 `mf`，其功能就是将由这些已经输入机器内的载荷信息量，装入，合成，以形成结构整体刚度矩阵方程的右端项——结构整体结点载荷列阵 R 。

形成结构整体载荷列阵子程序

```
subroutine mf(np,nj2)
common/C1/jf(20),fi(20),ib(80)/C2/zz(500,20),p(500)
do 10i=1,nj2          对结点荷载列阵 R 清零。nj2 是自由度总数。
10 p(i)=0
   if(np.gt.0) then
     do 20i=1,np        对承载自由度循环。将结点载荷 f(i,j)直接按承载自
由度号 jf(i)装入荷载列阵 R。
j=jf(i)
     20 p(j)=fi(i)
       end if
       return
     end
```

程序中 `if(np.gt.0) then` 直至 `end if` 构成一个条件，只有当条件 `np>0` 为真时，才执行块内语句。

3.8 约束条件的处理

由弹性力学知识，结构在一定外力系的作用下，无论外力平衡与否，都不对应确定的位移场。由线性代数理论知，经各单元刚度矩阵叠加而成的结构整体刚度矩阵也应该是一个奇异矩阵（2.5 节也论及此点），可以通过施加合理的位移约束消除之，以便求得唯一、合理的结构结点位移列阵 δ 。不仅如此，施加位移约束是模拟实际位移边界条件所必需的。

如何处理位移约束条件，在有限元计算中，也是一个技术性较强的问题。

约束种类，可能有理想约束、已知位移约束、弹性约束及其它更为复杂的约束。本程序只介绍其中最简单的结点承受理想约束的情况。理想约束条件的程序处理也有很多方法。例如 I) 删除 K 、 R 中与约束相应的所有行与列上元素的方法。II) 化 1 置 0 法。其实质是用位移约束方程，替换约束自由度上原来生成的刚度方程，构成新的非奇异方程组。III) 加大刚度法（乘大数法）。此法相当于在理想约束自由度上，附加接入一个刚性充分大的弹性支承。上述方法的原理和实施可参阅 2.6 节或其它

有关书籍和程序。

本程序采用化 1 量 0 法。下面结合子程序 mb 介绍之。下段程序给出对应等带宽存贮的 K^* 与位移列阵 δ ，对与理想约束自由度（序号为 iz）相应行与列上元素的处理（见图 3-5）。

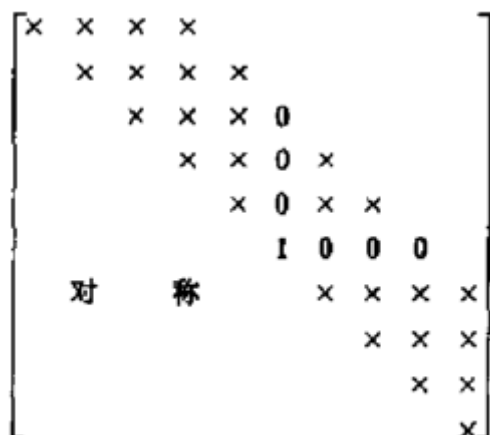


图 3-5

约束处理程序

```

subroutine mb(nb,nd)
common/C1/jf(20),fi(20),ib(80)/C2/zz(500,20),p(500)
do 30 i=1,nb      对各自由度循环。nb 是约束总数。将约束自由度号
iz=ib(i)          ib(i)抄入简单变量 iz。K 主对角线元素赋值 1。
zz(iz,1)=1
do 10j=2,nd       将主对角线以外整行元素赋值为 0。nd 是半带长。
10  zz(iz,j)=0     计算与约束自由度相关上 K 的元素个数(K 等带宽存
                    储)，以保证赋值为 0 的元素最多作到本行的末列（矩阵最后几行）。
                    if(iz.gt.nd) then
jo=nd
                    else
jo=iz
                    end if
do 20j=2,jo
20  zz(iz-j+1,j)=0  对约束对应列 K 非对角线元素赋零。
p(iz)=0            对结点载荷列阵 R 中约束对应元素赋零。
end               循环结束。

```

3.9 结构整体刚度矩阵方程的求解

经过位移约束处理之后，将得到一个非奇异的线性方程组。适当选择线性方程组的解法，就能求得位移列阵 δ 确定的、唯一的解答。

关于线性方程组的解法，多得不胜枚举。但主要可分为两大类：迭代解法和直接解法。可查阅有关计算方法的书籍及相应的程序库。

一般说来，迭代解法程序设计比较简单，可以按照需要的计算精度控制计算进程。但是对于计算精度要求较高时，比如需求接近直接解法的精度，此法需要比较长的计算机时。有些迭代法或由于使用处理上的原因，也可能出现计算不收敛或不收敛于真解前情况。而直接解法通常耗用机时较少，计算结果精度较高，计算结果

本书程序中，采用属于直接解法的最基本的 Gauss 消元法。下回介绍有关原理以及配合等带宽结构整体刚度矩阵 K 元素的存贮技术的程序设计。

高斯消元法来源于简单的手算求解的直接解法。解题过程分成两大步，消元和回代。设有矩阵方程

即：

设 $K_{ii} \neq 0$ (对非奇异(满秩)方程组总能实现这一点, 在结构整体方程中自然满足这一条件), 我们可以从第一个未知元 δ_1 起进行消元。从而得到对其它未知元 ($\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$) 的降低了一阶的方程组, 此方程组保持与原方程组对剩余未知元同解。重复相似步骤, 每作一轮消元, 便可以减少一个未知数, 使方程组降低一阶。……, 直到作至第 $n-1$ 轮消元。最后将得到只含有一个未知元 δ_n 的一元一次方程。这就是消元过程。我们取每一轮中消元过程中的第一个方程(即对应该轮消元处理中“轴行”的方程), 可以集成一个与 (3-17) 式同解的上三角方程组

上式各字母括号内的上标表示消元的轮次($i=1, 2, \dots, n-1$)。

基于与 $K_{11} \neq 0$ 相同的原因, 总能使:

得到 (3-18) 后, 就可进入回代过程。由 (3-18) 最后一个方程中解得 δ_n 。然后将解出的未知元的值依次代入前面的各方程。将使 (3-18) 的上三角方程组减少一个未知数, 方程组降低一阶。每轮回代以后, 仍得到一个上三角方程组。重复相似步骤, 每作一轮回代, 便可以解出一个未知位移分量, 使方程组降低一阶。……, 直到由最后一个方程解得 δ_n 。便解出了位移列阵 δ , 这就是回代过程。经过 $n-1$ 轮回代可完成整个方程组的求解。以后将消元、回代过程中, 正在处理的行, 称为轴行。

下面给出消元过程的计算公式。

设经过第 $i-1$ 轮消元后, 得到下面的 $n-i+1$ 阶方程组。

$$\begin{cases} K_{ii}^{(i-1)}\delta_i + K_{i+1,i}^{(i-1)}\delta_{i+1} + \dots + K_{in}^{(i-1)}\delta_n = R_i^{(i-1)} \\ K_{i+1,i}^{(i-1)}\delta_i + K_{i+1,i+1}^{(i-1)}\delta_{i+1} + \dots + K_{i+1,n}^{(i-1)}\delta_n = R_{i+1}^{(i-1)} \\ \dots \dots \dots \\ K_{ni}^{(i-1)}\delta_i + K_{ni+1}^{(i-1)}\delta_{i+1} + \dots + K_{nn}^{(i-1)}\delta_n = R_n^{(i-1)} \end{cases} \quad (3-20)$$

式中: $i=1,2,\dots,n, i=1$ 即为原方程组。

下一轮消元中, 将在 $j=i+1, i+2, \dots, n$ 的各方法中消去 δ_i 。即第 i 轮消元公式为:

$$K_{jm}^{(i)} = K_{jm}^{(i-1)} - \frac{K_{ji}^{(i-1)}}{K_{ii}^{(i-1)}} K_{im}^{(i-1)} \quad (3-21)$$

$(j=i+1, i+2, \dots, n; m=i+1, i+2, \dots, n)$

式中 $K_{ij}^{(i-1)} \neq 0$ (见前面讨论),

$$R_i^{(i)} = R_i^{(i-1)} - \frac{K_{ji}^{(i-1)}}{K_{ii}^{(i-1)}} R_i^{(i-1)} \quad (3-22)$$

式中: $j=i+1, i+2, \dots, n$ 。第 i 行为轴行。

下面给出回代过程的计算公式。为简单计, 将(3-18)式去掉上标, 作为回代过程所依据的方程组。即:

$$\begin{cases} K_{11}\delta_1 + K_{12}\delta_2 + \dots + K_{1n}\delta_n = R_1 \\ K_{22}\delta_2 + \dots + K_{2n}\delta_n = R_2 \\ \dots \dots \dots \\ K_{ii}\delta_i + \dots + K_{in}\delta_n = R_i \\ \dots \dots \dots \\ K_{nn}\delta_n = R_n \end{cases} \quad (3-23)$$

第一轮回代, 由最后一式(考虑到 $K_{nn} \neq 0$)解得:

$$\delta_n = \frac{R_n}{K_{nn}} \quad (3-24)$$

然后自下面而上逐个方程回代。在完成 $n-j$ 轮回代之后, $(\delta_{j+1}, \delta_{j+2}, \dots, \delta_n)$ 都已求出, 为已知值。下面给出 $n-j+1$ 轮的回代公式:

$$\delta_j = (R_j - \sum_{m=j+1}^n K_{jm}\delta_m) / K_{jj} \quad (3-25)$$

式中: $j=n-1, n-2, \dots, 1$ 。

3.9.2 对称带状稀疏方程组的高斯消元法

经过 3.4 节至 3.8 节的处理, 可将问题归结为求解一个对称带状稀疏结构整体刚度方程组。其刚度矩阵采用等带宽技术存贮。对应这一存贮方式, 需要对上面介绍的 (3-21)、(3-22)、(3-24)、(3-25) 式作相应的修改。

1. 考虑结构整体刚度矩阵 K 对称性的修改

由于结构整体刚度矩阵 K 是对称方阵, 即有: $K_{ij}=K_{ji}(i, j=1, 2, \dots, n)$ 。还可证明: 消元过程中生成的各个子矩阵也都是对称方阵即:

$$K_{mj}^{(i)} = K_{jm}^{(i)} \begin{pmatrix} i=1,2,\Lambda,n-1; \\ j,m=i+1,i+2,\Lambda,n \end{pmatrix}$$

所以消元过程中对 $K^{(i)}$ 也只需要存贮上三角部分矩阵元素。为节省内存，在每消元一轮后，可用相应于相同位置的矩阵元素，置换 (3-17) 原矩阵 K 中的元素。

下面对消元公式 (3-21)、(3-22) 进行如下修正：约定机器只存贮 K_{ji} ($i \geq j$)，如果原式中出现下三角非主对角线元素 (即 K_{ji} , $i < j$)，就把它改写为对称的上三角部分的元素 K_{ij} 。

即：

$$K_{jm}^{(i)} = K_{jm}^{(i-1)} - \frac{K_{ji}^{(i-1)}}{K_{ii}^{(i-1)}} K_{im}^{(i-1)} \quad (3-26)$$

$$R_j^{(i)} = R_j^{(i-1)} - \frac{K_{ji}^{(i-1)}}{K_{ii}^{(i-1)}} R_i^{(i-1)} \quad (3-27)$$

其中 $i=1,2,\dots,n-1; j=i+1,i+2,\dots,n; m=j+1,j+2,\dots,n$ 。

回代公式(3-25)中不涉及下三角元素，不必改动。

2. 考虑结构整体刚度矩阵等带宽存贮的修改

由 3.6 节知，结构整体刚度矩阵 K 采用等带宽技术存贮，即在图 3-6 中，只将半带宽以内的上三角部分的 K 元素，对应地存入图 3-7 所示的二维数组，这是一个 $n \times nd$ 的长方矩阵，用 K^* 表示。

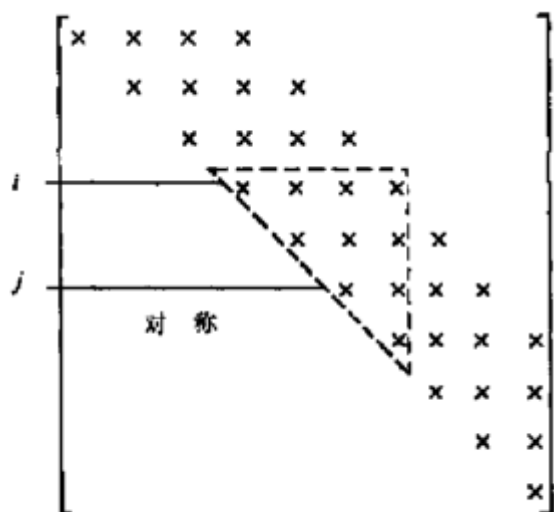


图 3-6

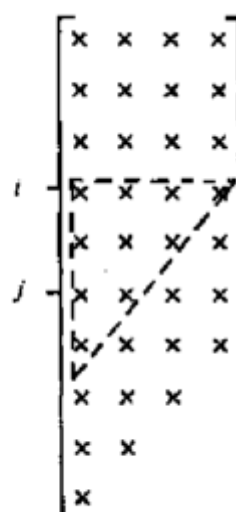


图 3-7

容易看出 K 和 K^* 中的同一个元素的行号是相同的,而列号有如下关系

$$\begin{cases} i^* = i \\ j^* = j - i + 1 \end{cases} \quad (3-28)$$

其中 i_j 和 i^*j^* 分别表示 K_{ij} 在 K 和 K^* 中的行码、列码。采用等带宽存贮时，应使用新的定位编码 i^*j^* 改写前面的有关公式。在(3-26)式中应作如下变换：

$$\begin{aligned}
K_{jm} &\Rightarrow K_{jm}^*, M = m - j + 1; \\
K_{ii} &\Rightarrow K_{i1}^*; K_{ij} \Rightarrow K_{ij}^*, J = j - i + 1; \\
K_{im} &\Rightarrow K_{im}^*, \bar{M} = m - i + 1 = M + j - i;
\end{aligned} \tag{3-29}$$

于是，得

$$K_{jM}^{*(i)} = K_{jM}^{*(i-1)} - \frac{K_{iJ}^{*(i-1)}}{K_{i1}^{*(i-1)}} K_{j\bar{M}}^{*(i-1)} \tag{3-30}$$

$$(3-27) \text{ 式变换为: } R_j^{(i)} = R_j^{(i-1)} - \frac{K_{iJ}^{*(i-1)}}{K_{i1}^{*(i-1)}} R_i^{(i-1)} \tag{3-31}$$

其行码和页码的取值范围也要作适当修正。以 i 行作轴行消元时，由于半带宽以外的元素均为零，所以只是对图 3-6、图 3-7 所示三角形内的元素才需要修改。因而需要修改的各行行码数（在 K^* 中）最大不超过

$$i_m = nd + i - 1$$

其中 nd 是半带宽； i 是轴行编码。

再考虑最后的 $nd-1$ 轮消元时，最大修改的行码 i_m 只能取为方程组阶数 n 。最后，取

$$i_m = \min(nd + i - 1, n) \tag{3-32}$$

而需要修改的第 j 行的列码，应由 1 作到

$$j_m = nd - j + 1 \tag{3-33}$$

这些可以由图 3-7 中看出。消元公式最后得

$$\begin{cases} K_{jM}^{*(i)} = K_{jM}^{*(i-1)} - \frac{K_{iJ}^{*(i-1)}}{K_{i1}^{*(i-1)}} K_{j\bar{M}}^{*(i-1)} \\ R_j^{(i)} = R_j^{(i-1)} - \frac{K_{iJ}^{*(i-1)}}{K_{i1}^{*(i-1)}} R_i^{(i-1)} \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} i = 1, 2, \Lambda, n-1; \\ j = i+1, i+2, \Lambda, i_m; \\ J = 1, 2, \Lambda, j_m. \end{array} \right] \tag{3-34}$$

这就是用于编制程序的消元公式。

再修改回代公式 (3-25)。考虑 (3-29) 的变换，得：

$$\begin{aligned}
\delta_j &= (R_j - \sum_M K_{jM}^* \delta_m) / K_{j1}^* \\
&= (R_j - \sum_M K_{jM}^* \delta_{m+j-1}) / K_{j1}^*
\end{aligned} \tag{3-35}$$

容易由图 3-7 看出，当行码 j 不是很大时，最大列码应取 $J_m = nd$ ；当 $j > n - nd$ 时，最大列码应取 $n - j + 1$ 。于是

$$j_m = \min(nd, n - j + 1) \tag{3-36}$$

最后的回代公式为

$$\begin{cases} \delta_n = R_n / K_{n1}^* \\ \delta_j = (R_j - \sum_M K_{jM}^* \delta_{m+j-1}) / K_{j1}^* \end{cases} \quad (3-37)$$

其中 $j = n-1, n-2, \Lambda, 1$; $M = 2, 3, \Lambda, J_m$ 。

高斯消元法解线性方程组的程序设计

根据上面导出的公式 (3-32) ~ (3-37) 可以写出高斯消元法解线性方程组的源程序。它对应的系数矩阵采用上三角部分等带宽方法存贮。下面给出子程序 gau。

高斯消元求解方程组子程序

Subroutine gau(nc,nj2,nd)

Common/C2/zz(500,20),p(500)

Do 20 i=1,nj2-1 由此行至行号 20 为消元过程。

If (nj2.ge.i+nd-1) then 按 (3-32) 式求 im=min(nd+i-1,nj2)

im=i+nd-1

else

im=nj2

end if

do 20k=i+1,im

i1=k-i+1

c=zz(i,i1)/zz(i,1)

do 10j=1,nd-i1+1

m=j+k-i

10 zz(k,j)=zz(k,j)-c*zz(i,m)

见 (3-34) 第一式。

p(k)=p(k)-c*p(i)

见 (3-34) 第二式。

continue

p(nj2)=p(nj2)/zz(nj2,1)

由此至行号 40 为回代过程 (见 (3-37))。

do 40j=nj2-1,1,-1

if(nd.gt,nj2-j+1) then

按 (3-36) 求 jm=min(nj2-j+1,nd).

jm=nj2-j+1

else

jm=nd

end if

do 30 i=2,jm

ih=i+j-1

30 p(j)=p(j)-zz(j,i)*p(ih)

见 (3-38) 式

40 p(j)=p(j)/zz(j,1)

write(4,101)

写入输出文件 out, 4 是外部设备通道号,

101 是输出格式行号。

101 format (3x,3hjd=,5x,2hu=,16x,2hv=)

打印字符说明行。

do 50 i=1,nc

i 是结点编号, p(i+i-1),p(i+i)是求得的结点

位移 u,v。

write(4,102)I,p(i+i-1),p(i+i)

102 format(3x,i5,3x,f15.10,3x,f15.10)

50 continue

return

end

3.10 单元应力分析

结构计算中，在求出位移有限元的基本未知量——结点位移列阵 δ 以后，容易按要求计算分析有限元位移模式下的诸如应变、应力、结点支反力单元各点的位移等其它力学量。

本程序仅给出常应变单元个单元内的应力列阵及其主应力、应力主方向角的计算程序。这些量在同一常应变单元内保持不变。

介绍程序之前，结合图 3-8 所示应力圆，给出计算主应力和应力主方向角所用到的计算公式。

$$\text{平均应力} \quad \bar{\sigma} = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 \quad (3-39)$$

$$\text{最大剪应力} \quad \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3-40)$$

$$\text{最大正应力} \quad \sigma_{\max} = \bar{\sigma} + \tau_{\max} \quad (3-41)$$

$$\text{最小正应力} \quad \sigma_{\min} = \bar{\sigma} - \tau_{\max} \quad (3-42)$$

σ_{\max} 与 x 轴的夹角

$$\alpha = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 57.29578^\circ \cdot \arctan\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\min}}\right) \quad (3-43)$$

(3-34) 式的关系容易由图 3-8 的应力圆上直接看出。 57.29578° 是弧度换算为角度的换算系数。下面对照 3.2 节和上文给出的公式，介绍应力分析子程序 sg。

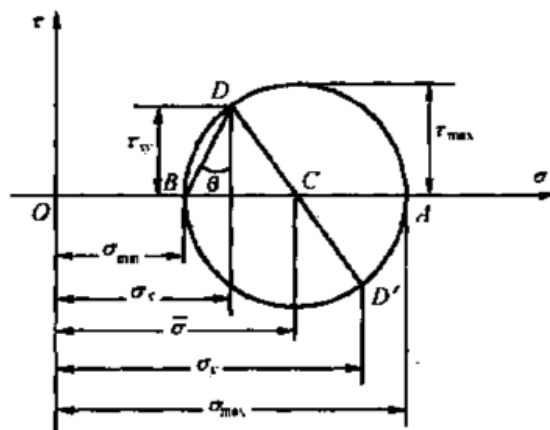


图 3-8

单元应力分析子程序

```
subroutine sg(ne,te)
common/C/ie(200,3),ek(6,6),D(3,3),S(3,6)/C2/zz(500,20),p(500)
dimension wy(6),yl(6)
do 30 in=1,ne      对所有单元循环。
call cma(in,te)    生成第 in 单元应力矩阵 S。
do 10 i=1,3        在上节求得的结构整体位移列阵δ
do 10 j=1,2        中对号抄入本单元结点位移分量。
ih= 2*8(i-1)+j     ih 是分析自由度的单元局部编码，
```

```

jh= 2*(ie(in,i)-1)+j          jh 是其整体编码。
wy(ih)=p(jh)
do 20 i=1,3                    由公式 (3-8) 计算单元应力列阵，
                                并装入 yi(i).
yl(i)=0
do 20 j=1,6
20  yl(i)=yl(i)+s(i,j)*wy(j)    见 (3-8) 式。
    s1=yl(1)                    为处理方便、省时，以 s1、
    s2=yl(2)                    s2、s3 抄写 yl(i)的三个分量。
    s3=yl(3)

                                以下求主应力、主方向。
    py=(s1+s2)/2                py 是平均应力（见 (3-39)），ry
    ry=sqrt(((s1-s2)/2)**2+s3**2) 是最大剪应力（见 (3-40)）。
    sa=py+ry                    sa、si 是最大及最小主应力，见
    si=py-ry                    (3-41)、(3-42)。
    if(abs(s2-si).lt..001) then 下面是主方向角 set 赋值。为防止 (3-43) 式的分母
为 零
        set=0                    或很小导致很大误差，引入此条件句。
    else
        set=90-57.29578*atan(s3/(s2-si)) 见公式 (3-43)。
    end if
    write(4,'(5x,/, "in=",i5)')in 输出单元应力 s1,s2,s3。写入输出文件 out, 4 是输
出设备通道号。
    write(2,'(2x,"sigma-x=",f14.7,3x,"sigma-y=",
1 f14.7,4x,"tau-xy=",f14.7)') s1,s2,s3
                                输出主应力及主方向角 sa,si,set。
    write(4,'(2x,"sigma-1=",f14.7,3x,"sigma-2=",
1 f14.7,4x,"set =",3x,f14.7)') sa,si,set
30 continue                    对单元循环结束。
return
end

```

将 3.2 至 3.10 节所给出的共计九个程序模块组集在一起，就构成了一个由完整的三角形常应变单元计算弹性连续介质平面问题的有限元法的适用程序。计算之前要接照格式要求，正确编制输入文件 in。程序运行后。将以程序约定的格式，将要求输出的信息，写入输出文件 out。访问 out 便可得到计算结果。

计算简例

图 3-9 所示正方形弹性平板，取材料常数 $E=1\text{MN/m}^2$, $\mu=0$ ，沿对角线方向在两个顶点受拉力 P 作用， $P=2\text{N}$ 。

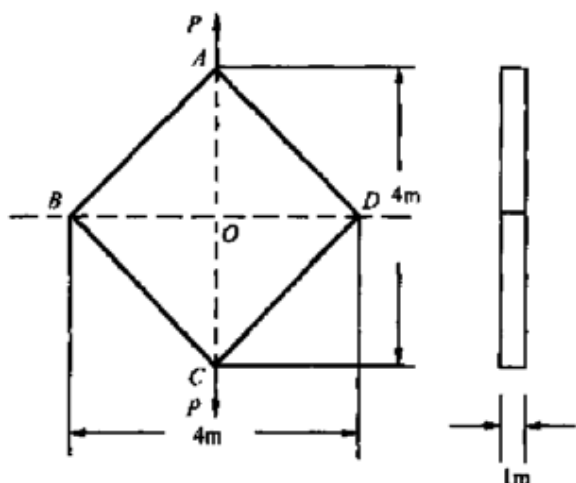


图 3-9

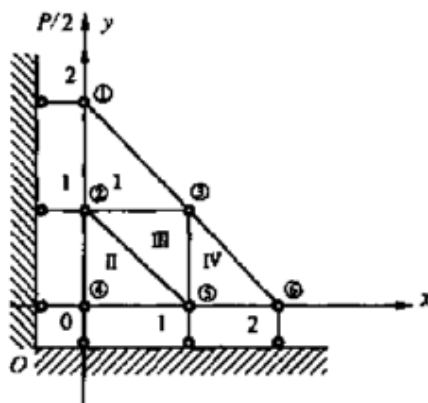


图 3-10

根据问题的对称性，我们可以将问题简化为求解图 3-10 所示的 1/4 结构。在图示离散化后的模型中圆圈内的数字表示结点编号；罗马数字表示单元编号；阿拉伯数字表示坐标值。

关于计算机的启动和有关操作，请参阅机器及软件包的使用说明。

下面仅列出对上述算例，调用本书程序的输入文件 in。所生成的输出文件 out。
输入文件 in

```
6, 4, 1, 6, 8
1, 0, 1
0, 2, 0, 1, 1, 1
0, 0, 1, 0, 2, 0
1, 2, 3, 2, 4, 5
5, 3, 2, 3, 5, 6
2
1
1, 3, 7, 8, 10, 12
```

输出文件 out

```
in=      u=      v=
1      .0000000000    3.2527470000
2      .0000000000    1.2527470000
3      .0879120900    .3736264000
4      .0000000000    .0000000000
5      -.1758242000    .0000000000
6      -.1758242000    .0000000000

in=      1
sinma-x=.0879121  sigma-y=2.0000000  tau-xy=-.4395605
sinma-l=2.0962080 sigma-2=-.0082957  set= 102.3458000
in=      2
sinma-x=-.1758242 sigma-y=1.2527470  tau-xy= .0000000
sinma-l= 1.2527470 sigma-2=-.1758242  set= 90.0000000
in=      3
sinma-x=.0879121  sigma-y=.3736264  tau-xy= -.3076923
sinma-l= .5700077  sigma-2= -.1084692 set= 122.5476000
in=      4
```

```

sinma-x=.0000000 sigma-y=.3736264 tau-xy= .1318681
sinma-1=.4154797 sigma-2=-.0418533 set= 72.3912000
c      program main
      common xy(200,2)/c/ie(200,3),ek(6,6),d(3,3),s(3,6)/c1/jf(20),
      fi(20),ib(80)/c2/zz(500,20),p(500)
      call in(nc,ne,np,nb,nd,nj2,eo,pu,te)
      call md(e0,pu)
      call mzz(in,nj2,nd,ne,te)
      call mf(np,nj2)
      call mb(nb,nd)
      call gau(nc,nj2,nd)
      call sg(ne,te)
      stop
      end
      subroutine in(nc,ne,np,nb,nd,nj2,eo,pu,te)
      common xy(200,2)/c/ie(200,3),ek(6,6),d(3,3),s(3,6)/c1/jf(20),
      1 fi(20),ib(80)/c2/zz(500,20),p(500)
      open(3,file='in')
      read(3,*)nc,ne,np,nb,nd
      read(3,*)e0,pu,te
      read(3,*) ((xy(i,j),j=1,2)i=1,nc)
      read(3,*)((ie(i,j),j=1,3)i=1,ne)
      read(3,*)(jf(i),i=1,np)
      read(3,*)(fj(i),i=1,np)
      read(3,*)(ib(i),i=1,nb)
      nj2=nc+nc
      open(4,file='out',status='new')
      write(4,6)nc,ne,np,nb,nd
      return
      end
      subroutine md(e0,pu)
      common/c/ie(200,3),ek(6,6),d(3,3),s(3,6)
      d(1,1)=e0/(1-pu*pu)
      d(1,2)=e0*pu/(1-pu*pu)
      d(2,1)=d(1,2)
      d(2,2)=d(1,1)
      d(1,3)=0
      d(3,1)=0
      d(2,3)=0
      d(3,2)=0
      d(3,3)=e0/(1+pu)/2
      return
      end
      subroutine cma(in,te)
      common xy(200,2)/c/ie(200,3),ek(6,6),d(3,3),s(3,6)
      dimension b(3,6)
      im=ie(in,1)
      je=ie(in,2)
      me=ie(in,3)
      cm=xy(je,1)-xy(im,1)

```

```

        bm=xy(im,2)-xy(je,2)
        cj=xy(im,1)-xy(me,1)
        bj=xy(me,2)-xy(im,2)
        ae=(bj*cm-bm*cj)/2
        do 10 i= 1,3
        do 10 j= 1,6
        b(i,j)=0
        s(i,j)=0
continue
b(1,1)=-bj-bm
b(1,3)=bj
b(1,5)=bm
b(2,2)=-cj-cm
b(2,4)=cj
b(2,6)=cm
b(3,1)=b(2,2)
b(3,2)=b(1,1)
b(3,3)=b(2,4)
b(3,4)=b(1,3)
b(3,5)=b(2,6)
b(3,6)=b(1,5)
do 20 i = 1,3
do 20 j = 1,6
b(i,j)=b(i,j)/ae/2
continue
do 30 i=1,3
do 30 j=1,6
do 30 k=1,3
s(i,j)=s(i,j)+d(i,k)*b(k,j)
contine
do 40 i=1,6
do 40 j=1,6
ek(i,j)=0
do 40 k=1,3
ek(i,j)=ek(i,j)+s(k,i)*b(k,j)*ae*te
continue
return
end
subroutine mzz(in,nj2,nd,ne,te)
common xy(200,2)/c/ie(200,3),ek(6,6),d(3,3),s(3,6)
/c2/zz(500,20),p(500)
do 10 i=1,nj2
do 10 j=1,nd
zz(i,j)=0
do 20 in=1,ne
call cma(in,te)
do 20 i=1,3
do 20 ii=1,2
il=2*(j-1)+jj
iz=2*(ie(in,j)-1)+jj

```

```

jl=iz-jh+1
if(jl.gt.0)zz(jh,jl)=zz(jh,jl)+ek(ih,il)
continue
return
      end
      subroutine mf(np,nj2)
      common /c1/jf(20),fi(20),ib(80)/c2/zz(500,20),p(500)
      do 10 i=1,nj2
p(i)=0
if(np.gt.0) then
do 20 i=1,np
j=jf(i)
p(j)=fi(j)
end if
return
end
      subroutine mb(nb,nd)
      common/c1/jf(20),fi(20),ib(80)/c2/zz(500,20),p(500)
      do 30 i=1,nb
iz=ib(i)
zz(iz,1)=1
do 10j=2,nd
zz(iz,j)=0
if(iz.gt,nd) then
jo=nd
else
jo=iz
end if
do 20 j=2 ,jo
zz(iz-j+1,j)=0
p(iz)=0
continue
return
      end
      subroutine gau(nc,nj2,nd)
      common/c2/zz(500,20),p(500)
      do 20 k=1 ,nj2-1
if(nj2.gt.k+nd-1) then
im=k+nd-1
else
im=nj2
end if
do 20 i=k+1, im
il=i-k+1
c=zz(k,il)/zz(k,1)
do 10 j=1, nd-il+1
m=j+i-k
zz(i,j)=zz(i,j)-c*zz(k,m)
p(i)=p(i)-c*p(k)
continue

```



```

p(nj2)=p(nj2)/zz(nj2,1)
do 40 i=nj2-1,1,-1
if (nd.gt.nj2-i+1) then
jo =nj2-i+1
else
jo=nd
end if
do 30 j=2,jo
ih=j+i-1
p(i)=p(i)-zz(i,j)*p(ih)
p(i)=p(i)/zz(i,1)
write(4,101)
format(3x,3hjd=,5x,2hu=,16x,2hv=)
do 50 i=1,nc
write(4,102)i,p(i+i-1),p(i+i)
fotmat(3x,i5,3x,f15.10,3x,f15.10)
continue
return
end
subrouting sg(ne,te)
common/c/ie(200,3),ek(6,6),d(3,3),s(3,6)/c2/zz(500,20)
p(500)
dimension wy(6),yl(6)
do 30 in =1,ne
call cma (in,te)
do 10 i=1,3
do 10 j=1,2
ih = 2*(i-1)+j
jh = 2*(ie(in,i0-1)+j
wy(ih)=p(jh)
do 20 i=1,3
yl(i)=0
do 20 j=1,6
yl(i)=yl(i)+s(i,j)*wy(j)
s1=yl(1)
s2=yl(2)
s3=yl(3)
py=sqrt(((s1-s2)/2)**2+s3**2)
sa=py+ry
si=py-ry
if(abs(s2-si).lt..001) then
set=0
else
set=90-57.29578*atan(s3/(s2-si))
end if
write(4,'(5x,"in=",i5)')in
write(4,'(2x,"sigmax=",f14.7,2x,"sigmay=",f14.7,2x,
"tau=",f14.7)')s1,s2,s3
write(4,'(2x,"sigma1=",f14.7,2x,"sigma2=",f14.7,2x,
"cet=",f14.7)')sa,is,set

```

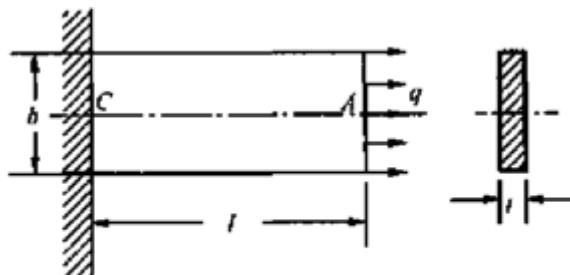
```

continue
return
end

```

习 题

3-1 用书中程序，计算图示受拉平板 A 点的位移 μ_A 和 C 点的应力 $[\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T$ 。已知图中 $l = 10 \text{ cm}$ ， $b = 5 \text{ cm}$ ， $t = 1 \text{ cm}$ ；材料常数 $E = 210 \text{ GPa}$ ， $\mu = 0.30$ ，均布荷载 $q = 100 \text{ kN/m}^2$ 。



题 3-1 图

第 4 章 轴对称空间问题的有限单元法

4.1 概述

很多工程构件，它们的几何形状、承受的载荷以及约束条件都对称于某一固定轴，我们称它为对称轴。此时载荷作用下的位移、应变和应力也对称于该轴，这种问题称为轴对称问题。

轴对称问题是一种空间问题。解轴对称问题，通常采用圆柱坐标 (r, θ, z) 。以对称轴作为 z 轴，所有的应力、应变、位移都将与 θ 无关，而只是 r 和 z 的函数。任一点的位移只有两个方向的分量，也就是沿 r 方向的径向位移 u 和沿 z 方向的轴向位移 w 。由于轴对称，沿 θ 方向的位移等于零。因此该问题转化为二维问题。

用有限元法解轴对称问题，对轴对称体进行离散时。采用的单元是一些圆环。这些圆环单元与 rz 平面正交的截面可以有不同形状，单元的结点是圆周状的铰链，故也称为结圆。各单元在 rz 平面内形成网格，因此圆环单元实际上是 rz 平面内形成网格的各多边形环绕对称轴 z 回转一周而成的。图 4-1 所示为三结点三角形环单元及在 rz 平面内形成的三角形网格。

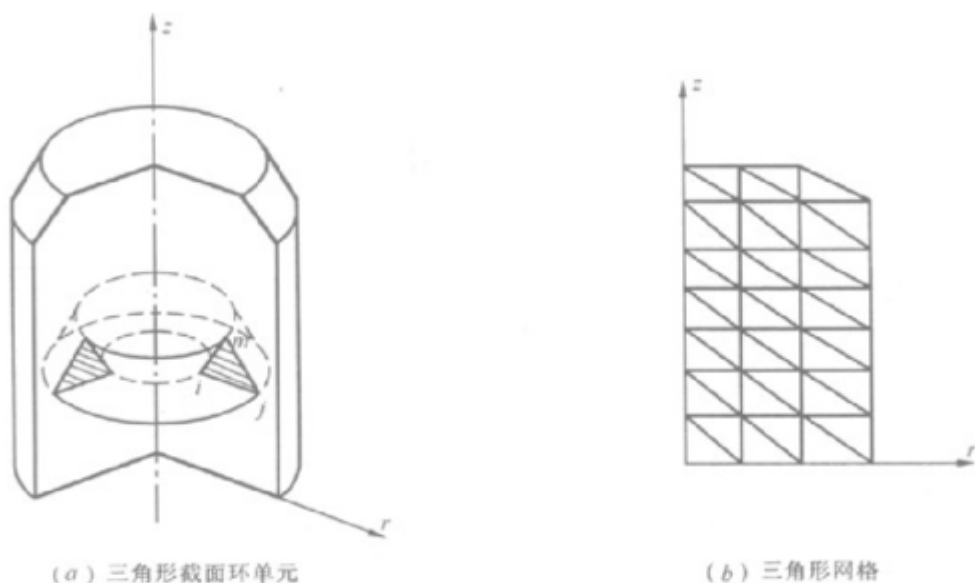


图 4-1

本章主要讨论用三角形三结点环形单元解轴对称问题。这种单元适应性好，计算简单，是一种常用单元。由于问题只与坐标 r 、 z 有关，与 θ 无关，因此我们只需考虑坐标平面 rz 上的截面部分。可见轴对称问题的有限元法与平面问题是类似的，只是在数学上繁琐些。

本章最后一节通过采用四面体常应变单元对一般空间问题的有限元法也作了简要介绍。而目前解空间问题常用的等参单元将在第五章集中讨论。

4.2 三角形截面环单元

4.2.1 单元的位移函数

在 rz 平面内，圆环单元截面三角形 ijm 如图 4-2 所示。结点 i 在 r 和 z 方向的位移为

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (a)$$

则单元的结点位移列阵为

$$\delta = [\delta_i^T \delta_j^T \delta_m^T]^T = [u_i \ w_i \ u_j \ w_j \ u_m \ w_m]^T \quad (4-1)$$

仿照平面问题，取线性位移模式

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z \\ w = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z \end{cases} \quad (b)$$

经与平面问题相似的计算，可得

$$\begin{cases} u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ w = N_i w_i + N_j w_j + N_m w_m \end{cases} \quad (4-2)$$

$$\text{式中} \quad N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i r + c_i z) \quad (i, j, m) \quad (4-3)$$

$$\text{并且} \quad \begin{cases} a_j = r_j z_m - r_m z_j \\ b_i = z_j - z_m \\ c_i = -r_j + r_m \end{cases} \quad (i, j, m)$$

(4-4)

而 A 为三角形 ijm 的面积

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix}$$

式 (4-2) 也可以写成矩阵形式

$$f = [u \quad w]^T = \mathbf{N} \delta^e \quad (4-5)$$

其中函数矩阵为

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & \mathbf{0} & \mathbf{N}_j & \mathbf{0} & \mathbf{N}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_i & \mathbf{0} & \mathbf{N}_j & \mathbf{0} & \mathbf{N}_m \end{bmatrix} = [\mathbf{N}_i \mathbf{I} \quad \mathbf{N}_j \mathbf{I} \quad \mathbf{N}_m \mathbf{I}] \quad (4-6)$$

4.2.2 单元应变

由弹性理论, 单元的应变分量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ u \\ r \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (c)$$

将式 (4-5) 代入上式得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta^e = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m] \{\delta\}^e \quad (4-7)$$

B 是应变矩阵, 其子矩阵

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ g_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (4-8)$$

$$\text{而} \quad g_i = \frac{a_i}{r} + b_i + c_i \frac{z}{r} \quad (i, j, m) \quad (4-9)$$

所以由结点位移表示的应变又可以写为

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ g_i & 0 & g_j & 0 & g_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix} \quad (4-10)$$

可见，由于 g_i 中包含了坐标 r 和 z ，不是常量，故环向应变分量 ε_θ 不是常数应变。而其他应变分量都是常数应变。

4.2.3 单元应力

对于各向同性材料，轴对称问题的应力—应变关系为

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \\ \gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G} \end{cases} \quad (d)$$

由上式解出应力，并用矩阵表示为

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = D\varepsilon \quad (e)$$

其中的弹性矩阵

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \Lambda \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

将应变表达式 (4-7) 代入 (e) 得

$$\sigma = \mathbf{DE}\delta^e = \mathbf{S}\delta^e \quad (4-12)$$

式中 \mathbf{S} 为单元应力矩阵。

$$\mathbf{S} = \mathbf{DB} = [\mathbf{S}_i \quad \mathbf{S}_j \quad \mathbf{S}_m] \quad (f)$$

其中子矩阵

$$S_i = \frac{2m_3}{A} \begin{bmatrix} b_i + m_1 g_i & m_1 c_i \\ m_1 b_i + g_i & m_1 c_i \\ m_1 (b_i + g_i) & c_i \\ m_2 c_i & m_2 b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m)$$

而 $m_1 = \frac{\mu}{1-\mu}$, $m_2 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$, $m_3 = \frac{(1-\mu)E}{4(1+\mu)(1-2\mu)}$

显然,除了应力分量 τ_{rz} 在单元中为常量以外,其余三个正应力在单元中都不是常量。为了简化计算并清除对称轴上由于 $r=0$ 引起的麻烦,在实用上常把各个单元的 r 和 z 近似的视为常数,并且分别等于各单元形心的坐标,即

$$\begin{cases} r \approx \bar{r} = \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_m) \\ z \approx \bar{z} = \frac{1}{3}(z_i + z_j + z_m) \end{cases} \quad (4-14)$$

则式 (4-9) 成为

$$g_i \approx \bar{g}_i = \frac{a_i}{\bar{r}} + b_i + c_i \frac{\bar{z}}{\bar{r}} \quad (i, j, m) \quad (4-15)$$

这样就可以把各个小单元近似的当成常应变单元,将式 (4-15) 代入式 (4-10) 和 (4-12) 求得的是单元形心处应变和应力的近似值。

4.3 单元刚度矩阵

我们仍然用虚功原理来导出单元刚度矩阵。在轴对称情况下单元的虚功方程为

$$(\delta^{*r})^T R^e = \iiint (\varepsilon^w)^T \sigma r dr d\theta dz \quad (a)$$

上式等号左边为单元结点力 R^e 在虚位移 δ^{*e} 上所做的虚功,这里与平面问题不同之处在于结点力是指整个结圆上的力;等号右边是指整个三角形环单元中虚力的虚功。

仍然设单元虚位移

$$f^* = N \delta^{*e} \quad (b)$$

则单元的虚应变为

$$\varepsilon^* = B \delta^{*e} \quad (c)$$

将式 (b) (c) 代入 (a), 并注意到积分

$$\int_0^\pi d\theta = 2\pi$$

则虚功方程变为

$$(\delta^{*e})^T \mathbf{R}^e = (\delta^{*e})^T 2\pi \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz \delta^e$$

或

$$\mathbf{R}^e = 2\pi \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz \delta^e \quad (d)$$

而单元刚度矩阵为

$$\mathbf{k} = 2\pi \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz \quad (4-16)$$

则刚度方程仍为如下的标准形式

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{k} \delta^e \quad (e)$$

刚度矩阵也可写成分块的形式

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}$$

其中子矩阵

$$\mathbf{k}_{rs} = 2\pi \iint \mathbf{B}_r^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s r dr dz \quad (\text{f})$$

由于被积函数中的应变矩阵 \mathbf{B} 包含有坐标 r 和 z ，故积分不能简单的求出。现仍把每个单元积分中的 r 和 z 近似地当成常量，用单元形心坐标 \bar{r} 和 \bar{z} 代替，则 (f) 式成为

$$\mathbf{k}_{rs} = 2\pi \bar{r} \mathbf{A} \mathbf{B}_r^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s \quad (\text{g})$$

也可以写成显式

$$k_{rs} = \frac{2\pi \bar{r} m_3}{A} \begin{bmatrix} b_r b_s + g_r g_s + m_1(b_r g_s + b_s g_r) + m_2 c_r c_s & m_1(b_r c_s + g_r c_s) + m_2 c_r b_s \\ m_1(c_r b_s + c_r g_s) + m_2 b_r c_s & c_r c_s + m_2 b_r b_s \end{bmatrix} \quad (\text{4-18})$$

($r = i, j, m, \quad s = i, j, m$)

式中的 m_1, m_2, m_3 如前述。

至于组集整体刚度矩阵的过程完全与平面问题相似。设弹性体划分为 n_e 个单元和 n 个结点，于是可得到 n_e 个形如式 (d) 的方程，将单元的 δ^e 、 \mathbf{R}^e 和 \mathbf{k} 都扩大到结构自由度的维数，然后叠加则得到

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{R}^e = \left(\sum_{e=1}^{n_e} 2\pi \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz \right) \delta \quad (\text{h})$$

其中 δ 为整体的结点位移列阵，并令荷载位移列阵为

$$\mathbf{R} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{R}^e \quad (\text{i})$$

整体刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{k} = \sum_{e=1}^{n_e} 2\pi \iint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz \quad (\text{j})$$

于是得到标准形式的整体刚度方程

$$\mathbf{K} \delta = \mathbf{R} \quad (\text{4-19})$$

和平面问题一样，整体刚度矩阵 \mathbf{K} 是对称的带状稀疏阵，消除个体位移后是正定的。

4.4 等效结点力计算

由于轴对称，单元的结点力是作用在整圈圆周形绞上。若设结圆半径为 r 单位长绞上作用的径向和轴向分力分别为 P_r 和 P_z ，那么圆周绞上的结点力应为

径向： $2\pi r P_r$ ， 轴向： $2\pi r P_z$

下面仍然采用虚功等效原理推导几种常见荷载的等效结点力

4.4.1 体积力

用 P_r 和 P_z 分别表示旋转体沿径向（如离心惯性力）和轴向（如重力）的体积分量，则体积力可表示为

$$p = \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

由虚功原理，单元上体积力的等效结点力 R_p^e 所做的虚功等于体积力 p 所做的虚功，可得

$$(\delta^{we})^T R_p^e = \iiint (f^*)^T p r d\theta dr dz \quad (b)$$

将上节的 (b) 式代入并考虑 $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ 得

$$(\delta^{we})^T R_p^e = 2\pi (\delta^{we})^T \iint N^T p r dr dz \quad (c)$$

于是

$$\mathbf{R}_p^e = 2\pi \iint \mathbf{N}^T p r dr dz \quad (4-20)$$

体积力为自重

此时 $P_r = 0$, $P_z = -\gamma$, 其中 γ 为重度。于是单元自重移植到结点 i, j, m 上的等效结点力为

$$\mathbf{R}_{pi}^e = 2\pi \iint \mathbf{N}_i \begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma \end{Bmatrix} r dr dz \quad (i, j, m) \quad (d)$$

类似于平面问题，利用面积坐标并建立关系式

$$r = r_i L_i + r_j L_j + r_m L_m$$

于是有

$$\iint \mathbf{N}_i r dr dz = \iint \mathbf{L}_i (\mathbf{r}_i \mathbf{L}_i + \mathbf{r}_j \mathbf{L}_j + \mathbf{r}_m \mathbf{L}_m) dr dz$$

再利用积分公式 (2-25) 得到

$$\iint \mathbf{N}_i r dr dz = \left(\frac{r_i}{6} + \frac{r_j}{12} + \frac{r_m}{12} \right) A = \frac{A}{12} (3\bar{r} + r_i) \quad (i, j, m) \quad (e)$$

代入式 (d) 于是有

$$\mathbf{R}_{pi}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\pi\gamma A}{6} (3\bar{r} + r_i) \end{Bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (f)$$

于是自重的等效结点力列阵为

$$\mathbf{R}_p^e = -\frac{\pi\gamma A}{6} \begin{bmatrix} 0 & 3\bar{r} + r_i & 0 & 3\bar{r} + r_j & 0 & 3\bar{r} + r_m \end{bmatrix}^T \quad (4-21)$$

可见，若单元距离对称轴较远，满足 $\bar{r} \approx r_i \approx r_j \approx r_m$ ，则可以以为单元的 $1/3$ 自重 $\frac{1}{3} 2\pi\bar{r}A\gamma$ 移植到每个结点上

体积力为离心力

$$\text{此时} \quad p = [p_r \quad p_z]^T = [\rho\omega^2 r \quad 0]^T$$

其中 ω 为角速度， ρ 为密度。于是单元离心力移植到结点 i, j, m 上的等效结点力为

$$\mathbf{R}_{pi}^e = 2\pi \iint N_i \begin{Bmatrix} \rho\omega^2 r \\ 0 \end{Bmatrix} r dr dz \quad (i, j, m) \quad (g)$$

其中积分

$$\iint \mathbf{N}_i r^2 dr dz = \iint \mathbf{L}_i (\mathbf{r}_i \mathbf{L}_i + \mathbf{r}_j \mathbf{L}_j + \mathbf{r}_m \mathbf{L}_m)^2 dr dz$$

利用积分公式 (2-25) 得

$$\iint \mathbf{N}_i r^2 dr dz = \frac{A}{30} (r_i^2 + r_j^2 + r_m^2 + 6\bar{r}r_i + r_j r_m)$$

代入式 (g) 则有

$$\mathbf{R}_{pi}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\pi\rho\omega^2 A}{15} (9\bar{r}^2 + 2r_i^2 - r_j r_m) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (h)$$

于是离心力的等效结点列阵为

$$\mathbf{R}_p^e = \begin{bmatrix} 9\bar{r}^2 + 2r_i^2 - r_j r_m & 0 & 9\bar{r}^2 + 2r_j^2 - r_m r_i & 0 & 9\bar{r}^2 + 2r_m^2 - r_i r_j & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4-22)$$

4.4.2 表面力

用 \bar{p}_r 、 \bar{p}_z 分别表示环形单元边界上沿径向和轴向的表面力分量，则表面力集度可表示为

$$\bar{\mathbf{p}} = [\bar{p}_r \quad \bar{p}_z]^T \quad (i)$$

根据虚功原理，同样可得表面力 $\bar{\mathbf{p}}$ 的等效结点力

$$R_{\bar{p}}^e = 2\pi \int N^T \bar{\mathbf{p}} r ds \quad (4-23)$$

例如， rz 平面内单元 ijm 的 ij 边上受有线性分布的径向表面力如图 (4-3) 所示。设在结点 i 的面力集度为 \bar{p}_i ，在结点 j 为 \bar{p}_j ， ij 边的长度为 l 。此时有

$$\bar{p}_r = \bar{p}_j + \frac{s}{l}(\bar{p}_i - \bar{p}_j) = \bar{p}_j + L_i(\bar{p}_i - \bar{p}_j) = L_i \bar{p}_i + \bar{p}_j(1 - L_i)$$

注意 ij 边上的面积坐标 $L_m = 0$ ，则

$$\bar{p}_r = L_i \bar{p}_i + L_j \bar{p}_j$$

而

$$\bar{p}_z = 0$$

于是结点 i 的等效结点力为

$$\mathbf{R}_{pi}^e = 2\pi \int N_i \begin{Bmatrix} L_i \bar{p}_i + L_j \bar{p}_j \\ 0 \end{Bmatrix} r ds \quad (j)$$

将 $r = r_i L_i + r_j L_j$ 代入，则积分

$$\int_i \mathbf{N}_i \mathbf{L}_i r ds = \int_i L_i^2 (r_i L_i + r_j L_j) ds = \frac{l}{12} (3r_i + r_j)$$

$$\int_i \mathbf{N}_i \mathbf{L}_j r ds = \int_i L_i L_j (r_i L_i + r_j L_j) ds = \frac{l}{12} (r_i + r_j)$$

于是

$$\mathbf{R}_{pi}^e = \frac{\pi l}{6} \begin{Bmatrix} \bar{p}_i (3r_i + r_j) + \bar{p}_j (r_i + r_j) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-24a)$$

类似地可得结点 j 和结点 m 上的等效结点力

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{pj}^e = \frac{\pi l}{6} \begin{Bmatrix} \bar{p}_i (3r_i + r_j) + \bar{p}_j (r_i + r_j) \\ 0 \end{Bmatrix} \\ R_{pm}^e = \{0\} \end{cases} \quad (4-24b)$$

下面指出两种特殊情况

若 $\bar{p}_j = 0$ ，则由 (4-24) 得

$$\mathbf{R}_p^e = \begin{bmatrix} \frac{\pi \bar{p}_i l}{6} (3r_i + r_j) & 0 & \frac{\pi \bar{p}_i l}{6} (r_i + r_j) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4-25)$$

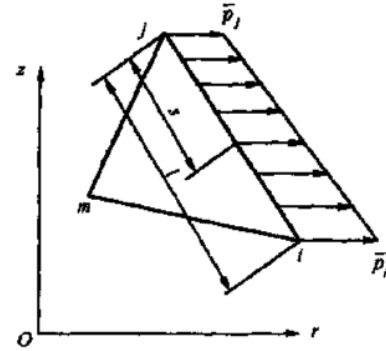


图 4-3

可见，只有当单元离开对称轴较远时，才可以认为 r_i 和 r_j 大致相等，此时才相当于将面力合力的 $2/3$ 移植到结点 i ， $1/3$ 移到结点 j 。

(2) 若 $\bar{p}_i = \bar{p}_j = q$ ，即径向均布表面力情况，由 (4-24) 式得

$$\mathbf{R}_p^e = \left[\frac{\pi q l}{3} (2r_i + r_j) \quad 0 \quad \frac{\pi q l}{3} (r_i + 2r_j) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (4-26)$$

显然，也只有单元距离对称轴较远， r_i 、 r_j 大致相等时，才简单地将表面力的 $1/2$ 分别移植到结点 i 和结点 j 。

至于集中力引起的等效结点力，我们总可以在划分单元时，使集中力作用点成为一个结点，这样等效结点力 R_p^e 就可以直接写出。

有了单元在各种荷载下的等效结点力，就可以集成成整体的荷载列阵，即 (4-19) 式中的 \mathbf{R} ，此过程完全和平面问题相似。

最后提醒注意两点，一是对于轴对称问题，等效结点力的积分表达式 (如 4-20、4-23 式) 中包含有变量 r ，虽然我们采用了线性位移模式，但是不能像平面问题那样利用刚体的静力等效原理来求得等效结点力；另外这里所说的结点力实际上是整个结圆上的力，这也是和平面问题不同的。

4.5 采用四面体单元解一般空间问题

用有限元法解一般空间问题，最简单的单元是四结点四面体单元，也就是把连续的弹性体离散成有限各四面体的组合。这些四面体单元相互在顶点处以空间铰连接，成为空间铰结点。单元间通过结点相互作用，进行力的传递。根据约束情况，在相应的结点处设置空间铰支座，或连杆支座。单元所收的外荷载，可以按照虚功等效原则移植到结点。基本未知量仍是结点位移。其分析思路完全和平面问题相似，并且得到标准形式的公式，如应变、应力、刚度矩阵、刚度方程等。

4.5.1 单元的位移系数

如图 4-4 是一个典型的四面体单元，单元的结点编号为 i, j, m, p 。

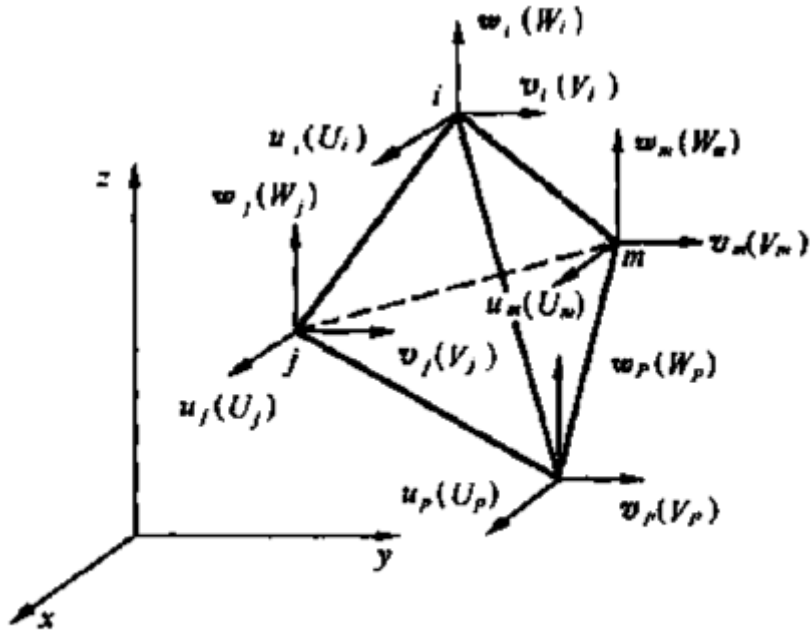


图 4-4

空间问题中，任何一点位移具有三个位移分量，分别沿坐标 x 、 y 、 z 方向，写成列阵为

$$f = [u \quad v \quad w]^T \quad (a)$$

每个结点的位移分量表示为

$$\delta_i = [u_i \quad v_i \quad w_i]^T (i, j, m, p) \quad (b)$$

整个单元的结点位移列阵则为

$$\delta^e = [\delta_i^T \quad \delta_j^T \quad \delta_m^T \quad \delta_p^T]^T (i, j, m, p) \quad (4-27)$$

于平面问题的三结点三角形单元一样，在单元内取线性位移模式，即取单元内任一点的位移是坐标 x 、 y 、 z 的线性函数。

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{cases} \quad (c)$$

由于单元位移函数的线性性质，保证了单元之间变形的连续性。在单元的 i, j, m, p 四个结点，由 (c) 式第一式有

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 z_j \\ u_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m + \alpha_4 z_m \\ u_p = \alpha_1 + \alpha_2 x_p + \alpha_3 y_p + \alpha_4 z_p \end{cases} \quad (d)$$

由此解得待定常数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 并回代 (c) 得

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_p u_p \quad (4-28)$$

其中形函数



$$\begin{cases} N_i = (\alpha_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6V & (i, m) \\ N_j = -(\alpha_j + b_j x + c_j y + d_j z) / 6V & (j, p) \end{cases} \quad (4-29)$$

V 是四面体的体积。V 和系数 a_i, b_i, c_i, d_i 按下列各式计算。

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (4-30)$$

$$\begin{cases} a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} & b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \\ c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \\ 1 & x_p & z_p \end{vmatrix} & d_i = -\begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_p & y_p \end{vmatrix} \end{cases} \quad (i, j, m, p) \quad (4-31)$$

为了使四面体的体积 V 不为负值，也就是（4-30）式中的行列式不为负值，单元四个结点标号 i, j, m, p 必须按照一定的顺序，即需要符合右手螺旋法则。如在 p

点看其他三个结点时的顺序为 ，在 i 点看为  等。实际

上结点标号也可以不加以限定，只要将 V 改为其绝对值便可以得到正确的结果。采用相同的方法，可以将其余两个位移分量写成与式（4-28）相似的形式，即

$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m + N_p v_p \quad (4-32)$$

$$w = N_i w_i + N_j w_j + N_m w_m + N_p w_p \quad (4-33)$$

将式（4-28）、（4-32）、（4-33）合并，写成矩阵形式

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \delta^e = [\mathbf{N}_i \mathbf{I} \quad \mathbf{N}_j \mathbf{I} \quad \mathbf{N}_m \mathbf{I} \quad \mathbf{N}_p \mathbf{I}] \delta^e \quad (4-34)$$

式中 N 是形函数矩阵，I 是三阶单位阵。

4.5.2 单元的应变与应力

空间问题的几何方程是

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (e)$$

将式 (4-28)、(4-32)、(4-33) 代入得单元应变

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4-35)$$

其中应变矩阵

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_i \quad -\mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m \quad -\mathbf{B}_p] \quad (4-36)$$

而子矩阵

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m, p) \quad (4-37)$$

可见，应变矩阵 \mathbf{B} 中各元素为常量，因此单元中的应变也是常量，故采用线性位移模式的四面体单元是常应变单元。

空间问题的物理方程，采用应变表示应力的形式，用矩阵写出为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (f)$$

或简写为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4-38)$$

其中 \mathbf{D} 是弹性矩阵，完全决定于弹性模量 E 和泊松比 μ 。

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad \text{对称} \quad (4-39)$$

将应变公式 (4-35) 代入 (4-38) 得单元结点位移表示的单元应力

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{S}\boldsymbol{\delta}^e \quad (4-40)$$

其中应力矩阵

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_i \quad -\mathbf{S}_j \quad \mathbf{S}_m \quad -\mathbf{S}_p] \quad (4-41)$$

而子矩阵

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{D}\mathbf{B}_i = \frac{E(1-\mu)}{6(1+\mu)(1-2\mu)V} \begin{bmatrix} b_i & A_1 c_i & A_1 d_i \\ A_1 b_i & c_i & A_1 d_i \\ A_1 b_i & A_1 c_i & d_i \\ A_2 c_i & A_2 b_i & 0 \\ 0 & A_2 d_i & A_2 c_i \\ A_2 d_i & 0 & A_2 b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m, p) \quad (4-42)$$

其中 $A_1 = \frac{\mu}{1-\mu}$, $A_2 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$ 。

显然在每一个单元中, 应力也是常量。

4.5.3 刚度矩阵

对于一个单元 e 应用虚功原理, 仿照平面问题的类似处理方法可得

$$\mathbf{R}^e = \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy dz \delta^e \quad (g)$$

$$\text{或} \quad \mathbf{R}^e = \mathbf{k} \boldsymbol{\delta}^e \quad (h)$$

其中 \mathbf{R}^e 和 $\boldsymbol{\delta}^e$ 分别是单元的结点力列阵与结点位移列阵, 单元刚度矩阵

$$\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy dz \quad (4-43)$$

考虑到 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 中各元素均为常量, 故

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} V \quad (4-44)$$

将式 (4-36)、(4-39) 代入得

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & -\mathbf{k}_{ij} & \mathbf{k}_{im} & -\mathbf{k}_{ip} \\ -\mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} & -\mathbf{k}_{jm} & \mathbf{k}_{jp} \\ \mathbf{k}_{mi} & -\mathbf{k}_{mj} & \mathbf{k}_{mm} & -\mathbf{k}_{mp} \\ -\mathbf{k}_{pi} & \mathbf{k}_{pj} & -\mathbf{k}_{pm} & \mathbf{k}_{pp} \end{bmatrix} \quad (4-45)$$

子矩阵

$$k_n = B_r^T DB_s V$$

$$= \frac{E(1-\mu)}{36(1+\mu)(1-2\mu)V} \begin{bmatrix} b_r b_s + A_2(c_r c_s + d_r d_s) & A_1 b_r c_s + A_2 c_r b_s & A_1 b_r d_s + A_2 d_r b_s \\ A_1 c_r b_s + A_2 b_r c_s & c_r c_s + A_2(b_r b_s + d_r d_s) & A_1 c_r d_s + A_2 d_r c_s \\ A_1 d_r b_s + A_2 b_r d_s & A_1 d_r c_s + A_2 c_r d_s & d_r d_s + A_2(b_r b_s + c_r c_s) \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

$(i = i, j, m, p; \quad s = i, j, m, p)$

可见单元刚度矩阵是一个常数矩阵，因为他仅由单元结点坐标和单元材料常数决定。如果弹性体划分为 n_e 个单元和 n 个结点，经过平面问题类似的集合处理，就可得到整体刚度方程。

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\delta \quad (4-47)$$

式中 $\mathbf{R}_{3 \times 1}$ 是结点荷载列阵， $\delta_{3 \times 1}$ 是结点位移列阵，而

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{k} \quad (i)$$

是整体刚度矩阵，是 $3n \times 3n$ 的方阵。并且和平面问题一样，它是对称、带状、稀疏阵；在消除刚体位移后是正定的。

4.5.4 等效结点计算

1. 单元上受到的荷载也可用虚功等效的方法移植到四个结点上。只是空间问题，每个结点有三个结点力分量如图 4-4，故单元的等效结点力矩阵为

$$\mathbf{R}^e = [U_i V_i W_i U_j V_j W_j U_m V_m W_m U_p V_p W_p]^T \quad (j)$$

这里介绍两种常见荷载的移植结果。

均质单元的自重

设均质单元的自重为 W ，则等效结点力为

$$\mathbf{R}' = -\frac{W}{4} [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (4-48)$$

相当于把单元的 $1/4$ 自重分别移置到每个结点上，这里假设 z 轴铅垂向上。

2. 边界上受线性分布载荷

设单元 e 的某边界面，例如 ijm 面，受有线性分布载荷。它在 i 、 j 、 m 三个给点处的集度分别为 p_i 、 p_j 和 p_m 。则移置到三个结点处的结点力为

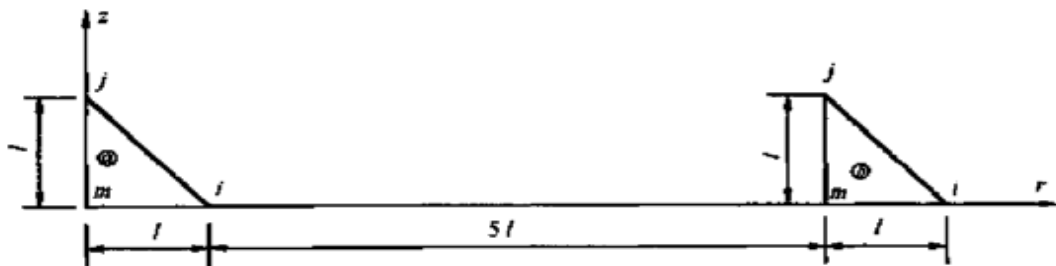
$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{6} (p_i + \frac{1}{2} p_j + \frac{1}{2} p_m) A_{ijm} \quad (i, j, m) \quad (4-49)$$

式中 A_{ijm} 是边界面 ijm 的面积。 \mathbf{R}_i 的方向与原分布载荷的方向一致。至于单元受有集中力的情况，一般取其作用点为结点，则不再需要移置。有了各单元的结点力列阵，通过扩大后叠加就可得到整个弹性体的载荷列阵

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \quad (4-50)$$

习 题

4-1 如图所示两个轴对称三角形单元 a 、 b ，其形状、大小、方位均相同，但位置不同。设材料的弹性模量为 E ，泊松比 $\mu = 0.15$ ，试分别计算两单元的刚度矩阵（坐标 r 、 z 取平均值 \bar{r} 、 \bar{z} 。）

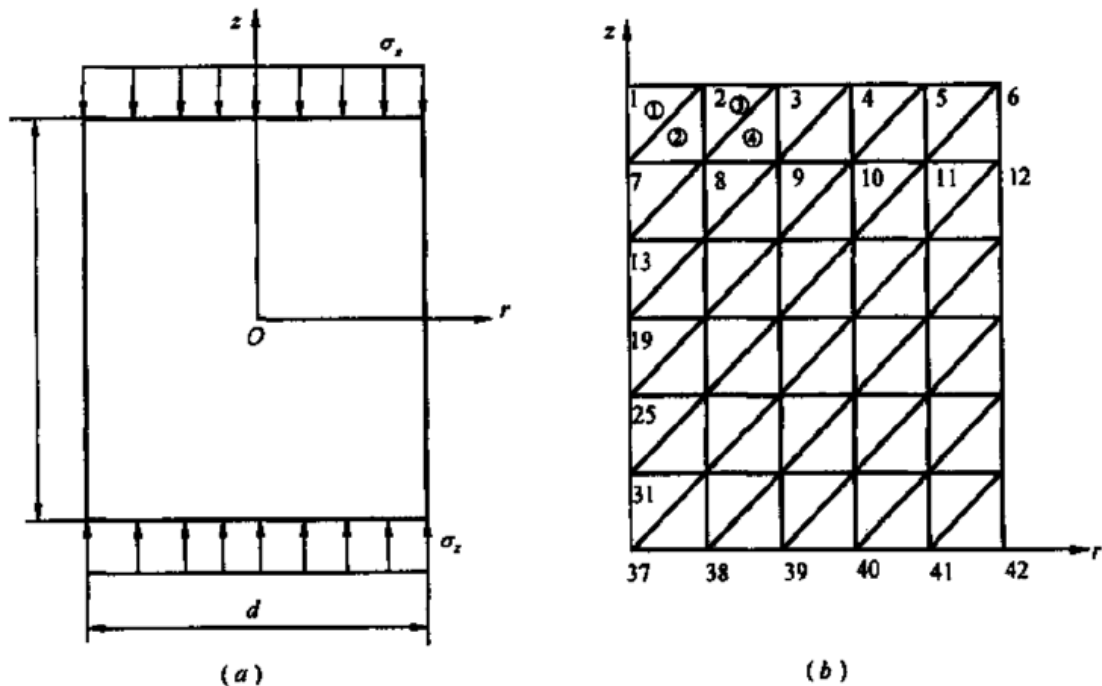


题 4-1 图

4-2 受轴向压缩的圆柱体，直径 $d=10\text{cm}$ ，长度 $l=12\text{cm}$ ，两端面受均布载荷 $\sigma_z = 60\text{Mpa}$ ，如图 a 所示。现取轴对称面的 1/4 均匀划分单元，如图 b。

- (1) 写出离散体的位移约束条件；
- (2) 求单元①、②、③、④的等效结点力；
- (3) 写出结点 1、2、3、4、5、6 的载荷列阵。

4-3 用空间四面体单元解实际问题时，通常是先将求解域划分成若干个六面体，然后再将每个六面体划分成五个或六个四面体。试以一个六面体为例，考虑如何划分成四面体，并用图表示出来。



题 4-2 图

第5章 等参数单元

本章首先以平面任意四边形单元为例引入等参数单元的概念，然后详细讨论采用平面八结点等参数单元和空间二十结点等参数单元分别解弹性力学平面问题和空间问题的处理方法。由于此时刚度矩阵和等效结点力已不能写成显式积分，为此介绍了一种精度较高的数值积分方法，即高斯（Gauss）求积法。

5.1 等参数单元的概念

在平面问题的有限单元法中，最简单也是常用的单元是具有三个结点的三角形单元，其次是具有四结点的矩形单元。这两种单元形状简单、规整，单元各基本矩阵如 N 、 B 、 k 、 R' 等的求解比较容易，具有显式表示。并且三角形单元具有适应性强的优点，能应用于曲折的几何边界，分布不均匀的材料类型和梯度不等的应力区域，但它的精度较低。而矩形单元具有精度较高、形状规整、便于实现计算自动化等优点，但它的适应性差，不便于曲线边界和非正交的直线边界。对于材料不均匀的结构和应力梯度不等的区域也难以布置大小不等的网格。为克服矩形单元的不足，能否改用任意四结点四边形单元（如图 5-1（a））呢？

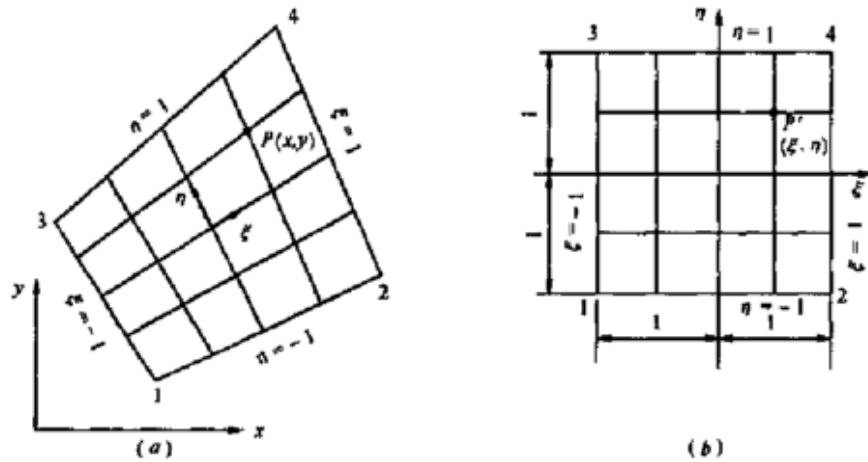


图 5-1

此时若仍然采用矩形单元的位移模式，即

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases}$$

虽然它反映了刚体位移和常应变，但它不能满足位移连续性条件，如取 $\overline{24}$ 边来考查，设 $\overline{24}$ 边的直线方程为 $y = Ax + B$ ，代入上式得

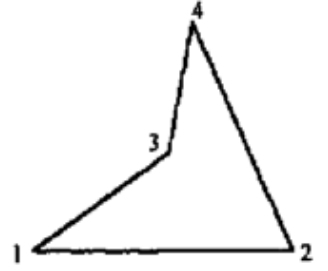
$$\begin{cases} u_{\overline{24}} = (\alpha_1 + \alpha_3 B) + (\alpha_2 + \alpha_3 A + \alpha_4 B)x + \alpha_4 Ax^2 \\ v_{\overline{24}} = (\alpha_5 + \alpha_7 B) + (\alpha_6 + \alpha_7 A + \alpha_8 B)x + \alpha_8 Ax^2 \end{cases}$$

可见 $\overline{24}$ 边上的位移呈二次曲线分布，其位移仅仅由此边上两个结点的位移值不能确定。因此，若 $\overline{24}$ 边为两单元的公共边界，则不能保证边界上的位移相协调，

也就是不能满足位移在单元边界上的协调条件。

为解决这个矛盾,可采用坐标变换,将 xy 平面内的任意四边形单元变换为另一坐标系(如 $\xi\eta$ 坐标系)内的正方形单元,如图 5-1

(b)。这里 ξ 、 η 从 -1 到 +1 变化。这种单元称为基本单元或母单元,而 xy 坐标系中的四边形单元称为实际单元,它可视为基本单元的映象,只要实际单元不是畸变的四边形,如图 5-2,基本单元和实际单元之间将存在着点的一一对应关系。如实际单元中的点 $P(x,y)$ 对应基本单元中的点 $p'(\xi,\eta)$ 。因此, $\xi\eta$ 坐标系也可作为实际单元的局部坐标系。显然,整体坐标系 xy 与局部坐标系 $\xi\eta$ 间存在着一定的变换关系,若能找到这种变换关系,那么关于实际单元的特性分析可借用很规整的基本单元进行了。



对于基本单元,参照矩形单元的位移模式,取

$$\begin{cases} u = N_1(\varepsilon, \eta)u_1 + N_2(\varepsilon, \eta)u_2 + N_3(\varepsilon, \eta)u_3 + N_4(\varepsilon, \eta)u_4 \\ v = N_1(\varepsilon, \eta)v_1 + N_2(\varepsilon, \eta)v_2 + N_3(\varepsilon, \eta)v_3 + N_4(\varepsilon, \eta)v_4 \end{cases} \quad (a)$$

其中形函数为

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-\varepsilon)(1-\eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\varepsilon)(1-\eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1-\varepsilon)(1+\eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1+\varepsilon)(1+\eta) \end{cases} \quad (b)$$

也可以把形函数写成统一的形式

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\varepsilon_0)(1+\eta_0) \quad (i=1,2,3,4) \quad (c)$$

其中 $\varepsilon_0 = \varepsilon, \eta_0 = \eta$, 而 ε_i, η_i 为结点 i 的坐标。

现在把位移模式 (a) 和形函数 (b) 移用于图 5-1a 所示的四边形单元。如前述,将 ξ 、 η 取为四边形单元的局部坐标,可见位移模式在四个结点给出了结点位移。如在结点 1 有 $N_2=N_3=N_4=0, N_1=1$, 则 $u=u_1, v=v_1$ 。并且在单元的四条边上位移是线性变化的。

如在 $\bar{24}$ 边上, 因 $\varepsilon = 1$, 则

$$u_{\bar{24}} = \frac{1}{2}(1-\eta)u_2 + \frac{1}{2}(1+\eta)u_4, v_{\bar{24}} = \frac{1}{2}(1-\eta)v_2 + \frac{1}{2}(1+\eta)v_4$$

从而保证了单元边界上的位移协调,即满足了收敛的充要条件。

仿照位移模式 (a), 将坐标变换式取为

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = N_1(\varepsilon, \eta)x_1 + N_2(\varepsilon, \eta)x_2 + N_3(\varepsilon, \eta)x_3 + N_4(\varepsilon, \eta)x_4 \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i = N_1(\varepsilon, \eta)y_1 + N_2(\varepsilon, \eta)y_2 + N_3(\varepsilon, \eta)y_3 + N_4(\varepsilon, \eta)y_4 \end{cases} \quad (d)$$

其中的函数 $N_i(\xi, \eta)$ 与 (b) 式相同。容易验证,该变换式在四个结点给出了结点的整体坐标,而且在单元的四条边止,一个局部坐标等于 -1 或 +1,整体坐标关于另一局部坐标是线性变化的,因此 (d) 式是正确的变换式。由上分析,图 5-1a 中的任意四边形单元是由基本单元(图 5-1b)通过坐标变换而得的实际单元。而目

前我们对位移模式和坐标变换式采用了相同的形函数，因此称这种实际单元为等参数单元或等参单元。

显然上述形函数 $\sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) = 1$ ，这保证了位移模式能反映单元的刚体位移和常

量应变。说明如下：

我们知道，在平面问题中，对应于刚体位移和常应变状态的位移可写成如下形式

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \quad (e)$$

现在假设图 5-1a 所示四边形单元四个结点的位移由上式确定，即

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \end{cases} \quad (i=1,2,3,4) \quad (f)$$

而单元内的位移根据 (a) 式由结点位移插值求得，将 (f) 式代入 (a) 的第一式有

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(\varepsilon, \eta) u_i = \sum_{i=1}^4 N_i(\varepsilon, \eta) (\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i)$$

或

$$\begin{cases} u = \alpha_1 \sum_{i=1}^4 N_i(\varepsilon, \eta) + \alpha_2 \sum_{i=1}^4 N_i(\varepsilon, \eta) x_i + \alpha_3 \sum_{i=1}^4 N_i(\varepsilon, \eta) y_i \\ v = \alpha_4 \sum_{i=1}^4 N_i(\varepsilon, \eta) + \alpha_5 \sum_{i=1}^4 N_i(\varepsilon, \eta) x_i + \alpha_6 \sum_{i=1}^4 N_i(\varepsilon, \eta) y_i \end{cases} \quad (g)$$

可见，若 $\sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) = 1$ ，并考虑到 (d) 式，则 (g) 式就成了 (e) 式，这就

说明了单元内的位移是刚体位移或对应于常应变的位移，也就满足了收敛的必要条件，即完备性条件。

本节所介绍的变换方法，可以类似地推广到有更多结点的单元。我们将分节讨论常用的平面八结点和空间二十结点等参单元。在此之前，先介绍高斯数值求积法。

5.2 高斯求积法

对于等参单元推导载荷列阵和刚度矩阵时，需计算如下形式的积分

$$\int_{-1}^1 f(\varepsilon) d\varepsilon, \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta, \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\varepsilon, \eta, \zeta) d\varepsilon d\eta d\zeta$$

其中被积函数一般比较复杂，甚至得不到显式。因此，通常采用数值积分代替函数积分，即在单元内部选取某些点，先计算被积函数在这些点的函数值，然后用一些系数（称为加权系数，简称权）乘上这些函数值，再求总和作为近似的积分值。在有限元法中通常采用精度较高的高斯数值求积法。

首先介绍一维高斯求积公式

$$I = \int_{-1}^1 f(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{k=1}^n w_k f(\varepsilon_k) \quad (a)$$

其中 $f(\xi_k)$ 是被积函数 f 在积分点 ξ_k 处的函数值， w_k 是加权系数， n 是所选积分点的数目。例如取一个积分点 $\xi_1 = 0$ （此时即 $k=1$ ），该点的函数值为 f_1 （如图 5-3 (a)），并取加权系数 $w_1=2$ ，则积分

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx 2f_1 \quad (b)$$

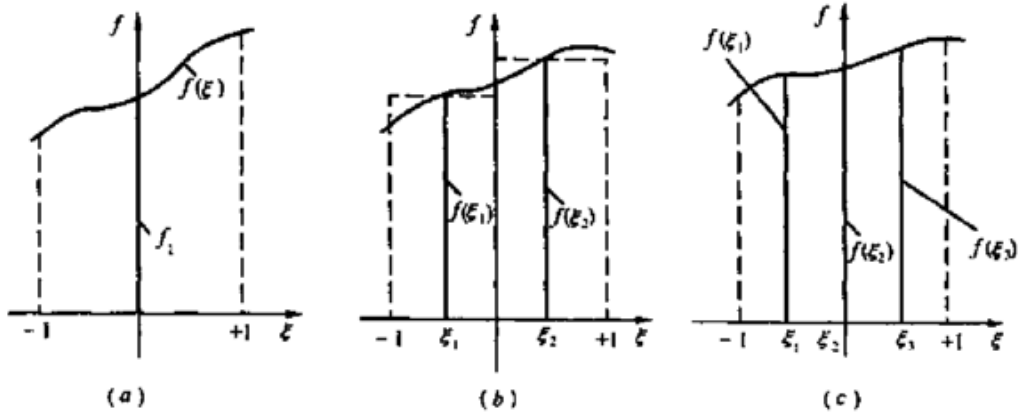


图 5-3

这是一种最简单的计算方法，只有当函数 $f=f(\xi)$ 是一条直线时，即 $f=f(\xi)$ 线之下是一个梯形才是精确的，若 $f=f(\xi)$ 是任意曲线，则此计算结果是相当粗糙的。

为了改善精度，在 $-1 < \xi < +1$ 范围内，取两个对称点 ξ_1 、 ξ_2 ，其函数值分别为 $f(\xi_1)$ 和 $f(\xi_2)$ ，如图 5-3 (b)，但是横坐标 ξ_1 、 ξ_2 以及相应的权 ω_1 和 ω_2 需要确定。为此设 $f(\xi)$ 为三次式，即

$$f = f(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad I &= \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 (c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3) d\xi \\ &= 2(c_0 + \frac{c_2}{3}) \end{aligned} \quad (c)$$

而由高斯求积公式

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) \quad (d)$$

于是由 (c) 和 (d) 两式得

$$w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) = 2(c_0 + \frac{1}{3}c_2)$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad &w_1(c_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_1^2 + c_3\xi_1^3) + w_2(c_0 + c_1\xi_2 + c_2\xi_2^2 + c_3\xi_2^3) \\ &= 2(c_0 + \frac{1}{3}c_2) \end{aligned}$$

为了在 c_0, c_1, c_2, c_3 取任意数值时 (d) 式都是精确的，因此上式两边对应的系数必须相等，则有

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ w_1\xi_1 + w_2\xi_2 = 0 \\ w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 = \frac{2}{3} \\ w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 = 0 \end{cases}$$

由此解得实根

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.57735\Lambda$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

值得说明的是，上面确定的两个积分点的高斯求积公式（d）对于被积函数是四次以下（不包括四次）的多项式是完全正确的，否则是近似的表达式。另外，如图 5—3（b）所示，用两个矩形面积来表示函数 $f(\xi)$ 在区间 $[-1, +1]$ 与轴 ξ 所围的面积，这就是（d）式的几何意义。

以相同的方法可以处理由 3 个函数值所组成的近似积分，如图 5—3（c）。对不同的积分点数可确定相应的积分点坐标和加权系数，由此构成高斯积分表，见表 5—1。

$$\int_{-1}^1 f(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{k=1}^n w_k f(\varepsilon_k)$$

表 5-1 高斯求积公式中的积分点坐标和加权系数

| n | $\pm \varepsilon_k$ | w_k |
|---|---|--|
| 2 | ± 0.577350269 2 | 1 |
| 3 | ± 0.774596669 2 0 | 0.5555555556 0.8888888889 |
| 4 | ± 0.8611363116 ± 0.339981043 6 | 0.3478548451 0.6521451549 |
| 5 | ± 0.906179845 9 ± 0.538469310 1 0 | 0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889 |

下面讨论二维、三维的高斯求积公式，对于二重积分

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta,$$

可先对 ξ 积分，而把 η 视为常量，此时引入一维的高斯求积公式则有

$$\int_{-1}^1 f(\varepsilon, \eta) d\varepsilon = \sum_{i=1}^{n_1} w_i f(\varepsilon_i, \eta) = \varphi(\eta) \quad (e)$$

在对 η 积分有

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta = \int_{-1}^1 \varphi(\eta) d\eta = \sum_{j=1}^{n_2} w_j \varphi(\eta_j) \quad (f)$$

将（e）式代入（f）式，则得到二维的高斯求积公式

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_i w_j f(\varepsilon_i, \eta_j) \quad (g)$$

用相同的方法可以得到三维的高斯求积公式

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\varepsilon, \eta, \zeta) d\varepsilon d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} w_i w_j w_k f(\varepsilon_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (h)$$

在实际计算中，为了保证计算精度，并且不过分增加计算工作量，高斯积分中的积

分点数 n 通常可根据等参单元的结点数来选取, 对于后要讨论的平面八结点等参单元和空间二十结点等参单元都可以取 n_3 。

5.3 平面八结点等参单元

如图 5-4 (a) 所示为平面八结点曲线四边形单元, 为了导出它的位移模式, 取八结点的正方形单元为基本单元, 如图 5-4 (b), 在局部坐标 ξ 、 η 下基本单元的位移模式可取为

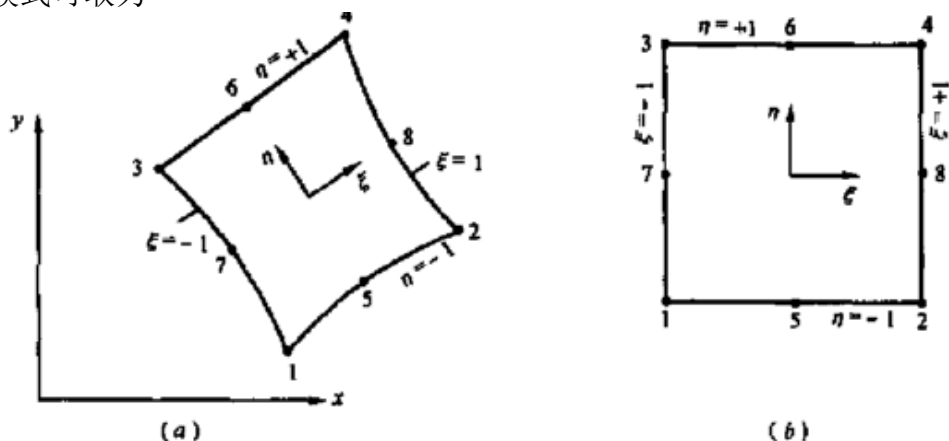


图 5-4

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i \end{cases} \quad (a)$$

式中形函数分别为

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_7 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \\ N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \end{cases} \quad (b)$$

容易看出, N_1 右端第一个括号等于零正好是过结点 2、8、4 的直线方程, 第二个括号等于零是过结点 3、6、4 的直线方程, 第三个括号等于零是过结点 5、7 的直线方程。若将结点 1 的坐标 $(-1, -1)$ 代入, 三个括号的乘积等于 4, 可见形函数 N_1

满足在结点 1 处、其值等于 1，在其余结点处其值等于零的性质。其余七个形函数也有这种性质。另外，位移模式 (a) 在八个结点处给出了相应的结点位移，由于在正方形的每个边上一个坐标值等于 ± 1 ，则位移 u 、 v 是另一个坐标的二次函数。因此，只要相邻两单元在公共边上的三个结点处具有相同的位移，就能保证位移的协调性。

并且形函数满足 $\sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) = 1$ ，与 5.1 节相似地可说明，位移模式包含了单元的刚体位移和常量应变，因此完备性也得到满足。

式 (b) 中的形函数也可写为

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{4}(1+\varepsilon_0)(1+\eta_0)(\varepsilon_0+\eta_0-1) & (i=1,2,3,4) \\ N_i = \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)(1+\eta) & (i=5,6) \\ N_i = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\varepsilon_0) & (i=7,8) \end{cases} \quad (c)$$

其中 ξ_0, η_0 与前述意义相同。

现在将位移模式 (a) 移用于图 5-4 (a) 所示的实际单元。 ξ 、 η 视为实际单元的局部坐标。则 (a) 式为所需的正确模式。另外，仿照位移模式 (a)，取坐标变换为

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^8 N_i(\varepsilon, \eta) x_i \\ y = \sum_{i=1}^8 N_i(\varepsilon, \eta) y_i \end{cases}$$

式中的 $N_i(\xi, \eta)$ 完全与 (b) 式的相同。

显然，坐标变换式 (d) 在实际单元的八个结点处给出了相应的整体坐标 x_i, y_i ；在任一边界上，两个局部坐标之一为 ± 1 ，则 x, y 均为另一局部坐标的二次式。因此，该曲线边界为一根二次曲线。下面对这种八结点曲线四边形单元进行详细分析。

5.3.1 单元的应变矩阵和应力矩阵

将位移表达式 (a) 代入几何方程得等参单元的应变

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \delta^e = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \Lambda \quad \mathbf{B}_8] \delta^e \quad (5-1)$$

式中 $\delta^e = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_8 \quad v_8]^T$ 为单元结点位移列阵，而子矩阵

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\Lambda 8) \quad (5-2)$$

现需要解决 $\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y}$ 的计算问题，由复合函数求导法则

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \quad (e)$$

由于不能列出 x 、 y 表示 ξ 、 η 的显式，故也无法求得 $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y}$ 的算式，因此直接

用 (e) 式无法求得 $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ ，可改用求逆的方法。将

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (f)$$

或

求逆得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5-3)$$

式中已简记

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

称为雅可比 (Jacobian) 矩阵。若将坐标变换式 (d) 代入 (5-4) 得

$$J = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} y_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial N_2}{\partial \varepsilon} & \Lambda & \frac{\partial N_8}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \Lambda & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_2 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

式中 $\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon}$ 、 $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ 是容易求得的，代入上式即求得了 \mathbf{J} ，求逆得到 \mathbf{J}^{-1} ，然后再代入 (5-3)

式则求得 $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ ，于是应变矩阵 \mathbf{B} 得以确定。

单元内的应力表达式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \mathbf{DB}\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{S}\boldsymbol{\delta}^e \quad (5-6)$$

其中应力矩阵写成分块形式为

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2 \quad \Lambda \quad \mathbf{S}_8]$$

对于平面应力情况，各子矩阵

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{DB}_i = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\Lambda,8) \quad (5-7)$$

5.3.2 单元刚度矩阵

第二章导出的求平面问题单元刚度矩阵的普遍公式为

$$\mathbf{k} = t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dA \quad (g)$$

其中微分面积 dA 现在需用 $d\xi$ 和 $d\eta$ 表示。为此将 dA 取为两微分矢量 $d\xi$ 、 $d\eta$ 所围成的微小平行四边形面积如图 5-5，由于在 ξ 方向只有 ξ 坐标发生变化， η 保持不变，而在 η 方向只有 η 发生变化， ξ 保持不变。故在整体坐标系中，两微分矢量 $d\xi$ 和 $d\eta$ 可表示为

$$d\xi = dx i + dy j = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi i + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi j$$

$$d\eta = dx i + dy j = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta i + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta j$$

这两个矢量分别切于 $\xi = \text{常数}$ 和 $\eta = \text{常数}$ 的边。于是微分面积 dA 为

$$dA = |d\xi \times d\eta| = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi i + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi j \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta i + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta j \right) \right|$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta$$

借用 (5-4) 式，最后 dA 表示为

$$dA = |J| d\xi d\eta \quad (5-8)$$

式中 $|J|$ 为雅可比矩阵的行列式。

将式 (5-8) 代入 (g) 式

$$\mathbf{k} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{DB} |J| d\xi d\eta \quad (5-9)$$

写成分块形式为

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \Lambda & \mathbf{k}_{18} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \Lambda & \mathbf{k}_{28} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ \mathbf{k}_{81} & \mathbf{k}_{82} & \Lambda & \mathbf{k}_{88} \end{bmatrix} \quad (h)$$

其中子矩阵

$$\mathbf{k}_{rs} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_r^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s |\mathbf{J}| d\varepsilon d\eta \quad (r, s=1, 2, \Lambda, 8) \quad (5-10)$$

对于平面应力情况

$$\mathbf{B}_r^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial y} & \mu \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial x} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial y} & \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (r, s=1, 2, \Lambda, 8) \quad (5-11)$$

(5-10) 式中的被积函数均为 ε 、 η 的函数，由于 $\frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial x}$ 含有 J^{-1} 项，使被积函数不是一般的多项式，而是分子、分母均有多项式的函数（分母项为 $|J|$ ），因此要得到其显式是困难的，通常采用高斯数值积分的近似值

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{rs} &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_r^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s |\mathbf{J}| d\varepsilon d\eta \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_i w_j (\mathbf{B}_r^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s |\mathbf{J}|)_{ij} t \end{aligned} \quad (5-12)$$

单元的等效结点力列阵

集中力

设单元内某点受有集中载荷 $P = [P_x \ P_y]^T$ ，移置到单元结点上的等效结点力仍然采用 (2-39) 式

$$\mathbf{R}_p^e = \mathbf{N}^T \mathbf{P} \quad (5-13)$$

或 $R = [X_1 \ Y_1 \ X_2 \ Y_2 \ \Lambda \ X_8 \ Y_8]^T$

$= [N_1 P_x \ N_1 P_y \ N_2 P_x \ N_2 P_y \dots \ N_8 P_x \ N_8 P_y]^T$

或写成分量的形式

$$\begin{cases} X_i = N_i(\varepsilon_p, \eta_p) P_x \\ Y_i = N_i(\varepsilon_p, \eta_p) P_y \end{cases} \quad (i=1, 2, 3, \dots, 8) \quad (5-14)$$

其中 ε_p, η_p 是载荷 \mathbf{P} 作用点的局部坐标。不过同三角形单元一样，在划分单元时，一般将集中力的作用点作为一个结点，则集中力的等效载荷列阵可直接写出。

2. 体积力

设单元的单位体积力是 $\mathbf{P} = [X \ Y]^T$ ，利用 (5-13) 式进行积分可求得等效结点力，即 (2-41) 式

$$\mathbf{R}_p^e = \int_A \mathbf{N}^T p t dA \quad (i)$$

其中 A 是单元面积。若单元厚度 t 为常数，并应用 (5-8) 式，则得

$$R_p^e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T p |J| d\epsilon d\eta \quad (5-15)$$

对于非均匀体力，则需将体力分量 X 、 Y 表示为局部坐标 ϵ 、 η 的函数，使被积函数中的 N^T 、 p 、 $|J|$ 各项都变为 ϵ 、 η 函数再进行积分。采用高斯积分公式为

$$R_p^e = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_i w_j (N^T p |J|)_{ij} t \quad (5-16)$$

3. 表面力

若单元的某边界上承受有集度的表面力时，也可应用 (5-13) 式的得等效结点力

$$R_p^e = t \int_{S_a} N^T \bar{P} dS \quad (j)$$

其中 S_a 是受表面力作用的边界弧长。

这里需将弧微分 ds 转化为关于 ϵ 、 η 的微分。为具体起见，设 $\epsilon=1$ 的面上受有表面力， $\epsilon=1$ 边的切向取微分矢量 $d\eta$ ，如图 5-6。微分弧长 $dS=dS_a$ 可用 $d\eta$ 的模表示，即

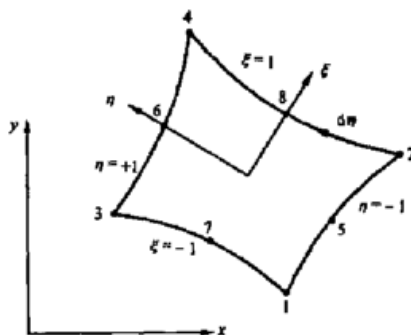


图 5-6

$$\begin{aligned} dS = |d\eta| &= \left| \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right|_{\epsilon=1} \\ &= \left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} \right)_{\epsilon=1} d\eta \end{aligned} \quad (5-17)$$

将上式代入 (j) 式得

$$(R_p^e)_{\epsilon=1} = t \int_{-1}^1 (N^T \bar{P} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2})_{\epsilon=1} d\eta \quad (5-18)$$

采用高斯积分为

$$(R_p^e)_{\epsilon=1} = \sum_{i=1}^n w_i \left[N^T \bar{P} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} \right]_{\epsilon=1} t \quad (5-19)$$

对于非均匀表面力，需将面力分量 \bar{X} 、 \bar{Y} 表示为局部坐标 η 的函数，使式 (5-18) 中的被积函数全变为 η 的函数，再进行积分。另外，对于其他面（例如 $\eta=1$ ）受表面力的等效结点公式，仍可由 (5-18) 式表示，只需将 $\epsilon=1$ 换为 $\eta=1$ ，而 η 换为 ϵ 即可。

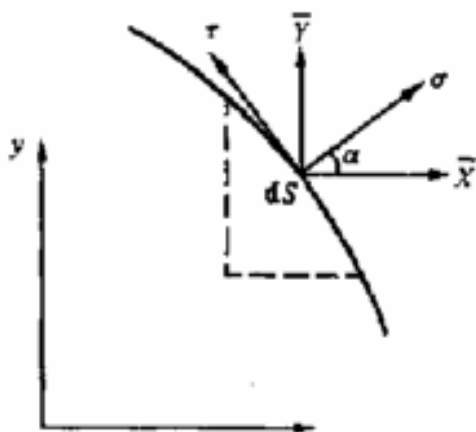
工程上给出的表面力往往是沿曲边的法向力和切向力，即 $\bar{P} = [\sigma \ \tau]^T$ ，这时可先

求出表面力的 x、y 方向的分量

$$\begin{cases} \bar{x} = \tau \frac{dx}{ds} + \sigma \frac{dy}{ds} \\ \bar{y} = \tau \frac{dy}{ds} - \sigma \frac{dx}{ds} \end{cases} \quad (k)$$

这里规定法向面力 σ 以外法向为正，切向力以沿单元边界前进使单元保持在左例即沿着边界正向为正，图（5-7）表示了 σ 和 τ 的正方向，将（k）式代入（j）式

$$R_p^e = \int_{s_T} N^T \begin{Bmatrix} \tau \frac{dx}{ds} + \sigma \frac{dy}{ds} \\ \tau \frac{dy}{ds} - \sigma \frac{dx}{ds} \end{Bmatrix} \tau ds = t \int_{s_T} N^T \begin{Bmatrix} \tau dx + \sigma dy \\ \tau dy - \sigma dx \end{Bmatrix} \quad (5-20)$$



图(5-7)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

并且积分与规定的边界正方向相反，则

$$R_p^e = -t \int_{-1}^1 N^T \begin{Bmatrix} \tau \frac{\partial x}{\partial \eta} + \sigma \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \tau \frac{\partial y}{\partial \eta} - \sigma \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{Bmatrix}_{\xi=-1} d\eta$$

有了单元的结点力列阵 $R^e = R_p^e + R_p^e + R_p^e$ 和刚度矩阵 K 则可采用集合的方法形成

整体的载荷列阵 R 和整体刚度矩阵 K , 从而建立起结构整体刚度方程

$$K\delta = R$$

解上述方程求得结点位移后，便可计算各单元应力。

5.4 空间二十结点等参单元

关于平面等参单元所述方法，可以推广到空间问题。如图 5-8（b）所示空间二十结点等参单元是由边长为 2 的立方体基本单元（图 5-8(a)）采取坐标变换所得。通常为二十结点的曲棱六面体。

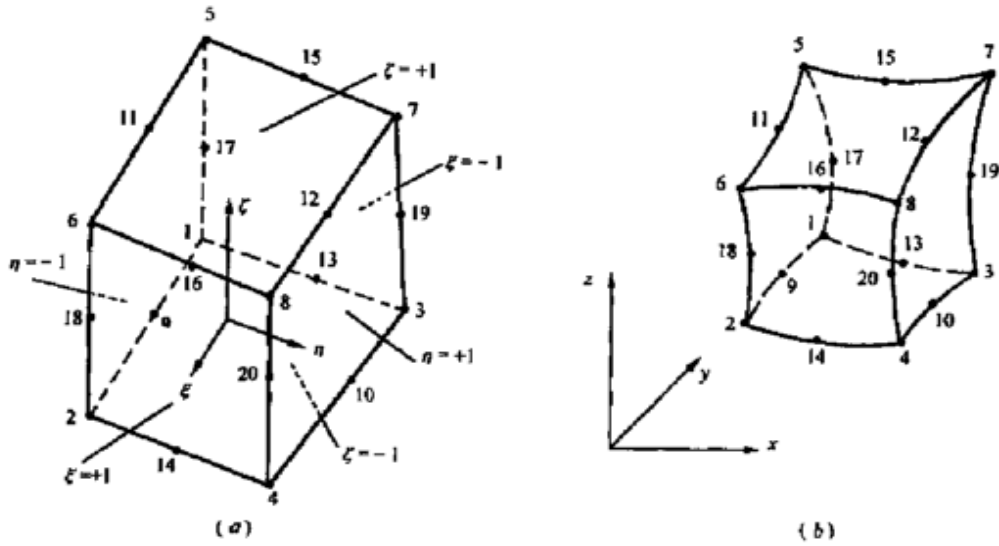


图 5-8

将位移模式及坐标变换式取为

$$v = \sum_{i=1}^{20} N_i v_i \quad \nu = \sum_{i=1}^{20} N_i \nu_i \quad \omega = \sum_{i=1}^{20} N_i \omega_i \quad (a)$$

$$x = \sum_{i=1}^{20} N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^{20} N_i y_i \quad w = \sum_{i=1}^{20} N_i w_i \quad (b)$$

其中形函数为

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{8}(1 + \varepsilon_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\varepsilon_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) (i=1, 2 \dots 8) \\ N_i = \frac{1}{4}(1 - \varepsilon^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) (i=9, 10 \dots 12) \\ N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \varepsilon_0)(1 + \zeta_0) (i=13, 14 \dots 16) \\ N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \varepsilon_0)(1 + \eta_0) (i=17, 18 \dots 20) \end{cases} \quad (c)$$

式中 $\varepsilon_0, \eta_0, \zeta_0$ 的意义与前述相同。

形函数 N_i 在结点 i 等于 1，在其余结点等于零。并且可以证明，由它构成的位移模式满足完备性条件和位移协调位移。

5.4.1 单元的应变矩阵和应力矩阵

由空间问题的几何方程和位移模式 (a) 得到应变表达式

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = B\delta^e = [B_1 \quad B_2 \dots B_{20}] \delta^e \quad (d)$$

式中单元结点位移列阵:

$$\delta = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \dots u_{20} \quad v_{20} \quad w_{20}]$$

而应变矩阵 **B** 的子矩阵为

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\dots,20) \quad (5-21)$$

现在需要确定形函数 N_i 关于整体坐标 x, y, z 的偏导数, 可采用与平面八结点等参元类似的方法。由复合函数求导法则有 $\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ 等等, 于是得矩阵表示形式

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (e)$$

因此可得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (5-22)$$

而

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} & \frac{\partial y}{\partial \epsilon} & \frac{\partial z}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (5-23)$$

也称为雅可比矩阵。

将坐标变换式 (b) 代入上式得

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \epsilon} & \frac{\partial N_2}{\partial \epsilon} & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_{20}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-24)$$

于是将求得的形函数关于局部坐标的偏导数代入上式即可得到矩阵 J ，再求逆阵 J^{-1} ，并代入 (5-22) 则可求得各形函数关于整体坐标的偏导数。这样应变矩阵 B 得以确定。

单元的应力为

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{x_y} & \tau_{y_z} & \tau_{z_x} \end{bmatrix}^T = DB\delta^e = S\delta^e = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{20} \end{bmatrix}^T \delta^e$$

其中应力矩阵 s 的各子矩阵为

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{D}\mathbf{B}_i = A_3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & A_1 \frac{\partial N_i}{\partial y} & A_1 \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ A_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & A_1 \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ A_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} & A_1 \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ A_2 \frac{\partial N_i}{\partial y} & A_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & A_2 \frac{\partial N_i}{\partial z} & A_2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ A_2 \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & A_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\Lambda 20) \quad (5-26)$$

其中: $A_1 = \frac{\mu}{1-\mu}, A_2 = \frac{1-2\mu}{1(1-\mu)}, A_3 = \frac{E(1-\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)}$ (f)

5.4.2 单元刚度矩阵

单元刚度矩阵仍为如下形式

$$k = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (g)$$

式中的微分体积 dV 需用表示 $d\varepsilon, d\eta, d\zeta$ 表示。与平面问题相似, 现将取 dV 为三个微分矢量 $d\varepsilon, d\eta, d\zeta$ 所成平行六面体 (如图 5-9)。在整体坐标系中各矢量表示为

$$\begin{cases} d\varepsilon = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} d\varepsilon_i + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} d\varepsilon_j + \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} d\varepsilon_k \\ d\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta_i + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta_j + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta_k \\ d\zeta = \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta_i + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta_j + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta_k \end{cases} \quad (h)$$

于是

$$dv = d\varepsilon \cdot (d\eta \times d\zeta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} d\varepsilon & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} d\varepsilon & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\varepsilon d\eta d\zeta$$

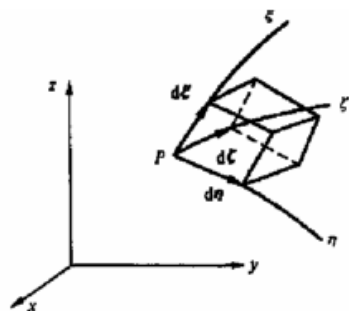


图 (5-9)

借用 (5-23) 式, 则上式可记为

$$dV = |J| d\varepsilon (d\eta^* d\zeta) \quad (5-27)$$

其中是 $|J|$ 雅可比矩阵 J 的行列式, 即

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (5-28)$$

于是单元刚度矩阵 (g) 改写为

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B |J| d\varepsilon d\eta d\zeta$$

$$= \begin{pmatrix} k_{11} & K & k_{120} \\ M & O & M \\ k_{201} & \Lambda & k_{2020} \end{pmatrix} \quad (i)$$

其中子矩阵 k_{r3} 为

$$k_{r3} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_r^T D B_r |J| d\varepsilon d\eta d\zeta \quad (5-29)$$

而 $B_r^T D B_r =$

$$= A_3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial x} + A_2 \left(\frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial y} + \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial z} \right) & A_1 \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial y} + A_2 \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial x} \\ A_1 \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial x} + A_2 \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial y} & \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial y} + A_2 \left(\frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial z} + \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial z} \right) \\ A_1 \frac{\partial N_r}{\partial z} \frac{\partial N_s}{\partial x} + A_2 \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial z} & A_1 \frac{\partial N_r}{\partial z} \frac{\partial N_s}{\partial y} + A_2 \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial z} \\ A_1 \frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial z} + A_2 \frac{\partial N_r}{\partial z} \frac{\partial N_s}{\partial x} & \\ A_1 \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial z} + A_2 \frac{\partial N_r}{\partial z} \frac{\partial N_s}{\partial y} & \\ \frac{\partial N_r}{\partial z} \frac{\partial N_s}{\partial z} + A_2 \left(\frac{\partial N_r}{\partial x} \frac{\partial N_s}{\partial x} + \frac{\partial N_r}{\partial y} \frac{\partial N_s}{\partial y} \right) & \end{bmatrix} \quad (r, s = 1, 2, \dots, 20) \quad (5-30)$$

其中常数 A_1, A_2, A_3 按式 (f) 计算。

5.4.3 单元等效结点力列阵

1. 集中力

设单元某点受有集中荷载 $P = [P_x, P_y, P_z]^T$, 则移至到单元各结点的等效结点力为

$$R_p^e = [X_1 \quad Y_1 \quad Z_1 \quad X_2 \quad Y_2 \quad Z_2 \dots Z_{20}]^T$$

$$= N^T P \quad (5-31)$$

其中矩阵 N 用三阶单位矩阵 I 及各形函数表示为

$$N = [I N_1 \quad I N_2 \quad I N_3 \dots I N_{20}] \quad (5-32)$$

结点力写成分量形式为:

$$\begin{cases} X_i = N_i(\epsilon_p, \eta_p, \zeta_p) P_x \\ Y_i = N_i(\epsilon_p, \eta_p, \zeta_p) P_y \\ Z_i = N_i(\epsilon_p, \eta_p, \zeta_p) P_z \end{cases} \quad (i=1,2,3,\dots,20) \quad (5-33)$$

其中 $\epsilon_p, \eta_p, \zeta_p$ 为集中力 P 作用点的局部坐标。

2. 体积力

设单元受有单位体积力 $P = [X \ Y \ Z]^T$ ，应用(5-31)式积分可求得结点的等效结点力：

$$R_p^e = \int_V N^T p dv \quad (5-34)$$

再应用(5-27)式将上式表示为关于局部坐标的积分

$$R_p^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T p |J| d\epsilon d\eta d\zeta \quad (5-35)$$

对于非均匀的体积力，只需将体积力分量 x 、 Y 、 z 表示成局部坐标 ϵ 、 η 、 ζ 函数然后再进行积分。

3. 表面力

设单元的某边界面(例如 $\epsilon=1$ 的面)上作用有表面力 $\bar{P} = [\bar{X} \ \bar{Y} \ \bar{Z}]^T$ 时，仍然可应用(5-31)式积分求得等效结点力

$$R_p^e = \int_A N_{\epsilon=1}^T \bar{P} dA_{\eta\zeta} \quad (5-36)$$

其中微分面积 $dA_{\eta\zeta}$ 需 $d\eta$ 、 $d\zeta$ 来表示。为此取 $dA_{\eta\zeta}$ 为两微分矢量 $d\eta$ 和 $d\zeta$ 所成平行四边形面积，即为上述两矢量叉乘的绝对值

$$dA_{\eta\zeta} = |d\eta \times d\zeta| \quad (j)$$

参考式(h)

$$d\eta \times d\zeta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{vmatrix} \quad (k)$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) d\eta d\zeta_i + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) d\eta d\zeta_j + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) d\eta d\zeta_k$$

于是 $dA_{\eta\zeta} = |d\eta \times d\zeta|$

$$= \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{1/2} d\eta d\zeta \quad (5-37)$$

其中

$$\begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 \\ F = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2 \end{cases} \quad (5-38)$$

于是

$$R_p^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{\varepsilon=1}^T \bar{P}(\sqrt{EG-F^2})_{\varepsilon=1} d\eta d\zeta \quad (5-39)$$

对于非均匀面力，只需将面力分量 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 表示成 η, ζ 函数，再进行积分。若给出的表面力沿边界的法向方向作用，此时设 \mathbf{n} 是该边界（如 $\eta\zeta$ 面）的单位外法向矢量， \bar{p}_0 为法向表面力集度的大小，这时表面力 \bar{p} 是法向载荷，可写为

$$\bar{p} = \bar{p}_0 \mathbf{n} \quad (l)$$

而矢量 \mathbf{n} 可表示为

$$\mathbf{n} = \frac{d\eta \times d\zeta}{|d\eta \times d\zeta|} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (m)$$

这里用到了式 (k) 和式 (5-37)。将 (m) 代入式 (l)，再代入 (5-39) 式则得到等效结点力

$$R_p^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_A N_{\varepsilon=1}^T \bar{P}_0 \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} d\eta d\zeta \quad (5-40)$$

与平面问题类似，式 (5-29) (5-35) (5-39) 和 (5-40) 均需采用高斯数值积分，并且合并单元的合等效结点力得单元的结点力列阵， $R^e = R_p^e + R_p^e + R_p^e$ 然

后采取集合方法形成整体载荷列阵 \mathbf{R} 及整体刚度矩阵 \mathbf{K} ，这是我们熟悉的，不赘述。

在实际使用等参单元时，有几点值得注意。首先，在划分单元时应注意边棱的夹角不宜太锐或太钝。并且对于我们目前讨论的八结点单元和二十结点单元，其边棱的中结点以选在边棱的中点或其附近为好。另外，等参单元中的任意点，由它的局部坐标求出它的整体坐标，只须直接应用坐标变换式如 5.3 节的 (d) 和 5.4 节 (b)，但要由整体坐标求出局部坐标则要求解非线性联立方程。这是比较繁的。因此在计算单元应力时，只能设定一组局部坐标，代入应力矩阵以求应力；另一方面根据这组局部坐标计算出相应的整体坐标。从而得知所求应力是单元中哪一点的应

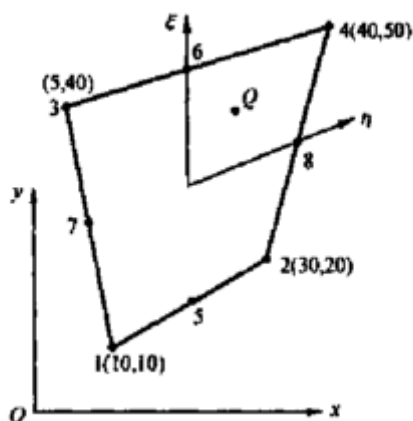
力。至于结点处的应力，只须把结点的局部坐标代入应力矩阵即可，因此在整理应力成果时，一般宜采用绕结点平均法。当然其表征性不好，也可整理单元中若干内点处的应力。

习 题

5-1 试证明平面三角形带应变单元实质上是等参单元。

5-2 证明平面八结点四边形等参单元在整体坐标系下每一边为二次抛物线；

5-3 图示八结点等参单元，计算在局部坐标 $(1/2, 1/2)$ 的 Q 点导数 $\frac{\partial N_1}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial N_1}{\partial y}$ 的值



题 5-3 图

第 6 章 杆件系统的有限元法

6.1 概述

杆件系统的有限单元法和给构力学中经典的位移法比较，并没有很大的区别，只是在“基本结构”的选取上有所不同。在有限单元法中通常采取自然离散的形式，凡是杆差的交叉点、边界点、集中力作用点、截面突变点等都应列为给点，而结点之间的杆伸均可作为单元。用单元代替了经典位移法中的“基本结构”。

本章中，我们将以平面刚架为例，建立有限单元法曲求解格式。从假定位移模式开始，建立插值函数直至得到求解方程。这里要注意，由于单元刚度方程是在单元局都坐标系中导出的，因此在组成结构的整体刚度矩阵时，必须把单元刚度矩阵进行坐标变换，变换到整体坐标系后再按规则叠加成整体刚度矩阵。单元的等效结点力列阵也同样要进行坐标变换，再按规则叠加组成整体结点载荷列阵。

最后还要引入“释放自由度”的概念，以适用于刚架中某些杆件一端是铰结点的情况或两端均为铰接的杆元，将平面刚架的有限元推广用到平面铰结体系（平面行架）。

6.2 局部坐标系中梁单元的刚度矩阵与等效结点力

图 6-1 (a) 所示的平面刚架，可划分为三个单元，1、2、3、4 为四个结点。在阶梯形杆中，取具有相同 EI 的一段作为一个单元，即在杆截面的变化处也取为结点，如图 6-1 (b) 所示的排架，可分为五个单元六个结点。

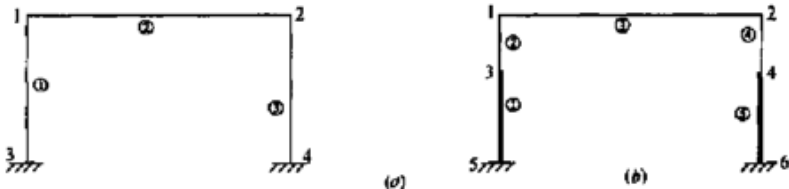


图 6-1

在结构中取出结点为 i 和 j 的等截面梁单元，作为典型单元进行单元分析。图 6-2 所示为典型的梁单元，利用右手坐标系，使 x 轴与梁轴重合，而 y 轴和 z 轴（图中未画出）为梁截面的主惯轴方向，坐标原点在结点 i 上。这样的坐标系称为单元的局部坐标系。由于载荷都在同一平面内，所以梁单元是处于轴向拉压和平面弯曲的组合变形状态。在结点 i 和 j 上所受到的结点力为轴力、剪力和弯矩，它们分别用 $N_i, Q_i, M_i, N_j, Q_j, M_j$ 表示，与之相应的给点位移分别是 $u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j$ 我们规定，结点力和结点位移与坐标轴同向为正。图 6-2 所示的结点力和给点位移均为正方向。

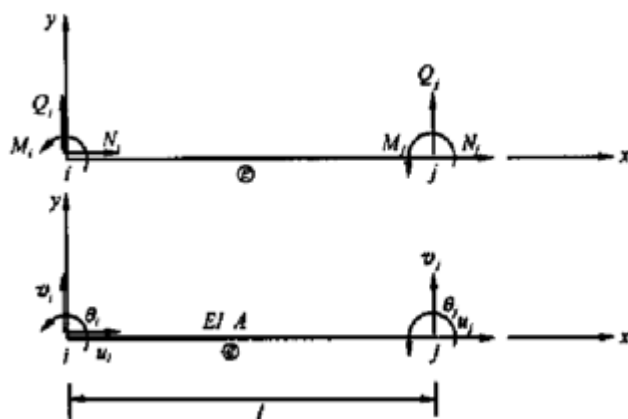


图 6-2

在局部坐标系中，单元分析步骤如下：

用结点位移表示单元的位移模式

由材料力学知道，对于轴向位移 u 的位移模式可以取 x 的线性函数，而对于挠度 v 则可以用 x 的三次多项式来表示。因此可以设

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 \end{cases} \quad (a)$$

式中。 $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \dots \beta_4$ 是位移模式的待定常数，它可以用单元的 6 个结点位移来表示。如将结点坐标 $i(o)$ 及 $j(l)$ 代入 (a) 的第一式，得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (b)$$

求逆可得

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (c)$$

再考虑到转角 θ 有关系式

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \beta_2 + 2\beta_3 x + 3\beta_4 x^2 \quad (d)$$

在(a)的第二式和(d)中代入结点 i, j 的坐标，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (e)$$

解上列方程组可得

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{1}{l} & -\frac{2}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

将 (c) , (f) 式代回 (a) 式，即可得到单元位移用结点位移来表示的表达式，即单元

的位移模式为

$$\begin{cases} u = N_1 u_i + N_4 u_j \\ v = N_2 v_i + N_3 \theta_i + N_5 v_j + N_6 \theta_j \end{cases} \quad (6-1)$$

其中形函数 $N_1 \sim N_6$ 是局部坐标系 x 的函数。这儿有

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{l} & N_2 = 1 - \frac{3}{l^2} x^2 + \frac{2}{l^3} x^3 \\ N_3 = x - \frac{2}{l} x^2 + \frac{1}{l^2} x^3 & N_4 = \frac{x}{l} \\ N_5 = \frac{3}{l^2} x^2 - \frac{2}{l^3} x^3 & N_6 = -\frac{1}{l} x^2 + \frac{1}{l^2} x^3 \end{cases} \quad (6-2)$$

如将结点 i 和 j 的位移列阵表示为

$$\delta_i = [u_i \quad v_i \quad \theta_i]^T \quad \delta_j = [u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T \quad (g)$$

有令单元结点位移列阵为

$$\delta' = [\delta_i^T \quad \delta_j^T]^T \quad (h)$$

则位移模式的表达式 (6—1) 也可以改写成矩阵形式

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = N \delta' \quad (6-3)$$

其中

$$\begin{aligned} N &= [N_i \quad N_j] \\ N_i &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \\ N_j &= \begin{bmatrix} N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (i)$$

N 仍称为形函数矩阵, N_i 、 N_j 是它的分块矩阵。

用结点位移表示应变

梁单元受到拉压和弯曲变形后, 它的线应变可以分为两部分: ε_x 为拉压应力, κ_x 弯曲应变 (可参见清华龙驭球、包世华主编的结构力学下册第九章)。若略去剪切影响, 于是有

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ -\frac{d^2 v}{dx^2} \end{Bmatrix} = Lf \quad (j)$$

其中微分算子

$$L = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (k)$$

(j) 式中位移 f 用 (6—3) 式代入, 则得到

$$\varepsilon = B \delta' \quad (6-4)$$

其中

$$B=LN=L\begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_i & B_j \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

因为

$$B_i = LN_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2N_2}{dx^2} & -\frac{d^2N_3}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x & \frac{4}{l} - \frac{6}{l^2}x \end{bmatrix}$$

$$B_j = LN_j = \begin{bmatrix} \frac{dN_4}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2N_5}{dx^2} & -\frac{d^2N_6}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x & \frac{2}{l} - \frac{6}{l^2}x \end{bmatrix}$$

故可写成

$$B_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & c_i \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

$$B_j = \begin{bmatrix} a_j & 0 & 0 \\ 0 & b_j & c_j \end{bmatrix}$$

式中 $a_i = -a_j = -\frac{1}{l}$

$$b_i = -b_j = \frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x \quad (6-7)$$

$$c_i = \frac{4}{l} - \frac{6}{l^2}x$$

$$c_j = \frac{2}{l} - \frac{6}{l^2}x$$

利用虚位移原理导出梁单元的单元刚度方程

设单元内各点的虚位移 f' 具有与 (6—3) 式相同的位移模式, 因而有

$$\mathbf{f}' = \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}'' \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{\delta}''$ 为结点虚位移。于是按式 (6—4), 单元内的虚位移 $\boldsymbol{\epsilon}'$ 是

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}'' \quad (m)$$

由结构力学知, 梁单元内各微段内力在虚应变上作的虚功是

$$\delta U' = \int \boldsymbol{\epsilon}'^T \boldsymbol{\sigma} dx$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}' \quad (6-8)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & Ef \end{bmatrix}$$

式中 N 、 M 是杆中轴向力和弯矩, A 、 I 是杆的截面积与截面形心主惯矩, E 是材料的弹性模量。这样 $\delta U'$ 又可写成

$$\delta U' = (\boldsymbol{\delta}'')^T \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \boldsymbol{\delta}'$$

若将单元结点力记为

$$\mathbf{F}' = [N_i \quad Q_i \quad M_i \quad N_j \quad Q_j \quad M_j]^T \quad (6-9)$$

并且考虑梁单元上沿轴线作用着分布荷载 q , 于是单元外力在虚位移上所作的虚功是

$$\delta W' = \int f'^T q dx + (\delta'')^T F' = (\delta'')^T (\int N^T q dx + F')$$

由虚位移原理 $\delta U' = \delta W'$ ，再考虑结点虚位移 δ'' 是任意的，故可得到

$$\int N^T q dx + F' = \int B^T DB dx \delta' \quad (6-10)$$

令

$$R' = \int N^T q dx + F' = Q' + F' \quad (6-11)$$

式中 $Q' = \int N^T q dx$ 是由于分布荷载移置的等效结点力，其具体的积分运算将在下面讨论。

再令

$$k = \int B^T DB dx \quad (6-12)$$

于是式 (6-10) 可以写成

$$R' = k \delta' \quad (6-13)$$

式中 k 就是平面杆件系统中梁单元的刚度矩阵。式 (6-13) 就是考虑分布荷载的单元结点力和结点位移之间的关系式，也称单元刚度方程。

6.2.4 局部坐标系中梁单元的单元刚度矩阵的计算

由式 (6-12)、(6-5) 可得

$$k = \int_1 B^T DB dx = \int_1 \begin{bmatrix} B_i^T \\ B_j^T \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} B_i & B_j \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \quad (6-14)$$

其中任一分块子矩阵的计算公式是

$$\begin{aligned} k_{rs} &= \int_1 B_r^T DB_r dx \\ &= \int_1 \begin{bmatrix} a_r & 0 \\ 0 & b_r \\ 0 & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_s & 0 & 0 \\ 0 & b_s & c_s \end{bmatrix} dx \\ &= \int_1 \begin{bmatrix} EA a_r a_s & 0 & 0 \\ 0 & EI b_r b_s & EI b_r c_s \\ 0 & EI c_r b_s & EI c_r c_s \end{bmatrix} dx \quad (r, s = i, j) \end{aligned}$$

将式 (6-7) 代入上式积分，得到单元刚度矩阵为

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

6.2.5 等效结点力计算

前面曾指出，式 (6-11) 中的列阵 R' 是由单元结点力 F' 和等效结点力 Q' 组合

而成的。这里的等效结点力，是指原分布荷载按虚功等效的原则移置到单元结点上的力。它的计算公式是：

$$Q' = \int N^T q dx \quad (6-17)$$

式中 N 是位移的形函数矩阵， q 是分布荷载列阵。现设在每个结点上与结点位移 u_i 、 v_i 、 θ_i 对应的等效结点力为 \bar{N}_i 、 \bar{Q}_i 、 \bar{M}_i ，并记

$$Q^T = \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{Q}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{N}_j \\ \bar{Q}_j \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_i^e \\ Q_j^e \end{Bmatrix}$$

则式 (6-17) 可写成

$$\begin{Bmatrix} Q_i^e \\ Q_j^e \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} N_i^T \\ N_j^T \end{Bmatrix} q dx \quad (6-18)$$

下面我们计算几种常见的等效结点力

1. 均布荷载，见图 6-3。

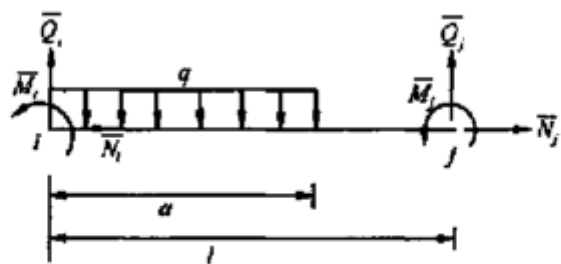


图 6-3

现有

$$q = \begin{Bmatrix} q \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \end{Bmatrix}$$

由 (6-18) 式

$$Q_i^e = \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{Q}_i \\ \bar{M}_i \end{Bmatrix} = \int_0^a \begin{Bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \end{Bmatrix} dx$$

形函数 N_1 、 N_2 、 N_3 用式 (6-2) 代入，计算可得

$$\bar{N}_i = 0$$

$$\bar{Q}_i = -\int_0^a N_2 q dx = -\int_0^a \left(1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3\right) q dx = -\frac{qa}{2l^3} (2l^3 - 2la^2 + a^3)$$

$$\bar{M}_i = -\int_0^a N_3 q dx = -\int_0^a \left(x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right) q dx = \frac{qa^2}{12l^2} (-6l^2 + 8la - 3a^2)$$

同理可计算 j 结点上等效结点力分量，合在一起，均布荷载 q 的单元等效结点力

列阵为

$$Q_q^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qa^2}{12l^2}(2l^3 - 2la^2 + a^3) \\ \frac{qa^2}{12l^2}(-6l^2 + 8la - 3a^2) \\ 0 \\ -\frac{qa^3}{2l^3}(2l - a) \\ \frac{qa^3}{12l^2}(4l - 3a) \end{Bmatrix} \quad (6-19)$$

当满跨作用均布荷载时 ($a=l$), 上列结果变为

$$Q_q^e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}ql & -\frac{1}{12}ql^2 & 0 & -\frac{1}{2}ql & \frac{1}{12}ql^2 \end{bmatrix}^T \quad (6-20)$$

2. 集中力。见图 6—4。

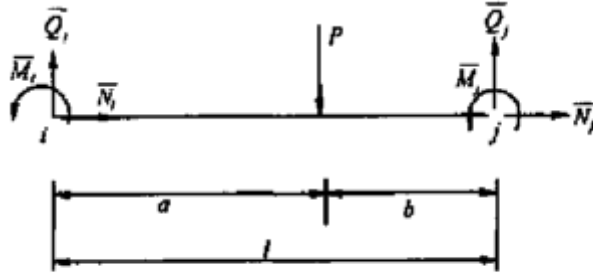


图 6-4

集中力可当成作用在微段上的均布力, 取极限可得单元等效结点力为

$$Q_p^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{pb^2}{l^3}(1+2a) & -\frac{pab^2}{l^2} & 0 & -\frac{pa^2}{l^3}(1+2b) & \frac{pa^2b}{l^2} \end{bmatrix}^T \quad (6-21)$$

3. 集中力偶矩。见图 6—5。

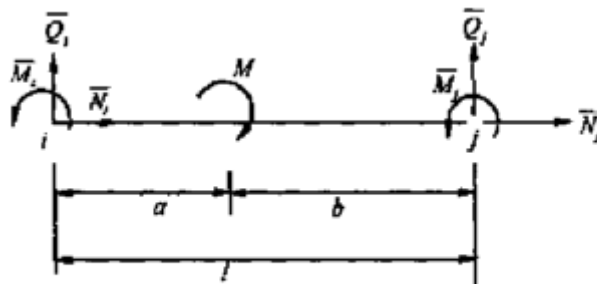


图 6-5

用相似方法可得到集中力偶矩的单元等效结点力为

$$Q_m^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{6ab}{l^3}M & \frac{b(3a-l)}{l^2}M & 0 & -\frac{6ab}{l^3}M & \frac{a(3b-l)}{l^2}M \end{bmatrix}^T \quad (6-22)$$

6.3 坐标变换 体坐标系中单元 刚度矩阵与等效结点力

上节推导单元刚度矩阵时采用的是所谓局部坐标系，它的坐标轴方向是由单元（轴线）方向确定的。采用局部坐标系，可以对不同方向的单元得出具有统一形式的单元刚度矩阵。但是，实际上各个杆件的方向往往是不相同的，由不同方向的单元所组成的结构，它的整体刚度矩阵并不是把局部坐标系的单元刚度矩阵简单地叠加，这里必须建立一个统一的整体坐标系。计算时先将单元上的结点力和位移转换到整体坐标系，单元刚度矩阵亦作坐标变换，才可按叠加规则直接相加组成整体刚度矩阵。

6.3.1 坐标变换方法

设 R^e 、 δ^e 、 k' 分别表示单元在局部坐标系 $ax'y'z'$ 中的结点力（包括等效结点力）、结点位移和刚度矩阵； R' 、 δ' 、 k 表示在整体坐标系 $oxyz$ 中的结点力、结点位移和刚度矩阵。于是有

$$R'^e = k' \delta'^e \quad (a)$$

$$R^e = k \delta^e \quad (b)$$

如果用 T 表示结点力和结点位移在局部坐标系与整体坐标系之间的转换矩阵，则

$$R^e = T R'^e \quad (6-23)$$

$$\delta^e = T \delta'^e \quad (c)$$

将 (a) 式代入 (6—23) 式，得

$$R^e = T k' \delta'^e \quad (d)$$

将 (c) 式代入 (b) 式，

$$R^e = k T \delta'^e \quad (e)$$

于是有

$$T k' \delta'^e = k T \delta'^e$$

由于 δ'^e 的任意性，上式可写成

$$k T = T k' \quad (f)$$

上式两边各右乘 T^{-1} ，便可得到

$$k = T k' T^{-1} \quad (6-24)$$

由式 (6—23)、(6—24) 可以看出，若求得转换矩阵 T ，便可求得整体坐标系中单元的结点力 R' 和整体坐标系中的单元刚度矩阵 k 。

6.3.2 转换矩阵 T

以平面杆系为例，取整体坐标轴 $axyz$ ，将 x 、 y 轴置于杆系平面内， z 轴垂直于杆系平面。 x' 、 y' 、 z' 为单元 e 的局部坐标系， z 与 z' 轴重合， x 轴与 x' 轴间夹角为 α ， α 自 x 轴向 x' 轴沿逆时针方向转动为正，如图 6—6 所示。

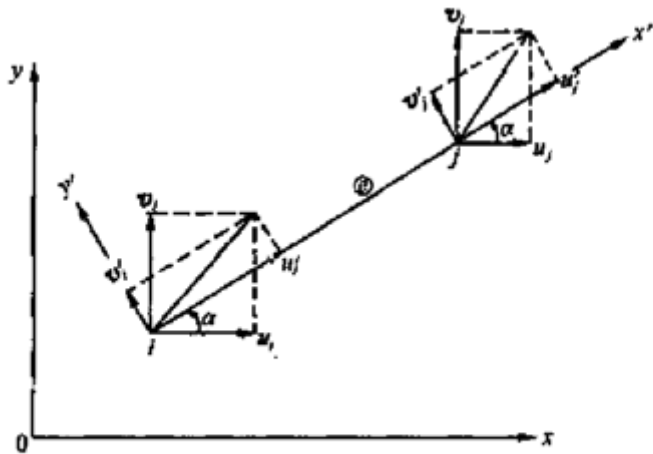


图 6-6

考虑单元结点 i 处，对于局部坐标系的三个结点位移 u'_i 、 v'_i 和 θ'_i ，它们与整体坐标系中相应的结点位移 u_i 、 v_i 和 θ_i 之间存在着几何关系

$$\begin{cases} u_i = u'_i \cos \alpha - v'_i \sin \alpha \\ v_i = u'_i \sin \alpha + v'_i \cos \alpha \\ \theta_i = \theta'_i \end{cases} \quad (g)$$

写成矩阵形式，得

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \theta'_i \end{Bmatrix}$$

或写成

$$\delta_i = t \delta'_i$$

式中

$$t = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

对于结点 j ，同样可得类似 (g) 式的关系。整个单元具有六个结点位移，它们在局部坐标系与整体坐标系之间存在的几何关系可以写成

$$\delta' = \begin{Bmatrix} \delta'_i \\ \delta'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_i \\ \delta'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \delta'^e \quad (h)$$

同 (c) 式比较，可以得到局部坐标系向整体坐标系的转换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-26)$$

容易证明 $T^T = I$ ，因此转换矩阵 T 具有一个特征： T 的逆阵等于它的转置矩阵

$$T^{-1} = T^T$$

所以，计算整体坐标系中的单元刚度矩阵可以应用下式

$$k = Tk^T T^T \quad (6-27)$$

由公式(6—25)可以看出，转换矩阵 T 中的子矩阵 t 中的元素分别是局部坐标系轴 x' 、 y' 、 z' 对于整体坐标轴 xyz 的方向余弦：如式中第一列表示坐标轴 x' 对于 x 、 y 和 z 轴的方向余弦，依次类推。

6.4 结构整体刚度矩阵与节点载荷列阵 算例

利用式(6—27)、(6—23)，通过转换矩阵算出了整体坐标系中的单元刚度矩阵 k 、结点力列阵 R' 以后，就可以按照第二章 2.4 节所述，将 k 、 R' 分别扩大（称单元贡献矩阵），再按叠加规则直接相加组成整体刚度矩阵 K 和结点载荷列阵 R ，最后得到整个结构的平衡方程式（也称结构刚度矩阵）

$$K\delta = R \quad (6-28)$$

如果结点载荷和边界约束为已知，则由上式求解联立方程组得出结点位移值。结点位移求得后，再通过(6—13)式和(6—11)式可以求出各单元的结点力 F' 。这样，杆件系统的内力分析就算完成了。

下面用算例说明整个计算过程

图 6—7 所示平面刚架，已知 $l=5m$, $E=3 \times 10^3 kN/m^2$, 各杆截面相同，如图所示。解：结点编号、单元编号如图 6—7 (b)，图中箭头表示单元局部坐标系中 x' 的方向。求局部坐标系中的单元刚度矩阵

先计算常数

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.25 \times (0.5)^3}{12} = 0.002604 m^4$$

$$A = bh = 0.25 \times 0.5 = 0.125 m^2$$

由此得

$$\frac{EA}{l} = 75 \times 10^4 kN/m, \quad \frac{4EI}{l} = 6.25 \times 10^4 kN \cdot m$$

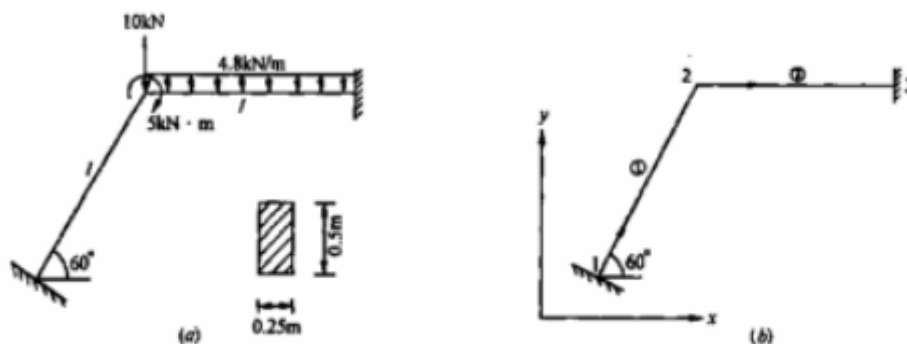


图 6-7

$$\frac{6EI}{l^2} = 1.875 \times 10^4 kN, \quad \frac{12EI}{l^3} = 0.75 \times 10^4 kN/m$$

两个单元的局部坐标系单元刚度矩阵相同，将有关数据代入式(6—16)得

$$k^{①}=k'^{②}=\begin{bmatrix} 75 & 0 & 0 & -75 & 0 & 0 \\ 0 & -0.75 & 1.875 & 0 & -0.75 & 1.875 \\ 0 & 1.875 & 6.25 & 0 & -1.875 & 3.125 \\ -75 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & -0.75 & -1.875 & 0 & 0.75 & -1.875 \\ 0 & 1.875 & 3.125 & 0 & -1.875 & 6.25 \end{bmatrix} \times 10^4$$

求整体坐标系中的单元刚度矩阵

单元① $\alpha = 60^\circ$ 按式 (6—26) 计算的转换矩阵

$$T^{①}=\begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按式 (6—27) 作矩阵乘法, 即得到整体坐标系中单元①的单元刚度矩阵。

$k^{①}=T^{①} k'^{①} T^{①T}$

$$=\begin{bmatrix} 19.312 & 32.151 & -1.624 & -19.312 & -32.151 & -1.624 \\ 32.151 & 56.437 & 0.937 & -32.151 & -56.437 & 0.937 \\ -1.624 & 0.937 & 6.25 & 1.624 & -0.937 & 3.125 \\ -19.312 & -32.151 & -1.624 & 19.312 & 32.151 & 1.624 \\ -32.151 & 56.437 & -0.937 & 32.151 & 56.437 & -0.937 \\ -1.624 & 0.937 & 3.125 & 1.624 & -0.937 & 6.25 \end{bmatrix} \times 10^4$$

单元② $\alpha = 0$, $T^{②}=I$ 局部坐标系与整体坐标系相同。因此
 $k^{②}=I k'^{②} I^T=k'^{②}$

形成总体刚度矩阵

整个结构有三个结点, 总体刚度矩阵应是 9×9 方阵, 仍写成分块形式为

$$K=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

将各单元在整体坐标系中的单元刚度矩阵, 按单元中 i, j 所对应的结点号码“对号”, 再将 k' 扩大成单元贡献矩阵 K' 加以叠加, 即得到总刚度矩阵。

单元①中 $i \rightarrow 1, j \rightarrow 2$, 即有

$$k^{①}=\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

单元②中 $i \rightarrow 2, j \rightarrow 3$, 即有

$$k^{②}=\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

叠加以后, 总刚度矩阵为

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{22}^{(2)} & \mathbf{K}_{23}^{(2)} \\ 0 & \mathbf{K}_{32}^{(2)} & \mathbf{K}_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 19.312 & 32.151 & -1.624 & -19.312 & -32.151 & -1.624 & 0 & 0 & 0 \\ 32.151 & 56.437 & 0.937 & -32.151 & -56.437 & 0.937 & 0 & 0 & 0 \\ -1.624 & 0.937 & 6.25 & 1.624 & -0.937 & 3.125 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -19.312 & -32.151 & 1.624 & 19.312+75 & 32.151+0 & 1.624+0 & -75 & 0 & 0 \\ -32.151 & -56.437 & -0.937 & 32.151+0 & 56.437+0.75 & -0.937+1.875 & 0 & -0.75 & 1.875 \\ -1.624 & 0.937 & 3.125 & 1.624+0 & -0.937+1.875 & 6.25+6.25 & 0 & -1.875 & 3.125 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -75 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.75 & -1.875 & 0 & 0.75 & -1.875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.875 & 3.125 & 0 & -1.875 & 6.25 \end{bmatrix} \\
&\times 10^4 \\
= & \begin{bmatrix} 19.312 & 32.151 & -1.624 & -19.312 & -32.151 & -1.624 & 0 & 0 & 0 \\ 32.151 & 56.437 & 0.937 & -32.151 & -56.437 & 0.937 & 0 & 0 & 0 \\ -1.624 & 0.937 & 6.25 & 1.624 & -0.937 & 3.125 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -19.312 & -32.151 & 1.624 & 94.312 & 32.151 & 1.624 & -75 & 0 & 0 \\ -32.151 & -56.437 & -0.937 & 32.151 & 57.187 & 0.937 & 0 & -0.75 & 1.875 \\ -1.624 & 0.937 & 3.125 & 1.624 & 0.937 & 12.5 & 0 & 1.875 & 3.125 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -75 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.75 & -1.875 & 0 & 0.75 & -1.875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.875 & 3.125 & 0 & -1.875 & 6.25 \end{bmatrix} \\
&\times 10^4
\end{aligned}$$

形成结点载荷列阵

我们只需求出非结点载荷的等效结点载荷，至于直接作用在结点上的载荷，如结点 2 上作用的集中力和力偶，只需按结点号码加到结构整体结点载荷列阵中就可以了。

单元①中无分布载荷作用。单元②中作用有满跨均布荷载，由式（6—20）

$$\mathbf{Q}_q^{(1)} = [0 \quad -12 \quad -10 \quad 0 \quad -12 \quad 10]^T$$

经坐标变换（本例 $T=I$ ），再考虑到单元②中 i, j 所对应的结点号码是： $i \rightarrow 2, j \rightarrow 3$ 。“对号入座”后与直接作用在结点上的载荷叠加，可得整体结点载荷列阵为

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -12 \quad -10 \quad 0 \quad -12 \quad 10]^T \\
&\quad + [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -10 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\
&= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -22 \quad -15 \quad 0 \quad -12 \quad 10]^T
\end{aligned}$$

有了总体刚度矩阵 \mathbf{K} 和结构载荷列阵 \mathbf{R} 后，引入位移约束条件进行处理后就借得方程解出待求结点位移了。

6.5 释放自由度

在刚架中会遇到有一些杆通过铰结点与其他杆相联结，如图 6-8 中的刚架，有 4 根杆汇交于节点 4，其中②杆与结点铰接，其他杆则为刚接，这种结点在结构力学中

常称为组合结点。

组合结点有如下特点：

(1) 结点上各杆具有相同的线位移，但角位移不相等。例如图 6-8 中刚架受载后，在结点 4，③、④、⑤杆将有相同的角位移，而②杆则有与其他杆不同的角位移。

(2) 结点上具有铰接的杆端不承受弯矩，因此在结点上只是刚接的各杆杆端弯矩参与结点的力矩平衡。如图 6-8 所示的刚架中②杆在铰接端的杆端弯矩为零，只有③、④、⑥杆在结点上与外弯矩保持平衡。

这是对于单元②我们不能采用一般梁单元的单元刚度矩阵 (6-16) 式和单元等效结点力列阵 (6-18) 式，而要进行有关的结点自由度的“释放”。例如对于铰接端就要“释放”转角自由度。

我们把单元刚度方程式 (6-13) 写成

$$k\delta' = R = Q + F$$

即

$$k\delta' - Q = F$$

再将结点位移列阵 δ' 按照释放自由度与不释放自由度进行分块， k 、 Q 、 F 也作相应得分块，上式可写成

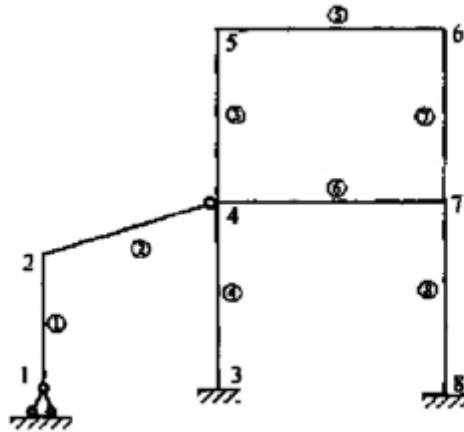


图 6-8

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_{uR} \\ k_{Ro} & k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_o \\ \delta_R \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_0 \\ Q_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_R \end{Bmatrix}$$

式中 δ'_R 是单元中需释放的结点自由度（结点位移）， δ'_0 是单元中保留的节点自由度， F'_R 和 F'_0 、 Q'_R 和 Q'_0 则分别是与上述分块对应的单元结点力和等效结点力。对于应该释放的位移约束，它对应的结点力为零。例如对铰接点，转角位移是需释放的位移约束，则相应的杆端弯矩为零，对于 (6-29) 式则有 $F'_R = 0$ ，因此需释放的自由度 δ'_R 是不独立的，应由方程中消去。我们把应消去的不独立的结点自由度 δ'_R 称为“释放自由度”。

将式 (6-29) 展开

$$\begin{cases} k_0 \delta'_0 + k_{oR} \delta'_R - Q'_o = F_o \\ k_{Ro} \delta'_o + k_R \delta'_R - Q'_R = F'_R = 0 \end{cases}$$

由 (6-30) 的第二式得,

$$\delta'_R = k_R^{-1} (Q'_R - k_{Ro} \delta'_o)$$

将上式代入 (6-30) 的第一式可以得到

$$k^n \delta'_o - Q'^e = F'^e$$

其中

$$\begin{aligned} k^n &= k_0 - k_{oR} k_R^{-1} k_{Ro} \\ Q'^e &= Q'_o - k_{oR} k_R^{-1} Q'_R \\ F'^e &= F'_o \end{aligned}$$

k^n 、 Q'^e 是经自由度释放后单元的刚度矩阵和等效结点力列阵。

下面分两种情况来讨论

1. 单元一端是铰接点

设 j 结点为铰接点, 应释放的自由度是 θ_j , 相应的结点力 $M_j = 0$

单元刚度矩阵的分块如下

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\mathbf{EA}}{l} & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{EA}}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\mathbf{E}I}{l^3} & \frac{6\mathbf{E}I}{l^2} & 0 & \frac{12\mathbf{E}I}{l^3} & \frac{6\mathbf{E}I}{l^2} \\ 0 & \frac{6\mathbf{E}I}{l^2} & \frac{4\mathbf{E}I}{l} & 0 & -\frac{6\mathbf{E}I}{l^2} & \frac{2\mathbf{E}I}{l} \\ -\frac{\mathbf{E}I}{l} & 0 & 0 & \frac{\mathbf{E}I}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\mathbf{E}I}{l^3} & -\frac{6\mathbf{E}I}{l^2} & 0 & \frac{12\mathbf{E}I}{l^3} & -\frac{6\mathbf{E}I}{l^2} \\ 0 & \frac{6\mathbf{E}I}{l^2} & \frac{2\mathbf{E}I}{l} & 0 & -\frac{6\mathbf{E}I}{l^2} & \frac{4\mathbf{E}I}{l} \end{array} \right]$$

现有 $k_R = \frac{4EI}{l}$, 所以 $k_R^{-1} = \frac{l}{4EI}$

$$\mathbf{k}'' = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{oR} \mathbf{k}_R^{-1} \mathbf{k}_{Ro} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

原来梁单元的自由度是 6。单元刚度矩阵 \mathbf{k} 是 6×6 方阵，释放掉 1 个自由度后单元自由度为 5 个，保留的结点位移 $\delta_o' = \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j\}^T$ ，单元刚度矩阵 \mathbf{k}'' 成为 5×5 方阵。为了便于统一程序，修正后的刚度矩阵仍可保留原来的阶数，即在有关刚度矩阵的行列上加上零元素。故 j 结点为铰接时，释放自由度后的单元刚度矩阵可写成

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 单元两端都是铰结点

这时单元需要释放 2 个自由度 θ_i 和 θ_j ，原梁单元刚度矩阵的分块为

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_o & \mathbf{k}_{oR} \\ \mathbf{k}_{Ro} & \mathbf{k}_R \end{bmatrix}$$

$$k_R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{6EI} \end{bmatrix}$$

求得释放自由度后的单元刚度矩阵为

$$k^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这就是平面桁架单元的单元刚度矩阵。平面桁架单元有 2 个结点，每个结点有 2 个线位移

$$\delta' = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]^T$$

当两端铰接的行架单元作为一种特殊的刚架单元时，(6-34) 式的单元刚度矩阵仍扩大为 6×6 方阵

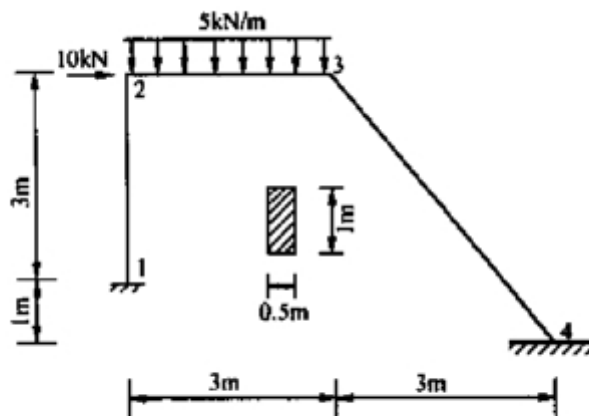
$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

等效结点力列阵也同样根据上述方法进行修正。

另外特别指出,对于刚架的铰支座、链杆支座,如图 6-8 种的铰支座 1,与之相连的单元不必释放自由度,只需引入唯一边界条件既可。

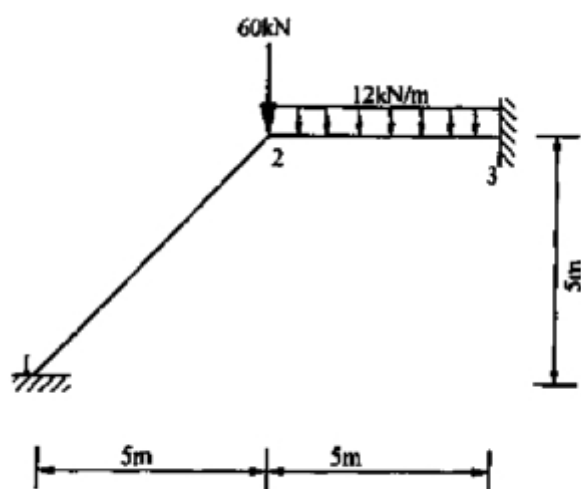
习 题

6-1 平面刚架如图所示，已知 $E=3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, 各杆均为矩形截面 $1\text{m} \times 5\text{m}$ ，求总刚度矩阵记载荷列阵。



题 6-1 图

6-2 左图是结构的内力图。各杆件的弯曲刚度和拉、压刚度分别为 EI 和 EA , 且 $EA = 2 \frac{EI}{m^2}$



题 6-2 图

第7章 动力学问题的有限单元法简述

实际结构经常受到随时间变化的载荷作用。当这种动载荷与静载荷相比不占重要地位时，它的影响往往可以忽略不计，而只需作静态的结构分析。但是有些结构则不然，它受到显著的动载荷作用，如房屋受地震的作用，船舶受到海浪的冲击，车辆驶过桥梁的振动等等都必须进行动力分析。有的结构虽然受到的动载荷并不显著，按其大小似乎也可忽略不计，但由于作用力的频率与结构的某一固有频率相接近，结构也会引起显著的影响，在其内部产生很大的动应力，以致位结构破坏或者产生不允许的变形，因此必须进行动力学分析。复杂结构的动力分析要求解析解是很困难的，现在应用有限单元法已可以比较有效地进行各种复杂结构的动力计算。本章将简单介绍动力问题有限单元法的基本概念。

7.1. 动力学方程 质量矩阵及阻尼矩阵

对于动态结构，外力和位移都是时间 t 的函数。根据达朗贝尔原理，只要引入相应的惯性力，就可以将弹性体的动力问题转化为讨论相应的静力问题，即化为弹性体的平衡问题来处理。下面我们就按照此思想来推导在动载荷作用下弹性体的动力学方程式。

和以前处理弹性体的平衡问题一样，先将弹性体分割成有限个单元。因位移与时间有关，以 $\delta(t)^e$ 表示单元结点位移列阵。利用设定的位移插值方式，单元内任意一点的位移 $F(t)$ 仍可用如下形式的位移模式表示

$$f(t) = N\delta(t)^e \quad (a)$$

其中 N 是形函数矩阵，与弹性平衡问题时相同
在三维问题中

$$f(t) = \begin{Bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{Bmatrix} \quad (b)$$

其中 $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ 分别表示沿 x 、 y 和 Z 方向的位移，它们是 t 和 x, y, z 的函数，而矩阵 N 的元素只是 x 、 y 和 z 的函数，与 t 无关。

由于 N 的元素与 t 无关，同样可得单元内的应变，应力分别为 $\varepsilon\tau = B\delta(t)^e$ (c)

$$\sigma(t) = D\varepsilon(t) = DB\delta(t)^e \quad (d)$$

其中 B 为应变矩阵， D 为弹性矩阵，与弹性平衡问题时相同，其元素与 t 无关
因此，单元刚度矩阵

$$k = \iiint B^T DB dV \quad (e)$$

也与弹性平面问题时相同。

至于单元上的结点力列阵，此时应由下面几部分组成。一部分是作用在单元上的、随时间变化的外载荷（体积力、表面力或集中力）。它按通常的办法来形成，但由于此时载荷是时间 t 的函数，由此形成的单元等效结点力列阵也与 t 有关，记为

$P(t)^e$.另一部分是由单元上的惯性力（它是体积力）所构成。记

$$\ddot{f}(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{u}(t) \\ \ddot{v}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{Bmatrix} \quad (f)$$

这儿 $\ddot{f}(t)$ 表示加速度列阵广，“..”表示对时间 t 的两阶导数。设 ρ 为物体的密度，则单位体积的惯性力即惯性力密度为 $-\rho \ddot{f}(t)$ ，由此得惯性力所产生的单元等效结点力为

$$P(t)_{\text{惯}}^T = -\iiint \rho N^T \ddot{f}(t) dV \quad (g)$$

注意到 (a) 式，上式又可写成

$$P(t)_{\text{惯}}^T = -\iiint \rho N^T N dV \ddot{\delta}(t)^T \quad (h)$$

$$\text{记} \quad m = \iiint \rho N^T N dV \quad (7-1)$$

它称为单元质量矩阵。于是 (h) 式又可写成

$$P(t)_{\text{惯}}^T = -m \ddot{\delta}(t)^T \quad (i)$$

如果当弹性体振动时还受有正比于速度的 $\dot{f}(t)$ 阻尼力（它也是体积力），则还应考虑阻尼力对结点力的贡献。设阻尼系数为 ν 。则单位体积上所受的阻尼力即阻尼力密度是 $-\nu \dot{f}(t)$ 。由此可得阻尼力所产生的单元等效结点力为

$$P(t)_{\text{阻}}^T = -\iiint \nu N^T \dot{f}(t) dV = -\iiint \nu N^T N dV \dot{\delta}(t)^T \quad (j)$$

记 (7-2)，它称为单元阻尼矩阵。这样 (j) 式又可写成

$$P(t)_{\text{阻}}^T = -c \dot{\delta}(t)^T \quad (k)$$

记 $\delta(t)$ 为整个弹性体上的结点位移列阵，并将单元刚度矩阵 k 按相应的“贡献”叠加，得到总刚度矩阵 K 。相似地，将单元质量矩阵 m 及单元阻尼矩阵 c 按相应的“贡献”叠加而得总质量矩阵 M 及总阻尼矩阵 c ，即

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \sum_{e=1}^{n_e} k \\ m = \sum_{e=1}^{n_m} m \\ c = \sum_{e=1}^{n_c} c \end{array} \right\} \quad (l)$$

再令 $P(t)$ 为单元结点力列阵 $P(t)^e$ 按相应的“贡献”叠加而得的载荷列阵。即

$$P(t) = \sum_{e=1}^{n_d} P(t)^e \quad (m)$$

则总载荷列阵为

$$P(t) - M \ddot{\delta}(t) - c \dot{\delta}(t)$$

于是由达朗贝尔原理，就有 $k\delta(t) = p(t) - M\ddot{\delta}(t) - c\dot{\delta}(t)$

$$\text{即} \quad M\ddot{\delta}(t) + c\dot{\delta}(t) + k\delta(t) = p(t) \quad (7-3)$$

这就是有限单元法中弹性体的动力学方程式，即用有限单元法求解弹性体动力问题的基本方程。它是关于结点位移 $\delta(t)$ 的二阶常系数的微分方程组。

在单元质量矩阵 (7-1) 的推导中，采用了与推导单元刚度矩阵时相一致的形函数，故式 (7-1) 称为“一致质量矩阵”。但为了简单起见，也可采用“团聚质量矩阵”（亦称集中质量矩阵）。所谓团聚质量矩阵，是接静力学平行力分解原理，将单元的分布质量用团聚于单元结点处的质量代替所得到的质量矩阵。

现将密度为 ρ 的均质等厚平面三角形常应变单元的一致质量矩阵和团聚质量矩阵分别计算如下，以资比较。

设三角形单元的面积为 A ，厚度为 t 。按照公式 (2-7)，三角形单元的形函数矩阵为

$$N = [N_i \quad N_j \quad N_m]$$

式中 I 为二阶单位阵。将上式代入 (7-1)，得到

$$m = \iiint N^T \rho N dV = \rho t \iint \begin{bmatrix} IN_i N_i & IN_i N_j & IN_i N_m \\ IN_j N_i & IN_j N_j & IN_j N_m \\ IN_m N_i & IN_m N_j & IN_m N_m \end{bmatrix} dx dy$$

$$\text{利用积分公式} \quad \iint N_r N_s dx dy = \frac{A}{12} (1 + \delta_{rs})$$

$$\text{式中} \quad \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{当 } r=s \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } r \neq s \text{ 时} \end{cases}$$

最后便得到一致质量矩阵为

$$m = \frac{\rho A t}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

根据团聚质量矩阵的定义，上述均质等厚平面三角形单元的团聚质量矩阵为

$$m = \frac{\rho A t}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

也就是每个结点团聚有三角形单元的三分之一质量。

团聚质量矩阵是一个对角矩阵，非零元素只在对角线上，其计算比较简卑，所需的存贮量也少。使用团聚质量矩阵，有使结构固有频率的计算值降低的趋势。但是，在协调单元中出现较高的刚度，会使计算值偏高。这两种相反的影响因素相抵的结果，有时会得到较好的固有频率的计算值。

用相同的方法可求得单元的阻尼矩阵将 \mathbf{m} 和 \mathbf{c} 的积分式对比，可见它们在形式上完全相似。当单元的 ρ, v 均布时，两者只相差一个常系数。但须注意，这里考虑的是最简单的粘滞阻尼的情况，即假设阻尼力与速度成正比。实验指出，这个假设并不能很好地符合实际情况。不过由于这个假设在数学处理上很方便，所以仍被广泛采用。

7.2 特征值问题

计算结构的固有频率和振型，是动力学分析的基本内容。计算经验指出，很多工程结构的阻尼对结构的频率和振型的影响很少，所以在求固有频率和振型时，可不考虑阻尼的影响。在 (7-3) 式中令阻尼项和外力项均为零，便得到无阻尼自由振动方程。

$$M\ddot{\delta} + k\delta = 0 \quad (7-4)$$

为简单起见，以后 $\delta(t)$ 就都写成 δ 了。

弹性体自由振动的振型总可以分解为一系列简谐振动的叠加，为决定自由振动的固有频率及相应的振型，考虑如下简谐振动形式的解

$$\delta = \delta_0 \sin \omega t \quad (a)$$

其中 δ_0 是结点振幅列阵，即振型， ω 为与该振型对应的频率。

将 (a) 代入方程 (7-4)，并消去 $\sin \omega t$ 因子，就得到

$$(K - \omega^2 M)\delta_0 = 0 \quad (7-5)$$

于是，要分析各点作形如 (a) 的简谐振动问题，就转化为求解满足 (7-5) 式的数值 ω^2 和非零矢量 δ_0 ，这样的问题称为广义特征值问题；其中 ω^2 和 δ_0 分别称为广义特征值和广义特征矢量。显然，如此求得的 ω 就是结构的固有频率，而 δ_0 就给出了相应的振型。

另外，由线性代数可知，求标量 λ 和非零矢量 δ ，使得满足方程组

$$(A - \lambda I)\delta = 0 \quad (7-6)$$

的问题，称为标准特征值问题。式中 I 为单位阵。方程组 (7-6) 的解 $\lambda = \lambda_i$ 和 $\delta = \phi_i$ 称为矩阵 A 的特征值和特征矢量。关于对称正定矩阵的标准特征值问题，已有许多算法和程序。对于其特征值的性质也有充分的研究。

广义特征值问题可以很方便地化为标准特征值问题。至于具体计算方法，本书不作进一步讨论。大家可参阅有关书籍。

7.3 动力响应 逐步积分法

7.3.1 动力响应问题

按照有限单元法的步骤，经过边界条件的约束处理以后，我们得到弹性体的动力学方程式：

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\delta = P \quad (7-3)$$

式中 M 是质量矩阵， c 是阻尼矩阵， K 是刚度矩阵， δ 是结点位移矢量，它是时间 t 的函数，速度矢量 $\dot{\delta}$ 和加速度矢量 $\ddot{\delta}$ 分别是位移矢量对时间 t 的一阶和二阶导数。载荷矢量 P 为时间 t 的已知函数。设方程 (7-3) 的初始条件即在开始时刻 $t=0$ 时结构的位移矢量和速度矢量为已知：

$$\delta = \delta_0 \quad \dot{\delta} = \dot{\delta}_0 \quad (a)$$

按照初始条件 (a) 式求解方程 (7-3)，得到各时刻 t 的位移矢量及速度和加速度矢量，这就是求解动力响应问题。

求解动力响应问题，常用两种方法。一是振型叠加法，它用系统的无阻尼自由振动的振型矩阵作为变换矩阵，从而使方程 (7-3) 变换成一组非耦合的微分方程，逐个的求解这些方程，并将这些结果叠加而得到方程 (7-3) 的解。二是逐步积分法：它直接用方程 (7-3) 逐步算出每经过时间 Δt 的一系列时刻的加速度、速度和位移。

7.3.2 逐步积分法

用振型叠加法求解结构的动力响应时，须先求出结构的固有频率和振型，程序的编制比较繁难。逐步积分法的基本思想是：将本来要在任何时刻 t 都应满足动力学方程 (7-3) 的位移矢量 $\delta(t)$ ，代之以只要在时间离散点上满足动力学方程，而在一个时间间隔内，对位移、速度和加速度的关系则采取某种假设。由于所取的假说不同，则有不同的逐步积分法。这里主要介绍常用的纽马克法和威尔逊- θ 法。

1. 纽马克法

如果需要计算 $0 \sim t_0$ 这段时间里的响应，可以将 t_0 分为 n 个等分，即取时间步长 $\Delta t = \frac{t_0}{n}$ ，根据动力学方程，在时刻 $t + \Delta t$ 有

$$M\ddot{\delta}_{t+\Delta t} + C\dot{\delta}_{t+\Delta t} + K\delta_{t+\Delta t} = P_{t+\Delta t} \quad (7-7)$$

此外，利用拉格朗日中值定理，在 $t + \Delta t$ 时刻的速度矢量可以表示为

$$\dot{\delta}_{t+\Delta t} = \dot{\delta}_t + \dot{\delta}^{\%} \Delta t \quad (b)$$

式中 $\dot{\delta}^{\%}$ 是 $\dot{\delta}$ 在 $[t, t + \Delta t]$ 中某点之值。在纽马克法中，近似假设为

$$\dot{\delta}^{\%} = (1 - \nu)\dot{\delta}_t + \nu\dot{\delta}_{t+\Delta t} \quad (0 \leq \nu \leq 1) \quad (c)$$

于是 (b) 式，即为

$$\dot{\delta}_{t+\Delta t} = \dot{\delta}_t(1 - \nu) + \nu\dot{\delta}_{t+\Delta t} \quad (7-8)$$

同样，由位移的泰勒展开式

$$\delta_{t+\Delta t} = \delta_t + \dot{\delta}_t \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\delta}_t \Delta t^2 \quad (d)$$

当采取类似于 (c) 式 $\ddot{\delta}$ 假设后, 便有

$$\delta_{t+\Delta t} = \delta_t + \dot{\delta}_t \Delta t + (1-2\beta) \ddot{\delta}_t \frac{\Delta t^2}{2} + 2\beta \ddot{\delta}_{t+\Delta t} \frac{\Delta t^2}{2} \quad (0 \leq 2\beta \leq 1) \quad (7-9)$$

上面 (7-7)、(7-8)、(7-9) 三式就是纽马克法的基本公式。

由 (7-9) 式可解出

$$\ddot{\delta}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\delta_{t+\Delta t} - \delta_t) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\delta}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\delta}_t \quad (7-9')$$

将何 (7-9') 和 (7-8) 代入 (7-7) 式, 经整理归并后可得

$$\ddot{\delta}_{t+\Delta t} = \ddot{P} \tau + \Delta t \quad (7-10)$$

其中

$$\begin{aligned} \ddot{P} &= K + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\nu}{\beta \Delta t} C \\ \ddot{P}_{t+\Delta t} &= P_{t+\Delta t} + M \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta_t + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\delta}_t + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\delta}_t \right) \\ &\quad + C \left(\frac{\nu}{\beta \Delta t} \delta_t + \left(\frac{\nu}{\beta} - 1 \right) \dot{\delta}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\nu}{\beta} - 2 \right) \ddot{\delta}_t \right) \end{aligned}$$

由上面讨论可以看出, 如果知道 t 时刻的状态矢量 δ , $\dot{\delta}$ 和 $\ddot{\delta}$ 。可以由 (7-9) 式解出 $\delta_{t+\Delta t}$, 从而用式 (7-9') 和 (7-8) 求出 $\ddot{\delta}_{t+\Delta t}$ 和 $\dot{\delta}_{t+\Delta t}$, 也就是说, 如知道 t 时刻的状态矢量 (位移、速度和加速度), 即可算出 $t+\Delta t$ 时刻的状态矢量。这样, 根据 $t=0$ 的初始条件 $\delta=\delta_0$ 和 $\dot{\delta}=\dot{\delta}_0$, 由动力学方程 (7-3) 求出 $\ddot{\delta}_0$ 。然后从 $t=0$ 的状态矢量出发, 用上述方法求得 $t=\Delta t$ 时刻的状态矢量 $\delta_{\Delta t}$, $\dot{\delta}_{\Delta t}$ 和 $\ddot{\delta}_{\Delta t}$, 由此可以一步一步求解出在 $i\Delta t$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$) 时刻的状态矢量 $\delta_{i\Delta t}$, $\dot{\delta}_{i\Delta t}$ 和 $\ddot{\delta}_{i\Delta t}$ 。

为了便于编制计算程序, 综合纽马克法计算步骤如下:

A、初始计算

(1) 形成刚度矩阵 K 、质量矩阵 M 和阻尼矩阵 C

(2) 获得初始值 δ_0 , $\dot{\delta}_0$, $\ddot{\delta}_0$ 。

(3) 选择步长 Δt 、参数 ν 和 β ; 并计算下列有关常数

$$\begin{aligned} \nu &\geq 0.50 & \beta &\geq 0.25(0.5 + \nu)^2 \\ a_0 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\nu}{\beta \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1 & a_4 &= \frac{\nu}{\beta} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\nu}{\beta} - 2 \right) \\ a_6 &= \Delta t(1 - \nu) & a_7 &= \nu \Delta t \end{aligned}$$

(4) 形成“刚度”矩阵 $\bar{K} = K + a_0 M + a_1 C$

(5) 分解矩阵 $\bar{K} = L D L^T$

B、对于每个时间步长进行下列计算

(1) 计算 $t+\Delta t$ 时刻的“载荷”矢量

$$\begin{aligned}\bar{P}_{t+\Delta t} = & P_{t+\Delta t} + M(a_0\delta_t + a_2\dot{\delta}_t + a_3\ddot{\delta}_t) \\ & + C(a_1\delta_t + a_4\dot{\delta}_t + a_5\ddot{\delta}_t)\end{aligned}$$

(2) 解矩阵方程求 $t+\Delta t$ 时刻的位移

$$LDE^T\delta_{t+\Delta t} = \bar{P}_{t+\Delta t}$$

(3) 计算 $t+\Delta t$ 时刻的加速度、速度

$$\ddot{\delta}_{t+\Delta t} = a_0(\delta_{t+\Delta t} - \delta_t) - a_2\dot{\delta}_t - a_3\ddot{\delta}_t \quad \dot{\delta}_{t+\Delta t} = \dot{\delta}_t + a_6\ddot{\delta}_t + a_7\ddot{\delta}_{t+\Delta t}$$

一个算法，在任意给定的初始条件下，如果对于任何 $\frac{\Delta t}{T}$ （时间步长与系统的周期之比）都不会由于算法本身而造成解的无限增长，这个算法便称为无条件稳定的。如果只有当 $\frac{\Delta t}{T}$ 小于某值时，上述结论才成立，这个算法就称为条件稳定的。对于逐步积分法来说，在选择时间步长 Δt 时，必须考虑两个因素，即计算方法的稳定性和计算精度。如果计算方法是条件稳定的，为了满足稳定条件，时间步长必须小于系统最小自振周期，在有限单元法中，那是非常小的时间间隔，要消耗大量机时。如果计算方法是无条件稳定的，时间步长不受稳定条件的限制，在选择时间步长时，只需要考虑计算精度问题。在结构动力响应中，高频分量的贡献是很小的，因此，在分析 Δt 对计算精度的影响时，只要考虑结构的低频部分，从而可采用较大的时间步长。稳定性分析指出，当 $\nu \geq 0.5$ ， $\beta \geq 25(0.5 + \nu)^2$ 时，纽马克法是无条件稳定的。 $\nu > 0.5$ 时，算法引进了“算法阻尼”，即振幅会因算法而减小。取 $\nu = 0.5$ ， $\beta = 0.25$ 时，纽马克法即为平均加速度法。

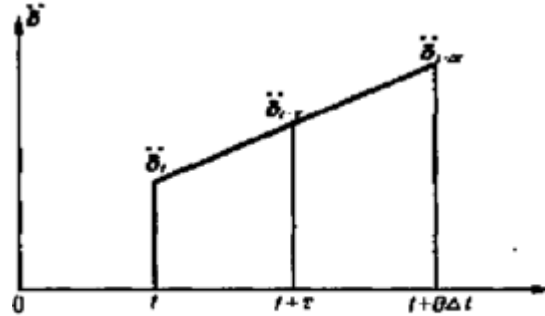


图 7-1

2 威尔逊-θ法

威尔逊-θ法与纽马克法的不同之处是假说加速度在 $t \sim t+\theta\Delta t$ 内呈线性变化如图 7-1 所示)。

由此我们可以假设时刻 $t+\tau$ ，的加速度为

$$\ddot{\delta}_{t+\tau} = \ddot{\delta}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{\delta}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\delta}_t) \quad \theta \leq \tau \leq \theta\Delta t \quad (e)$$

上式对 τ 积分得

$$\dot{\delta}_{t+\tau} = \tau\ddot{\delta}_t + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{\delta}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\delta}_t) + c_1 \quad (f)$$

式中为 c_1 积分常数，令 $\tau=0$ 可得积分常数

$$c_1 = \dot{\delta}_t$$

再代回 (f) 式得:

$$\dot{\delta}_{t+\tau} = \dot{\delta}_t + \tau \ddot{\delta}_t + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{\delta}_{t+\Delta t} - \ddot{\delta}_t) \quad (g)$$

再对 τ 积分, 同样可得

$$\delta_{t+\tau} = \delta_t + \tau \dot{\delta}_t + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\delta}_t + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} (\ddot{\delta}_{t+\Delta t} - \ddot{\delta}_t) \quad (h)$$

在 (g) 和 (h) 式中令 $\tau = \theta\Delta t$, 则得

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{t+\theta\Delta t} = \dot{\delta}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{\delta}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{\delta}_t) \\ \delta_{t+\theta\Delta t} = \delta_t + \theta\Delta t \dot{\delta}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6} (\ddot{\delta}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{\delta}_t) \end{cases} \quad (i)$$

求解 (i) 式二个方程, 可得到用 $\delta_{t+\theta\Delta t}$ 表示 $\dot{\delta}_{t+\theta\Delta t}$ 和 $\ddot{\delta}_{t+\theta\Delta t}$ 的式子如下

$$\ddot{\delta}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} (\delta_{t+\theta\Delta t} - \delta_t) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\delta}_t - 2\ddot{\delta}_t \quad (7-11)$$

$$\dot{\delta}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} (\delta_{t+\theta\Delta t} - \delta_t) - 2\dot{\delta}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\delta}_t \quad (7-12)$$

相应地, 动力学方程 (7-3) 在时刻 $t+\Delta t$ 可以写成

$$M\ddot{\delta}_{t+\theta\Delta t} + C\dot{\delta}_{t+\theta\Delta t} + K\delta_{t+\theta\Delta t} = P_{t+\theta\Delta t} \quad (7-13)$$

由 (7-11), (7-12) 和 (7-13) 三式, 消去 $\dot{\delta}_{t+\theta\Delta t}$ 和 $\ddot{\delta}_{t+\theta\Delta t}$, 可以得到 $\delta_{t+\theta\Delta t}$ 与 t 时刻的状态矢量 δ_t , $\dot{\delta}_t$ 和 $\ddot{\delta}_t$ 的关系式。解之可以从 t 时刻的状态矢量算得 $\delta_{t+\theta\Delta t}$ 。然后代人 (7-11) 式求 $\dot{\delta}_{t+\theta\Delta t}$, 再由 (e) 式算得 $\dot{\delta}_{t+\Delta t}$, 最后, 从 (i) 式算得 $\dot{\delta}_{t+\Delta t}$ 和 $\delta_{t+\Delta t}$ 。

现将威尔逊—— θ 法的计算步骤综合如下:

A 初始计算

(1) 形成刚度矩阵 K 、质量矩阵 M 和阻尼矩阵 C

(2) 确定初始值 δ_0 , $\dot{\delta}_0$ 和 $\ddot{\delta}_0$

(3) 选择时间步长 Δt 和计算积分常数

$$\theta = 1.4$$

$$a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}$$

$$a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}$$

$$a_2 = 2a_1$$

$$a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{\theta}$$

$$a_5 = -\frac{a_2}{\theta}$$

$$a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}$$

$$a_7 = \frac{\Delta t}{2}$$

$$a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$

(4) 形成“刚度”矩阵 $\bar{K} = K + a_0 M + a_1 C$

(5) 分解矩阵 $\bar{K} = L D L^T$

B 对于每个时间步长进行下列计算

(1) 计算 $t + \theta\Delta t$ 时刻的“载荷”

$$\begin{aligned}\bar{P}_{t+\Delta t} = & P_{t+\Delta t} + M(a_0\delta_t + a_2\dot{\delta}_t + 2\ddot{\delta}_t) \\ & + C(a_1\delta_t + 2\dot{\delta}_t + a_3\ddot{\delta}_t)\end{aligned}$$

(2) 解矩阵方程求 $t+\theta\Delta t$ 时刻的位移 $LDL^T\delta_{t+\theta\Delta t} = \bar{P}_{t+\theta\Delta t}$

(3) 算出 $t+\Delta t$ 的加速度、速度和位移

$$\ddot{\delta}_{t+\Delta t} = a_4(\delta_{t+\Delta t} - \delta_t) + a_5\dot{\delta}_t + a_6\ddot{\delta}_t$$

$$\dot{\delta}_{t+\Delta t} = \dot{\delta}_t + a_7(\ddot{\delta}_{t+\Delta t} + \ddot{\delta}_t)$$

$$\delta_{t+\Delta t} = \delta_t + \Delta t\dot{\delta}_t + a_8(\ddot{\delta}_{t+\Delta t} + 2\ddot{\delta}_t)$$

由稳定性分析指出，威尔逊—— θ 法当 $\theta \geq 1.37$ 时是无条件稳定的。一般取 $\theta = 1.40$ ，威尔逊—— θ 法具有算法阻尼。对于结构的高阶振型具有较高的算法阻尼，这就实际上取消了高阶振型对响应的贡献。由于有限单元法离散引起的固有误差，有限单元系统的高阶振型没有什么意义，通过积分过程中的算法阻尼把这些振型消除掉是合理的。如果取 $\theta = 1$ ，此法就是普通的差分法，它是条件稳定的。

第 8 章 平面问题的边界元法

边界单元法 (Boundary Element Method-BEM) 或称边界元法是在有限元法之后发展起来的一种数值计算方法。其基本思想是将问题的控制方程转换成边界上的积分方程, 然后引入位于边界上的有限个单元将积分方程离散求解。与目前常用的有限元、有限差分这类区域方法不同, 经离散化后的方程组只含有沿边界上的结点未知量, 因而降低了问题的维数 (如三维有限元对应二维边界元, 而二维有限元则在边界元法中只不过是线元), 最后求解方程的阶数较低, 因而数据准备方便, 计算时间缩短。另外, 它引起了问题的基本解, 具有解析与离散相结合的特点, 因而计算精度较高。目前在各领域获得了越来越广泛的应用。

边界元法可分为两种基本类型, 即直接法和间接法。直接法采用具有明确物理意义的量 (如弹性力学问题用边界上的位移和表面力) 作为变量求解, 而间接法中是假设边界上虚拟分布的“源”, 没有客观实在的物理意义。在工程中直接法占主流。本章以弹性力学平面问题为例介绍边界元直接法的基础理论。首先引入基本解的概念, 然后以功的互等定理导出边界积分方程, 接着讨论采用常数单元的离散处理过程, 最后介绍了 FORTRAN 源程序及其使用说明, 并给出了示范算例。

8.1 基本解

8.1.1 δ 函数

物理学中常常采用点源 (如质点、点电荷、集中力等) 模型。如质点体积趋于零, 密度趋于无穷大, 而密度的体积分——质量却是有限值; 物体表面的集中力, 作用面积趋于零, 集度趋于无穷大, 而集度的面积分——集中力的大小也是有限的。为了用数学表示这一类概念。狄拉克 (Dirac) 首先提出了 δ 函数, 也称为狄拉克函数。以 x 作为自变量, ξ 为一常数, δ 函数定义为

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(x - \xi) = \begin{cases} 0 & (x \neq \xi) \\ \infty & (x = \xi) \end{cases} \\ \int_a^b \delta(x - \xi) dx = 1 \quad (a < \xi < b) \end{array} \right. \quad (a)$$

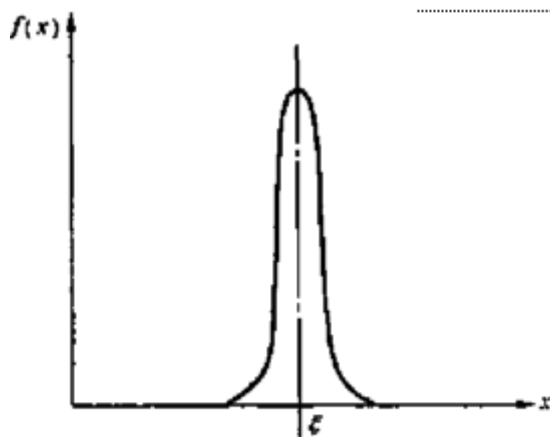


图 8-1

为了理解 δ 函数，不妨把它作为某个函数连续变化的极限来理解。如图 8-1，设有某个函数 $f(x)$ 。它只在包含 ξ 的小区间里不为零，并对称于直线 $X=\xi$ 。它的图形隆起很高，但异常狭窄，而且图线与 x 轴所围面积等于 1。当该函数保持上述性质而使图线逐渐变窄、升高使其不为零的区域渐渐向 $x=\xi$ 无限靠拢时，便成了 $\delta(x-\xi)$ 函数。

关于 δ 函数，有一个十分重要的性质；对于任意一个在 $x=\xi$ 处连续的函数 $u(x)$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \delta(x-\xi) dx = u(\xi) \quad (b)$$

事实上，上式表示的也是一种极限过程，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \delta(x-\xi) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x-\xi) dx$$

其中 ξ 为一个小正数。由于 $u(x)$ 在点 ξ 处连续，当 ξ 无限变小时，它在区间 $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$ 可视为常数 $u(\xi)$ ，再考虑到式 (a) 因而有

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \delta(x-\xi) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\xi) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x-\xi) dx = u(\xi)$$

上述 δ 函数的概念，完全可以扩充到二维和三维问题，此时 x 和 ξ 则表示表示二维和三维空间的点。

8.1.2 基本解

以一维问题为例，设有微分方程式

$$L(u(x))=0 \quad (e)$$

其中 L 为线性微分算子。

现定义满足微分方程

$$L(u^*(x, \xi)) + \delta(x-\xi) = 0 \quad (d)$$

的解 $u^*(x, \xi)$ 称为对应于方程 (c) 的基本解，或无限域内的柏林函数。它表示

了在 $\mathbf{x} = \xi$ 的位置（源点）存在着大小为 1 的源时，对无限域中任意点 \mathbf{x} 位置（场点）的影响。这个源在温度场中表示热源，在流场中表示涌出，在应力场中表示集中力等。

例如，抗拉刚度为 EA 的受轴向拉伸的直杆，由位移表示的控制方程（即平衡方程）为

$$EA \frac{d^2 u(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^2} + q(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{e})$$

其中 $u(\mathbf{x})$ 和 $q(\mathbf{x})$ 分别表示点 \mathbf{x} 处的轴向位移和载荷集度。

若仅在 $\mathbf{x} = \xi$ 处作用有单位集中力，此时

$$q(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \xi)$$

代入（e）式则有（此时位移用 $u^*(\mathbf{x}, \xi)$ 表示）

$$EA \frac{d^2 u^*(\mathbf{x}, \xi)}{d\mathbf{x}^2} + \delta(\mathbf{x} - \xi) = 0$$

其解为

$$u^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{r}{2EA}, r = |\mathbf{x} - \xi| \quad (\text{f})$$

它表示了无限长杆在 $\mathbf{x} = \xi$ 处有轴向单位集中力作用时在 \mathbf{x} 处的位移，也就是方程（e）的基本解。

对于弹性力学平面问题，用应力表示的平衡方程为

$$\sigma_{lk,k} + f_l = 0 \quad (\mathbf{k}, l = 1, 2) \quad (\text{g})^1$$

其应力基本解 $\sigma_{lk}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 是在平面无限域内满足下面方程的解。

上式与（q）式相比，

$$f_l = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) e_l \quad (\text{i})$$

可见应力基本解 σ_{lk}^* 表示在平面无限域中 \mathbf{p} 点作用单位集中力时在 \mathbf{q} 点产生的应力。这里 \mathbf{p} 点是源点， \mathbf{q} 点是场点。

与 σ_{lk}^* 对应的位移和面力 u_k^* 、 p_k^* 为

$$\begin{cases} u_k^* = u_{lk}^* e_l = u_{1k}^* e_1 + u_{2k}^* e_2 \\ p_k^* = p_{lk}^* e_l = p_{1k}^* e_1 + p_{2k}^* e_2 \end{cases} \quad (\text{j})$$

写成矩阵形式为

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{21}^* \\ p_{12}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

式中各系数表示了作用在 \mathbf{p} 点的单位力对在 \mathbf{q} 点的位移和面力的影响程度。如单

位力作用在 p 点的 \mathbf{x}_1 方向, 即分量 $\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = 0$, 则有

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{11}^* & \mathbf{u}_{21}^* \\ \mathbf{u}_{12}^* & \mathbf{u}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{11}^* \\ \mathbf{u}_{12}^* \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1^* \\ \mathbf{p}_2^* \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11}^* & \mathbf{p}_{21}^* \\ \mathbf{p}_{12}^* & \mathbf{p}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{11}^* \\ \mathbf{p}_{12}^* \end{Bmatrix}$$

可见 \mathbf{u}_{lk}^* 、 \mathbf{p}_{lk}^* 分别表示了在 p 点沿 l 方向作用单位力时, 在 q 点沿 k 方向产生的位移和面力, 如图 8-2o 或记为 $\mathbf{u}_{lk}^*(q, p)$ 和 $\mathbf{p}_{lk}^*(q, p)$ 。 \mathbf{u}_{lk}^* 称为位移基本解, \mathbf{p}_{lk}^* 为其对应的面力, 也称为面力基本解。

下面简单介绍弹性力学平面问题的基本解。设在无限大板内的 p 点沿 \mathbf{x}_1 方向作用有单位集中力, 在 q 点的应力为 (图 8-3) ②

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r} [-(3+\mu) + 2(1+\mu)\sin^2\theta] \\ \sigma_{22} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r} [1-\mu - 2(1+\mu)\sin^2\theta] \\ \sigma_{12} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} [1-\mu + 2(1+\mu)\cos^2\theta] \end{cases} \quad (k)$$

本章采用了指标的求和约定, 即如果公式中某一项的某一指标重复出现两次, 则表明应将该项对该指标遍历其整个集合求和。例如对于平面问题,

$$\sigma_{lk,k} = \sum_{k=1}^2 \sigma_{lk,k} = \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}, \text{ 而逗号表示求导数, 故 (g) 式详细写出为}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \end{cases}$$

显然, 表示求和的指标 (称为哑标) 所用符号的改变不改变其表达的效果, 如 $\sigma_{lk,k} = \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}$ 。见铁摩辛柯、古地尔著, 徐芝纶、吴永祯译《弹性理论》, 人民出版社, 1964, P117

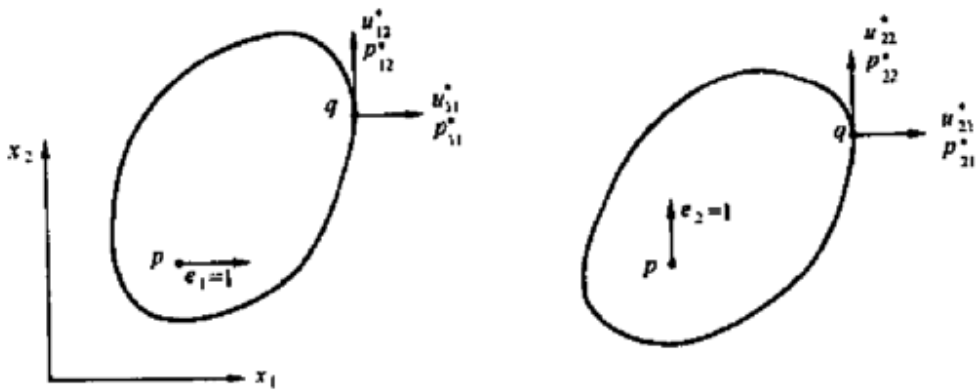


图 8-2

其中 μ 为泊松比, r 为点 q 到点 p 的距离, θ 为 r 与 x_1 轴的夹角。

应用物理方程和几何方程, 并去掉刚体位移项, 得 q 点的位移为

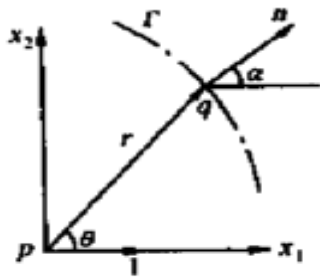


图 8-3

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4\pi E}(1+\mu)\left[(3-\mu)\ln\frac{1}{r} + (1+\mu)\cos^2\theta\right] \\ u_2 = \frac{1}{4\pi E}(1+\mu)^2\sin\theta\cos\theta \end{cases} \quad (1)$$

式中 E 为弹性模量。

另外, 在假想表面 Γ (外法线方向余弦 n_1 、 n_2) 上的边界条件为

$$\begin{cases} p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ p_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 \end{cases} \quad (m)$$

将 (k) 式代入 (m), 得到 q 点的面力表达式

$$\begin{cases} p_1 = -\frac{1}{4\pi r}\left[1-\mu+2(1+\mu)\cos^2\theta\right](n_1\cos\theta+n_2\sin\theta) \\ p_2 = -\frac{1}{4\pi r}\left[2(1+\mu)\sin\theta\cos\theta(n_1\cos\theta+n_2\sin\theta) - (1-\mu)(n_2\cos\theta-n_1\sin\theta)\right] \end{cases} \quad (n)$$

当单位作用在 x_2 方向时, 同样可求得 q 点的位移和面力 u_1' 、 u_2' 和 p_1' 、 p_2' 。按照前面关于 u_{lk}^* 、 p_{lk}^* 的解释, 将 u_1 、 u_2 、 p_1 、 p_2 分别记为 u_{11}^* 、 u_{12}^* 、 p_{11}^* 和 p_{12}^* 、 u_1' 、 u_2' 、 p_1' 、 p_2' 记为 u_{21}^* 、 u_{22}^* 、 p_{21}^* 和 p_{22}^* , 并注意到下面的关系:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 = n_1 \cos\theta + n_2 \sin\theta$$

$$E = 2G(1 + \mu), \quad G \text{ 为剪切模量}$$

则位移基本解 u_{lk}^* 和其对应的面力 p_{lk}^* 可写为

$$\begin{cases} u_{lk}^* = u_{lk}^*(q, p) = \frac{1}{8\pi G} \left[(3 - \mu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + (1 + \mu) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \\ p_{lk}^* = p_{lk}^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1 - \mu) \delta_{lk} + 2(1 + \mu) \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \right. \\ \left. - (1 - \mu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_1 \right) \right\} \end{cases} \quad (8-1)$$

其中

$$\delta_{lk} = \begin{cases} 1 & (l = k) \\ 0 & (l \neq k) \end{cases}$$

为 Kronecker 记号。

对于平面应变问题，只需在 (8-1) 式中用 $\frac{\mu}{1 - \mu}$ 代替 μ ，则有

$$\begin{cases} u_{lk}^* = u_{lk}^*(q, p) = \frac{1}{8\pi G(1 - \mu)} \left[(3 - 4\mu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \\ p_{lk}^* = p_{lk}^*(q, p) = \frac{-1}{4\pi(1 - \mu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1 - 2\mu) \delta_{lk} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \right. \\ \left. - (1 - 2\mu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_1 \right) \right\} \end{cases} \quad (8-2)$$

8.2 边界积分方程

下面用功的互等定理，导出边界积分方程。

8.2.1 积分方程

在材料力学中，以梁为例我们证明了功的互等定理，对于一般的弹性体，该定理也是适用的。设在二维弹性域 Ω （其边界为 Γ ）上作用有两个外力系，即两个表面力系和两个体积力系，产生两个应力系和两个位移系，形成两种状态：

| 表面力 | 体积力 | 位移 | |
|------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 状态I | \mathbf{p}_1^I | \mathbf{f}_1^I | \mathbf{u}_1^I |
| 状态II | \mathbf{p}_1^{II} | \mathbf{f}_1^{II} | \mathbf{u}_1^{II} |

($l=1, 2$)

按功的互等定理有

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}_1^I \mathbf{u}_1^{II} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p}_1^I \mathbf{u}_1^{II} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f}_1^X \mathbf{u}_1^I d\Omega \quad (a)$$

现取状态 I 为弹性体的实际受力状态 (不计体力), 则

$$\mathbf{f}_1^I = 0, \quad \mathbf{p}_1^I = \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{u}_1^I = \mathbf{u}_1$$

取状态 II 的体积力为单位集中力, 位移和表面力则分别为位移基本解及其对应的面力。由 8.1 节的 (i)、(j) 两式

$$\mathbf{f}_1^X = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mathbf{e}_1, \mathbf{p}_1^X = \mathbf{p}_{kl}^* \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}_{kl}^* \mathbf{e}_k$$

于是 (a) 式中各积分为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f}_1^I \mathbf{u}_1^X d\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} \mathbf{p}_1^I \mathbf{u}_1^X d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{p}_1 \mathbf{u}_{kl}^* \mathbf{e}_k d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{p}_k \mathbf{u}_{lk}^* \mathbf{e}_l d\Gamma = \mathbf{e}_l \int_{\Gamma} \mathbf{p}_k \mathbf{u}_{lk}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (b) \quad (c)$$

第二个等号的提出是对求和哑标进行了交换。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f}_1^X \mathbf{u}_1^I d\Omega &= \int_{\Omega} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mathbf{e}_1 \mathbf{u}_1 d\Omega \\ &= \mathbf{e}_1 \int_{\Omega} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mathbf{u}_1 d\Omega = \mathbf{e}_1 \mathbf{u}_1(\mathbf{p}) \quad (d) \\ \int_{\Gamma} \mathbf{p}_1^X \mathbf{u}_1^I d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{p}_{kl}^* \mathbf{e}_k \mathbf{u}_1 d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{p}_{lk}^* \mathbf{e}_l \mathbf{u}_k d\Gamma = \mathbf{e}_l \int_{\Gamma} \mathbf{p}_{lk}^* \mathbf{u}_k d\Gamma \quad (e) \end{aligned}$$

将 (b) — (e) 式代入 (a) 式得

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(\mathbf{p}) &= \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{lk}^* \mathbf{p}_k d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{p}_{lk}^* \mathbf{u}_k d\Gamma \\ &\quad \text{或} \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{p}) &= \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{lk}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{p}) \mathbf{p}_k(\mathbf{Q}) d\Gamma(\mathbf{Q}) - \int_{\Gamma} \mathbf{p}_{lk}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{p}) \mathbf{u}_k(\mathbf{Q}) d\Gamma(\mathbf{Q}) \quad (8-3) \end{aligned}$$

其中 \mathbf{Q} 为边界点。

这是弹性力学平面问题不计体力时的积分方程。它表示了区域内任意点 \mathbf{p} 的位移 $\mathbf{u}_1(\mathbf{p})$ 与边界上的位移 $\mathbf{u}_k(\mathbf{Q})$ 、表面力 $\mathbf{p}_k(\mathbf{Q})$ 的关系。若写成矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_p = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (8-4)$$

8.2.2 边界积分方程

式(8-3)是域内点 p 的位移与边界上 Q 点的位移和面力连系起来的关系式, 为了把问题归结到边界上, 有必要使 p 点移到边界上的任意点 P 。由方程(8-1)、(8-2)可见, 当 $r=0$ 即 P 点与 Q 点重合时, 基本解出现奇异性。因此, 在考虑 $p \rightarrow P$ 时需要注意到这一点。现设 P 点为光滑点, 即该点只有一条切线。以 P 点为圆心, ε 为半径, 作一微小的半圆如图 8-4。此时边界分为 $\Gamma - \Gamma_g$ 和 Γ_g 两部分, 此时式(8-3)变为

$$u_i(p) = \int_{\Gamma - \Gamma_g} [u_{ik}^*(Q, P) p_k(Q) - p_{ik}^*(Q, P) u_k(Q)] d\Gamma + \int_{\Gamma_g} [u_{ik}^*(Q, P) p_k(Q) - p_{ik}^*(Q, P) u_k(Q)] d\Gamma$$

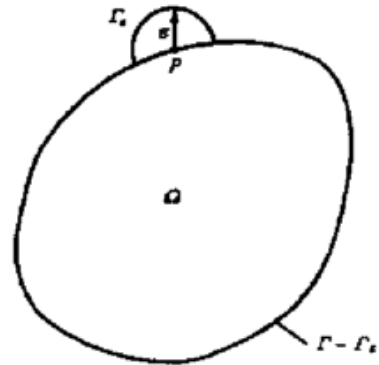
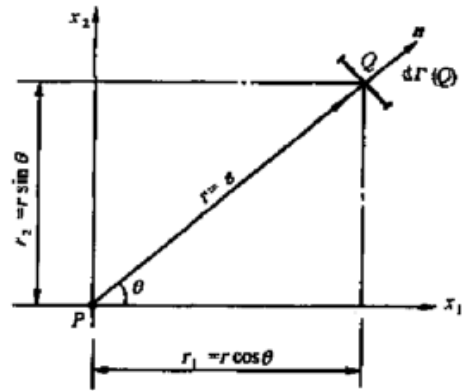


图 8-4

现考虑当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 (f) 式中各积分的极限。对于第二个积分, 可直接进行积分运算。为此以微小半圆的中心 P 为原点, 定义图 8-5 中的各量。先计算第二个积分中的第一项, 为简单计, 首先取了 $\nu=1$, 把(8-2)式的平面应变的位移基本解代人, 并考虑 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限得



$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = n_1 = \frac{r_1}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 1$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = n_2 = \frac{r_2}{r} = \sin \theta$$

图 8-5

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_g} u_{lk}^*(Q, P) p_k(Q) d\Gamma(Q) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{8\pi G(1-\mu)} \int_{\Gamma_g} \left[p_1(3-4\mu) \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + p_1 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right] d\Gamma(Q) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{8\pi G(1-\mu)} \int_0^n \left[p_1(3-4\mu) \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + p_1 \cos^2 \theta + p_2 \cos \theta \sin \theta \right] d\theta
\end{aligned}$$

应用积分中值定理，可知积分

$$\int_0^n (p_1 \cos^2 \theta + p_2 \cos \theta \sin \theta) d\theta$$

为有限值，则

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^\pi (p_1 \cos^2 \theta + p_2 \cos \theta \sin \theta) d\theta = 0$$

又因为

$$\varepsilon \int_0^\pi p_1(3-4\mu) \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\theta = \varepsilon(3-4\mu) \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) p_1(Q_\varepsilon) \pi$$

其中 Q_ε 是小圆弧 Γ_ε 边界上的某点，并且

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} = 0$$

于是

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^\pi p_1(3-4\mu) \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\theta = 0$$

故

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_g} u_{lk}^*(q, P) p_k(Q) d\Gamma(Q) = 0 \quad (g)$$

当取 $l=2$ 时，可得到同样的结果，因此 (f) 式中的第二个积分的第一项为零。

再考虑第二个积分的第二项，将 (8-2) 式中的面力代入，并取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限得

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_g} p_{lk}^*(Q, P) u_k(Q) d\Gamma(Q) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_g} \frac{1}{4\pi(1-\mu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\mu)\delta_{lk} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k}] \right. \\
&\quad \left. - (1-2\mu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right) \right\} u_k d\Gamma
\end{aligned}$$

考虑到 \mathbf{r} 与 \mathbf{n} 方向一致, 有 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{n}} = 1$

而且
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} \mathbf{n}_k - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{r} \frac{\mathbf{r}_k}{r} - \frac{\mathbf{r}_k}{r} \frac{\mathbf{r}_1}{r} = 0$$

则

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \int_{\Gamma_g} \left[(1-2\mu)\delta_{lk} + 2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \right] \frac{u_k}{r} d\Gamma \quad (\text{h})$$

先取了 $l=1$, 且

改变积分变量为 θ , 则有

$$\begin{aligned} I_2' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \int_0^\pi [u_1(1-2\mu) + 2u_1 \cos^2 \theta \sin \theta] d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi(1-\mu)} 2\pi(1-\mu)u_1(P) \\ &= \frac{1}{2}u_1(P) \end{aligned} \quad (\text{i})$$

再取 $l=2$, 并进行类似的运算得

$$I_2'' = \frac{1}{2}u_2(P) \quad (\text{j})$$

关于 (f) 式中的第一个积分, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 则积分域。于是, 考虑 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限时, 对于光滑边界, 由式 (f) 得到如下的边界积分方程

$$\frac{1}{2}u_i(P) = \int_{\Gamma} [u_{lk}^*(Q, P)p_k(Q) - p_{lk}^*(Q, P)u_k(Q)] d\Gamma(Q) \quad (8-5)$$

该方程表示了边界上的位移和面力之间的关系, 是进行边界元数值计算的基础。

对于非光滑点, 该点将有两条切线 L_1 和 L_2 , 如图 8-6. 这时边界积分方程左边的系数

不是 $\frac{1}{2}$, 而是与两切线夹角 α 有关的常数, 感兴趣的读者可参考有关文献。

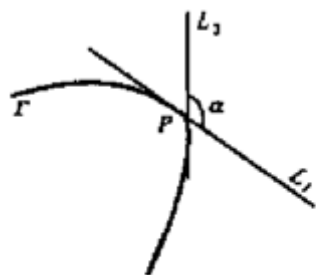


图 8-6

$$\begin{aligned} \text{令 } \mathbf{u} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} & \mathbf{p} &= \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{p}^* &= \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}^* &= \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

那么 (8-5) 式可写成下面的矩阵形式

$$C_p u_p = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma - \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma \quad (8-5a) \quad \text{式中 } u_p \text{ 表示 } P \text{ 点的位移, } C_p \text{ 是}$$

由 P 点的几何特性所决定的系数矩阵, 对于光滑边界点 P ,

$$C_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

求边界积分方程 (8-5) 的解析解非常困难, 甚至不可能, 因此有必要寻求数值求解的方法。

8.3 边界积分方程的离散

边界元法解弹性力学平面问题, 就是通过把弹性体的边界离散成有限个单元, 将边界积分方程 (8-5) 化为代数方程求解。如图 8-7 所示, 将边界 Γ 离散成 n 个边界单元 Γ_j ($j=1, 2, \dots, n$)。注意单元编号对外边界按逆时针顺序编排, 对内边界按顺时针顺序。现将单元中点取为节点, 单元上的位移 u 和面力 p 设为常数, 并以节点的值来表示。这种单元称为常数单元, 它是最简单的边界单元, 对于第 i 个边界节点, 由 (8-5) 式得

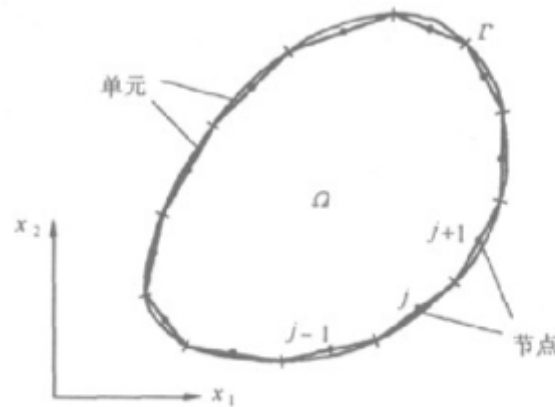


图 8-7

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma \right\} u_j = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} p_j \dots \dots \dots (a)$$

式中 u_j 和 p_j 分别是单元 j 的节点位移和面力。对光滑边界点 I 将 (a) 式详细写出为

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_i + \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_j} p_{11}^* d\Gamma & \int_{\Gamma_j} p_{12}^* d\Gamma \\ \int_{\Gamma_j} p_{21}^* d\Gamma & \int_{\Gamma_j} p_{22}^* d\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_j = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_j} u_{11}^* d\Gamma & \int_{\Gamma_j} u_{12}^* d\Gamma \\ \int_{\Gamma_j} u_{21}^* d\Gamma & \int_{\Gamma_j} u_{22}^* d\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}_j \quad (b)$$

方程 (a) 中的积分 $\int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma$ 、 $\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$ 将节点 I 和单元线段 j (在其上进行积分) 连

系起来, 分别记为 \bar{H}_{ij} 和 G_{ij} , 即

$$\begin{cases} \bar{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma \\ G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \end{cases} \quad (c)$$

它们都是 2×2 的矩阵。于是 (a) 式又可写为

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^n \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} p_j \quad (d)$$

该方程把节点 i 的位移和边界上所有节点 (也包括节点 i) 的位移和面力联系在一起, 为合并方程左边的两项, 记

$$\begin{cases} H_{ij} = \bar{H}_{ij} (i \neq j) \\ H_{ij} = \bar{H}_{ij} + C_j (i = j) \end{cases} \quad (e)$$

于是 (d) 式可写为

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} p_j \quad (8-6)$$

对于 n 个节点, 可以写出类似的 n 个等式, 将得到 2n 个方程的方程组

$$Hu = Gp$$

每个节点具有两个位移分量和两个表面力分量, n 个节点共有 2n 个位移分量和 2n 个, 因此所有未知量均能求得。

如将 (8-7) 式进行调整, 未知量移到方程左边, 用 X 表示, 已知量移到方程右边用 F 表示, 系数矩阵用 A 表示, 则 (8-7) 式又可写为

$$AX = F$$

方程组 (8-8) 一旦求解, 我们就知道了边界节点的所有面力和位移, 接着可应用 (8-3) 式计算域任意点的应力和位移 (见 8.5 节)。

现在还需要解决方程 (8-6) 中的系数矩阵 H_{ij} 和 G_{ij} 的计算问题。系数矩阵 H_{ij} 、 G_{ij} 的计算。在常数单元情况下, H_{ii} 和 G_{ii} 可解析计算, 而 H_{ij} 和 G_{ij} ($i \neq j$) 则需要采数值计算。

8.4.1 H_{ii} 的计算

当边界单元 Γ_i 与 Γ_j 一致时, 即 $i=j$, P_i 是单元的中点, Q 是单元上的任意点。设单元两端点为 Q_i 和 Q_{i+1} , 单元长度为 $2R$, 单元线段与 x_1 轴的夹角为 θ_i , 如图 8—8。 H_{ii} 各元素表示为

$$H_{ii} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}_{ii} \quad (a)$$

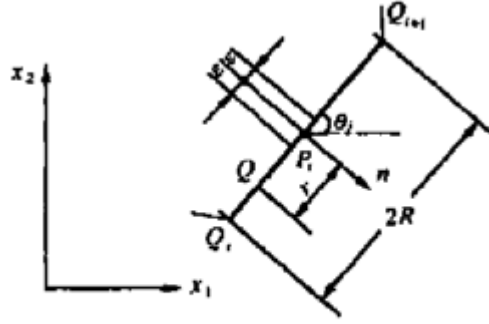


图 8-8

考虑到上节 (c)、(e) 式, 将面力 p_{11}^* 代入, 并注意 $l=k=1$ 时, $\frac{\partial r}{\partial x_1} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_1 = 0$ 得

$$H_{11} = \int_{\Gamma_1} p_{11}^* d\Gamma + \frac{1}{2} = \int_{Q_i}^{Q_{i+1}} \frac{-1}{4\pi(1-\mu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\mu) + 2\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 \right] \right\} d\Gamma + \frac{1}{2}$$

又因为 r 与法向 n 垂直, 故 $\frac{\partial r}{\partial n} = 0$

$$\text{则} \quad H_{11} = \frac{1}{2} \quad (b)$$

同样可得

$$H_{22} = \frac{1}{2} \quad (c)$$

而

$$\begin{aligned} H_{12} &= \int_{\Gamma_1} p_{12}^* d\Gamma \\ &= \int_{Q_i}^{Q_{i+1}} \frac{-1}{4\pi(1-\mu)r} \left[2 \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} - (1-2\mu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 - \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 \right) \right] d\Gamma \\ &= \frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)} \int_{Q_i}^{Q_{i+1}} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 - \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 \right) \frac{d\Gamma}{r} \end{aligned}$$

由于 Q 点与 P_i 点重合时, $r=0$, 出现奇异性, 现将上式改写并积分为

$$\begin{aligned} H_{12} &= \frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{R-\varepsilon} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 - \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 \right) \frac{d\Gamma}{r} \right] + \int_{R+\varepsilon}^{2R} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} n_2 - \frac{\partial r}{\partial x_2} n_1 \right) \frac{d\Gamma}{r} \\ &= \frac{1-2\mu}{4\pi(1-\mu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\varepsilon}^R (n_2 \cos \theta_i - n_1 \sin \theta_i) \frac{dr}{r} + \int_{\varepsilon}^R (n_2 \cos \theta_i - n_1 \sin \theta_i) \frac{dr}{r} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理可得

$$H_{21} = 0$$

故

$$H_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (8-9)$$

8.4.2 G_{ii} 的计算

矩阵 G_{ii} 的各元素为

$$G_{ii} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}_{ii} \quad (f)$$

其中

$$\begin{aligned} G_{11} &= \int_{\Gamma_i} u_{i1}^* d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_i} \frac{1}{8\pi G(1-\mu)} \left[(3-4\mu) \ln \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] d\Gamma \\ &= \frac{1}{8\pi G(1-\mu)} \int_{Q_i}^{Q_{i+1}} \left[(3-4\mu) \ln \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] d\Gamma \\ &= \frac{1}{8\pi G(1-\mu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \int_{\varepsilon}^R (3-4\mu) \ln \frac{1}{r} dr + 2 \int_{\varepsilon}^R \cos^2 \theta_i dr \right\} \\ &= \frac{R}{4\pi G(1-\mu)} \left[(3-4\mu)(1 - \ln R) + \cos^2 \theta_i \right] \quad (g) \end{aligned}$$

同样可得

$$G_{22} = \frac{R}{4\pi G(1-\mu)} \left[(3-4\mu)(1 - \ln R) + \sin^2 \theta_i \right]$$

而

$$\begin{aligned} G_{22} &= \int_{\Gamma_i} u_{i2}^* d\Gamma \\ &= \int_{Q_i}^{Q_{i+1}} \frac{1}{8\pi G(1-\mu)} \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} d\Gamma \\ &= \frac{1}{8\pi G(1-\mu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_{\varepsilon}^R \cos \theta_i \sin \theta_i dr \\ &= \frac{R}{4\pi G(1-\mu)} \sin \theta_i \cos \theta_i = G_{21} \end{aligned}$$

综合起来

$$G_{ii} = \frac{R}{4\pi G(1-\mu)} \begin{bmatrix} (3-4\mu)(1 - \ln R) + \cos^2 \theta_i & \sin \theta_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \cos \theta_i & (3-4\mu)(1 - \ln R) + \sin^2 \theta_i \end{bmatrix} \quad (8-10)$$

8.4.3 H_{ij} 、 G_{ij} ($i \neq j$) 的计算

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}_{ij} \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}_{ij}$$

其中各元素的计算可采用四点高斯积分公式。为此先将积分转化为关于区间为-1到+1的局部坐标的积分。

一般来说, 对于如图 8—9 (a) 所示函数 $f(x)$ 在区间 a 到 b 的积分

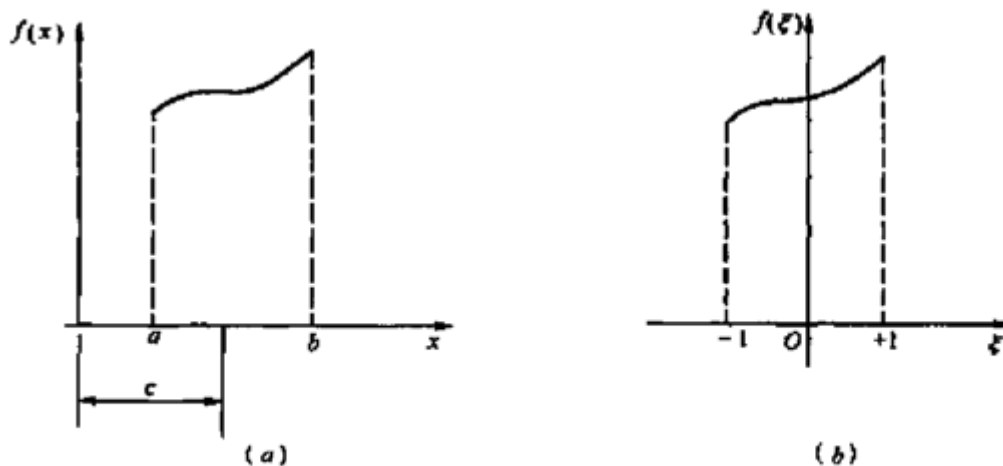


图 8-9

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

进行坐标变换

$$\xi = \frac{x-c}{l/2} \quad \text{或} \quad x = \frac{l}{2}\xi + c$$

则有

$$dx = \frac{l}{2} d\xi$$

$$J = \int_a^b f(x) dx = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$$

于是

$$= \frac{l}{2} \sum_{k=1}^4 \omega_k f(\xi_k) \quad (h)$$

其中 $c = \frac{1}{2}(a+b)$ 为 ab 中点的坐标, $l = b-a$ 为 ab 区间的长度。而 w_k 为加权系数, ξ_k 为积分点 k 的局部坐标。

下面具体写出 H_{ij} 和 $G_{ij} (i \neq j)$ 的各元素的高斯积分公式。

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \int_{\Gamma_j} p_{11}^* d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_j} \frac{-1}{4\pi(1-\mu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\mu) + 2\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 \right] \right\} d\Gamma \\ &= \frac{-l_j}{8\pi(1-\mu)} \int_{-1}^1 \frac{r'}{r^2} [(1-2\mu) + 2\cos^2 \beta] d\xi \\ &= \frac{-l_j r'}{8\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 [(1-2\mu) + 2\cos^2 \beta_k] \frac{\omega_k}{r_k^2} \quad (i) \end{aligned}$$

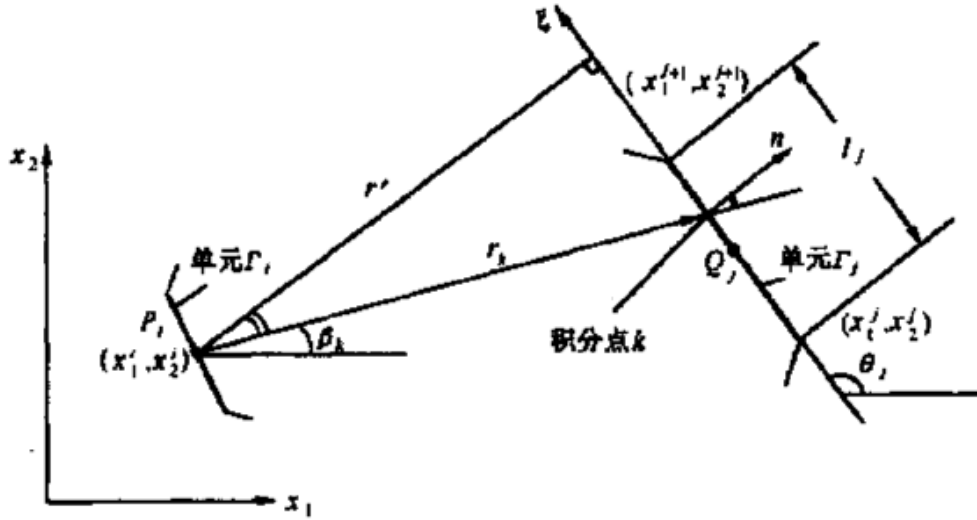


图 8-10

其中 l_j 为单元 j 的长度， β 为 r 与坐标轴 x_1 的夹角，并且用到了

$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(r, n) = \frac{r'}{r}$ ，如图 8-10。而 r' 是 r 的最小值，可用 $\frac{d(r^2)}{d\varepsilon} = 0$ 确定。

利用两点之间的距离公式，由图 8-10 可知

由 $\frac{d(r^2)}{d\varepsilon} = 0$ 得

$$\varepsilon = \frac{(2x_1^i - x_1^{j+1} - x_1^j)(x_1^{j+1} - x_1^j) + (2x_2^i - x_2^{j+1} - x_2^j)(x_2^{j+1} - x_2^j)}{(x_1^{j+1} - x_1^j)^2 + (x_2^{j+1} - x_2^j)^2}$$

于是

$$r' = \pm \frac{(x_1^i - x_1^j)(x_2^{j+1} - x_2^j) - (x_2^i - x_2^j)(x_1^{j+1} - x_1^j)}{\sqrt{(x_1^{j+1} - x_1^j)^2 + (x_2^{j+1} - x_2^j)^2}}$$

或分子分母同除以 $x_1^{j+1} - x_1^j$ 化为程序中的书写形式

$$r' = \pm \frac{\frac{x_2^{j+1} - x_2^j}{x_1^{j+1} - x_1^j} x_1^i - x_2^i - \frac{x_2^{j+1} - x_2^j}{x_1^{j+1} - x_1^j} x_1^j + x_2^j}{\sqrt{\left(\frac{x_2^{j+1} - x_2^j}{x_1^{j+1} - x_1^j}\right)^2 + 1}}$$

边界上的积分关于 P_j 点可能有两种方向，分别对应上式中的正负号。如图 8-11

(a) 表示逆时针方向，此时 r 在外法线方向的投影

$$r' = r \cos \alpha = r \cos \varphi > 0$$

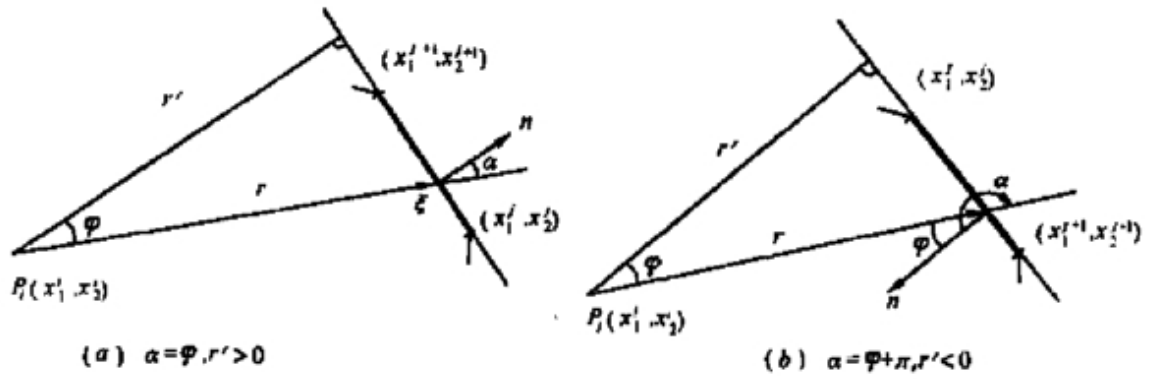


图 8-11

图 8-11 (b) 表示顺时针方向, 此时

$$r' = r \cos \alpha = r \cos(\pi + \varphi) = -r \cos \varphi < 0$$

这两种方向可用 r_1 (点 P_i 到 j) 和 r_2 (点 P_i 到 $j+1$) 的矢量积来区别, 如图 8-12。如图 8-12。即 $r_1 \times r_2$ 为逆时针方向, $r_2 \times r_1$ 为顺时针方向, 分别对应 $r' > 0$ 和 $r' < 0$ 。由图 8-12 可知

$$r_1 = (x_1^j - x_1^i)i + (x_2^j - x_2^i)j + 0 \cdot k$$

$$r_2 = (x_1^{j+1} - x_1^i)i + (x_2^{j+1} - x_2^i)j + 0 \cdot k$$

其中 i, j, k 为沿坐标轴方向的单位矢量, 于是有

$$\begin{aligned} r_1 \times r_2 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1^j - x_1^i & x_2^j - x_2^i & 0 \\ x_1^{j+1} - x_1^i & x_2^{j+1} - x_2^i & 0 \end{vmatrix} \\ &= [(x_1^j - x_1^i)(x_2^{j+1} - x_2^i) - (x_1^{j+1} - x_1^i)(x_2^j - x_2^i)]k = S_{ig} k \end{aligned}$$

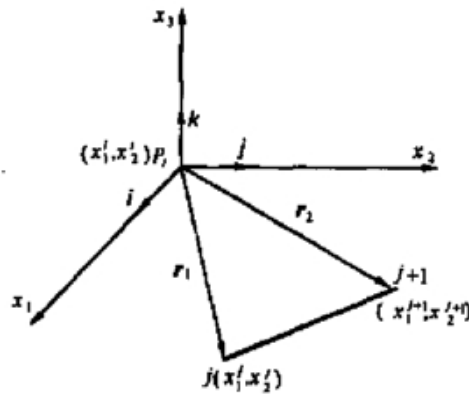


图 8-12

其中

$$S_{ig} = (x_1^j - x_1^i)(x_2^{j+1} - x_2^i) - (x_1^{j+1} - x_1^i)(x_2^j - x_2^i)$$

于是

$$S_{ig} > 0 \text{ 时 } r' > 0; S_{ig} < 0 \text{ 时, } r' < 0$$

由此可确定 (8-11) 是中的正负号。

类似地可计算 H_{12} 、 H_{21} 和 H_{22} ，将它们归并在一起为

$$\begin{cases} H_{11} = -\frac{l_j r'}{8\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \left[(1-2\mu) + 2\cos^2 \beta_k \right] \frac{w_k}{r_k} \\ H_{12} = -\frac{l_j}{8\pi(1-\mu)} \sum \left[\frac{2r'}{r_k} \cos \beta_k \sin \beta_k + (1-2\mu)(\sin \theta_j \sin \beta_k + \cos \theta_j \cos \beta_k) \right] \frac{w_k}{r_k} \\ H_{21} = -\frac{l_j}{8\pi(1-\mu)} \sum \left[\frac{2r'}{r_k} \cos \beta_k \sin \beta_k - (1-2\mu)(\sin \theta_j \sin \beta_k + \cos \theta_j \cos \beta_k) \right] \frac{w_k}{r_k} \\ H_{22} = -\frac{l_j r'}{8\pi(1-\mu)} \sum (1-2\mu + 2\sin^2 \beta_k) \frac{w_k}{r_k} \end{cases}$$

再计算 G_{ij} 中各元素，如：

$$\begin{aligned} G_{11} &= \int_{r_j} u_{11}^* d\Gamma = \int \frac{1}{8\pi G(1-\mu)} \left[(3-4\mu) \ln \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 \right] d\Gamma \\ &= \frac{l_j}{16\pi G(1-\mu)} \sum \left[(3-4\mu) \ln \frac{1}{r_k} + \cos^2 \beta_k \right] w_k \end{aligned}$$

同理可写出计算 G_{12} 、 G_{21} 和 G_{22} 的表达式，归并到一起为

$$\begin{cases} G_{11} = \frac{l_j}{16\pi G(1-\mu)} \sum \left[(3-4\mu) \ln \frac{1}{r_k} + \cos^2 \beta_k \right] w_k \\ G_{12} = G_{21} = \frac{l_j}{16\pi G(1-\mu)} \sum \cos \beta_k \sin \beta_k w_k \\ G_{22} = \frac{l_j}{16\pi G(1-\mu)} \sum \left[(3-4\mu) \ln \frac{1}{r_k} + \sin^2 \beta_k \right] w_k \end{cases}$$

8.5 域内的位移和应力

8.5.1 域内的位移

域内任意点 I 的位移可由积分方程 (8-3) 进行计算。对于目前采用的常数单元，方程 (8-3) 可离散为

$$u_i = \sum_{j=1}^n G_{ij} p_j - \sum_{j=1}^n \bar{H}_{ij} u_j$$

(8-15) 式中 n 为单元数，矩阵 G_{ij} ， \bar{H}_{ij} 可采用前面导出的公式计算。只是要注意，考虑到 (8-9) 式和 8.3 节的 (e) 式

$$\bar{H}_{ij} = H_{ij} - C_{ij} = 0 (i = j) \quad \bar{H}_{ij} = H_{ij} (i \neq j) \quad (a)$$

一旦边界上的节点位移 u_j 和面力 p_j 求得后, 则可应用 (8-15) 式计算域内任意点的位移。

8.5.2 域内的应力

为求域内任意点的应力, 可将积分方程 (8-3) 代入几何方程, 再由物理方程得到应力的表达式, 最后经离散处理后得

$$(\sigma_{ij})_p = \sum_{Q=1}^n (D_{ij})_{pQ} (p_l)_Q - \sum_{Q=1}^n (S_{lij})_{jQ} (u_i)_Q \quad (i, j, l=1, 2) \quad (8-16)$$

式中 p 表示要求应力得某内点, $Q=1, 2, \dots, n$ 表示各单元节点, 而 D_{lij} 和 S_{lij} 的各元素采用高斯四点积分公式的计算表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} D_{111} &= \frac{I_Q}{8\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^n \cos \beta_k (1-2\mu+2\cos^2 \beta_k) \frac{w_k}{r_k} \\ D_{211} &= \frac{-I_Q}{8\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \sin \beta_k (1-2\mu-2\cos^2 \beta_k) \frac{w_k}{r_k} \\ D_{112} &= \frac{I_Q}{8\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \sin \beta_k (1-2\mu+2\cos^2 \beta_k) \frac{w_k}{r_k} \\ D_{212} &= \frac{I_Q}{8\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \cos \beta_k (1-2\mu+2\sin^2 \beta_k) \frac{w_k}{r_k} \\ D_{122} &= \frac{-I_Q}{8\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \cos \beta_k (1-2\mu-2\sin^2 \beta_k) \frac{w_k}{r_k} \\ D_{222} &= \frac{I_Q}{8\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \sin \beta_k (1-2\mu+2\sin^2 \beta_k) \frac{w_k}{r_k} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} S_{111} &= \frac{I_\varrho G}{4\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2 \frac{r'_k}{r_k} \cos \beta_k (1-4\cos^2 \beta_k) + 4\mu \sin \theta_\varrho \cos^2 \beta_k}{2(1-2\mu) \sin \theta_\varrho (\cos^2 \beta_k + 1) - (1-4\mu) \sin \theta_\varrho} + \frac{w_k}{r_k^2} \right] \\ S_{211} &= \frac{I_\varrho G}{4\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2 \frac{r'_k}{r_k} \sin \beta_k (1-2\mu-4\cos^2 \beta_k) + 4\mu \sin \theta_\varrho \cos \beta_k \sin \beta_k}{-2(1-2\mu) \cos \theta_\varrho \cos^2 \beta_k + (1-4\mu) \cos \theta_\varrho} \right] \frac{w_k}{r_k^2} \\ S_{112} &= \frac{I_\varrho G}{4\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2 \frac{r'_k}{r_k} \sin \beta_k (1-4\cos^2 \beta_k) + 2\mu \cos \beta_k (\sin \theta_\varrho \sin \beta_k - \cos \theta_\varrho \cos \beta_k)}{+ (1-2\mu)(2 \sin \theta_\varrho \sin \beta_k \cos \beta_k - \cos \theta_\varrho)} \right] \frac{w_k}{r_k^2} \\ S_{212} &= \frac{I_\varrho G}{4\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2 \frac{r'_k}{r_k} \cos \beta_k (1-4\sin^2 \beta_k) + 2\mu \sin \beta_k (\sin \theta_\varrho \sin \beta_k - \cos \theta_\varrho \cos \beta_k)}{+ (1-2\mu)(\sin \theta_\varrho - 2 \cos \theta_\varrho \sin \beta_k \cos \beta_k)} \right] \frac{w_k}{r_k^2} \\ S_{112} &= \frac{i_\varrho G}{4\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2 \frac{r'_k}{r_k} \cos \beta_k (1-2\mu-4\sin^2 \beta_k) - 4\mu \cos \theta_\varrho \cos \beta_k \sin \beta_k}{+ 2(1-2\mu) \sin \theta_\varrho \sin^2 \beta_k - (1-4\mu) \sin \theta_\varrho} \right] \frac{w_k}{r_k^2} \\ S_{222} &= \frac{I_\varrho G}{4\pi(1-\mu)} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{2 \frac{r'_k}{r_k} \sin \beta_k (1-4\sin^2 \beta_k) - 4\mu \cos \theta_\varrho \cos^2 \beta_k}{2(1-2\mu) \cos \theta_\varrho (\sin^2 \beta_k + 1) + (1-4\mu) \cos \theta_\varrho} - \frac{w_k}{r_k^2} \right] \end{aligned} \right.$$

8.6 边界上的应力

在许多实际问题中往往需要知道边界上的应力值，下面到处有边界节点位移和面力表示的应力计算公式。

设边界上任意单元 Q 的法向正应力、切向正应力和剪应力分别由 σ_n 、 σ_t 和 τ_{nt} 表示。由图 (8-13) 可直接得到面力 p_1 、 p_2 标示的 σ_n 和 τ_{nt} 的公式

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_n &= p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha \\ \tau_{nt} &= -p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha \end{aligned} \right.$$

其中单元的倾斜角 α 可有单元的两端点坐标确定。

为计算 σ_t ，引入物理方程

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_n &= 2G\varepsilon_n + \lambda(\varepsilon_n + \varepsilon_t) \\ \sigma_t &= 2G\varepsilon_t + \lambda(\varepsilon_n + \varepsilon_t) \\ \tau_{nt} &= G\gamma_{nt} \end{aligned} \right.$$

由(b)式中的前两式消去 ε_n ，并注意

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)}$$

$$\text{得 } \sigma_t = \frac{1}{1-\mu} (2G\varepsilon_t + \mu\sigma_n)$$

$$\text{而 } \varepsilon_t = \varepsilon_{11} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{22} \cos^2 \alpha - 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha$$

将几何方程代入

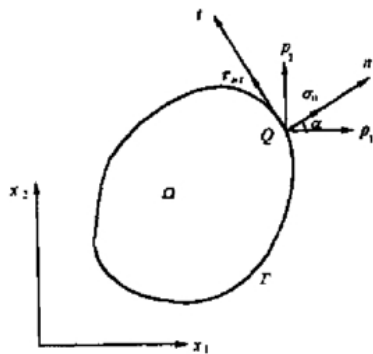


图 8-13

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sin^2 \alpha + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cos^2 \alpha - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \sin \alpha \cos \alpha \\
&= - \left(- \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sin \alpha + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cos \alpha \right) \sin \alpha + \left(- \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \sin \alpha + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cos \alpha \right) \cos \alpha \\
&= \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cos(t, x_1) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cos(t, x_2) \right] \sin \alpha + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cos(t, x_1) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cos(t, x_2) \right] \cos \alpha \\
&= - \frac{d u_1}{dt} \sin \alpha + \frac{d u_2}{dt} \cos \alpha
\end{aligned}$$

将式代入式(c)再与(b)归并在一起得

$$\begin{cases}
\sigma_n = p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha \\
\sigma_t = \frac{1}{1-\mu} \left[2G \left(- \frac{d u_1}{dt} \sin \alpha + \frac{d u_2}{dt} \cos \alpha \right) + \mu (p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha) \right] \\
\tau_{nt} = - p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha
\end{cases}$$

因此,当边界节点的面力和位移求得后,则可由上式计算节点的应力.式中位移关于边界切向的导数 $\frac{d u_1}{dt}$ 和 $\frac{d u_2}{dt}$ 可用差分法近似代替.

8.7 计算程序及使用说明

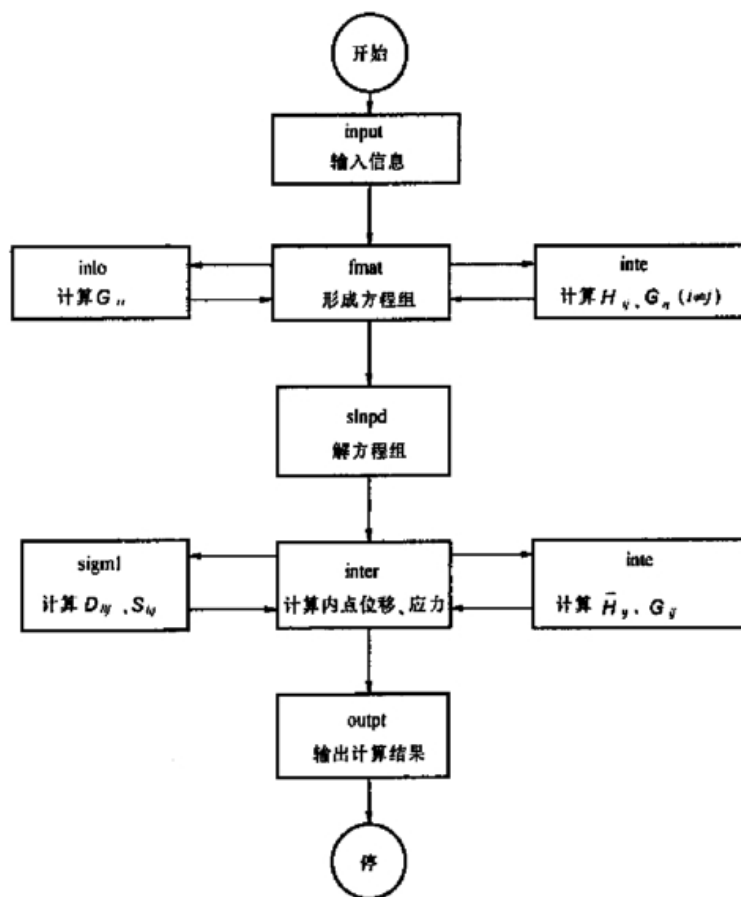


图 8-14

8.7.1 使用说明

本节介绍的解弹性力学平面问题的 FORTRAN 源程序^①,采用常数单元,各程序段均按前述个公式写成,能计算出边界节点的位移、位移值。

源程序有主程序和八个子程序组成,其流程图如图(8-14)。各子程序的功能如下:

input 子程序
输入数据。如单元(节点)数,内点数,不同边界数,材料的弹性常数,内点坐标,单元端点坐标和边界条件信息等,并输出个参数。这里不同边界数是为了处理多连域问题而设定的,将多连域的内外边界分成不同的边界,单联域问题该参数为 1;有一“孔”的多连域问题,则不同边界数为 2,以此类推。程序中采用文件输入输出,其中输入数据文件名为“datac.for”,输出文件名为“result.for”。

fmat 子程序
形成(8-7)式中的矩阵 G 和 H 及方程(8-8)中的矩阵 A 和列阵 F。其中子矩阵 H_{ij} 、 G_{ij} ($i \neq j$) 调用子程序 inte 采用数值计算,而子矩阵 G_{ij} 则调用子程序 inlo 解析计算。

3 slnpd 子程序
采用高斯消元法解方程 $AX=F$,求出边界节点的未知位移和面力。

4 inter 子程序
计算选定的内点位移和应力值。其中调用子程序 inte 计算矩阵 H_{ij} 和 G_{ij} ,调用子程序 sigml 计算(8-16)式中 D_{ij} 和 S_{ij} 的各元素。

5. outpt 子程序
输出计算结果,包括边界节点的位移、面力和内点的位移、应力值。

| 变量名 | 意义 |
|-------|--|
| ik | 说明运算性质。 $i = \begin{cases} 0 & \text{数检} \\ 1 & \text{计算} \end{cases}$ |
| n | 边界单元数。由于采用常数单元,也等于边界节点数。程序中限定 $n \leq 60$ |
| l | 选定的内点数,这些点需计算应力和位移。程序中限定 $l \leq 20$ |
| m | 不同边界数。对多连域情况,外边界和各内边界定义为不同的边界。程序中限定 $m \leq 5$ 。 |
| nc(i) | 一维数组,表示第 I 个边界的最后一个节点的编号。外边界节点按逆时针编号;内边界的节点按顺时针编号 |
| ge | 剪切模量。 |
| xnu | 平面问题类型。 $xnu = \begin{cases} \mu(\text{平面应变}) \\ \mu / (1 + \mu)(\text{平面应力}) \end{cases}$ |
| x,y | 一维数组,单元端点坐标。 |
| cx,cy | 一维数组,内点坐标。 |
| xm,ym | 一维数组,单元节点坐标。 |
| g | 方程(8-7)中的矩阵 $[G]$ 。处理好边界条件后, |

| | |
|------|---|
| | 表示方程（8-8）中的矩阵 $[A]$ |
| h | 方程（8-7）中的矩阵。 |
| kode | 一维数组，说明节点边界条件的类型。 $kode = \begin{cases} 0(\text{位移给定}) \\ 1(\text{面力给定}) \end{cases}$ |
| fi | 一维数组，边界节点上面力或位移的给定值。每个节点得值的意义与 kode 相对应。最后存入节点位移。 |
| dfi | 方程（8-8）的列阵 $[F]$ 。解方程后存入求得的未知量值，最后存入节点面力。 |
| ssol | 一维数组，内点应力。 |
| dsol | 一维数组，内点位移。 |

8.7.3 源程序

c program Bem1

c for solution of elastic problem—2D by BEM

```

common ik,n,l,nc(5),m,ge,xnu,lec,imp
dimension x(61),y(61),xm(60),ym(60),g(120,120),fi(120),dfi(120)
dimension kode(120), cx(20),cy(20),ssol(60),dsol(40)
dimension h(120,120)
nx=120
lec=4
imp=7
call fmat(x,y,xm,ym,g,h,fi,dfi,kode,nx)
nn=2*n
call slnpd(g,dfi,d,nn,nx)

call inter(fi,dfi,kode,cx,cy,x,y,ssol,dsol)
call output(xm,ym,fi,dfi,cx,cy,ssol,dsol)
stop
end

subroutine input(cx,cy,x,y,kode,fi)
common ik,n,l,nc(5),m,ge,xnu,lec,imp
dimension cx(1),cy(1), x(1),y(1),kode(1),fi(1)
open(imp,file='result.for',status='new')
write(imp,100)
100   format(' ',70(' * '))
      open(lec,file='datac.for',status='old')
read(lec,110)ik,n,l,m,(nc(k),k=1,5),ge,xnu
110   format(9i2,f12.2,f12.10)
write(imp,300)ik,n,l,ge,xnu
300   format('//1x, 'data' //5x, ' ik=' ,i5,5x, ' l=' ,i3/5x,
1      ' ge=' ,e14.7, 10x, ' xnu=' ,e14.7)
write(imp,999)m,(nc(k),k=1,m_)
      format(5x, ' m=' ,3i,5x, ' nc(k)=' ,5(2x,i2))

```

```

do 1 i=1,l
  read (lec,120)cx(i),cy(i)
  format(2f10.6)
write(imp,500)

500   format(/5x,'point',10'x',x,18x,'y')
do 10 i=1,n
read(lec,130)x(i),y(i)
130   format(2f10.6)
10    write(imp,700)I,x(i),y(i)
700   format(5x,i3,2(5x,f12.5))
write(imp,800)
800   format(/2x,'boundary condition'//2x,'node',5x,'x direction',
  5x,'kode',5x,'y direction', 5x,'kode')
do 20 i=1,n
read(lec,140) kode(2*i-1),kode(2*i),fi(2*i)
140   format(i2,f10.4,i2,f10.4)
write(imp,950)I,fi(2*i-1),kode(2*i-1),fi(2*i),kode(2*i)
format(3x,i3,5x,f12.5,5x,i1,5x,f12.5,5x,i1)
return
end

```

```

subroutine fmat(x,y,xm,ym,g,h,fi,dfi,kode,nx)
common ik,nk,l,nc(5),m,ge,xnu,lec,imp
dimension x(1),y(1),xm(1),ym(1),g(nx,nx),h(nx,nx),fi(1)
dimension kode(1),dfi(1)
x(n+1)=x(1)
y(n+1)=y(1)
do 10 i=1,n
xm(i)=(x(i)+x(i+1))/2
ym(i)=(y(i)+y(i+1))/2
if(m-1)15,15,12
12   xm(nc(1))=(x(nc(1))+x(1))/2
ym(nc(1))=(y(nc(1))+y(1))/2
do 13 k=2,m
xm(nc(k))=(x(nc(k))+x(nc(k-1)+1))/2
ym(nc(k))=(y(nc(k))+y(nc(k-1)+1))/2
continue
  do 30 i=1,n
do 30 j=1,n
if(m-1)16,16,17
  if(j-nc(1))19,18,19
  kk=1
go to 23
  do 22 k=2,m
if(j-nc(k-1))22,21,22
21   kk=nc(k-1)+1
go to 23
continue

```

```

kk=j=1
if(i-j)20,25,20
20  call inte(xm(i),ym(i),x(j),y(j),x(kk),h((2*i-1),(2*j-1),
h((2*i-1),(2*j)),h((2*i),(2*j-1)),h((2*i),(2*j)),g((2*j-1),
(2*j-1)),g((2*i-1),(2*j)),g((2*i),(2*j)))
g((2*i),(2*j-1))=g((2*i-1),(2*j))
go to 30
  call inlo(x(j),y(j),x(kk),y(kk), g((2*i-1),(2*j-1)), g((2*i-1),
(2*j)),g((2*i),(2*j)))
h((2*i-1),(2*j-1))=0.5
h((2*i),(2*j))=0.5
h((2*i-1),(2*j))=0
h((2*i),(2*j-1))=0
g((2*i),(2*j-1))=g((2*i-1),(2*j))

```

```

30  continue
nn=2*n
do 50 j=1,nn
if(kode(j))43,43,40
do 42 i=1,nn
ch=g(i,j)
g(i,j)=-h(i,j)
  h(i,j)=-ch
go to 50
43  do 45 i=1,nn
g(i,j)=g(i,j)*ge
continue
do 60 i=1,nn
dfi(i)=0
do 60 j=1,nn
dfi(i)=dfi(i)+h(i,j)*fi(j)
continue
return
end

```

```

subroutine inte(xp,yp,x1,y1,x2,y2,h11,h12,h21,h22,g11,g12,g22)
common ik,n,l,nc(5),m,ge,xnu,lec,imp

```

```

dimension xco(4),yco(4),gi(4),ome(4)
gi(1)=0.86113631
gi(2)=-gi(1)
gi(3)=0.33998104
gi(4)=-gi(3)
ome(1)=0.34785484
ome(2)=ome(1)
ome(3)=0.65214515
ome(4)=ome(3)
ax=(x2-x1)/2
bx=(x2+x1)/2

```

```

ay=(y2-y1)/2
by=(y2+y1)/2
eta1=(y2-y1)/(2*sqrt(ax**2+ay**2))
eta2=(x1-x2)/(2*sqrt(ax**2+ay**2))
if(ax)10,20,10
ta=ay/ax
dist=abs((ta*xp-yp+y1-ta*x1)/sqrt(ta**2+1))
go to 30

```

```

20  dist=abs(xp-x1)
30  sig=(x1-xp)*(y2-yp)-(x2-xp)*(y1-yp)
if(sig)31,32,32
diat=-dist
h11=0
h12=0
h21=0
h22=0
g11=0
g12=0
g22=0
de=4*3.141592*(1-xnu)
do 40 i=1,4
xco(i)=ax*gi(i)+bx
yco(i)=ay*gi(i)+by
ra=sqrt((xp-xco(i))**2+(yp-yco(i))**2)
rd1=(xco(i)-xp)/ra
rd2=(yco(i)-yp)/ra
g11=g11+((3-4*xnu)*alog(1/ra)+rd1**2)*ome(i)*sqrt
(ax**2+ay**2)/(2*de*de)
g12=g12+rd1*rd2*ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)/(2*de*de)
g22=g22+((3-4*xnu)*alog(1/ra)+rd2**2)*ome(i)*sqrt
(ax**2+ay**2)/(2*de*de)
h11=h11-dist*((1-2*xnu)+2*rd1**2)/(ra**2*de)*ome(i)
sqrt(ax**2+ay**2)
h12=h12-(dist*2*rd1*rd2/ra+(1-2*xnu)*(eta1*rd2-
eta2*rd1))*ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)/(ra*de)
h21=h21-(dist*2*rd1*rd2/ra+(1-2*xnu)*(eta2*rd1-
eta1*rd2))*ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)/(ra*de)
h22=h22-dist*((1-2*xnu)+2*rd2**2)*ome(i)*sqrt(ax**2+
ay**2)/(ra**2*de)
return
end

```

```

subroutine inter(fi,dfi,kode,cx,cy,x,y,ssol,dsol)
common ik,n,l,nc(5),m,ge,xnu,lec,imp
dimension fi(1),dfi(1),kode(1),cx(1),cy(1),x(1),y(1),assol(1)
dimension dsol(1)
nn=2*n

```



```

do 20 i=1,nm
if(kode(i))15,15,10
10    ch=f(i)
fi(i)=dfi(i)
dfi(i)=ch
go to 20
15    dfi(i)=dfi(i)*ge
continue
do 40 k=1,1
dsol(2*k-1)=0
dsol(2*k)=0
ssol(3*k-2)=0
ssol(3*k-1)=0
ssol(3*k)=0
do 30 j=1,n
if(m-1)28,28,22
if(j-nc(1))24,23,24
kk=1
go to 29
do 26 lk=2,m
if(j-nc(lk))26,25,26
kk=j+1
    go to 29
continue
    k=j+1
    call inte(cx(k),cy(k),x(j),y(j),x(kk),y(kk),h11,h12,h21,h22,
    g11,g12,g22)
dsol(2*k-1)= dsol(2*k-1)+dfi(2*j-1)*g11+ dfi(2*j)*g12-fi(2*j-1)*
h11-fi(2*j)*h12
    dsol(2*k)= dsol(2*k)+dfi(2*j-1)*g12+ dfi(2*j)*g22-fi(2*j-1)*h21
    -fi(2*j)*h22
call sigml(cx(k),cy(k),x(j),y(j),x(kk),y(kk),d111,d211,d112,
d212,d122,d222,s111,s211,s112,s212,s122,s222)
ssol(3*k-2)= dsol(3*k-2)+dfi(2*j-1)*d111+ dfi(2*j)*d211-
1    fi(2*j-1)*s111-fi(2*j)*s211
ssol(3*k-1)= dsol(3*k-1)+dfi(2*j-1)*d112+ dfi(2*j)*d212-
fi(2*j-1)*s112-fi(2*j)*s212
30    ssol(3*k)= dsol(3*k)+dfi(2*j-1)*d122+ dfi(2*j)*d222-fi
(2*j-1)*s122-fi(2*j)*:
40    continue
    return
end

```

```

subroutine slnpd(a,b,d,n,nx)
dimension a(nx,nx),b(nx)
n1=n-1
do 100 k=1,n1
k1=k+1
c=a(k,k)
if(abs(a(j,k))-0.000001)1,1,3

```

```

do 7 j=k1,n
if(abs(a(j,k))-0.000001)7,7,5
do 6 l=k,n
c=a(k,l)
a(k,l)=a(j,l)
a(j,l)=c
c=b(k)
b(k)=b(j)
b(j)=c
c=a(k,k)
go to 3
continue
write(*,2)k
format(' * * * singularity in row',15)
d=0
go to 300
c=a(k,k)
do 4 j=k1,n
a(k,j)=a(k,j)/c
b(k)=b(k)/c
do 10 i=k1,n
c=a(i,k)
do 9 j=k1,n
a(i,j)= a(i,j)-c*a(k,j)
b(i)=b(i)-c*b(k)
continue
if(abs(a(n,n))-0.000001)90,90,101
write(*,95)
format(1x,'singularity d=0')
go to 300
b(n)=b(n)/a(n,n)
      do 200 l=l,nl
      k=n-1
      kl=k+1
do 200 j=kl,n
b(k)=b(k)-a(k,j)*b(j)
d=1
      do 250 i=l,n
d=d*a(i,i)
return
end

```

```

      subroutine sigml(xp,yp,x1,y1,x2,y2,d111,d211,d112,d212,
d122,d222,s111,s211,s112,s212,s122,s222)
common ik,n,l,nc(5),m,ge,xnu,lec,imp
dimension xco(4),yco(4),gi(4),ome(4)
gi(1)=0.86113631
gi(2)=-gi(1)
gi(3)=0.33998104
gi(4)=-gi(3)

```

```

ome(1)=0.34785484
ome(2)=ome(1)

ome(3)=0.65214515
ome(4)=ome(3)
ax=(x2-x1)/2
bx=(x2+x1)/2
ay=(y2-y1)/2
by=(y2+y1)/2
eta1=(y2-y1)/(2*sqrt(ax**2+ay**2))
eta2=(x2-x1)/(2*sqrt(ax**2+ay**2))
if(ax)10,20,10
    a=ay/ax
    dist=abs((ta*xp-yp+y1-ta*x1)/sqrt(ta**2+1))
    go to 30
    iat=abc(xp-x1)
    sig=(x1-xp)*(y2-yp)-(x2-xp)*(y1-yp)
if(sig)31,32,32
    dist=-dist
    d111=0
d211=0
d112=0
d212= 0
d122= 0
d222= 0
s111= 0
s211= 0
s112= 0
    s212= 0
s122= 0
s222= 0
fa=1-4*xnu
al=1-2*xnu
de=4*3.141592*(1-xnu)
do 40 i=1,4
xco(i)=ax*gi(i)+bx
yco(i)=ay*gi(i)+by
ra=sqrt((xp-xco(i))**2+(yp-yco(i))**2)
rd1=(xco(i)-xp)/ra
rd2=(yco(i)-yp)/ra
d111=d111+(al*rd1+2*rd1**3*ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2))/(de*ra)
d211=d211+( 2*rd1**2*rd2-al*rd2)*ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)
1      /(de*ra)
    d112=d112+(al*rd2+2*rd1**2*rd2)/(de*ra)*ome(i)*sqrt
(ax**2+ay**2)
d212=d212+(al*rd1+2*rd1**2*rd2)/(de*ra)*ome(i)*sqrt
(ax**2+ay**2)
    d122=d122+( 2*rd1**2*rd2-al*rd1)/(de*ra)*ome(i)*sqrt
(ax**2+ay**2)
d222=d222+( 2*rd2**3 +al*rd2)/(de*ra)*ome(i)*sqrt

```

```

      (ax**2+ay**2)
      s111=s111+( 2*dist/ra*(al*rd1+xnu*2*rd1-4*rd1**3)+
4*xnu*eta1*rd1**2+a1*(2*eta1*rd1**2+2*eta1)-fa*eta1)
*2*ge/(de*ra**2)*ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)
      s211=s211+( 2*dist/ra*(al*rd2 -4*rd1**2*rd2)+4*xnu*eta1
      *rd1*rd2+a1*2*eta2*rd1**2-fa*eta2)*2*ge/(de*ra**2)
      *ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)
      s112=s112+( 2*dist/ra*(xnu*rd2 -4*rd1**2*rd2)+2*xnu*
      (eta1*rd2*rd1+eta2*rd1**2)+al*(2*eta1*rd1*rd2+eta2))*2*ge/
      (de*ra**2)*ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)
      s212=s212+( 2*dist/ra*(xnu*rd1 -4*rd1**2*rd2)+2*xnu*
1      (eta1*rd2**2+eta2*rd1**rd2)+al*(2*eta2*rd1*rd2+eta1))
2      *2*ge/ (de*ra**2)*ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)
      s122=s122+( 2*dist/ra*(al*rd1 -4*rd1**2*rd2)+4*xnu*
      eta2*rd1*rd2+al*2*eta1*rd2**2-fa*eta1)*2*ge/ (de*ra**2)
      *ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)
      222=s222+( 2*dist/ra*(al*rd2 -4*rd2**3+2*xnu*rd2)+
      4*xnu*eta2*rd2**2+al*(2*eta2*rd2**2+2*eta2)-fa*eta2)
      *2*ge/ (de*ra**2)*ome(i)*sqrt(ax**2+ay**2)
return
      end
      subroutine output(xm,ym,fi,dfi,cx,cy,ssol,dsol)
      common ik,n,l,nc(5),m,ge,xnu,lec,imp
      dimension xm(1),ym(1),fi(1),dfi(1),cx(1),cy(1),ssol(1),dsol(1)
      write(imp,100)
      format('/',70('*'))//1x,'result'//2x,'boundary node'//1x,'node',
3x,'x',8x,'y',6x,'displacement x',2x,'displacemengt y',3x,
'traction x',2x,'traction y'/)
do 10 i=1,n
      write(imp,200)i,xm(i),ym(i),fi(2*i-1),fi(2*i),
1      dfi(2*i-1),dfi(2*i)
200      format(i3,2(1x,f10.5),2(1x,f11.3))
      write(imp,300)
300      format('//2x,'internal points',//3x,'x',10x,'y',5x,'diaplace',
4x,'displacey',4x,'sigma x',4x,'tauxy',4x,
'sigma y')
do 20 k=1,l
20      write(imp,400),cx(k),cy(k),dsol(2*k-1),dsol(2*k),ssol(3*k-2),
1      ssol(3*k-1),ssol(3*k)
400      format(1x,2(f9.4),2(1x,f10.6),3(1x,f10.3))
      write(imp,500)
      format('/',1x,70('*'))
return
end

subroutine inlo(x1,y1,x2,y2,g11,g12,g22)
common ik,n,l,nc(5),m,ge,xnu,lec,imp
ax=(x2-x1)/2
ay=(y2-y1)/2

```

```

sr=sqrt(ax**2+ay**2)
de=4*3.141592*ge*(1-xnu)
g11=sr*((3-4*xnu)*(1-alog(sr))+(x2-x1)**1/(4*sr**2))/de
g22=sr*((3-4*xnu)*(1-alog(sr))+(y2-y1)**1/(4*sr**2))/de
g12=(x2-x1)*(y2-y1)/(4*sr*de)
return
end

```