

用非线性回归法确定 潜水蒸发经验式中的参数

郭建青* 张亚丁[✓] 毛全年** 段宏斌***

摘要 介绍了用非线性回归分析方法确定阿维里扬诺夫潜水蒸发经验公式参数的具体步骤. 通过实例对该方法进行了较为详细的讨论, 并指出了其优点和在实际应用时应注意的问题.

关键词 非线性回归 潜水蒸发 参数计算 地下水

中图分类号 O 212.1

0 引言

浅层地下水蒸发强度 e 和潜水位埋深 Δ 之间的经验关系式为^[1]

$$e = e_0(1 - \Delta/\Delta_0)^n, \quad (1)$$

式中 e_0 表示地下水位接近地表面时的蒸发强度(mm/d), 可用水面蒸发强度代替, Δ_0 表示潜水蒸发的极限埋深(m), 即浅层地下水蒸发强度等于零时的临界潜水面的埋深, n 为反映综合因素影响的经验指数. 公式(1)在我国得到了较为广泛的应用^[2,3].

然而, 比较准确和客观地确定研究地点的 n 和 Δ_0 并不容易. 实际中多采用潜水蒸发桶或浅层地下水均衡场的方法. 观测到相应不同 Δ_i 时的潜水蒸发强度 e_i , 绘制 $e_i \sim \Delta_i$ 曲线, 在该曲线上选取两点 (e_1, Δ_1) 和 (e_2, Δ_2) , 采用下式计算 n 值^[3]

$$n = \ln(e_1/e_2) / \ln[(\Delta_0 - \Delta_1)/(\Delta_0 - \Delta_2)], \quad (2)$$

式中的 Δ_0 需要通过实际观测或者由综合分析土壤、植被和气候等因素得到.

采用上述方法确定 n 和 Δ_0 时, 存在着两个问题: (1) 需要进行潜水蒸发实验和较为充足的 (e_i, Δ_i) 数据组才能较准确地绘出 $e_i \sim \Delta_i$ 曲线, 对实验要求较高, 且耗时和费力; (2) 在潜水蒸发实验中, 要求观测并判断 Δ_0 值, 明显地存在着人为因素的影响. 作者采用非线性回归分析方法弥补了上述不足.

* 西安地质学院水工系, 710054, 西安市雁塔路6号. 郭建青, 男, 38岁, 副教授.

** 陕西省泾惠渠灌区管理局.

*** 陕西省林业学校.

收稿日期: 1996-06-12

1 参数计算原理和方法

1.1 非线性回归计算问题的提出

设潜水位变幅带的土壤给水度 μ , 经验指数 n 和极限埋深 Δ_0 均为待求参数. 由于 $\varepsilon_i = \mu \Delta h_i$, (1) 式可以改写为

$$\Delta h = (\varepsilon_0 / \mu) (1 - \Delta / \Delta_0)^n, \quad (3)$$

式中 Δh 表示单位时间内由于潜水蒸发而引起的潜水位变幅值 (m), 其它符号意义同前.

通过一般的浅层地下位观测孔可以观测到一组相应于不同潜水位埋深 Δ_i 的浅层地下水位变幅值 Δh_i (在无降雨期间). 水面蒸发强度 ε_0 受日照, 气温等因素的影响, 在整个观测期间不可能为常数, 因此在计算之前需要具有一组 $(\Delta_i, \Delta h_i, \varepsilon_{0i})$ ($i = 1, 2, \dots, m$, 为数据序数). 为了利用上述原始观测数据, 根据式 (3) 估计 μ, Δ_0 和 n 之值, 可使下式达到最小而实现, 即

$$f(\mu, \Delta_0, n) = \sum_{i=1}^m (\Delta h_i^{\text{obs}} - \Delta h_i^{\text{cal}})^2 = \sum_{i=1}^m [\Delta h_i^{\text{obs}} - \Delta h(\Delta_i, \varepsilon_{0i}, \mu, \Delta_0, n)]^2 \Rightarrow \min. \quad (4)$$

式中 Δh_i^{obs} 表示相应于 Δ_i 的潜水位变幅观测值, Δh_i^{cal} 表示由式 (3) 计算得到的潜水位变幅值.

式 (3) 表示的是自变量为 Δ_i 和 ε_{0i} , 因变量为 Δh_i 的非线性函数关系. 所以上述问题为非线性最小二乘参数估计问题——非线性回归计算问题^[4].

1.2 计算方法

先分别给待估参数 μ, Δ_0 和 n 取初始近似值, 记作 $\mu^{(0)}, \Delta_0^{(0)}$ 和 $n^{(0)}$, 与真值之差分别记为 $\delta\mu, \delta\Delta_0$ 和 δn , 即

$$\mu = \mu^{(0)} + \delta\mu, \Delta_0 = \Delta_0^{(0)} + \delta\Delta_0, n = n^{(0)} + \delta n.$$

这样, 估计 μ, Δ_0 和 n 值的问题就转化为计算修正值 $\delta\mu, \delta\Delta_0$ 和 δn 的问题. 将式 (3) 表示的函数 Δh 在 $\mu^{(0)}, \Delta_0^{(0)}$ 和 $n^{(0)}$ 附近作 Taylor 展开, 略去 $\delta\mu, \delta\Delta_0$ 和 δn 的二次及以上的项可得

$$\Delta h(\varepsilon_{0i}, \Delta_i, \mu, \Delta_0, n) \approx \Delta h(\varepsilon_{0i}, \Delta_i, \mu^{(0)}, \Delta_0^{(0)}, n^{(0)}) + F_\mu \cdot \delta\mu + F_{\Delta_0} \cdot \delta\Delta_0 + F_n \cdot \delta n. \quad (5)$$

式中 F_μ, F_{Δ_0} 和 F_n 分别是 Δh 对 μ, Δ_0 和 n 的偏导数在 $\mu = \mu^{(0)}, \Delta_0 = \Delta_0^{(0)}$ 和 $n = n^{(0)}$ 时的值.

$$F_\mu = -\Delta h(\varepsilon_{0i}, \Delta_i, \mu^{(0)}, \Delta_0^{(0)}, n^{(0)}) / \mu^{(0)},$$

$$F_{\Delta_0} = \Delta h(\varepsilon_{0i}, \Delta_i, \mu^{(0)}, \Delta_0^{(0)}, n^{(0)}) \left[\frac{\Delta_i}{\Delta_0^{(0)} (\Delta_0^{(0)} - \Delta_i)} \right],$$

$$F_n = \Delta h(\varepsilon_{0i}, \Delta_i, \mu^{(0)}, \Delta_0^{(0)}, n^{(0)}) \ln(1 - \Delta_i / \Delta_0^{(0)}).$$

当 $\mu^{(0)}, \Delta_0^{(0)}$ 和 $n^{(0)}$ 值给定时, $\Delta h(\varepsilon_{0i}, \Delta_i, \mu^{(0)}, \Delta_0^{(0)}, n^{(0)})$, F_μ, F_{Δ_0} 和 F_n 均为 ε_{0i} 和 Δ_i 的已知显函数, 其值能够直接算出. 将式 (5) 代入式 (4) 可得

$$f(\mu, \Delta_0, n) = \sum_{i=1}^m [\Delta h_i - \Delta h(\varepsilon_{0i}, \Delta_i, \mu^{(0)}, \Delta_0^{(0)}, n^{(0)}) - F_\mu \cdot \delta\mu - F_{\Delta_0} \cdot \delta\Delta_0 - F_n \cdot \delta n]^2. \quad (6)$$

从式 (6) 可以看出, 经上述近似处理后, 非线性回归问题即转化为线性回归计算问题. 为使 $f(\mu, \Delta_0, n)$ 的值极小, 须 $\frac{\partial f}{\partial \mu} = 0, \frac{\partial f}{\partial \Delta_0} = 0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$. 由此可导出如下正则方程组:

$$\begin{cases} a_{11}\delta\mu + a_{12}\delta\Delta_0 + a_{13}\delta n = a_{10}, \\ a_{21}\delta\mu + a_{22}\delta\Delta_0 + a_{23}\delta n = a_{20}, \\ a_{31}\delta\mu + a_{32}\delta\Delta_0 + a_{33}\delta n = a_{30}. \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$a_{11} = \sum_{i=1}^m (F_\mu)^2, \quad a_{22} = \sum_{i=1}^m (F_{\Delta_0})^2,$$

$$\begin{aligned}
 a_{33} &= \sum_{i=1}^n (F_{\mu})^2, & a_{12} &= a_{21} = \sum_{i=1}^n F_{\mu} \cdot F_{\Delta_0}, \\
 a_{13} &= a_{31} = \sum_{i=1}^n F_{\mu} \cdot F_{\pi}, & a_{23} &= a_{32} = \sum_{i=1}^n F_{\Delta_0} \cdot F_{\pi}, \\
 a_{14} &= \sum_{i=1}^n F_{\mu} \cdot [\Delta h_i - \Delta h(e_{0i}, \Delta_1, \Delta_0^{(0)}, \mu^{(0)}, \pi^{(0)})], \\
 a_{24} &= \sum_{i=1}^n F_{\Delta_0} \cdot [\Delta h_i - \Delta h(e_{0i}, \Delta_1, \Delta_0^{(0)}, \mu^{(0)}, \pi^{(0)})], \\
 a_{34} &= \sum_{i=1}^n F_{\pi} \cdot [\Delta h_i - \Delta h(e_{0i}, \Delta_1, \Delta_0^{(0)}, \mu^{(0)}, \pi^{(0)})].
 \end{aligned}$$

在潜水蒸发实验中观测到 m 组原始数据 $(e_{0i}, \Delta h_i, \Delta_1)$ 后, 采用非线性回归分析方法估计参数 μ , Δ_0 和 π 值时, 首先需要分别给出这三个参数的初始近似值 $\mu^{(0)}$, $\Delta_0^{(0)}$ 和 $\pi^{(0)}$, 然后计算出正则方程组 (7) 的各个系数值, 解之可得 $\delta\mu$, $\delta\Delta_0$ 和 $\delta\pi$, 进而可得 μ , Δ_0 和 π .

将非线性回归问题转化为线性回归计算问题的过程中, 进行了 Taylor 展开, 并忽略了 $\delta\mu$, $\delta\Delta_0$ 和 $\delta\pi$ 的高次项, 这种近似处理只有在 $|\delta\mu|$, $|\delta\Delta_0|$ 和 $|\delta\pi|$ 的值较小时才是可行的. 若 $|\delta\mu|$, $|\delta\Delta_0|$ 和 $|\delta\pi|$ 的值较大时, 可令已解出的 μ , Δ_0 和 π 值代替原来的 $\mu^{(0)}$, $\Delta_0^{(0)}$ 和 $\pi^{(0)}$ 值, 重复上述运算, 得到新的 $\delta\mu$, $\delta\Delta_0$ 和 $\delta\pi$ 值 (从而得到新的 μ , Δ_0 和 π 值), 直至 $|\delta\mu|$, $|\delta\Delta_0|$ 和 $|\delta\pi|$ 值小到可以忽略不计的程度, 得到欲估计的参数值 μ , Δ_0 和 π .

2 算例与讨论

2.1 算例

根据陕西省泾惠渠灌区的潜水蒸发的实际观测资料* (见表 1), 采用非线性回归分析方法确定观测区的潜水位变幅带的给水度 μ , 极限埋深 Δ_0 和经验指数 π .

选取初始近似值 $\mu^{(0)} = 0.02$, $\Delta_0^{(0)} = 10$ 和 $\pi^{(0)} = 2$, 利用自己编制的程序在微机上计算, 经过 23 次迭代, 最后输出结果为 $\mu = 9.27 \times 10^{-2}$, $\Delta_0 = 6.19 \text{ m}$, $\pi = 3.19$. 将上述参数值代入式 (3), 求出 $\Delta h_i/e_{0i}$ 及其与观测值 $\Delta h_i/e_{0i}$ 的相对误差, 结果见表 1.

2.2 讨论

(1) 由表 1 可以看出, 大部分 $\Delta h_i/e_{0i}$ 值与观测值吻合较好 (相对误差小于 10%), 表明采用非线性回归分析方法确定的 μ , Δ_0 和 π 值是可靠的, 个别的相对误差较大, 可能是在实际观测过程中, 由于众多因素而产生的误差所致.

(2) 以往确定 Δ_0 的主要方法为实际观测. 应用非线性回归分析方法分析潜水蒸发实验数据时, 不要求 Δ_0 为已知, 因此, 放宽了对潜水蒸发实验的要求. 同时, 还可以计算出潜水位变幅带的土壤给水度 μ .

(3) 非线性回归分析方法注重全体数据的最佳拟合 (即式 (4) 表示的离差平方和取极小值), 不强调单个数据的完全吻合. 与以往确定经验指数 n 的方法相比较, 可以弥补在 μ , $\Delta h_i \sim \Delta_1$ 曲线上该点偶有较大误差而得出不正确结果的不足.

* 引自《泾惠渠灌区续建工程地质勘测设计报告》(地质部, 第三地质研究所编, 1983 年).

表1 实测值与计算值的比较

Δ_i (m)	$\Delta h_i/\rho_0$ 观测值	$\Delta h_i/\rho_0$ 计算值	相对误差 (%)	Δ_i (m)	$\Delta h_i/\rho_0$ 观测值	$\Delta h_i/\rho_0$ 计算值	相对误差 (%)
1.905	3.382	3.324	-1.703	4.005	0.582	0.524	-9.966
3.330	0.968	0.992	2.470	2.320	2.419	2.451	1.320
3.270	0.968	1.055	9.03	2.500	1.982	2.125	7.215
3.160	1.129	1.179	4.41	2.900	1.397	1.508	7.940
3.860	0.724	0.538	-25.7	1.580	4.509	4.138	-8.24
3.775	0.794	0.598	-24.6	1.890	3.553	3.359	-5.45

(4) 应用非线性回归分析方法估计参数,须注意待求参数初始值的选取.如果选取不当,迭代会出现不收敛现象.在一般情况下,只要初始值选取在常见范围内,都可以收敛得到唯一解.在进行以上算例的计算过程中,作者曾在 $\mu=0.01\sim 0.2$, $\Delta_0=3.0\sim 10.0$ m, $n=1\sim 5$ 内选取不同组合的初始值进行计算,均未出现不收敛现象.初始值不同,迭代次数可能不同,但计算结果是一致的.

参考文献

- 1 Аверьянов С.Ф. 防治灌溉土地盐渍化的水平排水措施. 姜涛礼译. 北京:中国工业出版社,1963
- 2 张蔚榛主编. 地下水非稳定流计算和地下水资源评价. 北京:科学出版社,1983
- 3 沙金焱. 农田地下水排水计算. 北京:水力电力出版社,1983
- 4 韦博成. 近代非线性回归分析. 南京:东南大学出版社,1989
- 5 James V Beck. Parameter Estimation in Engineering and Science. John Wiley and Sons Inc, 1977

The Application of Non-linear Regressive Method to Determining the Parameters in the Experimental Equation of Phreatic Groundwater Evaporation

Gao Jianping et al

(Xi'an College of Geology, Shaanxi, 710054)

Abstract The non-linear regressive method was introduced in this paper to determine the parameters in the experimental equation of phreatic groundwater evaporation. With a practical example, the procedure and the problems related were discussed in detail.

Keywords non-linear regressive, phreatic groundwater evaporation, parameter determination