

模糊数学方法在水质评价中的应用

张焕智

[摘 要] 自然界中,许多事物都具有广泛而普遍的模糊性,模糊数学的应用弥补了经典数学用严格的标尺去度量具有模糊性事物造成失真的不足。在水资源研究中应用模糊数学方法对大量水质监测数据进行计算分析,对于合理地进行水质评价,能够取得较理想的效果。

[关键词] 模糊数学 经典数学 水资源 水质评价

模糊数学自 1965 年美国加利福尼亚大学控制论教授 L. A. Zaden 发表第一篇论文《Fuzzy Sets》以来,引起了众多数学爱好者的关注。自然界中,许多事物都具有广泛而普遍的模糊性,经典数学对于这些具模糊性的事物只能先给出一个特征性的标准,然后采用符合则是,不符合则不是的逻辑来判断,因而造成许多具模糊性的事物经严格的标尺去度量时,致使许多有用的信息丢失,甚至在结论上导致失真。模糊数学的应用,则弥补了经典数学在这方面的不足。

近几年来,模糊数学已被广泛的应用在水资源研究中。其中,水质评价是进行水资源规划及分析研究水质动态变化规律的一个不可忽视的重要内容。应用模糊数学方法对大量水质监测数据进行计算分析,对于合理地进行水质评价,能够取得较理想的效果。

1 水质级别的模糊综合评判

本文引用四口监测井水质监测数据及三级水质标准列于表 1、表 2。水质标准中,Ⅱ级水相当于国家饮用水标准;Ⅲ级水远高于Ⅱ级水,应采取措施加以控制和改善;Ⅰ级水远低于Ⅱ级水,应重点预防和保护,以免污染。

表 1 水质监测数据

监测井	分 析 项 目 (mg/l)				
	酚	氰	汞	铬 ⁶⁺	砷
1	0.004	0.016	0.017	0.005	0.041
2	0.008	0.185	0.004	0.164	0.140
3	0.001	0.018	0.000	0.019	0.015
4	0.002	0.000	0.000	0.026	0.000

表 2 水质分级标准

级别	分 析 项 目 (mg/l)				
	酚	氰	汞	铬 ⁶⁺	砷
I	0.001	0.02	0.00025	0.002	0.02
II	0.002	0.05	0.001	0.05	0.04
III	0.1	0.2	0.005	0.2	0.2
平均	0.034	0.09	0.002	0.084	0.087

本文依据表 1、2 数据进行各监测井水质级别的模糊综合评判。

计算时采用“指标加权平均值法”及“指标代表值法”，确定各井水质指标的权重：

指标加权平均值法

$$a_i = \frac{\frac{v_i}{\bar{u}_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\bar{u}_i}} \quad \text{其中} \quad \bar{u}_i = \frac{\sum u_{ij}}{m} \quad (1)$$

指标代表值法

$$a_i = \frac{\frac{v_i}{u_{ij'}}}{\sum \frac{v_i}{u_{ij'}}} \quad (2)$$

其中， v_i 为指标实测值， $\bar{u}_i$ 为指标标准平均值， $u_{ij'}$ 为指标标准代表值， j' 为代表值级别；本文取 II 级水标准为代表值。

构造评价矩阵可采用“半岭形分布”及“半梯形分布”函数：

半梯形分布函数

上升型：

$$\underline{R}(v_i) = [r_{ij}] = \begin{cases} 0 & v_i \leq u_{ij-1} \\ \frac{v_i - u_{ij-1}}{u_{ij} - u_{ij-1}} & u_{ij-1} < v_i < u_{ij} \\ 1 & v_i \geq u_{ij} \end{cases} \quad (3)$$

下降型:

$$\underline{R}(v_i) = [r_{ij}] = \begin{cases} 1 & v_i \leq u_{ij} \\ \frac{u_{ij+1} - v_i}{u_{ij+1} - u_{ij}} & u_{ij} < v_i < u_{ij+1} \\ 0 & v_i \geq u_{ij+1} \end{cases} \quad (4)$$

半岭形分布函数

上升型:

$$\underline{R}(v_i) = [r_{ij}] = \begin{cases} 0 & , v_i \leq u_{ij-1} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{u_{ij} - u_{ij-1}} (v_i - \frac{u_{ij-1} + u_{ij}}{2}) & , u_{ij-1} < v_i < u_{ij} \\ 1 & , v_i \geq u_{ij} \end{cases} \quad (5)$$

下降型:

$$\underline{R}(v_i) = [r_{ij}] = \begin{cases} 1 & , v_i \leq u_{ij} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{u_{ij+1} - u_{ij}} (v_i - \frac{u_{ij} + u_{ij+1}}{2}) & , u_{ij} < v_i < u_{ij+1} \\ 0 & , v_i \geq u_{ij+1} \end{cases} \quad (6)$$

进行模糊综合评判的广义合成时，可采用“ $\vee$ ， $\wedge$ ”、“ $\oplus$ ， $\cdot$ ”、“ $\vee$ ， $\cdot$ ”及“ $\oplus$ ， $\wedge$ ”四对算子，即

$$b_j^1 = \vee (a_i \wedge r_{ij})$$

$$b_j^2 = \bigoplus (a_i \cdot r_{ij})$$

$$b_j^3 = \vee (a_i \cdot r_{ij})$$

$$b_j^4 = \bigoplus (a_i \wedge r_{ij})$$

其中， $\bigoplus$ 为n个数在“ $\oplus$ ”运算下求和“ $\oplus$ ”，亦即表示 $a \oplus b = \min(1, a+b)$ 。

经计算，得出各井水质模糊综合评判结果，列于表 3-1、2、3。

表 3-1 确定权重计算表

监测井	指标平均值 [A1]	指标代表值 [A2]
1	[0.013 0.020 0.908 0.007 0.053]	[0.098 0.016 0.831 0.005 0.050]
2	[0.029 0.264 0.246 0.251 0.207]	[0.216 0.200 0.216 0.177 0.189]
3	[0.046 0.318 0.000 0.360 0.275]	[0.310 0.223 0.000 0.235 0.232]
4	[0.158 0.000 0.000 0.842 0.000]	[0.658 0.000 0.000 0.342 0.000]

表 3-2 构造评价矩阵表

监测井	1	2	3	4
半梯形 [R1]	$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.98 & 0.02 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.938 & 0.063 & 0.0 \\ 0.0 & 0.994 & 0.006 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.938 & 0.061 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0.24 & 0.76 \\ 0 & 0.375 & 0.625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \\ 0.646 & 0.354 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}$
半岭形 [R2]	$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.999 & 0.001 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.99 & 0.01 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.991 & 0.009 \\ 0 & 0.024 & 0.975 \\ 0 & 0.146 & 0.854 \\ 0 & 0.135 & 0.864 \\ 0 & 0.309 & 0.691 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \\ 0.721 & 0.279 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1.0 & 0.0 & 0 \end{bmatrix}$

表 3-3 模糊综合评判表

监测井	合成算子	B = A1 $\odot$ R1	B = A1 $\odot$ R2	B = A2 $\odot$ R1	B = A2 $\odot$ R2
		I II III	I II III	I II III	I II III
1	$\vee, \wedge$	0.020 0.053 0.908	0.020 0.053 0.908	0.016 0.098 0.831	0.016 0.098 0.831
	$\oplus, \cdot$	0.026 0.065 0.909	0.026 0.066 0.908	0.020 0.146 0.834	0.020 0.148 0.832
	$\vee, \cdot$	0.020 0.052 0.908	0.020 0.053 0.908	0.016 0.096 0.831	0.016 0.098 0.831
	$\oplus, \wedge$	0.026 0.072 0.927	0.026 0.072 0.909	0.021 0.153 0.858	0.020 0.153 0.833
2	$\vee, \wedge$	0 0.246 0.264	0 0.208 0.264	0 0.216 0.216	0 0.216 0.216
	$\oplus, \cdot$	0 0.254 0.745	0 0.170 0.829	0 0.390 0.609	0 0.334 0.666
	$\vee, \cdot$	0 0.077 0.237	0 0.064 0.258	0 0.203 0.180	0 0.214 0.195
	$\oplus, \wedge$	0 0.824 1	0 0.544 0.979	0 0.899 0.844	0 0.712 0.793
3	$\vee, \wedge$	0.360 0.354 0	0.360 0.279 0	0.31 0.235 0	0.310 0.235 0
	$\oplus, \cdot$	0.873 0.127 0	0.900 0.10 0	0.917 0.083 0	0.934 0.066 0
	$\vee, \cdot$	0.318 0.127 0	0.318 0.10 0	0.31 0.083 0	0.310 0.066 0
	$\oplus, \wedge$	1 0.354 0	1 0.279 0	1 0.235 0	1 0.235 0
4	$\vee, \wedge$	0.50 0.50 0	0.50 0.50 0	0.342 0.658 0	0.342 0.658 0
	$\oplus, \cdot$	0.421 0.579 0	0.421 0.579 0	0.171 0.829 0	0.171 0.829 0
	$\vee, \cdot$	0.421 0.421 0	0.421 0.421 0	0.171 0.658 0	0.171 0.658 0
	$\oplus, \wedge$	0.50 0.658 0	0.50 0.658 0	0.342 1 0	0.342 1 0

模糊综合评判结果表明，1、2 井为Ⅲ级水，其中 1 井酚、汞、砷三项超标，2 井五项指标均超标，因此划为Ⅲ级水是合适的；3 井为Ⅰ级水，各项指标均低于饮用水标准；4 井为Ⅱ级水，其中酚含量达到标准最大允许限量。可见，模糊综合评判的结果是合理的。

模糊综合评判中，权重实际表示各因子对水质污染影响占总污染影响的百分比，它与该因子的监测浓度大小成正比，而与其标准含量值成反比。“指标平均值法”突出了监测浓度大的因子，而忽视了监测浓度虽然小，但标准含量值低，因而严重超标影响水质质量、而且对人体危害大的因子的作用。如 2 井酚含量仅 0.008mg/l，已超标达 4 倍，其权重仅 0.029；4 井酚含量 0.002mg/l，达到饮用水标准最大允许含量值，铬 $^{6+}$ 含量 0.026mg/l，低于标准值(II)近 50%，而酚的权重仅 0.158，铬 $^{6+}$ 的权重却达 0.842。“指标代表值法”以饮用水标准(II)做为计算权重的依据，对标准值低的因子亦给予较大的权重，使权重的确定趋于合理。如 2 井酚的权重为 0.216，提高了 7.4 倍；4 井酚的权重提高为 0.658，而铬 $^{6+}$ 的权重相应降低为 0.342，更加符合实际。权重值确定的是否合理，直接影响模糊综合评判结果；如 1 井有三项指标超标，4 井有一项指标达到 II 级水质标准，采用“指标代表值法”确定的权重进行模糊综合评判，都相应提高了对 II 级水的隶属度，使水质质量得到了更合理的评价。

构造评价矩阵时，对介于两个级别之间的数值，“半梯形”以线性分布特征计算其对于相邻两级别的隶属度，分布均匀；“半岭形”以正弦曲线分布特征进行计算，有向两级聚拢，突出其间差异的作用，宜于增强评判效果。如 2 井以“半梯形分布”计算， $\underline{B} = \vee (\underline{A1} \wedge \underline{R1}) = [0 \quad 0.246 \quad 0.264]$ ，对 II (0.246)、III (0.264) 级水的隶属度相差很小；而以“半岭形分布”计算， $\underline{B} = \vee (\underline{A1} \wedge \underline{R2}) = [0 \quad 0.208 \quad 0.264]$ ，II (0.208)、III (0.264) 级水的隶属度差异明显，其 III 级水的隶属度相对增大。

在模糊综合评判的合成运算中，不同的合成算子作用有所差异。算子 $(\vee, \wedge)$ 的结果取决于权重最大的因子，适合于单项最优即算最优的情况；如 1 井综合评判中，由于汞的权重最大(0.908)，而被判为Ⅲ级水。但是，当各指标权重较均匀时，其评判效果不太明显，如 2 井有四项指标对Ⅲ级水的隶属度最大，由于各指标权重较均匀，综合评判结果其对于Ⅲ级水的隶属度仅 0.264，而Ⅱ级水的隶属度亦达 0.246。算子 $(\oplus, \cdot)$ 对参加评判的所有因子依权重大小均衡兼顾，比较适用于要求 整体指标的情况；如 2 井与 4 井采用算子 $(\vee, \wedge)$ 评判效果较差，而采用算子 $(\oplus, \cdot)$ 后，取得了较合理的评判结果。算子 $(\vee, \cdot)$ 与 $(\oplus, \wedge)$ 评判，即突出了权重大的因子的作用，同时多少反映了其它因子的影响，可对算子 $(\vee, \wedge)$ 的评判起到弥补的作用，具有加细的功能；如 2 井采用该算子后，其Ⅲ级水的隶属度(0.237)相对于Ⅱ级水的隶属度(0.077)，有较大的提高，使其得到更合理的评价。

进行水质评价时，水质分级合理与否是决定模糊综合评判结果是否符合实际条件的关键所在。表 2 中，Ⅱ级水为国家饮用水标准，Ⅲ级水各因子含量高出Ⅱ级水含量的 4~50 倍、Ⅰ级水各因子含量为Ⅱ级水含量的 4%~54%，相邻两级水的差异之大，使得各因子在评价中失去了平等的地位。因此，在采用“指标代表值法”确定权重进行模糊综合评判时，容易得出错误结论。如 2 井利用算子 $(\vee, \wedge)$ 时评判失效；而利用算子 $(\vee, \cdot)$ 及 $(\oplus, \wedge)$ 时，则判为Ⅱ级水，显然与实际不符。

水质分级原则应建立在诸因子对各级水中含量的分布逼近于同一尺度上，才会在评价中体现出各级水对于各因子的平等关系，从而保

证评判结果的合理性、真实性。基于此点，取国家生活饮用水卫生标准 (GB5749-85) 为 II 级水标准 (即特征性的指标)，取 $I / II = II / III = 1 / 5$ 的等比关系建立新的水质分级标准列于表 4。

表 4 水质分级标准(等比)

级别	项 目 (mg/l)				
	酚	氰	汞	铬 ⁶⁺	砷
I	0.0004	0.01	0.0002	0.01	0.01
II	0.002	0.05	0.001	0.05	0.05
III	0.01	0.25	0.005	0.25	0.25
平均	0.004	0.103	0.002	0.103	0.103

依据表 1 与表 4，采用“指标代表值法”（以 II 级标准为代表值）确定各井、各指标的权重，进行模糊综合评判。计算中，分别采用“半岭形分布”与“半梯形分布”函数构造各井的评价矩阵，以及采用四对合成算子分别进行模糊集的合成运算，模糊综合评判结果列于表 5-1、2、3，其中，1、2 井为 III 级水；3 井为 I 级水；4 井为 II 级水。

最后得出的各井水质模糊综合评判结果基本一致，可见其评价效果是较理想的。

表 5-1 权重计算表

监测井	权 重 [A]				
1	[0.099	0.016	0.840	0.005	0.041]
2	[0.225	0.208	0.225	0.184	0.157]
3	[0.325	0.234	0	0.247	0.195]
4	[0.658	0	0	0.342	0]

表 5-2 构造评价矩阵表

监测井	1			2			3			4		
半梯形 [R1]	[0.0	0.75	0.25]	[0	0.25	0.75]	[0.625	0.375	0]	[0.0	1.0	0]
	[0.85	0.15	0.0]	[0	0.325	0.675]	[0.8	0.2	0]	[1.0	0.0	0]
	[0.0	0.0	1.0]	[0	0.25	0.75]	[1.0	0.0	0]	[1.0	0.0	0]
	[1.0	0.0	0.0]	[0	0.43	0.57]	[0.775	0.225	0]	[0.6	0.4	0]
	[0.225	0.775	0.0]	[0	0.55	0.45]	[0.875	0.125	0]	[1.0	0.0	0]
半岭形 [R2]	[0.0	0.854	0.146]	[0	0.146	0.854]	[0.691	0.309	0]	[0.0	1.0	0]
	[0.945	0.054	0.0]	[0	0.239	0.761]	[0.904	0.096	0]	[1.0	0.0	0]
	[0.0	0.0	1.0]	[0	0.146	0.854]	[1.0	0.0	0]	[1.0	0.0	0]
	[1.0	0.0	0.0]	[0	0.391	0.609]	[0.880	0.120	0]	[0.654	0.346	0]
	[0.12	0.88	0.0]	[0	0.578	0.422]	[0.962	0.038	0]	[1.0	0.0	0]

表5-3 模糊综合评判表

监测井	合 成 算 子	$B = A \odot R1$			水质级别	$B = A \odot R2$			水质级别
		I	II	III		I	II	III	
1	$\vee, \wedge$	0.041	0.099	0.840	III	0.040	0.099	0.840	III
	$\oplus, \cdot$	0.027	0.108	0.865	III	0.025	0.121	0.854	III
	$\vee, \cdot$	0.013	0.074	0.840	III	0.015	0.084	0.840	III
	$\oplus, \wedge$	0.061	0.155	0.939	III	0.061	0.155	0.939	III
2	$\vee, \wedge$	0	0.225	0.225		0	0.208	0.225	III
	$\oplus, \cdot$	0	0.346	0.654	III	0	0.279	0.721	III
	$\vee, \cdot$	0	0.087	0.169	III	0	0.091	0.192	III
	$\oplus, \wedge$	0	1	1		0	0.843	1	III
3	$\vee, \wedge$	0.325	0.325	0		0.325	0.309	0	I
	$\oplus, \cdot$	0.752	0.248	0	I	0.840	0.159	0	I
	$\vee, \cdot$	0.203	0.122	0	I	0.224	0.10	0	I
	$\oplus, \wedge$	1	0.875	0	I	1	0.562	0	I
4	$\vee, \wedge$	0.342	0.658	0	II	0.342	0.658	0	II
	$\oplus, \cdot$	0.205	0.795	0	II	0.224	0.776	0	II
	$\vee, \cdot$	0.205	0.658	0	II	0.224	0.657	0	II
	$\oplus, \wedge$	0.342	1	0	II	0.342	1	0	II

2 水质类型的模糊聚类分析

利用模糊聚类分析进行水质评价，可以根据水中超标项目及其程度，基于不同的研究目的进行水质类型的划分，从而便于研究各类水的实用意义、超标项目与原因及其治理措施。

本文仍以表1四眼井水质监测数据进行模糊聚类分析。计算中，对原始数据进行“极差正规化”与“引入标准值标准化”（以表4中Ⅱ级水为标准值）处理后，采用“算术最小平均法”构造模糊相似关系矩阵；然后分别以算子“ $\vee, \wedge$ ”与“ $\vee, \cdot$ ”进行模糊等价关系矩阵的合成运算；最后根据 λ —截矩阵进行水质类型分析。计算结果综合列于表6。

表6 模糊聚类分析表

数据处理	相似矩阵 $\tilde{R}$	合成等价矩阵		λ - 截矩阵
		算子	$R1 = R2 \odot R2$	
极差正规化	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0.345 & 1 & & \\ 0.184 & 0.129 & 1 & \\ 0.137 & 0.121 & 0.310 & 1 \end{bmatrix}$	$\vee, \wedge$	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0.345 & 1 & & \\ 0.184 & 0.184 & 1 & \\ 0.184 & 0.184 & 0.310 & 1 \end{bmatrix}$	$\lambda_{0.3} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
		$\vee, \cdot$	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0.345 & 1 & & \\ 0.184 & 0.129 & 1 & \\ 0.137 & 0.121 & 0.310 & 1 \end{bmatrix}$	$\lambda_{0.3} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
引入标准值	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0.497 & 1 & & \\ 0.831 & 0.445 & 1 & \\ 0.831 & 0.445 & 1.0 & 1 \end{bmatrix}$	$\vee, \wedge$	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0.497 & 1 & & \\ 0.831 & 0.497 & 1 & \\ 0.831 & 0.497 & 1.0 & 1 \end{bmatrix}$	$\lambda_{0.9} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
		$\vee, \cdot$	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0.497 & 1 & & \\ 0.831 & 0.445 & 1 & \\ 0.831 & 0.445 & 1.0 & 1 \end{bmatrix}$	$\lambda_{0.9} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

模糊聚类分析结果表明，以“极差正规化”处理数据，平衡了各指标的总体情况，取 $\lambda = 0.3$ 时，可划分为两类：1、2 井为 I 类，属于污染水；3、4 井为 II 类，属于适宜饮用水。以“引入 II 级标准值”处理数据，突出了各因子的超标情况，取 $\lambda = 0.9$ 时，可划分三类：2 井为 I 类，全部项目超标为严重污染水；1 井为 II 类，二项超标为污染水；3、4 井为 III 类，为适宜饮用水。可见，上述分类与评价都是符合实际的。

综合上述，模糊数学方法在水质评价中是行之有效的。然而，任何一种评价必须建立于对实际条件的深入分析和认识的基础之上。否则，再好的方法也是没有生命力的。

注：本文 1990 年前完成，曾联名发表于《黑龙江地质》（1993.3）