文章编号:1007 -6069(2011)01 -0102 -08

钢框架基于复模态随机反应分析的抗震可靠度研究

杨伟军[1],张振浩[1],禹 慧[2]
(1. 长沙理工大学 土木与建筑学院,湖南 长沙 410076; 2. 同济大学 土木工程学院,上海 200092)

摘 要:首次将复模态法应用于钢框架结构的随机地震反应分析中,通过算例对钢框架结构在平稳地震激励下的抗震可靠度进行了计算分析。同时,提出了钢框架在非平稳地震激励下的反应统计量的求解方法。研究表明,钢框架结构在非平稳地震激励下的随机反应分析,可以利用扩阶的方法来进行,将求解结构非平稳随机响应转化为求解扩阶系统在均匀调制白噪声激励下的响应。采用复模态分析法可较方便地求解出结构在非平稳地震激励下弹性随机反应的协方差函数及均方差的解析表达式。

关键词:钢框架;复模态;随机反应;平稳激励;非平稳激励;抗震可靠度
中图分类号:TU312.1;P315.9 **文献标志码**:A

The research of seismic reliability of a steel frame based on complex modal method for analysis of random response

YANG Weijun[1], ZHANG Zhenhao[1], YU Hui[2]
(1. School of Givi Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China;
2. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Complex modal method is introduced into analysis of stochastic seismic response of a steel frame for the first time. Through a calculating example, the seismic reliability of a steel frame structure under stationary seismic excitation is analysed. At the same time, the solution method which can obtain response statistics of the steel frame under non-stationary seismic excitation is proposed. It is shown that the stochastic response analysis of structures under non-stationary seismic excitation can be done by the method of augmenting-exponent-number. The non-stationary stochastic response of the structure can be converted into the response of augmenting-exponent-number system under homogeneous modulation white noise excitation. The analytical expression of covariance function and mean square deviation of elastic stochastic response of the structure under non-stationary seismic excitation can be obtained more easily with the complex modal method.

Key words: steel frame; complex modal; stochastic response; stationary excitation; non-stationary seismic excitation; seismic reliability

引言

模态分析法是求解多自由度体系振动问题的一个有效工具,它将多自由度体系的响应问题分解为若干个模态响应问题,而每个模态响应问题相当于一个单自由度系统的响应问题,从而达到化繁为简的目的。对

收稿日期:2009 -09 -07; **修订日期**:2009 -11 -09
基金项目:湖南省高校科技创新平台开放基金项目(09K068);长沙理工大学桥梁工程重点实验室开放基金项目(09KA02)
作者简介:杨伟军(1962 -),男,教授,博士生导师,主要从事结构工程及桥梁工程研究. E-mail: mgbyrh@163.com

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

于结构动力方程为非经典阻尼、非对称质量和非对称刚度情况,可以用复模态法解耦以获得结构随机动力响应的解析解。近年来这一方法在工程中的应用研究逐步受到重视[1-5]。

与混凝土结构相比,钢框架结构的自振周期较长,侧向刚度小,在地震荷载作用下的侧移较大,因此在钢框架结构中常需添加隔震或减震装置来减小结构的动力反应。但添加这些装置后,结构就成了一个非对称(质量、刚度矩阵非对称)非经典阻尼的系统,此时采用实模态分析方法已无法使结构的运动方程解耦,也就无法求解地震作用下的随机反应。对于添加了减隔震装置的钢框架结构,其随机地震反应分析可以采用复模态分析方法。此外,在进行随机地震反应的实模态分析时,特别是在非平稳地震的激励下,由于被积函数过于复杂,因此在实际分析中很难得到完整的解析式。由于在实际分析中往往采用数值积分的方法,这也给结果带来了一定的误差。而采用复模态变换方法可以将结构分解为一系列一阶系统的响应问题,这就使积分式的求解大大简化。因此对于一般对称钢框架结构也通过复模态分析获得比较完整的结构随机反应的解析式。

1　平稳地震激励下的复模态分析

1.1　地震激励的计算模型

地震动模型取工程界应用较多的 Kanai-Tajimi 模型,其谱密度函数表达式为:

$$S_A(\omega) = \frac{1 + 4\xi_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g}}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_g})^2 + 4\xi_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g}} S_0 \tag{1}$$

式中: ξ_g 和 ω_g 分别为地表土层的卓越频率和阻尼比; S_0 是反映地震动强弱的参数谱强度因子。令 $a = \xi_g \omega_g$, $b = \omega_g \sqrt{1 - \xi_g^2}$, $q = -a + \mathrm{i}b$, $g = \frac{\omega_g^2 + 4a^2}{8a} - \mathrm{i}\frac{\omega_g^2 - 4a^2}{8b}$,则与 $S_A(\omega)$ 对应的协方差函数可表示为如下的共轭复指数函数[6]:

$$C_f(\tau) = 2\pi S_0 (g e^{q|\tau|} + \bar{g} e^{\bar{q}|\tau|}) \tag{2}$$

1.2　平稳地震激励下的复模态分析

结构在地震激励下的运动方程可写为:

$$m\ddot{\boldsymbol{X}} + c\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}w(t) \tag{3}$$

式中: m, c, $\boldsymbol{k}$ 为分别代表结构的质量、阻尼、刚度矩阵;

$\boldsymbol{B}$ 为实常数列阵, $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{m}\{1\}$, $\boldsymbol{m}$ 是质量矩阵;

$w(t)$ 为均匀调制地震激励,可表示为 $w(t) = f(t)n(t)$,其中 $f(t)$ 为确定性调制函数,为[7]:

$$f(t) = \begin{cases} (t/t_1)^2 & 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ 1 & t_1 < t < t_2 \\ \exp[-c(t - t_2)] & t \geqslant t_2 \end{cases} \tag{4}$$

上式中 t_1 为地震地面运动加速度上升段和强震平稳段的分界点, t_2 为平稳段和衰减段的分界点, c 为衰减系数。

$n(t)$ 为零均值的平稳过滤白噪声,其协方差函数记为 $C_n(\tau)$,如式(2)所示。

引入 $2n$ 维的状态向量 $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y} = \{\dot{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{X}\}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

则结构的动力方程可以化为如下的 1 阶方程组:

$$\boldsymbol{M}_s \dot{y} + \boldsymbol{K}_s y = \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{w}(t) \tag{6}$$

式中, $\boldsymbol{M}_s = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{K}_s = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{m} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$。

式(6)所对应的特征方程为:

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$| p_i \boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{K}_s | = \boldsymbol{0} \tag{7}$$

由此可以确定系统的 $2n$ 个特征值 $p_i(i=1,2,\cdots,2n)$。

由下述方程:

$$[p_i \boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{K}_s]\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

确定的特征矢量 $\boldsymbol{U}_i$ 称为系统(6)的右特征矢量。相应的,矩阵 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \cdots, \boldsymbol{U}_{2n}]_{2n\times 2n}$ 称为系统(6)的右模态矩阵。

相应地,对应每一个 p_i 的左特征矢量方程为:

$$[p_i \boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{K}_s]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

其中: $\boldsymbol{V}_i$ 为系统的左特征矢量,矩阵 $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \cdots, \boldsymbol{V}_{2n}]_{2n\times 2n}$ 称为系统的左模态矩阵。对于对称系统有 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}$,即左右模态矩阵相同。系统的左右特征矢量之间具有如下的正交性:

$$\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_s\boldsymbol{U}_s = \boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{U}_s = \boldsymbol{0}, i \neq s \tag{10}$$

记 $\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_s\boldsymbol{U}_i = m_i', \boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{U}_i = k_i', i = 1,2,\cdots,2n$,则且有: $k' = -p_i m_i'$。

现引入如下的复模态变换:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{z} \tag{11}$$

将方程(6)左乘 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$,并将上式代入后可得:

$$\dot{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(t) = \mathrm{diag}[m_i'^{-1}]\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{B}}w(t) \tag{12}$$

其中, $\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}[p_i]$ 为以系统特征值为元素的对角矩阵, $\boldsymbol{F}(t)$ 为广义激励矩阵,其协方差函数为:

$$C_F(\tau) = \boldsymbol{G}C_n(\tau) = \boldsymbol{G}2\pi S_0(g\mathrm{e}^{q|\tau|} + \bar{g}\mathrm{e}^{\bar{q}|\tau|}) \tag{13}$$

其中,

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}[m_i'^{-1}]\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{V}}\mathrm{diag}[m_i'^{-1}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G}_{is} \tag{14}$$

就此具有 n 个自由度的结构通过复模态分析分解为 $2n$ 个 1 阶系统,1 阶系统的脉冲响应函数为:

$$h_i(t) = \exp(p_i t) \quad (t \geqslant 0 \quad i = 1,2,\cdots,2n) \tag{15}$$

令 $t = t_1$,复模态响应 z_i 和 z_s 的互相关函数可表示为:

$$C_{z_i\bar{z}_s}(t_1,t_2) = E[z_i(t_1)\bar{z}_s(t_2)] = E[z_i(t)\bar{z}_s(t+\tau)] = \int_0^t\int_0^{t+\tau}\exp(p_i\zeta)\,C_F(\tau+\zeta-\eta)\exp(\bar{P}_s\eta)\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta =$$

$$2\pi S_0 G_{is}\sum_{k=1}^{2}\{g_k\mathrm{e}^{\bar{p}_s}[\frac{1}{\bar{p}_s - q_k} - \frac{1}{\bar{p}_s + q_k}]\cdot[\frac{\mathrm{e}^{(p_i+\bar{p}_s)t}}{\bar{p}_s + p_i}] + g_k\mathrm{e}^{\bar{p}_s\tau}[\frac{\mathrm{e}^{(p_i+\bar{p}_s)t} - \mathrm{e}^{(q_k+\bar{p}_s)t}}{(p_i - q_k)(\bar{p}_s + q_k)}] - g_k\mathrm{e}^{q_k\tau}[\frac{\mathrm{e}^{(q_k+p_i)t} - 1}{(p_i + q_k)(\bar{p}_s - q_k)}]\} \tag{16}$$

式中, $g_1 = \bar{g}_2 = g, q_1 = \bar{q}_2 = q, i,s = 1,2,\cdots,2n$。

式(16)是结构在平稳过滤白噪声激励下复模态反应的相关函数,它不仅是时间差 τ 的函数,还与计算时间的起点有关。因此,结构在平稳过滤白噪声激励下的反应却仍是一个非平稳过程。在平稳情形下,即 $t\to\infty$ 时,复模态响应 z_i 与 z_s 的相关函数为[6]:

$$C_{z_i\bar{z}_s}(\tau) = \alpha_{is}\mathrm{e}^{q\tau} + \beta_{is}\mathrm{e}^{\bar{q}\tau} + \gamma_{is}\mathrm{e}^{\bar{p}_s\tau} \quad i,s = 1,2,\cdots,2n \tag{17}$$

式中, $\alpha_{is} = \alpha_{is}g(\frac{1}{\bar{p}_s - q} + \frac{1}{p_i + q})$, $\alpha_{is} = 2\pi S_0 G_{is}/(p_i + \bar{p}_s)$, $\beta_{is} = \alpha_{is}\bar{g}(\frac{1}{\bar{p}_s - q} + \frac{1}{p_i + q})$, $\gamma_{is} = \alpha_{is}[g(\frac{1}{\bar{p}_s + q} - \frac{1}{\bar{p}_s - q}) + \bar{g}(\frac{1}{\bar{p}_s + q} - \frac{1}{\bar{p}_s - q})]$。

复模态响应 $\dot{z}_i$ 与 $\dot{z}_s$ 的相关函数为[6]:

$$C_{\dot{z}_i\dot{\bar{z}}_s}(\tau) = \alpha_{is}'\mathrm{e}^{q\tau} + \beta_{is}'\mathrm{e}^{\bar{q}\tau} + \gamma_{is}'\mathrm{e}^{\bar{p}_s\tau} \tag{18}$$

式中, $\alpha_{is}' = -\alpha_{is}gq\left[\frac{\bar{p}_s}{\bar{p}_s - q} - \frac{p_i}{p_i + q}\right]$, $\beta_{is}' = -\alpha_{is}'\bar{g}\bar{q}\left[\frac{\bar{p}_s}{\bar{p}_s - \bar{q}} - \frac{p_i}{p_i + \bar{q}}\right]$, $\gamma_{is}' = -\bar{p}_s^2\gamma_{is}$。

由复模态变换式(11),可以得到结构状态反应向量 $\boldsymbol{y}$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{C}_y(\tau)$:

$$C_{y_{ij}}(\tau) = \sum_{m=1}^{2n}\sum_{n=1}^{2n}U_{im}U_{jn}^{*}C_{z_m\bar{z}_n}(\tau), \quad i,j = 1,2,\cdots,2n \tag{19}$$

$\boldsymbol{C}_y(\tau)$ 为 $2n\times 2n$ 阶的矩阵,可以写为如下的分块矩阵的形式:

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{C}_{y}(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{\dot{X}}(\tau) & \boldsymbol{R}_{\dot{X}X}(\tau) \\ \boldsymbol{R}_{X\dot{X}}(\tau) & \boldsymbol{R}_{X}(\tau) \end{bmatrix} \tag{20}$$

即对角线上的元素分别为结构速度与位移的自相关函数,非对角线上的元素为速度与位移反应的互相关函数。同理可以得到结构加速度反应的协方差函数矩阵为:

$$\boldsymbol{C}_{y\ddot{y}_{ij}}(\tau) = \sum_{m=1}^{2n}\sum_{n=1}^{2n} U_{im}U_{jn}^{*}C_{\dot{z}_m\dot{z}_n}(\tau), \quad i,j = 1,2,\cdots,2n \tag{21}$$

$$\boldsymbol{C}_{y\dot{y}}(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{\ddot{X}}(\tau) & \boldsymbol{R}_{\ddot{X}\dot{X}}(\tau) \\ \boldsymbol{R}_{\dot{X}\ddot{X}}(\tau) & \boldsymbol{R}_{\dot{X}}(\tau) \end{bmatrix} \tag{22}$$

对角线上的元素分别为结构加速度与速度的自相关函数,非对角线上的元素为加速度与速度反应的互相关函数。

令式(21)和式(22)的 $\tau=0$,矩阵 $\boldsymbol{C}_{y}(0)$ 中主对角线上的元素即为结构反应位移、速度的方差:

$$\sigma_{X_i} = R_{X_{ii}}(0) \tag{23}$$

$$\sigma_{\dot{X}_i} = R_{\dot{X}_{ii}}(0) \tag{24}$$

式(23)和式(24)得到的是结构各层相对于基础的位移及速度反应的协方差,利用转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 可以得到结构层间位移及速度反应的协方差:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ -1 & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{C}_{\delta}(\tau) = \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{C}_{y}(\tau)\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{C}_{\delta}(\tau) = \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{C}_{y}(\tau)\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

式中,$\boldsymbol{T}_1 = [\boldsymbol{0}_n \quad \boldsymbol{T}]$,$\boldsymbol{T}_2 = [\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{0}_n]$,$[\boldsymbol{0}_n]$ 为 n 阶全 0 矩阵。

2　非平稳地震激励下的复模态分析

采用上文的方法进行分析时,结构在非平稳地震激励下的模态响应的相关函数为:

$$C_{z_i\bar{z}_s}(t_1,t_2) = E[z_i(t_1)\overline{z}_s(t_2)] = E[z_i(t)\overline{z}_s(t+\tau)] = \int_0^t\int_0^{t+\tau} \mathrm{e}^{p_i\zeta}f(t-\zeta)f(t+\tau-\eta)C_n(\tau+\zeta-\eta)\mathrm{e}^{\overline{P}_s\eta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta \tag{28}$$

但上式在进行积分时,平稳激励的相关函数 C_n 即便采用式(2)的共轭复指数函数的形式也很难求得其解析式。

结构在非平稳地震激励下的随机反应分析,可以利用扩阶的方法来进行,求解结构的非平稳随机响应,可以转化为求解扩阶系统在均匀调制白噪声激励下的反应。由于地震激励采用的是过滤白噪声模型,它可以看作基岩地震动(白噪声过程)通过 2 阶滤波器线性滤波后得到。考虑地震动的形成过程后,结构的动力方程可写为如下方程组:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{X} - (2\xi_{\mathrm{g}}\omega_{\mathrm{g}}\dot{x}_{\mathrm{g}} + \omega^2{}_{\mathrm{g}}x_{\mathrm{g}})\boldsymbol{M1} = 0 \tag{29}$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{g}} + 2\xi_{\mathrm{g}}\omega_{\mathrm{g}}\dot{x}_{\mathrm{g}} + \omega^2{}_{\mathrm{g}}x_{\mathrm{g}} = W(t) \tag{30}$$

其中,$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}$、$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}$ 分别为等效阻尼矩阵和等效刚度矩阵;$W(t)$ 为零均值的白噪声,其功率谱密度为 S_0。引入 $2n+2$ 维的状态向量 $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y} = \{x_{\mathrm{g}},\dot{x}_{\mathrm{g}},X,\dot{X}\}^{\mathrm{T}} \tag{31}$$

则式(30)可降阶为一个 1 阶方程组:

$$\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} = \overline{\boldsymbol{W}}(t) \tag{32}$$

式中:

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{1} & \boldsymbol{0}_n & \boldsymbol{0}_n\\ \omega_g^2 & 2\xi_g\omega_g & \boldsymbol{0}_n & \boldsymbol{0}_n\\ \boldsymbol{0}'_n & \boldsymbol{0}'_n & -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}_n\\ -\omega_g^2\{1\} & -2\xi_g\omega_g\{1\} & \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}_e & \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}_e\end{bmatrix} \tag{33}$$

$\boldsymbol{0}_n$ 为 n 列全零行向量，$\boldsymbol{0}'_n$ 为 n 阶全零列向量，$\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{0}_n$ 为 n 阶全零矩阵。而

$$\overline{\boldsymbol{W}}(t)=\{0,W(t),\overline{O}_{2n}\}^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

式(29)与式(32)是等价的，化为了1阶系统在白噪声激励下的随机反应分析。但此时的结构经过扩阶后已成为了非对称系统。

系统(32)所对应的特征方程为：

$$|P_i\boldsymbol{I}_{2n+2,2n+2}+\boldsymbol{F}_{2n+2,2n+2}|=0 \tag{35}$$

由此可以确定系统的 $2n+2$ 个特征值 p_i，$i=1,2,\cdots,2n+2$。

类似于上文的讨论，可以确定系统的 $(2n+2)\times(2n+2)$ 阶左、右特征矢量矩阵：

右特征矢量矩阵：

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{2n+2}] \tag{36}$$

左特征矢量矩阵：

$$\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\cdots,\boldsymbol{D}_{2n+2}] \tag{37}$$

引入复模态变换：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z} \tag{38}$$

式(29)、(30)最终可以解耦为 $2n+2$ 个1阶微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{W}}(t) \tag{39}$$

$\boldsymbol{S}(t)$ 为广义激励矩阵，其协方差函数矩阵可表示为：

$$E[\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{S}(t+\tau)]=2\pi\boldsymbol{G}f(t)f(t+\tau)\delta(\tau) \tag{40}$$

其中：

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{G}_{is} \tag{41}$$

$$\overline{\boldsymbol{G}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}_{2n}\\ \boldsymbol{0} & S_0 & \boldsymbol{0}_{2n}\\ \boldsymbol{0}'_{2n} & \boldsymbol{0}'_{2n} & \boldsymbol{0}_{2n}\end{bmatrix} \tag{42}$$

令 $t=t_1$ 复模态响应 z_i 和 z_s 的互相关函数可表示为：

$$\begin{aligned}C_{z_iz_s}(t_1,t_2)&=E[z_i(t_1)\overline{z}_s(t_2)]=E[z_i(t_1)\overline{z}_s(t+\tau)]\\&=\int_0^t\int_0^{t+\tau}\mathrm{e}^{p_i\zeta}C_F(\tau+\zeta-\eta)\,\mathrm{e}^{\overline{P}_s\eta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\\&=2\pi G_{is}\int_0^t\int_0^{t+\tau}\mathrm{e}^{p_i\zeta}\cdot\mathrm{e}^{\overline{P}_s\eta}f(t-\zeta)f(t+\tau-\eta)\delta(\tau+\zeta-\eta)\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\\&=2\pi G_{is}\int_0^t\mathrm{e}^{[p_i\zeta+\overline{P}_s(\zeta+\tau)]}\cdot f(t-\zeta)f(t-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\end{aligned} \tag{43}$$

在上式的积分求解时利用了 δ 函数的性质：$\delta(x)=0(x\neq0)$，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)a(x)\,\mathrm{d}x=a(0)$。

均匀调制函数采用式(4)的分段式函数的形式，代入式(43)后积分可得：

$$C_{z_iz_s}=2\pi G_{is}\mathrm{e}^{\overline{p}_s\tau}\frac{1}{t_1^2(p_i+\overline{p}_s)^3}\{2\mathrm{e}^{(p_i+\overline{p}_s)t}-[(p_i+\overline{p}_s)^2t^2(p_i+\overline{p}_s)+2]\}\quad t\leqslant t_1 \tag{44}$$

$$\begin{aligned}C_{z_iz_s}=&2\pi G_{is}\mathrm{e}^{\overline{p}_s\tau}\frac{1}{t_1^2(p_i+\overline{p}_s)^3}\{2\mathrm{e}^{(p_i+\overline{p}_s)t}-\mathrm{e}^{(p_i+\overline{p}_s)(t-t_1)}[(p_i+\overline{p}_s)^2t_1^2+2t_1^2(p_i+\overline{p}_s)+2]\}\\&-2\pi G_{is}\mathrm{e}^{\overline{p}_s\tau}\frac{1}{(p_i+\overline{p}_s)}^{[1-\mathrm{e}^{(p_i+\overline{p}_s)(t-t_1)}]}\quad t_1<t<t_2\end{aligned} \tag{45}$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$C_{z_i z_s} = 2\pi G_{is} e^{\bar{p}_s \tau} \frac{1}{t_1^2 (p_i + \bar{p}_s)^3} \{ 2e^{(p_i+\bar{p}_s)t} - e^{(p_i+\bar{p}_s)(t-t_1)} [(p_i + \bar{p}_s)^2 t_1^2 + 2t_1^2 (p_i + \bar{p}_s) + 2] \}$$

$$- 2\pi G_{is} e^{\bar{p}_s \tau} \frac{1}{(p_i + \bar{p}_s)} [e^{(p_i+\bar{p}_s)(t-t_2)} - e^{(p_i+\bar{p}_s)(t-t_1)}] - 2\pi G_{is} e^{\bar{p}_s \tau} \frac{1}{(p_i + \bar{p}_s + c)} [e^{-c(t-t_2)} - e^{(p_i+\bar{p}_s)(t-t_2)}]$$

$$t \geqslant t_2 \quad i,s = 1,2,\cdots,2n+2 \tag{46}$$

由复模态变换式(39) 可以得到结构状态反应向量 $\boldsymbol{y}$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{C}_y(\tau)$:

$$C_{y_{ij}}(t,\tau) = \sum_{m=1}^{2n+2} \sum_{n=1}^{2n+2} Q_{im} Q_{jn}^* C_{z_m z_n}(t,\tau), \quad i,j = 1,2,\cdots,2n+2 \tag{47}$$

式(47) 求得的是结构在非平稳地震激励下的反应的相关函数,它不仅仅是时差 τ 的函数,还与计算时间的起点有关,令式中的 $\tau = 0$,即令式(43) 中的 $t_1 = t_2$,可以得到结构反应的方差,它是时间 t 的函数。

$$\sigma_{X_i}(t) = C_{y_{ii}}(t,0) \quad i = 3,\cdots,n+2 \tag{48}$$

$$\sigma_{\dot{X}_i}(t) = C_{y_{ii}}(t,0) \quad i = n+3,\cdots,2n+2 \tag{49}$$

结构层间反应的协方差函数同样可以利用变换式(25) 得到:

$$\boldsymbol{C}_\delta(\tau) = \boldsymbol{T}_3 \boldsymbol{C}_y(t,\tau) \boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{C}_{\dot{\delta}}(\tau) = \boldsymbol{T}_4 \boldsymbol{C}_y(t,\tau) \boldsymbol{T}_4^{\mathrm{T}} \tag{51}$$

式中: $\boldsymbol{T}_3 = [\boldsymbol{0}'_n \quad \boldsymbol{0}'_n \quad \boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{0}_n]$, $\boldsymbol{T}_4 = [\boldsymbol{0}'_n \quad \boldsymbol{0}'_n \quad \boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{0}_n \quad \boldsymbol{T}]$。

3　算例分析

对图 1 所示的 10 层钢框架进行随机地震反应及动力可靠性分析。钢框架采用 Q235 钢材,弹性模量 $\boldsymbol{E} = 2.06 \times 10^3$ MPa,剪切模量 $G = 7.9 \times 10^3$ MPa,梁柱均为工字形截面,截面特性见表 1。场地土类别Ⅲ类,地震动谱密度模型采用 Kanai – Tajimi 模型,考虑平稳地震激励,地震动模型参数见表 2,其中地震动谱强度因子 S_0 与地震烈度的关系为:

$$S_0 = = [\gamma^2 \frac{\pi \omega_g}{2\xi_g}(1 + 4\xi_g^2)]^{-1} 10^{2[a_1 + a_2 M + a_3 \lg(R+30) + a_4 T_g]} \tag{52}$$

式中: γ 为峰值因子; $M = 0.66I + 0.98$ 为震级, I 为烈度; R 为震中距; T_g 为场地土卓越周期; $a_1 \sim a_4$ 为回归参数。

结构动力可靠度的计算采用基于低周疲劳破坏的双参数破坏准则[8]:

$$D_i = (1 - \beta)\left(\frac{\delta_{mi} - \delta_{yi}}{\delta_{ui} - \delta_{yi}}\right) + \beta\left(\frac{W_i}{W_{ui}}\right) \tag{53}$$

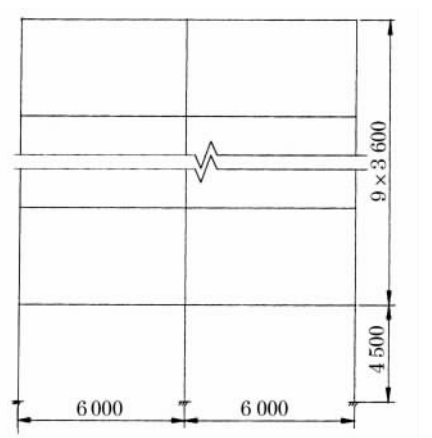

图 1　钢框架结构

Fig. 1　Steel frame structure

表 1　构件截面特性

Table 1　Cross-section characters of structural components

构件类别	宽度/mm	高度/mm	翼缘厚/mm	腹板厚/mm
柱	400	600	20	16
梁	250	500	16	12

表 2　地震动模型参数

Table 2　Parameters of earthquake motion model

烈度	ω_g	ξ_g	平稳持时 T_d/s	谱强度因子 S_0/(cm^2 · s^{-3})
6	15.17	0.80	4.24	47.94
7	15.17	0.80	5.40	91.04
8	15.17	0.80	6.87	173.36
9	15.17	0.80	8.74	330.93
10	15.17	0.80	11.13	633.08

式中: W_i、δ_{mi} 分别为第 i 层的累计滞回耗能和最大层间变形; W_{ui}、δ_{ui} 分别为第 i 层的极限滞回耗能和极限层

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

间变形;δ_{yi}为第 i 层的层间屈服位移;β 为权重系数。

通过确定有关参数及发生各种破损的破损度 D 值的界限值,来计算钢框架在设计基准期内发生各种破损的概率[9]:

$$P_{fi} = \sum_{j} P_f(D_i > D_n \mid I_j) P(I_j) \tag{54}$$

式中:P_{fi}为结构第 i 层在设计基准期内发生破坏的概率;I_j 表示地震烈度;D_i 为第 i 层破损度值;D_n 为破损度界限值。表 3 为依据我国华北、西北、西南 3 个地区 45 个城镇地震危险性分析结果推断所得的结构在使用期限内各烈度地震在Ⅲ类场地土条件下的发生概率[10]。地震下钢结构发生各种破损的界限值见表 4[11]。

利用第 2 节中的公式计算反应统计量,然后采用低周疲劳破坏机制计算结构动力可靠度,结果列于表 5 与表 6(其中与地震烈度 7 度对应的地震加速度值取 0.15g、8 度取 0.30g) 。表 5 为结构整体在各烈度地震下以及在结构使用期限内出现各种破损状态的概率,表 6 为该结构基于三水准设防目标的动力可靠度。

表 3 各烈度地震概率

Table 3 Probability of each earthquake intensity

I_j	6	7	8	9	10
$P(I_j)$	0.729	0.300	0.076 5	0.020	0.002 2

表 4 钢结构各种破损度界限值

Table 4 Damage degree limit values of steel structure

破损状态	基本完好	轻微破坏	中等破坏	严重破坏	倒塌
D_n	0.1	0.3	0.6	0.85	1

表 5 结构出现各种破损状态的概率

Table 5 Probability of each damage state of structure

	基本完好	轻微破坏	中等破坏	严重破坏	倒塌
6	0.121 2	0.008 7	0.000 0	0.000 0	0.000 0
7	0.446 8	0.066 8	0.001 0	0.000 1	0.000 0
8	0.733 6	0.227 1	0.095 1	0.005 8	0.000 0
9	1.000 0	0.677 5	0.341 9	0.099 5	0.001 4
10	1.000 0	1.000 0	1.000 0	0.233 2	0.101 1
使用期限	0.300 7	0.059 5	0.016 6	0.003 0	0.000 3

表 6 基于三水准设防目标的可靠度

Table 6 Reliability based on three-level fortification object

设防烈度	小震不坏	中震可修	大震不倒
8	0.915 9	0.882 5	0.988 5
9	0.743 2	0.601 3	0.885 4

4 结论

通过将复模态法应用到钢框架的随机地震反应分析中,求出了钢框架结构在平稳地震激励下反应的统计量,在求得结构的随机反应统计矩后采用低周疲劳破坏机制对十层钢框架结构的抗震可靠度进行了计算。算例表明,文中方法是有效的。同时表明,在各烈度地震下钢框架在设计期限内发生倒塌的概率都很低。钢框架在设防烈度为 9 度时其三级设防水准的可靠度已明显降低,此时结构必须加强,否则不能满足 9 度抗震设防的要求。

此外,结构在非平稳地震激励下的随机反应分析,可以利用扩阶的方法来进行。求解结构的非平稳随机响应可以转化为求解扩阶系统在均匀调制白噪声激励下的响应。采用复模态分析法较方便地求解出了结构在非平稳地震激励下弹塑性随机反应的协方差函数及均方差的解析表达式。但文中仅给出了非平稳地震激励下结构随机反应的基本计算过程和公式,还有待展开进一步的研究。

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参考文献

[1] 周焕廷,王　燕. 复模态理论在近海平台中的应用[J]. 力学季刊,2004,25(3),398 -402.
ZHOU Huanting, WANG Yan. Application of complex mode method in offshore platform[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2004,25(3):398 -402.

[2] 李创第,朱力华. 带 TLD 结构基于 Davenport 谱随机风振响应分析和风荷载取值的复模态法[J]. 应用力学学报,2006,24(1),219 -222.
LI Chuangdi, ZHU Lihua. Complex methods for random wind-induced response and equivalent wind action of structures with TLD[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2006,24(1):219 -222.

[3] 黄东梅,李创第,陈俊忠,等. 结构-土相互作用体系的地震作用取值——基于规范地震动模型的复模态时域法[J]. 振动工程学报,2006,19(4):571 -577.
HUANG Dongmei, LI Chuangdi, CHEN Junzhong, et al. Earthquake action calculation of structure - soil interaction system—according to complex mode method in time domain based on the earthquake model of seismic code[J]. Journal of Vibration Engineering, 2006,19(4):571 -577.

[4] 李创第,丁晓华,陈俊忠,等. 基础隔震结构基于 Clough - Penzien 谱随机地震响应分析的复模态法[J]. 振动与冲击,2006,25(5):162 -165.
LI Chuangdi, DING Xiaohua, CHEN Junzhong, et al. Complex modal method for analysis of random earthquake response of structures with base isolation on the basis of clough-Penzien spectrum[J]. Journal of Vibration and Shock, 2006,25(5):162 -165.

[5] 陈健云,王建有. 基于复模态的有限元模型修正算法[J]. 世界地震工程,2004,20(2):12 -16.
CHEN Jianyun, WANG Jianyou. Finite element model updating method based on complex mode[J]. World Earthquake Engineering, 2004,20(2):12 -16.

[6] 方　同. 工程随机振动[M]. 国防工业出版社,1995.
FANG Tong. Random vibration of engineering[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1995.

[7] Amin M, Ang A H. Nonstationary stochastic model of earthquake ground motions[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1979, 7(5):176 -181.

[8] 吕大刚,王光远. 基于损伤性能的抗震结构最优设防水准的决策方法[J]. 土木工程学报,2001,34(1):44 -49.
LU Dagang, WANG Guangyuan. Decision-making method of optimal fortification level for aseismic structures based on damage performance[J]. China Civil Engineering Journal, 2001,34(1):44 -49.

[9] 李桂青,曹　宏,李秋胜,等. 结构动力可靠性理论及其应用[M]. 北京: 地震出版社,1993.
LI Guiqing, CAO Hong, LI Qiusheng, et al. The theory and its application on the structural dynamic reliability[M]. Beijing: Earthquake Press, 1993.

[10] 欧进萍,段宇博,刘会仪. 结构随机地震作用及其统计参数[J]. 哈尔滨建筑工程学院学报,1994,27(5):1 -10.
OU Jinping, DUAN Yubo, LIU Huiyi. Structural random earthquake action and its statistical parameters[J]. J. Harbin Archit. &Civ. Eng. Inst., 1994, 27(5):1 -10.

[11] 欧进萍,牛荻涛,王光远. 多层非线性抗震结构的模糊动力可靠性分析与设计[J]. 地震工程与工程振动,1990,10(4):27 -37.
OU Jinping, NIU Ditao, WANG Guangyuan. Analysis and design of fuzzy dynamic reliability of multi-layer nonlinear seismic structure[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1990,10(4):27 -37.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net