水力学难题分析

成都科技大学
水力学教研室
杨凌真 主编



高等教育出版社

封面设计：王　喆

ISBN 7-04-000013-X/TV·1
定　价　3.70 元

5111
4634

水力学难题分析

5111
4634

成都科技大学水力学教研室

杨凌真　主编

高等教育出版社

内 容 提 要

《水力学难题分析》的绝大部分题目选自有关高等院校一九七八年以来历届研究生入学考试的水力学试题，并参考了国内外有关水力学教材编写而成。选编计算题、证明题及思考题共250道左右。内容包括液体的主要物理性质及作用力，水静力学，水动力学的基本原理，液流型态及水头损失，有压管道中的恒定流动及非恒定流动，明渠恒定均匀流及非均匀流，堰闸出流及泄水建筑物下游的水流衔接和消能，液体运动的流场理论渗流相似原理及量纲分析等。书末并附有几套完整的研究生入学考试的水力学试题。选入本书的题目与教材中习题相比，略难一些。编者在解题过程中力图从基本原理出发，希望有助于读者巩固所学理论，也希望有助于读者提高分析、解决水力学问题的能力。本书可作为水利、土建和水动力类各专业人员教、学《水力学》课程的参考书，也可供拟报考硕士研究生者和工程技术人员参考。

水力学难题分析

成都科技大学水力学教研室

杨凌真　主编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32　印张　13.5　字数　330 000

1987年11月第1版　1988年8月第1次印刷

印数00 001—2,140

ISBN 7-04-000013-X/TV·1

书号15010·0886　　定价3.70元

前　言

《水力学》是水利、土建、水动力类等专业的主要技术基础课。为帮助读者巩固所学的理论，提高运用理论分析并解决实际问题的能力，配合近年来已出版的水力学教材，特编写本书。

本书内容绝大部分选自有关高等院校自一九七八年以来历届研究生入学考试的试题，在成都科技大学水力学教研室编写的“历届研究生入学考试题解”的基础上作了较大的修改和补充，并增添了编者在教学实践中积累的资料及国内外有关的习题集中的例题。

习题编排次序基本上按照成都科技大学吴持恭主编、一九八二年出版的高等学校教材《水力学》（第二版）的顺序。

在解题过程中，力图从基本原理出发，通过分析求得解答，希望对提高读者分析、解决问题的能力能有所帮助。

为了使读者对研究生入学考试水力学试题的要求和分量有所了解，特在本书最后列举了几套完整的试题。

本书采用国际单位制。

在本书编写过程中，承河海大学，武汉水利电力学院及陕西机械学院提供了历届研究生入学考试试题，同时得到清华大学，大连工学院，西南交通大学，天津大学等院校的大力支持，在此表示诚挚的感谢。

本书由杨凌真、宋定春、刘曼宽分工执笔编写，由杨凌真主编。吴持恭教授、梁曾相教授和赵文谦副教授对送审稿作了具体修改。在编写过程中得到教研室同志的大力协助，谨此表示感谢。

限于编者水平，书中缺点和错误在所难免，希望读者提出批评和指正。

编　者

一九八六年三月

目　　录

一、计算题及证明题……1

I.液体的主要物理性质及水静力学（题1～52）……1

II.水动力学基本原理，液流型态及水头损失（题53～107）……74

III.有压管道中的恒定及非恒定流动（题108～143）……175

IV.明渠流（题144～160）……237

V.水跃及堰、闸出流（题161～188）……265

VI.液体运动的流场理论（题189～201）……316

VII.渗流，相似原理及量纲分析（题202～213）……337

二、思考题（题214～245）……356

三、研究生入学考试水力学试题实例……392

1.某校一九八三年攻读硕士学位研究生入学考试水力学试题……392

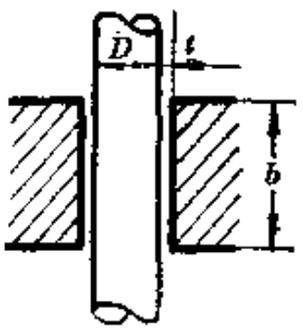
2.某校一九八四年攻读硕士学位研究生入学考试水力学试题……404

3.某校一九八五年攻读硕士学位研究生入学考试水力学试题……41..

一　计算题及证明题

1、 液体的主要物理性质及水静力学

1 一滑动轴承，轴的直径$D=15\text{cm}$，轴承宽度$b=25\text{cm}$，间隙$t=0.1\text{cm}$，其中充满润滑油，当轴以转速$n=180\text{r/min}$正常旋转时，已知润滑油的阻力损耗的功率为12.7W，求润滑油的粘滞系数μ为多大。



题1图

解：

轴面流速

$$v=\frac{\pi Dn}{60}=\frac{3.14\times 0.15\times 180}{60}$$

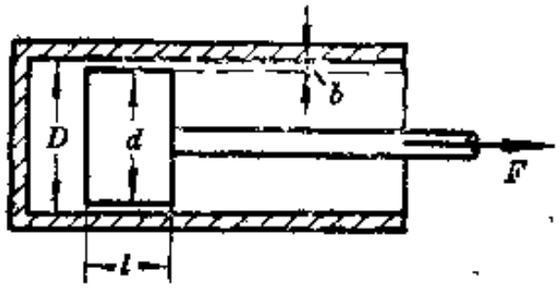
$$=1.415\ \text{m/s}$$

由于间隙t很小，轴转动时，可认为润滑油作层流运动，流速近似为直线分布．则速度梯度为

$$\frac{du}{dy}=\frac{v}{t}=\frac{1.415}{0.001}=1415\ \ \text{m/s·m}$$

摩擦力　$F_r=\mu\dfrac{du}{dy}\cdot A=\mu\dfrac{du}{dy}\cdot\pi Db$

损耗功率　$N=F_r v=\mu\dfrac{du}{dy}\cdot\pi Dbv$



题2图

移项整理的粘滞系数

$$\mu=\frac{N}{\pi Dbv\frac{du}{dy}}$$

$$=\frac{12.7}{3.14\times0.15\times0.25\times1.415\times1415}$$

$$=0.054\quad \mathrm{N\cdot s/m^2}$$

2 某活塞油缸，油缸直径$D=12\mathrm{cm}$，活塞直径$d=11.96\mathrm{cm}$，活塞长$l=14\mathrm{cm}$，间隙中充满$\mu=0.065\mathrm{N\cdot s/m^2}$的润滑油，若施于活塞的力$F=8.43\mathrm{N}$，试计算活塞移动的速度$u$为若干？

解：

因为间隙之间的距离很小，只有$\frac{1}{2}(D-d)=0.02\mathrm{cm}$，所以，可以认为是层流运动，其粘滞力服从牛顿内摩擦定律

$$F=\mu A\frac{du}{dy}$$

活塞与润滑油的接触面积为

$$A=\pi\cdot d\cdot l$$

$$\therefore\qquad F=\mu\cdot\pi\cdot d\cdot l\frac{du}{dy}$$

$$\mu\cdot\pi\cdot d\cdot l\cdot du=F\cdot dy$$

两边积分，得（因dy很小，近似认为u按直线分布）

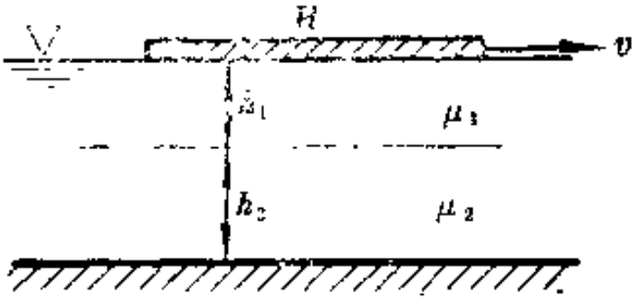
$$\mu\cdot\pi\cdot d\cdot l\cdot u=F\times\frac{1}{2}(D-d)$$

$$u=\frac{F\cdot(D-d)\times\frac{1}{2}}{\mu\cdot\pi\cdot d\ l}$$

$$=\frac{8.43\times0.02\times10^{-2}}{0.065\times3.14\times0.1196\times0.14}$$

$$=0.494\mathrm{m/s}$$

3 图示液面上有一面积$A=1200\mathrm{cm^2}$的平板H，以$v=0.5\mathrm{m/s}$的速度作水平移动，形成平行板间液体的层流运动，平板下液体分两层，它们的动力粘滞系数与厚度分别为$\mu_1=0.142\mathrm{N\cdot s/}$



题 3 图

m^2，$h_1=1.0mm$；$\mu_2=0.235N\cdot s/m^2$，$h_2=1.4mm$，试绘制平板间液体的流速分布图和切应力分布图，并计算平板H上所受的内摩擦力F。

解：

平板间为层流，其切应力服从牛顿内摩擦定律，即 $\tau = \mu \times \frac{du}{dy}$，表面液层速度等于平板移动速度。设在液层分界面上，流速为u，切应力为τ，因h_1，h_2很小，近似认为流速按直线分布。

上层液体的切应力 $\tau_1=\mu_1\dfrac{v-u}{h_1}$

下层液体的切应力 $\tau_2=\mu_2\dfrac{u-0}{h_2}$

因液面平板H平移带动两层液体运动，使液层分界面上所产生的切应力是相等的，故

$$\tau=\tau_1=\tau_2$$

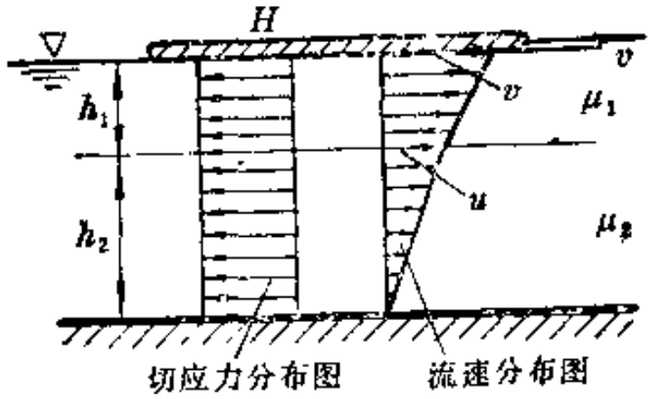
即 $$\mu_1\frac{v-u}{h_1}=\mu_2\frac{u}{h_2}$$

解得 $$u=\frac{\mu_1 h_2 v}{\mu_2 h_1+\mu_1 h_2}$$

$$=\frac{0.142\times0.0014\times0.5}{0.235\times0.001+0.142\times0.0014}$$

$$=0.23m/s$$

因为 $$\tau=\tau_1=\mu_1\frac{v-u}{h_1}=0.142\frac{0.5-0.23}{0.001}$$



解 3 图

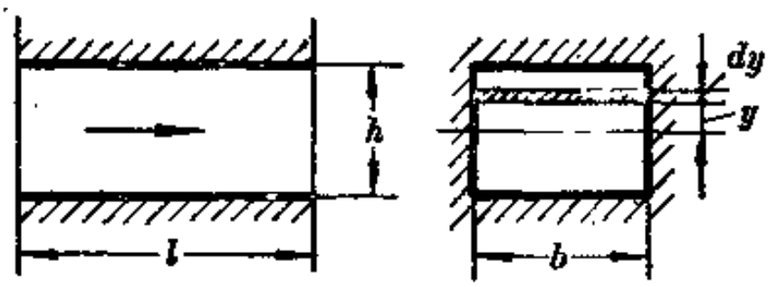
$$=38.34\mathrm{N/m^2}$$

由此可绘出流速分布图及切应力分布图如解 3 图所示。

平板H所受的内摩擦力

$$F=\tau_1\cdot A$$
$$=38.34\times 1200\times 10^{-4}$$
$$=4.6\mathrm{N}$$

4 推导恒定不可压缩层流运动时，在压差p作用下，通过宽为b，长为l，高h很小的矩形缝隙流量的表达式，并证明边壁切应力$\tau_0=\dfrac{b\mu v}{h}$，式中μ为粘滞系数，v为断面平均流速（略去端部的影响）。



题 4 图

解：

（1）流量表达式

设距中心线距离y的流速为u，增加dy，流速增加du，取长度为l，宽为b，高为$2y$的流体为脱离体，如图示。根据牛顿第

二定律，$\Sigma F_x = ma_x$，由于断面沿程保持不变，$a_x = 0$，即 $\Sigma F_x = 0$

$$p_1 \times 2yb - p_2 \times 2yb - 2\tau \times bl = 0$$

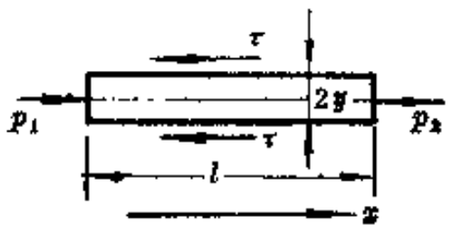
$$\tau = \frac{y}{l}(p_1 - p_2)$$

由于dy增加为正，u的增量du为负，故 $\tau = -\mu\frac{du}{dy}$代入得

$$-\mu\frac{du}{dy} = \frac{y}{l}(p_1 - p_2) = \frac{y}{l}p$$

$$du = -\frac{p}{l\mu}ydy$$

$$u = -\frac{p}{2l\mu}y^2 + c$$



解 4 图

在边壁 $y = \frac{1}{2}h$，$u = 0$ 代入得 $c = \frac{p}{2\mu l}\frac{h^2}{4}$

$$u = \frac{p}{2\mu l}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$Q = \int_A u dA$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{p}{2\mu l}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)bdy$$

$$= \frac{pb}{2\mu l}\left(\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24}\right)$$

$$= \frac{pbh^3}{12\mu l}$$

（2）证明边壁切应力 $\tau_0 = \frac{b\mu v}{h}$

断面平均流速 $v = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{pbh^3}{12\mu l}}{bh} = \frac{ph^2}{12\mu l}$

$$p = \frac{12\mu l v}{h^2}$$

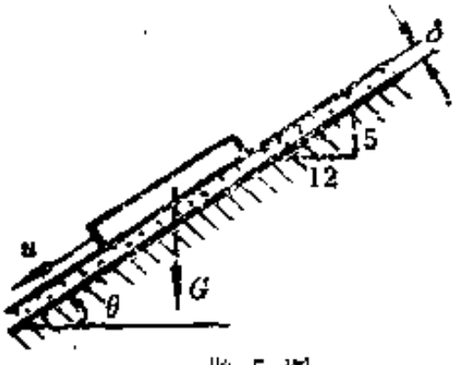
在边壁$y=h/2$，切应力

$$\tau_0=\frac{p}{l}y=\frac{ph}{2l}$$

$$=\frac{h}{2l}\cdot\frac{12\mu lv}{h^2}$$

$$=\frac{b\mu v}{h}$$

5 一底面积为$40\times45\text{cm}^2$，高为1 cm的木块，质量为5 kg，沿着涂有润滑油的斜面向下作等速运动，如图所示，已知木块运动速度$u=1$ m/s，油层厚度$\delta=1$ mm，由木块所带动的油层的运动速度呈直线分布，求油的粘滞系数。



题 5 图



解 5 图

解：

木块向下作等速运动，s方向的加速度$a_s=0$，它带动的油层运动速度呈直线分布$\frac{du}{dy}=\frac{u}{\delta}$，取如图示的控制体，产生等速向下的作用力F．根据牛顿第二定律$\Sigma F_s=ma_s=0$

$$F-\tau A=0$$

$$\tau=\frac{F}{A}$$

式中 $\tau=\mu\frac{du}{dy}=\mu\frac{u}{\delta}$

$$F=mg\sin\theta$$

$$\theta=\text{arctg}\ \frac{5}{12}\quad 22.62°$$

代入上式可得

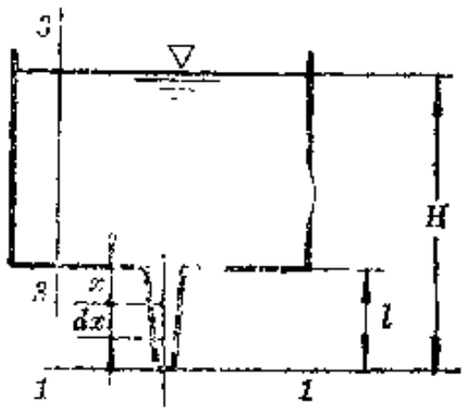
$$\mu \frac{u}{\delta} = \frac{mg\sin\theta}{A}$$

$$\mu = -\frac{mg\delta\sin\theta}{Au}$$

$$= -\frac{5\times 9.8\times 1\times 10^{-3}\times \sin 22.62^\circ}{40\times 45\times 10^{-4}\times 1}$$

$$= 0.105\text{N}\cdot\text{s/m}^2$$

6 容器中的粘性液体自小管流出，水头保持不变，管内为层流，小管断面沿程线性变化，进口直径为2.9mm，出口断面直径为2.8mm，小管长为20mm，已知$H=103$mm 在400s内液体流出量为200cm³，试确定液体粘滞系数的大小。



题 6 图

解：

经过管道的流量

$$Q = \frac{200\times 10^3}{400} = 500\text{mm}^3/\text{s}$$

管道出口流速

$$v_1 = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d_1^2} = \frac{500}{\frac{1}{4}\times 3.14\times 2.8^2}$$

$$= 81.2\text{mm/s}$$

管道进口流速

$$v_2 = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d_2^2} = \frac{500}{\frac{1}{4}\times 3.14\times 2.9^2} = 75.7\text{mm/s}$$

设管道出口直径为d_1，进口直径为d_2，距管道进口为$x$mm的距离，直径为d。根据小管断面沿流程线性变化，可得

$$d = d_2 - 2kx$$

式中 $k = \frac{d_2 - d_1}{2l} = \frac{2.9-2.8}{2\times 20} = 0.0025$

以1-1断面为基准面，写3-3、1-1断面的能量方程

$$H-\frac{\alpha v_1^2}{2g}+h_w$$

$$h_w=H-\frac{\alpha v_1^2}{2g}$$

$$=103-\frac{1\times 81.2^2}{2\times 9.8\times 10^3}$$

$$=102.66\text{mm}$$

$$h_j=\zeta\frac{v_2^2}{2g}=0.5\times\frac{75.7^2}{2\times 9.8\times 10^3}=0.146\text{mm}$$

$$h_f=h_w-h_j=102.66-0.146\approx 103\text{mm}$$

根据沿程水头损失达西公式，dx管段

$$dh_f=\lambda\frac{dx}{d}\frac{v^2}{2g}$$

管中是层流，$\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}}=\frac{64\nu}{vd}$代入上式

$$dh_f=\frac{64\nu}{vd}\frac{dx}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{32\nu}{d^2}\frac{v}{g}dx$$

$$=\frac{32}{d^2}\frac{\nu}{g}\frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d^2}dx$$

$$=\frac{128\nu Q}{\pi g d^4}dx$$

$$h_f=\frac{128\nu Q}{\pi g}\int_0^l\frac{dx}{(d_2-2Kx)^4}$$

$$=\frac{128\nu Q}{\pi g}\cdot\frac{1}{6K}\left[\frac{1}{(d_2-2Kl)^3}-\frac{1}{d_2^3}\right]$$

$$=\frac{128\times\nu\times 500}{3.14\times 9.8\times 10^3}\times\frac{1}{6\times 0.0025}$$

$$\times\left[\frac{1}{(2.9-2\times 0.0025\times 20)^3}-\frac{1}{2.9^3}\right]$$

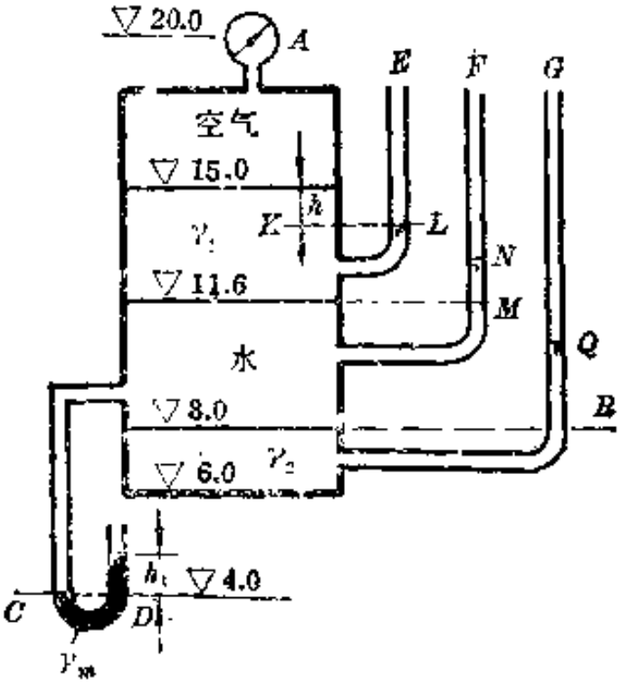
$$=0.631\nu$$

$$\nu=\frac{h_f}{0.631}=\frac{102.51}{0.631}$$

$$=162.4\text{mm}^2/\text{s}$$

$$=1.62\text{cm}^2/\text{s}$$

7　由真空表A中测得真空值为17200N/m²，各高程如图示，空气重量忽略不计。$\gamma_1=6860\text{N/m}^3$，$\gamma_2=15680\text{N/m}^3$，试求测压管$E$、$F$、$G$内液面的高程及U形测压管中水银上升的高差$h_1$的大小。



题 7 图

解：

因空气容重较小，故真空表读数可代表高程为15.0处的压强，$p_A=-17200\text{N/m}^2$。

因$K-L$为等压面，故K点压强也为大气压强，即$p_K=p_a$

又：　　$p_K=p_A+\gamma_1 h$

故　　$p_a=p_A+\gamma_1 h$

$$h=\frac{p_a-p_A}{\gamma_1}=\frac{17200}{6860}=2.5\text{m}$$

所以测压管E内液面高程为$15-2.5=12.5\text{m}$

M点的压强为

$$p_M=p_A+(15.0-11.6)\cdot\gamma_1$$

由测压管F可看出　　$p_M=\gamma\cdot h_{MN}$

故
$$\gamma h_{MN} = -p_A + 3.4\gamma_1$$
$$9800h_{MN} = -17200 + 3.4 \times 6860$$
$$h_{MN} = \frac{6124}{9800} = 0.62\text{m}$$

所以测压管F内液面高程为

$$11.6 + 0.62 = 12.22\text{m}$$

R点的压强为

$$p_R = p_M + \gamma(11.6 - 8.0) = \gamma_2 h_{QR}$$

故
$$\gamma_2 h_{QR} = p_M + \gamma(11.6 - 8.0)$$
$$15680h_{QR} = 6124 + 9800 \times 3.6 = 41404$$
$$h_{QR} = 2.64\text{m}$$

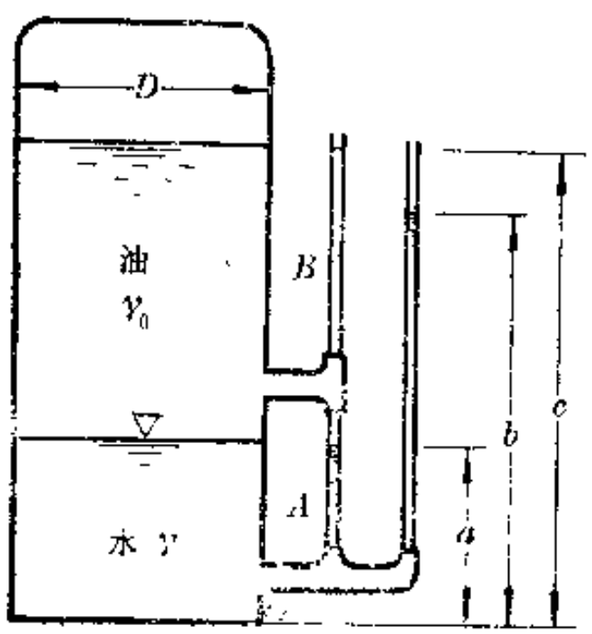
故测压管G内液面高程为

$$8 + 2.64 = 10.64\text{m}$$

U形测压管内CD面为等压面，故有

$$\gamma_m h_1 = p_R + \gamma(8.0 - 4.0)$$
$$13.6 \times 9800h_1 = 41404 + 9800 \times 4$$
$$h_1 = 0.605\text{m}$$

8 在直径$D = 0.4\text{m}$的圆柱形澄清液体的桶中，油与沉淀的



题 8 图

水之间的分界面借玻璃管A来确定，油的上表面借玻璃管B来确定。试计算：（1）假若$a=0.5\text{m}$，$b=1.6\text{m}$，桶内的水和油各为若干（油的比重为0.84）？（2）假若$a=0.2\text{m}$，$c=1.4\text{m}$，$b=1.2\text{m}$，油的单位体积的重量为多少？

解：

（1）计算桶内的水和油各为多少重量

水的体积 $$V_w=\frac{\pi D^2}{4}\cdot a$$

水的重量 $$G_w=\gamma\cdot\frac{\pi D^2}{4}\cdot a$$

油的体积 $$V_0=\frac{\pi D^2}{4}(c-a)$$

油的重量 $$G_0=\gamma_0\cdot\frac{\pi D^2}{4}(c-a)$$

容器内底面处的压强

$$p=\gamma\cdot b$$

或 $$p=\gamma_0\cdot(c-a)+\gamma\cdot a$$

即 $$\gamma\cdot b=\gamma_0\cdot(c-a)+\gamma\cdot a$$

整理得

$$c=a+\frac{\gamma(b-a)}{\gamma_0}$$

油的重量

$$G_0=\gamma_0\cdot\frac{\pi D^2}{4}\cdot\left[a+\frac{\gamma(b-a)}{\gamma_0}-a\right]$$

$$=\frac{\pi D^2}{4}\cdot\gamma\cdot(b-a)$$

$$=\frac{3.14\times0.4^2}{4}\times9800\times(1.6-0.5)$$

$$=1354\text{N}$$

水的重量

$$G_w=\gamma\cdot\frac{\pi D^2}{4}\cdot a=9800\times\frac{3.14\times0.4^2}{4}\times0.5$$

$=615\text{N}$

（2）计算油的单位体积的重量

由上已推导出 $c=a+\frac{\gamma}{\gamma_0}(b-a)$

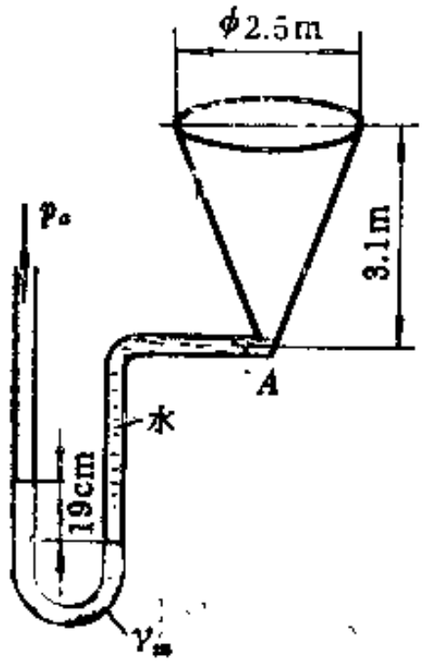
$$\gamma_0=\gamma\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$$

$$=9800\times\left(\frac{1.2-0.2}{1.4-0.2}\right)$$

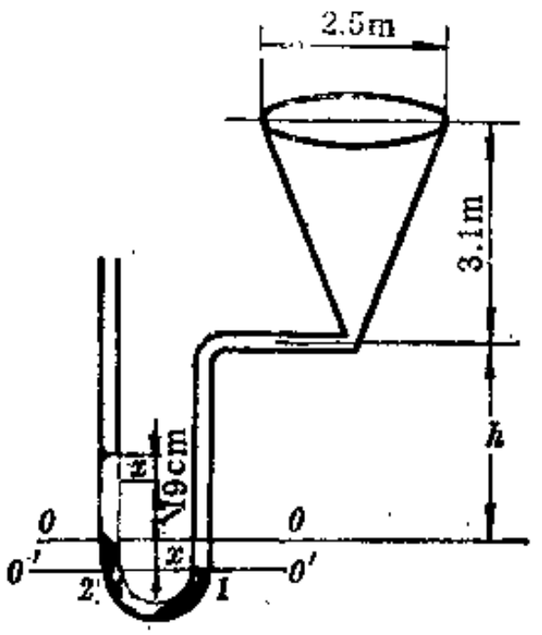
$$=8167\text{N/m}^3$$

油的容重是8167N/m^3。

9 如图所示，有一锥形容器，在A处接一U形水银压差计，当容器空时，A以下注水后压差计读数为19cm，当容器充满水后，压差计的读数为多少？



题 9 图



解 9 图

解：

（1）计算未充水时高度h

取0-0为等压面，则

$$19\times\gamma_m=\gamma h$$

$$h=\frac{\gamma_m}{\gamma}\times 19=13.6\times 19=258.4\text{cm}$$

（2）计算充满水后水银压差计读数

充水后，压差计右边压强增加，水银面下降$x$cm；压差计左边在原水银面上升$x$cm，如图示，取等压面0'-0'，则

$$p_1 = p_2$$

$$\because \quad p_1 = (310 + 258.4 + x)\cdot\gamma$$

$$= (568.4 + x)\cdot\gamma$$

$$p_2 = \gamma_m \cdot (19 + 2x)$$

$$\therefore \quad (568.4 + x)\cdot\gamma = \gamma_m \cdot (19 + 2x)$$

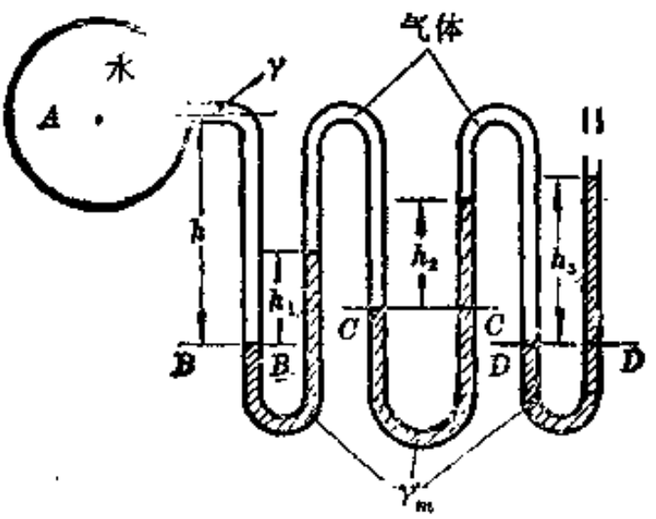
由上式解x，得

$$x = \frac{568.4 - 19\dfrac{\gamma_m}{\gamma}}{2\dfrac{\gamma_m}{\gamma} - 1} = \frac{568.4 - 19 \times 13.6}{2 \times 13.6 - 1}$$

$$= 11.83\text{cm}$$

压差计读数为

$$19 + 2x = 19 + 2 \times 11.83 = 42.66\text{cm} \approx 42.7\text{cm}$$



题 10 图

10 已知$h_1 = 0.1\text{m}, h_2 = 0.2\text{m}, h_3 = 0.3\text{m}, h = 0.5\text{m}$，U形测压计中工作流体为水银和气体．试计算水管中$A$点压强的大小．

解：

作等压面B-B，C-C，D-D，根据等压面原理可得

$$p_A = p_B - \gamma h$$

$$p_B = p_C + \gamma_m h_1$$

$$p_C = p_D + \gamma_m h_2$$

$$p_D = \gamma_m h_3$$

将上述各式叠加整理可得

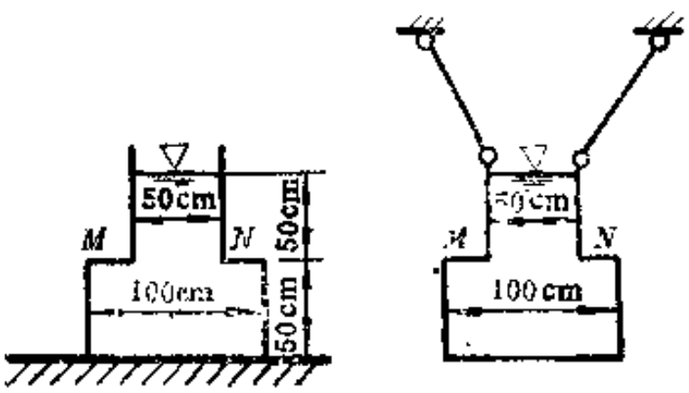
$$p_A = \gamma_m(h_1 + h_2 + h_3) - \gamma h$$

$$= 133280 \times (0.1 + 0.2 + 0.3) - 9800 \times 0.5$$

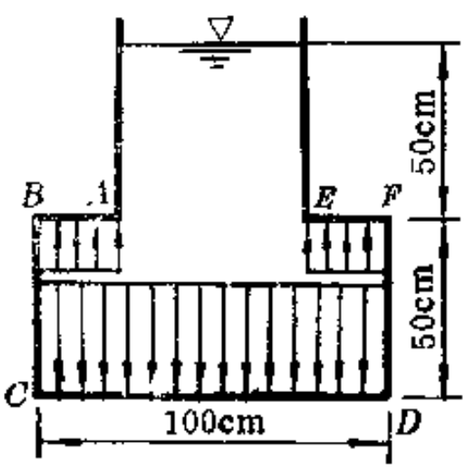
$$= 75068 \text{N/m}^2$$

管中A点的压强是75068N/m^2。

11　如图示为一开口容器盛以水。（1）求器底以及环形平面MN上所受到静水总压力及其方向；（2）若容器不是放在地面上，而是由上顶吊起，此时器底受力为若干？



题 11 图



解 11 图

解：

（1）器底和MN上所受到的静水压强分布图如图示。

$$p_A = p_B = p_E = p_F = 0.5 \times 9.8$$

$$= 4.9 \text{N/m}^2$$

$$p_C = p_D = 1.0 \times 9.8$$

$$= 9.8 \text{N/m}^2$$

器底静水总压力 $= p_C \times A = 9.8 \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 = 7.69 \text{N}$　（↓）

环形MN上所受的静水总压力 $=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)p_A$

$$=\frac{\pi}{4}(1^2-0.5^2)\times 4.9=2.88\text{N}\quad(\uparrow)$$

（2）如果容器是吊起的，器底所受的静水总压力仍同前，因在重力作用下的静水压强，在任何状况下都应服从 $p=p_0+\gamma h$ 的规律。

12 有一$2\times 2\text{m}^2$矩形平板铅垂置于某静止液体中（见图）。该液体的容重γ沿着深度作直线分布变化，如液面及3m深处的液体容重分别为：$\gamma_0=1.00\text{t/m}^3$及$\gamma_3=1.18\text{t/m}^3$。试求：（1）液体压强的计算公式；（2）作用于平板上的液体总压力；（3）压力中心距液面的距离。

解：

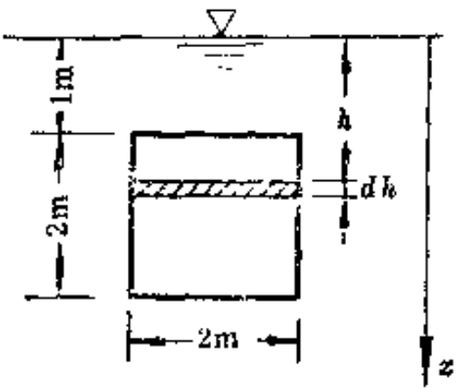
（1） $p=\int_0^h \gamma dh$

因γ沿水深作直线分布变化，故

$$p=\int_0^h\left(\gamma_0+\frac{\gamma_3-\gamma_0}{3}h\right)dh$$

$$=\int_0^h\left(1+\frac{1.18-1.0}{3}h\right)dh$$

$$=h+0.03h^2$$



题 12 图

即液体压强的表达式为 $p=h+0.03h^2$（h为液面下水深）。

（2）作用在平板上的液体总压力

$$P=b\int_1^3 pdh$$

$$=2\int_1^3(h+0.03h^2)dh$$

$$=8.52\text{t}=83.5\text{kN}$$

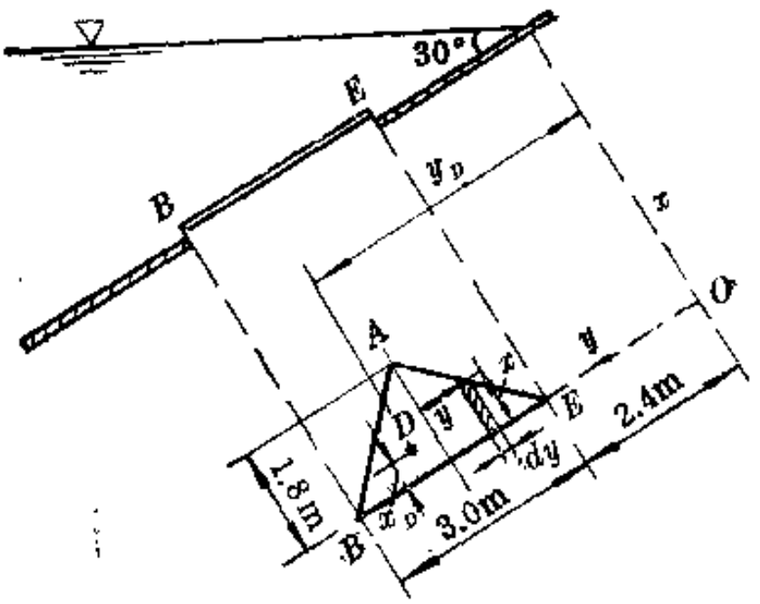
（3）设压力中心距液面距离为h_c

$$\because\quad Ph_c=b\int_1^3 phdh$$

$$\therefore \quad h_c=\frac{b}{P}\int_1^3(h+0.03h^2)hdh$$

$$=\frac{2}{8.52}\int_1^3(h^2+0.03h^3)dh$$

$$=2.18\text{m}$$



题 13 图

13 任意形状平面所受静水总压力的压力中心坐标x_D和y_D如何确定？如图所示，与水平面呈30°角的水池侧壁上，有一块等腰三角形平面盖板ABE，底宽$\overline{BE}=3\text{m}$，高1.8m，$\overline{EO}=2.4\text{m}$，试求其压力中心$D$点的坐标$x_D$和$y_D$。

解：

设总压力作用点位置在D，其坐标为（x_D，y_D），则

$$x_D=\frac{I_{xy}}{y_cA}$$

$$y_D=y_c+\frac{I_c}{y_cA}$$

式中 I_{xy}为任意形状受压平面对Ox及Oy轴的惯性积。

y_c为任意形状受压平面的形心C点至Ox轴的距离。

I_c为任意形状受压平面面积对于通过其形心C点且与Ox

轴平行的轴线的惯性矩。

A为受压平面的面积。

$$y_c=\overline{EO}+\frac{1}{2}\overline{EB}=2.4+\frac{1}{2}\times 3=3.9\text{m}$$

$$A=\frac{1}{2}\overline{EB}\times 1.8=\frac{1}{2}\times 3\times 1.8=2.7\text{m}^2$$

$$I_c=2\int_0^{1.5}y^2.x.dy$$

由相似三角形得知$x=\frac{1.8(1.5-y)}{1.5}$，将此值代入上式得

$$I_c=\frac{2\times 1.8}{1.5}\int_0^{1.5}y^2(1.5-y)dy=1.0125\text{m}^4$$

$$I_{xy}=\int_A x\cdot y\cdot dA=I'_{xy}+x_cy_cA=x_cy_cA$$

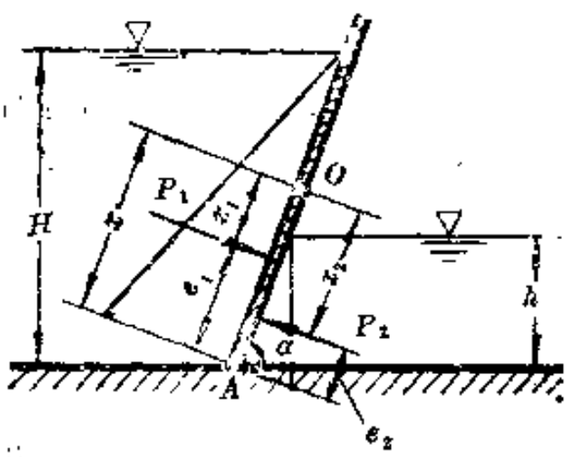
$$=0.6y_cA$$

将上述诸数值代入压力中心公式，即得出D点的坐标为

$$x_D=\frac{I_{xy}}{y_cA}=\frac{0.6y_cA}{y_cA}=0.6\text{m}$$

$$y_D=y_c+\frac{I_c}{y_cA}=3.9+\frac{1.0125}{3.9\times 2.7}=4.0\text{m}$$

14 矩形水闸闸门可绕铰链轴O转动。当上游水位超过H



题 14 图

=2m时，要求闸门自动开启。若略去闸门自重和轴的摩擦力，试求铰链轴的位置x。闸门另一侧的水深$h=0.4$m，$\alpha=60°$。

解：

上游水位超过H，闸门自动打开，则上游水压力P_1对O点的力矩应小于下游水压力P_2对O点的力矩，即

$$P_1x_1-P_2x_2\leqslant 0 \quad 或 \quad P_2x_2\geqslant P_1x_1$$

$$\because \quad P_1=\frac{1}{2}p_1\times\frac{H}{\sin 60°}=\frac{1}{2}\gamma H\times\frac{H}{\sin 60°}=\frac{\gamma}{2}\frac{H^2}{\sin 60°}$$

$$=\frac{9800}{2}\times\frac{2^2}{\sin 60°}$$

$$=22632\text{N}$$

$$P_2=\frac{1}{2}p_1\frac{h}{\sin 60°}=\frac{\gamma h^2}{2\sin 60°}$$

$$=\frac{9800\times 0.4^2}{2\sin 60°}$$

$$=905\text{N}$$

设上下游静水压力合力作用点距底部A的距离分别为e_1和e_2

$$e_1=\frac{1}{3}\frac{H}{\sin 60°}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{\sin 60°}=0.77\text{m}$$

$$e_2=\frac{1}{3}\times\frac{h}{\sin 60°}=\frac{1}{3}\times\frac{0.4}{\sin 60°}=0.15\text{m}$$

$$x_1=x-e_1=x-0.77$$

$$x_2=x-e_2=x-0.15$$

$$P_2(x-0.15)\geqslant P_1(x-0.77)$$

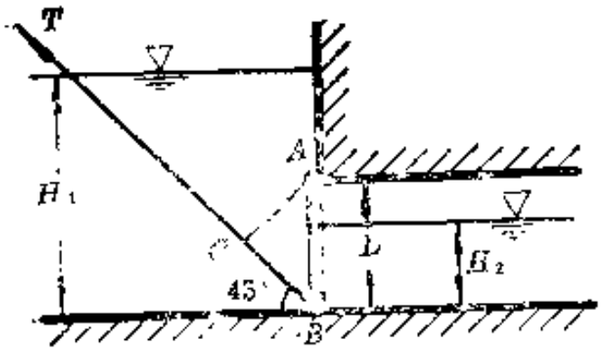
$$905(x-0.15)\geqslant 22632(x-0.77)$$

整理化简得

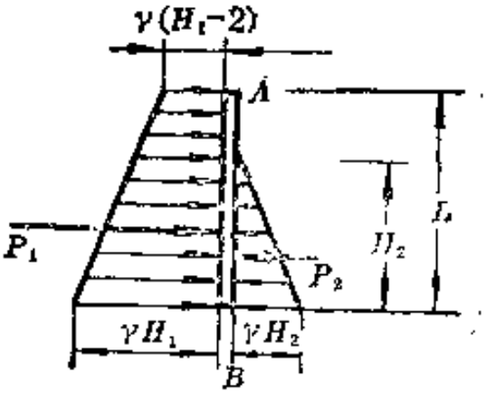
$$21727x\leqslant 17291$$

则铰链轴位置 $x\leqslant 0.80\text{m}$

15 图示一矩形平板旋转闸门尺寸为$L\times b=3\times 4\text{m}^2$，用来关闭一泄水孔口。闸门上游水深$H_1=5$m，下游水深$H_2=2$m。试确定开启闸门的钢绳所需的拉力$T$，并绘出闸门上的压强分布图。



题 15 图



解 15 图

解：

用图解法求作用在闸门上的静水总压力：

$$P_1=\frac{1}{2}(2\gamma+5\gamma)L\cdot b$$

$$=\frac{1}{2}\times 7\times 9800\times 3\times 4$$

$$=411600\text{N}$$

$$\approx 412\text{kN}$$

$$P_2=\frac{1}{2}\times 2\gamma\times 2\times 4$$

$$=8\times 9800$$

$$=78400\text{N}$$

$$\approx 78.4\text{kN}$$

压力中心距A点的距离

$$L_{D_1}=L-\frac{L(2\times 2\gamma+5\gamma)}{3(2\gamma+5\gamma)}$$

$$=3-\frac{3}{3}\times\frac{9}{7}$$

$$=1.71\text{m}$$

$$L_{D_2}=L-\frac{1}{3}H_2$$

$$=3-\frac{1}{3}\times 2$$

$$=2.33\text{m}$$

钢绳拉力距A点的距离

$$L_{AC}=L\sin 45^\circ$$

$$=3\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=2.12\text{m}$$

作用于闸门上各力对A点取力矩，并令$\Sigma M=0$

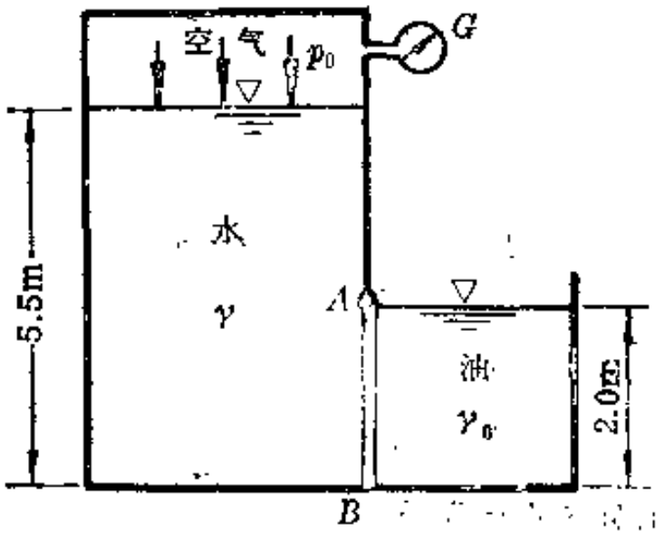
得 $$-P_1\times L_{D1}+T\times L_{AC}+P_2\times L_{D2}=0$$

$$T=\frac{P_1L_{D1}-P_2L_{D2}}{L_{AC}}$$

$$=\frac{411.6\times 1.71-78.4\times 2.33}{2.12}$$

$$=245.83\text{kN}$$

$$\approx 246\text{kN}$$



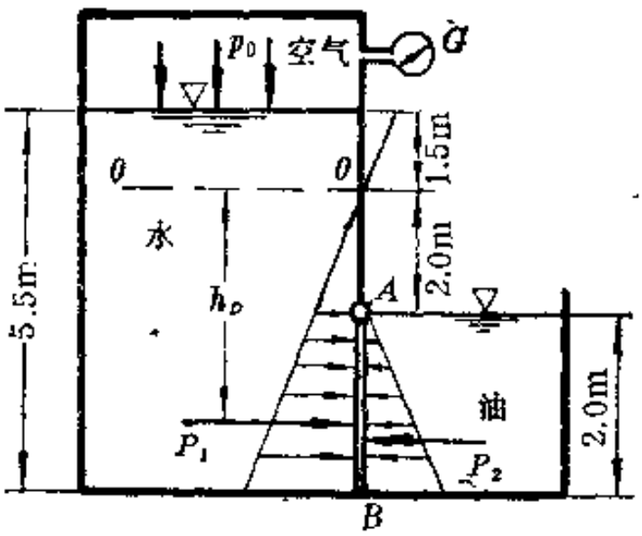
题 16 图

16 如图所示，闸门宽1.2m，铰在A点，压力表G的读数为-14700N/m^2，在右侧箱中装有油，其容重$\gamma_0=8.33\text{kN/m}^3$，问在$B$点加多大的水平力才能使闸门$AB$平衡？

解：

把空气的负压值转换成用水柱高表示

$$h=\frac{p_0}{\gamma}=\frac{-14700}{9800}=-1.5\text{m}$$



解 16(a)图

相当于A以上水位减小1.5m，0－0面为当量大气压作用下的液面，故左侧作用在AB闸门上的水压力P_1为

$$P_1=\gamma\cdot h_c\cdot A$$
$$=9800(2+1)(2\times1.2)$$
$$=70560\text{N}$$
$$\approx70.6\text{kN}$$

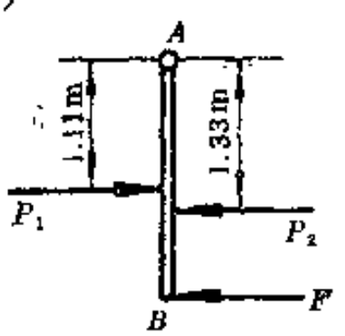
其压力中心距0点为

$$h_D=h_c+\frac{I_c}{h_cA}$$
$$=3+\frac{\frac{1.2\times2^3}{12}}{3\times(2\times1.2)}$$
$$=3+0.11$$
$$=3.11\text{m}$$

其压力中心距A点为$3.11-2=1.11$m。

右侧油对AB面的压力P_2为

$$P_2=\frac{1}{2}\gamma_0h^2b$$
$$=\frac{1}{2}\times8.33\times2^2\times1.2$$
$$=19.99\text{kN}$$



解 16(b) 图

其压力中心距A点的距离为

$$h'_D=\frac{2}{3}\times 2=1.33\text{m}$$

设在B点加水平力F才能使闸门AB平衡，如解16(b)图示。对A点取矩

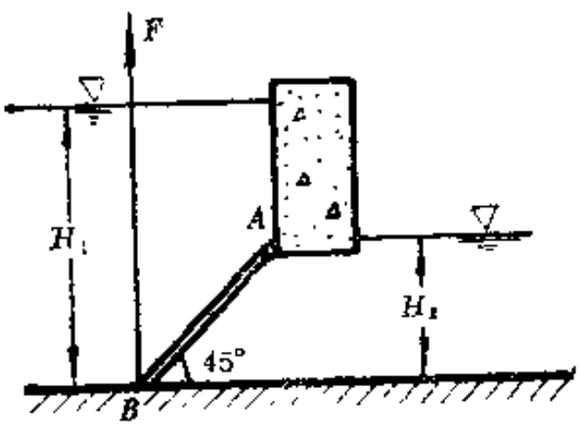
$$\Sigma M_A=0$$

$$P_2h'_D+F\times AB-P_1\times 1.11=0$$

$$19.99\times 1.33+2F-70.56\times 1.11=0$$

$$2F=70.56\times 1.11-19.99\times 1.33$$

$$F=25.87\text{kN}$$



题 17 图

17 已知某小型圆形闸门AB直径$d=20\text{cm}$，水头H_1、H_2分别为5m和1 m，闸门在A点处铰接，B点为起吊点，问静水作用下垂直力F多大时才能拉开闸门？

解：

（1） 作用于闸门上的静水压力大小及作用点

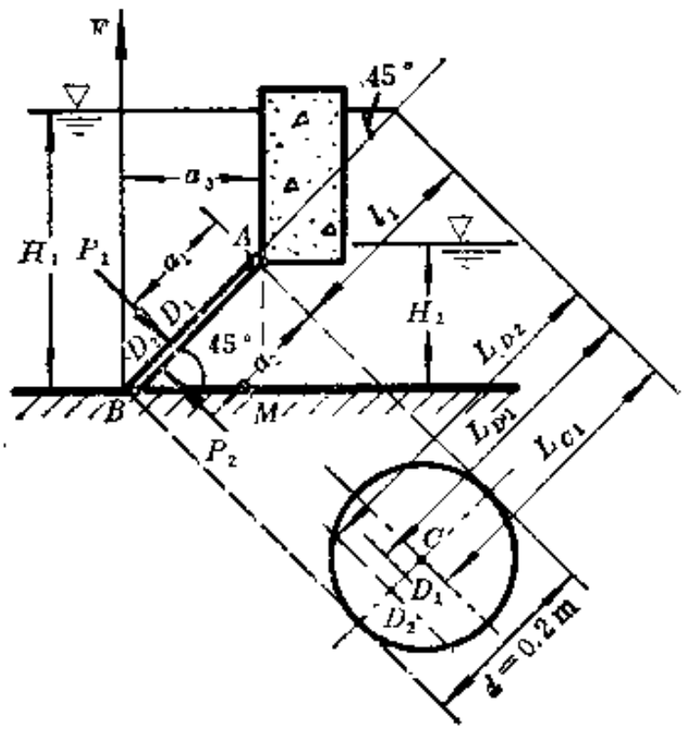
$$P_1=p_{c1}\cdot A_1$$

式中 $A_1=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{3.14}{4}\times 0.2^2=0.0314\text{m}^2$

p_{c1}为上游面形心点的压强

$$\because \quad AM=d\sin 45^\circ$$

$$=0.2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$



解 17 图

$$=0.1414\text{m}$$

$$\therefore \quad h_{c1}=H_1-\frac{AM}{2}$$

$$=5-\frac{0.1414}{2}$$

$$=4.929\text{m}$$

$$\because \quad p_{c1}=\gamma h_{c1}$$

$$=9.8\times 4.929$$

$$=48.3\text{kN/m}^2$$

故 $$P_1=48.3\times 0.0314=1.52\text{kN}$$

$$P_2=p_{c2}\cdot A_2$$

式中 $A_2=A_1=0.0314\text{m}^2$

$$h_{c2}=H_2-\frac{AM}{2}=1-\frac{0.1414}{2}=0.929\text{m}$$

$$p_{c2}=\gamma h_{c2}=9.8\times 0.929=9.1\text{kN/m}^2$$

故 $$P_2=p_{c2}\cdot A_2=9.1\times 0.0314=0.286\text{kN}$$

静水总压力的作用点

$$L_{D1}=L_{C1}+\frac{I_{C1}}{L_{C1}A}$$

$$=\frac{h_{C1}}{\sin 45^\circ}+\frac{\frac{\pi R^2}{4}}{\frac{h_{C1}}{\sin 45^\circ}\pi R^2}$$

$$=\frac{4.929}{0.7071}+\frac{0.1^2}{\frac{4.929}{0.7071}\times 4}$$

$$=6.97\text{m}$$

P_1的作用点到铰A的距离a_1为

$$a_1=L_{D1}-l_1$$

$$=6.9714-\frac{5-0.1414}{\sin 45^\circ}$$

$$=0.1\text{m}$$

$$L_{D2}=L_{C2}+\frac{I_{C2}}{L_{C2}A}$$

$$=\frac{h_{C2}}{\sin 45^\circ}+\frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{h_{C2}}{\sin 45^\circ}\pi R^2}$$

$$=\frac{0.929}{0.7071}+\frac{0.1^3}{\frac{0.929}{0.7071}\times 4}$$

$$=1.3144+0.0019$$

$$=1.32\text{m}$$

P_2的作用点到铰A的距离a_2为

$$a_2=L_{D2}-l_2$$

$$=1.3163-\frac{1-0.1414}{\sin 45^\circ}$$

$$=1.3163-1.2142$$

$$=0.102\text{m}$$

（2）拉开闸门需要的垂直力F

F 距铰 A 的距离为 a_3

$$a_3 = d\sin 45^\circ$$

$$= 0.2 \times 0.7071 = 0.141\text{m}$$

根据平面力系平衡方程式，对铰 A 点取力矩，并令 $\Sigma M = 0$（不计闸门自重），得

$$-F \cdot a_3 - P_2 \cdot a_2 + P_1 \cdot a_1 = 0$$

故

$$F = \frac{P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2}{a_3}$$

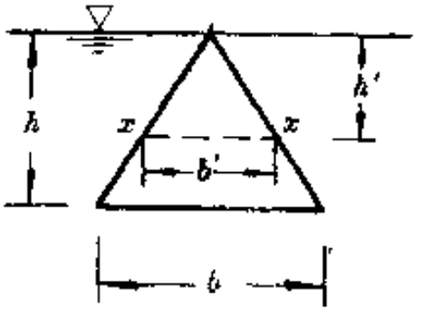
$$= \frac{1.52 \times 0.1 - 0.286 \times 0.102}{0.141}$$

$$= 0.882\text{kN}$$

18 一底边水平的等边三角形位于铅直面内，一侧挡水，今将该三角形分成静水总压力相等的两部分，求水平划分线 x–x 的位置。

解：

如图所示，设 x–x 线将三角形分成上下两部分，上面部分的高为 h' 的静水压力为



题 1·31

$$P' = p_c' \cdot A'$$

形心点压强 $p_c' = \frac{2}{3}\gamma h'$，

$$A' = \frac{1}{2}b'h' = \frac{1}{2}\left(\frac{h'}{\sin 60^\circ}\right)h' = \frac{\sqrt{3}h'^2}{3}$$

$$\therefore \quad P' = \frac{2}{3}\gamma h' \times \frac{\sqrt{3}}{3}h'^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}\gamma h'^3$$

而原三角形的静水压力为

$$P = p_c \cdot A$$

$$= \frac{2}{3}\gamma h \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}h^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}\gamma h^3$$

根据已知条件 $P' = \frac{1}{2}P$

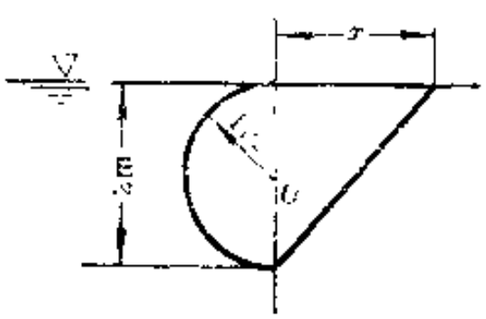
$$\therefore \qquad \frac{2\sqrt{3}}{9}\gamma h'^{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\gamma h^{3}\right)$$

$$h'^{3}=\frac{1}{2}h^{3}$$

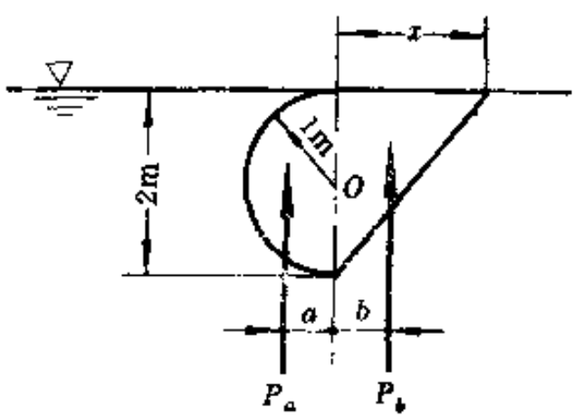
$$h'=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}h$$

故水平划分线x-x距水面的距离$h'=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}h$。

19　有一棱柱体，其截面如图所示。假定它的重量不计，悬挂在穿过O点并和纸面垂直的水平转轴上，要使棱柱体保持如图所示位置不发生转动。求$x=$？



题 19 图



解 19(a) 图

解：

（1）解法一：

设棱柱体截面半圆的部分浮力为P_a，三角形部分的浮力为P_b，要使棱柱体不发生转动，必须满足$\Sigma M_O=0$，即

$$P_a\cdot a-P_b\cdot b=0$$

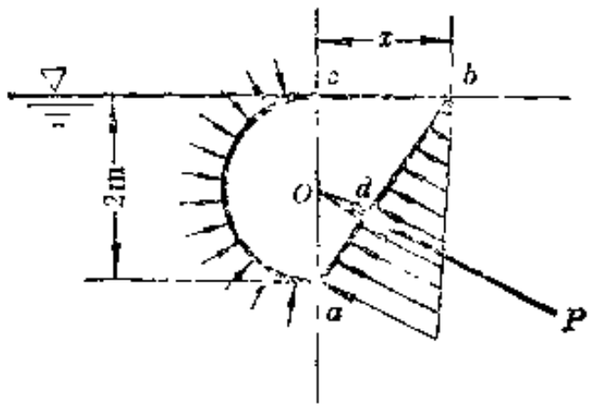
故

$$\frac{1}{2}\pi r^2\cdot\frac{4}{3\pi}\cdot r-\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot x\cdot\frac{x}{3}=0$$

因$r=1$，代入上式化简后得

$$x^2-2$$

$$x=\pm\sqrt{2}=\pm 1.42\text{m}$$



解 19(b) 图

取 $x=1.42\text{m}$

（2）解法二：

因半圆弧曲面上静水压强方向均通过圆心O，若ab面上静水总压力P能通过O点，该棱柱体即可保持图示位置不再转动，即要求

$$ad=\frac{1}{3}ab$$

由$\triangle abc\backsim\triangle aOd$，对应边成比例，

$$ab:aO=ac:ad$$

因$ab=\sqrt{2^2+x^2}$，要求$ad=\frac{ab}{3}=\frac{\sqrt{2^2+x^2}}{3}$，因$aO=1\text{m}$，$ac=2\text{m}$，代入比例式得

$$\sqrt{2^2+x^2}:1=2:\frac{\sqrt{2^2+x^2}}{3}$$

解之得 $x^2=2$

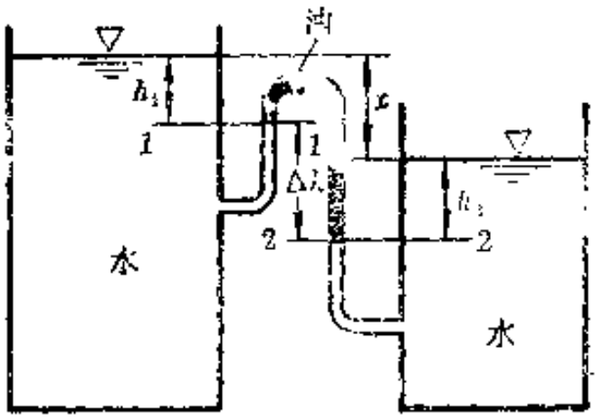
$$x=\pm\sqrt{2}=\pm 1.42\text{m}$$

取$x=1.42\text{m}$

20 二个盛水容器，用油压差计连接，如图所示．已知油的容重$\gamma_0=0.8\text{t/m}^3$，压差计中的液面高差$\Delta h=50\text{cm}$，求二容器中的水面高差x？

解：

如图，选取1-1、2-2水平面，设1-1水平面在左边水箱水面



题 20 图

以下水深为h_1。2-2水平面在右边水箱水面以下水深为h_2。根据等压面原理

$$\gamma \cdot h_1 + \gamma_0 \cdot \Delta h = \gamma h_2$$

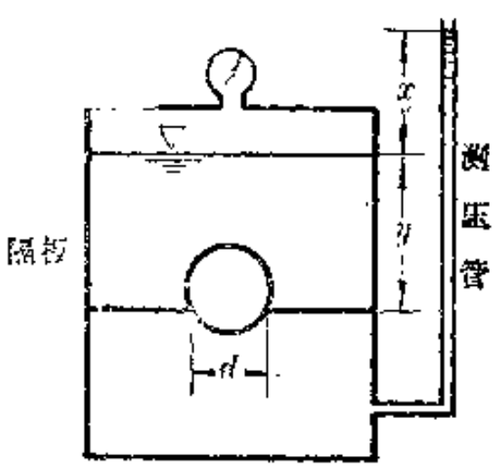
整理得

$$h_2 - h_1 = \frac{\gamma_0 \Delta h}{\gamma} = \frac{0.8 \times 0.5}{1.0} = 0.4\text{m}$$

由几何关系有

$$x = \Delta h - h_2 + h_1 = \Delta h - (h_2 - h_1)$$
$$= 0.5 - 0.4 = 0.1\text{m} = 10\text{cm}$$

21 有一盛水的密闭容器，中间用水平板分隔为上、下两部分。隔板中有一圆孔，并用一圆球堵塞，如图示。已知圆球的直径$D = 50\text{cm}$，球重$G = 139\text{kg}$，圆孔直径$d = 25\text{cm}$，容器顶



题 21 图

部压力表读数 $p=0.05\text{kg/cm}^2$。问当测压管中水面高差 x 大于若干时，圆球即被水压力向上顶开？

解：

球体所受的竖直力由两部分组成，第一部分是液体作用的合力 P，方向必须向上才能使球体上移，它由球体的浮力加上由于内外水头差作用在直径为 d 的面积上的力组成，第二部分是球体重量 $G=139\text{kg}=1362.2\text{N}$，当 $P>G$ 时，球体即被水压力顶开。

球体浮力

$$P_1=\frac{\pi}{6}D^3\cdot\gamma$$

内外水头差作用在直径 d 上的力

$$P_2=\left(x-\frac{p}{\gamma}\right)\frac{\pi d^2}{4}\cdot\gamma$$

$$p=0.05\text{kg/cm}^2=0.49\times10^4\text{N/m}^2$$

$$\begin{aligned}P&=P_1+P_2\\&=\gamma\pi\left[\frac{D^3}{6}+\left(x-\frac{p}{\gamma}\right)\frac{d^2}{4}\right]\\&=9800\times3.14\times\left[\frac{0.5^3}{6}+\left(x-\frac{0.49\times10^4}{9800}\right)\times\frac{0.25^2}{4}\right]\\&=400.65+480.04x\text{N}\end{aligned}$$

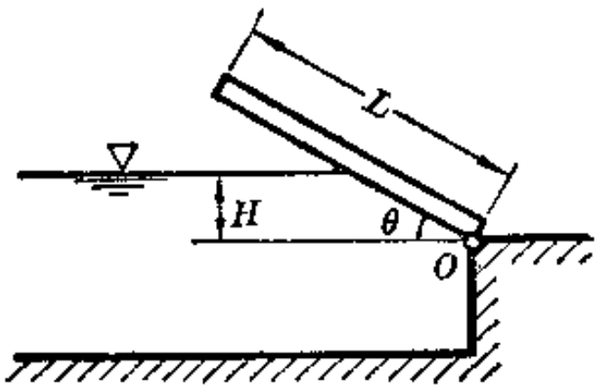
$$P>G$$

$$400.65+480.04x>1362.2$$

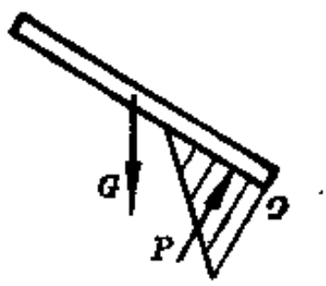
$$x>2.00\text{m}$$

当测压管中水面与容器中水面高差 x 大于 200cm 时圆球就被顶开。

22 一重量为 $G=2000\text{kg}$ 的闸门。用无摩擦的铰O联接在岸墩上，垂直于纸面的水池长和闸门宽度均为 8 m，图中水深 $H=1\text{ m}$，$\theta=30°$，为了保持闸门的平衡，试计算闸门的长度 $L=$ ？



题 22 图



解 22 图

解：

（1）绘出平板闸门受力图，计算静水总压力P

$$P=\frac{\gamma H^2 b}{2\sin\theta}=\frac{9800\times 1^2\times 8}{2\sin 30^\circ}$$

$$=78400\text{N}$$

$$\approx 78.4\text{kN}$$

$$G=2000\text{kg}=2000\times 9.8=19600\text{N}=19.6\text{kN}$$

（2）以铰O为矩心，取矩，计算L

$$G\times\frac{L}{2}\cos\theta-P\times\frac{1}{3}\frac{H}{\sin\theta}=0$$

整理得

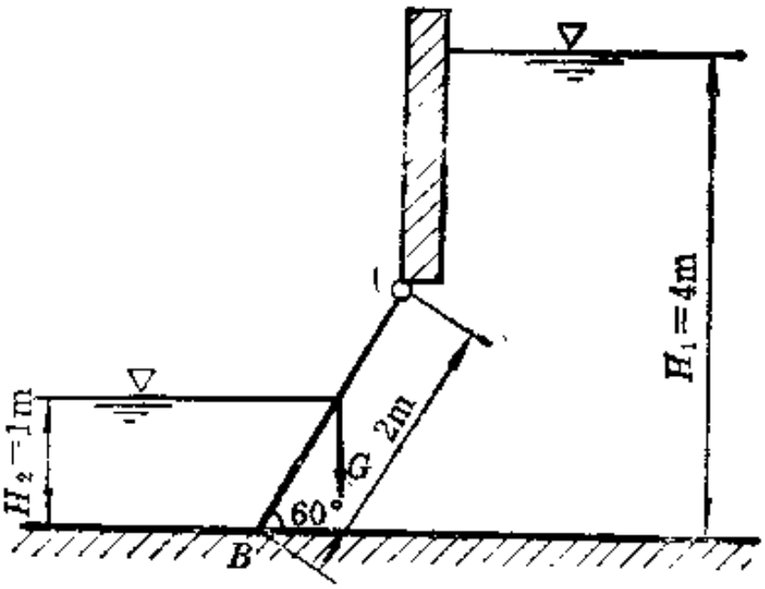
$$L=\frac{2PH}{3G\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{2\times 78.4\times 1}{3\times 19.6\times\sin 30^\circ\times\cos 30^\circ}$$

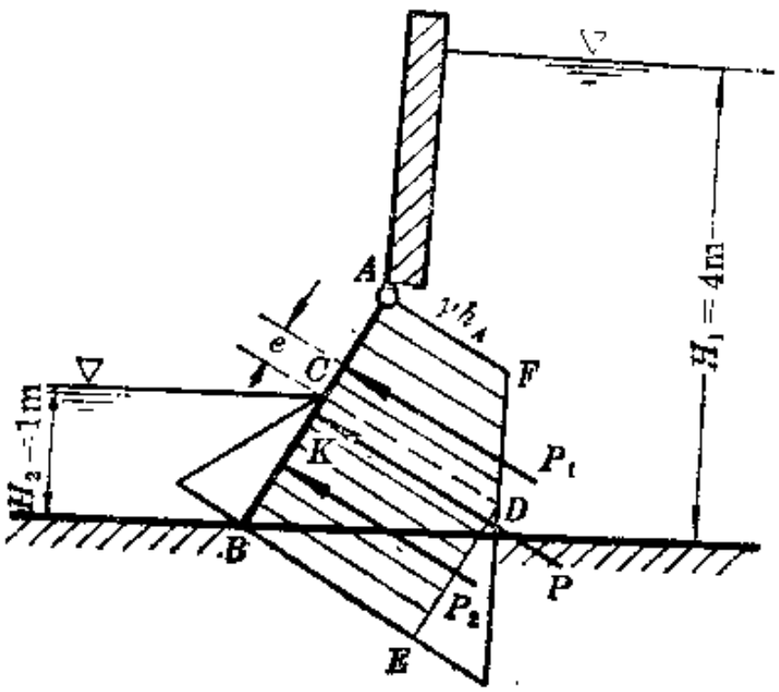
$$=6.16\text{m}$$

为了保持闸门的平衡，闸门长度应为6.16m。

23 图示为一均质单宽矩形平板闸门AB，已知$AB=2\text{m}$，倾角$\theta=60^\circ$，A为铰点，当上游水深$H_1=4\text{m}$，下游水深$H_2=1\text{m}$时，闸门处于受力平衡状态。求（1）闸门所受的静水总压力及其作用点距A点的距离；（2）闸门自重G。



题 23 图



解 23(a) 图

解：

（1）AB闸门上的压强分布图为$ABEDF$，如解23(a)图所示，A点的压强为

$$p_A=\gamma h_A$$

A点水深

$$h_A=4-2\sin\theta$$

$$=4-1.732=2.268\text{m}$$

$$p_A=9.8\times2.268=22.23\text{kN/m}^2$$

由压强分布图可见，C点和B点压强相等均为

$$9.8\times3=29.4\text{kN/m}^2$$

闸门AB所受的静水总压力

$$P=P_1+P_2$$

$$CB=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{2}{\sqrt{3}}=1.155\text{m}$$

$$AC=2-1.155=0.845\text{m}$$

$$\because\quad P_1=\frac{1}{2}(AF+CD)\times AC$$

$$=\frac{1}{2}(9.8\times2.268+9.8\times3)\times0.845$$

$$=21.81\text{kN}$$

$$P_2=CD\times CB$$

$$=9.8\times3\times1.155=33.96\text{kN}$$

$$\therefore\quad P=21.81+33.96=55.77\text{kN}$$

求作用点K距A点的距离AK，根据力矩合成原理

$$P_1(AC-e)+P_2\left(AC+\frac{CB}{2}\right)=P\cdot AK$$

$$21.81\left(0.845-\frac{0.845}{3}\times\frac{2\times9.8\times2.268+3\times9.8}{9.8\times2.268+9.8\times3}\right)$$

$$+33.96\times1.42=55.77\times AK$$

$$56.96=55.77\times AK$$

$$AK=1.02\text{m}$$

（2）求闸门自重G

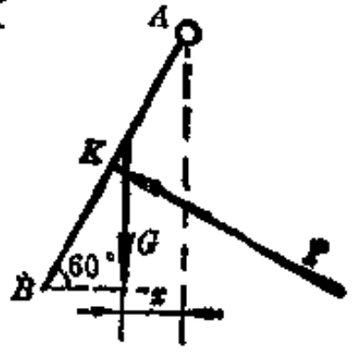
对A点取矩

$$\Sigma M_A=0$$

$$P\cdot AK=G\cdot x$$

$$P\cdot AK=G(1\times\cos60^\circ)$$

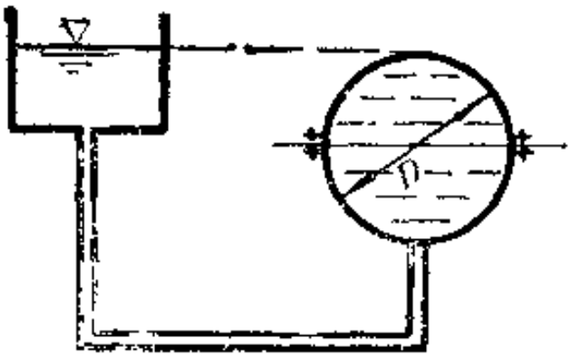
$$55.77\times1.02=0.5\times G$$



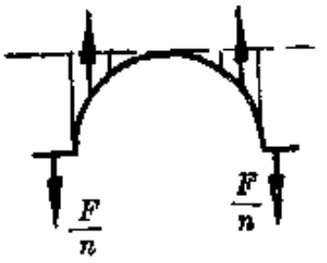
解 23(b)图

$$\therefore \qquad G=113.77\ \text{kN}\approx 114\text{kN}$$

24 如图所示为一盛水的球体，直径$D=2\,\text{m}$，求作用于螺栓上的力。



题 24 图



解 24 图

解：

设作用于螺栓上的力为F，如以V表示球体体积，则

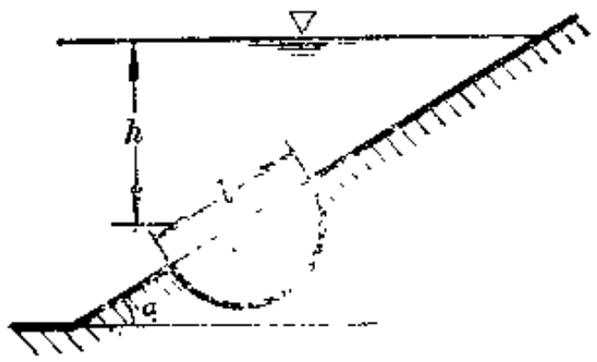
$$\begin{aligned}F&=\gamma\left(\frac{\pi D^2}{4}\cdot D-\frac{V}{2}\right)\\&=\gamma\left(\frac{\pi}{4}D^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}D^3\right)\\&=\frac{1}{6}\gamma\pi D^3\\&=\frac{1}{6}\times 9.8\times 3.14\times 2^3\\&=41\text{kN}\end{aligned}$$

如有n个螺栓，则每一个螺栓所承受的拉力为$\frac{41}{n}$ kN，当$n=2$时，则每一螺栓所承受的拉力为20.5kN。

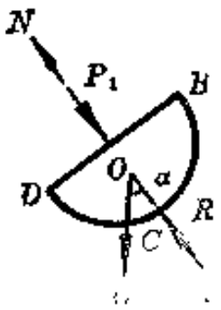
25 有一水槽其侧壁与水平面成$\alpha=30°$的角，壁上开一矩形孔口，其宽度$b=1.5\text{m}$，长度$l=1.0\text{m}$，孔口中心处的水深$h=2.0\text{m}$，设用一半圆柱形的盖子封闭该孔口，求作用于盖上的压力P。

解：

过O作壁面法线N-N，取控制体BCD，$\Sigma F_N=0$，$R=P_1$



题 25 图



解 25 图

$+G\cos\alpha$则

$$R=p_0bl+\frac{\gamma}{2}\frac{\pi l^2}{4}b\cos\alpha$$

$$=\gamma b\left(hl+\frac{\pi l^2}{8}\cos\alpha\right)$$

$$=9800\times1.5\times\left(2\times1.0+\frac{3.14\times1^2}{8}\cos30^\circ\right)$$

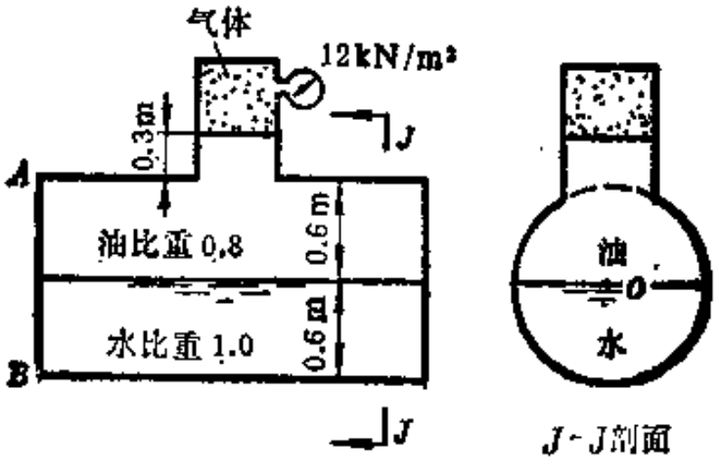
$$=34396\text{N}$$

$$\approx34.4\text{kN}$$

作用于盖上的压力$P-R=34.4$kN，方向与R相反。

26 有一圆柱形容器，如图示，计算静止液体作用在圆柱AB面上力的大小和位置。

解：



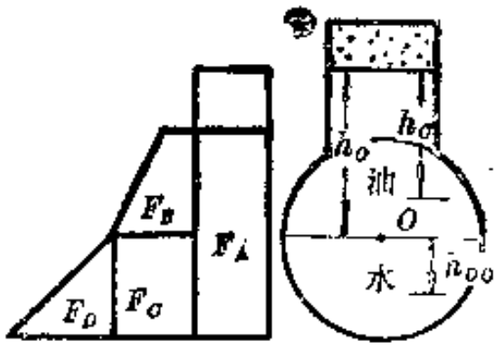
题 26 图

（1）作用力

压力计读数$p=12\text{kN/m}^2$，气体作用在圆面积AB上的力

$$F_A=pA=p\frac{\pi d^2}{4}=12\times\frac{3.14\times1.2^2}{4}=13.56\text{kN}$$

油作用在面积AB上的力由F_B和F_C两部分组成



解 26 图

$$F_B=\gamma_0 h_C\times\frac{1}{2}\pi r^2$$

h_C为上半圆形心至液面距离

$$h_C=0.9-\frac{4r}{3\pi}$$

$$F_B=\gamma_0\left(0.9-\frac{4r}{3\pi}\right)\times\frac{1}{2}\pi r^2=0.8\times9.8\times\left(0.9-\frac{1\quad0.6}{3\times3.14}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$\times3.14\times0.6^2$$

$$=2.86\text{kN}$$

$$F_C=\gamma_0 h_O\cdot\frac{1}{2}\pi r^2$$

h_O为圆中心至液面距离 $h_O=0.9\text{m}$

$$F_C=0.8\times9.8\times0.9\times\frac{1}{2}\times3.14\times0.6^2$$

$$=3.99\text{kN}$$

水作用在AB面积上的力

$$F_D=\gamma h_{DC}\times\frac{1}{2}\pi r^2$$

h_{DC}为下半圆形心至水面距离，$h_{DC}=\dfrac{4r}{3\pi}$

$$F_D=\gamma\times\frac{4r}{3\pi}\times\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{2\gamma r^3}{3}=\frac{2\times9.8\times0.6^3}{3}$$

$$=1.41\text{kN}$$

作用在圆柱容器端部AB面积上的静水总压力

$$F=F_A+F_B=F_C+F_D$$

$$=13.56+2.86+3.99+1.41$$

$=21.82\text{kN}$

（2）压力中心位置

设力F、F_A、F_B、F_C、F_D作用点距圆心O的距离分别为y、y_A、y_B、y_C、y_D，其中y待求，$y_A=0$

半圆形心距O点距离是 $\dfrac{4r}{3\pi}=\dfrac{4\times0.6}{3\times3.14}=0.255\text{m}$

力F_B作用点距液面距离为y'_B

$$y'_B=L_{BC}+\frac{I_{BC}}{L_{BC}A}$$

$$=(0.9-0.255)+\frac{0.1102\times r^4}{(0.9-0.255)\times\frac{\pi r^2}{2}}$$

$$=0.645+\frac{0.1102\times2\times0.6^2}{0.645\times3.14}$$

$$=0.684\text{m}$$

$$y_B=0.9-y'_B=0.9-0.684=0.216\text{m}$$

作用力F_C，其压强作用在下半圆各点均相等，故作用点在形心上，$y_C=0.255\text{m}$

$$y_D=L_{DC}+\frac{I_{DC}}{L_{DC}A}=0.255+\frac{0.1102\times r^4}{0.255\times\frac{\pi r^2}{2}}$$

$$=0.255+\frac{2\times0.1102\times r^2}{0.255\pi}$$

$$=0.255+\frac{0.2204\times0.6^2}{0.255\times3.14}$$

$$=0.354\text{m}$$

各力对圆心O取矩

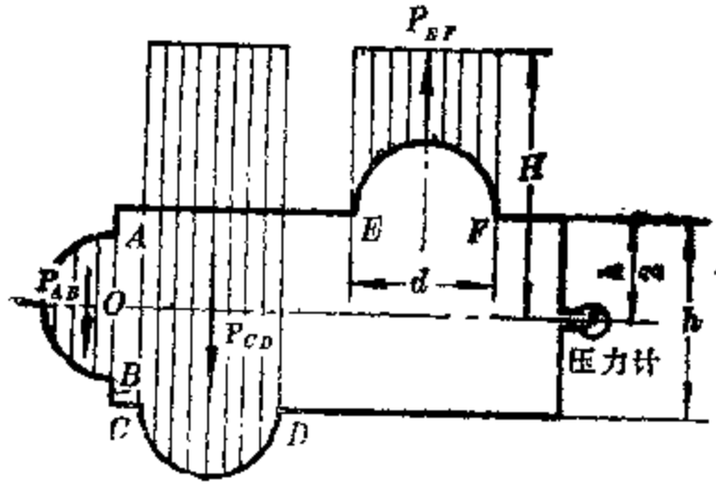
$$-F\cdot y-F_A\cdot0-F_B\cdot y_B+F_C\cdot y_C+F_D\cdot y_D=0$$

$$y=\frac{F_C\cdot y_C+F_D\cdot y_D-F_B\cdot y_B}{F}$$

$$=\frac{3.99\times0.255+1.41\times0.354-2.86\times0.216}{21.82}$$

$$=0.041\text{m}$$

故压力中心在圆心以上的距离是0.041m。



题 27 图

27 图示一贮水箱，箱上有三个半球形的盖，直径$d=0.5$m，$h=2.0$m，由压力计读出相对压强$p=24.5$kN/m²，试求作用在每个球盖上的液体总压力。

解：

压力计的相对压强$p=24.5$kN/m²，换算成液面为大气压强作用下的当量高度 $H=\dfrac{p}{\gamma}=\dfrac{24.5}{9.8}=2.5$m

AB球盖受水平力P_{ABx}和竖直力P_{ABz}作用

$$P_{ABx}=p_C A=\gamma H\frac{\pi d^2}{4}$$

$$=9800\times 2.5\times\frac{3.14\times 0.5^2}{4}=4808\text{N}$$

$$P_{ABz}=\gamma V_{AB}=\gamma\times\frac{\pi d^3}{12}$$

$$=9800\times\frac{3.14\times 0.5^3}{12}=321\text{N}$$

合力 $P_{AB}=\sqrt{P_{ABx}^2+P_{ABz}^2}=\sqrt{4808^2+321^2}$

$=4819$N

合力与水平线夹角

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{P_{ABz}}{P_{ABx}} = \operatorname{arctg}\frac{321}{4808} = 3°49'$$

*CD*球盖，由于左右是对称的，水平分力为零，只有垂直分力P_{CD}

$$P_{CD} = \gamma V_{CD} = \gamma\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H+\frac{h}{2}\right)+\frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$= 9800\times\left[\frac{3.14\times 0.5^2}{4}\times\left(2.5+\frac{2.0}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{3.14\times 0.5^3}{12}\right]$$

$$= 7052\text{N} \quad \text{方向向下}$$

*EF*球盖的左右是对称的，其水平分力为零，只有垂直分力P_{EF}

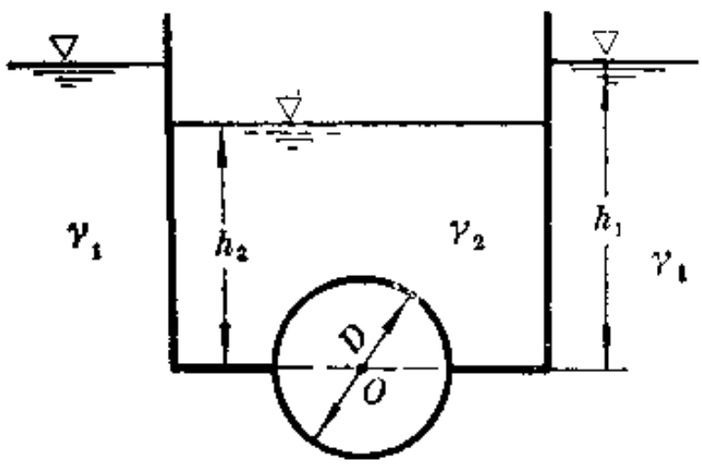
$$P_{EF} = \gamma V_{EF} = \gamma\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H-\frac{h}{2}\right)-\frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$= 9800\times\left[\frac{3.14\times 0.5^2}{4}\times\left(2.5-\frac{2.0}{2}\right)\right.$$

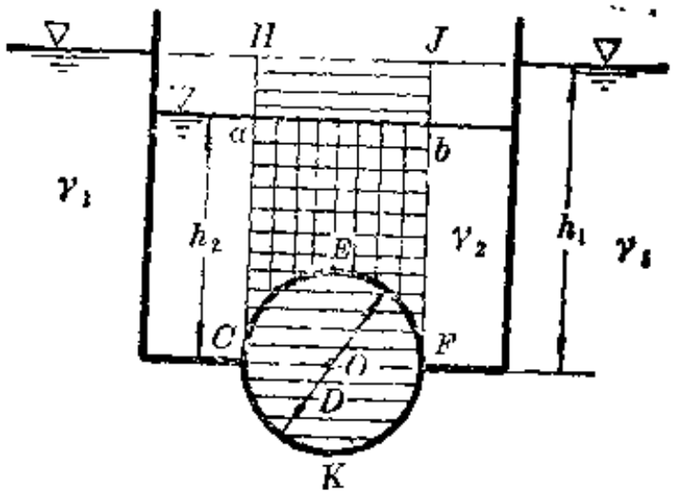
$$\left.+\frac{3.14\times 0.5^3}{12}\right]$$

$$= 3205\text{N} \quad \text{方向向上}$$

28 一个直径为D的球（球重可略去不计）处于平衡状态。导出D与γ_1、γ_2、h_1、h_2的关系式。



题 28 图



解 28 图

解：

压力体 $a\ b\ C\ E\ F$ 的重量等于压力体 $H\ J\ K\ F\ C$ 的重量时，球处于平衡状态。所以

$$\left[\frac{\pi D^2}{4}\cdot h_2-\frac{1}{2\times 6}\pi D^3\right]\cdot\gamma_2$$

$$=\left[\frac{\pi D^2}{4}\cdot h_1+\frac{1}{2\times 6}\pi D^3\right]\gamma_1$$

全式除 πD^2 得

$$\left[\frac{h_2}{4}-\frac{D}{12}\right]\cdot\gamma_2=\left[\frac{h_1}{4}+\frac{D}{12}\right]\cdot\gamma_1$$

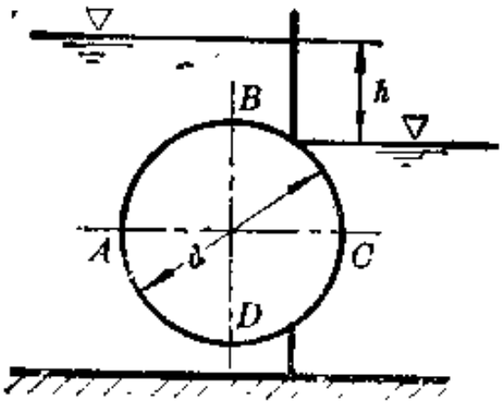
$$\left[h_2-\frac{D}{3}\right]\cdot\gamma_2=\left[h_1+\frac{D}{3}\right]\cdot\gamma_1$$

$$\gamma_2\cdot h_2-\gamma_1\cdot h_1=\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{3}\right)\cdot D$$

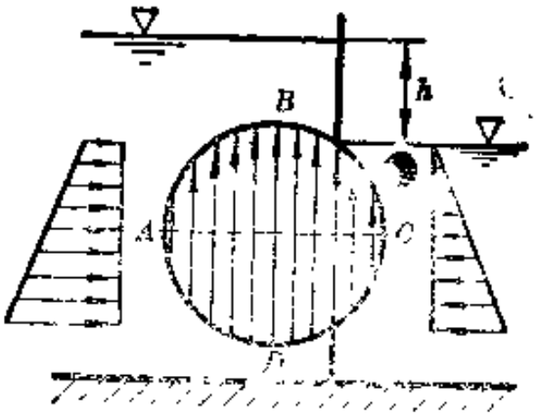
$$D=\frac{3(\gamma_2 h_2-\gamma_1 h_1)}{\gamma_1+\gamma_2}$$

29 绘出图中指定曲面的水平方向的压强分布图及铅垂方向的压力体图，并标明方向。

(a)

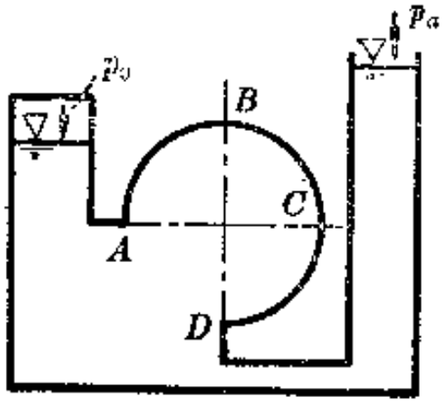


题 29(a) 图

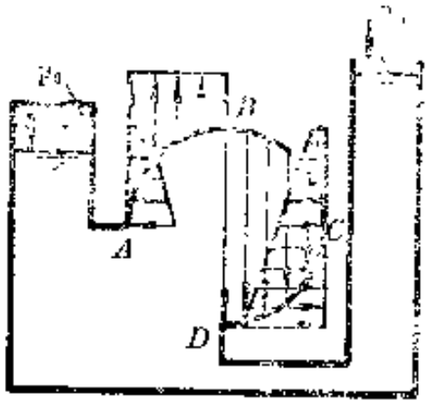


解 29(a) 图

(b)

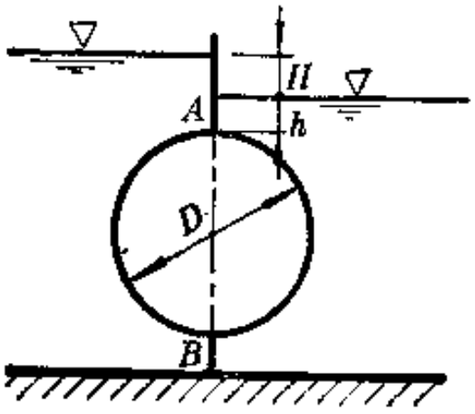


题 29(b) 图

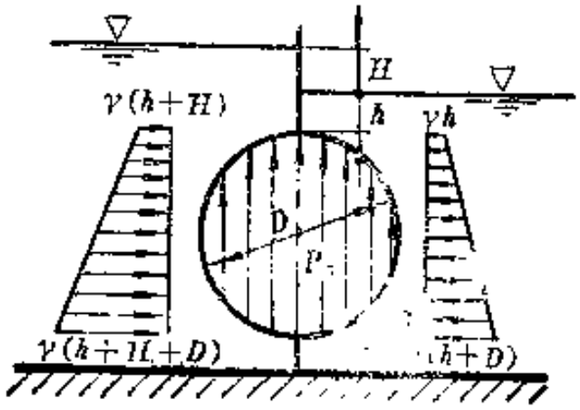


解 29(b) 图

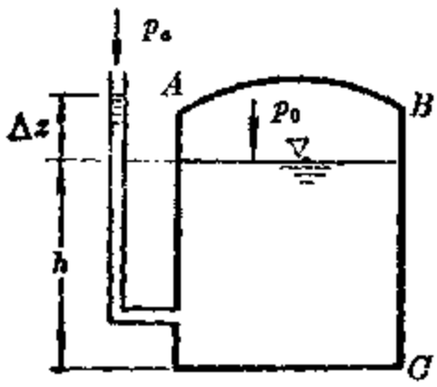
(c)



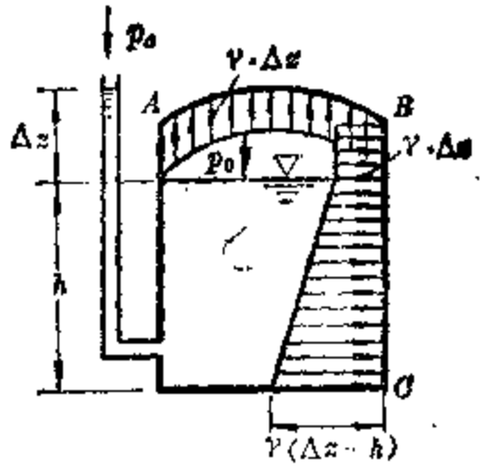
题 29(c) 图



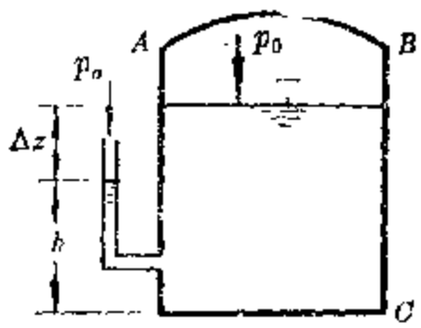
解 29(c) 图



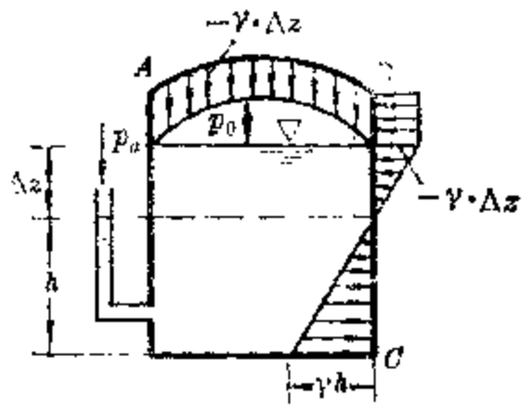
题 29(d) 图



解 29(d) 图

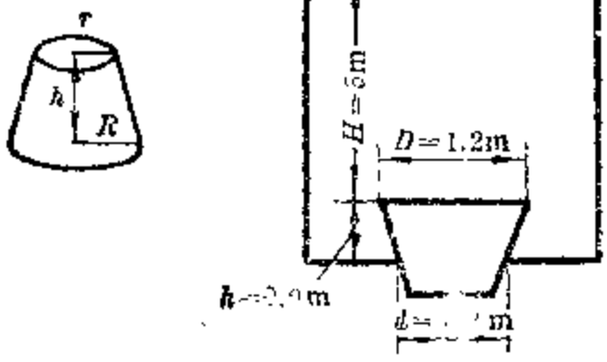


题 29(e) 图



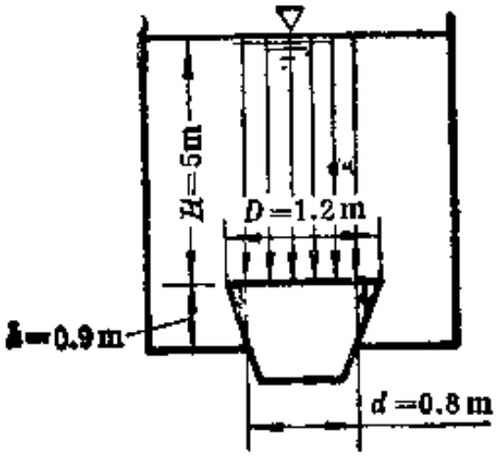
解 29(e) 图

30 有一盛水桶，桶底有一圆孔，半径为0.4m，孔被一圆锥台塞子塞住，塞子顶上水深 $H=5$m，其它尺寸如图所示，求



题 30 图

作用在该塞子上的静水总压力 $\left[\text{圆锥台的体积为}V=\frac{\pi}{3}h(R^2+r^2+Rr)\right]$。



解 30 图

解：

作用于圆锥台塞子上的静水总压力的水平分力为零，只有铅垂方向分力，其压力体如图所示。

铅垂方向的静水总压力大小为

$$P_z=\frac{\pi d^2}{4}\cdot\gamma\cdot H-\left[\frac{\pi}{3}h(R^2+r^2+Rr)-\frac{\pi}{4}d^2\cdot h\right]\cdot\gamma$$

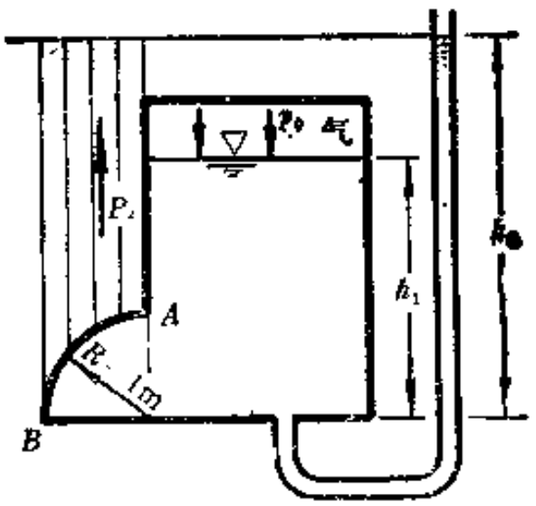
$$=\frac{3.14}{4}\times0.8^2\times9.8\times5$$

$$-\left[\frac{3.14}{3}\times0.9(0.6^2+0.4^2+0.6\times0.4)\right.$$

$$\left.-\left[\frac{3.14}{4}\times0.8^2\times0.9\right]\right]\times9.8$$

$$=22.05\,\text{kN}$$

31. 如图所示，为一封闭水箱，下端有一$\frac{1}{4}$圆弧的钢板AB，宽（垂直于纸的方向）为1m，半径为1m，h_1为2m，h_2为3 m，试求钢板AB上所受的水平分力和垂直分力各为多少？



题 31 图

解：

根据等压面原理，AB曲面上的压力体的横断面积如图所示，其垂直分力P_z为

$$P_z=(h_2\times R\times b-\frac{1}{4}\pi R^2\cdot b)\gamma$$

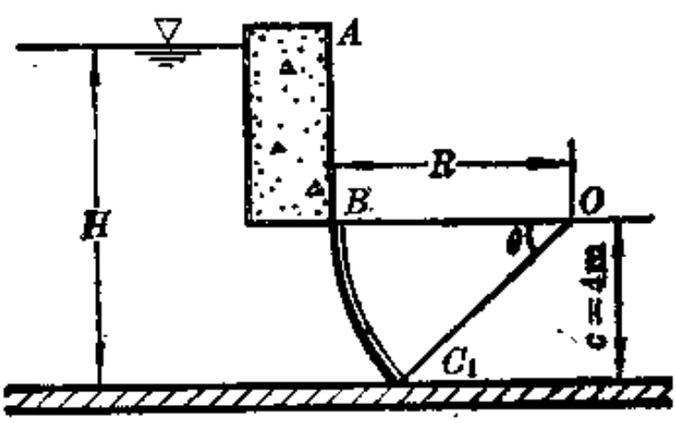
$$=(3\times 1\times 1-\frac{3.14}{4}\times 1^2\times 1)\times 9.8$$

$$=2.215\times 9.8=21.7\ \text{kN}(\uparrow)$$

水平分力P_x为

$$P_x=p_c\times A_c=(h_2-\frac{1}{2}R)\gamma\times R\times b$$

$$=(3-\frac{1}{2}\times 1)\times 9.8\times 1\times 1=24.5\ \text{kN}(\leftarrow)$$



题 32 图

32　已知水深$H=22\text{m}$，$R=8\text{m}$，$\theta=30°$。求弧门上：

（1）　水平总压力；

（2）　垂直总压力；

（3）　对O之矩。

解：

（1）　计算水平总压力及其压力中心

如图所示，弧形闸门单宽水平总压力为

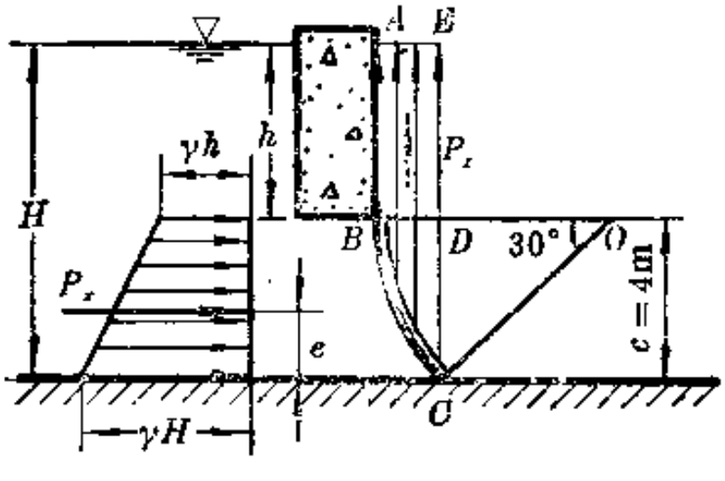
$$P_x=\frac{1}{2}(\gamma h+\gamma H)\cdot c=\frac{\gamma}{2}(h+H)\cdot c$$

$$=\frac{9.8}{2}\times(18+22)\times 4=784\ \text{kN}$$

压力中心距底的距离为

$$e=\frac{c}{3}\cdot\frac{2\gamma h+\gamma H}{\gamma h+\gamma H}=\frac{4}{3}\times\frac{36+22}{18+22}=1.03\text{m}$$

（2）　计算垂直总压力



解 32 图

如图所示的压力体为ABC_1DE

$$\Omega_1=AB\times BD=AB(R-OD)=AB(R-R\cos 30°)$$

$$=18\times 8\times(1-\cos 30°)=19.29\text{m}^2$$

$$\Omega_2=\text{扇形}BOC_1-\triangle DOC_1=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$-\frac{1}{2}R\cos\theta\cdot R\sin\theta=\frac{1}{2}R^2\frac{2\pi\theta}{360}$$

$$-\frac{1}{2}R^2\cos\theta\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi\theta}{180}-\cos\theta\cdot\sin\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times8^2\times\left(\frac{3.14\times30^\circ}{180^\circ}-\cos30^\circ\cdot\sin30^\circ\right)$$

$$=2.89\ \ \mathrm{m}^2$$

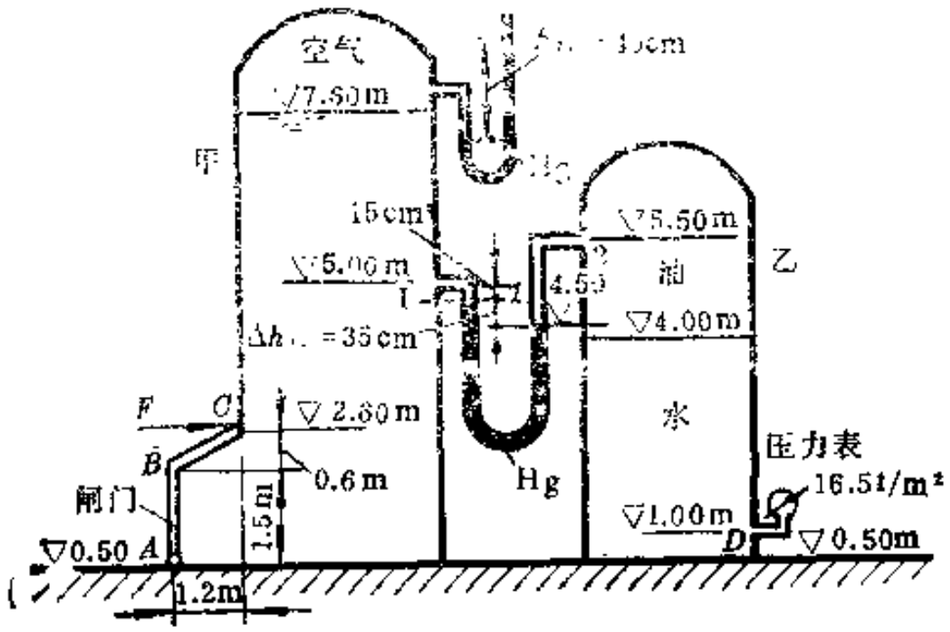
$$\Omega=\Omega_1+\Omega_2=19.29+2.89=22.18\ \ \mathrm{m}^2\approx22.2\mathrm{m}^2$$

$$P_x=\gamma\cdot\Omega\cdot b=9.8\times22.18\times1=217.4\ \ \mathrm{kN}\approx217\ \ \mathrm{kN}$$

（3） 对O点之力矩

由于弧形闸门为圆柱面，静水总压力的合力应与弧面相垂直（与半径方向一致），且通过圆心，故P_x、P_z对O点之矩应等于零。即

$$\Sigma M_0=0$$



题 33 图

33 有甲、乙两储水罐，如图示。甲罐中盛有某种液体，在其下部装有一活动闸门ABC，铰接于基础上的A点，自由液

面以上罐壁某处装有一水银测压计，水银柱高差$h_m=40$cm，乙罐上部盛有油，其比重$\gamma_0=0.8$，下部盛有水，在D点有一压力表，读数为16.5t/m²，在甲罐的1点和乙罐的2点间装有水银压差计，其水银柱高差为$\Delta h_m=35$cm，其余尺寸均见图示。为使闸门保持在图示的关闭位置，试求：在C端每米宽度的闸门上所需施加的水平推力F。

解：

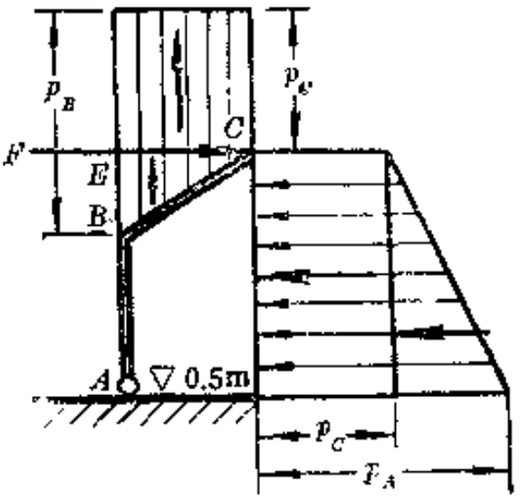
首先求解甲罐中所盛的某种液体的容重γ_A。

根据静水压强公式及等压面原理（1-1为等压面）可列出下列方程

$$16.5-(4-1)\gamma-0.8(4.5-4)\gamma-0.35\times13.6\gamma-0.15\gamma_A$$
$$=0.4\times13.6\gamma+(7.6-5)\gamma_A$$

由上式解γ_A，得

$$\gamma_A=\frac{16.5-3\times1-0.8\times0.5\times1-(0.35+0.4)\times13.6\times1}{7.6-5+0.15}$$
$$=1.05\quad \text{t/m}^3$$



解 33 图

作用于单宽闸门上力的示意图如解33图所示。今根据$\Sigma M_A=0$，得出下列方程

$$F\times\overline{AE}=\frac{\overline{CE}^2}{2}p_C+\frac{\overline{CE}^2}{6}(p_B-p_C)+\frac{\overline{AE}^2}{2}p_C$$
$$+\frac{\overline{AE}^2}{6}(p_A-p_C)$$

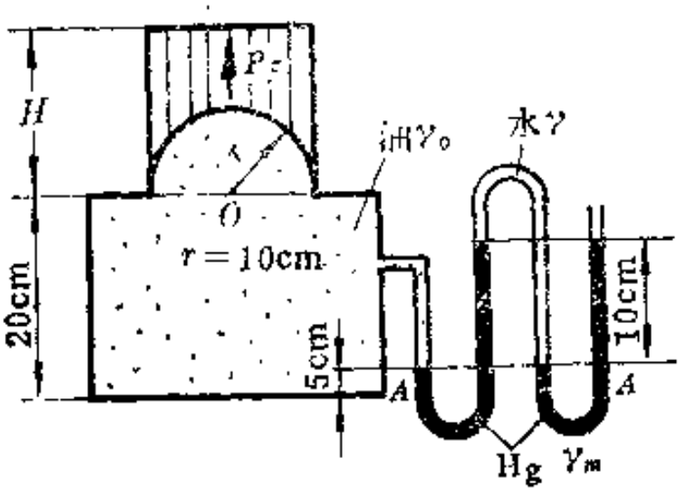
由上式解F，得

$$F=\frac{\frac{1}{2}p_c(\overline{AE}^2+\overline{CE}^2)+\frac{\overline{CE}^2}{6}(p_B-p_0)+\frac{\overline{AE}^2}{6}(p_A-p_c)}{\overline{AE}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}(0.4\times13.6\times1+5\times1.05)(2.1^2+1.2^2)\right.$$

$$\left.+\frac{1.2^2}{6}\times0.6\times1.05+\frac{2.1^2}{6}\times2.1\times1.05\right)/2.1$$

$$=15.7\ \text{t/m}=153.86\ \text{kN/m}\approx154\ \text{kN/m}$$



题 34 图

34 在容器上部有一半球曲面（见图），试求该曲面上所受的液体总压力的大小和方向。容器中充满比重为0.8的油。

解：

根据等压面的原理，可导出U型压差计A点压强

$$p_A=2\times0.1\gamma_m-0.1\times\gamma\approx0.2\gamma_m-0.1\gamma$$

O点的压强

$$p_0=p_A-\gamma_0(0.2-0.05)=0.2\gamma_m-0.1\gamma-0.15\gamma_0$$

把O点的压强换算成液面为大气压强作用的当量高度H

$$H=\frac{p_0}{\gamma_0}=\frac{0.2\gamma_m-0.1\gamma-0.15\gamma_0}{\gamma_0}$$

$$=\frac{0.2\frac{\gamma_m}{\gamma}-0.1-0.15\frac{\gamma_0}{\gamma}}{\frac{\gamma_0}{\gamma}}$$

$$=\frac{0.2\times13.6-0.1-0.15\times0.8}{0.8}$$

$$=3.125\ \text{m}$$

作用在半球面上的作用力

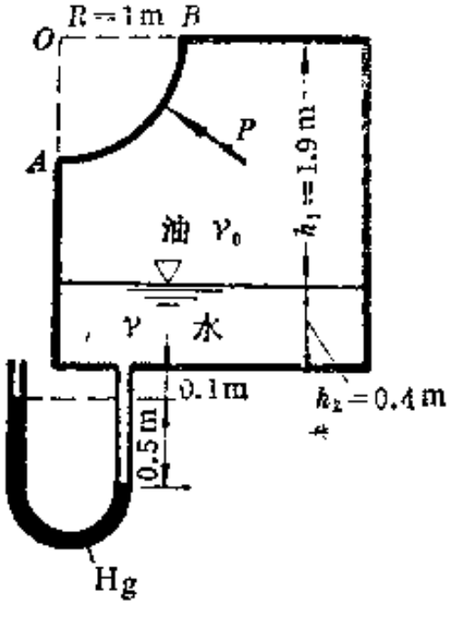
$$P_z=\gamma_0 V_{AB}=\gamma_0\left(\frac{\pi D^2}{4}H-\frac{\pi D^3}{12}\right)$$

$$=0.8\times9800\times\left(\frac{3.14\times0.2^2}{4}\times3.125-\frac{3.14\times0.2^3}{12}\right)$$

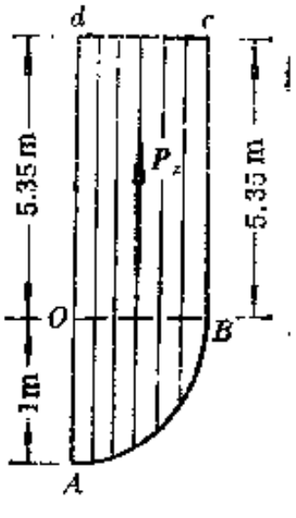
$$=753\ \text{N}$$

P_z作用方向竖直向上。

35 有一压力贮油箱（见图），其宽度（垂直于纸面方向）$b=2\text{m}$，箱内油层厚$h_1=1.9\text{m}$，容重$\gamma_0=0.8t/\text{m}^3$，油层下有积水，厚度$h_2=0.4\text{m}$，箱底有一U型水银压差计，所测之值如图所示，试求作用在半径$R=1\text{m}$的圆柱面AB上的总压力（大小和方向）。



题 35 图



解 35 图

解：

先求出B点的压强，以油柱高表示

$$\frac{p_B}{\gamma_0}=\frac{\gamma_m}{\gamma_0}\times0.5-\frac{\gamma}{\gamma_0}(h_2+0.1+0.5)-h_1$$

$$=\frac{13.6}{0.8}\times 0.5-\frac{1}{0.8}(0.4+0.1+0.5)-1.9$$

$$=5.35 \text{ m油柱}$$

AB曲面上的垂直分力P_z为

$$P_z=\gamma_0\cdot V \qquad (1)$$

式中 V表示压力体的体积，压力体的投影面积见图示，故

$$V=\left(\frac{\pi R^2}{4}+\frac{p_a}{\gamma_0}\cdot R\right)\cdot b$$

将V值代入（1）式，得

$$P_z=\gamma_0\cdot b\cdot\left(\frac{\pi R^2}{4}+\frac{p_a}{\gamma}\cdot R\right)$$

$$=0.8\times 2\times\left(\frac{3.14\times 1^2}{4}+5.35\times 1\right)$$

$$=9.82 \text{ t}$$

$$=96.2 \text{ kN}$$

AB曲面上的水平分力P_x为

$$P_x=p_c\cdot A_x-p_c\cdot R\cdot b=\left(\frac{p_a}{\gamma_0}+\frac{R}{2}\right)\cdot R\cdot b\cdot\gamma_0$$

$$=\left(5.35+\frac{1}{2}\right)\times 1\times 2\times 0.8$$

$$=9.36 \text{ t}$$

$$=91.7 \text{ kN}$$

于是AB曲面上的总压力P为

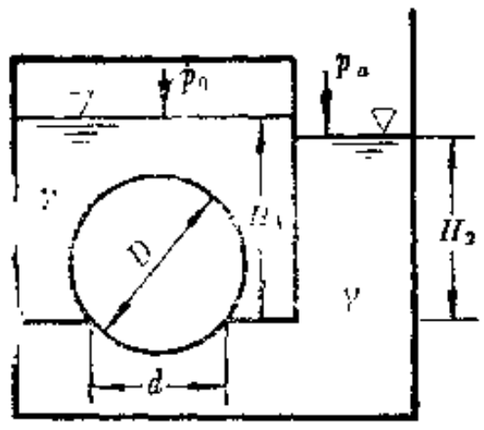
$$P=\sqrt{P_x^2+P_z^2}=\sqrt{91.7^2+96.2^2}$$

$$=132.9 \text{ kN}\approx 133 \text{ kN}$$

总压力与水平线间的夹角α为

$$\alpha=\text{tg}^{-1}\frac{P_z}{P_x}=\text{tg}^{-1}\frac{96.2}{91.7}=46.37^\circ$$

36 盛有水的密闭容器，其底部圆孔用金属圆球封闭，该球重19.6N，直径$D=10$cm，圆孔直径$d=8$cm，水深$H_1=50$cm，外部容器水面低10cm，$H_2=40$cm，水面为大气压，容器内水面压强为p_0。



题 36 图

（1）当p_0也为大气压时，求球体所受的水压力；

（2）当p_0为多大的真空度时，球体将浮起。

解：

（1）计算$p_0=p_a$时，球体所受的水压力

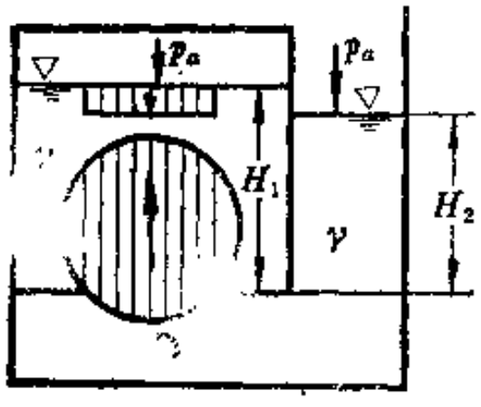
因球体对称，侧向水压力相互抵消，作用在球体上仅有垂直压力。

如解36(a)图，由压力体的概念球体所受水压力为

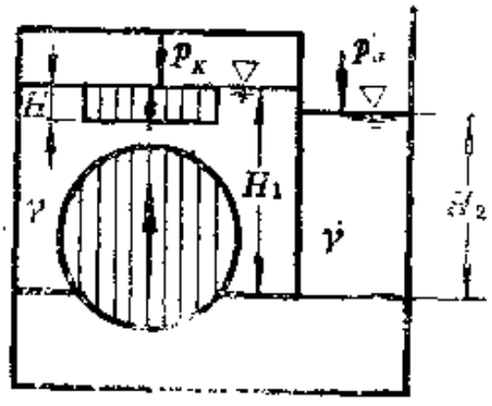
$$P=\left[\frac{\pi}{6}D^3-(H_1-H_2)\frac{\pi d^2}{4}\right]\gamma$$

$$=\gamma\pi\left[\frac{D^3}{6}-(H_1-H_2)\frac{d^2}{4}\right]$$

$$=9800\times3.14\times\left[\frac{0.1^3}{6}-(0.5-0.4)\times\frac{0.08^2}{4}\right]$$



解 36(a) 图



解 36(b) 图

$=0.205$ N（方向向上）

（2）计算密闭容器内的真空度

设所求真空度为 Hm（水柱）高，欲使球体浮起，必须满足由于真空吸起的"吸力"＋上举力＝球重，如解36(b)图所示，即有平衡式

$$\gamma H\frac{\pi d^2}{4}+0.205=19.6$$

$$H=(19.6-0.205)\ \frac{4}{\gamma\pi d^2}$$

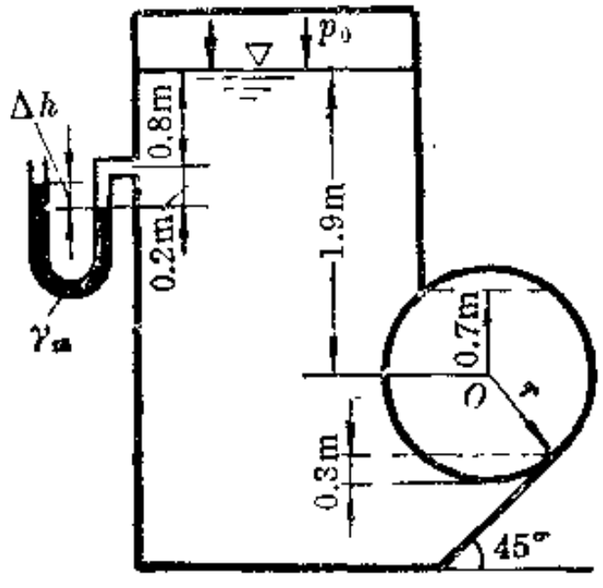
$$=(19.6-0.205)\times\frac{4}{9800\times3.14\times0.08^2}$$

$$=0.39\ \text{m}$$

$$\frac{p_K}{\gamma}\geqslant0.39$$

$$p_K\geqslant9800\times0.39=3822\ \text{N/m}^2$$

当真空度$p_K\geqslant3822\text{N/m}^2$时，球将浮起。



题 37 图

37 有一封闭水箱，右下方接一圆柱体，长1m（垂直于纸面方向），横断面如图示。在距水面0.8m处装一U形水银测压计，水银面压差值$\Delta h=14.7$cm，圆柱体半径$r=1.0$m，其它尺寸见图示，试求作用在圆柱体上的水的总压力的水平分力P_x和垂

直分力P_z。

解：

由U形水银测压计求得水箱液面的压强（以水柱高表示）为

$$\frac{p_0}{\gamma}=\frac{\gamma_m\Delta h-(0.8+0.2)\gamma}{\gamma}$$

$$=13.6\times0.147-1.0$$

$$=1.0\ \text{m水柱}$$

作用在圆柱体上的水平分力

$$P_x=p_c\times A_x=\gamma h_c\times A_x$$

$$=9.8(1+1.9)\times1.4\times1$$

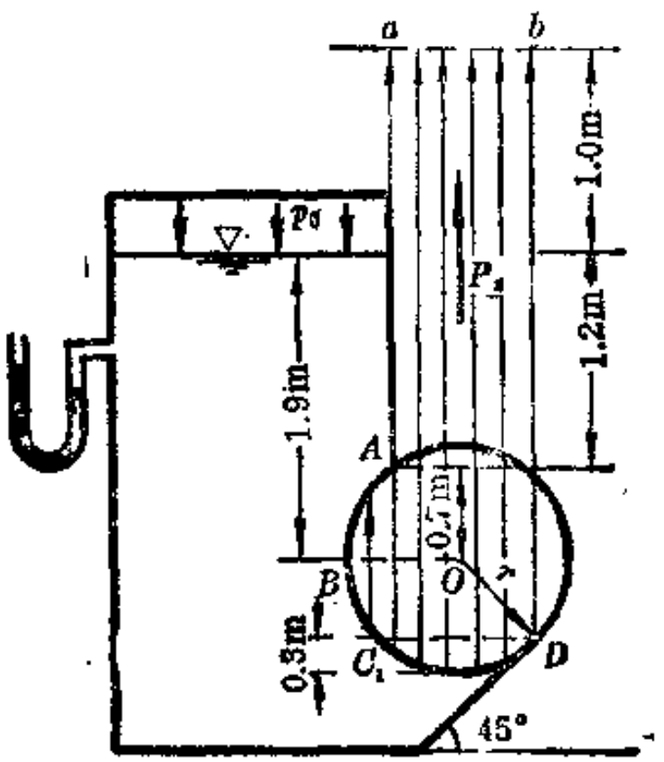
$$=39.8\ \text{kN}$$

式中 A_x为AC曲面在铅垂面上的投影面积；p_c为投影面积形心处的压强。

作用在圆柱体上的垂直分力

$$P_z=\text{压力体的横断面积}\times b\times\gamma$$

压力体横断面积＝矩形面积abC_1D＋两个弓形面积（如图示）



解 37 图

弓形面积$ABC_1=\frac{90}{360}\pi r^2-\triangle AOC_1$

$\triangle AOC_1$为一等腰三角形，$AC_1=1.4$m，所以弓形面积ABC_1

$=\frac{90°}{360°}\times 3.14\times 1^2-\frac{1}{2}\times 1.4\times 0.7=0.295\text{m}^2$

∴ 压力体横断面积$=1.4\times 3.6+2\times 0.295$

$=5.63\ \text{m}^2$

故 $P_z=5.63\times 1\times 9.8=55.2\ \text{kN}$

P_z方向向上。

38 如图示，半圆柱体突入一盛器边墙，柱长1.0m，圆半径为0.4m，对以下四种情况，求作用在柱面上的水平总压力和铅直总压力。

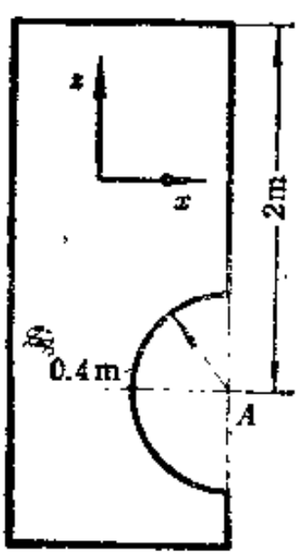
（1）盛器中的自由面高出圆心以上2.0m；

（2）盛器中液体下层为重液（比重为1.6），到达A点同一水平面，上层为水，自由表面高出A点以上2.0m；

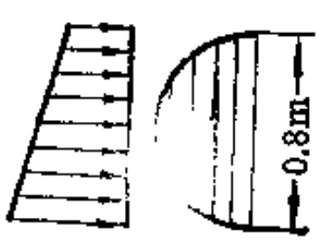
（3）盛器加盖后为密闭的，其气体压力为5 kg/cm²；

（4）盛器为密闭的，下层为水，到达A点同一高度，上层为气体，其压力为2 kg/cm²。

解：

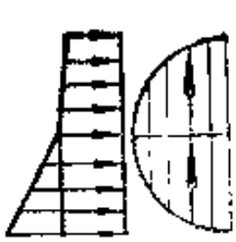


题 38 图



(a)

解 38(a) 图



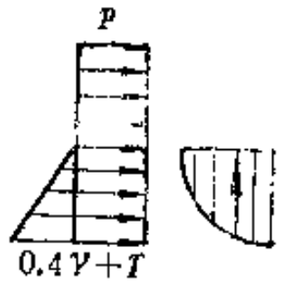
(b)

解 38(b) 图



(c)

解 38(c) 图



(d)

解 38(d) 图

(1) 如解38(a)图所示

$$P_z = p_c \cdot A = \gamma h_c A = 9800 \times 2 \times 0.8 \times 1 = 15680 \text{ N}$$

$$P_z = \gamma V = \gamma\left(\frac{1}{2}\pi R^2 \times 1\right)$$

$$= 9800 \times \left(\frac{1}{2} \times 3.14 \times 0.4^2 \times 1\right)$$

$$= 2462 \text{ N} (\uparrow)$$

(2) 计算见解38(b)图

$$P_x = \frac{\gamma(2-R)+\gamma \times 2}{2} \times R \times 1 + 2\gamma \times R \times 1 + \frac{\gamma' R^2}{2} \times 1$$

$$= \frac{9800 \times (2-0.4) + 9800 \times 2}{2} \times 0.4 + 2 \times 9800 \times 0.4 + \frac{1.6 \times 9800 \times 0.4^2}{2}$$

$$= 16150.4 \text{ N}$$

$$\approx 16.2 \text{ kN}$$

$$P_z = \gamma \times \frac{\pi R^2}{4} \times 1 + 1.6\gamma \times \frac{\pi R^2}{4} \times 1$$

$$= 2.6\gamma \frac{\pi R^2}{4} = 2.6 \times 9800 \times \frac{3.14 \times 0.4^2}{4}$$

$$= 3200.3 \text{ N}$$

$$\approx 3.20 \text{ kN}$$

（3） 如解38(c)图所示

∵ 气体压力 $p = 5\ \mathrm{kg/cm^2} = 49\mathrm{N/cm^2}$

∴ $P_x = pD \times 1 = 49 \times 80 \times 100 = 39.2 \times 10^4$ N

$P_z = 0$

（4） 如解38(d)图所示

∵ 气体压力 $p = 2\ \mathrm{kg/cm^2} = 19.6\ \mathrm{N/cm^2}$

∴ $P_x = pD \times 1 + \frac{\gamma R^2}{2} \times 1$

$= 19.6 \times 80 \times 100 + \frac{0.0098 \times 40^2}{2} \times 100$

$= 157584$ N

≈ 158 kN

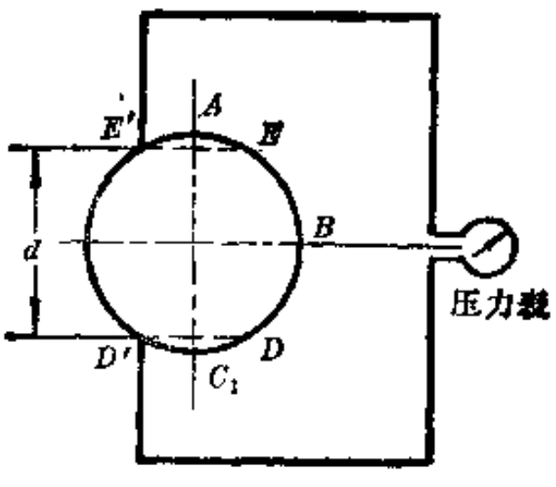
$P_z = \gamma V = \gamma\left(\frac{\pi R^2}{4} \times 1\right)$

$= 9800 \times \left(\frac{3.14 \times 0.4^2}{4} \times 1\right)$

$= 1230.88$ N

≈ 1.23 kN

39 水箱壁上有一直径 $d = 0.3$m 的圆孔，用直径 $D = 0.4$m 的球形活塞将孔封住，已知与活塞球心在同一水平面上的压力表



题 39 图

读数为5.5kg/cm²，求活塞对孔缘的水平作用力。

解：

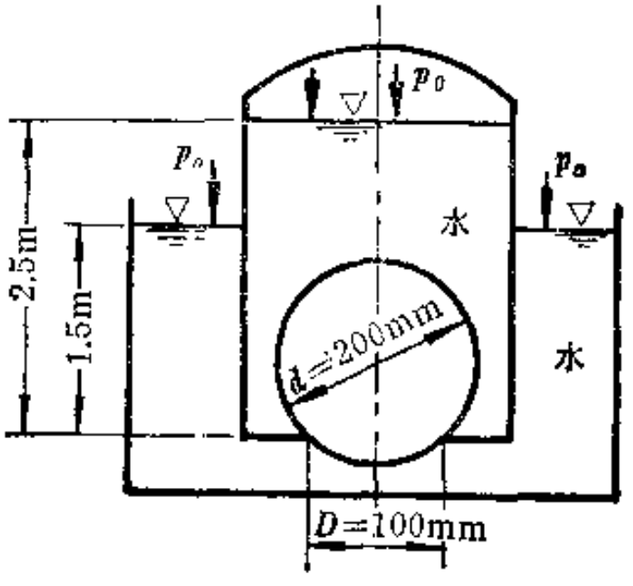
设活塞对孔缘的水平作用力为P_x。P_x包括曲面EE'、DD'及曲面ED上的水平方向压力之和，前两曲面上的水平分力为零，所以P_x即为曲面ED上的水平压力。故

$$P_x=p_c\cdot A_x$$

式中 A_x为ED曲面在铅垂面上的投影面积；

p_c为投影面积形心点的压强。

即
$$P_x=p_c\cdot\frac{1}{4}\pi d^2=5.5\times9.8\times\frac{1}{4}\times3.14\times30^2$$
$$=38080.35\quad \mathrm{N/cm^2}$$
$$=3.81\quad \mathrm{N/m^2}$$



题 40 图

40 图示为一密闭容器，底部有一圆球止水塞子，这一容器又放置在一个水箱中，如图所示。设圆球塞子的直径$d=200\mathrm{mm}$，其容重$\gamma'=84.28\mathrm{kN/m^3}$，其它尺寸如图示。问密闭容器液面上的真空值为若干，才能恰好将该球塞吸引打开。

解：

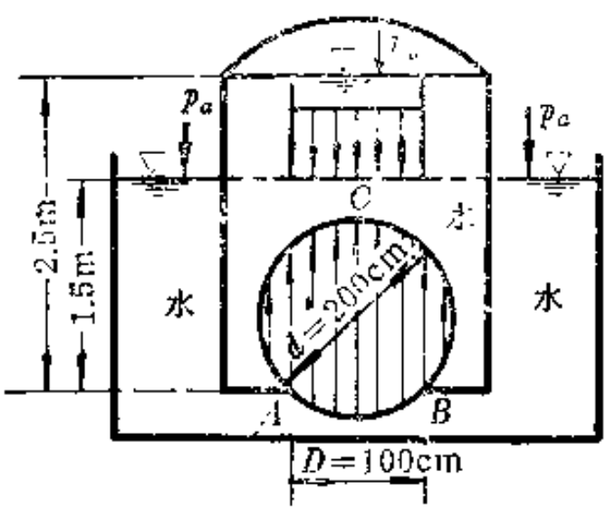
作用于圆球止水塞子上的静水总压力P_z由以下几部分合成：

（1）由水箱中水对球塞的作用力P_{z1}，即密闭容器外部的水对圆球止水塞的AB曲面作用的垂直方向的静水压力，方向向上；

（2）由密闭容器内的水对圆球止水塞的曲面ACB作用的垂直方向的静水压力P_{z2}，方向向下；

（3）由密闭容器内液面上的p_0所产生的对圆球止水塞的曲面ACB作用的静水压力P_{z3}（p_0以相对压强计），方向为向上的吸引力。

故作用于圆球止水塞上的静水总压力的垂直分力$P_z=-P_{z1}+P_{z2}-P_{z3}$，合成的结果如图所示。其大小为



解 40 图

$$P_z=(2.5-1.5)\frac{\pi D^2}{4}\times\gamma-\frac{p_0}{\gamma}\times\frac{\pi D^2}{4}\times\gamma-\frac{\pi d^3}{6}\times\gamma$$

$$=1\times\frac{3.14\times0.1^2}{4}\times9.8-p_0\times\frac{3.14\times0.1^2}{4}-\frac{3.14\times0.2^3}{6}\times9.8$$

$$=0.07693-p_0\times0.00785-0.0411$$

$$=0.03583-0.00785p_0$$

根据力的平衡条件，当$P_z=G$时，恰好将圆球止水塞子打开，故

$$0.03583-0.00785p_0=\frac{3.14}{6}\times0.2^3\times84.28$$

$$p_0=\frac{0.03583-0.35285}{0.00785}=-40.385\ \text{kN/m}^2$$

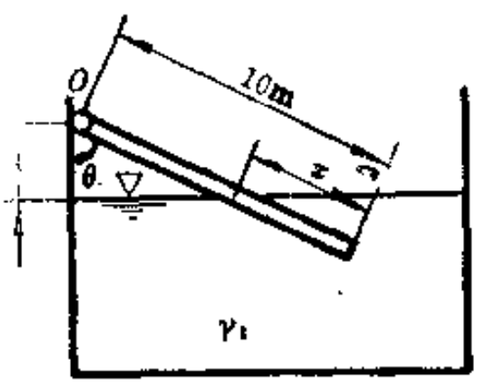
$$\approx-40.4\ \text{kN/m}^2$$

相对压强$p_0<0$，必存在真空，其真空值的大小$p_K=|p_0|=40.4\text{kN/m}^2$。

p_0的真空高度

$$h_K=\frac{p_K}{\gamma}=\frac{40.4}{9.8}=4.12\ \text{m水柱高}$$

41 横截面面积$A=0.16\text{m}^2$的圆柱，重540N/m，长10m，一端用铰连接在容器边壁上，另一端放在容器内略去铰的摩擦阻力，液体容重$\gamma_1=7800\text{N/m}^3$，如图示。当圆柱处于平衡位置时，计算$\theta$角的大小。



题 41 图

解：

设圆柱淹没在水中的长度为xm，受到浮力$F=\gamma_1 xA=7800\times x\times0.16=1248x(\text{N})$，作用点在$\frac{1}{2}x$处。

圆柱重$W=540\times10=5400\text{N}$，作用点在中点。

F和W距O点的力臂，分别是$y_F=\left(10-\frac{x}{2}\right)\sin\theta$和

$y_w = 5\sin\theta$。

对O点取矩

$$F \cdot y_F - W \cdot y_w = 0$$

$$1248x\left(10 - \frac{x}{2}\right)\sin\theta - 5400 \times 5\sin\theta = 0$$

$$x^2 - 20x + 43.27 = 0$$

解得

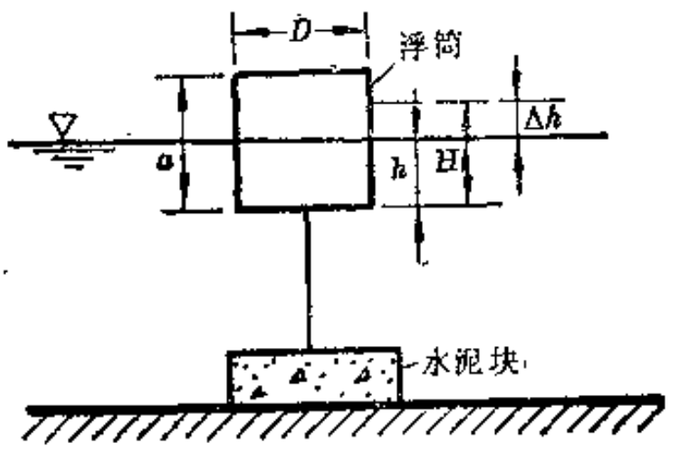
$$x_1 = 17.5\ \text{m} \qquad x_2 = 2.47\ \text{m}$$

由于O点距水面高4m，$x_1 = 17.5$m不合理应舍去，取$x_2 = 2.47$m。

$$\cos\theta = \frac{4}{10 - x} = \frac{4}{10 - 2.47}$$

$$\theta = 57°54'46''$$

42 有一浮筒，重为493.8N，直径$D = 1.0$m，高$a = 0.8$m，在水面下的淹没深度$h = 0.4$m，其底面用缆索与河底上的一水泥块连接，水泥块体积为0.3m³，容重$\gamma_c = 2.354 \times 10^4\ \text{N/m}^3$，问潮水涨高多少时，水泥块开始与河底脱离，浮筒开始随水漂流（缆索重忽略不计）。



题 42 图

解：

设浮力为F，重力为G。当浮力大于重力，即$F > G$时，浮筒开始随水漂流。设浮筒开始漂走时的淹没深度为H。

∵ F = 浮筒受到的浮力 + 水泥块受到的浮力

∴ $F=\gamma H\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2+\gamma V$

∵ $G=G_{浮筒}+G_{水泥块}$

$F>G$

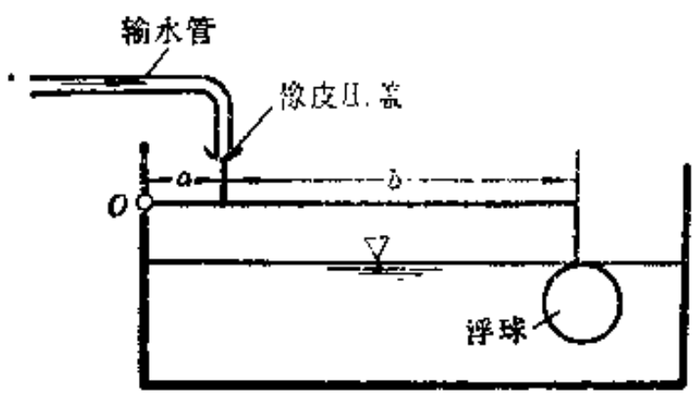
$$\gamma H\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2+\gamma V>493.8+0.3\times2.354\times10^4$$

$$H>\frac{493.8+0.3\times(2.354\times10^4-3800)}{9800\times3.14\times0.5^2}=0.6\ \text{m}$$

$$\Delta h=H-h=0.6-0.4=0.2\ \text{m}$$

即当潮水再涨高0.2m时，浮筒就可漂走。

43 如图所示为一使直径$d=15$mm的输水管自动关闭的装置。当与杠杆连在一起的橡皮压盖压住管口时，就停止向容器输水，此时管出口的水压强$p=2.5\text{kg/cm}^2$。杠杆长$a=10$cm，$b=50$cm。不计杠杆重、橡皮压盖重及浮球重，当水刚淹没浮球时，问能保证自动关闭管口的浮球最小直径D为多少。



题 43 图

解：

当水刚淹没浮球时，浮球所受的浮力为

$$F=\gamma\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (1)$$

输水管口作用在橡皮压盖上的压力为

$$P=p\cdot A=2.5\times\frac{3.14}{4}\times1.5^2=4.42\ \text{kg}=43.3\ \text{N}$$

对O点取矩得

$$P\times a=F(a+b)$$

$$F=\frac{P\times a}{a+b}=\frac{43.3\times 10}{10+50}=7.22\ \text{N}$$

由式（1）解R并将F值代入，得

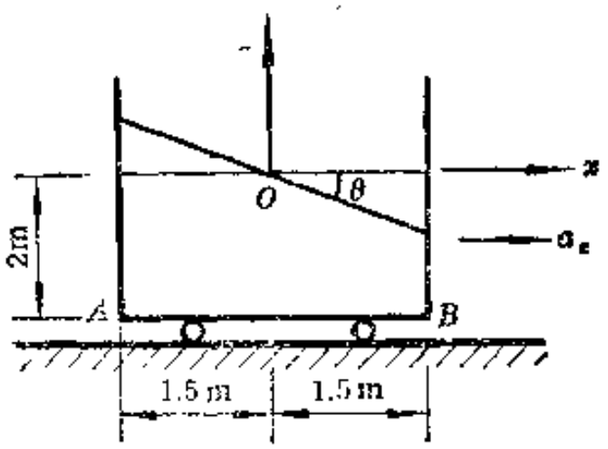
$$R=\sqrt[3]{\frac{3F}{4\gamma\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3\times 7.22}{4\times 9800\times 3.14}}$$

$$=0.06\text{m}$$

于是球的最小直径D为

$$D=2R=2\times 0.06=0.12\text{m}=12\text{cm}$$

44 有一小车，内盛液体，车内尺寸长$L=3\text{m}$，宽$b=1.2\text{m}$静止时水深$h=2\text{m}$。小车作水平等加速运动，加速度$a_x=4\text{m/s}^2$，试计算小车运动时水面倾角和底面AB受力的大小。



题 41 图

解：

根据不可压缩均质液体平衡微分方程式

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)\qquad(1)$$

式中 $X=-a_x$ $Y=0$ $Z=-g$。在液面上$dp=0$，代入上式整理可得

$$-\frac{dz}{dx}=\frac{a_x}{g}=\frac{4}{9.8}=0.408$$

$$\text{tg}\theta=-\frac{dz}{dx}=0.408$$

得水面倾角　　$\theta \doteq 22°11'43''$

计算车内液体任一点压强，对（1）式积分可得

$$p=\rho(-a_x x-gz)+C$$

当$x=0$，$y=0$，$z=0$时，液面上为大气压强，即

$$p=0$$

故　　$$C=0$$

即　　$$p=\rho(-a_x x-gz)$$

在A点，$x=-1.5\text{m}$，$z=-(2+1.5\text{tg}22.2°)=-2.612$ m

故　　$p_A=1000\times[-4\times(-1.5)-9.8\times(-2.612)]$

$=31598$ N/m²$=31.6$ kN/m²

在B点，$x=1.5\text{m}$，$z=-(2-1.5\text{tg}22.2°)=-1.388$ m

故　　$p_B=1000\times[-4\times1.5-9.8\times(-1.388)]$

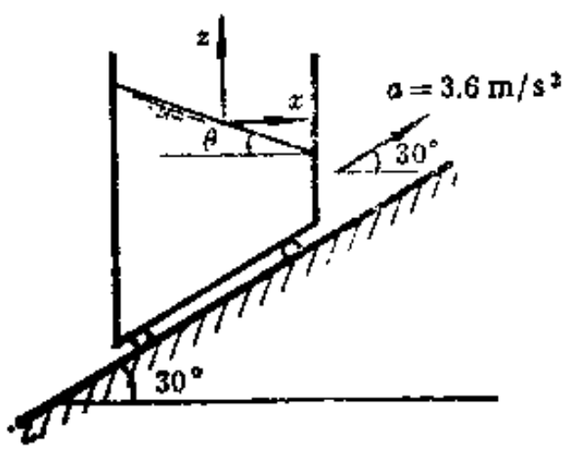
$=7602$ N/m²≈7.60 kN/m²

作用在底面AB上的力

$$P=\Omega b=\frac{p_A+p_B}{2}\times3\times1.2=\frac{31.6+7.6}{2}\times3.6$$

$=70560$ N≈70.6 kN

45　有一盛水的开口容器以3.6m/s²的加速度沿与水平成30°夹角的倾斜平面向上运动．试求容器中水面的倾角θ。



题 45 图

解：

根据压强平衡微分方程式

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

单位质量力

$$X=-a\cos30^\circ$$

$$Y=0$$

$$Z=-(g+a\sin30^\circ)$$

在液面上为大气压强，$dp=0$，代入压强平衡微分方程式可得

$$-a\cos30^\circ dx-(g+a\sin30^\circ)dz=0$$

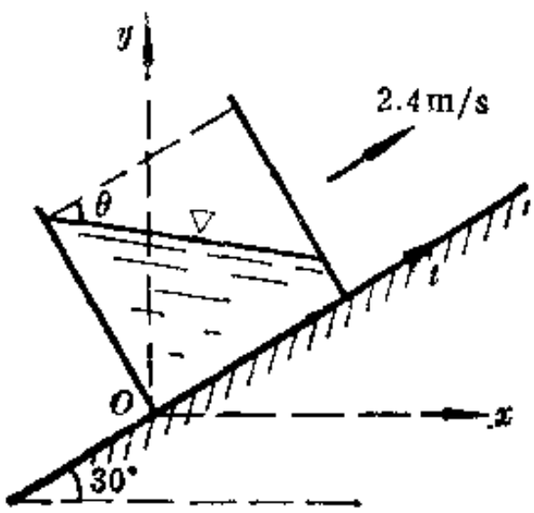
$$-\frac{dz}{dx}=\operatorname{tg}\theta=\frac{a\cos30^\circ}{g+a\sin30^\circ}=\frac{3.6\times\cos30^\circ}{9.8+3.6\sin30^\circ}$$

$$=0.269$$

$$\theta=15$$

容器中水面与水平面的夹角$\theta=15^\circ$。

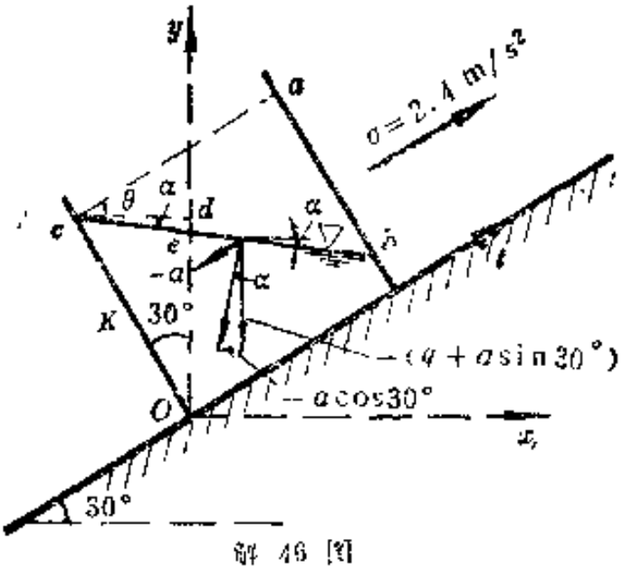
46 长宽高各为60cm的立方体水箱，装了半箱水，以2.4m/s²的加速度沿着与水平呈30°角的斜面向上运动，试求其自由水面的倾斜度θ，并求出沿水箱底部的压强分布方程（以$p=f(t)$表示）。



题 46 图

解：

首先分析水箱内液体的受力情况，将坐标系xOy取在运动的水箱上，则液体质点所受的质量力除了重力外还有惯性力$-ma$（如解46图所示），所以单位质量力在x方向的分力为



解 46 图

$$X=-a\cos\theta=-2.4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-1.2\sqrt{3}\quad \mathrm{m/s^2}$$

在 y 方向的分力为

$$Y=-g-a\sin30^\circ=-9.8-2.4\sin30^\circ=-11\ \mathrm{m/s^2}$$

自由液面与水平面的夹角 α 为

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{X}{Y}=\frac{1.2\sqrt{3}}{11}=0.189$$

$$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}0.189=10.7^\circ$$

于是自由液面的倾斜度 θ 为

$$\theta=30^\circ+10.7^\circ=40.7^\circ$$

根据欧拉平衡方程式

$$dp=\rho(Xdx+Ydy)$$
$$=-\rho(1.2\sqrt{3}\,dx+11dy)$$

积分可得

$$p=-\rho(1.2\sqrt{3}\,x+11y)+C$$

现在来确定积分常数 C

由几何关系知

$$\overline{Oc}=\overline{OK}+\overline{Kc}=0.3+0.3\mathrm{tg}40.7^\circ$$
$$=0.3(1+\mathrm{tg}40.7^\circ)$$

所以点 c 的坐标为

$$x_c=-\overline{Oc}\sin30^\circ$$

$$y_c=\overline{Oc}\cos30^\circ$$

由于点c位于水面，所以当$x=x_c$及$y=y_c$时，$p=0$，根据此边界条件，由式（1）可解出积分常数C，即

$$\begin{aligned}C&=\rho\times\overline{Oc}\times(11\times\cos30^\circ-1.2\sqrt{3}\times\sin30^\circ)\\&=0.3\times(1+\mathrm{tg}40.7^\circ)\times(11\times\cos30^\circ-1.2\sqrt{3}\\&\quad\times\sin30^\circ)\cdot\rho\\&=4.74\rho\end{aligned}$$

又因为x、y与t有如下的关系

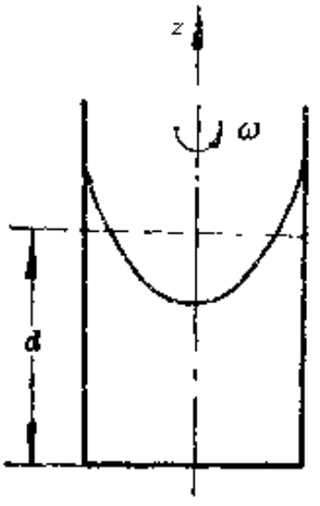
$$x=t\cdot\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$y=t\cdot\sin30^\circ=\frac{t}{2}$$

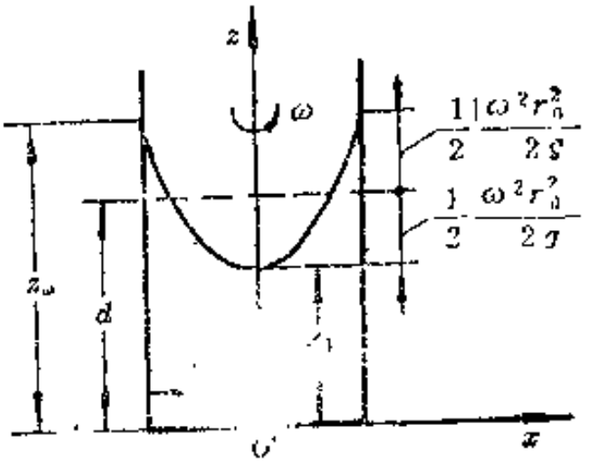
所以

$$\begin{aligned}p&=-\rho\left(1.2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}t+11\times\frac{t}{2}\right)+4.74\rho\\&=\rho(4.74-7.3t)\end{aligned}$$

47 如图所示一半径$r_0=50\mathrm{cm}$的圆筒，筒内盛水，当圆筒未旋转之前，水深$d=150\mathrm{cm}$，现圆筒以角速度$\omega=2\mathrm{rad/s}$绕筒中心铅垂线旋转，水与筒处于相对平衡状态，问此时水面的最低点和最高点各距筒底面的高度为多少？



题 47 图



解 47 图

解：

在圆筒内任取一质点$M(x,y,z)$，作用于该质点上在x、

y、z三个方向的单位质量力分别为$X=\omega^2 x$，$Y=\omega^2 y$，$Z=-g$，则作等角速度旋转的液体平衡微分方程式

$$dp=\rho(\omega^2 x dx+\omega^2 y dy-g dz)$$

水面为等压面，在等压面上$dp=0$

故
$$\omega^2 x dx+\omega^2 y dy-g dz=0$$

积分上式得

$$C=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)-gz=\frac{1}{2}\omega^2 r^2-gz \qquad (1)$$

在自由液面最低点$x=0$，$y=0$，$z=z_0$，代入（1）式即可得出积分常数$C=-gz_0$，把求得的C值代入（1）式得

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2=g(z-z_0)$$

对水面最高点$r=r_0$，$z=z_w$，上式可表达为

$$\frac{1}{2}\omega^2 r_0^2=g(z_w-z_0) \qquad (2)$$

由几何学可知旋转抛物体的体积为同底同高的圆柱形体积的一半，同时容器旋转后的水体体积与静止时的水体体积相等

故
$$\pi r_0^2 z_w-\frac{1}{2}\pi r_0^2(z_w-z_0)=\pi r_0^2 d$$

于是水面最高点距筒底面的高度为

$$z_w-d+\frac{1}{2}(z_w-z_0)$$

$$=d+\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

$$=1.5+\frac{2^2\times 0.5^2}{4\times 9.8}$$

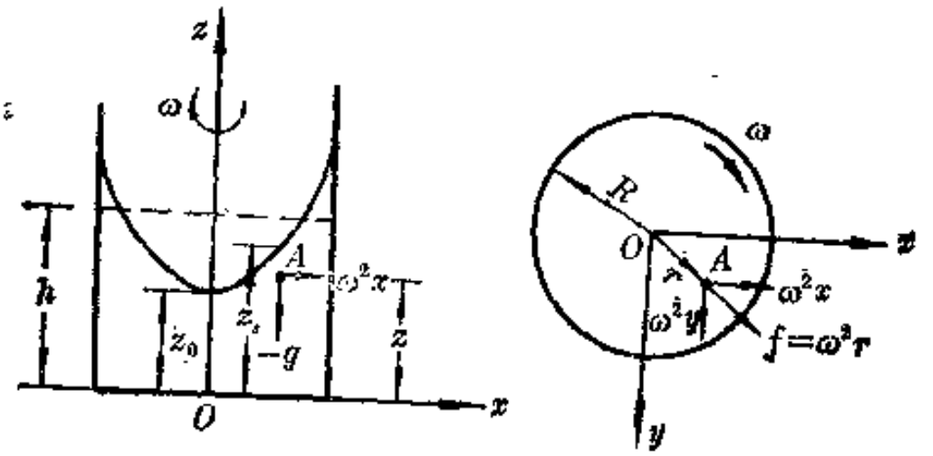
$$=1.53\text{m}$$

将z_w值代入（2）式解z_0，即可得出水面最低点距筒底面的高度为

$$z_0=z_w-\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}=d-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}=1.5-0.03$$

$$=1.47\text{m}$$

48 有一盛水的开口圆柱筒，内径为R，水深为h，如果圆筒绕轴z（亦即铅垂轴）以等角速度ω(rad/s)旋转，试确定其自由液面的方程式（不考虑水外溢及露底的情况）。



题 48 图

解：

本题为相对平衡问题，如图所示，质点A所受的单位质量力除重力（$-g$）外，还有离心惯性力（$\omega^2 r$）。单位质量力在x、y、z轴上的分力为：

$$X=\omega^2 x,\quad Y=\omega^2 y,\quad Z=-g,$$

将以上单位质量力代入液体平衡微分方程式得

$$dp=\rho(\omega^2 x dx+\omega^2 y dy-g dz)$$

因自由液面为等压面，故$dp=0$，则

$$\omega^2 x dx+\omega^2 y dy-g dz=0$$

积分上式并化简得

$$\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)-gz=C$$

$\because$ $$r^2=x^2+y^2$$

r为质点A距z轴的径向距离。

故 $$\frac{1}{2}\omega^2 r^2-gz=C \qquad (1)$$

根据边界条件决定积分常数C。在自由面的最低点$x=0$，$y=0$，$z=z_0$代入（1）式得$C=-gz_0$；把求得的C值代入

原方程得

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 = g(z - z_0)$$

此方程为自由液面方程，故$z-z_0$，上式可改写为

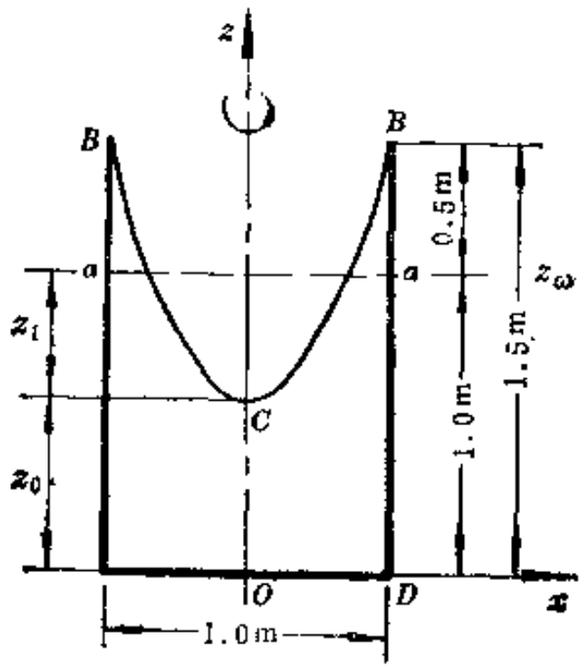
$$\frac{1}{2}\omega r^2 = g(z_s - z_0)$$

式中 z_s为自由液面上半径为 r 的任意点的纵坐标值。

49 有一圆柱形容器（如图所示）内径 1 m，高 1.5m，静止时水深1.0m。如果容器绕中心轴Oz作等角速度旋转，试求

（1）要使水不溢出需要限制的最大角速度ω；

（2）当$\omega = 6.00$rad/s时容器底上的O和D点的压强为多大？



题 49 图

解：

（1）由几何学知，

$$\text{旋转抛物体的体积} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi D^2}{4}(0.5 + z_1)\right],$$

如果不使液体溢出，这个体积应等于原来液面a–a以上的体积，即

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\pi D^3}{4}(0.5+z_1)\right]=\frac{\pi D^2}{4}\times 0.5$$

于是

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3.14\times 1^3}{4}(0.5+z_1)\right]=\frac{3.14\times 1^2}{4}\times 0.5$$

$$z_1=0.5\ \text{m}$$

即原液面到旋转体最底点的垂距为0.5m，等于原液面到旋转体最高点的垂距。

由自由面方程知

$$\frac{1}{2}\omega^2R^2=g(z_w-z_0)$$

式中 R为圆柱体半径，$R=0.5$m

(z_w-z_0)为抛物体靠容器边壁最高点至抛物体中心最低点的水深差值，即$z_w-z_0=1.5-0.5=1.0$m

故

$$z_w-z_0=\frac{1}{2g}\omega^2R^2$$

$$1.0=\frac{1}{19.6}\omega^2\times 0.5^2$$

$$\omega=8.85\ \text{rad/s}$$

（2）当$\omega=6.0$rad/s时

$$z_w-z_0=\frac{1}{2g}\omega^2R^2=\frac{1}{19.6}\times 6.0^2\times 0.5^2=0.46\text{m}$$

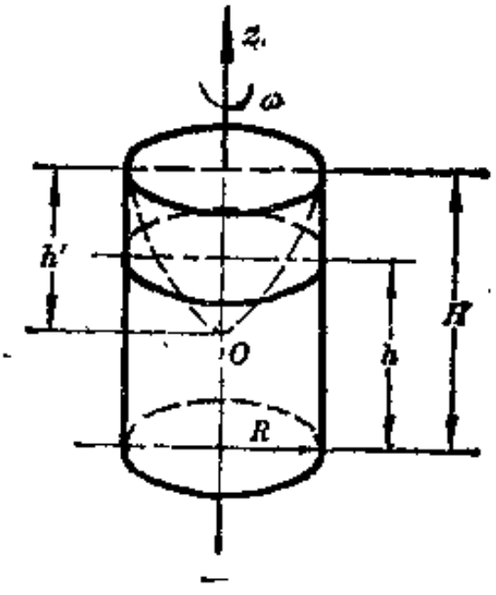
即抛物体最低点C距原来液面$a-a$的垂距为

$$\frac{1}{2}(z_w-z_0)=\frac{1}{2}\times 0.46=0.23\text{m}$$

则c点到容器底的距离$CO=1.0-0.23=0.77$m，而容器壁上抛物体最高点B到容器底的距离$BD=1.0+0.23=1.23$m，则O点压强$p_0=\gamma\cdot h_{c0}=9.8\times 0.77=7.55\ \text{kN/m}^2$

D点压强 $p_D=\gamma\cdot h_{BD}=9.8\times 1.23=12.05\ \text{kN/m}^2$

50 有高度为$H=30$cm，半径为$R=10$cm的圆筒，盛水深度$h=20$cm，整个圆筒以等角速度ω绕筒心竖轴旋转，求欲使筒内



题 50 图

的水不致从筒边溢出的最大转速。

解：

由液体相对平衡理论可知，容器中自由表面方程为

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

当容器边缘水面恰好升到顶边而不溢出时

$$h'=\frac{\omega^2 R^2}{2g} \qquad (1)$$

因旋转抛物体的体积等于同底同高的圆柱体体积的$\frac{1}{2}$，同时容器旋转后的水体体积应与静止时的水体体积相等，故

$$\pi R^2 H-\frac{1}{2}h'\pi R^2=\pi R^2 h$$

$$H-\frac{1}{2}h'=h$$

则

$$h'=2(H-h) \qquad (2)$$

由（1）、（2）式相等，得

$$2(H-h)=\frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{4g(H-h)}{R^2}}=\frac{2}{R}\sqrt{g(H-h)}$$

$$=\frac{2}{0.1}\sqrt{9.80(0.3-0.2)}$$

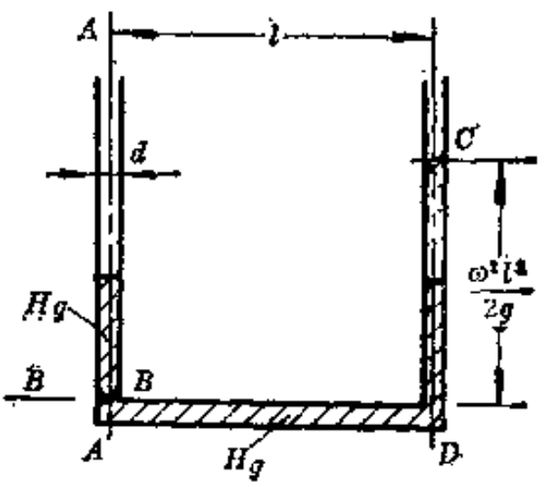
$$=19.8\ \text{rad/s}$$

故

$$n=\frac{60\omega}{2\pi}=\frac{60\times19.8}{2\times3.14}=189\ \text{rpm}$$

筒内的水不会从筒边溢出的最大转速为189 rpm。

51 等内径d的U形管 如图示，$d=20\text{mm}$，$l=100\text{cm}$，其中盛有体积$V=570\text{cm}^3$的汞，当U形管绕A-A轴以等角速ω旋转，A-A轴支管中的汞面降至U形管的底部B-B时，求管中的最大绝对压强p'_{max}和角速度ω之值。



题 51 图

解：

U形管绕A-A轴以等角速度ω旋转，稳定后，管中液面如图所示。B、C点高差为$\frac{\omega^2l^2}{2g}$，则管中液体的体积为

$$V=\frac{\pi d^2}{4}\left[(l+d)+\frac{\omega^2l^2}{2g}\right]$$

于是

$$\omega=\frac{\sqrt{2g\left[\frac{4V}{\pi d^2}-(l+d)\right]}}{l}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times9800\times\left[\dfrac{4\times570}{3.14\times2^2}-(100+2)\right]}}{100}$$

$$=3.95\ \text{rad/s}$$

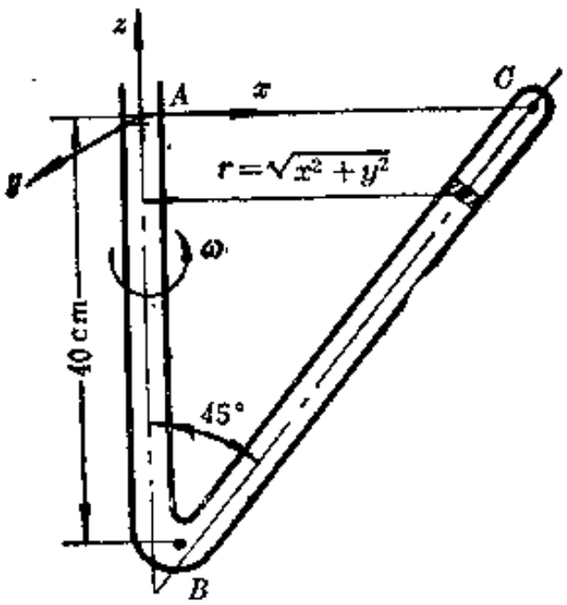
最大绝对压强位于管底D点，可由下式解出

$$p'_{max}=p_b=p_a+\gamma_m\left[\frac{\omega^2\left(l+\frac{d}{2}\right)^2}{2g}+d\right]$$

$$=9.8+13.6\times0.0098\times\left[\frac{3.95^2\times(100+1)^2}{2\times980}+2\right]$$

$$=20.9\ \text{N/cm}^2$$

52 如图所示，有一玻璃管，A端开口，C端密封，A点与C点在同一高程处，此管子绕AB轴旋转，欲使B点和C点两点液体的压强相等，问转速ω应为多少？并定性分析BC管内压强分布的情况，在何处压强值最小。



题 52 图

解：

（1）计算旋转角速度ω

本题属液体相对平衡问题，建立坐标系如图示，液体静止时

C点的压强$p_c=p_a=0$（绝对压强），在BC段间，任取一点D，质量为dm，在离心惯性力和重力作用下，液体平衡方程式为

$$dp=\rho(\omega^2 x dx+\omega^2 y dy-g dz)$$

积分可得

$$p=\rho\left(\frac{1}{2}\omega^2x^2+\frac{1}{2}\omega^2y^2-gz\right)+C$$

$$=\rho\left(\frac{1}{2}\omega^2r^2-gz\right)+C \qquad (1)$$

由边界条件$r=0$，$z=0$处，$p=0$，代入（1）式得积分常数$C=0$。

当$r=0$，$z=-40\text{cm}=-0.4\text{m}$时（在$B$点）

$$p_B=0.4\rho g$$

当$r=AC=0.4\text{m}$，$z=0$时（在C点）

$$p_c=\frac{1}{2}\rho\omega^2\times0.4^2=0.08\rho\omega^2$$

据题意：

$$p_B=p_c$$

故

$$0.4\rho g=0.08\rho\omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{0.4g}{0.08}}=\sqrt{\frac{0.4\times9.8}{0.08}}=7\ \text{rad/s}$$

（2）定性分析BC管内压强分布情况

①BC管段液体的压强分布可看作由两部分迭加的结果如解52图。

第一部分：静水压强，呈三角形分布。

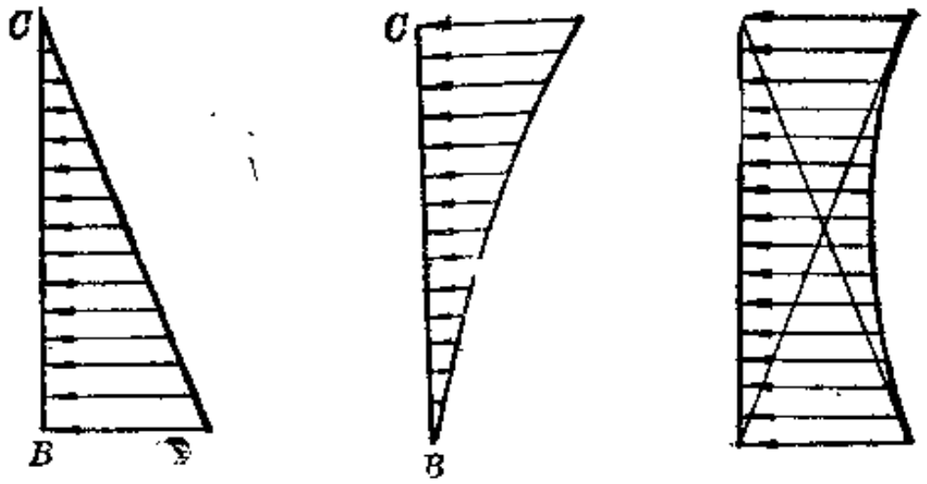
第二部分：由离心惯性力引起的压强，呈二次曲线型分布。

②计算何处压强p最小

将（1）式对z求极值，并注意到$\angle ABC=\angle ACB=45^\circ$，$r=-z$，故

$$\frac{dp}{dz}=\rho[\omega^2(-z)-g]=0$$

$$z=-\frac{g}{\omega^2}=-\frac{9.8}{7^2}=0.2\text{m}$$



(a) (b) (c)

解 52 图

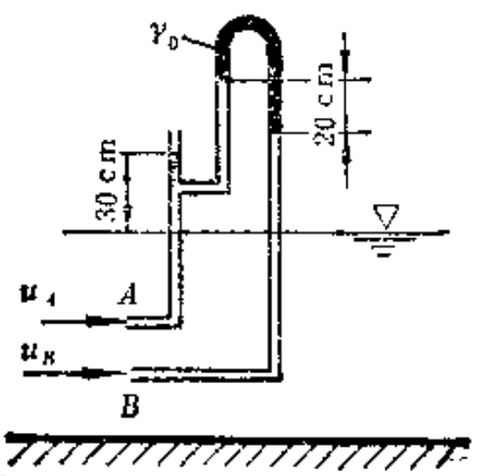
当z为-20cm时，即在BC段中间压强最小，其压强为

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2r^2}{2}-gz\right)=1000\times\left[\frac{7^2\times0.2^2}{2}-9.8\times(-0.2)\right]$$

$$=2940\ \mathrm{N/m^2}$$

II、水动力学基本原理，液流型态及水头损失

53 宽矩形明渠，在同一断面上有A、B两点，用图示的两个毕托管测流速，油的容重$\gamma_0=8000\mathrm{N/m^3}$，计算$u_A$和$u_B$的



题 53 图

大小。

解：

（1）计算A点流速

$$\frac{u_A^2}{2g}=0.3$$

$$u_A=\sqrt{2\times 9.8\times 0.3}=2.42\ \text{m/s}$$

（2）计算B点流速

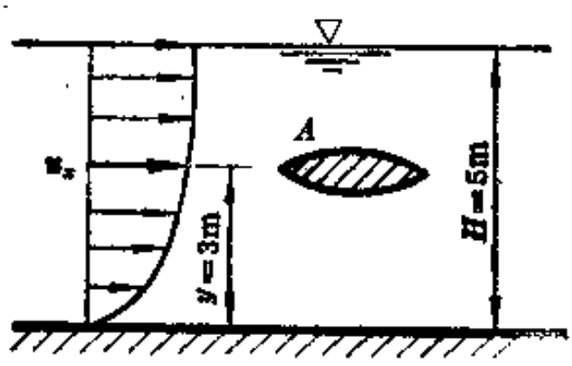
因A、B两点在同一过水断面上，故其测压管水头相同，但流速不同，由速度形成的压差是$0.2\times\gamma_0$，换成水柱高$h=\frac{0.2\gamma_0}{\gamma}$，即

$$\frac{u_A^2}{2g}-\frac{u_B^2}{2g}=\frac{0.2\gamma_0}{\gamma}-\frac{0.2\times 8000}{9800}=0.163$$

$$\frac{u_B^2}{2g}=0.3-0.163=0.137$$

$$u_B=\sqrt{2\times 9.8\times 0.137}=1.64\ \text{m/s}$$

54 如图所示，有一流线型物体顺流放置于水面下2m处，来流流速沿水深分布规律为$u_x=2\left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{7}}$，试求$A$点的动水压强。



题 54 图

解：

水流流速沿水深分布规律为

$$u_x=2\left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{1}{7}}$$

当$y=3$m处的流速是

$$u_x = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.859 \text{ m/s}$$

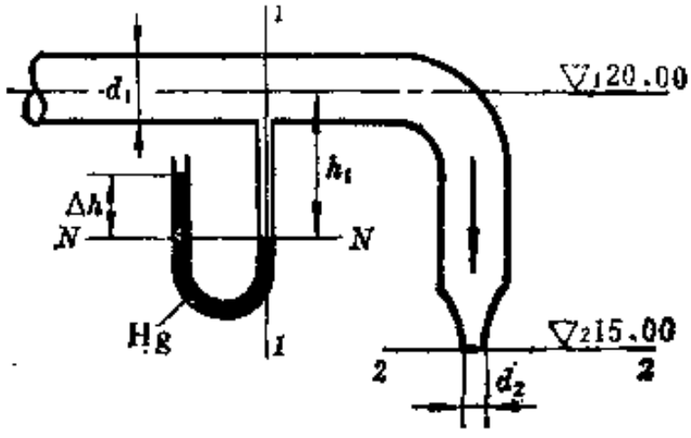
A点是停滞点（或驻点），动水压强为

$$p_A = \gamma\left[(H-y) + \frac{u^2}{2g}\right]$$

$$= 9.8 \times \left[(5-3) + \frac{1.859^2}{2 \times 9.8}\right]$$

$$= 21.3 \text{ kN/m}^2$$

55 水流通过如图所示的管路，已知U形测压管中水银柱高差$\Delta h = 0.2$m，图中$h_1 = 0.72$m，管径$d_1 = 0.1$m。管嘴出口直径$d_2 = 0.05$m，忽略管中的水头损失，试计算管中的流量$Q = ?$



题 55 图

解：

（1）计算1-1断面管道中心压强

因为N-N是等压面，故

$$p_1 + \gamma h_1 = \gamma_m \Delta h$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{\gamma_m}{\gamma}\Delta h - h_1 = 13.6 \times 0.2 - 0.72 = 2.0 \text{ m}$$

（2）计算流量

以2-2断面为基准面，写1-1、2-2断面的能量方程

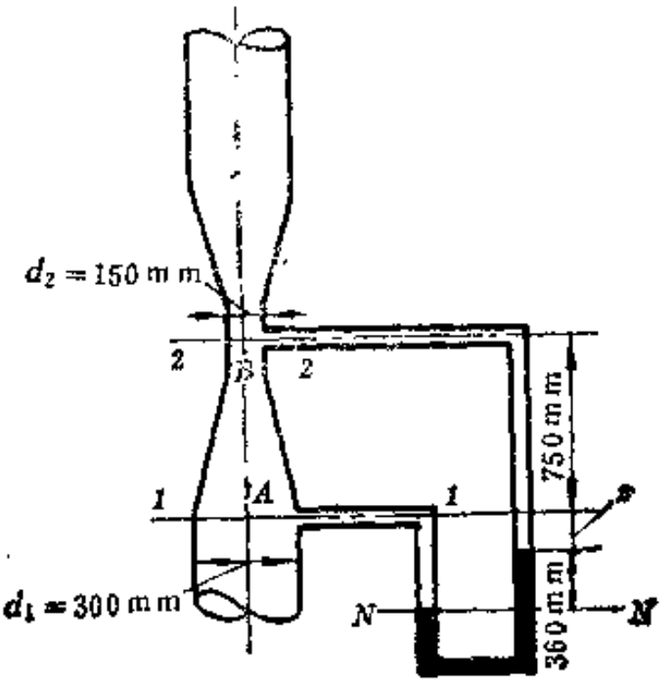
$$5+2+\frac{\left(\frac{4Q}{\pi d_1^2}\right)^2}{2g}-\frac{\left(\frac{4Q}{\pi d_2^2}\right)^2}{2g}$$

整理化简得

$$Q=\left[\frac{7g\pi^2}{8\left(\frac{1}{d_2^4}-\frac{1}{d_1^4}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{7\times 9.8\times 3.14^2}{8\left(\frac{1}{0.05^4}-\frac{1}{0.1^4}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$=0.024\ \mathrm{m^3/s}$

56 图示一文丘里流量计，水银差压计的读数为360mm，若不计A、B两点间的水头损失，试求管道中水的流量。已知管道直径$d_1=300\mathrm{mm}$，喉段直径$d_2=150\mathrm{mm}$。渐变段A-B长为



题 56 图

解：

以1-1水平面为基准面，列1-1、2-2断面的能量方程

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0.75+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=\left(\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}-\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+0.75\right)\qquad(1)$$

由连续性方程

$$v_1A_1=v_2A_2$$

$$v_1=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2v_B=\left(\frac{0.15}{0.3}\right)^2v_B=\frac{1}{4}v_2 \qquad (2)$$

对测压管，N-N面为等压面，故有

$$\frac{p_1}{\gamma}+Z+0.36=\frac{p_2}{\gamma}+0.75+Z+13.6\times0.36$$

$$\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=5.3 \quad \text{m水柱} \qquad (3)$$

将（2）、（3）式代入（1）式，并令$\alpha_1=\alpha_2=1$，得

$$5.3=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{1\times v_2^2}{16\times2g}+0.75$$

$$v_2=9.8 \text{ m/s}$$

故 $$Q=A_2v_2=\frac{\pi d_2^2}{4}\times v_2=\frac{3.14\times0.15^2}{4}\times9.8$$

$$=0.173 \text{ m}^3/\text{s}$$

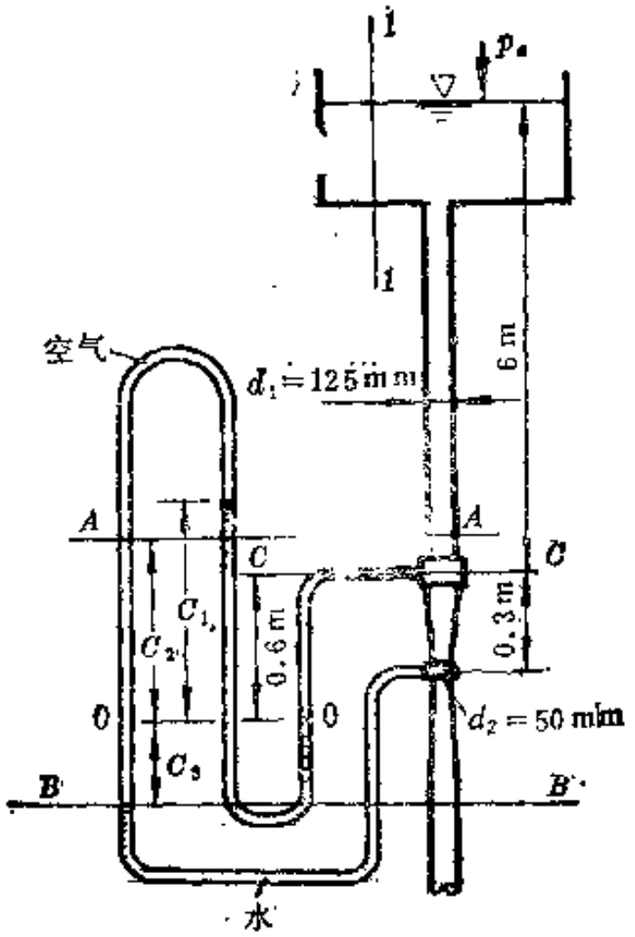
57 水从容器流入垂直放置的文丘里管，进口直径$d_1=125$ mm，喉部直径$d_2=50$mm，在文丘里管的进口及喉部接一倒U形测压计，测压计的顶部是空气，两支管的零点刻度位于文丘里管入口以下0.6m处，当管中无流动时，测压计两支管的读值C_2为0.9m，此时测压计顶部含空气的部分共长2m。当水在管中流动时，测压计两支管的读值分别C_1为1.71m及C_3为-0.57m。已知大气压强为10.2m水柱、文丘里管的流量系数为0.96，假定测压计中空气的压强与其体积成反比。求：当水在流动时，文丘里管喉部的绝对压强及水自容器流至文丘里管的入口的水头损失。

解：

（1）计算文丘里管喉部的绝对压强

管中水未流动时，设U形测压计水位在0-0水平面上，其内空气压强为p_1，体积为V_1。

A-A为等压面，根据等压面原理，有



题 57 图

$$p_1=p_a+\gamma[6-(0.9-0.6)]$$

$$=\gamma\left(\frac{p_a}{\gamma}+5.7\right)=9800\times(16.2+5.7)$$

$$=155820\ \mathrm{N/m^2}$$

设测压管支管面积为A_1，体积$V_1=2A_1$。

当水在管中流动时，测压计内空气压强为p_2，体积为V_2，则

$$V_2=[2+(C_2+C_3)-(C_1-C_2)]A_1$$

$$=[2+(0.9+0.57)-(1.71-0.9)]A_1$$

$$=2.66A_1$$

依题意，测压计中空气的压强与其体积成反比，即

$$V_2p_2=V_1p_1$$

$$p_2=\frac{V_1}{V_2}p_1=\frac{2A_1}{2.66A_1}\times155820=117158\ \mathrm{N/m^2}$$

作B-B等压面，喉管压强为p

$$\because \quad p_2 = p + \gamma(C_3 + 0.3)$$

$$\therefore \quad p = p_2 - \gamma(C_3 + 0.3)$$

$$= 117158 - 9800 \times (0.57 + 0.3)$$

$$= 108632 \text{ N/m}^2 \approx 109 \text{ kN/m}^2$$

（2）计算水自容器流至文丘里管入口的水头损失

以C-C为基准面，写1-1、C-C断面的能量方程

$$6 + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} + h_w$$

$$h_w = 6 + \frac{p_a}{\gamma} - \left(\frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} \right)$$

式中 $\alpha_0 \approx 1.0$

计算$\frac{p_0}{\gamma}$，因C-C为等压面，则

$$p_0 = p_2 + \gamma(C_1 - 0.6)$$

$$= 117158 + 9800 \times (1.71 - 0.6)$$

$$= 128036 \text{ N/m}^2 \approx 128 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{128036}{9800} = 13.06 \text{ m水柱}$$

计算v_0，通过文丘里流量计的流量为

$$Q = K\sqrt{h}\mu$$

式中 $$K = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} = \frac{3.14 \times 0.125^2}{4}$$

$$\times \sqrt{\frac{2 \times 9.8}{\left(\frac{0.125}{0.05}\right)^4 - 1}} = 0.0088$$

$$h = C_1 + C_3 = 1.71 + 0.57 = 2.28 \text{ m}$$

$$\mu = 0.96$$

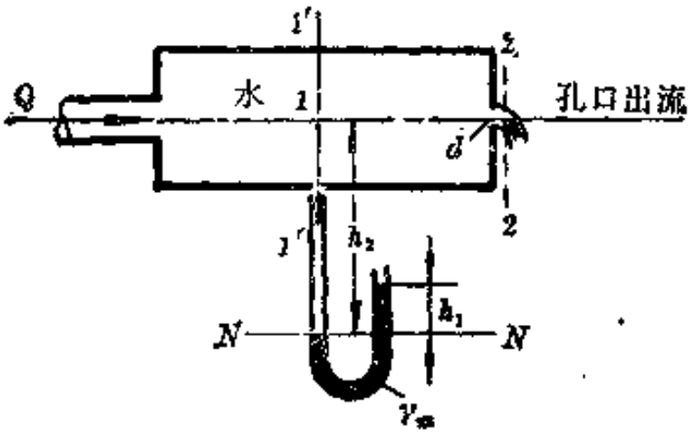
$$\therefore \quad Q = \mu K \sqrt{h} = 0.96 \times 0.0088 \times \sqrt{2.28} = 0.0128 \text{ m}^3/\text{s}$$

则
$$v_0=\frac{Q}{\frac{\pi}{4}d_1^2}=\frac{0.0128}{\frac{3.14}{4}\times 0.125^2}=1.04\ \text{m/s}$$

求得水头损失为

$$h_w=6+\frac{p_a}{\gamma}-\left(\frac{p_0}{\gamma}+\frac{v_0^2}{2g}\right)$$
$$=6+10.2-\left(13.06+\frac{1.04^2}{2\times 9.8}\right)$$
$$=3.08\ \text{m}$$

58 在测定流量用的密闭水箱中开一直径 $d=2\text{cm}$ 的孔口，为了测定水箱中的压强，安置了一个U形水银测压管，如图所示，设$h_1=4\text{cm}$，$h_2=20\text{cm}$，孔口流量系数$\mu=0.6$。求恒定流的流量Q（设水箱的断面面积比孔口断面面积大得多）。



题 58 图

解：

计算水箱中 1 点的压强：

对U形水银测压管，N-N为等压面

则
$$p_1+\gamma h_2=\gamma_m h_1$$
$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{\gamma_m h_1-\gamma h_2}{\gamma}=\frac{133280\times 0.04-9800\times 0.2}{9800}$$
$$=0.344\ \text{m水柱}$$

以管轴中心线为基准面，写$1'$-$1'$断面与孔口收缩断面2-2的能量方程式

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

因水箱断面比孔口断面大得多，*1'-1'*断面的流速水头可以忽略不计，即$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0$．水头损失只计局部损失，则方程可改写为

$$(\alpha_2+\zeta)\frac{v_2^2}{2g}=\frac{p_1}{\gamma}$$

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{\alpha_2+\zeta}}\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}}$$

令$\varphi=\frac{1}{\sqrt{\alpha_2+\zeta}}$为流速系数

则
$$v_2=\varphi\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}}$$

孔口出流的流量为

$$Q=A_2 v_2$$

令$\frac{A_2}{A}=\varepsilon$，$A$为孔口断面面积，$\varepsilon$为孔口的收缩系数

则
$$Q=\varepsilon A\varphi\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}}$$

$$=\mu A\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}}$$

$$=0.6\times\frac{3.14}{4}\times 0.02^2\times\sqrt{2\times 9.80\times 0.344}$$

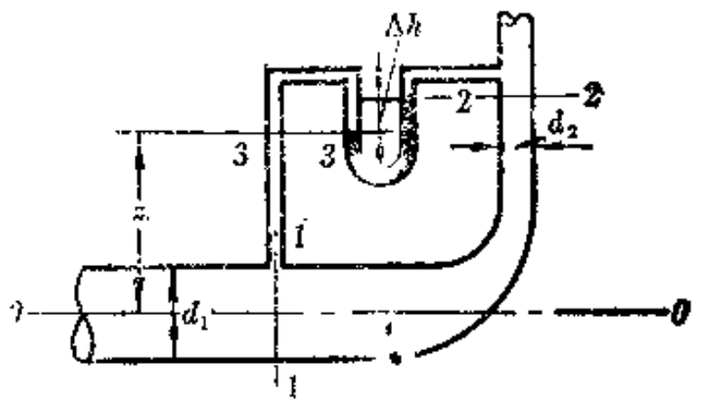
$$=4.9\times10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$$

59 一U形水银差压计连接于直角弯管，已知$d_1=300\mathrm{mm}$，$d_2=100\mathrm{mm}$。当管中流量 100l/s时，试问压差计读数$\Delta h=?$（不计水头损失）

解：

如图所示，*1-1*断面的流速为

$$v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{0.1}{\frac{1}{4}\times3.14\times0.3^2}=1.42\ \mathrm{m/s}$$



2-2断面的流速为

$$v_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{4\times0.1}{3.14\times0.1^2}=12.74\ \text{m/s}$$

以0-0为基准面，写1-1断面和2-2断面的能量方程

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=(z+\Delta h)+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \qquad (1)$$

由差压计等压面原理（3-3、2-2均为等压面）得

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_3}{\gamma}+z,$$

$$\frac{p_2}{\gamma}=\frac{p_3}{\gamma}-13.6\times\Delta h$$

将$\frac{p_1}{\gamma}$、$\frac{p_2}{\gamma}$值代入（1）式，得

$$\left(\frac{p_3}{\gamma}+z\right)+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$$

$$=(z+\Delta h)+\left(\frac{p_3}{\gamma}-13.6\times\Delta h\right)+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

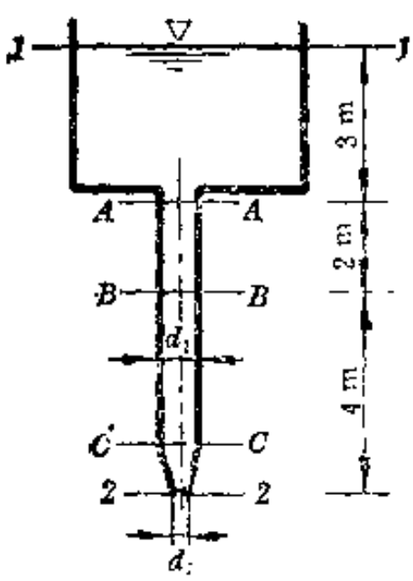
令$\alpha_1=\alpha_2\approx1$

$$\frac{v_1^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g}-12.6\times\Delta h$$

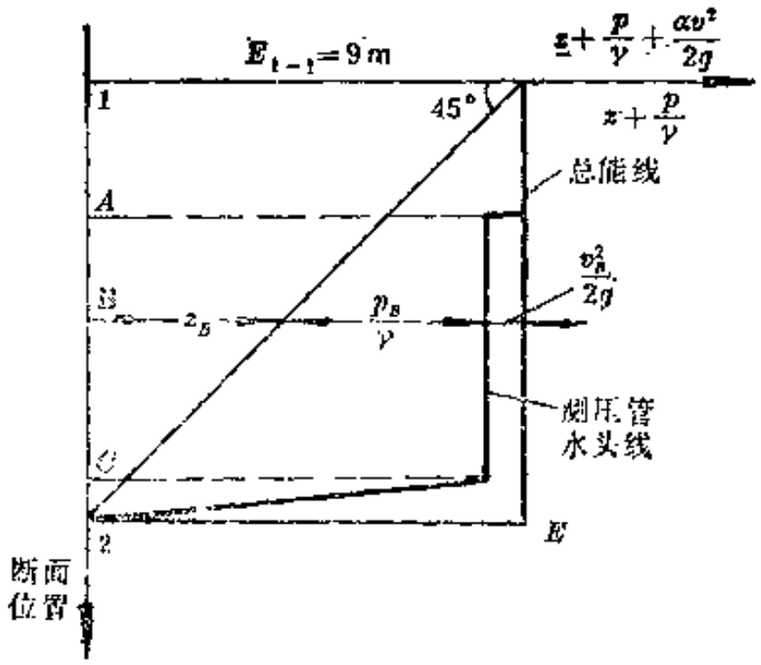
$$\Delta h=\frac{1}{12.6\times2\times9.8}\times(12.74^2-1.42^2)$$

$$=0.649\ \text{m}$$

60 贮水器内水面保持恒定，底部接一铅垂直输水管，直管直径$d_1=100\text{mm}$，末端收缩管嘴的出口直径$d_2=50\text{mm}$，若不计水头损失，求直管中A、B两断面的压强水头并绘制总能线与测压管水头线。



题 60图



解 60图

解：

如图所示，以2-2断面为基准面，写1-1和2-2断面的能量方程，若忽略1-1断面的流速及水头损失

有 $$H=\frac{\alpha v_2^2}{2g}$$

令$\alpha\approx 1$

$$3+2+4=\frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2=\sqrt{2\times 9.8\times 9}=13.28\ \text{m/s}$$

由连续性方程 $v_A\cdot A_A=v_2\cdot A_2$

则 $$v_A=\frac{A_2}{A_A}v_2=\frac{d_2^2}{d_1^2}v_2$$

$$=\frac{0.05^2}{0.1^2}\times 13.28=3.32\ \text{m/s}$$

以2-2水平面为基准面，写A-A断面与2-2断面的能量方

程式

有 $$6+\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

令$\alpha_A\approx\alpha_2\approx 1$

$$\frac{p_A}{\gamma}=\frac{1}{2g}(v_2^2-v_1^2)-6$$

$$\frac{p_A}{\gamma}=\frac{1}{19.6}(13.28^2-3.32^2)-6=2.43\ \text{m}$$

再写B–B断面和2–2断面的能量方程式

$$4+\frac{p_B}{\gamma}+\frac{\alpha_B v_B^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_B}{\gamma}=\frac{1}{2g}(v_2^2-v_B^2)-4$$

$$=\frac{1}{2\times 9.8}\times(13.28^2-3.32^2)-4$$

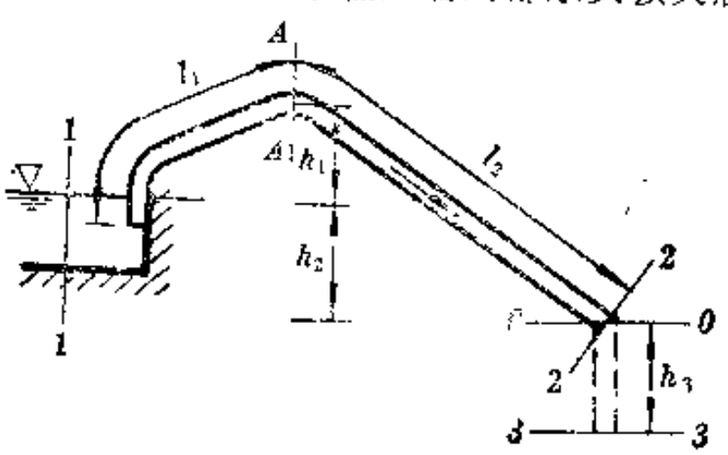
$$=4.44\ \text{m}$$

（$\because v_A=v_B$）

绘制总水头线及测压管水头线

为使图形清晰，以横坐标代表测压管水头及总水头，垂直坐标表示沿管线长度的断面位置，利用上述结果所绘总水头线及测压管水头线如解60图所示。

61 有一虹吸管自由出流如图所示，管径$d=10\text{cm}$，沿程阻力系数$\lambda=0.025$，长度$l_1=5\text{m}$，$l_2=10\text{m}$，位置高度$h_1=3\text{ m}$，$h_2=4\text{m}$，允许真空度$h_v=6\text{m}$水柱，若局部水头损失忽略不计。



题 61图

要求

（1）计算虹吸管的泄流量Q和断面A–A的真空度。

（2）将管道出口铅直向下延伸的极限长度l_s和最大泄流量Q_{max}。

解：

（1）计算虹吸管流量Q和A点压强p_A

以经过出口断面的轴心水平面0–0为基准面写1–1、2–2断面的能量方程

$$4=\frac{v^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (1)$$

整理后得

$$v=\left(\frac{4\times 2g}{1+\lambda\dfrac{l}{d}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{4\times 2\times 9.8}{1+0.025\times\dfrac{15}{0.1}}\right)^{\frac{1}{2}}=4.06\ \text{m/s}$$

$$Q=\frac{\pi d^2}{4}\cdot v$$

$$=\frac{3.14\times 0.1^2}{4}\times 4.06=0.032\ \text{m}^3/\text{s}$$

以水面为基准面，写1–1、A–A断面的能量方程

$$0=h_1+\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha v^2}{2g}+h_f, \qquad (2)$$

整理后得

$$\frac{p_A}{\gamma}=-h_1-\left(1+\lambda\frac{l_1}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$=-3-\left(1+0.025\times\frac{5}{0.1}\right)\times\frac{4.06^2}{2\times 9.8}$$

$$=-4.89\ \text{m}$$

（2）计算最大泄流量和极限长度l_s

以水面为基准面，采用绝对压强，写1–1、A–A断面的能量

方程

$$\frac{pa}{\gamma}=h_1+\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha v_m^2}{2g}+h_f,$$

式中 v_m是真空度$\frac{pa-p_A}{\gamma}=6$ m时，管中通过的最大断面平均流速。

$$h_f=\lambda\frac{l_1}{d}\frac{v_m^2}{2g}$$

整理得

$$v_m=\left[\frac{2g\left(\frac{pa-p_A}{\gamma}-h_1\right)}{1+\lambda\frac{l_1}{d}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{2\times 9.8\times(6-3)}{1+0.025\times\frac{5}{0.1}}\right]^{\frac{1}{2}}=5.11 \quad \text{m/s}$$

$$Q_{max}=v_m\cdot\frac{\pi d^2}{4}$$

$$=5.11\times\frac{3.14\times 0.1^2}{4}=0.040 \ \text{m}^3/\text{s}$$

极限延伸长度为l_3，如图虚线所示，以断面3-3为基准面，写A-A、3-3断面的能量方程

$$z_A+\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha v_m^2}{2g}=\frac{\alpha v_m^2}{2g}+h_f \qquad (3)$$

式中 $\frac{p_A}{\gamma}$可由以上游水池液面为基准面，写1-1、A-A断面的能量方程，解得

$$\frac{p_A}{\gamma}=-6 \text{ m}, \ z_A=h_1+h_2+l_3=7+l_3,$$

$$h_f=\lambda\frac{l_2+l_3}{d}\cdot\frac{v_m^2}{2g}$$

代入能量方程（3）式得

$$7+l_3-6=\lambda\frac{l_2+l_3}{d}\cdot\frac{v_m^2}{2g}$$

整理后可得

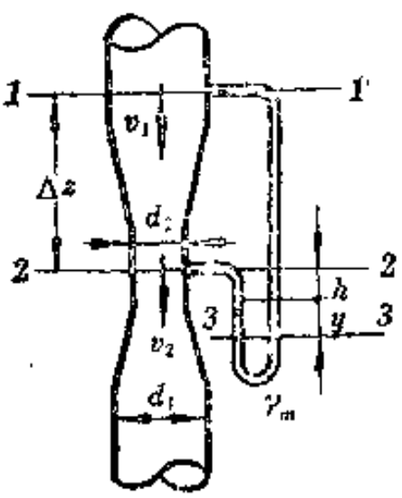
$$l_2=\frac{\lambda\frac{l_2}{d}\frac{v_2^2}{2g}-1}{1-\lambda\frac{v_m^2}{2gd}}$$

$$=\frac{0.025\times\frac{10}{0.1}\times\frac{5.11^2}{2\times9.8}-1}{1-0.025\times\frac{5.11^2}{2\times9.8\times0.1}}=3.49\ \text{m}$$

62 如题62图所示，文丘里管$d_1=20$cm，$d_2=10$cm，$\Delta z=0.5$m，水银差压计给出读数$y=2$cm，已知水银比重为13.6。

（1）忽略管中水头损失求流量；

（2）若考虑损失，已知流量系数C按下列诸式取值：



题 62图

$$C=\begin{cases}0.99 & \text{当}Re>10^5\\ 0.03\log Re+0.84 & \text{当}10^4<Re<10^5\\ 0.08\log Re+0.64 & \text{当}10^3<Re<10^4\end{cases}$$

其中 $Re=\frac{v_2d_2}{\nu}$（取$\nu=0.01\text{cm}^2/\text{s}$）

求流量和管道水流的水头损失。

解：

（1）忽略损失，计算管中流量

以2-2断面为基准面，写1-1、2-2断面的能量方程

$$\Delta z+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}$$

令$\alpha_1\approx\alpha_2\approx1$

整理得

$$\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}=\Delta z+\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}$$

由3-3等压面可得

$$p_1+\gamma(\Delta z+h+y)=p_2+\gamma h+\gamma_m y$$

整理后可得

$$\Delta z+\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=\left(\frac{\gamma_m}{\gamma}-1\right)y$$

$$=(13.6-1)\times 0.02=0.252\text{m}$$

根据连续性方程

$$v_1\cdot\frac{\pi d_1^2}{4}=v_2\cdot\frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$v_1=v_2\cdot\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2=v_2\left(\frac{0.1}{0.2}\right)^2=0.25v_2$$

$$\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}=\Delta z+\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=0.252$$

$$\frac{v_2^2-(0.25v_2)^2}{2g}=0.252$$

$$v_2=\sqrt{\frac{2\times 9.8\times 0.252}{1-(0.25)^2}}=2.295\ \text{m/s}$$

$$Q_0=v_2\cdot\frac{\pi d_2^2}{4}=2.295\times\frac{3.14\times 0.1^2}{4}$$

$$=0.018\ \text{m}^3/\text{s}$$

（2）考虑损失，计算流量和管道水头损失

$$\text{Re}=\frac{v_2 d_2}{\nu}=\frac{2.295\times 10}{0.01}=2.295\times 10^5$$

取$C=0.99$

$$Q=CQ_0=0.99\times 0.018=0.0178\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$v_1=\frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d_1^2}=\frac{0.0178}{\frac{1}{4}\times 3.14\times 0.2^2}=0.567\ \text{m/s}$$

$$v_2=\frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d_2^2}=\frac{0.0178}{\frac{1}{4}\times 3.14\times 0.1^2}=2.268\ \text{m/s}$$

以2-2断面为基准面，写1-1、2-2断面的能量方程

$$\Delta z+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_1^2}{2g}+h_w$$

$$h_w=\left(\Delta z+\frac{p_1-p_2}{\gamma}\right)+\frac{1}{2g}(v_1^2-v_1^2)$$

$$=0.252+\frac{1}{2\times 9.8}\times(0.567^2-2.268^2)$$

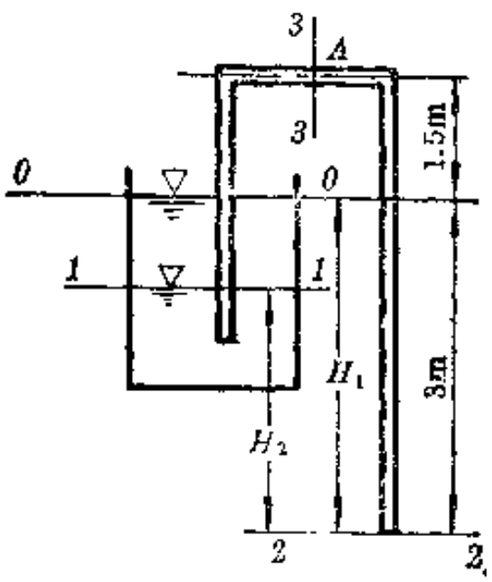
$$=0.006\text{m}$$

$$=0.6\text{cm}$$

63 用虹吸管从水箱中抽水，水箱的横截面积为 $1\times1\text{m}^2$，虹吸管直径均为10cm，位置尺寸如图所示，略去流动损失，求：

（1）在恒定流动状态下，水头为 3m 时，虹吸管的出口速度和A点的压强（真空度表示）；

（2）水箱水位由3m降到2m时所需的时间。



题 63 图

解：

（1）计算出口速度和A点压强

水头为3m时，以2-2断面为基准面，对0-0、2-2断面写能量方程

$$3=\frac{\alpha v^2}{2g}$$

令 $\alpha\approx1$

得 $v=\sqrt{2\times 3g}=\sqrt{2\times 3\times 9.8}=7.67$ m/s

以0-0断面为基准面，对0-0、3-3断面写能量方程

$$0=1.5+\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha v^2}{2g}$$

$$\therefore \quad p_A=\gamma\left(-1.5-\frac{\alpha v^2}{2g}\right)$$

$$=9800\times\left(-1.5-\frac{1\times 7.67^2}{2\times 9.8}\right)\approx -44100 \text{ N/m}^2$$

故真空度 $p_K=-p_A=44100$ N/m²

（2）计算水箱水位由3m降到2m时需要的时间

$$\because \quad Q=A\sqrt{2gH}$$

$$\text{又}\because \quad Qdt=-\Omega dH$$

$$\therefore \quad dt=-\frac{\Omega dH}{A\sqrt{2gH}}$$

$$\text{积分得} \quad t=-\int_{H_1}^{H_2}\frac{\Omega}{A\sqrt{2g}}H^{-\frac{1}{2}}dH$$

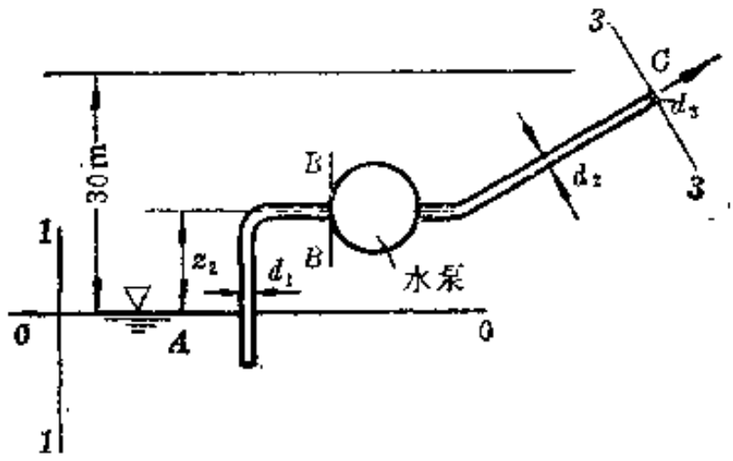
$$=\frac{2\Omega}{\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)$$

$$=\frac{2\times 1}{\frac{3.14\times 0.1^2}{4}\sqrt{2\times 9.8}}\left(\sqrt{3.0}-\sqrt{2.0}\right)$$

$$=18.3 \text{ s}$$

水箱水位由3m降到2m时所需要的时间是18.3s。

64 一台水泵产生水头$H_p=50$m，水泵吸水管从水池A处吸水，吸水管直径$d_1=150$mm，沿程水头损失$h_{f_1}=5\frac{v_1^2}{2g}$，$v_1$为吸水管平均流速，水泵安装高程$z_2=2$m，出水管直径$d_2=100$mm，末端接一管嘴，直径$d_3=75$mm，管嘴中心距吸水池水面高30m，压水管沿程水头损失$h_{f_2}=12\frac{v_2^2}{2g}$，$v_2$为压水管断面平均流速。计算（1）管嘴C点的射流流速v；（2）水泵入口处B点的压强。



题 64 图

（局部水头损失略去不计。）

解：

（1）计算C点射流速度

以水平面0-0为基准面，与1-1、3-3断面的能量方程

$$H_p=30+\frac{\alpha_3 v_3^2}{2g}+h_{w1}+h_{w2}$$

式中 $h_{w1}=5\frac{v_1^2}{2g}$为吸水管水头损失，$h_{w2}=12\frac{v_2^2}{2g}$为压水管水头损失，$\alpha_3\approx1$，代入整理可得

$$50=30+\frac{v_3^2}{2g}+5\frac{v_1^2}{2g}+12\frac{v_2^2}{2g}$$

由连续性方程得$v_1=\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^2 v_3$，$v_2=\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2 v_3$，代入上式可得

$$50=30+\frac{v_3^2}{2g}+5\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^4+12\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^4$$

$$v_3=\sqrt{\frac{2g(50-30)}{1+5\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^4+12\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times9.8\times(50-30)}{1+5\times\left(\frac{0.075}{0.15}\right)^4+12\times\left(\frac{0.075}{0.10}\right)^4}}=8.76\ \text{m/s}$$

$$v_1=\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^2 v_3=\left(\frac{0.075}{0.15}\right)^2\times 8.76=2.19\ \text{m/s}$$

所以管嘴C点的射流流速$v=8.76\text{m/s}$。

（2）计算水泵入口处B点压强

以0-0为基准面，写1-1、B-B断面的能量方程

$$0=z_2+\frac{p_B}{\gamma}+\frac{\alpha v_1^2}{2g}+5\,\frac{v_1^2}{2g}$$

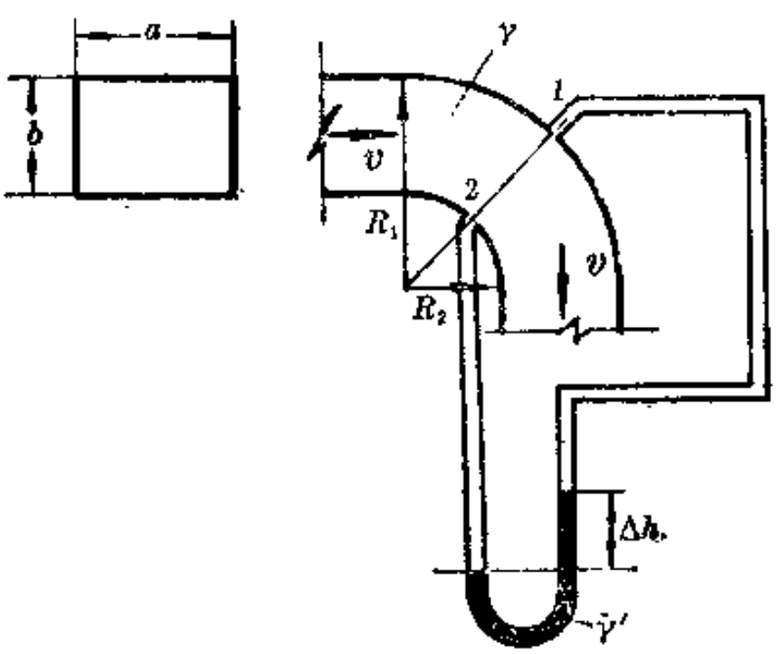
$$\frac{p_B}{\gamma}=-\left[z_2+\frac{v_1^2}{2g}(\alpha+5)\right]=-\left[2+\frac{2.19^2}{2\times 9.8}\times(1+5)\right]$$

$$=-3.47\text{m}$$

$$p_B=-9.8\times 3.47\approx -34\quad \text{kN/m}^2$$

故B点的真空度$p_K=34\text{kN/m}^2$。

65 一矩形截面（$a\times b$）管路的90°弯头，内外壁的曲率半径分别为R_2和R_1，若断面的流速分布为$u=\dfrac{C}{R}$，R为从曲率中心算起的径向距离，C为常数，管内输送的液体容重为γ，测压管中液体容重为γ'，测压管读数为Δh，试求弯管处1、2点的压差p_1-p_2的表达式及测压管读数Δh和通过管道流量Q的关系式。管路布置如题65图所示。



题 65 图

解：

（1）求压差p_1-p_2的表达式

在弯管1-2断面处水流为急变流，在该断面上任取一点M，围绕该M点取长为dl，底面积为dA的微分圆柱体，圆柱体轴线$n-n$的方向与曲率半径方向一致，与铅垂方向夹角为α。微分柱体两端面形心点距基准面高度分别为z及$z+dz$，如解65(a)图所示。

作用于该微分柱体上的力在$n-n$方向的投影有：

①柱体两端面上的动水压力为pdA及$(p+dp)dA$；

②柱体自重dG沿$n-n$方向的投影

$$dG\cos\alpha=\gamma dA\cdot dl\frac{dz}{dl}=\gamma dAdz;$$

③离心惯性力 $dF=\rho dA\cdot dl\cdot\frac{u^2}{R}=\rho dAdl\frac{C^2}{R^3}$

柱体侧面动水压力及内摩擦阻力与$n-n$轴正交，故在$n-n$方向投影为零。

水流在$n-n$方向没有运动，故上述诸力在$n-n$方向投影的代数和为零。于是

$$pdA-(p+dp)dA-\gamma dAdz+\rho dAdl\frac{C^2}{R^3}=0$$

简化上式，得

$$-dp-\gamma dz+\rho dl\frac{C^2}{R^3}=0$$

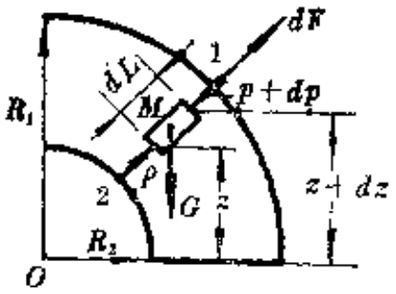
或写作 $$dp=\frac{\gamma}{g}\frac{C^2}{R^3}dl-\gamma\cos\alpha\cdot dl$$

两端积分，得

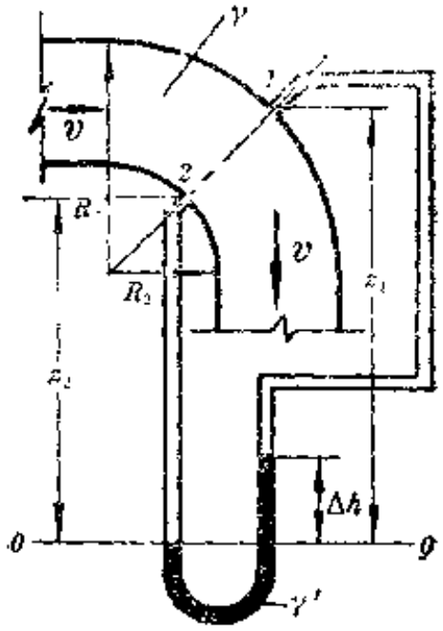
$$p_1-p_2=\int_{R_2}^{R_1}\frac{\gamma}{g}\frac{C^2}{R^3}dR-\int_{R_2}^{R_1}\gamma\cos\alpha\cdot dR$$

$$=-\frac{\gamma C^2}{2g}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right)-\gamma\cos\alpha(R_1-R_2)$$

$$=-\frac{\gamma C^2}{2g}\left(\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_1^2}\right)-\gamma\cos\alpha(R_1-R_2)$$



解 65(a) 图



解 65(b) 图

（2）求测压管读数Δh和流量Q的关系式

因
$$u=\frac{C}{R}$$

设1-2断面微元面积为dA

则
$$dA=dl\times a$$

通过1-2断面微元体的流量为

$$dQ=udA=\frac{C}{R}dl\times a$$

两端积分，得通过1-2断面的流量

$$Q=\int_{R_2}^{R_1}\frac{C}{R}adR$$

$$=CaInR\Big|_{R_2}^{R_1}$$

$$=Ca\ln\frac{R_1}{R_2}$$

由此可得

$$C=\frac{Q}{a\ln\frac{R_1}{R_2}} \qquad (1)$$

在1、2点所设置的测压管处，以0-0为等压面，可求得1、2两点的压差，如解65(b)图所示。

$$p_2+\gamma z_2=p_1+\gamma(z_1-\Delta h)+\gamma'\Delta h$$

$$p_1-p_2=(\gamma-\gamma')\Delta h-\gamma(z_1-z_2)$$

$$=(\gamma-\gamma')\Delta h-\gamma\cos\alpha(R_1-R_2)$$

又因 $$p_1-p_2=\frac{\gamma C^2}{2g}\left(\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_1^2}\right)-\gamma\cos\alpha\cdot(R_1-R_2)$$

故两式右端应相等，得

$$(\gamma-\gamma')\Delta h=\frac{\gamma C^2}{2g}\left(\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_1^2}\right) \qquad (2)$$

将（1）式代入（2）式，得

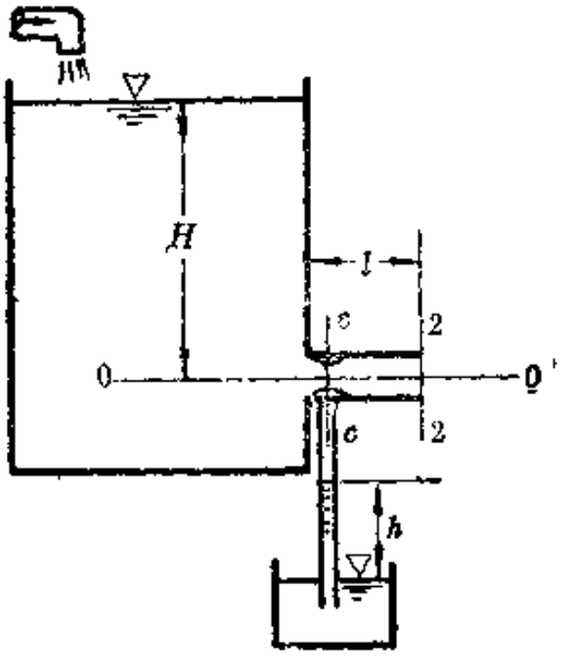
$$(\gamma-\gamma')\Delta h=\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{Q}{a\ln\frac{R_1}{R_2}}\right)^2\left(\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_1^2}\right)$$

整理上式，得Q与Δh的关系式：

$$Q=\sqrt{\frac{2g\left(\frac{\gamma-\gamma'}{\gamma}\right)\Delta h\left(a\ln\frac{R_1}{R_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{R_1^2}\right)}}$$

$$=a\cdot\ln\frac{R_1}{R_2}\cdot\sqrt{2g\cdot\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2-R_2^2}\left(\frac{\gamma-\gamma'}{\gamma}\right)\Delta h}$$

66 图示一水面保持恒定的大水箱，接一长$l=15$cm，直径$d=4$cm的水平管嘴，管嘴中心线处的水头$H=1$m，收缩断面c-c处的截面积A_c与管嘴横截面面积A之比为0.64，收缩断面以前由于流束突然收缩而引起损失，其损失系数为$\zeta_1=0.06$，收缩断面下接一铅直玻管插入颜色液体中，设管嘴水流进入大气，不计水箱中流速水头及管嘴沿程损失。求颜色液体在铅直玻管中上升的高度h。



题 66 图

解：

以管嘴中心线0-0为基准面，写*1-1*断面与2-2断面的能量方程

$$H+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}$$

因题给管嘴流入大气，不计水箱中流速水头及管嘴沿程损失，令进口局部水头损失系数$\zeta=0.5$，故方程可改写为

$$H=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+\zeta\frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{\alpha_2+\zeta}}\sqrt{2gH}\quad(\text{取}\alpha_2\approx 1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0.5}}\sqrt{2\times 9.80\times 1}$$

$$=3.617\quad \text{m/s}$$

又根据连续性方程

$$v_c=\frac{A_2}{A_c}v_2\quad=\frac{1}{0.64}\times 3.617=5.65\quad \text{m/s}$$

再对进口*1-1*断面与管嘴收缩断面写能量方程可得

$$H=\frac{p_c}{\gamma}+\frac{\alpha_c v_c^2}{2g}+h_{w1-c}$$

$$\frac{p_c}{\gamma}=H-(\alpha_c+\zeta_1)\frac{v_c^2}{2g}=1-(1+0.06)\times\frac{5.65^2}{2\times9.80}$$

$$=0.726 \quad \text{m水柱}$$

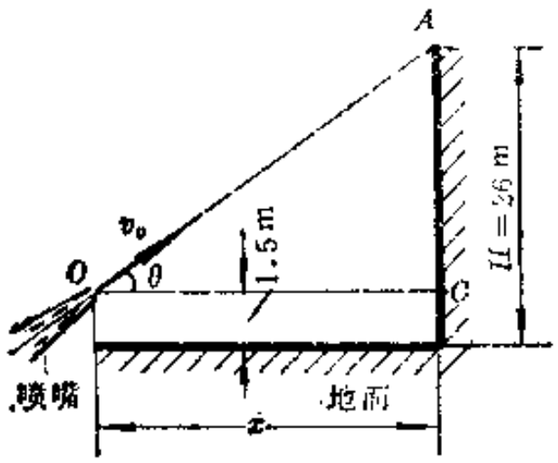
故c-c断面的真空值为

$$\frac{p_K}{\gamma}=0.726 \quad \text{m水柱}$$

所以收缩断面下接的玻璃管内颜色液体升高值为

$$h=\frac{p_K}{\gamma}=0.726 \quad \text{m}$$

67 一消防队员将水龙头喷嘴转至某一角度θ使水股由最高点降落时射到楼墙上A点，该点高出地平面26m，喷嘴出口比地面高1.5m，喷嘴出口流速$v_0=25\text{m/s}$，忽略空气阻力，试求喷嘴出口距边墙的最大水平距离x（即水平距离OC）。



题 67 图

解：

$$\begin{cases} v_{0y}=v_0\sin\theta \\ v_{0x}=v_0\cos\theta \end{cases}$$

水质点抛射至最大高度A点时

$$h=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}=\frac{25^2\sin^2\theta}{2\times9.80}$$

已知 $h=26-1.5=24.5\text{m}$ 代入上式整理后

得 $$\sin\theta=\sqrt{\frac{2\times9.80\times24.5}{25^2}}=0.87653$$

故 $$\theta=\sin^{-1}0.87653=61.23^\circ$$

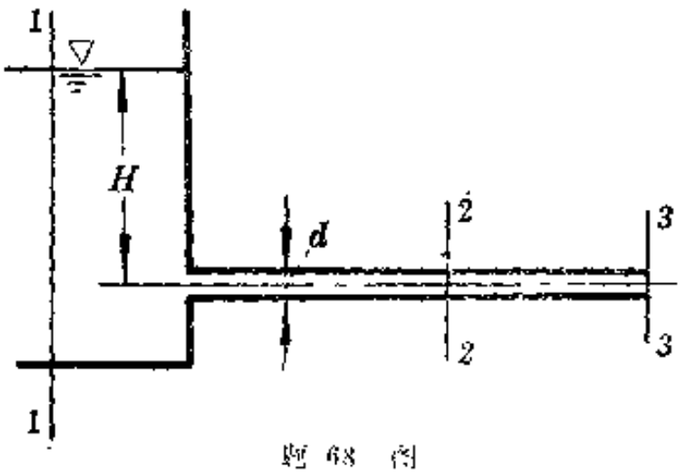
水质点到达A点所需时间

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times24.5}{9.80}}=2.236\ \text{s}$$

故喷嘴出口至边墙最大水平距离为

$$x=v_0\cos\theta\cdot t=25\times\cos61.23^\circ\times2.236=26.90\ \text{m}$$

68 如图示一水平放置的水管自水池引水。已知$H=4.0\text{m}$，管径$d=20\text{cm}$，由1-1断面至2-2断面的能量损失$h_{w1}=0.5\frac{v^2}{2g}$，自2-2断面至3-3出口断面的能量损失$h_{w2}=0.3\frac{v^2}{2g}$，v为管的断面平均流速。试求2-2断面至3-3断面间的管壁所受的水平总作用力。



题 68 图

解：

以管轴线的水平面为基准面，写1-1、3-3断面的能量方程（设水池中流速为零）

$$H=\frac{\alpha v^2}{2g}+(0.5+0.3)\cdot\frac{v^2}{2g}$$

令$\alpha\approx1$ $4=1.8\frac{v^2}{2g}$

$$v=6.6 \quad \text{m/s}$$

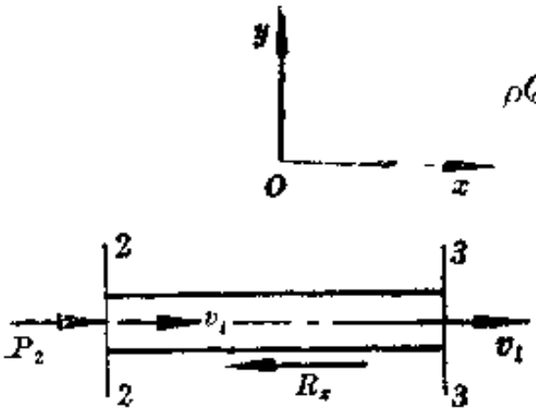
再写1-1、2-2断面的能量方程求出p_2

$$4=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{6.6^2}{2g}+0.5\times\frac{6.6^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\gamma}=4-1.5\times\frac{6.6^2}{19.6}=0.67 \quad \text{m}$$

$$p_2=0.67\times9800=6566 \quad \text{N/m}^2$$

取2-2、3-3断面间水体为控制体，假设管壁对水体的作用力为R_x，按解68图示方向取坐标。



解 68 图

沿x方向写动量方程

$$\rho Q(\beta_3 v_3-\beta_2 v_2)=p_2-R_x$$

$$\because \quad v_3=v_2=v$$

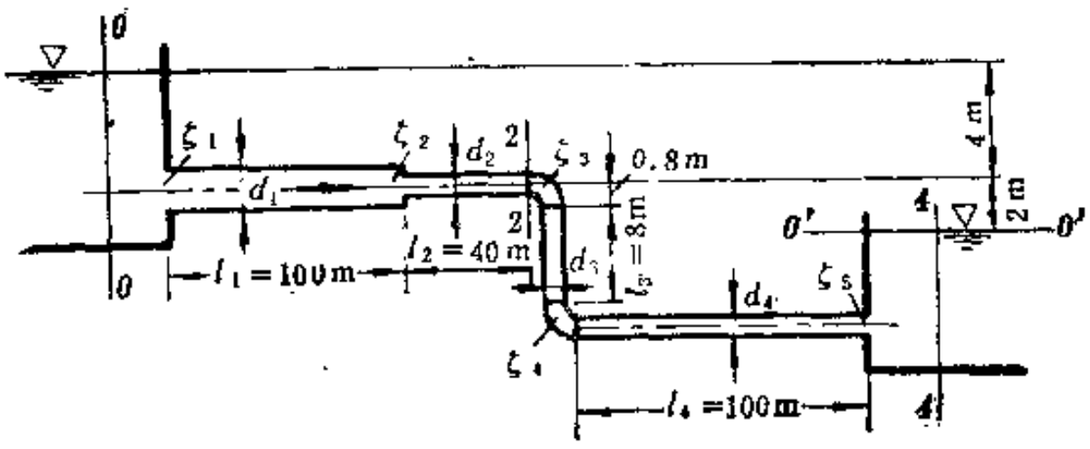
故 $$P_2-R_x=0$$

$$R_x=p_2A_2=6566\times\frac{3.14\times0.2^2}{4}$$

$$=206 \quad \text{N}$$

管壁所受的水平总作用力为206N，方向与R_x方向相反。

69 有一管路系统如图所示，设$\zeta_1=0.5$，$\zeta_2=0.5\left(1-\frac{A_2}{A_3}\right)$（用突然收缩后的流速水头计算突然收缩局部水头损失，



题 69 图

式中A_1、A_2分别表示收缩前后管道的面积），$\zeta_3=\zeta_4=0.3$，$\zeta_5=1.0$，管道糙率$n=0.013$，$d_1=0.4\text{m}$，$d_2=d_3=d_4=0.2\text{m}$，其它尺寸如图，求：

（1）流量Q；

（2）作用在第一个弯头上的动水总作用力（注意：水管轴线在铅直平面上）；

（3）第一根管道周界上的内摩擦切应力τ_0。

解：

（1）求流量Q

以0′-0′为基准面，写进口0-0断面和出口1-4断面的能量方程，得

$$4+2=h_{w\,0-4}$$

$$=\lambda_1\frac{l_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}+\lambda_2\frac{l_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}+\lambda_3\frac{l_3}{d_3}\frac{v_2^2}{2g}+\lambda_4\frac{l_4}{d_4}\frac{v_2^2}{2g}$$

$$+\zeta_1\frac{v_1^2}{2g}+\zeta_2\frac{v_2^2}{2g}+\zeta_3\frac{v_2^2}{2g}+\zeta_4\frac{v_2^2}{2g}+\zeta_5\frac{v_2^2}{2g}$$

式中 $\lambda=\dfrac{8g}{C^2}$，$C=\dfrac{1}{n}R^{\frac{1}{6}}$，$R=\dfrac{d}{4}$

故 $$\lambda=\frac{8g}{\left[\frac{1}{n}\left(\frac{d}{4}\right)^{\frac{1}{6}}\right]^2}=8g\times n^2\times 4^{\frac{1}{3}}\frac{1}{d^{\frac{1}{3}}}$$

$$=8\times 9.80\times 0.013^2\times 4^{\frac{1}{3}}\times\frac{1}{d^{\frac{1}{3}}}$$

$$=0.02105\ \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}}$$

当$d_1=0.4\text{m}$时 $\lambda_1=\dfrac{0.02105}{0.4^{\frac{1}{3}}}=0.0286$

当$d_2=0.2\text{m}$时 $\lambda_2=\dfrac{0.02105}{0.2^{\frac{1}{3}}}=0.036$

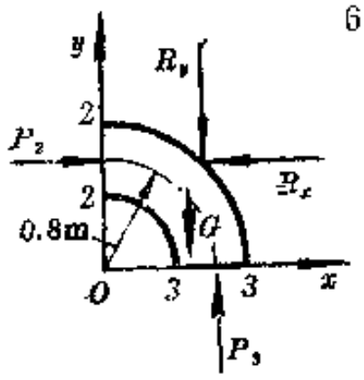
根据连续性方程

$$v_1=v_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2=v_2\left(\frac{0.2}{0.4}\right)^2=0.25v_2$$

$$\zeta_2=0.5\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right)=0.5\times\left(1-\frac{d_2}{d_1}\right)$$

$$=0.5\times\left(1-\frac{0.2}{0.4}\right)=0.25$$

将以上计算值代入能量方程，得



解 69 图

$$6=\frac{v_2^2}{2g}\left(0.25^2\lambda_1\frac{l_1}{d_1}+\lambda_2\frac{l_2}{d_2}+\lambda_3\frac{l_3}{d_3}+\lambda_4\frac{l_4}{d_4}\right.$$

$$\left.+\frac{v_2^2}{2g}(0.25^2\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4+\zeta_5)\right.$$

$$=\frac{v_2^2}{2g}\left(0.25^2\times0.0286\times\frac{100}{0.4}+0.036\times\frac{40}{0.2}\right.$$

$$+0.036\times\frac{8}{0.2}+0.036\times\frac{100}{0.2}+0.25^2$$

$$\left.\times0.5+0.25+0.3+0.3+1\right)=28.97\frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2=\sqrt{\frac{6\times9.80}{28.97}}=2.016\quad\text{m/s}$$

$$Q=v_2A_2=v_2\times\frac{\pi}{4}d_2^2=2.016\times\frac{3.14}{4}\times0.2^2=0.0633\quad\text{m}^3/\text{s}$$

（2）计算作用在第一个弯头上的动水总作用力

取弯道2-2、3-3断面之间水体为控制体，坐标系如解69图所示。

①作用于控制体上的力有

两端面上的动水压力P_2、P_3；

弯道水体重量G；

弯道管壁对水体的反作用力R的分量R_x、R_y。

写管道进口0-0与2-2断面的能量方程（以水平段管轴线为基准线），计算压强p_2

$$4=\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+h_{w0-2}$$

故

$$\frac{p_2}{\gamma}=4-\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}-h_{w0-2}$$

$$=4-\frac{v_2^2}{2g}\left(\alpha_2+\lambda_1\frac{l_1}{d_1}\times0.25^2+\lambda_2\frac{l_2}{d_2}\right.$$

$$+\zeta_1\times0.25^2+\zeta_2\Big)$$

$$=4-\frac{2.016^2}{2\times9.8}\times\Big(1+0.0286\times\frac{100}{0.4}\times0.25^2+0.036$$

$$\times\frac{40}{0.2}+0.25^2\times0.5+0.25\Big)$$

$$=4-\frac{4.064}{19.6}\times8.928$$

$$=2.15\ \text{m}$$

$$p_2=9800\times2.15=21080\text{N/m}^2=21.08\ \text{kN/m}^2$$

$$F_2=p_2A_2=21.08\times\frac{3.14\times0.2^2}{4}=0.663\ \text{kN}$$

同理1-1、0-0、3-3断面的能量方程，求得3-3断面的压强为

$$\frac{p_3}{\gamma}=2.087\ \text{m}$$

$$p_3=2.087\times9800=20453\ \text{N/m}^2=20.453\ \text{kN/m}^2$$

$$P_3=p_3A_3=20.453\times\frac{3.14\times0.2^2}{4}=0.643\ \text{kN}$$

弯管的自重$G=\gamma\times2\pi A_2\times0.8/4$

$$=9800\times2\times3.14\times\frac{3.14\times0.2^2}{4}\times0.2$$

$$=386.496\ \text{N}$$

$$\approx0.386\ \text{kN}$$

②用动量方程求反作用力

沿x方向写动量方程，得

$$P_2-R_x=\frac{\gamma}{g}Q(\beta_2v_2-\beta_1v_1)$$

令$\beta_2=\beta_1=1$

$$R_x=P_2+\frac{\gamma}{g}Qv_2=0.663+1\times0.0633\times2.016$$

$$=0.791\ \text{kN}$$

沿y方向写动量方程，得

$$P_3 - R_y - G$$

$$= \frac{\gamma}{g} Q(\beta_2 v_3 - \beta_1 0)$$

$$R_y = P_3 - G - \frac{\gamma}{g} Q v_3$$

$$= 0.643 - 0.386 - 1 \times 0.0633 \times 2.016$$

$$= 0.129 \text{ kN}$$

合力 $$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{0.791^2 + 0.129^2}$$

$$= 0.80 \text{ kN}$$

水流作用在弯管上的力与R大小相等方向相反。

（3）计算第一根管道周界上的内摩擦切应力τ_0。

由前面的计算可知

$$v_1 = 0.25 v_2 = 0.25 \times 2.016 = 0.504 \text{ m/s}$$

$$J = \frac{h_{w0-1}}{l_1} = \frac{1}{l_1}\left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

$$= \frac{1}{100} \times 0.0286 \times \frac{100}{0.4} \times \frac{0.504^2}{2 \times 9.80}$$

$$= 9.266 \times 10^{-4}$$

$$\tau_0 = \gamma R J = 9800 \times \frac{0.4}{4} \times 9.266 \times 10^{-4}$$

$$= 908 \times 10^{-4} \text{ N/m}^2$$

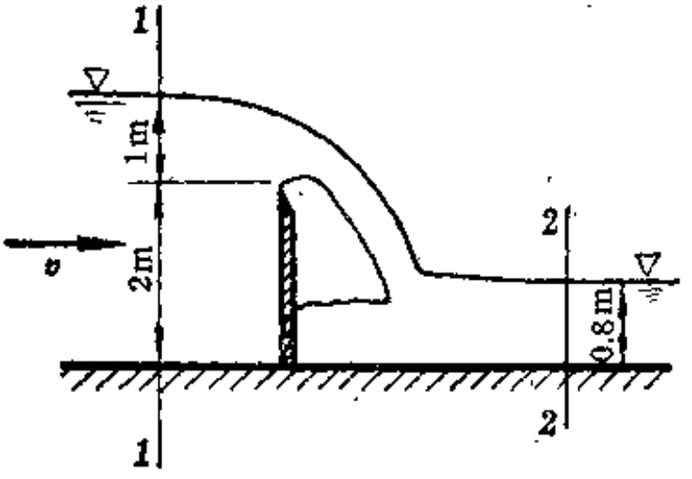
$$= 0.908 \text{ N/m}^2$$

或 $$\tau_0 = \frac{1}{8} \lambda \rho v^2$$

$$= \frac{1}{8} \times 0.0286 \times 1000 \times 0.504^2$$

$$= 0.908 \text{ N/m}^2$$

70 一矩形渠道宽4m，渠中设有薄壁堰，堰顶水深1m，堰高2m，下游尾水深0.8m，已知通过堰的流量$Q = 6.8 \text{m}^3/\text{s}$，堰后水舌内外均为大气，试求堰壁上所受动水总压力（上、下游河底为平底，河底摩擦阻力可略去不计）。



题 70 图

解：

取1-1、2-2断面间水体为控制体，如解70图所示，建立xOy坐标系。

写x方向的动量方程

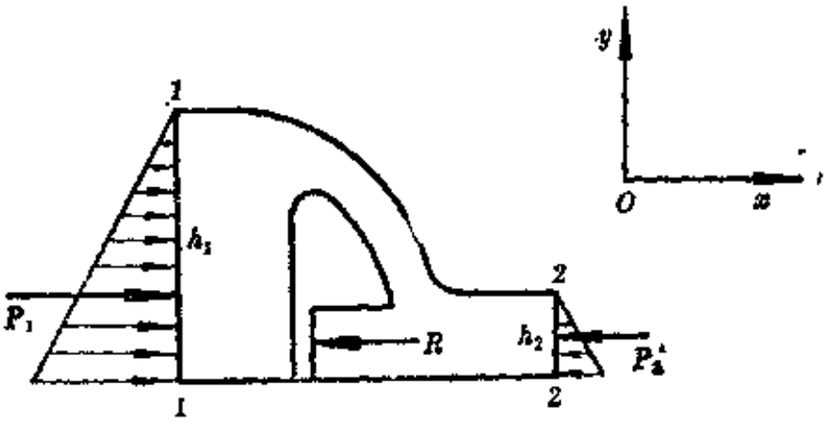
$$P_1-P_2-R=\frac{\gamma Q}{g}(\beta_2 v_2-\beta_1 v_1)$$

$\because$

$$P_1=\frac{1}{2}\gamma h_1^2\cdot b=\frac{1}{2}\times 9800\times 3^2\times 4$$

$$P_2=\frac{1}{2}\gamma h_2^2 b=\frac{1}{2}\times 9800\times 0.8^2\times 4$$

并令$\beta_2\approx\beta_1\approx 1$

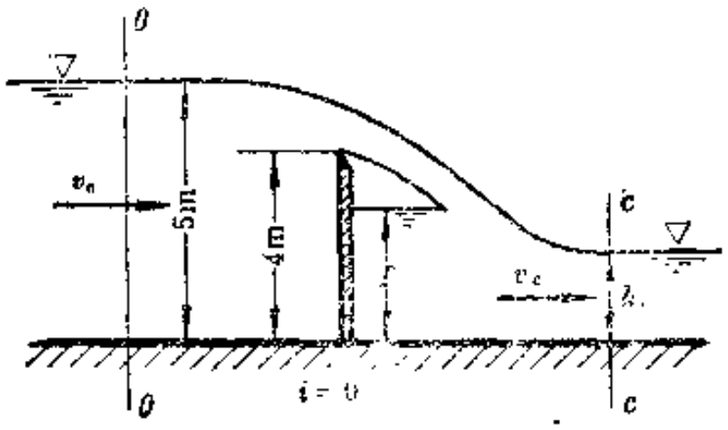


解 70 图

故
$$R=P_1-P_2-\frac{\gamma Q^2}{gb}\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times 9800\times 4\times(9-0.64)$$
$$-\frac{9800\times 6.8^2}{9.8\times 4}\left(\frac{1}{0.8}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=153255.48\ \text{N}$$
$$\approx 153\ \text{kN}$$

堰壁上所受动水总压力为153kN，方向与R方向相反。

71 如图所示为二元薄壁堰流，已知堰前水深为5m，堰高为4m，单宽流量$q=8.4\text{m}^2/\text{s}\cdot\text{m}$，水舌内外气压均为大气压，假设薄壁两侧水压强均按静水压强分布；水舌自堰顶跌落，由于扩散、掺气及空气阻力的影响，单位重量水体的能量损失为$0.15\frac{v_c^2}{2g}$，试求水深T及h_c。



题 71 图

解：

0—0断面平均流速$v_0=\frac{q}{H}=\frac{8.4}{5}=1.68\text{m/s}$，流速水头$\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$
$=\frac{1\times 1.68^2}{2\quad 9.8}=0.144\text{m}$。

以河底为基准面，对0—0、c—c断面的能量方程

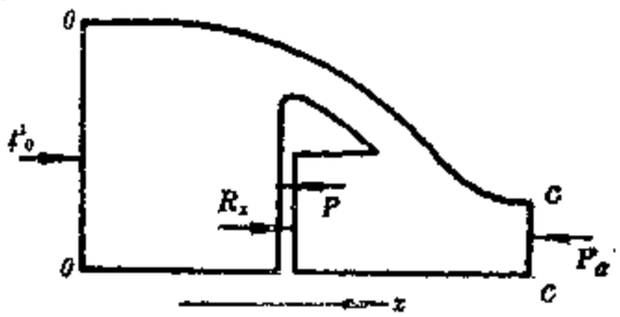
$$H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}=h_c+\frac{\alpha v_c^2}{2g}+0.15\frac{v_c^2}{2g}$$

$$5+0.144=h_c+1.15\frac{v_c^2}{2g}=h_c+1.15\frac{q^2}{2gh_c^2}$$

$$5.144=h_c+1.15\times\frac{8.4^2}{2\times9.8h_c^2}=h_c+\frac{4.14}{h_c^2}$$

试算求得 $h_c=1.0\text{m}$

取0-0、c-c断面间水体为控制体，建立坐标如解71图所示，列x方向的动量方程



解 71 图

$$P_0-P-P_c+R_x=-\rho q(\beta_c v_c-\beta_0 v_0)$$

令$\beta_c\approx\beta_0\approx1$

$$R_x=-P_0+P+P_c+\rho q(v_c-v_0)$$

$$=-\frac{\gamma\times5^2}{2}+\frac{\gamma(1+3)}{2}\times4+\frac{\gamma\times h_c^2}{2}+\rho q\left(\frac{q}{h_c}-v_0\right)$$

$$=9800\left(-\frac{25}{2}+\frac{6\times4}{2}+\frac{1^2}{2}\right)$$

$$+1000\times8.4\times\left(\frac{8.4}{1}-1.68\right)$$

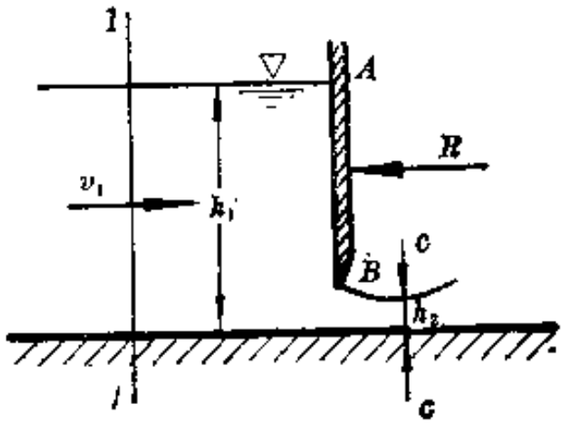
$$=56448\ \text{N}$$

又因 $$R_x=\frac{\gamma T^2}{2}$$

故 $$T=\left(\frac{2R_x}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2\times56448}{9800}\right)^{\frac{1}{2}}\approx3.39\text{m}$$

所以下游c-c断面水深$h_c=1.0\text{m}$，水舌下水深$T=3.39\text{m}$。

72 不可压缩无粘性的液体从平板闸门下缘下泄。液体的密度为ρ，其它量如图所示。为使闸门AB不致被液流冲走，试确定闸门AB上每单位宽度需施加的支撑力R与ρ、g（重力加速



题 72 图

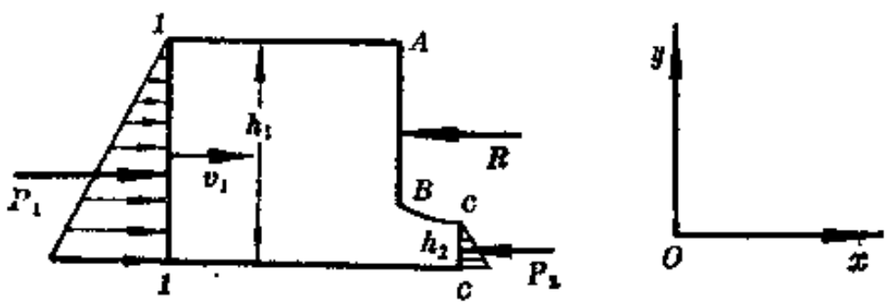
度）、h_1和h_2的关系式。

解：

取 1-1 及 AB、c-c 断面间水体为控制体，建立坐标如图所示。

沿 x 轴方向写动量方程

$$P_1-P_2-R=\rho q(\beta_2 v_2-\beta_1 v_1)$$



解 72 图

式中

$$P_1=\frac{1}{2}\gamma h_1^2$$

$$P_2=\frac{1}{2}\gamma h_2^2$$

令 $\beta_2\approx\beta_1\approx 1$

由连续性方程可知

$$v_2=\frac{h_1}{h_2}v_1$$

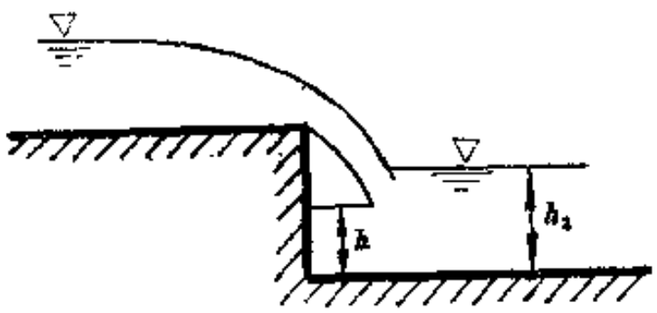
则 $$\frac{1}{2}\gamma(h_1^2-h_2^2)-R=\rho q\left(\frac{h_1}{h_2}v_1-v_1\right)$$

可求得支撑力

$$R=\frac{1}{2}\rho g(h_1^2-h_2^2)-\rho h_1^2 v_1^2\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\rho\left[g(h_1^2-h_2^2)-2h_1^2 v_1^2\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right)\right]$$

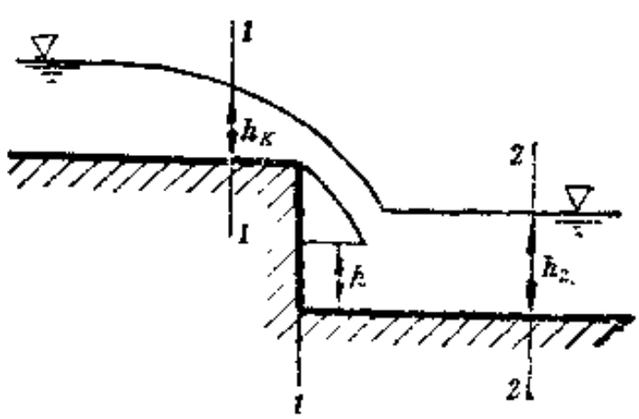
73 有一跌水，如图所示，水舌下面两端与大气相通，液面为大气压，今测得$q=9.8\mathrm{m}^2/\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}$，$h_2=3\mathrm{m}$，试求水舌下尾水的深度$h$为若干$m$？



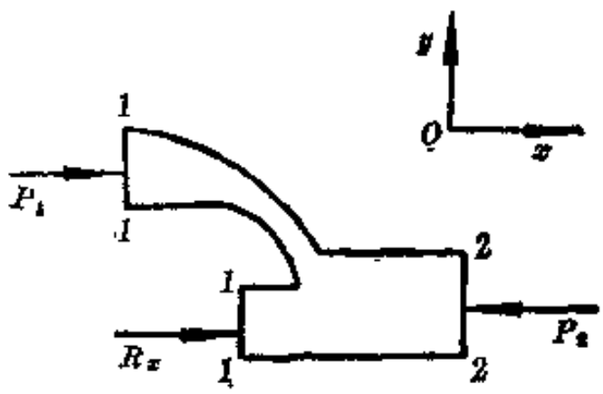
题 73 图

解：

在跌水上游不远处（断面1-1）产生临界水深，该断面上的压强分布可视为静水压强分布。今取断面*1-1*及*2-2*间单宽水体（见解73（a）图）为控制体，应用动量方程。因所取流段短，故边壁摩阻力甚小，可以忽略不计，以R_x表示单宽跌坎壁面对水



解 73 (a)图



解 73 (b)图

流的作用力，并令水流动量校正系数$\beta_1\approx\beta_2\approx 1$，则沿$x$方向动量方程可写为

$$R_x+P_1-P_2=\rho q(v_2-v_1) \qquad (1)$$

$\because$

$$R_x=\frac{1}{2}\rho g h^2$$

$$P_1=\frac{1}{2}\rho g h_K^2$$

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{9.8^2}{9.8}}=2.14\,\mathrm{m}$$

$$P_2=\frac{1}{2}\rho g h_2^2$$

$$v_1=\frac{q}{h_K} \qquad v_2=\frac{q}{h_2}$$

将上述诸关系式代入动量方程（1），可解得

$$h=\sqrt{(h_2^2-h_K^2)+\frac{2q^2}{g}\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_K}\right)}$$

$$=\sqrt{(3^2-2.14^2)+\frac{2\times 9.8^2}{9\ 8}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2.14}\right)}$$

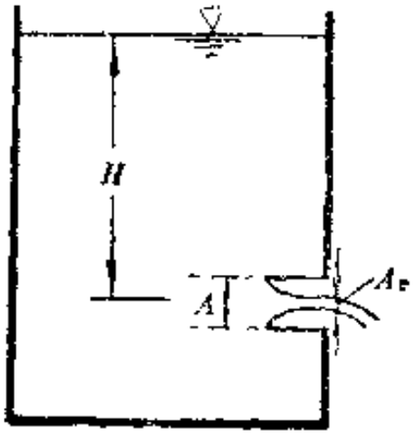
$$=1.34\ \mathrm{m}$$

74 水箱上装一圆柱形内管嘴，管嘴断面面积为A，经管嘴出流的水股收缩断面面积A_c，则收缩系数$\varepsilon=\frac{A_c}{A}$

（1）试证明$\varepsilon=0.5$；（提示：水箱水面很大，水位不

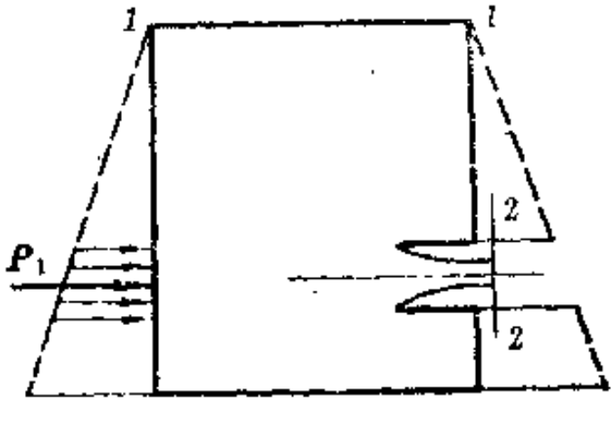
变，沿箱壁压强分布可按静水压强分布考虑，此外，不计水头损失）。

（2）射流对水箱的反作用力为多少？方向如何？



题 7-4图





解 7-4 图

解：

（1）证明 $\varepsilon=0.5$

水箱侧壁压强分布除P_1部分外是互相对称的。以整个水体为控制体，建立坐标系如图示，沿x方向取动量方程

$$P_1=\rho Q v_c=\rho A_c v_c^2 \qquad (1)$$

又：

$$P_1=A\gamma H \qquad (2)$$

$$\therefore \qquad A\gamma H-\rho A_c v_c^2 \qquad (3)$$

以通过孔口中心轴的水平面为基准面，写1-1、2-2断面能量方程

$$H=\frac{\alpha v_c^2}{2g}$$

令 $\alpha=1$

得
$$v_c=\sqrt{2gH} \qquad (4)$$

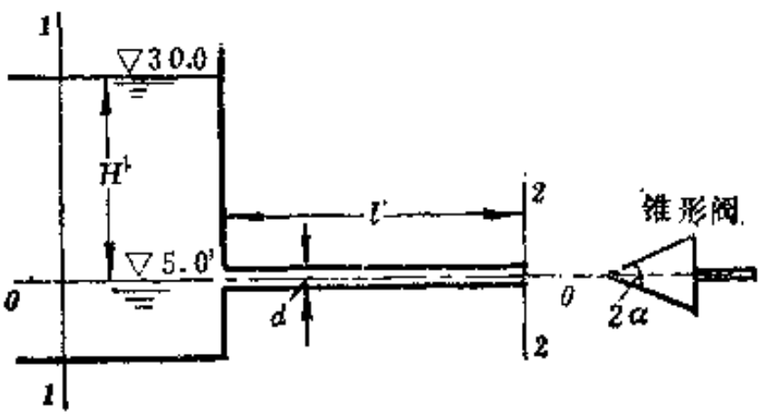
将（4）式代入（3）式得

$$A\gamma H=\rho A_c 2gH$$

化简得
$$\varepsilon=\frac{A_c}{A}=0.5$$

（2）射流对水箱反作用力F与P_1大小相等，方向相反。

75 一泄洪管道直径$d=4\text{m}$，长$l=2\text{km}$，出口中心高程为5m，上游恒定水位为30m，沿程阻力系数$\lambda=0.02$，局部水头损失不计。出口用锥形阀控制流量，锥形阀顶角$2\alpha=60^\circ$，如图所示，当锥形阀全开时，求水流对锥形阀的作用力（取$\alpha=\alpha'=1.0$）。



题 75 图

解：

（1）计算管中流量

设泄洪管出口轴心压强近似为大气压强，以0-0为基准面，写1-1、2-2断面的能量方程，得到

$$H=\frac{v^2}{2g}+h_f=\left(1+\lambda\frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$$

于是

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda\frac{l}{d}}}\sqrt{2gH}$$

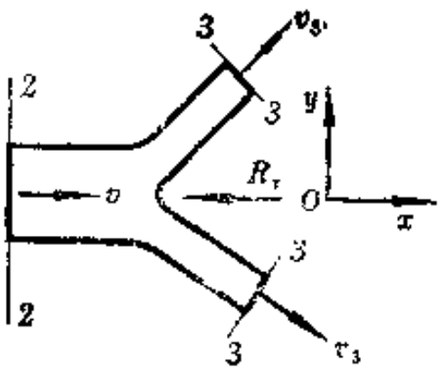
$$=\frac{1}{\sqrt{1+0.02\times\frac{2000}{4}}}\sqrt{2\times9.8\times(30-5)}$$

$$=6.67\ \text{m/s}$$

$$Q=\frac{\pi d^2}{4}v=\frac{3.14\times4^2}{4}\times6.67$$

$$=83.8\ \text{m}^3/\text{s}$$

（2）计算水流对锥形阀的作用力



解 75 图

环绕锥形阀取 3-3 断面，以经过管轴的水平面为基准面，写 2-2、3-3断面的能量方程，得

$$\frac{\alpha v^2}{2g}=\frac{\alpha_3 v_3^2}{2g}+h_w$$

$h_f\approx0$，2-2、3-3断面很近，沿程水头损失$h_f\approx0$，$\alpha_3\approx\alpha\approx1$，代入上式可得

$$v=v_3$$

取2-2、3-3断面间水体为控制体，应用动量定律。由于锥形阀对称，水流对 y 方向的作用力相互抵消，只有 x 方向的作用力，设 x 方向的反作用力为R_x，列 x 方向的动量方程，得

$$-R_x=\rho Q(\beta_3 v_3\cos\alpha-\beta_2 v)$$

式中 $\beta_3=\beta_2=1$，$v_3=v$

于是

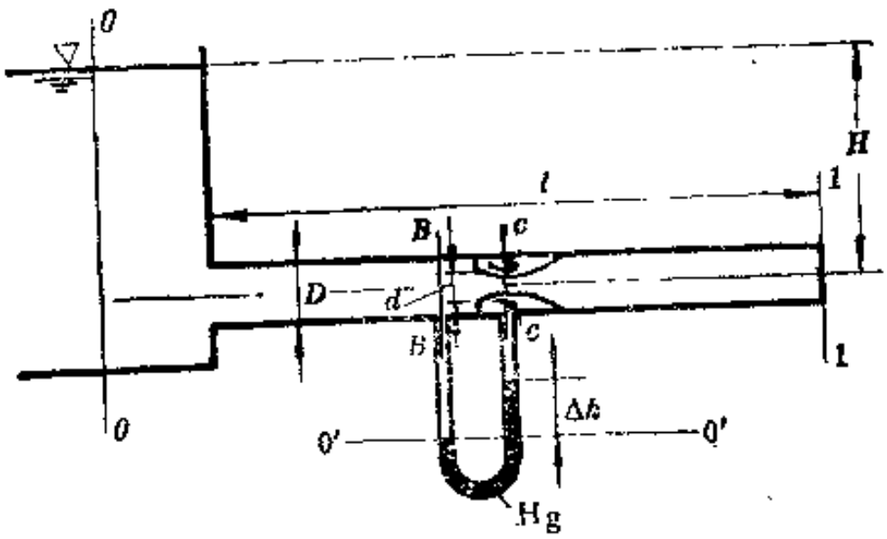
$$R_x=\rho Q v(1-\cos30^\circ)$$

$$=1\times83.8\times6.67\times(1-\cos30^\circ)$$

$$=74.9\ \text{kN}$$

水流对锥形阀的作用力$F_x=74.9\text{kN}$，方向与R_x相反。

76 在圆形断面的水平管道中装一孔板（中间开圆孔的板），孔板下方设一水银压差计，压差计下游测点设在孔板后收



题 7-6 图

缩断面c-c处，如图所示。已知管径$D=4\text{cm}$，管长$l=5\text{m}$，孔径$d=3\text{cm}$，管道沿程阻力系数$\lambda=0.03$，管道进口局部阻力系数$\zeta_1=0.5$，孔板局部阻力系数$\zeta_2=2.7$（对应于管道流速），收缩断面收缩系数$\varepsilon=0.6$，水银压差计读数$\Delta h=37\text{cm}$。当管道水头$H=5\text{m}$时，求水流作用于孔板上的力及其方向。（设收缩断面的动水压强按静水压强规律分布，应用动量方程时，忽略管壁阻力。取动能校正系数$\alpha=1$，动量校正系数$\beta=1$）

解：

首先计算通过管道的流量Q

以管轴中心线为基准面，写0-0、1-1断面的能量方程，得

$$H=\frac{\alpha v^2}{2g}+h_f+h_j$$

$$=\frac{\alpha v^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta}}\sqrt{2gH}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0.03\times\frac{5}{0.04}+0.5+2.7}}\sqrt{2\times9.80\times5}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7.95}}\times 9.9$$

$$=3.51\ \text{m/s}$$

$$Q=vA=3.51\times\frac{3.14}{4}\times 0.04^2=0.00441\ \text{m}^3/\text{s}$$

其次，计算水流作用于孔板上的力及方向

取B-B断面和c-c断面之间的水体为控制体，建立坐标如图所示，作用于该水体上沿x方向的力有P_B、P_c，及孔板对水的反作用力R_x。

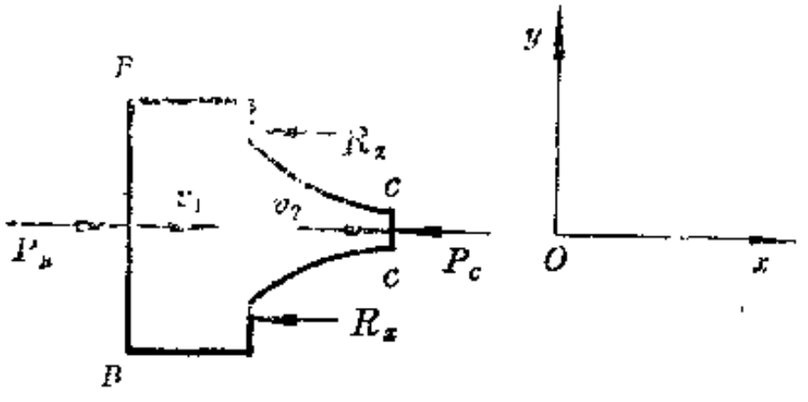
由孔板下方的水银差压计可求得

$$p_B-p_c=(\gamma_m-\gamma)\Delta h$$

$$=(133.28-9.8)\times 0.37$$

$$=45.69\ \text{kN/m}^2$$

并假设收缩断面的压强与漩涡区的压强相等，均为p_c，故沿x方向的动量方程为



解 76 图

$$p_BA-p_cA-R_x$$

$$=\frac{\gamma}{g}Q(\beta_2v_c-\beta_1v)$$

令$\beta_2=\beta_c=\beta=1$

$$v_c=\frac{Q}{A_c}=\frac{Q}{\varepsilon A_d}$$

$$=\frac{0.00441}{0.6\times\frac{1}{4}\times 3.14\times 0.03^2}=10.4\ \text{m/s}$$

$$A=\frac{\pi}{4}D^2=\frac{3.14}{4}\times 0.04^2=0.001256\ \text{m}^2$$

故 $$R_x=(p_B-p_C)A-\frac{\gamma}{g}Q(v_c-v)$$

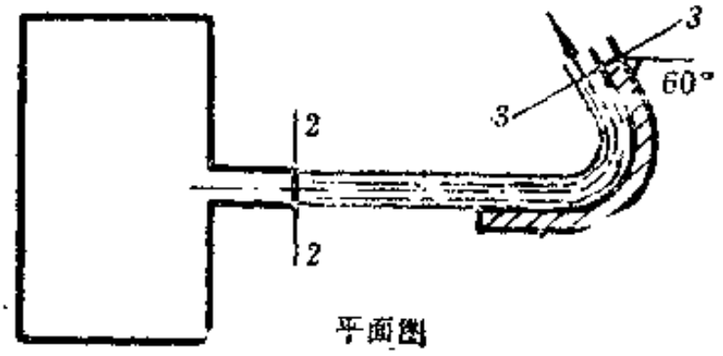
$$=45.69\times 0.001256-\frac{9.8}{9.80}\times 0.00441\times(10.4-3.51)$$

$$=0.0371-0.0304$$

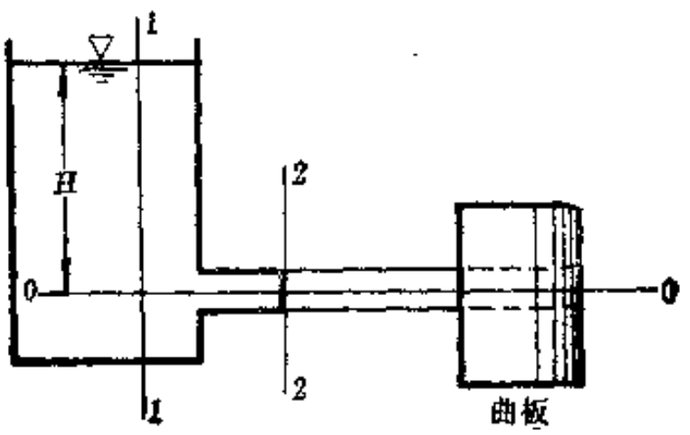
$$=0.027\ \text{kN}$$

水流作用于孔板上的力与R_x大小相等，方向相反。

77 一水箱下接一水平管嘴，从管嘴喷出的水流射到一曲板上如图所示。已知管嘴直径$d=5\text{cm}$，其局部阻力系数$\zeta=0.5$。当水流对曲面板的水平作用力为100kg时，求水箱中水头$H=?$（水箱平面积很大；不计空气及曲面板对水流的摩阻力。）



平面图



剖面图

题 77 图

解：

（1）计算管嘴流量

以过管轴0-0平面为基准面，写1-1、2-2断面的能量方程

$$H=\frac{\alpha v^2}{2g}+\zeta\frac{v^2}{2g}$$

令 $\alpha=1$

整理后得

$$v=\sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}}=\sqrt{\frac{2\times 9.8\times H}{1+0.5}}$$

$$=3.62\sqrt{H}\ \text{m/s}$$

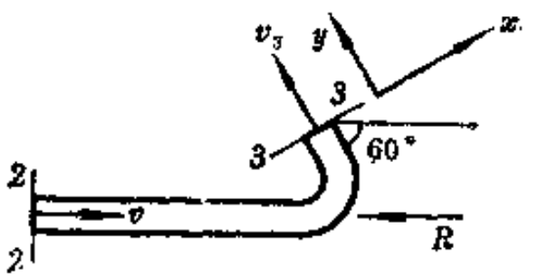
$$Q=Av=\frac{\pi d^2}{4}\cdot v=\frac{3.14\times 0.05^2}{4}\times 3.62\sqrt{H}$$

$$=0.0071\sqrt{H}\ \ \text{m}^3/\text{s}$$

（2）计算水箱水头H

取2-2、3-3断面间水体为控制体，建立坐标如解77图所示。

写 x 方向动量方程



解 77 图

$$-R\cos 30^\circ=\rho Q(0-\beta_2 v\cos 30^\circ)$$

$$R\cos 30^\circ=\rho Q\beta_2 v\cos 30^\circ$$

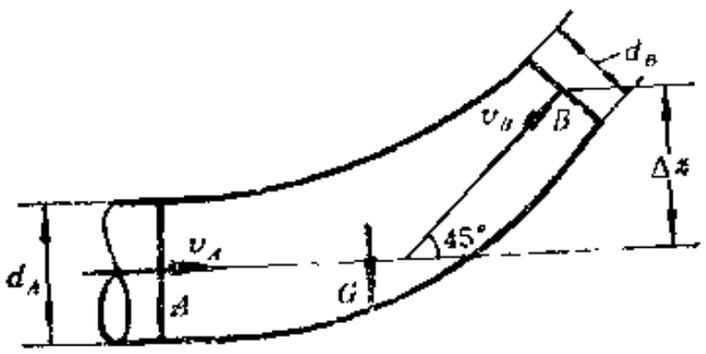
$$100\times 9.8\times\cos 30^\circ$$

$$=1000\times 0.0071\sqrt{H}\times 1\times 3.62\sqrt{H}\times\cos 30^\circ$$

$$H=38.13\ \text{m}$$

78 一水平管道，末端装一弯形喷嘴，转角 $\alpha=45^\circ$，喷嘴的进口直径$d_A=0.20$m，出口直径$d_B=0.10$m，出口断面平均流速$v_B=10$m/s，两断面中心A、B的高度差$\Delta z=0.2$m，通过喷嘴

的水头损失 $h_f=0.5\frac{v_B^2}{2g}$，喷嘴中水重 $G=20\text{kg}$，求水流作用于喷嘴上的作用力 F（包括大小和方向，方向用与水平方向的夹角 θ 表示）。



题 78 图

解：

根据已知条件，用动量方程求解。

取 A、B 两断面之间的水体为控制体，选坐标系如图所示。

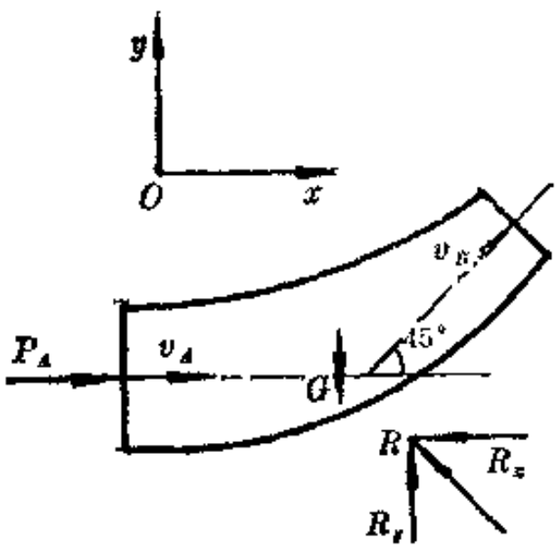
作用于该控制体上的力有：

作用于 A 断面的动水总压力 P_A；

设出口流入大气，故 B 断面的 $P_B=0$；

喷嘴水重 $G=20\text{kg}$；

管道反力 R。



解 78图

对A、B断面写能量方程，基准面选在A断面的中心线上，得

$$\frac{\alpha_A v_A^2}{2g}+\frac{p_A}{\gamma}=\Delta z+\frac{\alpha_B v_B^2}{2g}+0.5\frac{v_B^2}{2g}$$

$$\frac{p_A}{\gamma}=\Delta z+\frac{\alpha_B v_B^2}{2g}+0.5\frac{v_B^2}{2g}-\frac{\alpha_A v_A^2}{2g}$$

令$\alpha_B\approx\alpha_A\approx 1$

$$A_A=\frac{\pi}{4}d_A^2=\frac{3.14}{4}\times 0.2^2=0.031\ \text{m}^2$$

$$A_B=\frac{\pi}{4}d_B^2=\frac{3.14}{4}\times 0.1^2=0.0079\ \text{m}^2$$

$$Q=v_B A_B=10\times 0.0079=0.079\ \text{m}^3/\text{s}$$

又 $$v_B A_B=v_A A_A$$

∴ $$v_A=\frac{A_B v_B}{A_A}=\frac{0.079}{0.031}=2.55\ \text{m/s}$$

将以上数据代入能量方程，得

$$\frac{p_A}{\gamma}=0.2+(1+0.5)\frac{10^2}{2\times 9.81}-\frac{2.55^2}{2\times 9.81}=7.51\ \text{m}$$

$$p_A=7.51\times 9800=73598\ \text{N/m}^2$$

$$P_A=p_A\times A_A=73598\times 0.031=2281.5\ \text{N}$$

写x方向的动量方程

$$P_A-R_x=\frac{\gamma}{g}Q(v_{Bx}-v_A)$$

$$R_x=P_A-\frac{\gamma}{g}Q(v_B\cos 45^\circ-v_A)$$

$$=2281.5-\frac{9800}{9.8}\times 0.079\left(10\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2.55\right)$$

$$=1924.78\ \text{N}$$

写y方向的动量方程

$$-G+R_y=\frac{\gamma}{g}Q(v_{By}-0)$$

$$R_y=\frac{\gamma}{g}Q(v_B\sin 45^\circ)+G$$

$$=\frac{9800}{9.8}\times 0.079\times 10\times\frac{\sqrt{2}}{2}+20\times 9.8$$

$$=754.61 \quad \text{N}$$

合力 $$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{1924.78^2+754.61^2}$$

$$=2067.42 \quad \text{N}$$

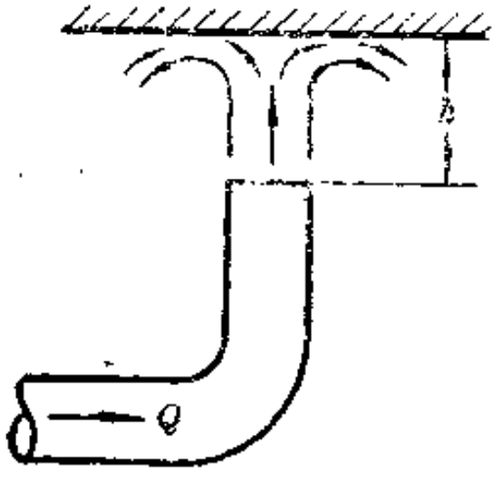
$$\approx 2.07 \quad \text{kN}$$

水流作用于喷嘴上的作用力与R大小相等，方向相反。

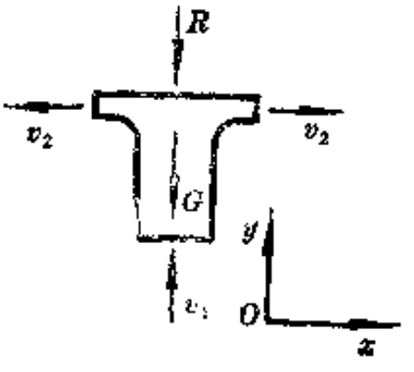
R与水平方向的夹角为

$$\text{tg}\theta=\frac{R_y}{R_x}=\frac{754.61}{1924.78}=0.392\ ,\quad \theta=21°24'$$

79 图示水平管中的流量$Q=1\text{l/s}$，管子末端接一90°弯管，使水垂直向上喷射，在喷射高度$h=50\text{cm}$处冲击一平板，管子的断面面积$A=2\text{cm}^2$，若损失忽略不计，求水流对平板的作用力。



题 79 图



解 79 图

解：

（1）计算水管的出口流速

$$v_1=\frac{Q}{A}=\frac{1000}{2}=500 \quad \text{cm/s}$$

（2）应用动量方程计算反力

取控制体及坐标系如解80图，重力G近似取高为h的圆柱水体重

$$G=\gamma hA=9800\times 0.5\times 2\times 10^{-4}$$

$$=0.98 \quad \text{N}$$

写 y 方向的动量方程

$$-R-G=\rho Q(0-\beta_1 v_1) \qquad \beta_1\approx 1$$

$$R=\rho Q v_1-G$$

$$=1000\times 0.001\times 5-0.98$$

$$=4.02 \quad \text{N}$$

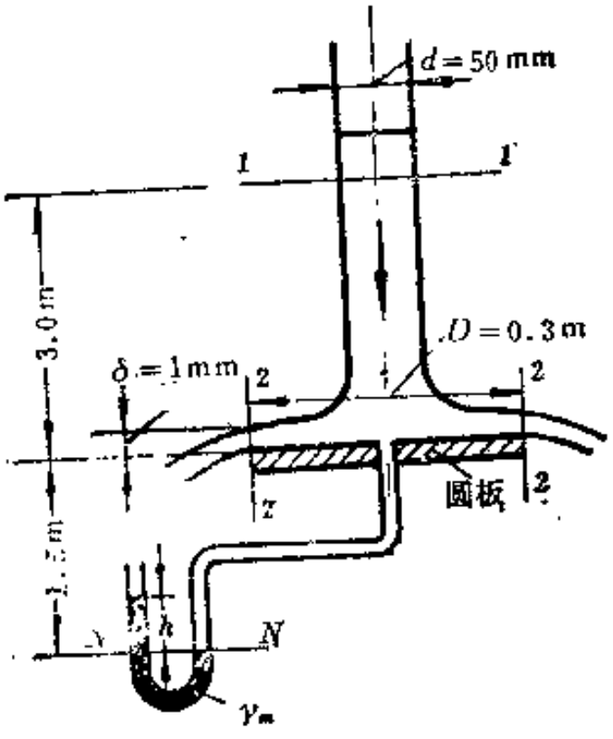
水流对平板的作用力F与R大小相等，方向相反。

80 如图所示，有一从直径为50mm的管中垂直向下流出的水柱，喷射到距离为3.0m处的一块直径为0.30m的固定圆板上，水流在圆板上对称地沿四周流跑，在周界上的水流厚度为1.0mm，在圆板中心引出一水银测压管，已知右面的水银面离圆板面的距离为1.5m，试求：

（1）流量为多少？

（2）左、右水银面的高差 h 为多少？

（注：可以忽略水流能量损失及射流水柱重量，并近似地假定圆板上中心点至四周的压强为线性变化）。



题 80图

解：

（1）计算流量Q

以侧板为基准面，写1-1断面及2-2断面的能量方程，得

$$3+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{0.001}{2}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

令$\alpha_1=\alpha_2=1$

$$v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d^2}=\frac{Q}{\frac{1}{4}\times 3.14\times 0.05^2}=509.55Q$$

$$v_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{Q}{2\pi R\cdot\delta}=\frac{Q}{2\times 3.14\times\frac{0.3}{2}\times 0.001}=1061.6Q$$

将v_1、v_2值代入能量方程，得

$$3+\frac{(509.55Q)^2}{2g}=0.0005+\frac{(1061.6Q)^2}{2g}$$

$$3-0.0005=\frac{Q^2}{2g}(1061.6^2-509.55^2)$$

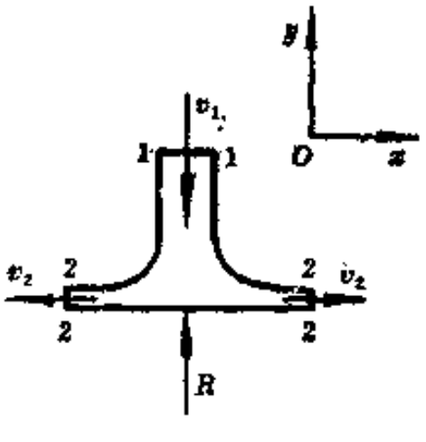
$$Q^2=\frac{2\times 9.80\times 2.9995}{867353.1}=6.78\times 10^{-6}$$

$$Q=8.23\times 10^{-3}\quad \mathrm{m^3/s}$$

（2）计算左、右测压管水银面的高差h

用动量方程计算喷嘴水流对平板的压力P。

取1-1、2-2断面之间的水体为控制体，设平板对射流水体的



解 80(a)图



解 80(b)图

反作用力为R，由于水流射入大气，P_1、P_2均为零。

取坐标系xOy如图所示。

沿y方向写动量方程

$$\Sigma F_y=\frac{\gamma}{g}Q(\beta_2 v_{2y}-\beta_1 v_{1y})$$

令$\beta_1=\beta_2=1$

$$R-0=\frac{\gamma}{g}Q(0-v_1)$$

$$R=\frac{\gamma}{g}Q^2\times 509.55$$

$$=\frac{9800}{9.80}\times(8.233\times10^{-3})^2\times509.55$$

$$=34.54 \quad \text{N}$$

水流对平板的压力P与R大小相等方向相反。

假定圆板上中心点至四周的压强为线性分布变化，故压强分布呈圆锥体形，其压力体体积V为

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot p_0$$

该压力体应等于平板所受喷射水流的冲力P

即 $$V=P$$

$$\frac{1}{3}\pi R^2 p_0=P$$

$$p_0=\frac{3P}{\pi R^2}=\frac{3\times34.54}{3.14\times0.15^2}$$

$$=1466.67 \quad \text{N/m}^2$$

题80图中取N-N为等压面，有

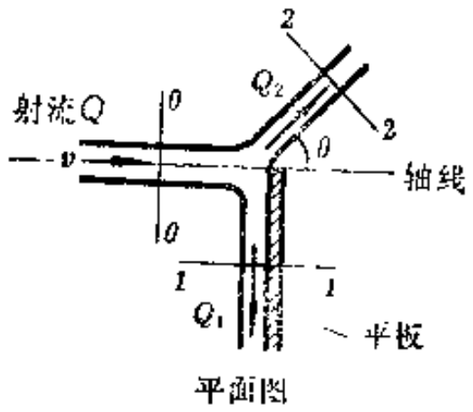
$$p_0+1.5\gamma=\gamma_m h$$

则水银面高差 $$h=\frac{p_0+1.5\gamma}{\gamma_m}$$

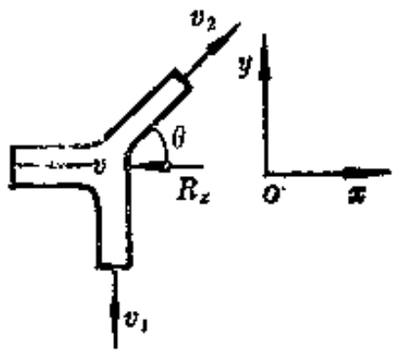
$$=\frac{1466.67+1.5\times9800}{133280}$$

$$=0.121 \quad \text{m}$$

81 将一平板放置在自由射流中，并垂直于射流的轴线，该平板截去射流流量的一部分Q_1，并将射流的剩余部分偏转角度θ，如图所示。已知：$v=30\text{m/s}$，$Q=0.036\text{m}^3/\text{s}$，$Q_1=0.012\ \text{m}^3/\text{s}$，若不计摩擦力与液体重量的影响，试求射流对平板的作用力，以及射流偏转角θ。（注：射流流动在同一水平面上。）



题 81图



解 81图

解：

分别写*0-0*，*1-1*断面和*0-0*，*2-2*断面的能量方程，得

$$v_1=v_2=v=30\quad \text{m/s}$$

$$Q_2=Q-Q_1$$

$$=0.036-0.012$$

$$=0.024\ \text{m}^3/\text{s}$$

取*0-0*、*1-1*、*2-2*断面间的水体为控制体，建立坐标如解81图所示。设平板对射流的反作用力为R_x。

列y方向的动量方程

$$\Sigma F_y=0=\rho Q_1 v_1-\rho Q_2 v_2\sin\theta$$

$$\sin\theta=\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{0.012}{0.024}=0.5$$

得射流偏转角$\theta=30^\circ$

列x方向的动量方程

$$\Sigma F_x=-R_x=\rho Q_2 v_2\cos\theta-\rho Q v$$

$$R_x=\rho v(Q-Q_2\cos 30^\circ)$$

$$=1000\times30\times(0.036-0.024\times\cos30^\circ)$$

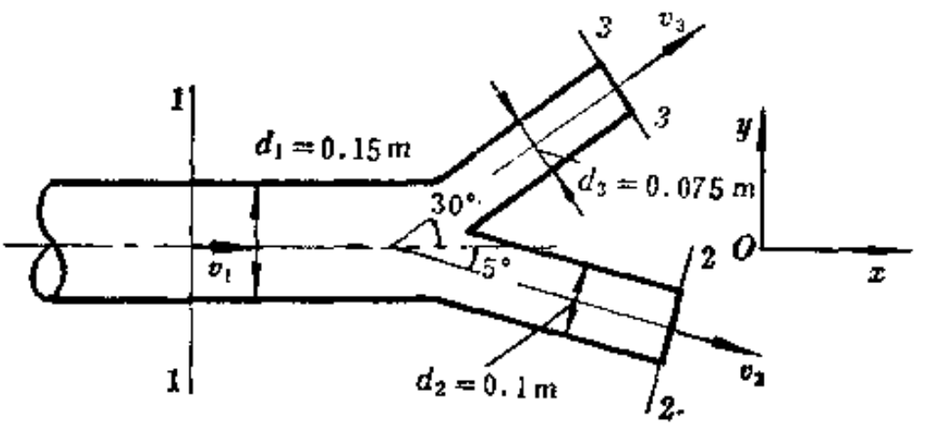
$$=456.5\quad \text{N}$$

射流对平板的作用力F与R_x大小相等，方向相反。

82 主管水流经过一非对称分岔管，由两短支管射出，管路布置如下图。出流速度v_2、v_3为10m/s，主管和两支管在同一水平面内，忽略阻力。

（1）求水体作用在管体上的x和y方向力的大小；

（2）管径为10cm支管应与x轴交成何角度时才使作用力的方向沿着主管轴线？



题 82图

解：

（1）计算水流作用在管体上的力

①计算主管流速v_1，流量Q_1和压强p_1

以管轴所在平面为基准面，写*1-1*，*2--2*断面的能量方程

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

令$\alpha_1=1$，$\alpha_2=1$

整理后得

$$p_1=\gamma\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$$

由题意 $v_2=v_3=10$ m/s

又∵ $$Q_2=v_2\times\frac{\pi d_2^2}{4}=10\times\frac{3.14\times0.1^2}{4}=0.0785\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_3=v_3\times\frac{\pi d_3}{4}=10\times\frac{3.14\times0.075^2}{4}=0.0442\text{m}^3/s$$

$$Q_1=Q_2+Q_3=0.0785+0.0442=0.1227\ \text{m}^3/s$$

$$\therefore\quad v_1=\frac{Q_1}{\frac{1}{4}\pi d_1^2}=\frac{0.1227}{\frac{1}{4}\times3.14\times0.15^2}=6.947\ \text{m/s}$$

则

$$p_1=\gamma\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$$

$$=9800\times\frac{10^2-6.947^2}{2\times9.8}$$

$$=25869.6\text{N/m}^2$$

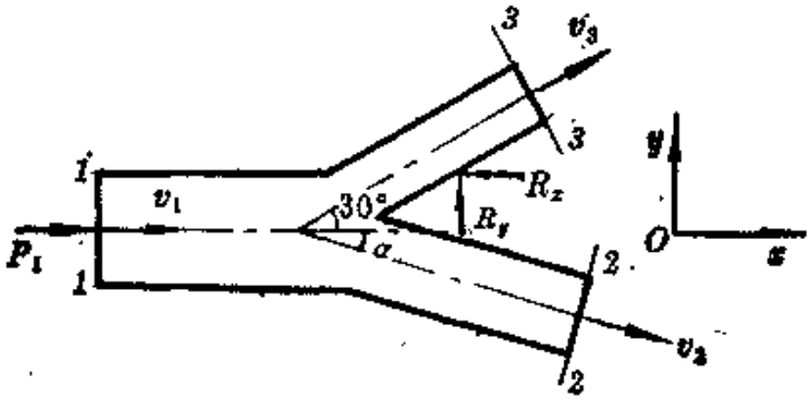
$$P_1=p_1\times\frac{\pi d_1^2}{4}$$

$$=25869.6\times\frac{3.14\times0.15^2}{4}$$

$$=456.92\text{N}$$

②计算作用力

取*1-1*，*2-2*，*3-3*断面间的水体为控制体，管壁对水的反作用力为R_x和R_y，建立坐标如图示。



解 82 图

写x方向的动量方程

$$P_1-R_x=\rho Q_2v_2\cos5°+\rho Q_3v_3\cos30°-\rho Q_1v_1$$

$$R_x=P_1-\rho(Q_2v_2\cos5°+Q_3v_3\cos30°-Q_1v_1)$$

$$=456.92-1000(0.0785\times10\times\cos5^\circ+0.0442\times10\times\cos30^\circ-0.1227\times6.947)$$

$$=144.52\text{N}$$

写 y 方向的动量方程

$$R_y=\rho Q_3v_3\sin30^\circ-\rho Q_2v_2\sin5^\circ$$

$$=1000\times0.0442\times10\times\sin30^\circ-1000\times0.0785\times10\times\sin5^\circ$$

$$=152.58\text{N}$$

液体对管体的作用力

$$F_x=R_x=144.52\text{N}$$

$$F_y=R_y=152.58\text{N}$$

F_x，F_y的方向与R_x、R_y相反。

（2）设管径为10cm支管与主管轴线成α角度，才使作用力的方向沿着主管轴线，此时y方向的力$R_y=0$

写 y 方向的动量方程

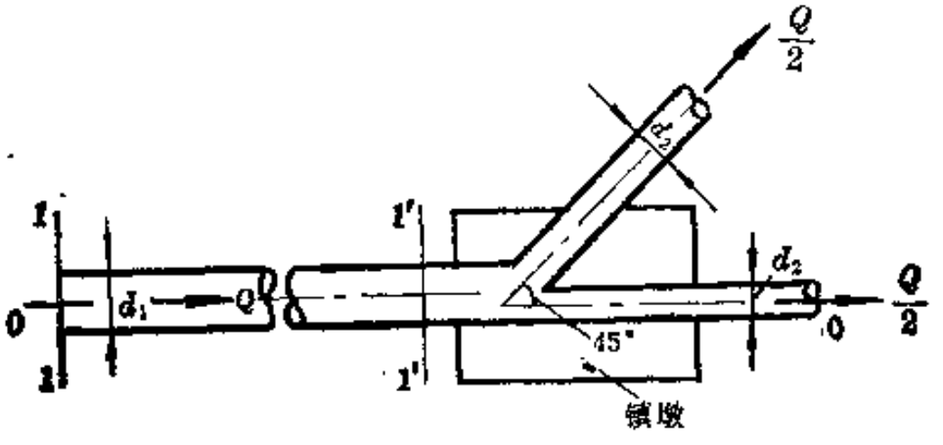
$$R_y=0=\rho Q_3v_3\sin30^\circ-\rho Q_2v_2\sin\alpha$$

整理后得

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{Q_3v_3\sin30^\circ}{Q_2v_2}\right)$$

$$=\arcsin\left(\frac{0.0442\times10\times\sin30^\circ}{0.0785\times10}\right)$$

$$=16^\circ20'59''$$



题 83 图

83 已知在同一水平面内的某分叉管路，总流量$Q=40m^3/s$，分叉前水平圆管直径$d_1=2m$，在分叉点前100m处的*1-1*断面处的压强$p_1=8kg/cm^2$，管道沿程阻力系数$\lambda=0.02$，分叉后两根圆管中的流量相同，均为$20m^3/s$，管径各为1.5m，若只计沿程水头损失而不计局部损失，求镇墩所受力的大小及方向。（分叉后一管与原管同方向，另一管的交叉角为45°）

解：

（1）计算镇墩前*1'-1'*断面的动水压力

如图所示，以管道中心线*0-0*为基准面，对*1-1*和*1'-1'*断面写能量方程式

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{p_1'}{\gamma}+\frac{\alpha_1' v_1'^2}{2g}+h_f$$

令 $\alpha_1=\alpha_1'=1$

因管径相等，则$v_1=v_1'$ 得

$$p_1'=\gamma\left(\frac{p_1}{\gamma}-h_f\right)$$

$$=p_1-\gamma\cdot\lambda\frac{l}{d}\cdot\frac{v_1^2}{2g}$$

$$=\frac{8\times9.8\times10^{-3}}{10^{-4}}-9.8\times0.02\times\frac{100}{2}\times\frac{\left(\frac{40}{\frac{3.14}{4}\times4}\right)^2}{2\times9.8}$$

$$=784.0-81.1=702.9kN/m^2$$

*1'-1'*断面动水总压力为

$$P_1'=p_1'A_1=p_1'\cdot\frac{\pi}{4}d_1^2$$

$$=702.9\times\frac{3.14}{4}\times2^2$$

$$=2207kN$$

求分叉管的动水压力。

以通过管轴中心线的水平面为基准面，对*1'-1'*和*2-2*断面写

能量方程式，得

$$\frac{p_1'}{\gamma}+\frac{v_1'^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_2=p_1'+\frac{\gamma}{2g}(v_1'^2-v_2^2)$$

$$=p_1'+\frac{\gamma}{2g}\left[\left(\frac{Q}{\frac{\pi}{4}d_1^2}\right)^2-\left(\frac{\frac{Q}{2}}{\frac{\pi}{4}d_2^2}\right)^2\right]$$

$$=702.9+\frac{9.8}{2\times9.8}\left[\left(\frac{40}{\frac{3.14}{4}\times2^2}\right)^2-\left(\frac{20}{\frac{3.14}{4}\times1.5^2}\right)^2\right]$$

$$=702.9+17=719.9\text{kN/m}^2$$

2-2断面的动水总压力为

$$P_2=p_2A_2=p_2\frac{\pi}{4}d_2^2$$

$$=719.9\times\frac{3.14}{4}\times1.5^2$$

$$=1271.5\text{kN}$$

因叉管位于同一水平面内，且不计局部水头损失，所以

$$p_3=p_2=719.9\text{kN/m}^2$$

$$P_3=p_3\cdot A_3=p_3\cdot\frac{\pi}{4}d_3^2$$

$$=719.9\times\frac{3.14}{4}\times1.5^2$$

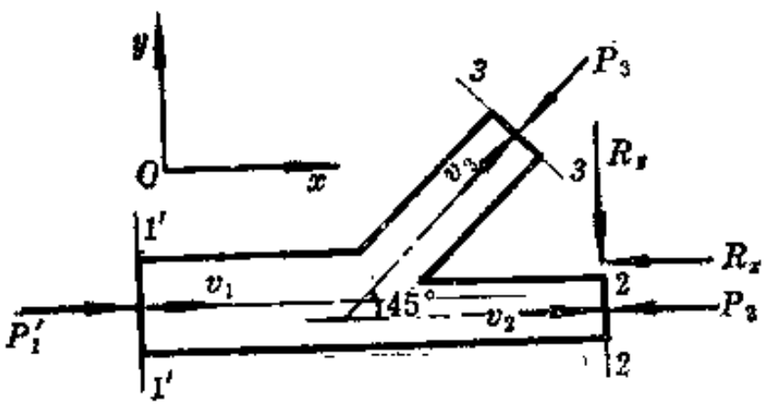
$$=1271.5\text{kN}$$

（2）计算镇墩受力的大小及方向

取分叉管1'-1'，2-2和3-3断面间的水体为控制体，坐标为xOy，如解83图所示。

写x方向的动量方程

$$-R_x+P_1'-P_2-P_3\cos45^\circ$$



解 83 图

$$= \rho \frac{Q}{2}(\beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 \cos 45^\circ) - \rho Q \beta_1 v_1'$$

令 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$

则

$$R_x = P_1' - P_2 - P_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - \rho \frac{Q}{2}\left(v_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_3\right) + \rho Q v_1'$$

$$= 2207 - 1271.5 - 1271.5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1 \times 40}{2}\left(11.3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 11.3\right) + 1 \times 40 \times 12.7$$

$$= 36.4 + 122.2 = 158.6\text{kN}$$

水流对镇墩的作用力P_x与R_x大小相等，方向相反。

写 y 方向的动量方程

$$-R_y - P_3 \sin 45^\circ = \frac{\rho Q}{2} \beta_3 v_3 \sin 45^\circ$$

$$R_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} P_3 - \frac{\rho Q}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} v_3$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1271.5 - \frac{1 \times 40}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 11.3$$

$$= -1058.9\text{kN}$$（R_y方向与假设方向相反）

水流对镇墩的作用力P_y与R_y大小相等，方向相反。

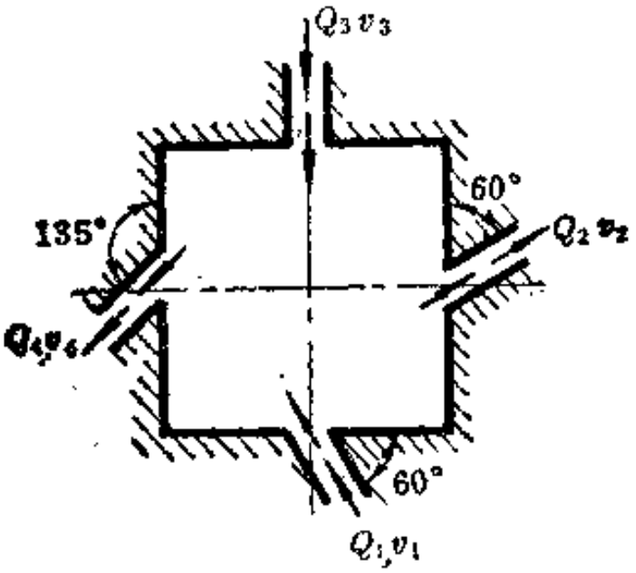
水流作用在镇墩上的合力

$$P=\sqrt{P_x^2+P_y^2}$$
$$=\sqrt{158.6^2+1058.9^2}$$
$$=1070.7\text{kN}$$

合力P与水平方向的夹角

$$\alpha=\text{arctg}\frac{P_y}{P_x}$$
$$=\text{arctg}\frac{1058.9}{158.6}$$
$$=81^\circ 29'$$

84 有一连接水箱的管道，输入管的流量和流速各为：$Q_1=30\text{l/s}$，$v_1=30\text{m/s}$，$Q_3=20\text{l/s}$，$v_3=45\text{m/s}$。输出管的流量和流速各为：$Q_2=22\text{l/s}$，$v_2=36\text{m/s}$，$Q_4=28\text{l/s}$，$v_4=18\text{m/s}$，管道和水箱的连接形式如图所示。设输入管和输出管的轴线都处在同一水平面上，所有输入管和输出管入流断面和出流断面上的相对压强都为零。求在水平面上固定水箱所需要的力为多少？并在图上确定它的方向。

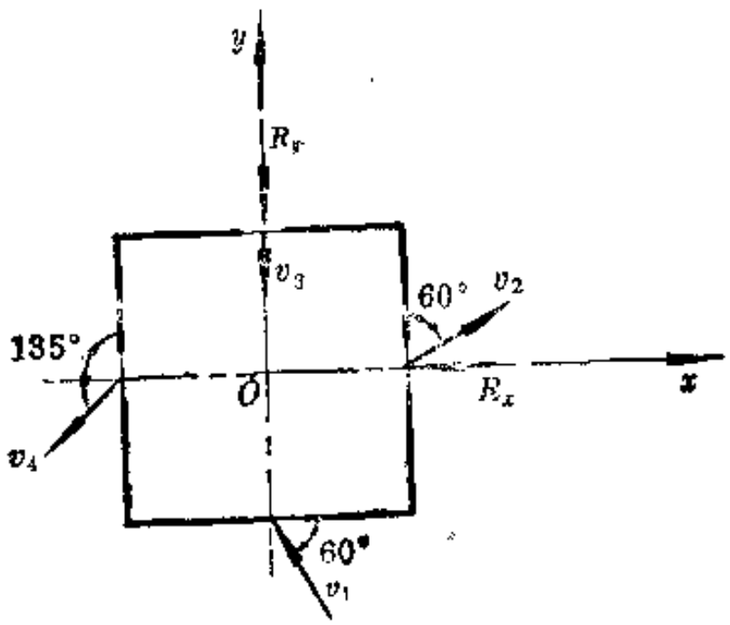


题 84 图

解：

应用动量方程求所需之力。

取控制体如图所示，坐标平面xOy取在输入、输出管的轴线



解 84 图

上的同一水平面上，因输入管、输出管的入流断面和出流断面上的相对压强都为零，故在水平面上的作用力只有联接水箱壁对水体的作用力R_x，R_y。

写x方向的动量方程

$$-R_x=\frac{\gamma}{g}[(\beta_2 v_2\cos30^\circ\cdot Q_2-\beta_4 v_4\cos45^\circ\cdot Q_4)$$
$$-(-\beta_1 v_1\cos60^\circ\cdot Q_1)]$$

令 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=1$

$$-R_x=\frac{9800}{9.8}[(36\times0.866\times0.022$$
$$-18\times0.707\times0.028)+30\times0.5\times0.03]$$
$$=1000(0.686-0.356+0.45)$$
$$=780\text{N}$$

故 $R_x=-780\text{N}$

写y方向的动量方程

$$-R_y=\frac{\gamma}{g}[(\beta_2 v_2\sin30^\circ\cdot Q_2-\beta_4 v_4\sin45^\circ\cdot Q_4)$$
$$-(\beta_1 v_1\sin60^\circ\cdot Q_1-\beta_3\cdot v_3\cdot Q_3)]$$

$$-R_y=\frac{9800}{9.8}[(36\times0.5\times0.022$$
$$-18\times0.707\times0.028)$$
$$-(30\times0.866\times0.03-45\times0.02)]$$
$$=1000(0.396-0.356-0.779+0.9)$$
$$=161\text{N}$$

故 $$R_y=-161\text{N}$$

R_x、R_y为负值表示水箱壁对水体的作用力与假设的方向相反，即应与坐标x、y的方向一致。

水箱壁对水体的作用力的合力大小为

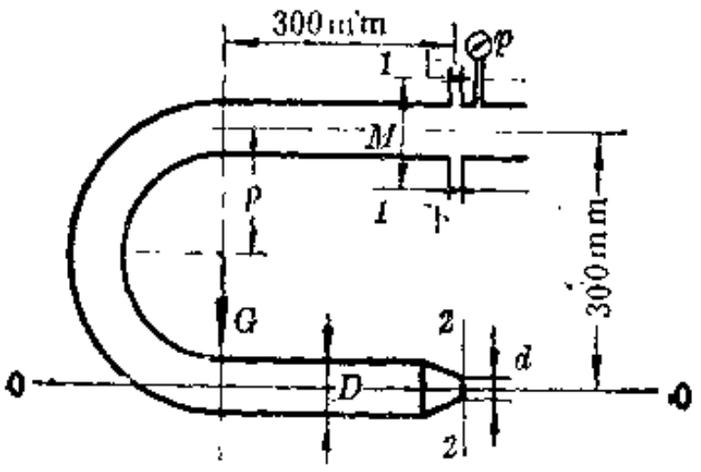
$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{780^2+161^2}$$
$$=796\text{N}$$

合力R与水平方向的夹角

$$\alpha=\text{arctg}\frac{R_y}{R_x}$$
$$=\text{arctg}\frac{161}{780}$$
$$=11^\circ39'36''$$

设固定水箱的力为F，则F的大小与R相等，方向相反。因z轴方向无动量变化，除重力外，水箱在z方向不受外力作用。

85 水流经过180°弯管自喷嘴流出，如管径$D=75\text{mm}$，



题 85 图

喷嘴直径 $d=25\text{mm}$，弯管前端法兰连接处压力表读数为 $p=60\ \text{kN/m}^2$，法兰共用上、下、前、后四个螺栓连接，上、下螺栓中心距 $M=150\text{mm}$，其余尺寸如图所示，弯管及其内的水共重 $G=100\text{N}$，求上、下螺栓各受多大拉力？

解：

以0-0为基准面，写1-1，2-2断面的能量方程

$$0.3+\frac{p}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w \qquad (1)$$

管道沿程阻力，可忽略不计，$h_w\approx h_j$，

因而

$$h_j=\zeta_1\frac{v_1^2}{2g}+\zeta_2\frac{v_2^2}{2g}$$

将喷嘴逐渐缩小的水头损失略去，则

$$h_j=\zeta_1\frac{v_1^2}{2g}$$

弯管局部阻力系数

$$\zeta_1=\left[0.131+0.1632\left(\frac{D}{\rho}\right)^{7/2}\right]\left(\frac{\theta^\circ}{90^\circ}\right)^{1/2}$$

$$=\left[0.131+0.1632\left(\frac{75}{150}\right)^{7/2}\right]\left(\frac{180^\circ}{90^\circ}\right)^{1/2}$$

$$=0.206$$

根据连续性方程

$$A_1v_1=A_2v_2$$

$$v_2=\frac{A_1}{A_2}v_1=\frac{D^2}{d^2}v_1$$

令 $\alpha_1=\alpha_2=1$ 代入（1）式，得

$$0.3+\frac{60000}{9800}=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}+\zeta_1\frac{v_1^2}{2g}$$

$$=\frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4-1+0.206\right]$$

$$6.422=\frac{v_1^2}{2\times 9.8}\left[\left(\frac{75}{25}\right)^4-0.794\right]$$

$$6.422=4.092v_1^2$$

$$v_1=1.253\text{m/s}$$

$$Q=A_1v_1=\frac{\pi D^2}{4}v_1$$

$$=\frac{3.14\times0.075^2}{4}\times1.253.$$

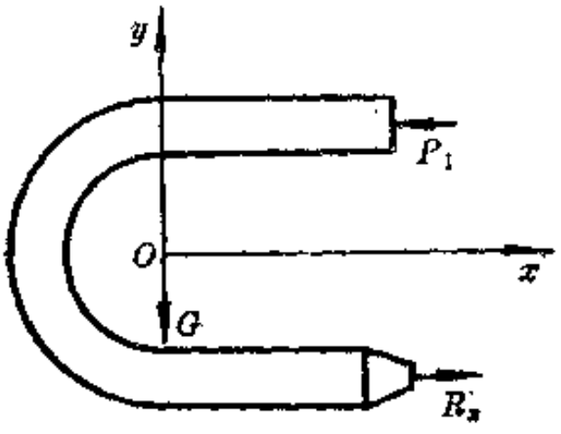
$$=0.00553\text{m}^3/\text{s}$$

$$v_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{4Q}{\pi d^2}$$

$$=\frac{4\times0.00553}{3.14\times0.025^2}$$

$$=11.27\text{m/s}$$

取 1-1，2-2 断面间的管道水体为控制体，如解 85(a) 图所示，写 x 方向的动量方程



解 85(a) 图

$$\Sigma F_x=R_x-P_1$$

$$=\rho Q[\beta_2v_2-\beta_1(-v_1)]$$

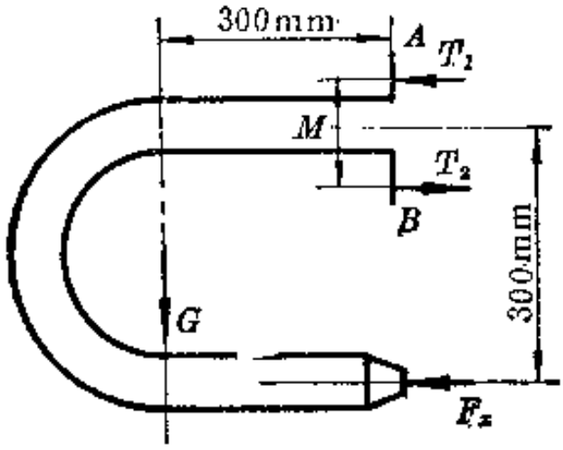
$$R_x=P_1+\rho Q(\beta_2v_2+\beta_1v_1)=p\cdot\frac{\pi D^2}{4}$$

$$+\rho Q(\beta_2v_2+\beta_1v_1)$$

$$=60000\times\frac{3.14}{4}\times0.075^2+1000$$

$$\times0.00553(1\times11.27+1\times1.25)$$

$$=334\text{N}$$



解 85(b) 图

作用力$F_x=R_x=334$N，方向与R_x相反

截断螺栓，设上螺栓受拉力为T_1，下螺栓受压力为T_2，如解85(b)图所示，对B点取矩，规定逆时针力矩为正，有

$$G\times 0.3+T_1M-F_x\left(0.3-\frac{M}{2}\right)=0$$

$$T_1=\frac{\left(0.3-\frac{M}{2}\right)F_x-0.3G}{M}$$

$$=\frac{\left(0.3-\frac{0.15}{2}\right)\times 334-0.3\times 100}{0.15}$$

$$=301\text{N}$$

对A点取矩

$$T_2M+G\times 0.3-F_x\left(0.3+\frac{M}{2}\right)=0.$$

$$T_2=\frac{\left(0.3+\frac{M}{2}\right)F_x-0.3G}{M}$$

$$=\frac{\left(0.3+\frac{0.15}{2}\right)\times 334-0.3\times 100}{0.15}$$

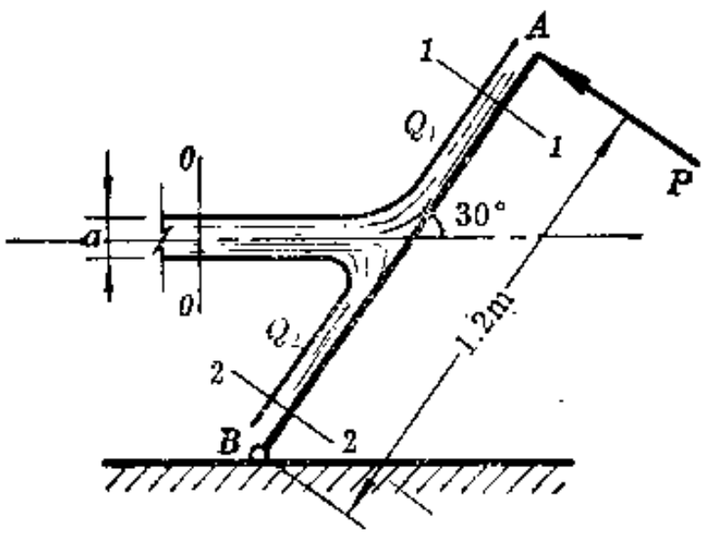
$$=635\text{N}$$

作用在上部螺栓上的拉力$T_1=301N$，作用在下部螺栓上的压力$T_2=635N$。

86 如图所示，有一高度a为50mm、速度v为18m/s的单宽射流水股，冲击在边长为1.2m的光滑平板AB上。射流沿平板表面分成两股。已知平板与水流方向的夹角为30°，平板B端为铰点。若忽略水流、空气和平板的摩阻，且流动在同一水平面上，求：

（1）流量分配Q_1和Q_2；

（2）设射流冲击点位于平板形心，若平板自重可忽略，A端应施加多大的垂直力P，才能保持平板的平衡。



题 86 图

解：

（1）取*0-0*，*1-1*，*2-2*断面间水体为控制体，如解86（a）图所示取x、y直角坐标。设平板作用在水股上的力为R。

沿y轴方向写动量方程

$$[\rho Q_1\beta_1 v_1-\rho Q_2\beta_2 v_2]-\rho Q\beta v\cos30°=0$$

令 $$\beta_1=\beta_2=\beta=1$$

∵ $v=v_1=v_2$代入上式得

$$Q\cos30°=Q_1-Q_2 \qquad (1)$$

由连续性方程式有

$$Q=Q_1+Q_2 \qquad (2)$$

（1）式加（3）式得

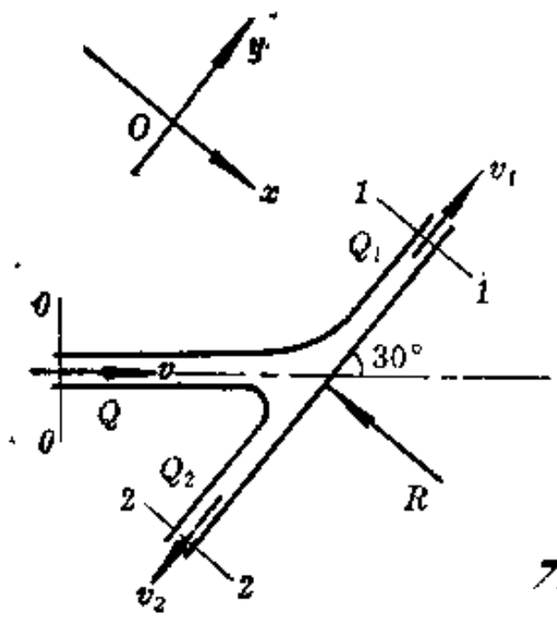
$$2Q_1 = Q(1+\cos 30°)$$

$$Q_1 = \frac{Q(1+\cos 30°)}{2}$$

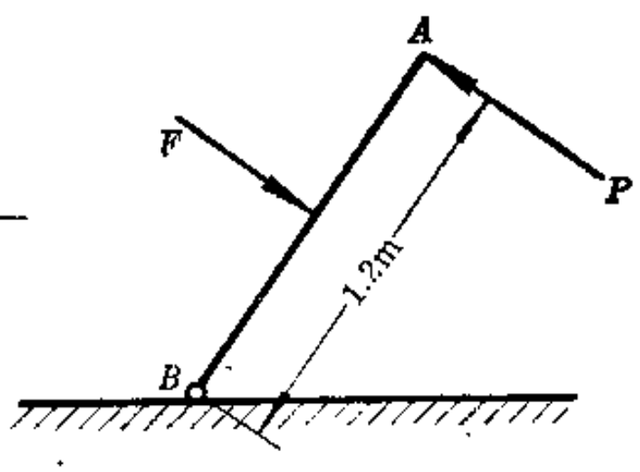
$$= 0.933Q$$

$$Q_2 = Q - Q_1$$

$$= Q - 0.933Q = 0.067Q$$



解 86(a) 图



解 86(b) 图

（2）沿x轴方向写动量方程

$$-R = -\rho Q v \sin 30°$$

$$R = (1000 \times 0.05 \times 18 \cdot 1) \times 18 \times \frac{1}{2}$$

$$= 8100\text{N}$$

水对平板在x方向的冲击力F为8100N，方向与R的方向相反。

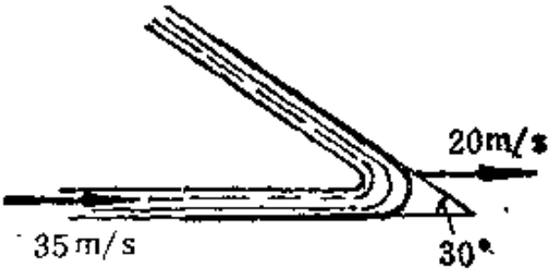
现对B点取矩

$$\Sigma M_B = 0$$

$$F \times 0.6 = P \times 1.2$$

$$P = \frac{8100 \times 0.6}{1.2} = 4050\text{N}$$

87　有一股喷射水流直径为75mm，速度为35m/s，冲击在固定不动的叶片上，叶片水平放置，叶片的转角是150°，假设忽略摩擦，试计算水对叶片的作用力？若叶片以20m/s的速度沿水平冲击同方向向右作直线运动，水对叶片的作用力又为多少？



题 87 图

解：

（1）当叶片固定不动时：

取1-1，2-2断面间水体为控制体，建立坐标如解87(a)图所示，令叶片对水体的反作用力为R。

沿x方向写动量方程

$$\because \quad P_1=P_2=0$$

$$\therefore \quad -R_x=\rho Q(-\beta_2 v_2\cos 30^\circ-\beta_1 v_1)$$

令

$$\beta_1=\beta_2=1$$

式中

$$Q=v_1\cdot\frac{\pi}{4}d^2$$

$$=35\cdot\frac{3.14}{4}\times 0.075^2$$

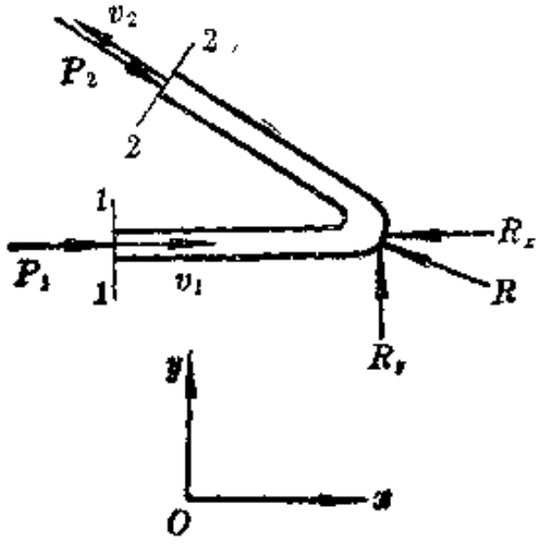
$$=0.1545\text{m}^3/\text{s}$$

$$v_2\cdot\cos 30^\circ=35\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30.31\text{m/s}$$

$$R_x=1\times 0.1545(30.31+35)$$

$$=10.1\text{kN}$$

沿y方向写动量方程

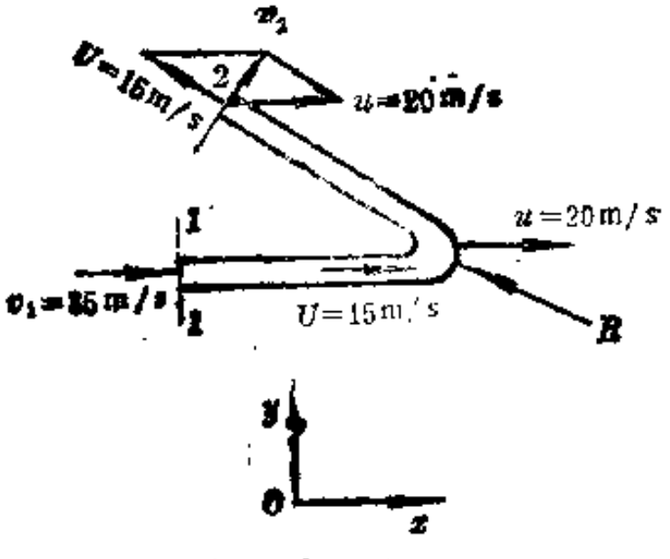


解 87(a) 图

$$R_y=\rho Q(\beta_2 v_{2y}-\beta_1 v_{1y})$$
$$=\rho Q(v_2\sin 30-0)$$
$$=2.7\text{kN}$$
$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$$
$$=\sqrt{10.1^2+2.7^2}=10.45\text{kN}$$

水对叶片的作用力大小与R相等、方向相反。

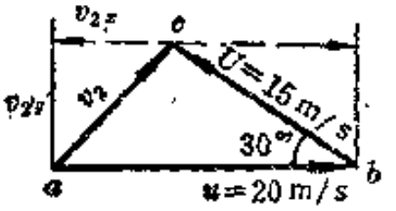
（2）当叶片以20m/s的速变向右移动时，产生了一个牵连速度，以u表示，$u=20\text{m/s}$，水对叶片的相对速度$U=v_1-u=35-20=15\text{m/s}$。喷射水流离开叶片时，2-2断面的绝对速度$v_2=u+U$（如解87(b)图所示）



解 87(b) 图

由理论力学得知，力多边形$\overline{ac}=v_2$，如图(c)所示。因此

$$v_{2x}=20-(15\times\cos30^\circ)$$
$$=20-13=7\text{m/s}$$
$$v_{2y}=15\times\sin30^\circ$$
$$=15\times\frac{1}{2}=7.5\text{m/s}$$



解 87(c) 图

对于移动的叶片，在单位时间内冲击到叶片上的质量与叶片固定时具有的质量不同，因为此时水对叶片的速度为相对速度，故质量

$$m=\rho\cdot A\cdot U=\rho A(v_1-u)$$

沿x方向写动量方程

$$-R_x=\rho Q(\beta_2 v_{2x}-\beta_1 v_{1x})$$

令

$$\beta_2=\beta_1=1$$
$$-R_x=\rho A(v_1-u)(v_{2x}-v_{1x})$$
$$-R_x=1\times\frac{3.14}{4}\times0.075^2\times15(7-35)$$
$$=-1.85\text{kN}$$
$$R_x=1.85\text{kN}$$

沿y方向写动量方程

$$R_y=\rho Q(v_{2y}-v_{1y})$$
$$=\rho A(v_1-u)(v_{2y}-0)$$
$$=1\times\frac{3.14}{4}\times0.075^2\times15\times7.5$$
$$=0.5\text{kN}$$
$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$$
$$=\sqrt{1.85^2+0.5^2}$$
$$=1.92\text{kN}$$

故水流对叶片的作用力大小与R相等，方向相反。

若动坐标取在以20m/s的速度向右移动的叶片上，则控制体

进、出口断面的平均流速均为相对流速（v_1-u），应用动量方程可得出同样的结果。

沿x方向写动量方程

$$-R_x=\rho Q[-(v_1-u)\cos30^\circ-(v_1-u)]$$

$$R_x=\rho A(v_1-u)^2(\cos30^\circ+1)$$

$$=1\times\frac{3.14}{4}\times0.075^2\times15^2(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)$$

$$=1.85\text{kN}$$

沿y方向写动量方程

$$R_y=\rho Q[(v_1-u)\sin30^\circ]$$

$$=\rho A(v_1-u)^2\cdot\sin30^\circ$$

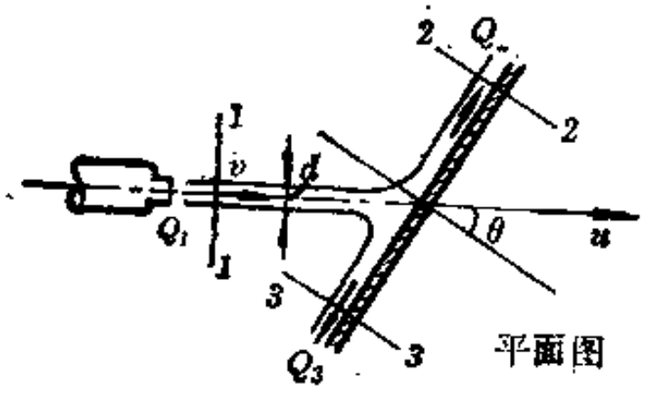
$$=1\times\frac{3.14}{4}\times0.075^2\times15^2\times0.5$$

$$=0.5\text{kN}$$

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{1.85^2+0.5^2}$$

$$=1.92\text{kN}$$

88 水从直径$d=25$mm的固定管嘴中射出，撞击一平板，射流与平板垂线夹角$\theta=30^\circ$，射流流速$v_1=5$m/s，平板与水流的摩擦忽略不计，计算(1)平板静止时，水流作用在平板的垂直力大小，同时计算平板静止时，Q_2与Q_3的比值。(2)平板与水流方向相同以$u=2$m/s运动时，水流作用在平板上的垂直力的大小。



平面图

第88题

解：

（Ⅰ）平板静止时：

①计算水流对平板的垂直作用力

取*1-1*、*2-2*，*3-3*断面之间的水体为控制体，写*y*方向的动量方程

$$R_y=\rho Q_1\beta v_1\cos30^\circ$$

$$=\rho\beta\frac{\pi d^2}{4}v_1^2\cos30^\circ$$

$$=1000\times 1\times\frac{3.14\times0.025^2}{4}\times 5^2\cos30^\circ$$

$$=10.62\text{kN}$$

水流对平板的垂直作用力$F=10.62\text{N}$，方向与R_y相反。

②计算Q_3和Q_2的关系

以过射流轴线的水平面作基准面，写*1-1*，*2-2*断面的能量方程

$$\frac{\alpha v_1^2}{2g}=\frac{\alpha v_2^2}{2g}$$

可得 $$v_1=v_2$$

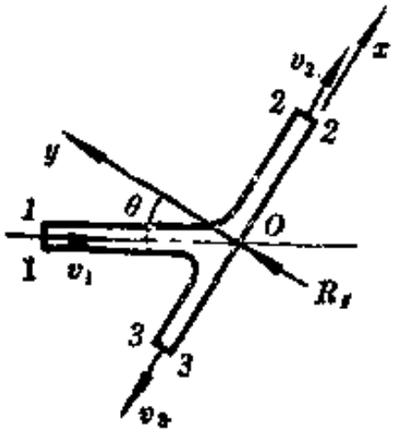
同理可得 $$v_1=v_3$$

写*x*方向的动量方程

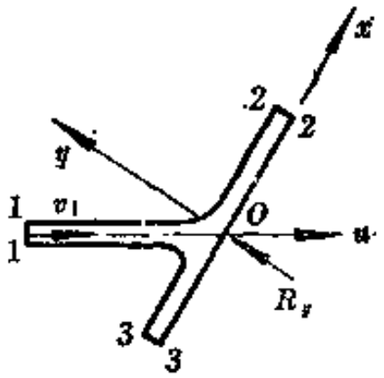
$$0=\rho Q_2\beta_2 v_2+\rho Q_3\beta_3(-v_3)-\rho Q_1\beta v_1\sin30^\circ$$

式中

$$Q_1=Q_2+Q_3$$



解88（a）图



解88（b）图

令　$\beta_2=\beta_3=\beta=1$ 代入整理得

$$0=Q_2-Q_3-\frac{1}{2}Q_2-\frac{1}{2}Q_3$$

$$\therefore\quad Q_2=3Q_3$$

（2）平板与水流方向一致运动时，计算水流对平板的作用力

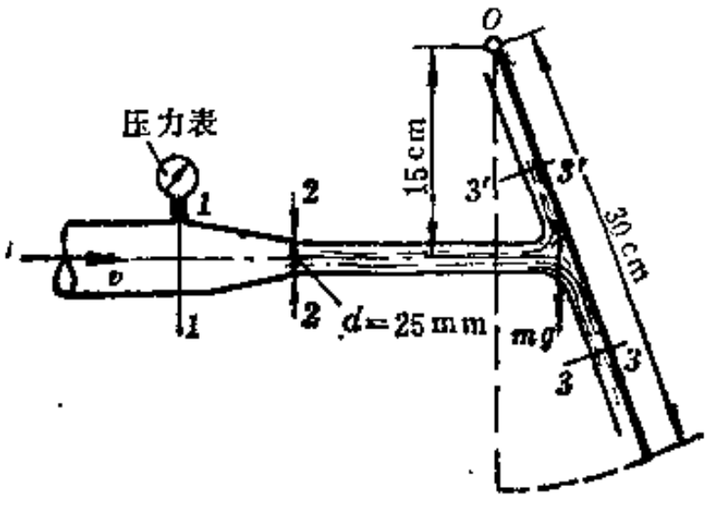
当平板以速度$u=2\text{m/s}$沿水流方向运动时，单位时间水流冲击在平板上的质量是$\rho A(v_1-u)$，对解88（b）图示控制体的相对运动速变是v_1-u。

写y方向的动量方程

$$\begin{aligned}R_y&=\rho Q_1\beta(v_1-u)\cos30^\circ\\&=\rho\beta\frac{\pi d^2}{4}(v_1-u)^2\cos30^\circ\\&=1000\times1\times\frac{3.14\times0.025^2}{4}\\&\times(5-2)^2\cos30^\circ\\&=3.82\text{N}\end{aligned}$$

当平板运动时，水流作用在平板上的垂直作用力是3.82N，作用方向与R_y相反。

89 射流自喷嘴中水平射出，冲击在一块与射流方向垂直的正方形平板上，平板为等厚度，边长为30cm，平板上缘悬挂在铰上（绞摩擦力不计），当射流冲击到平板中心后，平板偏转30°，



题89图

以后平板不再偏转，设喷嘴直径$d=25\text{mm}$，喷嘴前渐变流起点处压力表读数为1.96N/cm^2，设断面平均流速$v=2.76\text{m/s}$，喷嘴的局部水头损失系数$\zeta=0.3$，求平板的质量为多少？

解：

以管轴线的水平面为基准面，列1-1及出口断面2-2的能量方程

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+\rho\frac{v_2^2}{2g}$$

令 $\alpha_1=\alpha_2=1$

由压力表读数得知

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{1.96\times10^4}{9800}=2\text{m水柱高}$$

于是 $$2+\frac{2.76^2}{19.6}=(1+0.3)\frac{v_2^2}{19.6}$$

$$v_2=6.\text{m/s}$$

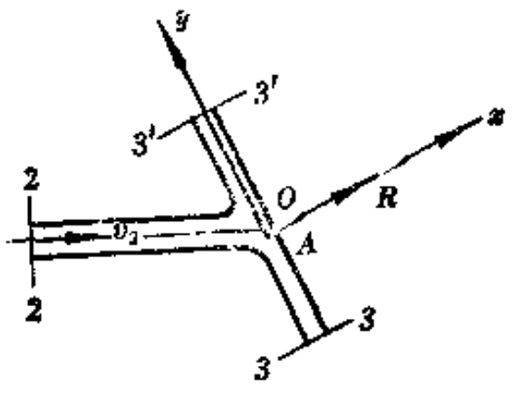
$$Q=A_2v_2$$

$$=\frac{3.14}{4}\times0.025^2\times6$$

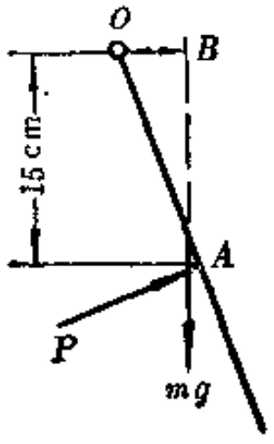
$$=2.94\times10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$$

取2-2及3-3，3′-3′断面间水体为控制体，取x，y坐标如89(a)图所示，设平板对水体的反作用力为R，

写x轴方向的动量方程



解89(a)图



解89(b)图

$$-R=-\rho Q v_2\cos30^\circ$$

$$-R=-1000\times2.94\times10^{-3}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

得 $$R=15.27\text{N}$$

射流对平板的作用力P大小与R相等，方向相反。

对O点取矩，如89（ b ）图所示

$$\sum M_o=0$$

$$P\cdot OA=m\cdot g\cdot OB$$

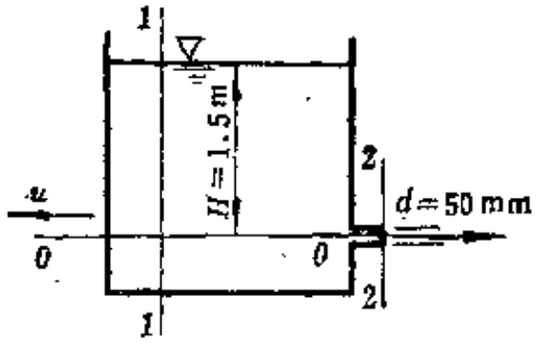
式中 $$OA=\frac{0.15}{\cos30^\circ}=0.173\text{m}$$

$$OB=0.15\cdot\sin30^\circ=0.075\text{m}$$

∴ $$15.2\times0.173=m\times9.8\times0.075$$

$$m=3.59\text{kg}$$

90 一容器侧壁装一喷管，直径$d=50\text{mm}$，喷管中心距水面高1.5m，局部阻力系数$\zeta=0.224$，计算当容器中水位恒定不变时，下列两种情况下喷射水流对容器的作用力：（ 1 ）容器静止时；（ 2 ）容器与射流方向相反以匀速度$u=1.2\text{m/s}$运动时，并计算后一种情况下反作用力所作的功率。



题90图

解：

（ 1 ）容器静止时

①计算喷射流速

以0-0为基准面，写1-1，2-2断面的能量方程

$$H=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+\zeta\frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2=\sqrt{\frac{2gH}{\alpha_2+\zeta}}=\sqrt{\frac{2\times9.8\times1.5}{1+0.224}}$$
$$=4.9\text{m/s}$$

②计算水流对水箱的作用力F_w

取2-2断面和容器壁面所围成的水体为控制体，如图所示。

写x方向的动量方程，令R_x为整个器壁对水体的反作用力

$$R_x=\rho Q(\beta_2 v_2-0)$$

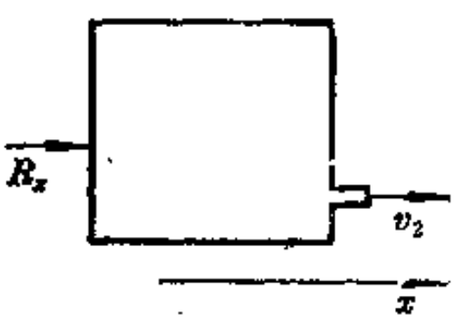
令 $\beta_2=1$

$$R_x=\rho\cdot\frac{\pi}{4}d^2\cdot v^2$$

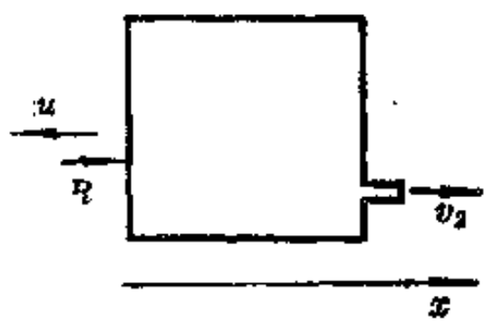
$$=1000\times\frac{3.14}{4}\times0.05^2\times4.9^2$$

$$=47.12\text{N}$$

水流对容器的作用力$F_x=47.12\text{N}$，方向与R_x相反。



解90(a)图



解 90(b) 图

（2）计算容器运动时水流作用力F

容器以速度$u=1.2\text{m/s}$与射流反向运动，容器内液体的速度是$-u$，射流的绝对速度是v_2-u，令$\beta_1=\beta_2=1$，取控制体如解90(b)图所示，写x方向的动量方程

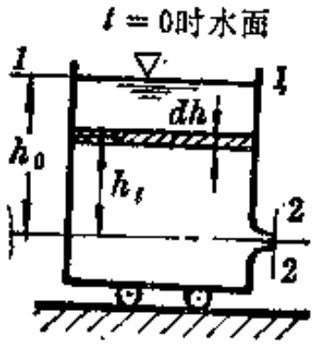
$$R=\rho Q[\beta_2(v_2-u)-\beta_1(-u)]$$
$$=\rho Q v_2$$

射流对容器的作用力与容器静止时相同，$F=47.12\text{N}$

（3）作用力F作的功率W

$$W = F \cdot u = 47.12 \times 1.2$$
$$= 56.54\text{W}$$

91 有一圆柱形大水箱置于滚轮上，如题91图所示，放水孔靠近水箱底部，水箱中水位距孔口中心线高度 $h_0 = 4\text{m}$，水箱直径 $D = 2\text{m}$，管嘴直径 $d = 0.1\text{m}$，当 $t = 0$ 时，将管嘴上的快速阀门全开，水箱保持静止，试确定当 $t = 50\text{s}$ 时下列各量的瞬时值：



题 91 图

（1）管嘴中心线以上的水深 h 为多少？

（2）管嘴出流量 Q 为多少？（不计损失）

（3）为保持水箱静止所需要的力为多少？

解：

（1）计算 $t = 50$ 秒时管嘴中心线以上的水深 h

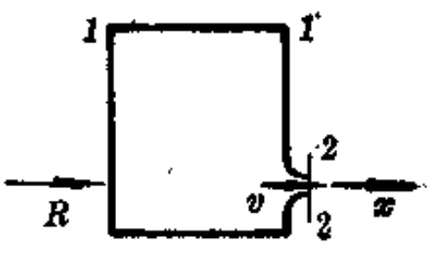
当管嘴上的快速阀门全开后，孔口为变水头出流。

令任意时刻 t 所对应的孔口中心线以上的水头为 h_t，在 dt 时刻后水箱内水位下降 dh，则 dt 时段内水体体积的变化 $= -dh \cdot A_1$，A_1 为水箱的横断面面积。在同一时段内从孔口流出的水体体积 $= Q \cdot dt$。

根据连续性原理，在 dt 时段内，从孔口流出的水体体积与容器中水体体积变化量相等，即

$$-dh \cdot A_1 = Q dt$$

$$\frac{dh}{dt} \cdot A_1 = -Q$$



解91图

又管嘴出流量 $Q = vA$

式中 A 为管嘴横断面面积

v 为管嘴出流流速

若不计水头损失，管嘴流速 $v = \sqrt{2gh_t}$

故上式可写成

$$\frac{dh}{dt}A_1 = -A\sqrt{2g\cdot h_t}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h_t}} = -\frac{A}{A_1}\sqrt{2g}dt$$

两端积分

$$\int_{h_0}^{h}\frac{dh}{\sqrt{h_t}} = \int_0^t \frac{A}{A_1}\sqrt{2g}dt$$

$$2(h^{1/2}-h_0^{1/2}) = -\frac{A}{A_1}\sqrt{2g}t$$

$$h = \left(h_0^{1/2}-\frac{A}{A_1}\frac{\sqrt{2g}}{2}t\right)^2$$

$$= \left[h_0^{1/2}-\left(\frac{d}{D}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2g}}{2}t\right]^2$$

$$= \left[4^{1/2}-\left(\frac{0.1}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{2\times 9.8}}{2}\times 50\right]^2$$

$$= 2.969\text{M}$$

（2）求管嘴的出流量

$$Q = A\cdot v$$

$$= \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh_t}$$

$$= \frac{3.14}{4}\times 0.1^2\sqrt{2\times 9.8\times 2.969}$$

$$= 0.0599\text{m}^3/\text{s}$$

（3）求保持水箱稳定所需要的力

取1-1，2-2断面之间的水体为控制体，令整个水箱壁对水体的反作用力为R，因水箱横截面面积比管嘴横截面面积大得多，故流速随时间变化率可以忽略不计，且令$v_1=0$。

沿x方向写动量方程

$$R = \frac{\gamma}{g}Q\cdot\beta\cdot v$$

令 $\beta = 1$

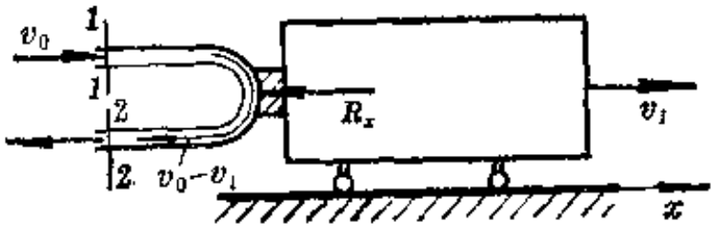
则 $$R=\frac{\gamma}{g}Q\cdot v$$

$$=\frac{9.8}{9.8}\times 0.0599\times 7.63$$

$$=0.457\text{kN}$$

保持水箱稳定所需要的力$R=0.457$kN。

92 如图所示，水射流受叶片作用偏转180°，射流断面面积$A_0=0.00186\text{m}^2$，$v_0=30.5$m/s，假设大车无摩阻力作用，而且能沿着水平方向自由移动，大车重为889N，试求当水射流对着叶片冲击10秒钟后大车移动的速度v_1和距离。



题92 图

解：

*1-1*断面的绝对速度为v_0，大车以v_1沿x轴移动，此时叶片内水流的相对速度为v_0-v_1，*2-2*断面的绝对速度为$(v_0-v_1)-v_1=v_0-2v_1(\leftarrow)$，每秒钟水流冲击到大车上的质量为$\rho A_0(v_0-v_1)$。

取*1-1*，*2-2*断面间水体为控制体，x轴方向如图示。

写x轴方向的动量方程。设叶片对水流在x方向的作用力为R_x。

$$-R_x=\rho A_0(v_0-v_1)\{-[v_0-2v_1]-v_0\}$$

$$=\rho A_0(v_0-v_1)2(v_1-v_0)$$

$$=-2\rho A_0(v_0-v_1)^2$$

水流冲击在叶片上的力F_x大小与R_x相等，方向相反。

$$\therefore\quad F_x=R_x=2\rho A_0(v_0-v_1)^2$$

根据牛顿第二定律有　$F=m\frac{dv}{dt}$

$$2\rho A_0(v_0-v_1)^2=m\frac{dv_1}{dt}$$

$$2\rho A_0\cdot dt=m\frac{dv_1}{(v_0-v_1)^2}$$

两端积分，得

$$2\rho A_0 t=m\frac{1}{v_0-v_1}+C_1' \qquad (1)$$

当$t=0$时，$v_1=0$，代入（1）式，可求出积分常数

$$0=\frac{m}{v_0}+C_1'$$

$$C_1'=-\frac{m}{v_0}$$

将C_1'值代入（1）式，得

$$2\rho A_0 t=m\frac{1}{v_0-v_1}-\frac{m}{v_0}$$

$$m\frac{1}{v_0-v_1}=\frac{2\rho A_0 v_0 t+m}{v_0}$$

$$v_0-v_1=\frac{mv_0}{2\rho A_0 v_0 t+m}$$

$$v_1=v_0-\frac{mv_0}{2\rho A_0 v_0 t+m}$$

$$=30.5-\frac{\frac{889}{9.8}\times 30.5}{2\times 1000\times 0.00186\times 30.5\times 10+\frac{889}{9.8}}$$

$$=28.24\text{m/s}$$

故水射流冲击叶片10秒钟后，大车移动的速度$v_1=28.24$ m/s。

再求大车移动的距离 s

$$ds=v_1 dt$$

$$=\left(v_0-\frac{mv_0}{2\rho A_0 v_0 t+m}\right)dt$$

$$=\left(v_0-\frac{\frac{mv_0}{2\rho A_0 v_0}}{t+\frac{m}{2\rho A_0 v_0}}\right)dt$$

两端积分，得

$$s=\int_0^{10} v_1 dt$$

$$=\int_0^{10} v_0 dt-\frac{m}{2\rho A_0}\int_0^{10}\frac{dt}{t+\frac{m}{2\rho A_0 v_0}}$$

$$=v_0\times 10-\frac{m}{2\rho A_0}\times\left[\ln\left(t+\frac{m}{2\rho A_0 v_0}\right)\right]\Big|_0^{10}$$

$$=10v_0-\frac{m}{2\rho A_0}\left[\ln\left(10+\frac{m}{2\rho A_0 v_0}\right)-\ln\frac{m}{2\rho A_0 v_0}\right]$$

$$=10\times 30.5-\frac{\frac{889}{9.8}}{2\times 1000\times 0.00186}\left\{\ln\left(10+\frac{\frac{889}{9.8}}{2\times 1000\times 0.00186\times 30.5}\right)-\ln\frac{\frac{889}{9.8}}{2\times 1000\times 0.00186\times 30.5}\right\}$$

$$=30.5-24.39\times[2.38+0.224]=241.51\text{m}$$

93 有一平底矩形突然扩大渠段的恒定流，如图所示，试证明：

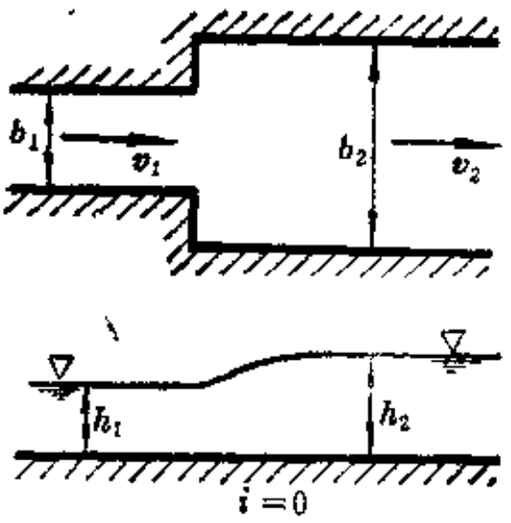
（1）$$\mathrm{Fr}_1+\frac{r}{2}=\frac{\mathrm{Fr}_1}{rs}+\frac{rs^2}{2}$$

（2）$$h_j=\frac{v_1^2}{2g}\left(1+\frac{2}{\mathrm{Fr}_1}-\frac{1}{r^2s^2}-\frac{2s}{\mathrm{Fr}_1}\right)$$

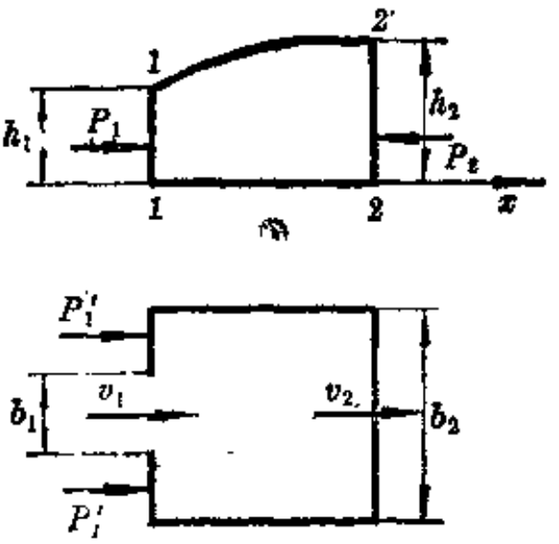
式中 $\mathrm{Fr}_1=\frac{v_1^2}{gh_1}$；$r=\frac{b_2}{b_1}$；$s=\frac{h_2}{h_1}$。

解：

（1）取1-1，2-2断面之间的水体为控制体，x轴方向如解



题 93 图



解 93 图

93图.

沿x方向写动量方程

$$\frac{\gamma Q}{g}(\beta_2 v_2-\beta_1 v_1)=P_1-P_2+P_1' \qquad (1)$$

∵

$$P_1=\frac{1}{2}\gamma h_1^2 b_1$$

$$P_2=\frac{1}{2}\gamma h_1^2 b_2$$

$$P_1'=\frac{1}{2}\gamma h_1^2(b_2-b_1)$$

令 $\beta_1=\beta_2=\beta=1$

又由连续性方程 $Q=Av$

得 $v=\dfrac{Q}{A}$

则（1）式可写为

$$\frac{\gamma}{g}Q^2\left(\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_1}\right)=\frac{1}{2}\gamma h_1^2 b_1-\frac{1}{2}\gamma h_1^2 b_2+\frac{1}{2}\gamma h_1^2(b_2-b_1)$$

$$\frac{v_1^2 A_1^2}{gA_1}\left(\frac{A_1}{A_2}-1\right)=\frac{1}{2}h_1^2 b_2-\frac{1}{2}h_1^2 b_2$$

$$\frac{v_1^2}{gh_1}\cdot b_1h_1^2\left(\frac{b_1h_1}{b_2h_2}-1\right)=\frac{1}{2}(h_1^2-h_2^2)b_2$$

$$\frac{v_1^2}{gh_1}\left(\frac{1}{\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{h_2}{h_1}}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{b_2}{b_1}\left(1-\frac{h_2^2}{h_1^2}\right)\quad(2)$$

因 $Fr_1=\frac{v_1^2}{gh_1}$，　$r=\frac{b_2}{b_1}$，　$s=\frac{h_2}{h_1}$，代入（2）式，简化得

$$Fr_1\left(\frac{1}{r\cdot s}-1\right)=\frac{1}{2}r(1-s^2)$$

即

$$Fr_1+\frac{r}{2}=\frac{Fr_1}{r\cdot s}+\frac{rs^2}{2}$$

（2）以渠底为基准面，写1-1，2-2断面的能量方程，得

$$h_1+\frac{\alpha_1v_1^2}{2g}=h_2+\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}+h_j$$

令　　$\alpha_1=\alpha_2=\alpha=1$

且由连续性方程$v_1A_1=v_2A_2$得

$$v_2=\frac{A_1}{A_2}\cdot v_1=\frac{b_1h_1}{b_2h_2}\cdot v_1$$

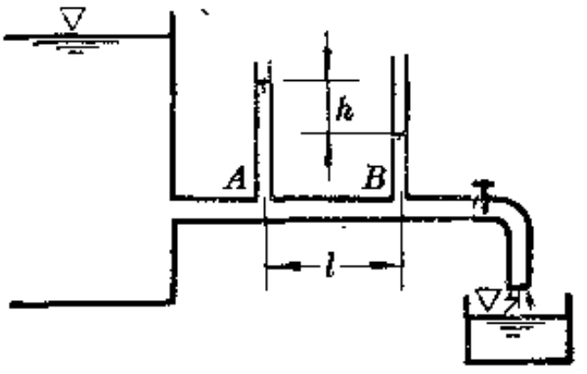
故

$$\begin{aligned}h_j&=\left(h_1+\frac{v_1^2}{2g}\right)-\left(h_2+\frac{v_2^2}{2g}\right)\\&=h_1-h_2+\frac{v_1^2}{2g}-\frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{b_1h_1}{b_2h_2}\right)^2\\&=\frac{v_1^2}{2g}\left[\frac{h_1}{\frac{v_1^2}{2g}}-\frac{h_2}{\frac{v_1^2}{2g}}+1-\left(\frac{b_1h_1}{b_2h_2}\right)^2\right]\\&=\frac{v_1^2}{2g}\left[\frac{2}{\frac{v_1^2}{gh_1}}-\frac{2h_2}{\frac{v_1^2}{gh_1}\cdot h_1}+1-\left(\frac{1}{\frac{b_2h_2}{b_1h_1}}\right)^2\right]\\&=\frac{v_1^2}{2g}\left[\frac{2}{Fr_1}-\frac{2s}{Fr_1}+1-\frac{1}{r^2s^2}\right]\end{aligned}$$

即

$$h_j=\frac{v_1^2}{2g}\left(1+\frac{2}{Fr_1}-\frac{1}{r^2s^2}-\frac{2s}{Fr_1}\right)$$

94　为了测定AB管段的沿程阻力系数λ或粗糙系数n，可采用如图所示装置。已知AB段的管长l为10m，管径d为50mm。今测得实验数据：（1）A，B两测压管的水头差为0.8m，（2）经90秒钟流入量水箱的水量为0.247m³，试求该管段的沿程阻力系数λ值，并用满宁公式求其粗糙系数n。



题 94 图

解：

管道中的流速

$$v=\frac{Q}{A}$$

$$=\frac{\frac{V}{t}}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$=\frac{\frac{0.247}{90}}{\frac{3.14\times0.05^2}{4}}=1.398\text{m/s}$$

由沿程水头损失的达西公式

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

$$0.8=\lambda\times\frac{10}{0.05}\times\frac{1.398^2}{2\times9.8}$$

计算可得　　$\lambda=0.04$

由满宁公式

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}$$

同时

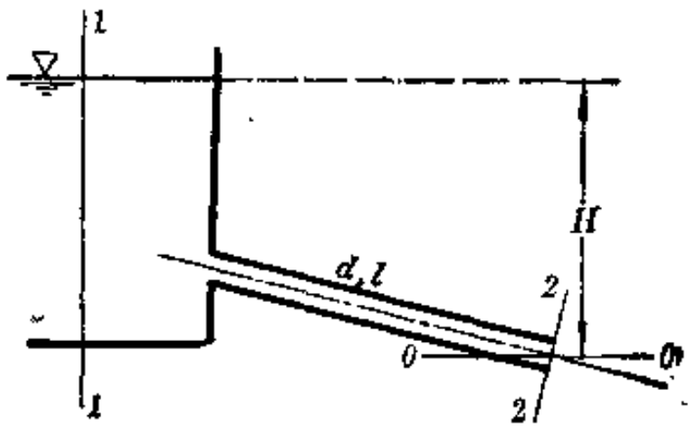
$$C=\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$$

两式化简整理可得

$$n=\frac{R^{1/6}}{\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}}=\frac{\left(\frac{d}{4}\right)^{1/6}}{\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{0.05}{4}\right)^{1/6}}{\sqrt{\frac{8\times 9.8}{0.04}}}=0.011$$

95 有一输油管，如图所示，管长 $l=50\text{m}$，作用水头 $H=2\text{ m}$，油的运动粘滞系数 $\nu=0.2\text{cm}^2/\text{s}$，下临界雷诺数 $\text{Re}_K=2000$，求管中的油能维持层流状态的最大管径 d_{max}（按长管计算，流速水头和局部水头损失忽略不计）。



题 95 图

解：

以通过管道出口断面中心的水平面为基准面，写0-0，1-1断面的能量方程，得

$$H=h_f=\lambda\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

对于层流 $\lambda=\frac{64}{Re}$，　$Re=\frac{vd}{\nu}$代入上式得

$$H=\frac{64}{\frac{vd}{\nu}}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

$$=\frac{32\nu l\cdot v}{d^2\cdot g}$$

$$v=\frac{gHd^2}{32\nu\cdot l}$$

又

$$Re_K=\frac{v\cdot d}{\nu}=\frac{\frac{gHd^2}{32\nu l}\cdot d}{\nu}$$

$$=\frac{gHd^3}{32\nu^2 l}$$

则

$$d=\sqrt[3]{\frac{32Re_K\nu^2 l}{g\cdot H}}$$

$$=\sqrt{\frac{32\times2000\times0.2^2\times1500}{980\times200}}$$

$$=5.81\text{cm}$$

故

$$d_{max}=5.81\text{cm}$$

96　一有压涵洞，水流为恒定流，涵洞为矩形断面，宽 $b=1.2\text{m}$，高 $h=2\text{m}$，流量 $Q=8.8\text{m}^3/\text{s}$，洞长 $l=70\text{m}$，糙率 $n=0.014$，试计算：谢才系数 C；沿程阻力系数 λ；阻力流速 v_* 及沿程水头损失 h_f。

解：

（1）计算谢才系数 C

$$A=b\cdot h=1.2\times2=2.4\text{m}^2$$

$$\chi=b+2h=1.2+2\times2=5.2\text{m}$$

$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{2.4}{5.2}=0.462\text{m}$$

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{8.8}{2.4}=3.67\text{m/s}$$

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}$$

$$=\frac{1}{0.014}\times 0.462^{1/6}=62.8\mathrm{m}^{1/2}/\mathrm{s}$$

（2）计算沿程阻力系数λ

$$\lambda=\frac{8g}{C^2}=\frac{8\times 9.8}{62.8^2}=0.0199$$

（3）计算阻力流速v_*

$$v_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

又　$\tau_0=\gamma RJ$　　$J=\frac{v^2}{C^2R}$　　代入（1）式

故

$$v_*=\sqrt{\frac{\gamma RJ}{\rho}}=\sqrt{g\frac{v^2}{C^2}}=v\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

$$=3.67\sqrt{\frac{0.0199}{8}}=0.183\mathrm{m/s}$$

（4）计算沿程水头损失h_f

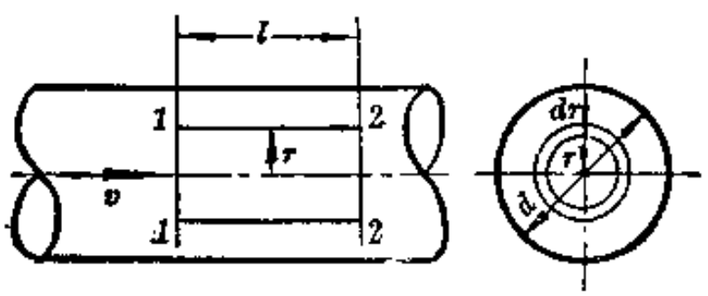
由达西公式

$$h_f=\lambda\frac{l}{4R}\frac{v^2}{2g}$$

$$=0.0199\times\frac{70}{4\times 0.462}\times\frac{3.67^2}{2\times 9.8}$$

$$=0.517\mathrm{m}$$

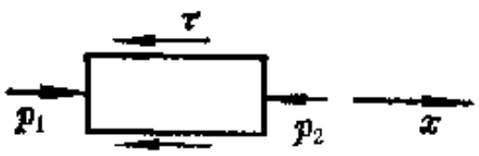
97　直径为d的水平圆管，断面平均流速为v，长为l，证明：层流经过长度为l的压力损失$p=32\mu vl/d^2$，同时用达西公式$h_f=$



题 97 图

$\lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$证明$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$。

解



解 97 图

（1）证明$p = \frac{32\mu vl}{d^2}$

取*1-1*，*2-2*断面间，以 r 为半径的圆柱流体为控制体，根据牛顿第二定律。$\Sigma F_x = ma_x$，因圆管直径保持不变$a_x = 0$

$$\therefore \quad \Sigma F_x = p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau \cdot 2\pi rl = 0$$

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2l} r = \frac{pr}{2l}$$

层流中

$$\tau = -\mu \frac{du_x}{dr} = \frac{pr}{2l}$$

$$du_x = -\frac{p}{2\mu l} r dr$$

$$u_x = -\frac{pr^2}{4\mu l} + C$$

当 $r = \frac{d}{2}$，$u_x = 0$，则积分常数 $C = \frac{pd^2}{16\mu l}$

代入上式得

$$u_x = \frac{p}{4\mu l}\left(\frac{d^2}{4} - r^2\right)$$

$$Q = \int_A u_x dA$$

$$= \frac{p}{4\mu l} \int_0^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d^2}{4} - r^2\right) 2\pi r dr$$

$$= \frac{p\pi}{2\mu l} \int_0^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d^2}{4} r - r^3\right) dr$$

$$= \frac{\pi p d^4}{128\mu l}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{\pi p d^4}{128\mu l}}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$=\frac{pd^2}{32\mu l}$$

移项得压力损失

$$p=\frac{32\mu lv}{d^2}$$

（2）用达西公式证明 $\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}}$

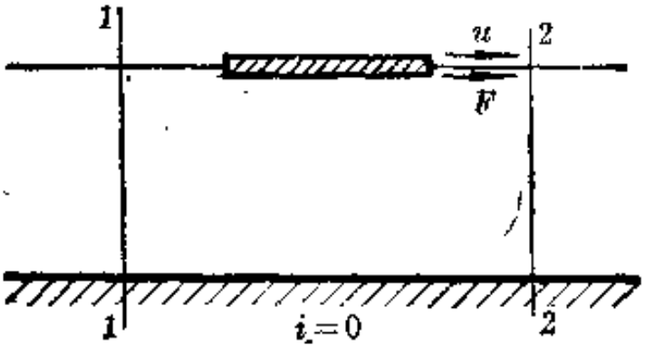
沿程损失的达西公式为 $h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$。由于管道直径保持不变，管轴线水平，放流体经过长度为 l 的管道造成的沿程损失由压能供给，为

$$h_f=\frac{p_1-p_2}{\gamma}=\frac{p}{\gamma}$$

$$\lambda\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}=\frac{p}{\gamma}=\frac{32\mu lv}{\gamma d^2}$$

化简整理得沿程阻力系数 $\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}}$

98 一平板在平底槽中的静水面上以等速度 u 运动，使槽中的水近似地作二元均匀层流运动。试证明槽中水流速度沿水深按直线规律分布。

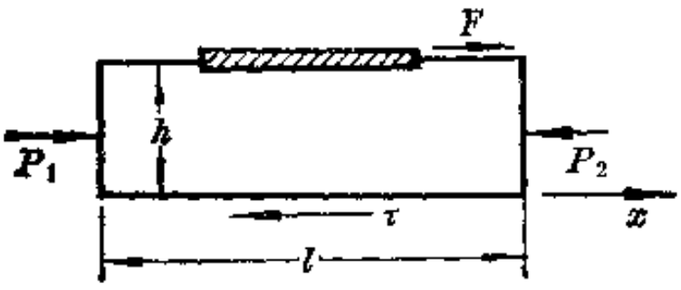


题 98 图

解：

在水槽中取1-1，2-2断面间，水深为 h 的单宽水体为控制体，如图所示。因水流是二元均匀层流，所以单宽水体的控制体两侧无摩擦力，

沿 x 方向写力的平衡方程式



解 98 图

$$P_1-P_2+F-\tau\times 1\times l=0$$

式中 F是使平板作均匀运动的作用力，保持不变。因水深槽同，所以$P_1=P_2$。代入上式简化得

$$F=\tau l$$

故

$$\tau=\frac{F}{l}$$

根据牛顿内摩擦定律

$$\tau=\mu\frac{du_x}{dy}$$

$\therefore$

$$\mu\frac{du_x}{dy}=\frac{F}{l}$$

$$du_x=\frac{F}{l\mu}dy$$

积分得

$$u_x=\frac{F}{l\mu}y+c$$

从上式可以看出，流速沿水深按直线规律分布。

99 有一输水直管，管长$l=100$m，管径$d=10$cm，糙率$n=0.012$，管中流量$Q=15$l/s。求管壁处的切应力。

解：

管中水流为均匀流，水力坡度$J=\frac{Q^2}{K^2}$，

$$K=CA\sqrt{R}=\frac{1}{n}R^{1/6}\cdot\frac{\pi d^2}{4}\cdot R^{1/2}$$

$$=\frac{\pi d^2}{4n}R^{2/3}$$

$$=\frac{3.14\times0.1^2}{4\times0.012}\times\left(\frac{0.1}{4}\right)^{2/3}$$

$$=0.0559\ \mathrm{m^3/s}$$

$$J=\left(\frac{Q}{K}\right)^2$$

$$=\left(\frac{0.015}{0.0559}\right)^2=0.072$$

管壁切应力

$$\tau_0=\gamma RJ=9800\times\left(\frac{0.1}{4}\right)\times0.072$$

$$=17.64\ \mathrm{N/m^2}$$

100 推导圆管中流体作层流运动时的流速公式，并证明平均流速为中心流速之一半。

解：

圆管中作层流运动时，圆筒表面的切应力为

$$\tau=-\mu\frac{du_x}{dr}$$

又

$$\tau=\gamma RJ=\frac{\gamma rJ}{2}$$

所以

$$-\mu\frac{du_x}{dr}=\frac{\gamma rJ}{2}$$

积分，得

$$u_x=-\frac{\gamma J}{4\mu}r^2+c$$

当$r=r_0$时，$u_x=0$

则

$$C=\frac{\gamma J}{4\mu}r_0^2$$

代入原公式得流速分布公式

$$u_x=\frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2-r^2)$$

断面平均流速为

$$v=\frac{1}{A}\int_A u_x dA$$

$$= \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^r \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2) 2\pi r \cdot dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2$$

$$= \frac{1}{2} u_x \Big|_{r=0}.$$

101 试证明圆管中的紊流流速与管中最大流速的下列关系成立：$\frac{u_{max} - u}{u_*} = 5.75 \lg \frac{r_0}{y}$，式中$u_{max}$为管中最大流速，$u$为距离管壁为$y$处的任意点的流速，$r_0$为圆管的半径，$u_*$为摩阻流速。

解：

对于充分发展的紊流，切应力为

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \qquad (1)$$

对于圆管

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0} = \tau_0 \left(\frac{r_0 - y}{r_0}\right)$$

$$= \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) \qquad (2)$$

又根据萨特克维奇（Саткевич）的研究结果，混掺长度l可表示为

$$l = \kappa y \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}} \qquad (3)$$

式中κ称卡门常数，根据试验结果$\kappa = 0.4$。将（2）、（3）式代入（1）式得

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{u_*}{\kappa y}$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \qquad \text{称为摩阻流速}$$

积分上式得

$$u=\frac{u_*}{\kappa}(\ln y+c) \qquad (4)$$

在管轴中心处，$y=r_0$，流速为最大值，即

$$u_{max}=\frac{u_*}{\kappa}(\ln r_0+c) \qquad (5)$$

将（5）式与（4）式相减得

$$u_{max}-u=\frac{u_*}{\kappa}(\ln r_0+c)-\frac{u_*}{\kappa}(\ln y+c)$$

$$=\frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{r_0}{y}$$

则

$$\frac{u_{max}-u}{u_*}=\frac{1}{\kappa}\ln\frac{r_0}{y}$$

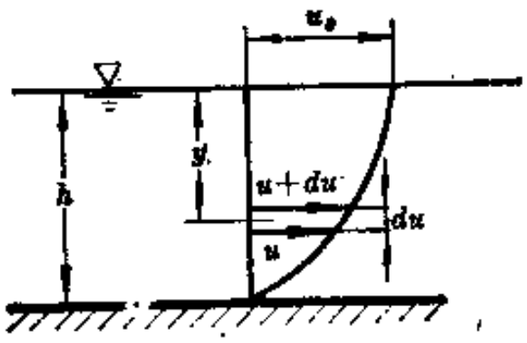
将试验值$\kappa=0.4$代入上式，并将自然对数换成常用对数得

$$\frac{u_{max}-u}{u_*}=5.75\lg\frac{r_0}{y}$$

102 粘滞系数为μ的液体，在宽为b，深为h的矩形断面明槽中作层流运动，流速分布公式为$u=u_0\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$，$u_0$为表面流速，坐标$y$由液面铅直向下（视$\mu$，$b$，$h$，$u_0$为已知量）。试求：

（1）断面平均流速；

（2）槽底切应力。



题 102 图

解：

（1）断面平均流速

$$v=\frac{1}{A}\int_0^h u\,dA=\frac{1}{bh}\int_0^h u_0\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]b\,dy$$

$$=\frac{u_0}{h}\int_0^h\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]dy=\frac{u_0}{h}\int_0^h dy-\frac{u_0}{h}$$

$$\times\int_0^h\left(\frac{y}{h}\right)^2 dy=u_0-\frac{u_0}{3}=\frac{2}{3}u_0$$

（2）槽底切应力

$\because$ $$\tau=\mu\frac{du}{dy}$$

而 $$u=\left[u_0-u_0\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

$$du=-2u_0\frac{y}{h^2}dy$$

$\therefore$ $$\frac{du}{dy}=-2u_0\frac{y}{h^2}$$

$$\tau=-\mu\frac{2u_0}{h^2}\cdot y$$

在槽底，当$y=h$时，$\tau=\tau_0=-\mu\dfrac{2u_0}{h}$

103 紊流光滑管的流速分布规律可由下式表达

$$\frac{u}{v_*}=A\left(\frac{v_*\cdot y}{\nu}\right)^m$$

式中 u为任意点的流速；y为任意点离管壁的距离；

v_*为摩阻流速；ν为水的运动粘滞性系数；

m为指数；A为与实验有关的常数。试证明：

（1） $$\frac{v}{v_*}=\frac{2A}{(m+1)(m+2)}\cdot\left(\frac{v_*r_0}{\nu}\right)^m$$

（2） $$\lambda=\frac{2^{\frac{5m+1}{m+1}}\left[(m+1)(m+2)\right]^{\frac{2}{m+1}}}{A^{\frac{2}{m+1}}}\cdot\mathrm{Re}^{\frac{-2m}{m+1}}$$

上两式中 λ为沿程阻力系数，$\mathrm{Re}=\dfrac{vd}{\nu}$为雷诺数；

r_0和d分别为管道的半径和直径；v为断面平均流速。

解

（1）断面平均流速

$$v=\frac{Q}{A_0}=\frac{1}{A_0}\int_A u\,dA$$

$$=\frac{1}{A_0}\int_0^{r_0} v_*A\left(\frac{v_*\cdot y}{\nu}\right)^m 2\pi(r_0-y)dy$$

$$=\frac{1}{\pi r_0^2}\times 2\pi\times v_*A\left(\frac{v_*}{\nu}\right)^m\int_0^{r_0}(r_0y^m-y^{m+1})dy$$

$$=\frac{1}{r_0^2}\times\left[2v_*\cdot A\left(\frac{v_*}{\nu}\right)^m\left(\frac{r_0^{m+2}}{m+1}-\frac{r_0^{m+2}}{m+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r_0^2}\times\left[2v_*A\left(\frac{v_*}{\nu}\right)^m\frac{r_0^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\right.$$

$$=\frac{2Av_*}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{v_*r_0}{\nu}\right)^m$$

于是，
$$\frac{v}{v_*}=\frac{2A}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{v_*r_0}{\nu}\right)^m$$

（2）由前面结论得到

$$\frac{v}{v_*}=\frac{2A}{(m+1)(m+2)}\left(\frac{v_*r_0}{\nu}\right)^m$$

$$=\frac{2A}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{v_*^m}{2^mv^m}\left(\frac{vd}{\nu}\right)^m$$

等式两边同乘以$\left(\frac{v}{v_*}\right)^m$

$$\left(\frac{v}{v_*}\right)^{m+1}=\frac{A\mathrm{Re}^m}{2^{m-1}(m+1)(m+2)}$$

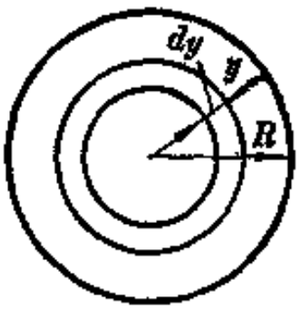
即
$$\left(\frac{v_*}{v}\right)=\left[\frac{2^{m-1}(m+1)(m+2)}{A}\cdot\mathrm{Re}^{-m}\right]^{\frac{1}{m+1}}$$

$$\lambda=8\left(\frac{v_*}{v}\right)^2$$

$$=8\times\left[\frac{2^{m-1}(m+1)(m+2)}{A}\cdot\mathrm{Re}^{-m}\right]^{\frac{2}{m+1}}$$

$$=\frac{2^{\frac{5m+1}{m+1}}\left[(m+1)(m+2)\right]^{\frac{2}{m+1}}\ \mathrm{Re}^{-\frac{4m}{m+1}}}{A^{\frac{2}{m+1}}}$$

104 半径为R的圆管，流速分布$u=u_0\left(\frac{y}{R}\right)^{1/m}$，式中$u$是距边壁为$y$的流速，$u_0$是管道中心处的流速。证明，如果毕托管放在距边壁$0.25R$处，当$m$在4到10的范围内，毕托管测量平均流速的误差在±0.6%以内。并计算，当$m=7$时，用平均流速表示的单位重量液体具有的动能。



题 104 图

解：

（1）证明m在4～10范围内，毕托管测量平均流速的误差在±0.6%以内。

设y是距边壁的距离，取宽度为dy，圆环通过的流量为dQ，则

$$dQ=u\cdot dA$$

$$=2\pi(R-y)dy\cdot u_0\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$=2\pi u_0\left(R^{1-\frac{1}{m}}\cdot y^{\frac{1}{m}}-y^{1+\frac{1}{m}}\cdot R^{-\frac{1}{m}}\right)dy$$

$$Q=\int_0^R 2\pi u_0\left(R^{1-\frac{1}{m}}\cdot y^{\frac{1}{m}}-y^{1+\frac{1}{m}}\cdot R^{-\frac{1}{m}}\right)dy$$

$$=2\pi u_0\left[\frac{m}{m+1}R^{\frac{m-1+m+1}{m}}-\frac{m}{2m+1}\cdot R^{\frac{-1+2m+1}{m}}\right]$$

$$=2\pi u_0R^2\left(\frac{m}{m+1}-\frac{m}{2m+1}\right)$$

$$=\frac{2\pi u_0R^2\cdot m^2}{(m+1)(2m+1)}$$

平均流速 $v=\frac{Q}{\pi R^2}=\frac{2u_0m^2}{(m+1)(2m+1)}$

把毕托管放在距边壁 $y=0.25R$ 处

$$u=u_0\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{m}}=u_0\left(\frac{0.25R}{R}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$=0.25^{\frac{1}{m}}\cdot u_0$$

当 $m=10$ 时

$$v=\frac{2u_0m^2}{(m+1)(2m+1)}$$

$$=\frac{2u_0\times10^2}{(10+1)(2\times10+1)}$$

$$=0.866u_0$$

$$u=0.25^{\frac{1}{m}}u_0$$

$$=0.25^{\frac{1}{10}}u_0$$

$$=0.870u_0$$

误差 $$e=\frac{u-v}{u}=\frac{0.870u_0-0.866u_0}{0.870u_0}$$

$$=0.46\%$$

当 $m=4$ 时

$$v=\frac{2u_0m^2}{(m+1)(2m+1)}$$

$$=\frac{2u_0\times4^2}{(4+1)(2\times4+1)}$$

$$=0.711u_0$$

$$u=0.25^{\frac{1}{m}}u_0=0.25^{\frac{1}{4}}u_0$$

$$=0.707u_0$$

误差， $$e=\frac{u-v}{u}=\frac{0.707u_0-0.711u_0}{0.707u_0}$$

$$=-0.57\%$$

m 在 4 到10的范围内，毕托管测量平均流速的误差在 ±0.6% 以内。

（2）计算 $m=7$ 时，单位重量液体具有的动能

单位时间内通过圆环面积dA的重量dW

$$dW=\gamma dQ=\gamma u dA$$

$$=\gamma u_0\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}\times 2\pi(R-y)dy$$

总重量

$$W=\int_0^R 2\pi\gamma u_0\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{7}}(R-y)dy$$

$$=\frac{2\pi\gamma u_0}{R^{1/7}}\int_0^R(Ry^{1/7}-y^{8/7})dy$$

$$=\frac{2\pi\gamma u_0}{R^{1/7}}\left[\frac{7}{8}R^{15/7}-\frac{7}{15}R^{15/7}\right]$$

$$=0.816\gamma\pi R^2u_0$$

流体的动能

$$dE=\frac{1}{2}\,dmu^2=\frac{1}{2}\rho dQu^2$$

$$=\frac{1}{2}\rho u^3dA=\frac{1}{2}\rho u^3\times 2\pi(R-y)dy$$

$$=\rho\pi u_0^3\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}(R-y)dy$$

$$E=\int_0^R\rho\pi u_0^3\left(\frac{y}{R}\right)^{3/7}(R-y)dy$$

$$=\frac{\rho\pi u_0^3}{R^{3/7}}\int_0^R(Ry^{3/7}-y^{10/7})dy$$

$$=\frac{\rho\pi u_0^3}{R^{3/7}}\left(\frac{7}{10}R^{17/7}-\frac{7}{17}R^{17/7}\right)$$

$$=0.288\rho\pi R^2u_0^3$$

$$u_0=\frac{(m+1)(2m+1)v}{2m^2}=\frac{(7+1)(2\times7+1)v}{2\times7^2}$$

$$=1.224v$$

$$E=0.288\rho\pi R^2(1.224v)^3$$

$$=0.528\rho\pi R^2v^3$$

单位重量液体具有的动能E_1

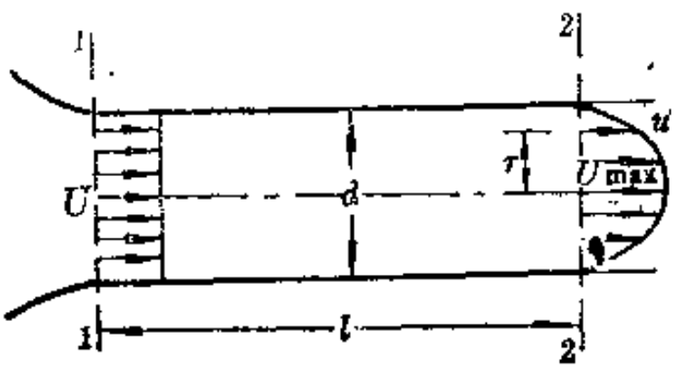
$$E_1=\frac{0.528\rho\pi R^2v^3}{0.816\rho g\pi R^2\times 1.224v}$$

$$=1.06\frac{v^2}{2g}$$

105 如图所示，水流恒定地流入直径为d的水平圆管。1-1断面处的流速为均匀分布，已知其流速为U；2-2断面处的流速分布为：

$$u=U_{max}\left(1-\frac{2r}{d}\right)^m$$

式中 m为正数(已知数)；u为距管轴线r处的点流速；U_{max}为2-2断面管轴处的流速；两断面中心点的压强分别已知为p_1和p_2；两断面间距离已知为l。求2-2断面管轴处的流速U_{max}和两断面之间的管壁切应力的平均值$\bar{\tau}$。



题 105 图

解：

(1) 求2-2断面管轴处的流速U_{max}

$\because$ $U=v$

$$=\frac{1}{A}\int_A u\,dA$$

$$=\frac{1}{\frac{\pi d^2}{4}}\int_0^{\frac{d}{2}}U_{max}\left(1-\frac{2r}{d}\right)^m\cdot 2\pi r\,dr$$

$$= \frac{8U_{max}}{d^2}\int_0^{\frac{d}{2}} r\left(1-\frac{2r}{d}\right)^m dr$$

令 $t = 1-\frac{2r}{d}$，则

$$U = \frac{8U_{max}}{d^2}\cdot\frac{d^2}{4}\int_1^0 (t-1)t^m dt$$

$$= 2U_{max}\int_1^0 (t^{m+1}-t^m)dt$$

$$= 2U_{max}\left(\frac{1}{m+2}t^{m+2}-\frac{1}{m+1}t^{m+1}\right)\Big|_1^0$$

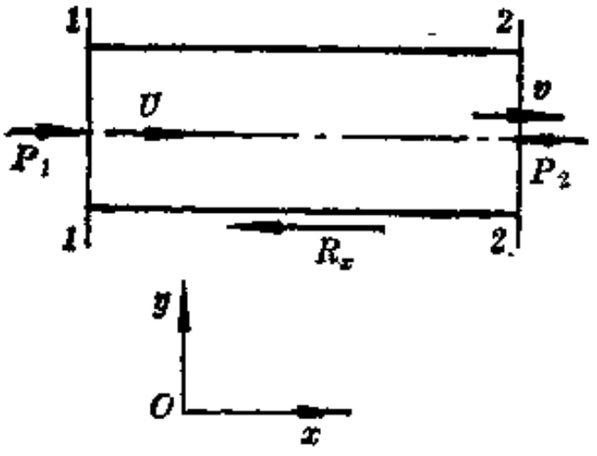
$$= -\frac{2U_{max}}{(m+1)(m+2)}$$

于是

$$U_{max} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}U \qquad (1)$$

（2）确定两断面之间的管壁切应力的平均值$\overline{\tau}$。

取1-1，2-2断面间的水体为控制体，坐标轴如图示。设管壁对水体的摩阻力为R_x，沿x方向写动量方程



解 105 图

$$\rho QU(\beta_2-\beta_1) = P_1 - P_2 - R_x$$

因

$$P_1 = p_1\cdot\frac{\pi d^2}{4}$$

$$P_2=p_2\cdot\frac{\pi d^2}{4}$$

$$R_x=\bar{\tau}_0\cdot\pi\cdot d\cdot l$$

将上述各数值代入动量方程，得

$$\bar{\tau}_0\cdot\pi\cdot d\cdot l=\frac{\pi d^2}{4}[p_1-p_2-\rho(\beta_2-\beta_1)]$$

$$\bar{\tau}_0=\frac{d}{4l}[p_1-p_2-\rho U^2(\beta_2-\beta_1)] \qquad (2)$$

式中 $\beta_1=1$

$$\beta_2=\frac{\int_A u^2dA}{U^2A}$$

$$=\frac{4U^2_{max}}{\pi d^2U^2}\int_0^{\frac{d}{2}}\left(1-\frac{2r}{d}\right)^{2m}\cdot 2\pi r dr$$

$$=\frac{8U^2_{max}}{d^2U^2}\int_0^{\frac{d}{2}} r\left(1-\frac{2r}{d}\right)^{2m}\cdot dr$$

令 $t=1-\frac{2r}{d}$

$$\beta_2=\frac{2U^2_{max}}{U^2}\int_1^0(t-1)t^{2m}dt$$

$$=\frac{2U^2_{max}}{U^2}\int_1^0(t^{2m+1}-t^{2m})dt$$

$$=\frac{2U^2_{max}}{U^2}\left(\frac{1}{2m+2}t^{2m+2}-\frac{1}{2m+1}t^{2m+1}\right)\Big|_1^0$$

$$=\frac{U^2_{max}}{U^2}\cdot\frac{1}{(2m+1)(m+1)}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)^2}{4(2m+1)} \qquad (3)$$

将β_1及β_2之值代入（2）式，得

$$\bar{\tau}_0=\frac{d}{4l}\left\{p_1-p_2-\rho U^2\left[\frac{(m+1)(m+2)^2}{4(2m+1)}-1\right]\right\}$$

108 已知圆管中紊流的时均流速分布为

$$u=\frac{u_*}{\varkappa}\ln y+C$$

式中 $\varkappa$为卡门常数；u_*为摩阻流速；C为任意常数；y为以管内壁某一点为原点、垂直管壁、方向指向管轴的坐标。证明圆管断面平均流速

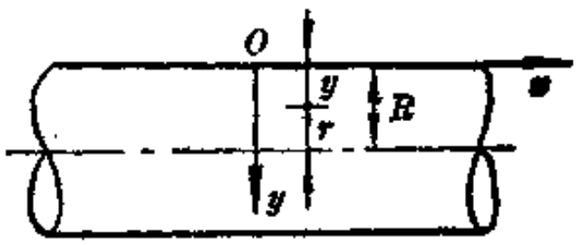
$$v=U_{max}-3.75u_*$$

式中 U_{max}为管轴处的流速

附：不定积分公式

$$\int \ln y dy=y\ln y-y+C$$

$$\int y\ln y dy=y^2\left(\frac{1}{2}\ln y-\frac{1}{4}\right)+C$$



题 106 图

解：

由图可知

$$y+r=R$$

$$r=R-y$$

$$dr=-dy$$

断面平均流速 $v=\frac{1}{A}\int udA=\frac{1}{\pi R^2}\int_R^0 u2\pi r dr$

将r，dr，u值代入上式，得

$$v=\frac{1}{\pi R^2}\int_R^0\left(\frac{u_*}{\varkappa}\ln y+C\right)2\pi(R-y)(-dy)$$

$$=\frac{2\pi}{\pi R^2}\int_0^R\left(\frac{u_*}{\varkappa}\ln y+C\right)(R-y)dy$$

$$=\frac{2}{R^2}\int_0^R\left[R\frac{u_*}{\kappa}\ln y-y\frac{u_*}{\kappa}\ln y+C(R-y)\right]dy$$

$$=\frac{2}{R^2}\left\{\frac{u_*}{\kappa}\left[R(y\ln y-y)-y^2\left(\frac{1}{2}\ln y-\frac{1}{4}\right)\right]\right.$$

$$\left.-C\cdot\frac{1}{2}(R-y)^2\right\}\Big|_0^R$$

$$=\frac{2}{R^2}\left\{\frac{u_*}{\kappa}\left[R^2\ln R-R^2-R^2\cdot\frac{1}{2}\ln R\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}R^2\right]+\frac{C}{2}R^2\right\}$$

$$=\frac{2}{R^2}\left\{\frac{u_*}{\kappa}\cdot\frac{1}{2}R^2\ln R-\frac{3}{4}R^2\frac{u_*}{\kappa}+\frac{C}{2}R^2\right\}$$

$$=\frac{u_*}{k}\ln R-\frac{3}{2}\frac{u_*}{\kappa}+C$$

$$=U_{max}-\frac{3}{2}\frac{u_*}{\kappa}$$

将$k=0.4$代入得

$$v=U_{max}-3.75u_*$$

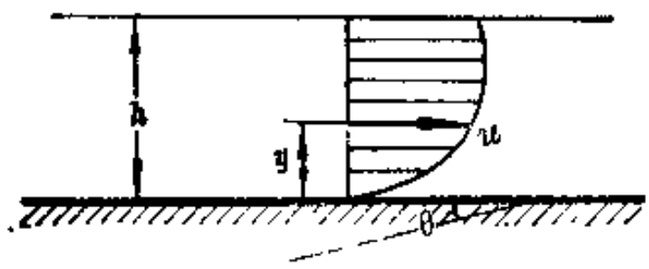
107 如图所示，水流沿一倾斜平面向下游流动，为一均匀流，其中h为水深，平面倾斜角为θ，如粗糙区紊流的流速分布为

$$\frac{u}{u_*}=2.5\ln\left(\frac{y}{\Delta}\right)+8.5$$

式中 v_*为剪切流速；Δ为粗糙突出高度。试求：

（1）平均流速v的表达式；

（2）粗糙系数n的表达式。



题 107 图

解：

（1）已知流速分布为

$$\frac{u}{v_*}=2.5\ln\left(\frac{y}{\Delta}\right)+8.5$$

故单位宽度渠道所通过的流量为

$$q=\int_0^h u\,dy=v_*\left(\int_0^h 2.5\ln\left(\frac{y}{\Delta}\right)dy+8.5\int_0^h dy\right)$$

从而 $$v=\frac{q}{h}=\frac{v_*}{h}\left(2.5\int_0^h \ln\left(\frac{y}{\Delta}\right)dy+8.5\int_0^h dy\right)$$

$$=v_*\left(5.75\lg\frac{h}{\Delta}+6\right)$$

（2）对粗糙区的均匀紊流可按谢才公式计算断面平均流速，即

$$v=C\sqrt{RJ}=\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2}$$

$$=\frac{1}{n}R^{2/3}(\sin\theta)^{1/2}$$

于是 $$n=\frac{1}{v}R^{2/3}(\sin\theta)^{1/2}$$

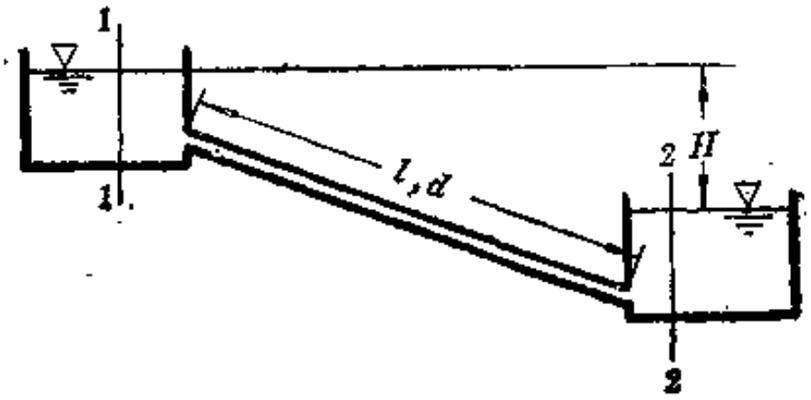
$$=\frac{R^{2/3}(\sin\theta)^{1/2}}{v_*\left(5.75\lg\frac{h}{\Delta}+6\right)}$$

III、有压管道中的恒定及非恒定流动

108 已知一管道连接上、下游两水库，管长l，直径为d，今欲使流量增加50%，拟在原管道中装一抽水机，求抽水机功率需多少？（设抽水机效率$\eta=0.8$）设已知$l=10000\text{m}$，$d=0.25\text{m}$，$H=10\text{m}$，沿程阻力系数$\lambda=0.02$

解：

以下游水库液面为基准面，写1-1和2-2断面的能量方程（按



题 108 图

长管计算）

$$H=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

$$v=\sqrt{\frac{2gH}{\lambda\frac{l}{d}}}=\sqrt{\frac{2\times9.8\times10}{0.02\times\frac{10000}{0.25}}}$$

$$=0.5\ \text{m/s}$$

$$Q=v\cdot A$$

今欲使流量增加50%，而A是不变的，所以只有把v增加50%，即

$$v=0.5(1+0.5)=0.75\ \text{m/s}$$

在1-1和2-2断面间增设抽水机，其输入的能头为H_t，对1-1和2-2断面应用能量方程，得

$$H+H_t=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

$$H_t=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}-H$$

$$=0.02\times\frac{10000}{0.25}\times\frac{0.75^2}{2\times9.8}-10$$

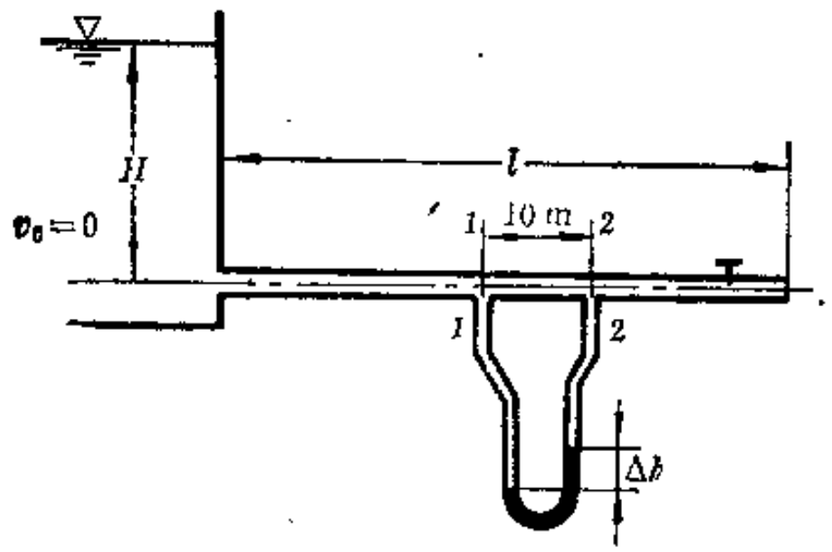
$$=13\ \text{m}$$

设抽水机的功率为N_P，则

$$N_P=\frac{\gamma QH_t}{\eta}=\frac{9800\times\frac{\pi}{4}\times0.25^2\times0.75\times13}{0.8}$$

$=5.86$ kW

109 一直径为d的水平直管从水箱引水、如图所示，已知：管径$d=0.1$m，管长$l=50$m，$H=4$m，进口局部水头损失系数$\zeta_1=0.5$，阀门局部水头损失系数$\zeta_2=2.5$，今在相距为10m的1-1断面及2-2断面间设有一水银压差计，其液面差$\Delta h=4$cm，试求通过水管的流量Q。



题 109 图

解：

以管轴水平面为基准面，写1-1，2-2断面的能量方程，得

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_2}{\gamma}+h_f$$

$$h_f=\frac{p_1-p_2}{\gamma}$$

由压差计原理知，$\dfrac{p_1-p_2}{\gamma}=12.6\Delta h=12.6\times0.04=0.5$m

断以　　$h_f=0.5$m

全管路沿程水头损失$H_f=5\times0.5=2.5$m

再写水箱断面与管道出口断面的能量方程

$$H=\frac{2v^2}{2g}+(\zeta_1+\zeta_2)\frac{v^2}{2g}+H_f$$

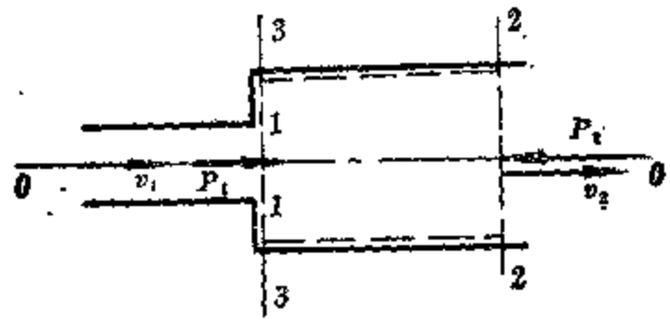
$$4-2.5=(1+0.5+2.5)\frac{v^2}{2\times9.8}$$

$$v=\sqrt{\frac{29.4}{4}}=2.71\ \text{m/s}$$

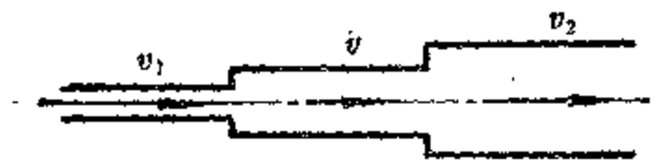
$$Q=A\cdot v=\frac{3.14}{4}0.1^2\times 2.71$$

$$=0.021\text{m}^3/\text{s}$$

110 （1）试推导如题110图(a)管流突然扩大的局部水头损失公式



题 110 图(a)



题 110 图(b)

$$h_j=\frac{(v_1-v_2)^2}{2g},$$

流速由v_1变到v_2的突然扩大管；如果分为两次扩大，如题110(b)图所示，则此中间管段的流速 v 应为何值才能使总的局部水头损失为最小？又问两次扩大的水头损失将为一次扩大的水头损失的若干倍？

解：

（1）如图（a）所示，以经管轴线水平面为基准面，写1-1，2-2断面的能量方程

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_j \qquad (1)$$

现取3-1-1-3断面及2-2断面间的水体为控制体，沿水流方向

建立动量方程（实验证明环形断面1-3部分上的动水压强可近似地按静水压强计算）

$$p_1A_2-p_2A_2=\frac{\gamma}{g}Q(\beta_2v_2-\beta_1v_1)$$

$$\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=\frac{v^2}{g}(\beta_2v_2-\beta_1v_1) \qquad (2)$$

令 $\beta_2=\beta_1=1$，将（2）式代入（1）式得

$$h_f=\frac{v^2}{g}(v_2-v_1)+\frac{\alpha_1v_1^2-\alpha_2v_2^2}{2g}$$

令 $\alpha_1=\alpha_2=1$

$$h_f=\frac{2v_2^2-2v_1v_2+v_1^2-v_2^2}{2g}=\frac{(v_1-v_2)^2}{2g} \qquad (3)$$

若流速由v_1变到v_2的突然扩大管，分为两次扩大，（如题110图、b）则其局部水头损失为

$$h_j'=\frac{1}{2g}[(v_1-v)^2+(v-v_2)^2]$$

$$=\frac{1}{2g}(v_1^2+v_2^2-2vv_1-2vv_2+2v^2) \qquad (4)$$

将h_j'对v求导并令其等于零，即$\frac{dh_j'}{dv}=0$、则h_j'为最小可得

$$v=\frac{v_1+v_2}{2}$$

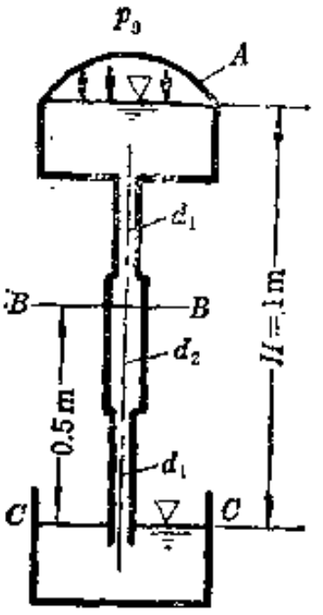
将v值代入（4）式，整理后得

$$h_j'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}=\frac{1}{2}h_f$$

所以由上式可知，两次突然扩大的局部水头损失为一次突然扩大水头损失的一半。

111 水由封闭容器A沿垂直变直径管道流入下面的水池，容器内$p_0=2\mathrm{N/cm^2}$且液面保持不变，若$d_1=50\mathrm{mm}$，$d_2=75\mathrm{mm}$，容器内液面与水池液面的高差$H=1\mathrm{m}$（只计局部水头损失）。求：

（1）管道的流量Q；



题 111 图

（ 2 ）距水池液面$h=0.5$m处的管道内B点的压强$p_B=$？

解：

（ 1 ） $p_0=2\text{N/cm}^2=\dfrac{2}{9.8}\times10$

$=2.04$ m水柱高

因$p_0>p_a$相当于容器内液面抬高2.04m，所以作用水头为$1+2.04=3.04$ m

管道流量为

$$Q=\frac{1}{\sqrt{\sum\zeta}}\sqrt{2g(H+2.04)}\cdot\frac{\pi d_1^2}{4}$$

局部水头损失系数：进口$\zeta_1=0.5$，出口$\zeta_2=1$，突然扩大

$$\zeta_3=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2=\left(1-\frac{d_1^2}{d_2^2}\right)^2=\left[1-\left(\frac{50}{75}\right)^2\right]$$

$=0.309$

突然缩小 $\zeta_4=0.5\left(1-\dfrac{A_2}{A_1}\right)=0.5\left(1-\dfrac{d_2^2}{d_1^2}\right)$

$$=0.5\left[1-\left(\frac{50}{75}\right)^2\right]=0.278$$

将各有关数值代入（ 1 ）式，得

$$Q=\frac{1}{\sqrt{0.5+0.309+0.278+1}}\sqrt{2g\times 3.04}\times\frac{3.14}{4}\times 0.05^2$$

$=0.0105\ \mathrm{m^3/s}$

（2）以C-C为基准面，写B-B断面和C-C断面的能量方程

$$\frac{p_B}{r}+0.5+\frac{v_B^2}{2g}=(\zeta_4+\zeta_2)\frac{v_1^2}{2g}$$

$$\frac{p_B}{r}=(0.278+1)\frac{\left(\frac{Q}{A_1}\right)^2}{2g}-0.5-\frac{\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2}{2g}$$

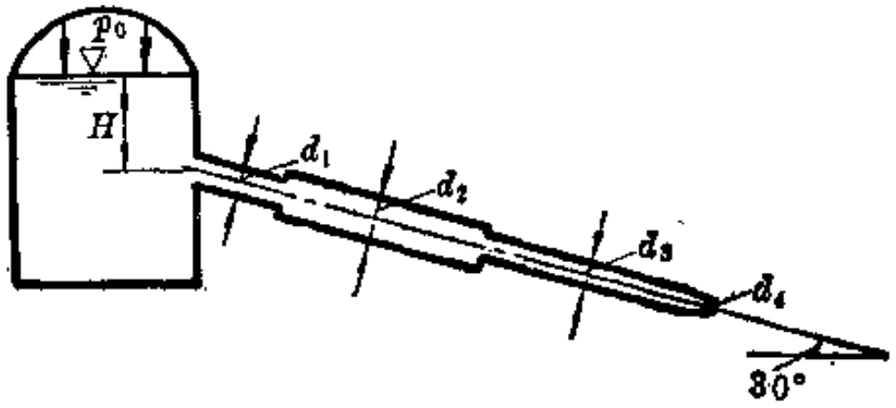
$$=1.278\times\frac{1}{2\times 9.8}\times\left(\frac{0.0105}{\frac{3.14}{4}\times 0.05^2}\right)^2$$

$$-0.5-\frac{1}{2\times 9.8}\times\left(\frac{0.0105}{\frac{3.14}{4}\times 0.075^2}\right)^2$$

$=1.867-0.5-0.288=1.079\ \mathrm{m}$

$p_B=9800\times 1.079=10.57\ \mathrm{kN/m^2}$

112　水自一相对压强$p_0=0.25$个大气压的密闭容器中沿一变化断面的管道流动，管轴线与水平线成$\alpha=30°$角，其终端为一圆锥形管嘴，设$H=15\mathrm{m}$，如不计能量损失，试求管中水流的流量，并绘制总水头线和测压管水头线。各段的管径$d_1=125\mathrm{mm}$，$d_2=150\mathrm{mm}$，$d_3=100\mathrm{mm}$，$d_4=75\mathrm{mm}$，管段总长度$l=l_1+l_2+l_3+l_4=4+6+5+0.3=15.3\mathrm{m}$。



题 112 图

解：

以通过*4-4*断面中心的水平面为基准面，写 0-0 和4-4断面的能量方程

$$H+l\sin 30+\frac{p_0}{\gamma}=\frac{v_4^2}{2g}$$

$$v_4=\sqrt{2g\left(H+l\sin 30+\frac{p_0}{\gamma}\right)}$$

$$=\sqrt{2\times 9.8\left(15+15.3\times\frac{1}{2}+2.5\right)}$$

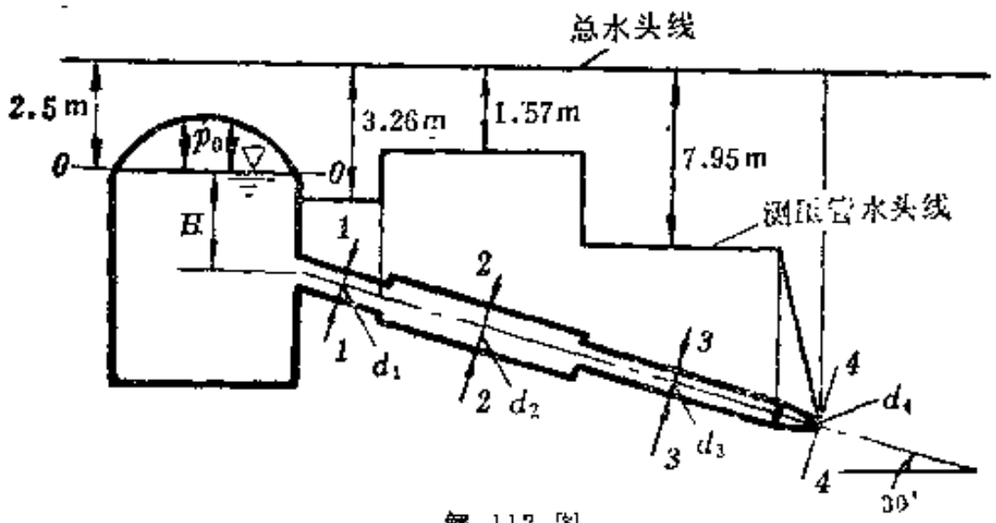
$$=22.2\ \text{m/s}$$

$$Q=v_4A_4$$

$$=22.2\times\frac{3.14}{4}\times 0.075^2$$

$$=0.098\ \text{m}^3/\text{s}$$

根据连续性方程，有



解 112 图

$$v_1A_1=v_4A_4$$

$$v_1=\left(\frac{d_4}{d_1}\right)^2 v_4=\left(\frac{0.075}{0.125}\right)^2 v_4=0.6^2\times v_4$$

$$=7.99\ \text{m/s}$$

$$\frac{v_1^2}{2g}=\frac{7.99^2}{2\times 9.8}=3.26\ \text{m}$$

同理 $$v_2=\frac{A_4}{A_2}\cdot v_4=\left(\frac{d_4}{d_2}\right)^2 v_4=0.25v_4=5.55\ \text{m/s}.$$

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{5.55^2}{2\times 9.8}=1.57\,\mathrm{m}$$

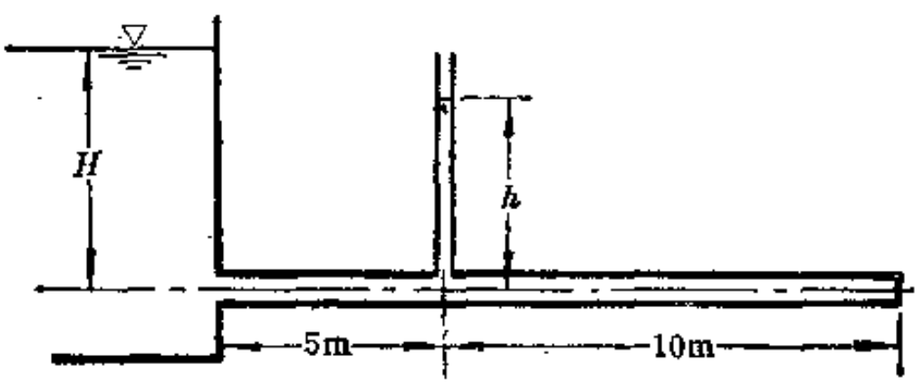
$$v_3=\frac{A_4}{A_3}\cdot v_4=\left(\frac{d_4}{d_3}\right)^2 v_4=0.75^2 v_4$$

$$=12.49\,\mathrm{m/s}$$

$$\frac{v_3^2}{2g}=\frac{12.49^2}{2\times 9.8}=7.95\,\mathrm{m}$$

总水头线与测压管水头线如图所示。因不计水头损失，故总水头线为一水平线，从总水头中减去各管段的流速水头值，即得各段的测压管水头线。

113 图示为一水平管路恒定流，水箱水头为H，已知管径$d=10\mathrm{cm}$，管长$l=15\mathrm{m}$，进口局部阻力系数$\zeta=0.5$，沿程阻力系数$\lambda=0.022$，在离出口10m处按装测压管，测得测压管水头$h=2\,\mathrm{m}$，今在管道出口处加上直径为5cm的管嘴，设管嘴的水头损失忽略不计，问此时测压管的水头h变为多少



题 113 图

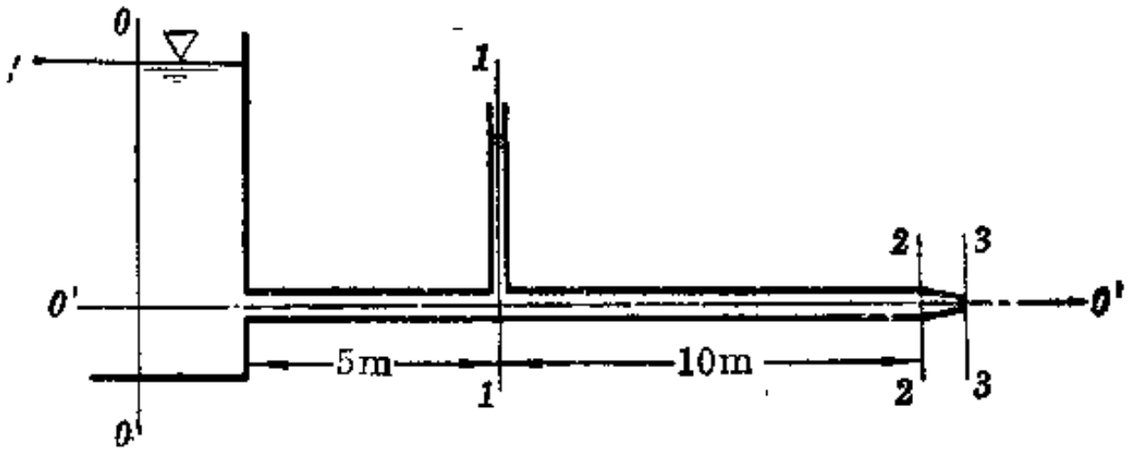
解

先求出水箱中的水头H，以通过管轴线的水平面0'-0'为基准面，写1-1及未安管嘴前出口断面2-2的能量方程

$$h+\frac{\alpha v^2}{2g}=\frac{\alpha v^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

$$2=0.022\times\frac{10}{0.1}\frac{v^2}{2\times 9.8}$$

$$v=4.22\ \mathrm{m/s}$$



解 113 图

再写0-0，2-2断面的能量方程求出H

$$H=\frac{2v^2}{2g}+\left(\lambda\frac{l}{d}+\zeta\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$=\left(\alpha+\lambda\frac{l}{d}+\zeta\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$=\left(1+0.022\times\frac{15}{0.1}+0.5\right)\frac{4.22^2}{2\times9.8}$$

$$=4.36\ \text{m}$$

在管道出口处加上直径为5cm的管嘴后，管内流速改变，设管嘴流速为v_3，写0-0、3-3断面的能量方程，求管内流速v.

$$H=\frac{2v_3^2}{2g}+\zeta\frac{v^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\qquad(1)$$

$$\because\quad v_3=\frac{A}{A_3}\cdot v=\frac{0.1^2}{0.05^2}\cdot v=4v$$

将v_3值代入（1）式得

$$4.36=\frac{(4v)^2}{2g}+0.5\frac{v^2}{2g}+0.022\times\frac{15}{0.1}\times\frac{v^2}{2g}$$

$$1.01v^2=4.36$$

$$v=2.08\ \text{m/s}$$

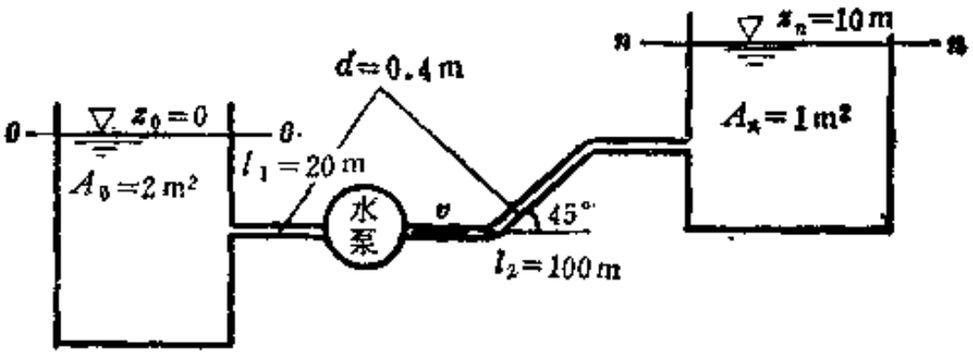
列0-0、1-1断面的能量方程求h

$$H=h+\frac{\alpha v^2}{2g}+\alpha\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\zeta\frac{v^2}{2g}$$

$$4.36=h+\left(1+0.022\frac{5}{0.1}+0.5\right)\frac{2.08^2}{2\times9.8}$$

$$h=3.79\text{m}$$

114 水流为恒定流，设水泵的扬程为13.62m。进口阻力系数$\zeta_1=0.5$，两个弯头阻力系数共为$2\zeta_2=0.37$，出口阻力系数$\zeta_3=1.0$，沿程阻力系数$\lambda=0.02$，其它尺寸如图所示，试求通过水泵的流量。



题 114 图

解：

以0-0水面为基准面，写0-0，n-n断面的能量方程

$$\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}+H_t=10+\frac{\alpha_n v_n^2}{2g}+h_f+h_j$$

令 $$\alpha_0=\alpha_n=1,\quad h_f=\lambda\frac{l_1+l_2}{d}\frac{v^2}{2g}$$

$$h_j=\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}=(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)\frac{v^2}{2g}$$

由连续性方程

$$v_0=\frac{A}{A_0}v,\qquad v_n=\frac{A}{A_n}v$$

$$A=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{3.14}{4}\times0.4^2=0.1256\ \text{m}^2$$

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{A}{A_0}\right)^2+H_t=10+\frac{v^2}{2g}\left(\frac{A}{A_n}\right)^2+\left(\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$v=\sqrt{\frac{2g(H_t-l0)}{\left(\frac{A}{A_n}\right)^2-\left(\frac{A}{A_0}\right)^2+\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_1+2\zeta_2+\zeta_3}}$$

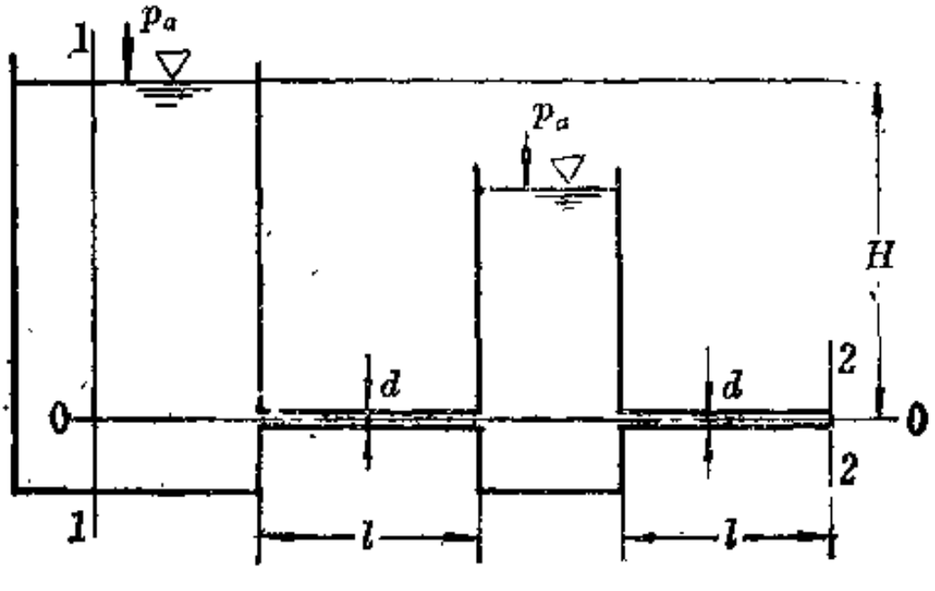
$$=\left\{\left[\ 2\times9.8(13.62-10)\right]\Big/\left[\left(\frac{0.1256}{1.0}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{0.1256}{2}\right)^2+0.02\times\frac{20+100}{0.4}+0.5+0.37+1.0\right]\right\}^{1/2}$$

$$=3\ \text{m/s}$$

$$Q=vA=3\times0.1256=0.38\ \text{m}^3/\text{s}$$

115 有一管路系统如图所示，由同样材料组成，每段管长$l=5$m，管径$d=6$cm，出口局部水头损失系数$\zeta_1=1$，进口局部水头损失系数$\zeta_2=0.5$，当$H=12$m时，流量$Q=15$l/s，试画出其总水头线和测压管水头线，并求管道的沿程水头损失系数λ值。若流量降到$Q=10$l/s，问此时的水头H应当多少？



题 115 图

解：

（1）求管道的沿程水头损失系数λ值

以0-0为基准面，写1-1，2-2断面的能量方程

$$H=\frac{\alpha v^2}{2g}+h_w \qquad (1)$$

式中　$a=1$

$$v_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\times 0.015}{3.14\times 0.06^2}=5.31\ \text{m/s}$$

$$h_w=h_j+h_f=2\zeta_2\frac{v_2^2}{2g}+\zeta_1\frac{v_2^2}{2g}+\lambda\frac{2l}{d}\cdot\frac{v_2^2}{2g}$$

代入（1）式得

$$H=\frac{v_2^2}{2g}\left(1+2\zeta_2+\zeta_1+\lambda\frac{2l}{d}\right)\qquad(2)$$

整理后得

$$\lambda=\frac{d}{2l}\left[\frac{2gH}{v_2^2}-(1+2\zeta_2+\zeta_1)\right]$$

$$=\frac{0.06}{2\times 5}\left[\frac{2\times 9.8\times 12}{5.31^2}-(1+2\times 0.5+1)\right]$$

$$=0.032$$

（2）绘制总水头线和测压管水头线

在进口和出口有局部水头损失，直管有沿程水头损失，计算如下：

$$h_{j2}=\zeta_2\frac{v_2^2}{2g}=0.5\times\frac{5.31^2}{2\times 9.8}=0.72\,\text{m}$$

$$h_{j1}=\zeta_1\frac{v_2^2}{2g}=1.0\times\frac{5.31^2}{2\times 9.8}=1.44\,\text{m}$$

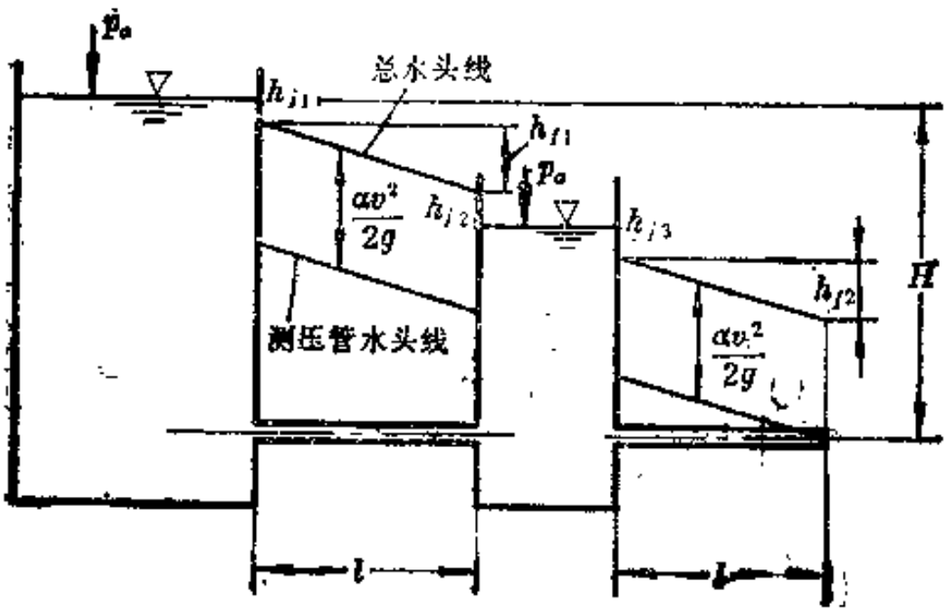


图 115 图

$$h_{f1}=h_{f2}=\lambda\frac{l}{d}\frac{v_2^2}{2g}=0.032\times\frac{5}{0.06}\times\frac{5.31^2}{2\times9.8}$$

$$=3.84\text{m}$$

根据数据绘出总水头线及测压管水头线如图所示。

（3）当流量降到$Q=10\text{l/s}$时，求水头H

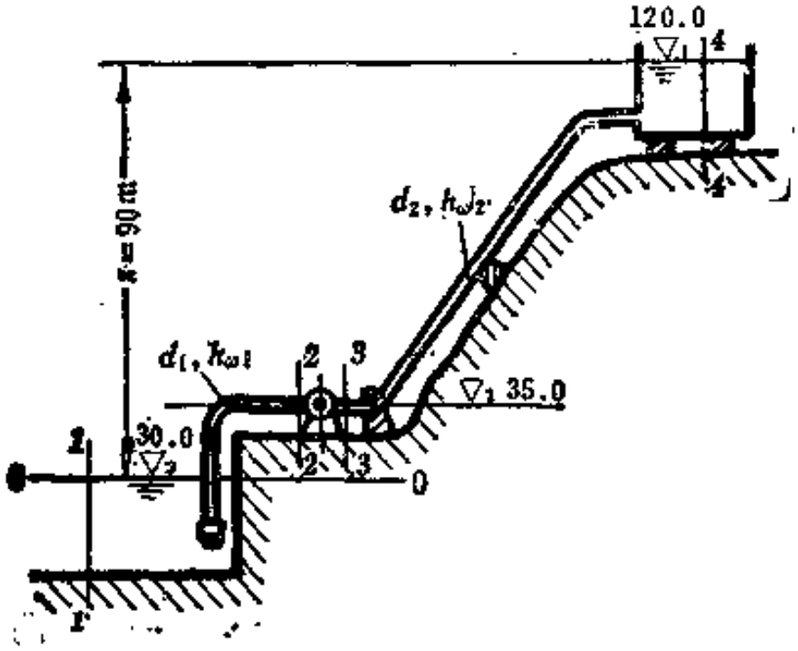
设水流在粗糙区，λ不随流速而改变，

$$H=\left[\frac{\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2}{2g}\left(1+2\zeta_2+\zeta_1+\lambda\frac{2l}{d}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{4\times0.01}{3.14\times0.06^2}\right)^2}{2\times9.8}\left(1+2\times0.5+1+0.032\times\frac{2\times5}{0.06}\right)\right]$$

$=5.32$ m

116 卧式离心水泵装置的数据如下：水塔水位$\nabla_1=120\text{m}$，泵轴高程$\nabla_2=35\text{m}$，吸水池水位$\nabla_3=30\text{m}$，吸水管内径$d_1=100\text{mm}$，在吸水管段的总水头损失$h_{w1}=10\frac{v_1^2}{2g}$，$v_1$为吸水管中流速，压力管内径$d_2=75\text{mm}$，相应的$h_{w2}=40\frac{v_2^2}{2g}$，$v_2$为压力管中流速。水泵的输入功率$N=13.3\text{kW}$，效率$\eta=0.75$。试



题 116 图

计算：

（1）水泵的扬程及出水量？

（2）水泵进出口处的测压管水头？

解：

（1）设集水池与水塔中的流速 $v \approx 0$，以0-0为基准面，写1-1与4-4断面的能量方程，得

$$H = z + h_{w1-4}$$

$$= 90 + 10\frac{v_1^2}{2g} + 40\frac{v_1^2}{2g}$$

式中 H 为水泵的扬程

因为 $$N = \frac{\gamma Q H}{1000\eta}$$

所以 $$H = \frac{1000\eta N}{\gamma Q}$$

则 $$\frac{1000\eta N}{\gamma Q} = 90 + 10\frac{v_1^2}{2g} + 40\frac{v_2^2}{2g} \qquad (1)$$

由连续性方程

$$v_1 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}$$

则 $$v_2 = v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

将以上各关系式代入（1）式得

$$\frac{1000 \times 0.75 \times 13.3}{9800 \times v_1 \times \frac{\pi d_1^2}{4}} = 90 + 10\frac{v_1^2}{2g} + 40\frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$$

化简整理得

$$129.6 = 6.96v_1^3 + 90v_1 \qquad (2)$$

用试算法求解得

$$v_1 = 1.28 \text{ m/s}$$

该水泵的扬程

$$H = z + h_{w1-4} = 90 + 6.96v_1^2 = 101.4 \text{ m}$$

相应的流量

$$Q=\frac{\pi}{4}d_1^2\cdot v_1=0.01\ \mathrm{m^3/s}$$

（2）求水泵进出口处的测压管水头

以0-0为基准面，写1-1与2-2断面的能量方程

$$0=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_1^2}{2g}+10\frac{v_1^2}{2g}$$

则水泵进口处的测压管水头为

$$z_2+\frac{p_2}{\gamma}=-(1+10)\frac{v_1^2}{2g}=-0.92\ \mathrm{m}$$

再以0-0为基准面，写2-2及3-3断面的能量方程

$$z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_1^2}{2g}+H=z_3+\frac{p_3}{\gamma}+\frac{\alpha_3 v_2^2}{2g}$$

即

$$z_3+\frac{p_3}{\gamma}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_1^2}{2g}-\frac{\alpha_3 v_2^2}{2g}+H$$

∵

$$v_2=v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2=2.276\ \mathrm{m/s}$$

并令

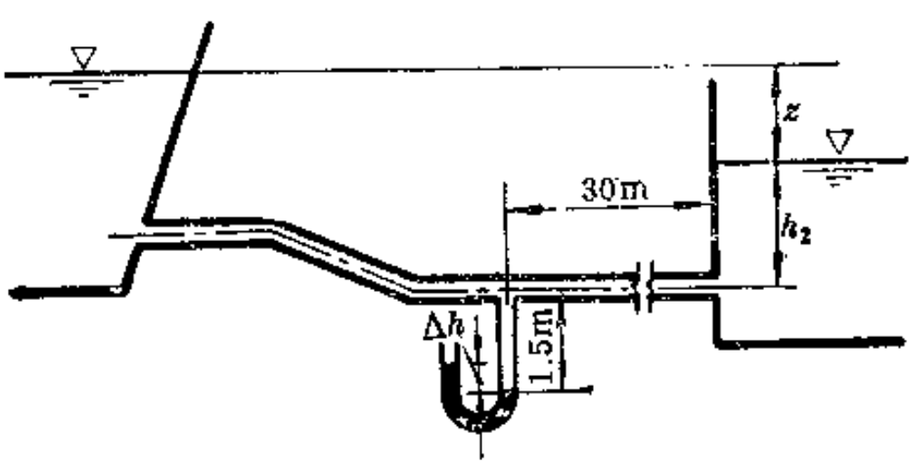
$$\alpha_2=\alpha_3=1$$

则水泵出口处测压管水头为

$$z_3+\frac{p_3}{\gamma}=-0.92+0.084-0.264+101.4$$

$$=100.3\ \mathrm{m}$$

117 一直径沿程不变的输水管道，连接两水池，如题117图所示，已知管道直径$d=0.3\mathrm{m}$，全管长$l=90\mathrm{m}$，沿程阻力系

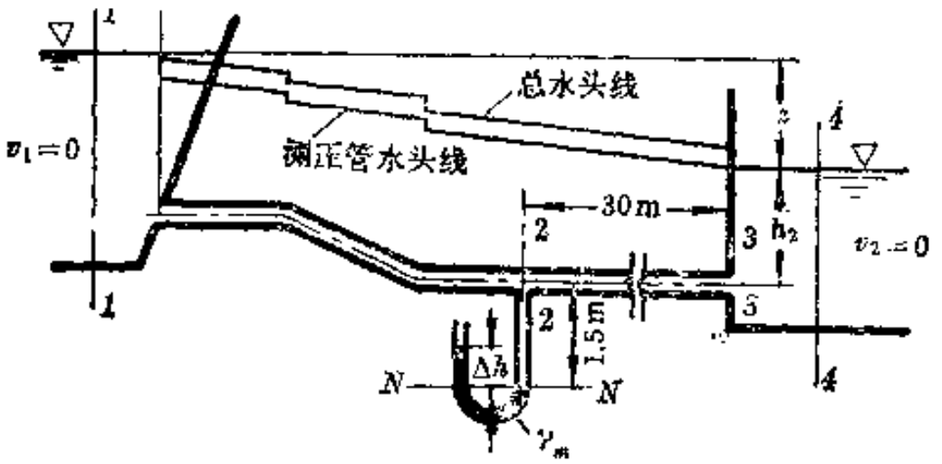


题 117 图

数 $\lambda=0.03$，进口局部水头损失系数 $\zeta_1=0.5$，折弯局部水头损失系数 $\zeta_2=0.3$，出口局部水头损失系数 $\zeta_3=1.0$，出口在下游水面以下深度 $h_2=2.3$m，同时在距出口130m处设有一"U"型水银测压计，其液面差 $\Delta h=0.5$m，较低的水银液面距离管轴1.5m，试确定：

（1）通过管道的流量 Q 以及两水池水面差 z；

（2）定性绘出总水头线及测压管水头线。



解 117 图

解：

因 $N-N$ 为等压面，故2-2断面的压强为

$$p_2=\Delta h\times 13.6\times 9800-1.5\times 9800$$
$$=(0.5\times 13.6-1.5)9800$$
$$=5.94\ \text{N/m}^2$$

以通过管道出口断面中心高程的水平面为基准面，写 2-2 和 4-4断面的能量方程

$$\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=h_2+h_{f2-4}+h_j$$

式中 $$h_{f2-4}=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.03\times\frac{30}{0.3}\times\frac{v^2}{2g}=3\times\frac{v^2}{2g}$$

$$h_j=\zeta_3\frac{v^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}$$

$\therefore$ $$\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=h_2+4\frac{v^2}{2g}$$

$$3=\frac{v^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+h_2$$

$$v=\sqrt{\frac{2g}{3}\left(\frac{p_2}{\gamma}+h_2\right)}=\sqrt{\frac{2\times9.8}{3}\left(\frac{51940}{9800}+2.3\right)}$$

$$=4.43\ \text{m/s}$$

通过流量 $Q=vA=4.43\times\frac{\pi}{4}\times0.3^2$

$$=0.313\ \text{m}^3/\text{s}$$

以下游水面为基准面，写1-1与4-4断面的能量方程

$$z=(\zeta_1+2\zeta_2+\zeta_3)\frac{v^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

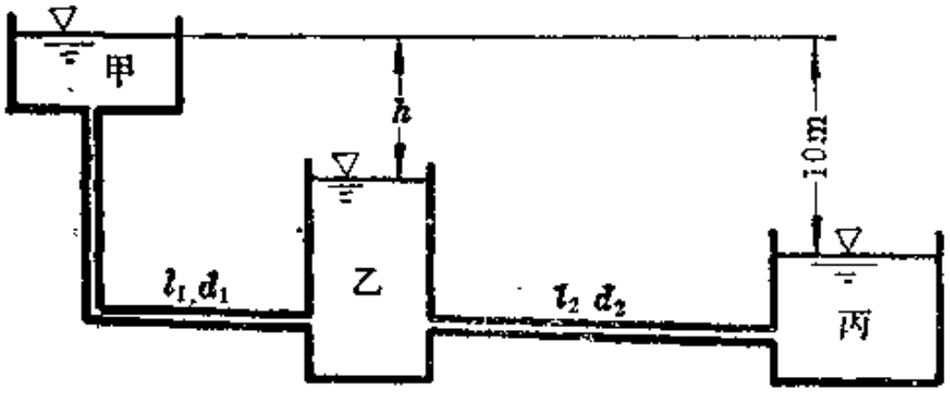
$$=\left(\zeta_1+2\zeta_2+\zeta_3+\lambda\frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$=\left(0.5+0.6+1+0.03\times\frac{90}{0.3}\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$=(2.1+9)\frac{4.43^2}{2\times9.8}=11.1\ \text{m}$$

测压管水头线及总水头线如解117图所示。

118 水从甲水箱经乙水箱流入丙水箱，甲丙两水箱水位不变，其水位差值为10m，如图所示，求甲箱至丙箱输送之流量及甲乙两水箱的水位差。已知水管的沿程阻力系数 $\lambda_1=\lambda_2=0.02$，管头损失系数 $\zeta_1=0.25$，进口水头损失系数 $\zeta_2=0.5$，出口水头损失系数 $\zeta_3=1.0$，$l_1=50\text{m}$，$d_1=0.25\text{m}$，$l_2=40\text{m}$、$d_2=0.2\text{m}$，



题 118 图

水箱体积很大，水箱中行近流速可忽略不计。

解：

求输送流量Q，以丙水箱的水面为基准面，写甲、丙两水箱液面的能量方程

$$10=\left(\lambda_1\frac{l_1}{d_1}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_{b2}\right)\frac{v_1^2}{2g}+\left(\lambda_2\frac{l_2}{d_2}+\zeta_3+\zeta_2\right)\frac{v_2^2}{2g}$$

$$=\left(0.02\times\frac{50}{0.25}+0.25+1+0.5\right)\frac{1}{2g}\left(\frac{4Q}{\pi d_1^2}\right)^2$$

$$+\left(0.02\times\frac{40}{0.2}+1.0+0.5\right)\frac{1}{2g}\left(\frac{4Q}{\pi d_2^2}\right)^2$$

$$Q^2=\frac{10}{406.48}=0.0246$$

$$Q=\sqrt{0.0246}=0.157\ \mathrm{m^3/s}$$

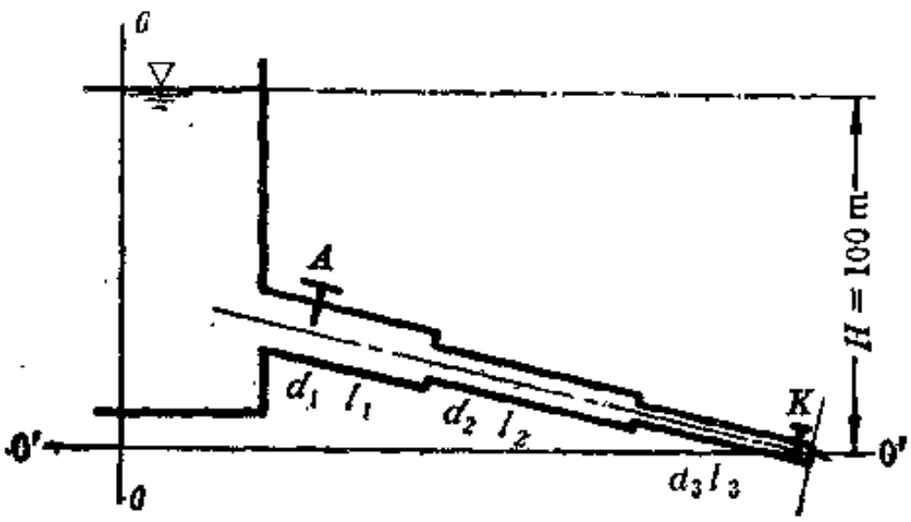
求甲、乙两水箱的水位差，以乙水箱的水面为基准面，对甲、乙两水箱水面的能量方程，得

$$h=\left(\lambda_1\frac{l_1}{d_1}+\zeta_2+\zeta_1+\zeta_3\right)\frac{v_1^2}{2g}$$

$$=\left(0.02\times\frac{50}{0.25}+0.5+0.25+1.0\right)\frac{1}{2\times9.8}$$

$$\times\left(\frac{4\times0.157}{3.14\times0.75^2}\right)^2=3.0\mathrm{m}$$

119 已道管道的阻力系数 $\lambda=0.011$，$d_1=1\mathrm{m}$，$l_1=100\mathrm{m}$，



题 119 图

$d_2=0.5\text{m}$，$l_2=200\text{m}$，$d_3=0.25\text{m}$，$l_3=300\text{m}$，进口局部损失系数$\zeta_1=0.5$，闸门A局部损失系数$\zeta_2=0.5$，闸门K和出口局部损失系数$\zeta_3=1.5$，水头$H=100\text{m}$，试求：

（1）通过管道的流量Q为多少？

（2）绘出管道的总水头线及测压管水头线。

解：

（1）计算流量Q

以管道出口中心线的水平面$0'-0'$为基准面，写0-0与3-3断面的能量方程，得

$$H=\Sigma h_f+\Sigma h_j \qquad (1)$$

式中 $$\Sigma h_f=h_{f1}+h_{f2}+h_{f3}=\lambda\frac{l_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}+\lambda\frac{l_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}+\lambda\frac{l_3}{d_3}\frac{v_3^2}{2g}$$

由连续性方程得

$$v_1A_1=v_2A_2=v_3A_3$$

$$v_1=\frac{A_3}{A_1}v_1=\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^2v_3$$

$$v_2=\frac{A_3}{A_2}v_3=\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2v_3$$

故 $$\Sigma h_f=\lambda\frac{l_1}{d_1}\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^4+\lambda\frac{l_2}{d_2}\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^4+\lambda\frac{l_3}{d_3}\frac{v_3^2}{2g}$$

$$=\frac{\lambda v_3^2}{2g}\left[\frac{l_1}{d_1}\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^4+\frac{l_2}{d_2}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^4+\frac{l_3}{d_3}\right]$$

$$=\frac{0.011v_3^2}{2\times9.8}\left[\frac{100}{1}\left(\frac{0.25}{1}\right)^4+\frac{200}{0.5}\left(\frac{0.25}{0.5}\right)^4+\frac{300}{0.25}\right]$$

$$=0.688v_3^2$$

$$\Sigma h_j=h_{j1}+h_{j2}+h_{j4}+h_{j5}+h_{j3}$$

$$=\zeta_1\frac{v_1^2}{2g}+\zeta_2\frac{v_1^2}{2g}+\zeta_4\frac{v_2^2}{2g}+\zeta_5\frac{v_3^2}{2g}+\zeta_3\frac{v_3^2}{2g}$$

式中ζ_4、ζ_5为突然缩小段的局部损失系数，其值为

$$\zeta_4=0.5\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right)=0.5\left[1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right]$$

$$=0.5\left[1-\left(\frac{0.5}{1}\right)^2\right]=0.375$$

$$\zeta_5=0.5\left(1-\frac{A_3}{A_2}\right)=0.5\left[1-\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2\right]$$

$$=0.5\left[1-\left(\frac{0.25}{0.5}\right)^2\right]=0.25$$

故 $$\Sigma h_j=\zeta_1\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^4+\zeta_2\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^4+\zeta_4\frac{v_3^2}{2g}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^4$$

$$+\zeta_5\frac{v_3^2}{2g}+\zeta_3\frac{v_3^2}{2g}$$

$$=\frac{v_3^2}{2g}\left[\zeta_1\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^4+\zeta_2\left(\frac{d_3}{d_1}\right)^4+\zeta_4\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^4+\zeta_5+\zeta_3\right]$$

$$=\frac{v_3^2}{2\times9.8}\left[0.5\times\left(\frac{0.25}{1}\right)^4+0.5\left(\frac{0.25}{1}\right)^4\right.$$

$$\left.+0.375\left(\frac{0.25}{0.5}\right)^4+0.25+1.5\right]$$

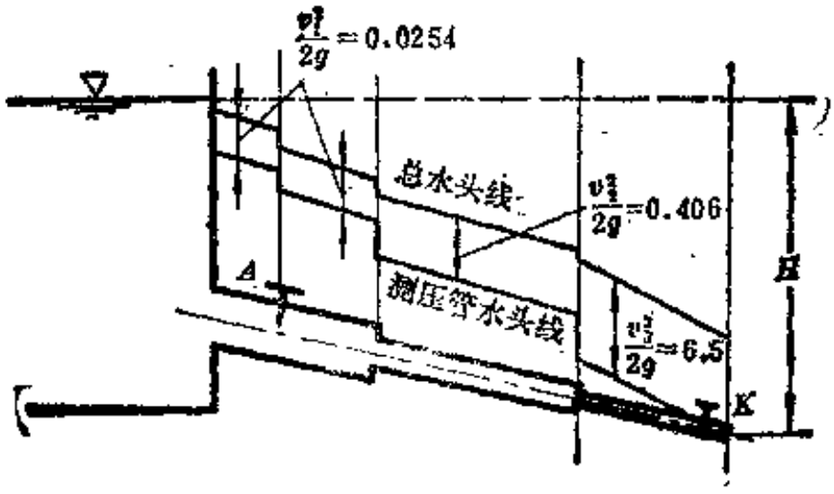
$$=0.0971v_3^2$$

将Σh_f和Σh_j值代入（1）式，得

$$100=0.688v_3^2+0.0971v_3^2$$

$$=0.785v_3^2$$

$$v_3=\sqrt{\frac{100}{0.785}}=11.29\quad \text{m/s}$$



解 119 图

故通过管道的流量 $Q=v_3A_3=v_3\frac{\pi}{4}d_3^2$

$$=11.29\times\frac{3.14}{4}\times0.25^2$$

$$=0.554\quad m^3/s$$

（2）绘制测压管水头线及总水头线

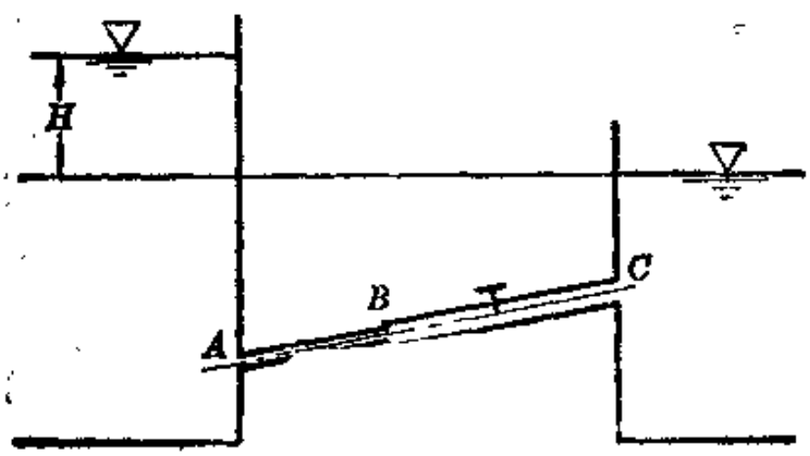
① 计算各管段的流速水头和水头损失，计算结果列表如下：

管段号	管长 l (m)	直径 d (m)	断面面积 A (m^2)	平均流速 v (m/s)	流速水头 $\frac{v^2}{2g}$ (m)	沿程损失 h_f (m)	局部损失 h_j	(m)
第一流段	100	1.00	0.785	0.705	0.0254	0.0279	h_{j_1}	0.0127
							h_{j_2}	0.0127
第二流段	200	0.50	0.196	2.823	0.406	1.787	h_{j_4}	0.1523
第三流段	300	0.25	0.049	11.290	6.50	85.73	h_{j_3}	2.1360
							h_{j_5}	0.7450

② 绘制测压管水头线

首先绘制总水头线，从总水头中减去各管段的流速水头值，即得各段的测压管水头线，如图所示。

120 一串联复合管连接两水池，如题120图所示，水池水位



题 120 图

差$H=4$m，管段AB长10m，直径为5cm，沿程损失系数为0.022，BC段长15m，直径为7.5cm，沿程损失系数为0.019，进口及闸门全开时，损失系数分别为0.1和0.18，接头B和出口C的断面衔接都是突然扩大。

（1）求管中流量；

（2）草绘出水力比降线图。

解：

（1）计算管中流量

管道出口在水池水位下，为淹没出流，水池中行近流速很小，可略去不计，设局部阻力系数进口为ζ_1，突然扩大为ζ_2，闸阀为ζ_3，出口为ζ_4，根据管道淹没出流公式

$$H=h_{wAB}+h_{wBC}$$

$$=\left[\zeta_1+\left(1-\frac{A_{AB}}{A_{BC}}\right)^2+\lambda_{AB}\frac{l_{AB}}{d_{AB}}\right]\frac{v_{AB}^2}{2g}+\left(\zeta_3+\zeta_4+\lambda_{BC}\frac{l_{BC}}{d_{BC}}\right)\frac{v_{BC}^2}{2g}$$

由连续性方程

$$v_{BC}=v_{AB}\frac{A_{AB}}{A_{BC}}=v_{AB}\left(\frac{d_{AB}}{d_{BC}}\right)^2$$ 代入上式整理后可得

$$v_{AB}=\sqrt{\frac{2gH}{\zeta_1+\left(1-\frac{d_{AB}^2}{d_{BC}^2}\right)^2+\lambda_{AB}\frac{l_{AB}}{d_{AB}}+\left(\zeta_3+\zeta_4+\lambda_{BC}\frac{l_{BC}}{d_{BC}}\right)\left(\frac{d_{AB}}{d_{BC}}\right)^4}}$$

$$=\left[\left(2\times9.8\times4\right)\Big/\left\{0.1+\left(1-\frac{0.05^2}{0.075^2}\right)^2+0.022\times\frac{10}{0.05}+\left(0.18+1+0.019\times\frac{15}{0.075}\right)\left(\frac{0.05}{0.075}\right)^4\right\}\right]^{1/2}$$

$=3.68$ m

$$v_{BC}=v_{AB}\left(\frac{d_{AB}}{d_{BC}}\right)^2=3.68\times\left(\frac{0.05}{0.075}\right)^2$$

$=1.64$ m/s

$$Q=v_{AB}\times\frac{\pi d_{AB}^2}{4}=3.68\times\frac{3.14}{4}\times0.05^2=0.0072\ \ \text{m}^3/\text{s}$$

（2）绘制水力比降线

① 局部力头损失

$$h_{j1}=\zeta_1\frac{v_{1B}^2}{2g}=0.1\times\frac{3.68^2}{2\times9.8}=0.069\quad\text{m}$$

$$h_{j2}=\left(1-\frac{d_{1B}^2}{d_{BC}^2}\right)^2\frac{v_{AB}^2}{2g}=\left(1-\frac{0.05^2}{0.075^2}\right)^2\times\frac{3.68^2}{2\times9.8}$$

$$=0.21\text{m}$$

$$h_{j3}=\zeta_3\frac{v_{BC}^2}{2g}=0.18\times\frac{1.64^2}{2\times9.8}=0.025\quad\text{m}$$

$$h_{j4}=\zeta_4\frac{v_{BC}^2}{2g}=1.0\times\frac{1.64^2}{2\times9.8}=0.137\quad\text{m}$$

② 沿程水头损失

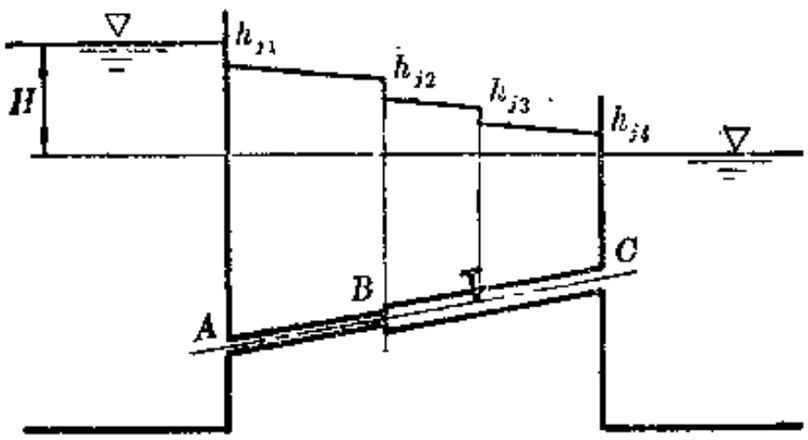
$$h_{fAB}=\lambda_{AB}\frac{l_{AB}}{d_{AB}}\frac{v_{AB}^2}{2g}=0.022\times\frac{10}{0.05}\times\frac{3.68^2}{2\times9.8}$$

$$=3.04\ \text{m}$$

$$h_{fBC}=\lambda_{BC}\frac{l_{BC}}{d_{BC}}\frac{v_{BC}^2}{2g}=0.019\times\frac{15}{0.075}\times\frac{1.64^2}{2\times9.8}$$

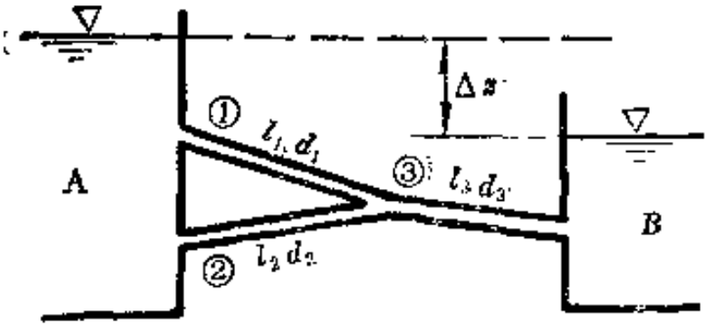
$$=0.52\ \text{m}$$

根据上述计算结果绘出水力比降线如解120图所示。



解 120 图

121 有A、B两水池，其间用旧钢管连接，管路布置如题121图所示，已知各管段长度$l_1=l_2=l_3=1000\text{m}$，各管段直径$d_1=d_2=d_3=40\text{cm}$，各管段的粗糙系数相同$n=0.012$，两水池



题 121 图

水面差$\Delta z=12.5$m，求A池流入B池的流量

解：

本题按长管计算

第①管与第②管为并联管，①、③两管为串联管，因为$d_1=d_2$，$l_1=l_2$、$n_1=n_2$，①管与②管的作用水头相等，故$Q_1=Q_2$，根据连续性原理，$Q_3=Q_1+Q_2$，故$Q_3=2Q_1$。

又因各管径相等，各管段n又相同，故流量模数$K_1=K_2=K_3$，且

$$K_1=A_1C_1\sqrt{R_1}=\frac{3.14}{4}\times0.4^2\times\frac{1}{0.012}\left(\frac{0.4}{4}\right)^{2/3}$$

$$=2.255\quad \mathrm{m^3/s}=K_2=K_3$$

$$\Delta z=h_{f1}+h_{f3}=\frac{Q_1^2}{K_1^2}l_1+\frac{Q_3^2}{K_3^2}l_3$$

$$=\frac{\left(\frac{Q_3}{2}\right)^2}{K_1^2}l_1+\frac{Q_3^2}{K_3^2}l_3=\left(\frac{\frac{1}{4}l_1}{K_1^2}+\frac{l_3}{K_3^2}\right)Q_3^2$$

∵ $l_1=l_3$，$K_1=K_3$

∴ $$\Delta z=\left(\frac{1}{4}+1\right)\frac{l_1}{K_1^2}Q_3^2=1.25\frac{l_1}{K_1^2}Q_3^2$$

$$Q_3=\sqrt{\frac{\Delta z}{1.25\frac{l_1}{K_1^2}}}=\sqrt{\frac{12.5}{1.25\times\frac{1000}{2.255^2}}}=225.8\quad \mathrm{l/s}$$

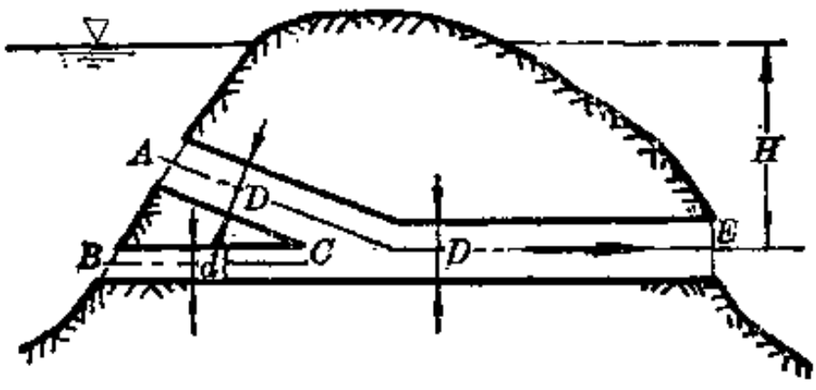
A池流入B池的流量为225.8l/s

122 某泄洪隧洞如题122图所示，ACE为主洞、洞径$D=6$m，

长度$l_{AC}=120\text{m}$，$l_{CB}=150\text{m}$，支洞BC也参加泄洪，其洞径$d=4\text{m}$，长度$l_{BC}=100\text{m}$。整个洞用钢筋混凝土衬砌，$n=0.014$，隧洞的局部水头损失系数分别为$\sum\zeta_{AC}=1.37$（相应于主洞的流速v_{AC}），$\sum\zeta_{BC}=4.47$（相应于支洞流速v_{BC}），当渲泄流量$Q=600\text{m}^3/\text{s}$时，试问：

（1）上洞和下洞的流量Q_{AC}和Q_{BC}为多少？

（2）上洞和下洞的水头损失h_{wA-C}和h_{wB-C}各为若干，其总水头损失H为多少？



题 122 图

解

（1）计算上洞和下洞的流量

由题意可视上洞AC与下洞BC为并联管路，两并联管道的水头损失应相等，即

$$h_{w_{A-C}}=h_{w_{B-C}}=h_w$$

$$\because\quad h_{w_{A-C}}=\sum\zeta_{AC}\frac{v_{AC}^2}{2g}+\lambda_{AC}\frac{l_{AC}}{D}\frac{v_{AC}^2}{2g}+\frac{\alpha_{AC}v_{AC}^2}{2g}$$

$$h_{w_{B-C}}=\sum\zeta_{BC}\frac{v_{BC}^2}{2g}+\lambda_{BC}\frac{l_{BC}}{d}\frac{v_{BC}^2}{2g}+\frac{\alpha_{BC}v_{BC}^2}{2g}\quad\because$$

式中 $\lambda=\dfrac{8g}{C^2}$，$v=\dfrac{Q}{A}$ $\therefore$

$$\therefore\quad\left(\sum\zeta_{AC}+\frac{8g}{C_{AC}^2}\cdot\frac{l_{AC}}{D}+\alpha_{AC}\right)\frac{Q_{AC}^2}{2gA_{AC}^2}$$

$$=\left(\sum\zeta_{BC}+\frac{8g}{C_{BC}^2}\cdot\frac{l_{BC}}{d}+\alpha_{BC}\right)\frac{Q_{BC}^2}{2gA_{BC}^2}\quad(1)$$

又 $Q_{BC}=Q-Q_{AC}=600-Q_{AC}$

$\sum\zeta_{AC}=1.37$

$$\frac{8g}{C_{AC}^2}\cdot\frac{l_{AC}}{D}=\frac{8\times9.8}{\left[\frac{1}{0.014}\left(\frac{6}{4}\right)^{1/6}\right]^2}\times\frac{120}{6}=0.268$$

令 $\alpha_{AC}=\alpha_{BC}=1$

$\sum\zeta_{BC}=4.47$

$$\frac{8g}{C_{BC}^2}\cdot\frac{l_{BC}}{d}=\frac{8\times9.8}{\left[\frac{1}{0.014}\left(\frac{4}{4}\right)^{1/6}\right]^2}\times\frac{100}{4}=0.384$$

$$\frac{1}{2gA_{AC}^2}=\frac{1}{2\times9.8}\left(\frac{4}{3.14\times6^2}\right)^2=6.38\times10^{-5}$$

$$\frac{1}{2gA_{BC}^2}=\frac{1}{2\times9.8}\left(\frac{4}{3.14\times4^2}\right)^2=3.23\times10^{-4}$$

将以上各值分别代入（1）式，得

$$(1.37+0.268+1)\times6.38\times10^{-5}Q_{AC}^2=(4.47+0.384+1)\times3.23\times10^{-4}(600-Q_{AC})^2$$

化简得 $$Q_{AC}^2-1317.4Q_{AC}+395200=0 \qquad (2)$$

解方程式（2）得

$$Q_{AC}=462\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_{BC}=600-462=138\text{m}^3/\text{s}$$

（2）计算上洞和下洞的水头损失$h_{w_{A-C}}$和$h_{w_{B-C}}$，及总水头损失H

由于上洞和下洞的水头损失相等、即

$$h_{w_{A-C}}=h_{w_{B-C}}$$

故 $$h_{w_{B-C}}=(4.47+0.384+1)\times3.23\times10^{-4}Q_{BC}$$
$$=5.854\times3.23\times10^{-4}\times138$$
$$\approx36\text{m}$$

以隧洞出口E断面的中心线的水平面为基准面，写水库进口断面和E-E断面的能量方程，得

$$H=\frac{v_{C\cdot E}^2}{2g}+h_{w_{A-C}}+h_{w_{C-E}}$$

$$=h_{w_{A-C}}+\left(1+\lambda_{CE}\frac{l_{CE}}{D}\right)\frac{v_{CE}^2}{2g}$$

$$=36+\left\{1+\left[\frac{1}{0.014}\times\left(\frac{6}{4}\right)^{1/6}\right]^2\times\frac{8\times9.8}{150}\right\}\cdot\frac{600^2}{2\times9.8\left(\frac{3.14\times6^2}{4}\right)^2}$$

$$=36+30.72$$

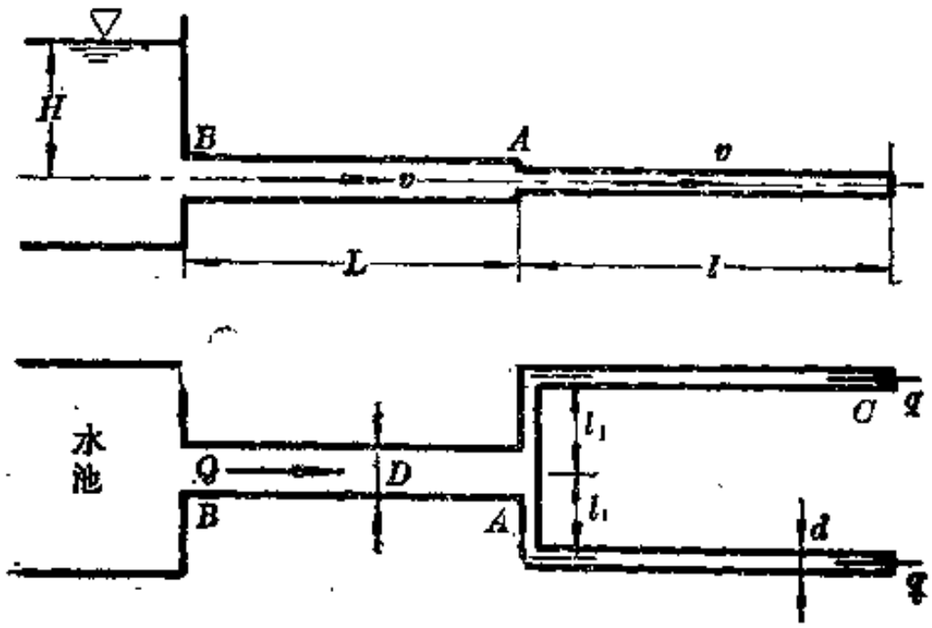
$$=66.72\text{m}$$

123 用管道由水池引水，如题123图所示，已知流量q＝10 l/s，管道直径d＝10cm，D＝20cm，各段管长L＝50m，l＝400m，l_1＝30m，管道沿程损失系数λ＝0.019，局部水头损失忽略不计．试求：

（1）A点的压强；

（2）水池的水位H；

（3）如果在两支引水管中使其中一支的管径变为15cm，而流量保持不变，问管长应如何改变？



题 123 图

（4）如果原来支管流量、直径、长度等均不变，只是采用管道的当量粗糙度△=0.1mm，问λ应为若干？（水的运动粘滞系数$\nu=0.0157cm^2/s$）

解：

（1）A点的压强

以管道中心线的水平面为基准面，写A-A断面和支管道出口断面C的能量方程，得

$$\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha_A v_1^2}{2g}=\frac{\alpha v^2}{2g}+h_{f\,A-c}$$

$$\frac{p_A}{\gamma}=\frac{\alpha v^2}{2g}-\frac{\alpha_A v_1^2}{2g}+h_{f\,A-c}$$

令 $$\alpha_A=\alpha=1$$

∵ $$Q=2q$$

$$v_A=\frac{Q}{A_A}=\frac{4Q}{\pi D^2}=\frac{4\times 0.02}{3.14\times 0.2^2}=0.637\ \text{m/s}$$

$$v=\frac{q}{A}=\frac{4q}{\pi d^2}=\frac{4\times 0.01}{3.14\times 0.1^2}=1.274\ \text{m/s}$$

$$h_{f\,A-c}=\lambda\frac{(l_1+l)}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

$$=0.019\times\frac{430}{0.1}\times\frac{1.274^2}{2\times 9.8}$$

$$=6.76\text{m}$$

∴ $$\frac{p_A}{\gamma}=\frac{1.274^2}{2\times 9.8}-\frac{0.637^2}{2\times 9.8}+6.76$$

$$=6.822\ \text{m水柱}$$

$$p_A=6.822\times 9800$$

$$=66860\ \text{N/m}^2$$

$$=66.86\ \text{kN/m}^2$$

（2）求水池的水位H

水池的行进流速v_0很小，可忽略不计，以管道中心线的水平面为基准面，写水池表面及管道出口断面的能量方程

$$H=\frac{\alpha v^2}{2g}+h_{f_{B-A}}+h_{f_{A-C}}$$

式中
$$h_{f_{B-A}}=\lambda\frac{L}{D}\cdot\frac{v_A^2}{2g}$$
$$=0.019\times\frac{50}{0.2}\times\frac{0.637^2}{2\times9.8}$$
$$=0.098\text{m}$$

$\therefore$
$$H=\frac{1.274^2}{2\times9.8}+0.098+6.76$$
$$=6.941\text{m}$$

（3）当一支管的管径变为$d=0.15$m时，流量保持不变，求管道长度的变化

当$d=0.15$m时，管段AC的流速为

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{4q}{\pi d^2}=\frac{4\times0.01}{3.14\times0.15^2}=0.566\text{m/s}$$

流速水头为

$$\frac{v^2}{2g}=\frac{0.566^2}{2\times9.8}=0.0163\text{m}$$

沿程水头损失为

$$h_{f_{A-C}}=\lambda\frac{(l_1+l)}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}$$
$$=0.019\times\frac{(l_1+l)}{0.15}\times\frac{0.566^2}{2\times9.8}$$
$$=2.065\times10^{-3}(l_1+l)$$

$\because$
$$H=\frac{\alpha v_C^2}{2g}+h_{f_{B-A}}+h_{f_{A-C}}$$
$$=0.0163+0.098+2.065\times10^{-3}(l_1+l)$$

$\therefore$
$$l_1+l=\frac{6.941-0.01143}{2.065\times10^{-3}}=3305.9\text{m}$$

故当Q一定时，直径变化，管道增长至3305.9m.

（4）当管道采用当量粗糙度为$\triangle=0.1$mm时，求沿程损失系数λ

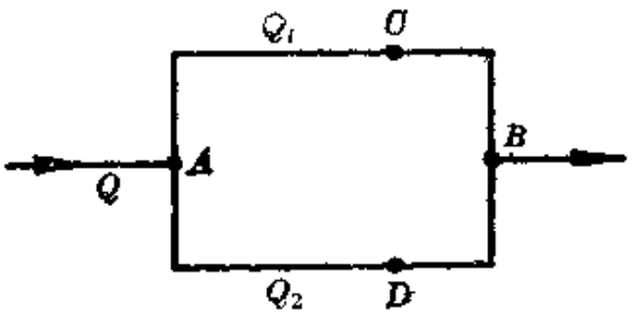
因管道AC段的流速为$v=1.274\text{m/s}$

管道的雷诺数 $\text{Re}=\dfrac{vd}{\nu}=\dfrac{127.4\times10}{0.0157}=81146$

管道的相对粗糙度$\dfrac{\triangle}{d}=\dfrac{0.1}{100}=0.001$

用上述数据查莫迪图得 $\lambda=0.0225$

124 长管串联管路AC、CB与串联管路AD、DB并联、如图所示。已知流入此并联管路的液体流量$Q=15\text{cm}^3/\text{s}$，液体的运动粘滞系数$\nu=0.0131\text{cm}^2/\text{s}$，内径$d_{AC}=d_{AD}=5\text{mm}$，$d_{CB}=d_{DB}=10\text{mm}$，长度$l_{AC}=l_{AD}=1000\text{cm}$，$l_{CB}=l_{DB}=500\text{cm}$，求$AB$段的沿程水头损失$h_f$。



题 124 图

解：

因管道ACB与ADB并联，则$h_{f_{ACB}}=h_{f_{ADB}}$，又因$d_{AC}=d_{AD}$，$d_{CB}=d_{DB}$，$l_{AC}=l_{AD}$，$l_{CB}=l_{DB}$，且可认为管道材料相同，即$\lambda_{AC}=\lambda_{AD}=\lambda_{CB}=\lambda_{DB}$

则
$$Q_1=Q_2=\frac{Q}{2}=\frac{15}{2}=7.5\text{cm}^3/\text{s}$$

现取ACB管，计算其沿程水头损失$h_{f_{ACB}}$即可。

对AC段：

$$v_1=\frac{Q_1}{A_1}=\frac{4Q_1}{\pi d_1^2}=\frac{4\times7.5}{3.14\times0.5^2}=38.22\text{cm/s}$$

$$\text{Re}_1=\frac{v_1d_1}{\nu}=\frac{38.22\times0.5}{0.0131}=1458.78<2000\ \text{层流}$$

$$\therefore\quad \lambda_1=\frac{64}{\text{Re}_1}=\frac{64}{1458.78}=0.0439$$

对CB段：

$$v_2=\frac{Q_2}{A_2}=\frac{4Q_2}{\pi\times d_2^2}=\frac{4\times 7.5}{3.14\times 12}=9.55\text{cm/s}$$

$$\text{Re}_2=\frac{v_2 d_2}{\nu}=\frac{9.55\times 1}{0.0131}=729<2000\ \text{属层流}$$

$$\therefore\quad \lambda_2=\frac{64}{\text{Re}_2}=\frac{64}{729}=0.0878$$

管路ACB的水头损失

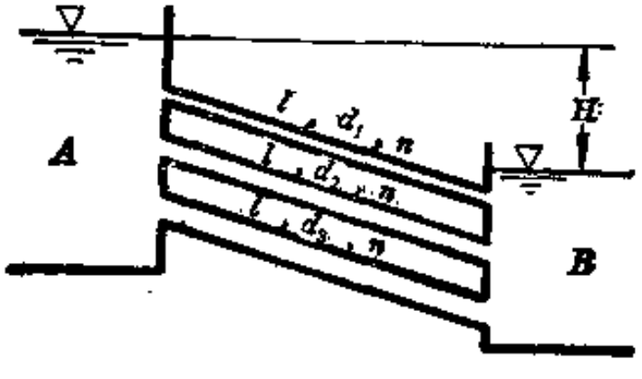
$$h_{f_{ACB}}=\lambda_1\frac{l_1}{d_1}\cdot\frac{v_1^2}{2g}+\lambda_2\cdot\frac{l_2}{d_2}\cdot\frac{v_2^2}{2g}$$

$$=0.0439\times\frac{1000}{0.5}\times\frac{38.22^2}{2\times 9.8}$$

$$+0.0878\times\frac{500}{1}\times\frac{9.55^2}{2\times 9.8}$$

$$=67.5\text{cm}$$

125　用长度为l的三根平行管路由A水池向B水池引水，管径$d_2=2d_1$，$d_3=3d_1$，管路的粗糙系数n均相等，局部水头损失不计，试分析三条管路的流量比。



题 125 图

解：

三根管路为并联管路，按长管计算则有

$$h_{f1}=h_{f2}=h_{f3}=H$$

即

$$\lambda_1\cdot\frac{l}{d_1}\cdot\frac{v_1^2}{2g}=\lambda_2\cdot\frac{l}{d_2}\cdot\frac{v_2^2}{2g}$$

$$= \lambda_3 \cdot \frac{l}{d_3} \cdot \frac{v_3^2}{2g} \qquad (1)$$

∵ $$\lambda = \frac{8g}{C^2} = \frac{8gn^2}{R^{1/3}} = \frac{8gn^2}{\left(\frac{d}{4}\right)^{1/3}}$$

故 $$\lambda_1 = \frac{8gn^2}{\left(\frac{d_1}{4}\right)^{1/3}},$$

$$\lambda_2 = \frac{8gn^2}{\left(\frac{2d_1}{4}\right)^{1/3}},$$

$$\lambda_3 = \frac{8gn^2}{\left(\frac{3d_1}{4}\right)^{1/3}}$$

因各管的 n 均相等

则 $$\lambda_2 = \frac{\left(\frac{d_1}{4}\right)^{1/3}\lambda_1}{\left(\frac{2d_1}{4}\right)^{1/3}} = (2)^{-\frac{1}{3}}\ \lambda_1 \qquad (2)$$

$$\lambda_3 = \frac{\left(\frac{d_1}{4}\right)^{1/3}\lambda_1}{\left(\frac{3d_1}{4}\right)^{1/3}} = (3)^{-\frac{1}{3}}\ \lambda_1 \qquad (3)$$

将（2）、（3）式代入（1）式，得

$$\lambda_1 \frac{l_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g} = 2^{-\frac{1}{3}}\ \lambda_1 \frac{l}{2d_1}\frac{v_2^2}{2g}$$

$$= 3^{-\frac{1}{3}}\ \lambda_1 \frac{l}{3d_1}\frac{v_3^2}{2g}$$

$$v_1^2 = \frac{1}{2^{4/3}}v_2^2 = \frac{1}{3^{4/3}}v_3^2 \qquad (4)$$

又∵ $$v_1=\frac{4Q_1}{4d_1^2};$$

$$v_2=\frac{4Q_2}{4.4d_1^2}=\frac{Q_2}{\pi d_1^2}$$

$$v_3=\frac{4Q_1}{\pi\cdot 9d_1^2}$$

将v_1、v_2、v_3的关系式代入（ 4 ）式，得

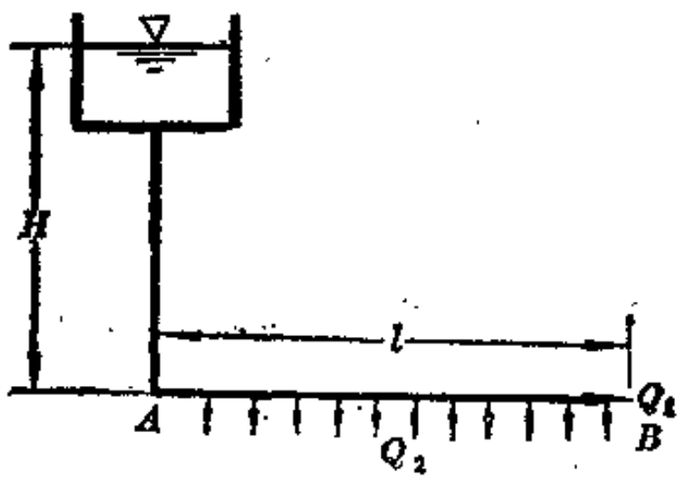
$$\frac{16Q_1^2}{\pi^2 d_1^4}=\frac{Q_2^2}{2^{4/3}\pi^2 d_1^4}=\frac{16Q_3^2}{3^{4/3}\cdot 3^1\pi^2 d_1^4}$$

即 $$Q_1^2=\frac{1}{2^{16/3}}Q_2^2=\frac{1}{3^{16/3}}Q_3^2$$

于是三条管路流量比为

$$Q_1=0.157Q_2=0.0534Q_3$$

126 有一沿程均匀出流管路AB，如题126图所示，长1000m，AB段单位长度上泄出的总流量Q_2均等于0.1l/s，当通过流量Q_1等于零时，AB段水头损失为0.8m，求当通过流量$Q_1=100$l/s时的AB段水头损失。



题 126 图

解：

沿程均匀出流管可按下式计算水头损失，即

$$h_f=\frac{l}{K^2}\left(Q_1^2+Q_1\cdot Q_2 l+\frac{1}{3}Q_2^2 l^2\right) \qquad (1)$$

从题设知，当通过流量$Q_1=0$时，

$$h_{f_{AB}}=\frac{l}{K^2}\cdot\frac{1}{3}Q_2^2l^2=0.8$$

即

$$\frac{l}{K^2}\cdot\frac{1}{3}Q_2^2l^2=0.8$$

$$\frac{l}{K^2}=\frac{3\times0.8}{Q_2^2l^2}=\frac{2.4}{1\times10^{-8}\cdot10^6}=240\mathrm{s^2/m^6}$$

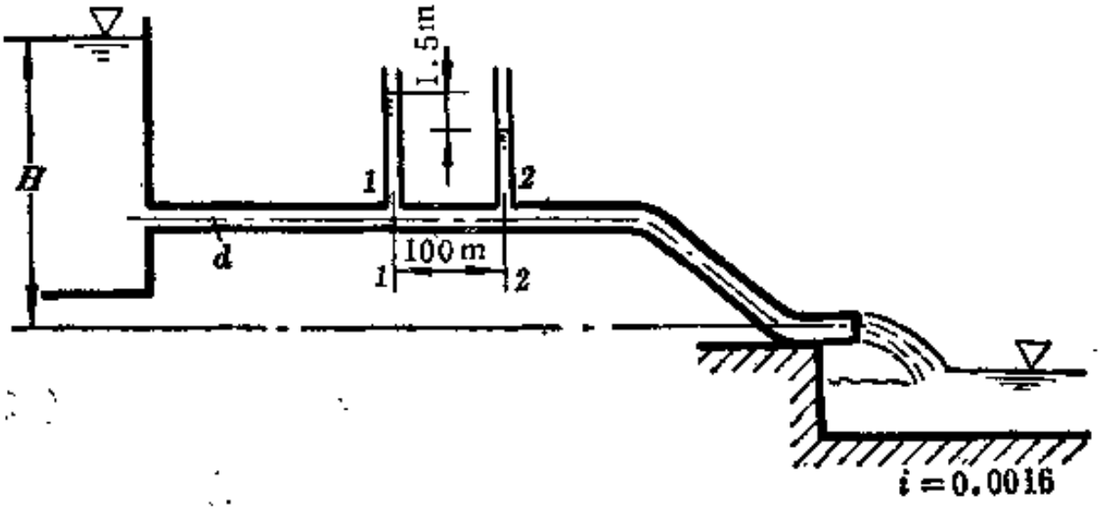
当通过流量$Q_1=0.1\mathrm{m^3/s}$时，由式（1）得

$$h_{f_{AB}}=240\left[0.1^2+0.1\times\frac{0.1}{1000}\times1000+\frac{1}{3}\left(\frac{0.1}{1000}\times1000\right)^2\right]$$

$$=5.6\mathrm{m}$$

即流量Q_1为100l/s时，AB段的水头损失为5.6m。

127 有一长管自水池引水，管道长$l=1000\mathrm{m}$，$d=0.6\mathrm{m}$，$n=0.012$，末端与一长而直的矩形棱柱体水力最佳断面渠道相接如题127图所示，渠道糙率$n=0.02$，底坡$i=0.0016$，求管道的水头H和明渠产生均匀流时的底宽和水深。



题 127 图

解：

$$h_{f_{1-2}}=\frac{p_1-p_2}{\gamma}=1.5\mathrm{m}$$

故管道全程的沿程水头损失为

$$h_f = 1000 \times \frac{1.5}{100} = 15\text{m}$$

$$J = \frac{h_f}{l} = \frac{15}{1000} = 0.015$$

由谢才公式可知管道的流速为

$$v = C\sqrt{RJ}$$

式中 $$C = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{0.012} \times \left(\frac{0.6}{4}\right)^{1/6} = 60.74$$

$$\therefore \quad v = 60.74 \times \sqrt{\frac{0.6}{4} \times 0.015} = 2.88\ \text{m/s}$$

忽略局部水头损失，以通过管道出口中心线的水平面为基准面，写水池断面和管道出口断面的能量方程

$$H = \frac{\alpha v^2}{2g} + h_f$$

$$= \frac{1 \times 2.88^2}{2 \times 9.8} + 15 = 15.42\text{m}$$

流量 $$Q = v \cdot A = 2.88 \times \frac{\pi}{4} \times 0.6^2$$

$$= 0.814\text{m}^3/\text{s}$$

对下游明渠

$$Q = AC\sqrt{Ri}$$

$$= bh\frac{1}{n}R^{1/6}\sqrt{Ri}$$

$$= bh\frac{1}{n}\left(\frac{bh}{b+2h}\right)^{2/3}\sqrt{i} \qquad (1)$$

对于矩形断面明渠，水力最佳断面的宽深比为

$$b = 2h$$

将 b 值代入（1）式，得

$$Q = 2h^2 \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{h}{2}\right)^{2/3} i^{1/2}$$

$$h^{8/3} = \frac{nQ}{2^{1/3} \cdot i^{1/2}}$$

$$h=\left[\frac{nQ}{2^{1/3}\cdot i^{1/2}}\right]^{3/8}=\left[\frac{0.02\times 0.814}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{0.0016}}\right]^{3/8}$$

$$=0.65\text{m}$$

$$b=2\times 0.65=1.31\text{m}$$

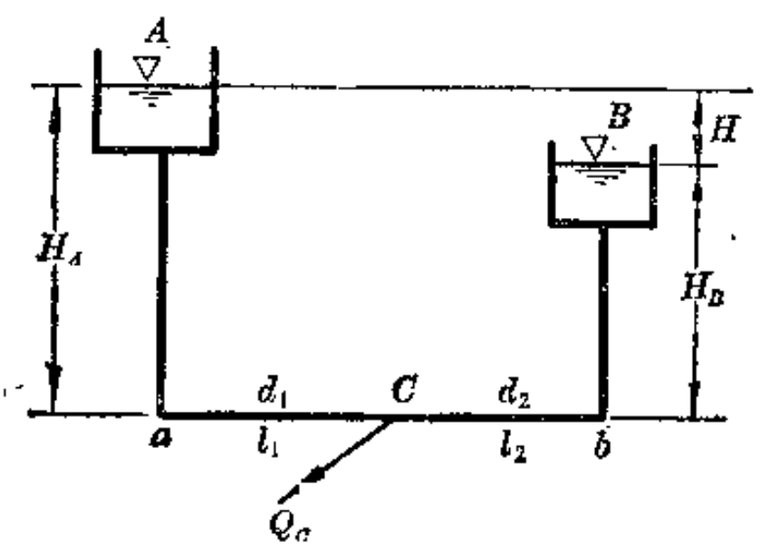
128 有A、B两水池，两池水面差为H，中间用管路连通，从管路的C点进行供水，已知从A池到C点处的水管长为l_1，管径为d_1，从C到B池的水管长为l_2，管径为d_2，管道的糙率为n，水流流动时，两池水面保持不变，管流可按长管考虑，试分析：

（1）当Q_c变化时，C点处测压管水头将如何变化？

（2）试问当C点处测压管水头多高时，才没有流量输送到B水池？此时Q_c值为多少？（列出计算式）

（3）当C点的测压管水头（ab为基准面）低于H_B时，Q_c值又为多少？（列出计算式）

（4）C点的测压管水头为多高时，Q_c达到最大值，此时$Q_{c_{max}}=$？（列出计算式）



题 128 图

解：

（1）C点的测压管水头随着流量Q_c的增大而减小

（2）当$H_c=H_B$时，就没有流量输送到B池，此时Q_c为

$$Q_c=A_1C_1\sqrt{R_1J_1}$$

$$= \frac{\pi d_1^{8/3}}{4^{5/3} n} \sqrt{\frac{H_A - H_B}{l_1}} \qquad (1)$$

（3）当$H_C < H_B$时，A、B两水池同时向C点供水。

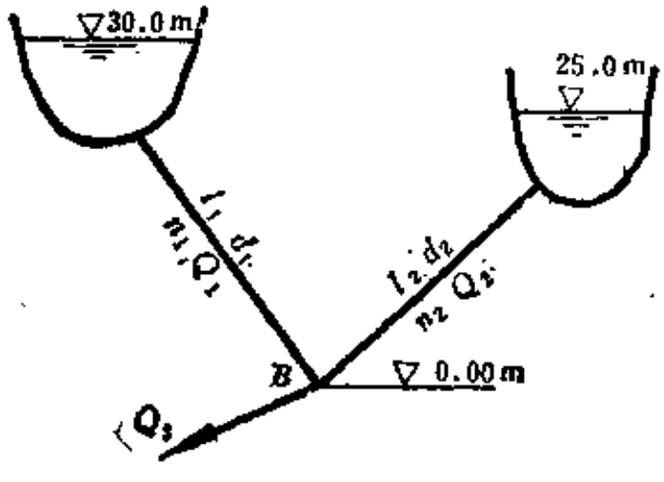
$$Q_C = Q_{AC} + Q_{BC}$$

$$= \frac{\pi}{4^{5/3} n} \left(d_1^{8/3} \sqrt{\frac{H_A - H_C}{l_1}} + d_2^{8/3} \sqrt{\frac{H_B - H_C}{l_2}} \right) \qquad (2)$$

（4）由（2）式可看出，当$H_C = 0$时，Q_C为最大。

$$Q_{C_{max}} = \frac{\pi}{4^{5/3} \cdot n} \left(d_1^{8/3} \sqrt{\frac{H_A}{l_1}} + d_2^{8/3} \sqrt{\frac{H_B}{l_2}} \right) \qquad (3)$$

129 如图示，两水库联合向化肥厂B供水，已知$l_1 = l_2 = 1200\text{m}$，$d_1 = d_2 = 0.3\text{m}$，$n_1 = n_2 = 0.012$，（1）在满足化肥厂所需最小压强水头为15m的条件下，试计算化肥厂可能得到的最大供水流量$Q_{3_{max}} = ?$（2）化肥厂得到的供水量Q_3是多少时，$Q_2 = 0$（谢才系数C值按满宁公式$C = \frac{1}{n} R^{1/6}$计算）



题 129 图

解：

（1）按长管计算，求$Q_{3_{max}}$

$$K_1 = K_2 = AC\sqrt{R}$$

$$=\frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{1}{n}R^{2/3}$$

$$=\frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{d}{4}\right)^{2/3}$$

$$=\frac{3.14\times0.3^2}{4}\times\frac{1}{0.012}\times\left(\frac{0.3}{4}\right)^{2/3}$$

$$=1.07\text{m}^3/\text{s}$$

$$H_1=30-15-15\text{m}$$

$$H_2=25-15=10\text{m}$$

$$Q_1=K_1\sqrt{\frac{H_1}{l_1}}=1.07\sqrt{\frac{15}{1200}}=0.12\text{m}^3/\text{s}$$

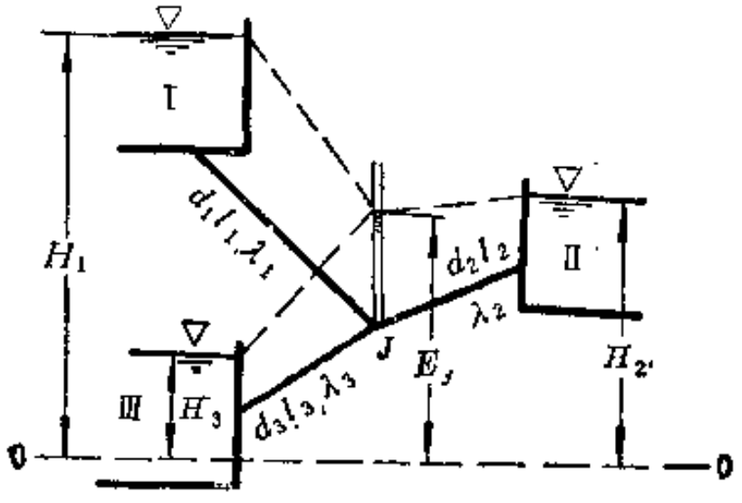
$$Q_2=K_2\sqrt{\frac{H_2}{l_2}}=1.07\sqrt{\frac{10}{1200}}=0.098\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_3=Q_1+Q_2=0.12+0.098=0.218\text{m}^3/\text{s}$$

（2）当B点所需的压强水头为25m时，$Q_2=0$，此时$H_3=30-25=5\text{m}$，Q_3为

$$Q_3=K_1\sqrt{\frac{H_3}{l_1}}=1.07\sqrt{\frac{5}{1200}}=0.069\text{m}^3/\text{s}$$

130 假定三水库的水面高程分别为H_1，H_2，H_3，三条分枝管路的基本数据为d_1，l_1，λ_1；d_2，l_2；λ_2；d_3，l_3，λ_3，如何判别各管中的水流方向？设$H_1=10\text{m}$，$H_2=7\text{m}$，$H_3=0$，$d_1=100\text{mm}$，$l_1=180\text{m}$，$\lambda_1=0.025$，$d_2=80\text{mm}$，$l_2=72\text{m}$，



题 130 图

$\lambda_2=0.025$，$d_3=100\text{mm}$，$l_3=144\text{m}$，$\lambda_3=0.025$，试求管中流量Q_1，Q_2和Q_3。

解：

解法一：

首先判断是合流管还是分流管。

设三管交点J处的测压管水头$E_j=H_2=7\text{m}$，此时$Q_2=0$。

按长管计算

$$\because \quad \lambda_1=\lambda_2-\lambda_3=0.025$$

$$\therefore \quad C_1=\sqrt{\frac{8g}{\lambda_1}}=C_2=C_3=56$$

$$\text{又}\because \quad d_1=d_3-0.1\text{m}$$

$$\text{故} \quad K_1=K_3=A_1C_1\sqrt{R_1}=\frac{3.14}{4}\times0.1^2\times56\times\sqrt{\frac{0.1}{4}}$$

$$=0.0695\text{m}^3/\text{s}$$

$$K_2=A_2C_2\sqrt{R_2}=\frac{3.14}{4}\times0.08^2\times56\times\sqrt{\frac{0.08}{4}}$$

$$=0.0398\text{m}^3/\text{s}$$

$$H_1-E_j=H_1-H_2=\frac{Q_1^2}{K_1^2}l_1$$

$$\text{即} \quad Q_1=K_1\sqrt{\frac{H_1-H_2}{l_1}}=0.0695\sqrt{\frac{10-7}{180}}$$

$$=8.973\times10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$$

$$E_j-H_3=H_2-H_3=\frac{Q_3^2}{K_3^2}l_3$$

$$Q_3=K_3\sqrt{\frac{H_2-0}{l_3}}=0.0695\sqrt{\frac{7}{144}}$$

$$=1.53\times10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$$

显而易见$Q_1<Q_3$，故II水库的水也流向J点，然后均流向水库III，即为合流管。

现按合流管，用试算法求E_j及各管中的流量

$$Q_1=K_1\sqrt{\frac{H_1-E_j}{l_1}}=\frac{0.0695}{\sqrt{180}}\cdot\sqrt{10-E_j}=5.18\times10^{-3}\sqrt{10-E_j}$$

$$Q_2=K_2\sqrt{\frac{H_2-E_j}{l_2}}=\frac{0.0398}{\sqrt{72}}\cdot\sqrt{7-E_j}$$

$$=4.69\times10^{-3}\sqrt{7-E_j}$$

$$Q_3=K_3\sqrt{\frac{E_j-H_3}{l_3}}=\frac{0.0695}{\sqrt{144}}\cdot\sqrt{E_j-0}$$

$$=5.79\times10^{-3}\sqrt{E_j}$$

$$Q_1+Q_2=Q_3$$

联解以上四个方程，即可求出Q_1，Q_2，Q_3及E_j。

现用试算法，设$E_j=6.176$m，代入上述各式，解得

$$Q_1=1.013\times10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_2=0.426\times10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_3=1.439\times10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$$

因　　$1.013\times10^{-2}+0.426\times10^{-2}=1.439\times10^{-2}\text{m}^3/\text{s}$

故以上即为所求的解。

解法二：

首先说明判别各管中水流方向的方法。

设想将管路2关闭，水由水库I经管路1和3流入水库III，此时$Q_1=Q_3=Q$，设水管交汇点J的测压管水头为E_j'，则

$$H_1-E_j'=\frac{8}{\pi^2g}\lambda_1\frac{l_1}{d_1^5}Q^2=0.0828\lambda_1\frac{l_1}{d_1^5}Q^2\quad(1)$$

$$E_j'-H_3=0.0828\lambda_3\frac{l_3}{d_3^5}Q^2\quad(2)$$

由式(1)及(2)解E_j'，得

$$E_j'=H_1-\frac{H_1-H_3}{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\cdot\frac{l_3}{l_1}\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^5+1}\quad(3)$$

将诸有关已知值：λ_1，l_1，d_1，H_1；λ_3，l_3，d_3及H_3代入3式可解出E_j'值，将求得的E_j'与已知的H_2相比较，如

$E_j'=H_2$，则水由水库I经管路1和3流入水库III，此时$Q_1=Q_3$，$Q_2=0$；

$E_j' < H_2$，则水由水库I及II分别经管路1和2流入管路3，最后进入水库III，此时$Q_1+Q_2=Q_3$；

$E_j' > H_2$，则水由水库I经管路1流向管路2及3，此时$Q_1=Q_2+Q_3$，

现根据已给数值进行计算，将已给数据代入式（3），得

$$E_j' = 10 - \frac{10}{\frac{144}{180}+1} = 4.44\text{m}$$

$$\because \quad E_j' = 4.44 < 7\text{m} = H_2$$

$$\therefore \quad Q_1+Q_2=Q_3 \qquad (4)$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{H_1-E_j'}{0.0828\lambda_1\frac{l_1}{d_1^5}}}$$

$$= 0.00518\sqrt{10E_j'} \qquad (5)$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{H_2-E_j'}{0.0828\lambda_2\frac{l_2}{d_2^5}}}$$

$$= 0.00469\sqrt{7-E_j'} \qquad (6)$$

$$Q_3 = \sqrt{\frac{E_j'}{0.0828\lambda_3\frac{l_3}{d_3^5}}}$$

$$= 0.00579\sqrt{E_j'} \qquad (7)$$

联解以上四个方程，即可求得Q_1，Q_2，Q_3及E_j'，今用试算法求解，设$E_j'=6.176$m，则

$$Q_1 = 0.00518\sqrt{10-6.176} = 0.01013\text{m}^3/\text{s}$$

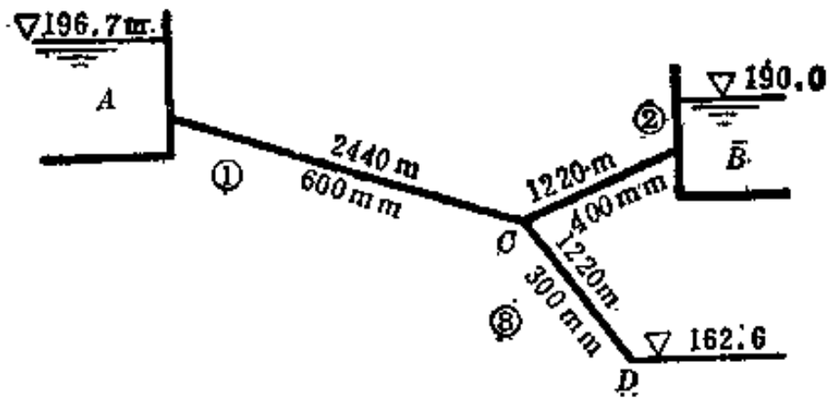
$$Q_2 = 0.00469\sqrt{7-6.176} = 0.00426\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = 0.00579\sqrt{6.176} = 0.01439\text{m}^3/\text{s}$$

$$\because \quad 0.01013+0.00426 = 0.01439\text{m}^3/\text{s}$$

$\therefore$ 以上即为所求的解。

131 管段长度l和直径d以及水面标高如图所示，设$n=0.0125$，试求各管段的流量Q。



题 131 图

解：

为方便起见，设AC段为①段，CB段为②段，CD段为③段。

$$C_1=\frac{1}{n}R_1^{1/6}$$

$$=\frac{1}{0.0125}\left(\frac{0.6}{4}\right)^{1/6}=58.31$$

$$C_2=\frac{1}{n}R_2^{1/6}=\frac{1}{0.0125}\left(\frac{0.4}{4}\right)^{1/6}=54.50$$

$$C_3=\frac{1}{n}R_3^{1/6}=\frac{1}{0.0125}\left(\frac{0.3}{4}\right)^{1/6}=51.95$$

$$K_1=A_1C_1\sqrt{R_1}=\frac{\pi}{4}d_1^2\cdot 58.31\times\sqrt{\frac{d_1}{4}}$$

$$=\frac{3.14}{4}\times0.6^2\times58.31\times\sqrt{\frac{0.6}{4}}=6.38\text{m}^3/\text{s}$$

$$K_2=\frac{\pi}{4}\times0.4^2\times54.5\times\sqrt{\frac{0.4}{4}}=2.16\text{m}^3/\text{s}$$

$$K_3=\frac{\pi}{4}\times0.3^2\times51.95\times\sqrt{\frac{0.3}{4}}$$

$$=1.01\text{m}^3/\text{s}$$

首先判别各管中水流的方向

假设C点的测压管水头为190.0m，即$Q_2=0$，

$$Q_1=K_1\sqrt{\frac{196.7-190.0}{l_1}}=6.38\sqrt{\frac{6.7}{2440}}$$

$$=0.334\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = K_2\sqrt{\frac{190-162.6}{1220}} = 1.01\sqrt{\frac{27.4}{1220}}$$

$$= 0.151\text{m}^3/\text{s}$$

$\because$ $Q_1 > Q_3$

故 水流由C点流向D点，同时还流向B水池，则管②、管③为管①的分支管、设C点测压管水头为E_j。

$\because$ $$Q_1 = Q_2 + Q_3 \qquad (1)$$

$$Q_1 = \frac{K_1}{\sqrt{l_1}}\sqrt{196.7-E_j} = \frac{6.38}{\sqrt{2440}}\sqrt{196.7-E_j}$$

$$= 0.129\sqrt{196.7-E_j} \qquad (2)$$

$$Q_2 = \frac{K_2}{\sqrt{l_2}}\sqrt{E_j-190} = \frac{2.16}{\sqrt{1220}}\sqrt{E_j-190}$$

$$= 0.062\sqrt{E_j-190} \qquad (3)$$

$$Q_3 = \frac{K_3}{\sqrt{l_3}}\sqrt{E_j-162.6}$$

$$= \frac{1.01}{\sqrt{1220}}\sqrt{E_j-162.6}$$

$$= 0.029\sqrt{E_j-162.6} \qquad (4)$$

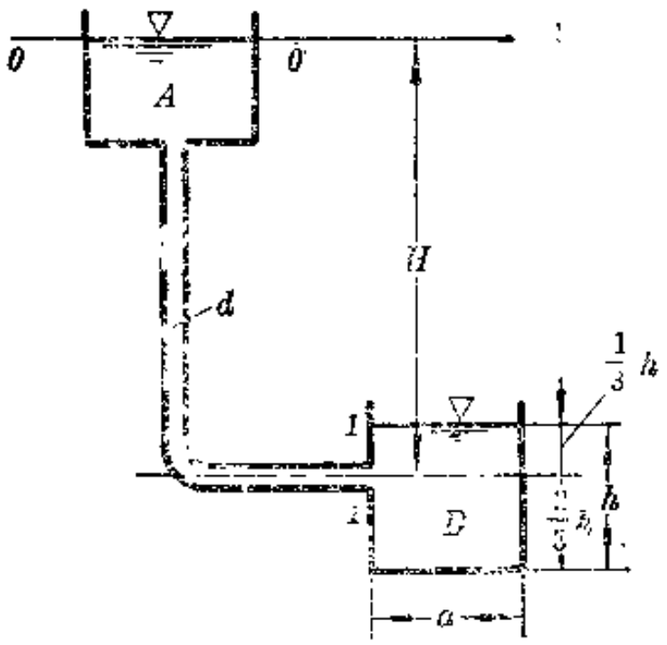
联解以上四个方程即可求得E_j，Q_1，Q_2及Q_3

$\therefore$ $Q_1 = 0.261\text{m}^3/\text{s}$

$Q_2 = 0.100\text{m}^3/\text{s}$

$Q_3 = 0.160\text{m}^3/\text{s}$

132 如题132图所示，A为水池，B为水箱。水箱底为方形，边长$a=2\text{m}$，高$h=1.8\text{m}$，水池与水箱间用直径$d=50\text{mm}$，长$l=10\text{m}$的水管相连，管道出口离出水箱底高度$\frac{2}{3}h$处，进口局部水头损失系数$\zeta_1=0.5$，弯头局部水头损失系数$\zeta_2=0.4$，出口局部水头损失系数$\zeta_3=1$，$\lambda=0.03$，假设水池A水位保持不变，$H=5\text{m}$，试求充满水箱B所需要的时间T（注：充水过程中水箱上部空气可由排气管排出）。



题 132 图

解：

充满水箱的过程分成两步，所需时间$T=t_1+t_2$。

第一步是充满水箱下部，高度为$\frac{2}{3}h$的体积所需的时间t_1，此时作用水头H为恒值，管道出口为自由出流。

第二步是充满水箱上部、高度为$\frac{1}{3}h$的体积所需的时间t_2，其作用水头H为变水头，由H变至$(H-\frac{1}{3}h)$，出口为淹没出流。

因此
$$t_1=\frac{a\times a\times\frac{2}{3}h}{Q}=\frac{a\times a\times\frac{2}{3}h}{\mu_c A\sqrt{2gH}} \qquad (1)$$

式中
$$\mu_c=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\lambda\frac{l}{d}+\zeta_1+\zeta_2}}=\frac{1}{\sqrt{1+0.03\times\frac{10}{0.05}+0.5+0.4}}$$
$$=0.357$$

代入（1）式得

$$t_1=\frac{2\times 2\times\frac{2}{3}\times 1.8}{0.357\times\frac{3.14}{4}\times 0.05^2\sqrt{2\times 9.8\times 5}}$$

$$=695.65\text{s}$$

t_2按下式计算

$$t_2=\frac{\Omega}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H}-\sqrt{H-\frac{1}{3}h}\right)$$

式中　Ω为B水箱的面积

$$\Omega=a^2=4\text{m}^2$$

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{\lambda\frac{l}{d}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3}}=\frac{1}{\sqrt{0.03\times\frac{10}{0.05}+0.5+0.4+1}}$$

$$=0.357$$

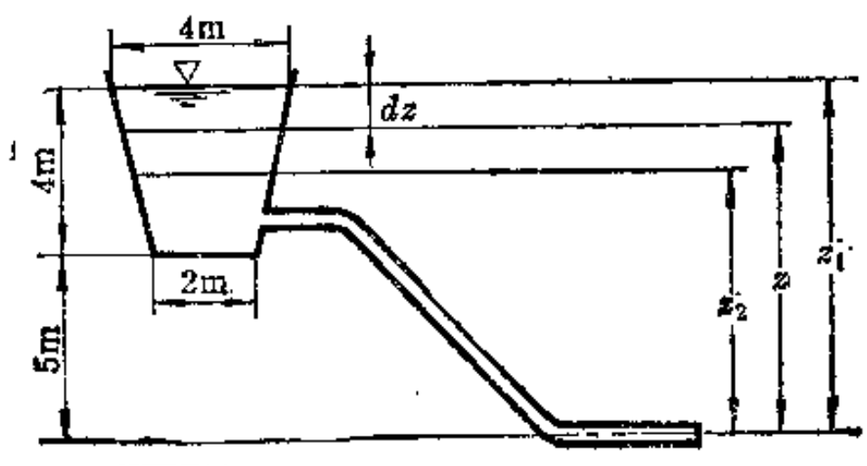
于是$t_2=\frac{2\times 4}{0.357\times\frac{3.14}{4}\times 0.05^2\times\sqrt{2\times 9.8}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{5-0.6}\right)$

$$=375.1\text{s}$$

则充满整个水箱B所需的时间T

$$T=t_1+t_2=695.65+357.1=1052.75\text{s}$$

133　一充满水的圆台形容器与一圆管相连，如图所示。已知管径$d=15\text{cm}$，管长$l=22.5\text{m}$.局部阻力系数之和$\sum\zeta=0.7$，



题 133 图

管道沿程阻力系数$\lambda=0.03$，容器尺寸见图。试求容器中水位下降2 m所需的时间，容器中的断面平均流速及管道中的$\frac{\partial v}{\partial t}$均甚小可以忽略不计。

解：

圆台形容器在dt时间减少的水量应等于管道在dt时间流出的水量、即

$$Qdt=-A_z dz$$

设高度为z对应圆台的圆的半径为r

$$r=2-\frac{1}{4}dz=2-\frac{1}{4}\times(9-z)$$

$$=\frac{z-1}{4}$$

$$A_z=\pi r^2=\pi\left(\frac{z-1}{4}\right)^2$$

水位由z_1降到z_2需要的时间

$$t=-\int_{z_1}^{z_2}\frac{A_z dz}{Q}$$

$$=\int_{z_2}^{z_1}\frac{\pi\left(\frac{z-1}{4}\right)^2 dz}{\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2g}{1+\sum\zeta+\lambda\frac{l}{d}}}z^{0.5}}$$

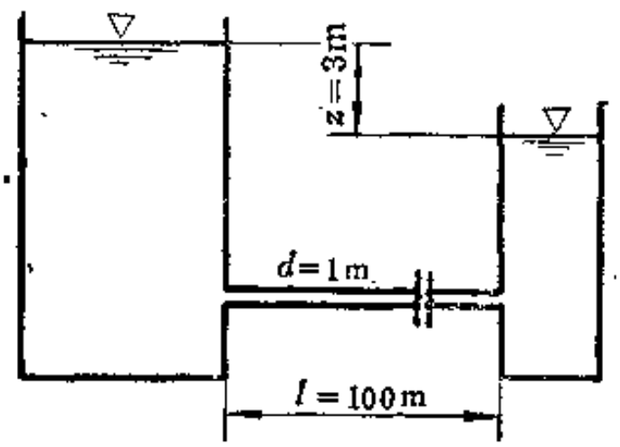
$$=\frac{1}{4d^2\sqrt{\frac{2g}{1+\sum\zeta+\lambda\frac{l}{d}}}}\int_{z_2}^{z_1}(z^{1.5}-2z^{0.5}+z^{-0.5})dz$$

$$=\frac{1}{4\times0.15^2\sqrt{\frac{2\times9.8}{1+0.7+0.03\times\frac{22.5}{0.15}}}}\cdot\left[\frac{2}{5}z^{2.5}-\frac{4}{3}z^{1.5}+2z^{0.5}\right]_7^9$$

$=6.249\,(45.343-11.306+0.708)$

$=217s$

134 设有两个圆柱形容器，如图示。左边的一个横断面面积为$100m^2$，右边的一个横断面面积为$50m^2$，两容器之间用直径$d=1m$长$l=100m$的圆管连接，两容器水位差$z=3\,m$，设进口局部水头损失系数$\zeta_1=0.5$，出口局部头水头损失系数$\zeta_2=1$，管沿程损道失系数$\lambda=0.025$，试求两容器中水位达到齐平时所需要的时间？



题 134 图

解：

简单管路淹没出流，流量公式为

$$Q=\mu A\sqrt{2gz_0}$$

因两容器较大，行进流速忽略不计，

则 $z_0=z$

即 $$Q=\mu A\sqrt{2gz}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda\frac{l}{d}+\sum\zeta}}\cdot\frac{\pi d^2}{4}\cdot\sqrt{2gz}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0.025\times\frac{100}{1}+1+0.5}}\times\frac{3.14\times1^2}{4}$$

$$\times\sqrt{2\times9.8\times z}=1.74z^{0.5}$$

在dt时间内，甲容器水位下降高度是$\frac{Qdt}{100}$，乙容器水位上升

高度是$\frac{Qdt}{50}$，上下容器水位变化为$-dz$.即

$$-dz=\frac{Qdt}{100}+\frac{Qdt}{50}$$

整理简化可得

$$dt=-\frac{100}{3Q}dz$$

$$=-\frac{100dz}{3\times1.74z^{0.5}}$$

积分得

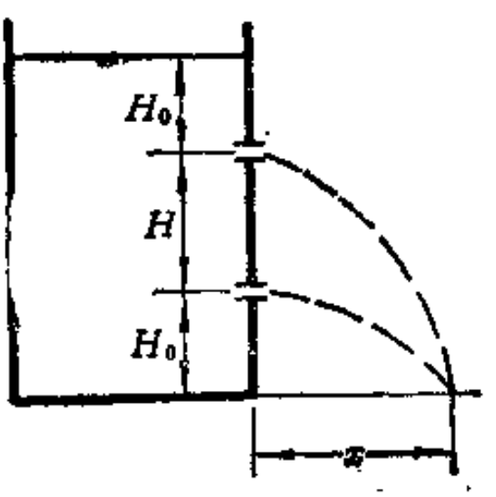
$$T=-\frac{100}{3\times1.74}\int_{3}^{0}z^{-0.5}dz$$

$$=19.16\int_{0}^{3}z^{-0.5}dz$$

$$=19.16\times\frac{1}{0.5}\times3^{0.5}=66.37s$$

故两容器水位达到齐平时所需要的时间是66.37s.

135 有一盛水容器如图所示，在侧壁上开两个圆孔口，上孔口到液面的距离等于下孔口到箱底的距离，设两孔口之流速系数φ相等且近似等于1，试证明其射流必交于箱底的同一点上。



题 135 图

解：

设上孔口为孔口 1，下孔口为孔口 2，则

$$v_{c1}=\varphi\sqrt{2gH_0}$$

$$v_{c2}=\varphi\sqrt{2g(H+H_0)}$$

对孔口 1，射流到达箱底平面所需时间为

$$t_1=\sqrt{\frac{2(H+H_0)}{g}}$$

其水平距离为

$$x_1=v_{c1}\cdot t_1=\varphi\sqrt{2gH_0}\sqrt{\frac{2(H_0+H)}{g}}$$

$$=2\varphi\sqrt{H_0(H_0+H)}$$

对孔口 2，射流到达箱底平面所需时间为

$$t_2=\sqrt{\frac{2H_0}{g}}$$

其水平距离为

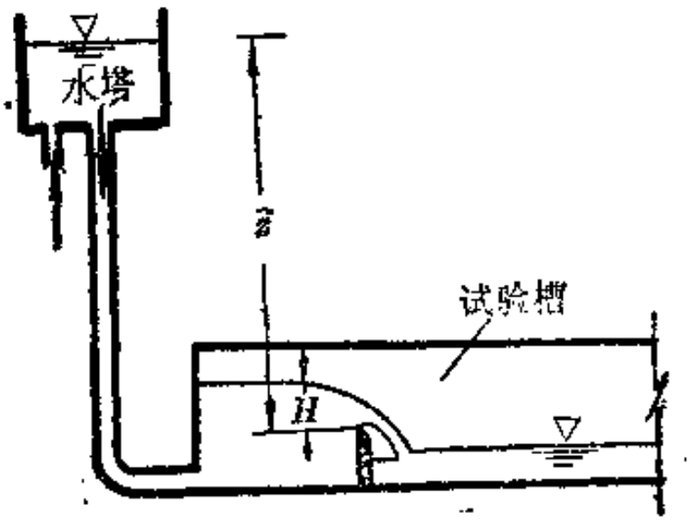
$$x_2=v_{c2}\cdot t_2=\varphi\sqrt{2g(H_0+H)}\cdot\sqrt{\frac{2H_0}{g}}$$

$$=2\varphi\sqrt{H_0(H_0+H)}$$

$\because$ $x_1=x_2=x$

$\therefore$ 两孔口射流必交于箱底平面上的同一点。

136 有一作试验用的直角三角形堰测量流量（直角三角形



题 136 图

堰流量公式$Q-MH^{5/2}$），已知平水塔内的水面距堰顶的距离$z=5$m，堰上水头$H=20$cm，如图所示，欲使堰上水头H的变化不大于$\frac{1}{100}$cm，试求平水塔内水位的最大允许变化值。

解：

设试验槽进水管的断面面积为A，流量系数为μ_0，则试验槽进水管的流量为

$$Q=\mu_0 A\sqrt{2g(z-H)}$$
$$=K(z-H)^{1/2}$$

对上式微分，得

$$dQ=\frac{1}{2}K(z-H)^{-\frac{1}{2}}(dz-dH)$$

于是

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{\frac{1}{2}K(z-H)^{-\frac{1}{2}}(dz-dH)}{K(z-H)^{1/2}}=\frac{1}{2}\frac{dz-dH}{z-H} \qquad (1)$$

又因 $Q=MH^{5/2}$

所以 $$\frac{dQ}{Q}=\frac{\frac{5}{2}MH^{3/2}dH}{MH^{5/2}}=\frac{5}{2}\frac{dH}{H} \qquad (2)$$

由式（1）及式（2）得

$$\frac{1}{2}\frac{dz-dH}{z-H}=\frac{5}{2}\frac{dH}{H}$$

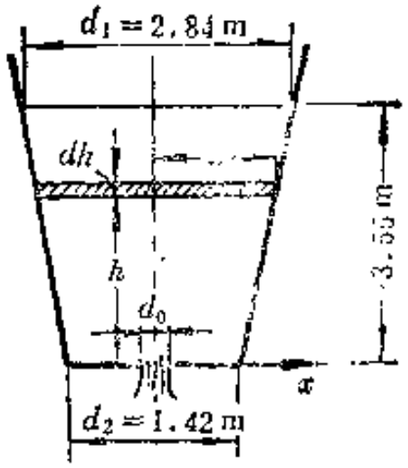
由上式解dz得

$$dz=(5z-4H)\frac{dH}{H}=(5\times500-4\times20)\frac{0.01}{20}$$

$$=1.21\text{cm}$$

故平水塔内水位的最大允许变化为1.21cm

137 某水箱为截头圆锥形，顶部最大直径为2.84m，底部直径为1.42m，底部开有孔口，其平均流量系数μ可取为0.60，若水箱深为3.55m，问孔口直径为多大时可在10s内放空水箱？



题 137 图

解：

设孔上的直孔为d_0，流经孔口的流量为

$$Q=\mu\sqrt{2gh}\,A_0$$

$$=0.6\sqrt{2\times9.8h}\cdot\frac{\pi}{4}d_0^2$$

$$=2.085\sqrt{h}\,d_0^2$$

由于孔口出流引起水箱内水体体积减少值为

$$dV=\pi x^2dh$$

由几何关系可知

$$x=\frac{1.42}{2}+\frac{1.42-0.71}{3.55}h$$

$$=0.71+0.2h$$

$$\therefore\quad dV=\pi(0.71+0.2h)^2dh$$

在dt时段内由孔口的出流量应等于水箱内水体积的减少量，即

$$Qdt=-dV$$

$$2.085d_0^2\sqrt{h}\,dt=-\pi(0.71+0.2h)^2dh$$

$$2.085d_0^2dt=-\pi\int_{3.55}^{0}\frac{(0.71+0.2h)^2}{\sqrt{h}}dh$$

$$= \pi \int_0^{3.55} \frac{0.71^2 + 0.4 \times 0.71h + 0.04h^2}{\sqrt{h}} dh$$

$$= \pi \int_0^{3.55} (0.71^2 h^{-\frac{1}{2}} + 0.284 h^{\frac{1}{2}} + 0.04 h^{\frac{3}{2}}) dh$$

将$dt=10$秒代入，得

$$2.085 d_0^2 \times 10 = \pi \left[0.71^2 \frac{3.55^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 0.284 \frac{(3.55)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + 0.04 \frac{(3.55)^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right]$$

$$20.85 d_0^2 = 3.14(1.9 + 1.266 + 0.38)$$

$$= 11.13$$

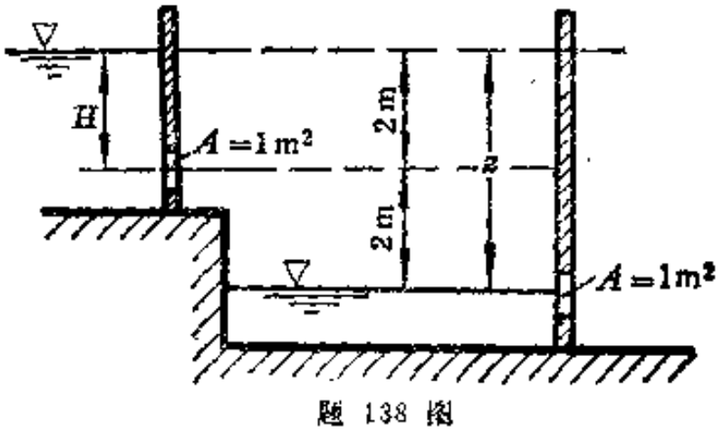
$$\therefore \quad d_0 = \sqrt{\frac{11.13}{20.85}} = 0.73\text{m}$$

故　孔口直径需要0.73m才能在10s内放空水箱。

138　如图所示，船闸闸室长$l=100$m，宽$b=10$m，上、下游闸门上的充、放水孔的面积$A=1$cm²，孔口的流量系数$\mu=0.65$，上游孔口的作用水头$H=2$m，上下游水位差$z=4$m，试求：

（1）闸室充水时间T_1（充水时下游放水孔全闭，上游充水孔全开）；

（2）闸室放水时间T_2（放水时上游充水孔全闭，下游放



题 138 图

水孔全开）。

解：

（1）充水时间T_1分两步求解

第一步：上游作用水头$H=2m$不变，闸室水位升到上游充水孔中心线为止，所需时间为t_1，按孔口自由出流计算。

第二步：水位从充水孔中心线升到与上游水位齐平，设所需时间为t_2。此时，上游水位不变，下游水位不断升高，上下游水位差z为变值，孔口为淹没出流，

故
$$t_1=\frac{l\cdot b\times 2}{Q}=\frac{l\cdot b\times 2}{\mu A\sqrt{2gH}}=\frac{100\times 10\times 2}{0.65\times 1\times\sqrt{2\times 9.8\times 2}}$$

$$=491.4s$$

$$t_2=\frac{-l\cdot b}{\mu A\sqrt{2g}}\int_2^0\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{2\times l\cdot b}{\mu A\sqrt{2g}}\sqrt{2}$$

$$=\frac{2\times 100\times 10}{0.65\times 1\times\sqrt{2\times 9.8}}\sqrt{2}=983s$$

于是
$$T_1=t_1+t_2=491.4+983=1474.4s$$

$$=24'34''$$

（2）放水时闸室的作用水头z为变值，故有

$$Qdt=-l\cdot bdz$$

$$\mu A\sqrt{2gz}\,dt=-l\cdot bdz$$

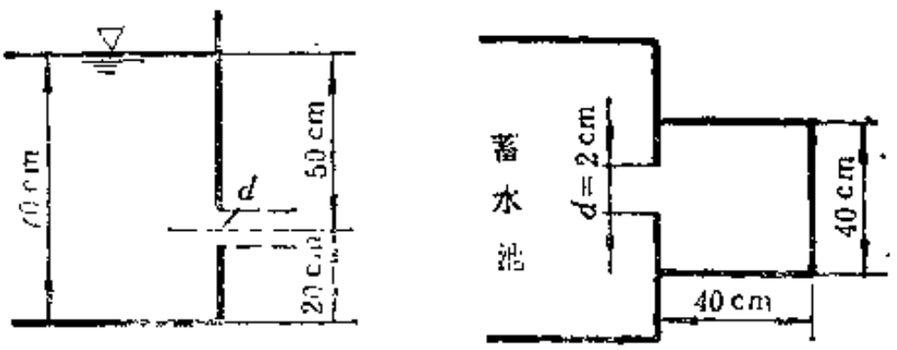
$$dt=\frac{-l\cdot b}{\mu A\sqrt{2g}}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

所以
$$T_2=t=\frac{-l\cdot b}{\mu A\sqrt{2g}}\int_4^0\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{2l\cdot b}{\mu A\sqrt{2g}}\sqrt{4}$$

$$=\frac{2\times 100\times 10\times 2}{0.65\times 1\times\sqrt{2\times 9.8}}=23'10''$$

139 从蓄水池通过一圆形孔口灌水至一空水箱中，孔口直径$d=2cm$，流量系数$\mu=0.62$，水箱断面为$40\times 40cm^2$，蓄水池

水位维持不变，比水箱底高70cm，孔口中心比水箱底高20cm，求灌水所需时间（使水箱中水位升高至与蓄水池水位齐平的时间）。



剖面图　　平面图

题 139 图

解：

根据孔口非恒定出流理论，本题可分两步计算，即出流在孔口中心线以下时，按恒定流孔口自由出流计算；出流在孔口中心线以上时，按非恒定流孔口出流计算。

（1）水箱水位上升至孔口中心线位置所需时间t_1

因孔口出流的流量公式为

$$Q=\mu A\sqrt{2gz}$$

则
$$t_1Q=\mu A\sqrt{2gz}\cdot t_1=0.20\times0.40\times0.40$$

故
$$t_1=\frac{0.20\times0.40\times0.40}{\mu A\sqrt{2gz}}$$

$$=\frac{0.20\times0.40\times0.40}{0.62\frac{3.14}{4}\times0.02^2\times\sqrt{2\times9.8\times0.50}}$$

$$=52.5\text{s}$$

（2）水箱水位从孔口中心线升至与上游水位齐平所需时间t_2

按孔口非恒定淹没出流计算

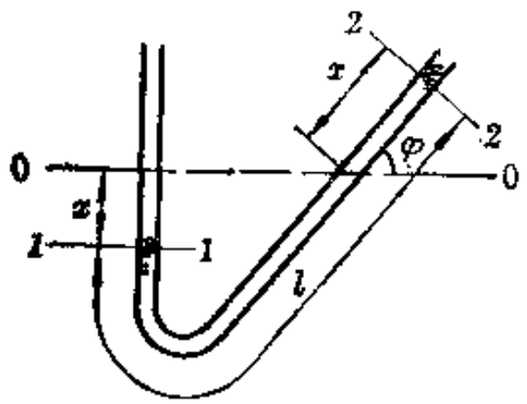
即
$$t_2=\frac{2A'\sqrt{z}}{\mu A\sqrt{2g}}$$

式中 A'为水箱断面面积，$A'=0.40\times0.40\text{cm}^2$

故
$$t_2=\frac{2\times0.40\times0.40\times\sqrt{0.5}}{0.62\times\frac{3.14}{4}\times0.02^2\times\sqrt{2\times9.8}}=262.5\text{s}$$

则充满整个水箱所需时间为

$$t=t_1+t_2$$
$$=52.5+262.5=315\text{s}$$



题 140 图

140 如图所示为一斜U形管，其倾斜角度为φ，U形管内盛水长度为l，管径为d，受扰动后离开起始位置而产生振荡。若忽略水头损失，求水面振荡$x=f(x)$的表达式，并找出其周期T的表示式。

解：

由一元非恒定流能量方程式可知

$$-x+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1v_1^2}{2g}=x\sin\varphi+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}ds$$

$\because$ $\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_2}{\gamma}$，$v_1=v_2$　　取$\alpha_1=\alpha_2=1$

则
$$-x(1+\sin\varphi)=\frac{1}{g}\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}ds$$

因 $\frac{\partial v}{\partial t}$与$s$无关

$\therefore$ $$-x(1+\sin\varphi)=\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}\cdot l=\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}l$$

又因
$$v=\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \qquad \frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

即
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}(1+\sin\varphi)x=0$$

积分得
$$x=A\cos\sqrt{\frac{g(1+\sin\varphi)}{l}}\cdot t$$
$$+B\sin\sqrt{\frac{g(1+\sin\varphi)}{l}}\cdot t \qquad (1)$$

由边界条件确定A、B常数值

当
$$t=0\text{时}，\ x=x_0，\ v=\frac{dx}{dt}=0$$

即
$$0=B\cdot\sqrt{\frac{g(1+\sin\varphi)}{l}}\cdot\cos\sqrt{\frac{g(1+\sin\varphi)}{l}}$$

故
$$B=0$$
$$x_0=A\cos0^\circ=A$$

$$\therefore \qquad A=x_0$$

将A、B值代入（1）式，振动方程为
$$x=x_0\cos\sqrt{\frac{g(1+\sin\varphi)}{l}}\cdot t$$

式中 x_0为初始时刻液面到基准面的距离。

振荡周期为
$$2\pi=\sqrt{\frac{g(1+\sin\varphi)}{l}}\cdot t$$
$$t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g(1+\sin\varphi)}}$$

141 某水电厂连接水轮机的管道长度为$l=1300\text{m}$，管中流速$v_0=3.5\text{m/s}$，压强水头$\frac{p_0}{\gamma}=h=300\text{m}$，波速$c=1000\text{m/s}$，当阀门突然关闭时，关门时间$T_s=2\text{s}$，试判别此时管道中发生何种类型的水击，并计算管道末端产生的最大压强水头。

解：

判别水击类型

因相长 $T=\frac{2l}{a}$

$$=\frac{2\times 1300}{1000}=2.6s$$

$\because$ $$T>T_z$$

故管道产生直接水击。

直接水击的最大水击压强增值可以按儒柯夫斯基公式计算，其公式为

$$\Delta H=\frac{a}{g}(v_0-v)$$

$$=\frac{1000}{9.8}(3.5-0)=356.78\text{m水柱高}$$

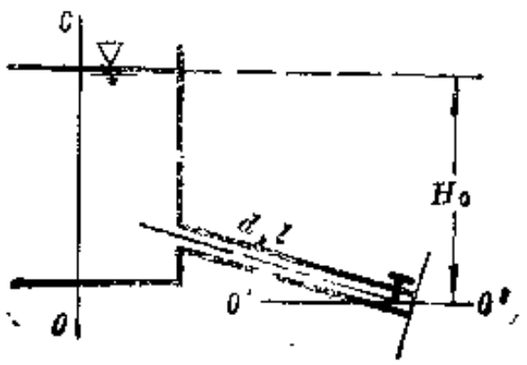
管道末端产生的最大水击压强水头为

$H=H_0+\Delta H=300+356.78=656.78$m水柱高

142 某水库放水管长$l=60$m，管道直径$d=80$mm，水头$H_0=5$m，由于管道末端阀门迅速开启，管内平均流速将从$v=0$变化到水头H_0下的恒定流速v_0，因为水库较大，可认为出流时水库的水位保持不变，管道沿程阻力系数$\lambda=0.03$，不计局部阻力。试确定在阀门开启过程中，管道中流速随时间变化的规律，写出表达式并绘出$v\sim t$关系曲线，且计算：

（1）阀门开启后2秒时管道中的流速为多少？

（2）阀门开启后2秒内流出的水体体积为多少？



题 142 图

解：

管道末端阀门迅速开启，管道中流速随时间迅速变化，属非恒定流问题，若在任意时刻t管道内流速为v，以管道出口断面中心线0′-0′面为基准面，写水库内0-0断面及管道出口1-0断面的能量方程，得

$$H_0=\frac{\alpha v^2}{2g}+h_w+\frac{1}{g}\int_0^l\frac{\partial v}{\partial t}ds$$

因不计局部水头损失

$$h_w=h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

又管道为恒定流时流速为v_0，由能量方程可得

$$H_0=\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v_0^2}{2g}$$

由于管道为等直径管。断面面积A沿流程不变，故断面平均流速v仅仅是时间t的函数，即$v=v(t)$，这样能量方程中偏微分$\frac{\partial v}{\partial t}$可以写成全微分$\frac{dv}{dt}$的形式，上述能量方程式可写为

$$\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v_0^2}{2g}$$

$$=\frac{\alpha v^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\frac{l}{g}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{v_0^2}{2g}\left(\alpha_0+\lambda\frac{l}{d}\right)$$

$$=\frac{v^2}{2g}\left(\alpha+\lambda\frac{l}{d}\right)+\frac{l}{g}\frac{dv}{dt}$$

令　　$\alpha_0=\alpha=1$

则　　$$\left(1+\lambda\frac{l}{d}\right)(v_0^2-v^2)=2l\frac{dv}{dt}$$

$$\left(1+0.03\times\frac{60}{0.08}\right)(v_0^2-v^2)=2\times60\frac{dv}{dt}$$

$$0.196dt=\frac{dv}{v_0^2-v^2}$$

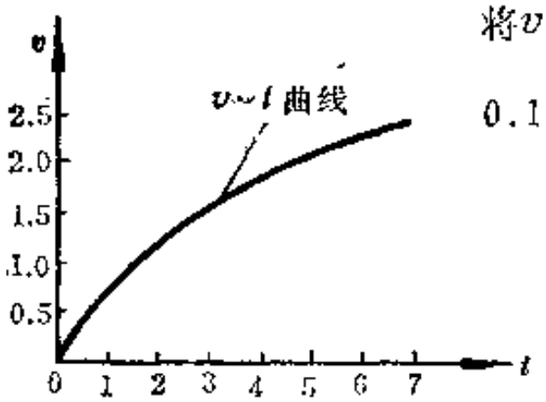
两端积分得

$$0.196t=-\frac{1}{2v_0}\ln\frac{v_0+v}{v_0-v} \qquad (1)$$

∵ $$H_0=\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v_0^2}{2g}$$

∴ $$v_0=\sqrt{\frac{2gH_0}{\alpha_0+\lambda\frac{l}{d}}}=\sqrt{\frac{2\times9.8\times4}{1+0.03\times\frac{60}{0.08}}}$$

$$=1.83\text{m/s}$$



解 142 图

将v_0值代入（1）式得

$$0.196t=\frac{1}{2\times1.83}\ln\frac{1.83+v}{1.83-v}$$

$$0.717t=\ln\frac{1.83+v}{1.83-v}$$

$$e^{0.717t}=\frac{1.83+v}{1.83-v}$$

故 $$v=1.83\frac{e^{0.717t}-1}{e^{0.717t}+1} \qquad (2)$$

该式(2)即为流速随时间变化的表达式，为了绘制$v\sim t$关系曲线，列表计算t与v的对应值如下表，$v\sim t$关系曲线如解142图所示。

t(s)	0	1	2	3	4	5	6
v(m/s)	0	0.63	1.13	1.45	1.63	1.73	1.78

（1）计算阀门开启后2秒时管道中的流速

由上述计算表中可知，当$t=2$秒时，$v=1.13$m/s

（2）计算阀门开启后2秒内流出的水体体积V

∵ $$dV=v\cdot A\cdot dt$$

积分得 $$V=\int_0^t vAdt$$

$$=\int_0^t\frac{\pi}{4}d^2\times1.83\frac{e^{0.717t}-1}{e^{0.717t}+1}dt$$

$$=\int_0^t \frac{3.14}{4}\times 0.08^2\times 1.83\frac{e^{0.717t}-1}{e^{0.717t}+1}dt$$

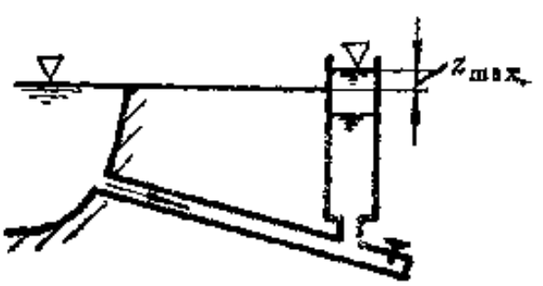
$$=0.0092\left[\int_0^2 \frac{2e^{0.717t}-e^{0.717t}-1}{e^{0.717t}+1}dt\right]$$

$$=0.0092\left[\int_0^2 \frac{2e^{0.717t}}{e^{0.717t}+1}dt-\int_0^2 dt\right]$$

$$=0.0092\left\{\frac{2}{0.717}[\ln(e^{1.434}+1)-\ln(e^0+1)]-2\right\}$$

$$=6.11\times 10^{-3}\mathrm{m}^3$$

143 某水电站管道直径$d=1.2\mathrm{m}$，管长$l=150\mathrm{m}$，上游为水库，下游为直径$D=3.6\mathrm{m}$的调压室，通过流量$Q=2.5\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，如水轮机进口的调节阀门瞬时关闭，则在管路和调压塔中产生振荡现象，若不计管路的阻力，求振荡的振幅和周期。



题 143 图

解：

调压室水位波动方程组为：

$$\begin{cases} \text{能量方程}\dfrac{l}{g}\dfrac{dv}{dt}+z+h_f=0 \\ \text{连续性方程}Av=F\dfrac{dz}{dt}+Q_T \end{cases}$$

式中 A为管道过水断面面积

F为调压室横断面面积

Q_T为进入水轮机组流量，当阀门全关时$Q_T=0$

v为管道中的平均流速

z为水库与调压室间的水位差，z轴以向上为正

当不计阻力时，$h_f=0$，故方程组可简化为

$$\begin{cases} \dfrac{l}{g}\dfrac{dv}{dt}+z=0 & (1) \\ Av=F\dfrac{dz}{dt} & (2) \end{cases}$$

由（2）式可得

$$v=\frac{F}{A}\frac{dz}{dt}$$

将v对t进行求导得

$$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{A}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} \qquad (3)$$

将（3）式代入（1）式得

$$\frac{l}{g}\cdot\frac{F}{A}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}+z=0$$

则

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{gA}{lF}z=0 \qquad (4)$$

该方程为二阶常系数齐次方程，它的通解为

$$z=C_1\cos xt+C_2\sin xt$$

式中 $x=\sqrt{\dfrac{gA}{lF}}$，C_1、C_2为常数

当$t=0$时，$C_1=z_0$

为了确定常数C_2，再取z对t的导数，于是

$$\frac{dz}{dt}=-C_1\sqrt{\frac{gA}{lF}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{gA}{lF}}\cdot t\right)+C_2\sqrt{\frac{gA}{lF}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{gA}{lF}}\cdot t\right)$$

当$t=0$时，$\dfrac{dz}{dt}=C_2\cdot\sqrt{\dfrac{gA}{lF}}$ (5)

由（2）式可知，当$t=0$时 $v=v_0$，则

$$\frac{dz}{dt}=\frac{Av_0}{F}$$

代入（5）式得

$$C_2=\frac{Av_0}{F}\cdot\sqrt{\frac{lF}{gA}}=v_0\sqrt{\frac{lA}{gF}}$$

故 $$z=z_0\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{gA}{lF}}\cdot t\right)+v_0\sqrt{\frac{lA}{gF}}\sin\left(\sqrt{\frac{gA}{lF}}\cdot t\right)$$

或 $$z=\sqrt{z_0^2+\frac{v_0^2lA}{gF}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{gA}{lF}}t+\alpha\right)$$

当不计损失时 $z_0=0$，故调压室水面振荡的最大振幅为

$$z_{max}=\sqrt{\frac{v_0^2lA}{gF}}$$

$$A=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{3.14}{4}\times1.2^2=1.13\text{m}^2$$

$$v_0=\frac{Q}{A}=\frac{2.5}{1.13}=2.21\text{m/s}$$

$$F=\frac{\pi}{4}D^2=\frac{3.14}{4}\times3.6^2=10.17\text{m}^2$$ 代入上式

则 $$z_{max}=\sqrt{\frac{2.21^2\times150\times1.13}{9.8\times10.17}}=2.89\quad\text{m}$$

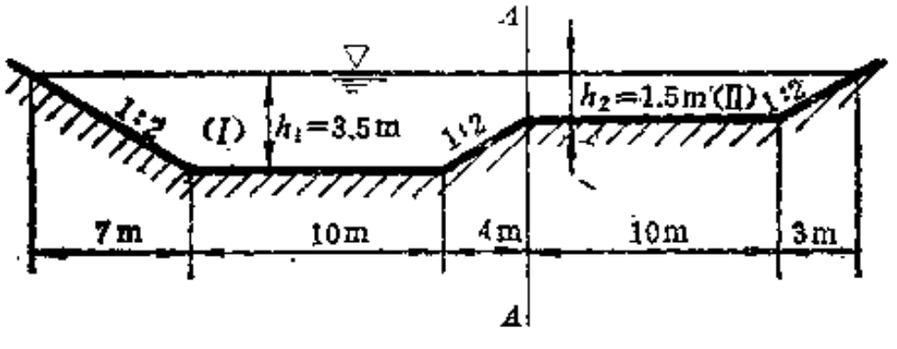
水体波动的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{gA}{lF}}}=2\pi\sqrt{\frac{lF}{gA}}$$

$$=2\times3.14\sqrt{\frac{150\times10.74}{9.8\times1.13}}=73.71\quad\text{s}$$

IV. 明 槽 流

144 一复式断面河道其横断面如图示，当最大水深为3.5m



题 144 图

时，测得流量$Q=72.3m^3/s$（均匀流），水面比降$J=0.0002$，试通过计算求河槽的糙率n值（假定深槽与线槽的n值相同）。

解：

按复式断面计算，今用$A-A$将整个断面分为I、II两部分

$$A_I=\frac{1}{2}(3.5\times7)+3.5\times14-(2\times4)\times\frac{1}{2}=57.25m^2$$

$$\chi_I=\sqrt{3.5^2+7^2}+10+\sqrt{4^2+2^2}=22.30\quad m$$

$$R_I=\frac{57.25}{22.30}=2.567\quad m$$

$$A_{II}=10\times1.5+1.5\times3\times\frac{1}{2}=17.25\quad m^2$$

$$\chi_{II}=10+\sqrt{3^2+1.5^2}=13.35\quad m$$

$$R_{II}=\frac{17.25}{13.35}=1.29\quad m$$

对复式断面，均匀流$J=i$

$$Q=Q_I+Q_{II}=(K_I+K_{II})\sqrt{i}$$
$$=(A_IC_I\sqrt{R_I}+A_{II}C_{II}\sqrt{R_{II}})\sqrt{i}$$

C由满宁公式计算 $C=\frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}}$

代入整理得 $$Q=\frac{(A_IR_I^{2/3}+A_{II}R_{II}^{2/3})\sqrt{i}}{n}$$

$$\therefore\quad n=\frac{(A_IR_I^{2/3}+A_{II}R_{II}^{2/3})\sqrt{i}}{Q}$$

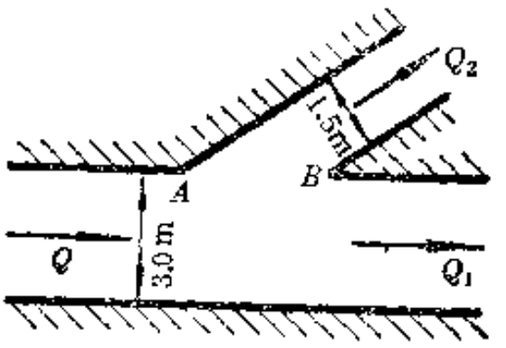
$$=\frac{(57.25\times2.567^{2/3}+17.25\times1.29^{2/3})\sqrt{0.0002}}{72.3}$$

$$=0.025$$

故河槽的糙率$n=0.025$

145 在一渠宽为3m，底坡为0.0001，粗糙系数$n=0.02$的矩形长渠中，若在其一侧另开一宽为1.5m的长矩形支渠，支渠底坡为0.0004，粗糙系数$n=0.0225$，支渠底高程和主渠底高程在分叉处是一样的，若不计局部损失，已知分叉处水深为1.0m，试求

（1）各渠流量？



题 145 图

（2）若流量Q增大，两渠流量之比值（即Q_1/Q_2）有无变化？怎样变化？

解：

（1）求主渠及支渠的流量

因主渠和支渠均属长渠，当流量一定时，若不计局部水头损失，则分叉处下游主、支渠中的水流均属均匀流，这时主、支渠水深均等于分叉处（AB处）的水深，也为1m。

支渠的正常水深$h_{02}=1.0$ m

则通过支渠的流量为

$$Q_2=A_2C_2\sqrt{R_2i}$$

$$=b_2h_{02}\frac{1}{n}\left(\frac{b_2h_{02}}{b_2+2h_{02}}\right)^{2/3}i_2^{1/2}$$

$$=1.5\times1\times\frac{1}{0.0225}\times\left(\frac{1.5\times1}{1.5+2\times1}\right)^{2/3}\times0.0004^{1/2}$$

$$=0.758\text{m}^3/\text{s}$$

分叉处下游主渠的正常水深$h_{01}=1.0$m

则通过分叉处下游主渠中的流量为

$$Q_1=A_1C_1\sqrt{R_1i_1}$$

$$=b_1h_{01}\frac{1}{n}\left(\frac{b_1h_{01}}{b_1+2h_{01}}\right)^{2/3}i^{1/2}$$

$$=3\times1\times\frac{1}{0.02}\left(\frac{3\times1}{3+2\times1}\right)^{2/3}\times0.0001^{1/2}$$

$$=1.07\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

总流量 $$Q=Q_1+Q_2=1.07+0.758$$
$$=1.83\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

（2）求两渠流量比，并说明当Q增大时，$\frac{Q_1}{Q_2}$的变化

交叉处下游主渠的流量

$$Q_1=A_1C_1\sqrt{R_1i_1}$$
$$=b_1h_{01}\frac{1}{n_1}R_1^{2/3}i_1^{1/2}$$
$$=\frac{b_1h_{01}}{n_1}\left(\frac{b_1h_{01}}{b_1+h_{01}}\right)^{2/3}i_1^{1/2}$$

由题意n_1，i_1，b_1为已知，可令$K_1=\frac{b_1i_1^{1/2}}{n_1}$=常数

则 $$Q_1=K_1\left(\frac{b_1h_{01}}{b_1+2h_{01}}\right)^{2/3}h_{01}$$

同理，支渠流量

$$Q_2=K_2\left(\frac{b_2h_{02}}{b_2+2h_{02}}\right)^{2/3}h_{02}\qquad K_2=\frac{b_2i^{1/2}}{n_2}=\text{常数}$$

两渠的流量比为

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{K_1\left(\frac{b_1h_{01}}{b_1+2h_{01}}\right)^{2/3}h_{01}}{K_2\left(\frac{b_2h_{02}}{b_2+2h_{02}}\right)^{2/3}h_{02}}$$

∵ $h_{01}=h_{02}=h$ 上式可写为

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{K_1}{K_2}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{2/3}\left(\frac{b_2+2h}{b_1+2h}\right)^{2/3}$$
$$=K\left(\frac{b_2+2h}{b_1+2h}\right)^{2/3}$$

式中 $K=\frac{K_1}{K_2}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{2/3}$=常数

当Q增加时，交叉处水深h也增加

当$h=1.0$m时

$$\frac{Q_1}{Q_2}=K\left(\frac{1.5+2\times1}{3+2\times1}\right)^{2/3}=0.79K$$

当$h=1.5$m时

$$\frac{Q_1}{Q_2}=K\left(\frac{1.5+2\times1.5}{3+2\times1.5}\right)^{2/3}=0.83K$$

当$h=2.0$m时

$$\frac{Q_1}{Q_2}=K\left(\frac{1.5+2\times2}{3+2\times2}\right)^{2/3}=0.85K$$

由此可知，当Q增加时，$\frac{Q_1}{Q_2}$的比值增大。

146 一矩形水槽底宽50cm，$Q=500\text{cm}^3/\text{s}$，$n=0.01$，求

（1）临界水深$h_K=$？

（2）临界底坡$i_K=$？

（3）若$h=10$cm，求$i_0=$？Fr=？

解：

（1）计算临界水深

$$q=\frac{Q}{b}=\frac{500}{50}=10\text{cm}^3/\text{s-m}$$

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1\times10^2}{980}}=0.467\text{cm}$$

（2）计算临界底坡

$$A_K=bh_K=50\times0.467=23.4\text{cm}^2$$

$$\chi_K=b+2h_K=50+2\times0.467=50.9\text{cm}=0.509\text{m}$$

$$R_K=\frac{A_K}{\chi_K}=\frac{23.4}{50.9}=0.46\text{cm}=0.0046\text{m}$$

$$C_K=\frac{1}{n}R_K^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{0.01}\times0.0046^{\frac{1}{6}}=40.78\text{m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$$

$$\therefore\quad i_K=\frac{g\chi_K}{\alpha C_K^2B_K}=\frac{9.8\times0.509}{1\times40.78^2\times0.5}=0.006$$

（3）若$h=10$cm，求i_0及Fr

$$\because\quad Q=AC\sqrt{Ri_0}$$

$$\therefore\quad i_0=\frac{Q^2}{A^2C^2R}=\frac{Q^2}{(hb)^2\frac{1}{n^2}R^{4/3}}=\frac{(Qn)^2}{(hb)^2R^{4/3}}$$

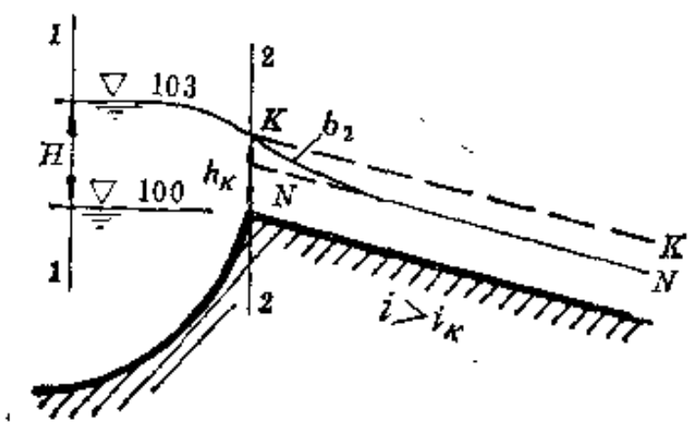
$$=\frac{\left(\frac{500}{1000000}\times 0.01\right)^2}{(0.1\times 0.5)^2\left(\frac{0.1\times 0.5}{0.5+2\times 0.1}\right)^{4/3}}$$

$$=3.37\times 10^{-7}$$

又∵ $$v=\frac{Q}{A}=\frac{500}{10\times 50}=1\text{cm/s}$$

∴ $$\text{Fr}=\frac{v}{\sqrt{gh}}=\frac{1}{\sqrt{980\times 10}}=0.0101$$

147 有一矩形渠道，自湖中引水。已知，渠道宽度$b=4\text{m}$，底坡为陡坡，渠道进口处底部高程为100m，湖中水面高程为103m，问：（1）渠道进口处水深多少？（2）渠道中流量为若干？



题 147 图

解：

（1）矩形渠道的底坡为陡坡，故渠道进口处2-2断面的水深为临界水深h_K，（如图所示）从而该处断面比能最小。

因湖中流速很小，故可忽略不计。

由1-1、2-2断面的能量方程得

$$H=h_K+\frac{\alpha v_2^2}{2g}$$

∵ $$E_{s\min}=h_K+\frac{\alpha v_K^2}{2g}\approx\frac{3}{2}h_K$$

$$\therefore \quad h_K=\frac{2}{3}E_{s\min}=\frac{2}{3}H=\frac{2}{3}\times(103-100)$$

$$=2.0\text{m}$$

（2）$\because \quad h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}$

$$\therefore \quad q=\frac{h_K\sqrt{gh_K}}{\alpha}$$

令 $\alpha=1$

故 $Q=bq=4\times2\times\sqrt{2\times9.8}=35.4\text{m}^3/\text{s}$

即渠道进口处水深为2m，流量为35.4m³/s

148 某水库下游河道水面极宽，底坡$i=\frac{1}{1000}$，糙率$n=0.025$，正常情况下来水为发电尾水，正常水深为4m。当水库底孔突然泄洪时，河水流量增加1.4倍，从而形成洪水波。

（1）求正常情况下通过此河的单宽流量；

（2）求底孔突然泄洪后的波高及波速。

（限用满宁公式计算谢才系数，假定单宽流量分布均匀）

解：

（1）正常情况下，通过此河的单宽流量为

$$q'=hc\sqrt{Ri}$$

$\because \quad c=\frac{1}{n}R^{1/6}$ 而$R\approx h$ （∵水面极宽）

$$\therefore \quad q'=h\left(\frac{1}{n}h^{1/6}\right)\sqrt{hi}$$

$$=\frac{h^{5/3}}{n}\sqrt{i}=\frac{4^{5/3}}{0.025}\sqrt{0.001}$$

$$=12.8\text{m}^3/\text{s-m}$$

即正常情况下通过此河的单宽流量为12.8m³/s-m

流速 $v=\frac{q'}{h}=\frac{12.8}{4}=3.2\text{m/s}$

（2）突然泄洪时，波流量为

$$\Delta q = 1.1q' = 1.4 \times 12.8 = 17.9 \text{m}^3/\text{s-m}$$

又因为 $\Delta q = \zeta c$

式中 ζ 为波高；c 为波速。

$$\zeta = \frac{17.9}{c} \qquad (1)$$

$$c = v + \sqrt{gh\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\zeta}{h_0}\right)} \qquad (2)$$

将（1）式代入（2）式，得

$$c = 3.2 + \sqrt{9.8 \times 4\left(1 + \frac{3}{2} \times \frac{17.9}{c}\right)}$$

$$= 3.2 + 6.26\sqrt{1 + \frac{26.85}{c}}$$

用试算法求解 c 值，得 $c = 13.9\text{m/s}$

将 c 值代入（1）式，得

$$\zeta = \frac{17.9}{13.9} = 1.29\text{m}$$

149 一梯形断面明渠均匀流，已知宽度 $b=3\text{m}$，水深 $h=0.8\text{m}$，边坡系数 $m=1.5$，粗糙系数 $n=0.03$，底坡 $i=0.0005$，水温20℃（相应的运动粘滞系数 $\nu=0.0101\text{cm}^2/\text{s}$），判断此水流为紊流或层流，急流或缓流？$\left(\text{采用满宁公式 } c=\frac{1}{n}R^{1/6}\right)$

解：

明渠为均匀流，流速 $v=c\sqrt{Ri}$，先计算断面水力要素

$$A = (b+mh)h = (3+1.5\times0.8)\times0.8 = 3.36\text{m}^2$$

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} = 3 + 2\times0.8\sqrt{1+1.5^2}$$

$$= 5.88\text{m}$$

$$R = \frac{A}{\chi} = \frac{3.36}{5.88} = 0.57\text{m}$$

$$C = \frac{1}{n}R^{1/6} = \frac{1}{0.03}\times0.57^{1/6} = 30.35\ \text{m}^{1/2}/\text{s}$$

$$\therefore \quad v = 30.35\sqrt{0.57\times 0.0005} = 0.512\text{m/s}$$

水流的雷诺数为

$$\text{Re}=\frac{vR}{\nu}=\frac{0.512\times 0.57}{0.0101}\times 10^4 = 2.89\times 10^5 > 500$$

可以水流为紊流。

水面宽度 $B=2mh+b=2\times 1.5\times 0.8+3=5.4\text{m}$

$$\overline{h}=\frac{A}{B}=\frac{3.66}{5.4}=0.68\text{m}$$

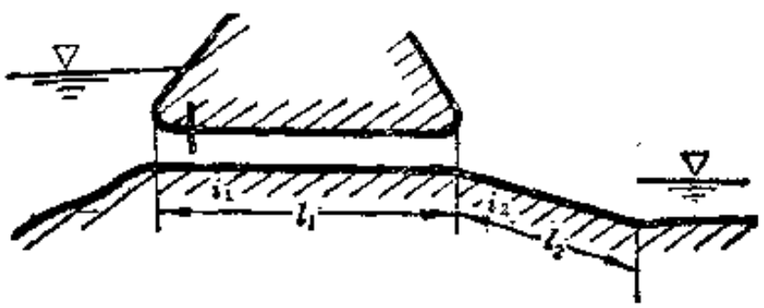
佛汝德数 $$\text{Fr}=\frac{v}{\sqrt{g\overline{h}}}=\frac{0.512}{\sqrt{9.8\times 0.68}}=0.20<1$$

故水流为缓流。

150 有一矩形断面无压泄洪隧洞（见图），在进口处由闸门控制流量，出口连接一相同宽度的矩形断面泄水渠后泄入河道。已知，$i_1=0.002$，$i_2=0.05$，$q=8\text{m}^3/\text{s-m}$，$b=4.0\text{m}$，糙率$n=0.014$，当闸下收缩水深h_c小于泄洪隧洞内临界水深时，试求：

（1）当隧洞较短时，定性分析l_1及l_2段的水面曲线，并注明两段渠道的控制断面水深；

（2）当隧洞较长时，定性分析l_1及l_2段的水面曲线并注明两段渠道的控制断面水深。



题 150 图

解：

首先判别渠道底坡的类别，

临界水深

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1\times 8^2}{9.8}}=1.87\text{m}$$

临界底坡

$$i_K=\frac{g\chi_K}{\alpha C_K^2 B_L}$$

式中 $\chi_K=2h_K+B=2\times 1.87+4.0=7.74\text{m}$

$$R_K=\frac{A_K}{\chi_K}=\frac{Bh_K}{\chi_K}=\frac{4\times 1.87}{7.74}=0.97\text{m}$$

$$C_K=\frac{1}{n}R_K^{1/6}=\frac{1}{0.014}\times 0.97^{1/6}=71.07\text{m}^{1/2}/\text{s}$$

$\therefore$ $i_K=\frac{9.8\times 7.74}{1\times 71.07^2\times 4}=0.00375$

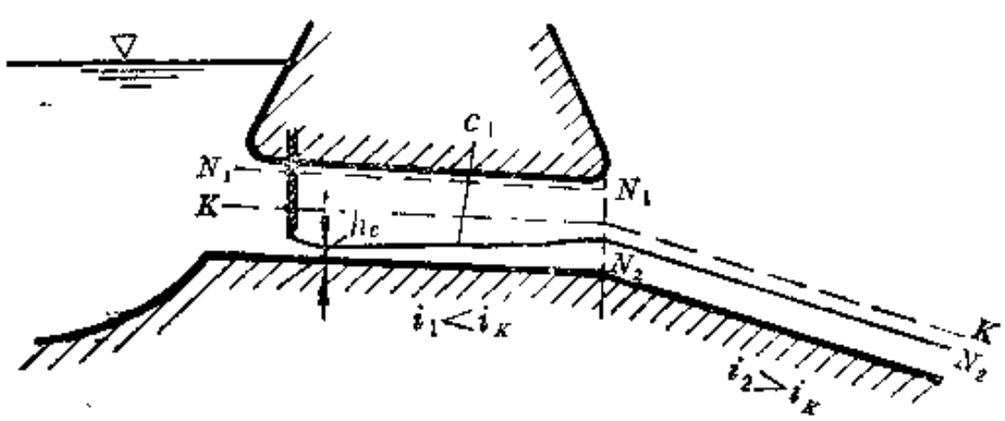
$\because$ $i_1=0.002<0.00375$

$\therefore$ 为缓流

$\because$ $i_2=0.05>0.00375$

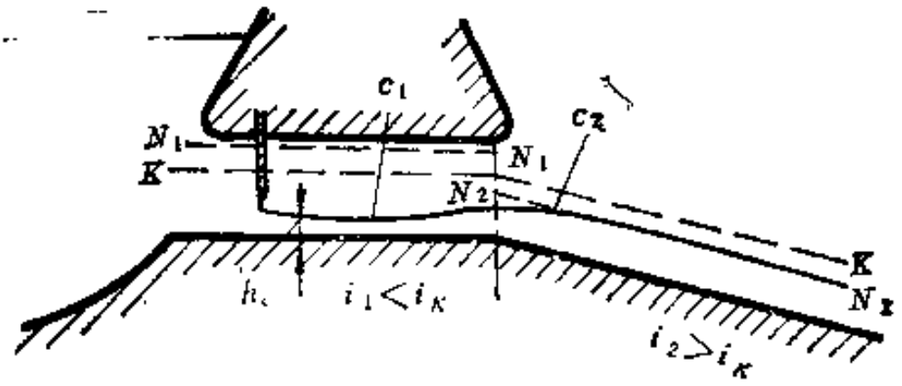
$\therefore$ 为陡坡

（1）当隧洞较短时，在l_1段将产生C_1型壅水曲线，在l_2段的上游产生b_2型降水曲线或均匀流或C_2型壅水曲线，视h_c的大小及l_1的长短而定，见解150（a）及（b）图。当l_2相当长时，其下

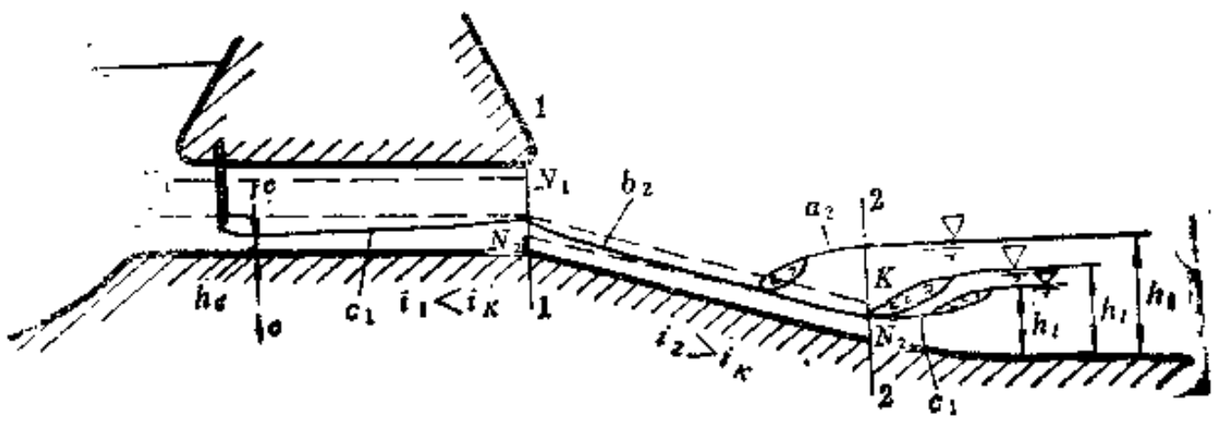


解 150(a) 图

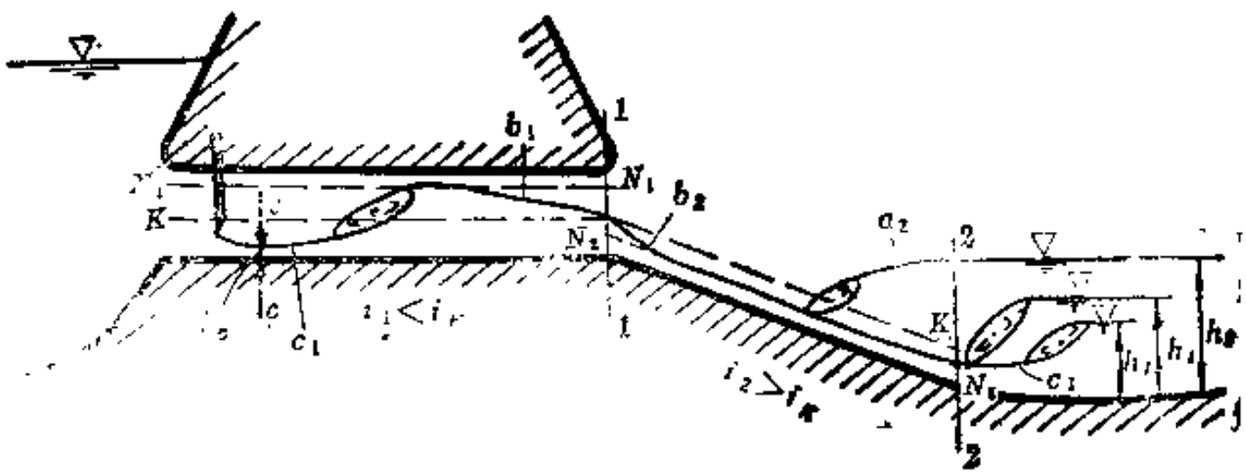
游可产生均匀流，若下游河道水面高于2-2断面的h_K时，将发生水跃，而水跃的位置取决于h_t与h_{02}的共轭水深h''_{02}的相对大小。若$h''_{02}\geq h_t$时，水跃一般发生在2-2断面的下游。若$h''_{02}<h_t$时，水跃发生在陡坡渠段中，并以a_2型的壅水曲线与下游河面衔接。



解 150(b) 图



解 150(c) 图



解 150(d) 图

见图（c）

缓坡渠段的控制断面水深为闸下收缩水深h_c。陡坡渠道的控制水深为*1-1*断面的水深h_1。a_2型水面曲线的控制水深为h_t。

（2）当隧洞较长时，在缓坡渠道中先为c_1型壅水曲线，而后发生水跃，水跃后面为b_1型降水曲线，*1-1*断面水深为临界水深h_K。在陡坡渠道的上游为b_2型降水曲线，当l_2相当长时，下游可能产生均匀流，下游的水面衔接形式与（1）相同。见图（d）

缓坡渠道上游c_1型水面曲线的控制水深为h_c，下游b_1型水面曲线的控制水深为*1-1*断面的临界水深h_K；陡坡渠道的控制水深为*1-1*断面的临界水深h_K。a_2型水面曲线的控制水深为h_t。

151 有一矩形断面的棱柱形长渠道用混凝土衬砌。已知底宽$b=4\text{m}$，渠道在中间变更纵向坡度，实测上段正常水深$h_{01}=2\text{m}$，下段正常水深$h_{02}=0.5\text{m}$，纵坡$i_2=0.040$。（1）判断两段底坡i_1及i_2属于何种底坡？分析并绘出这两段渠道上产生的水面曲线。（2）如果渠道下段出口处的水面受顶托后抬高，水面曲线将有哪些变化？试分别按不同典型情况绘出水面曲线，并注明其型号。

解：

（1）对于棱柱体长渠，其流量可用均匀流公式计算，且设混凝土的糙率$n=0.014$，C用满宁公式计算，则有

$$Q=A_2C_2\sqrt{R_2i_2}=h_{02}\cdot b\cdot\frac{1}{n}R_2^{\frac{1}{6}}\sqrt{R_2i_2}$$

$$=0.5\times4\times\frac{1}{0.014}\left(\frac{0.5\times4}{2\times0.5+4}\right)^{2/3}\sqrt{0.04}$$

$$=15.5\text{m}^3/\text{s}$$

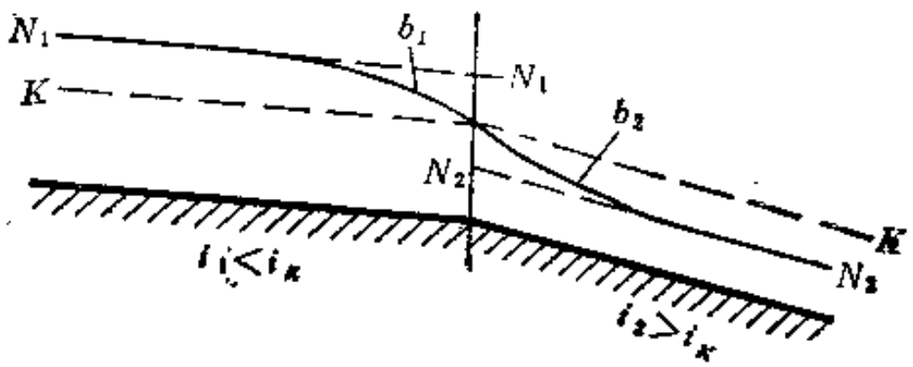
临界水深

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{15.5}{4}\right)^2}{9.80}}=1.152\text{m}$$

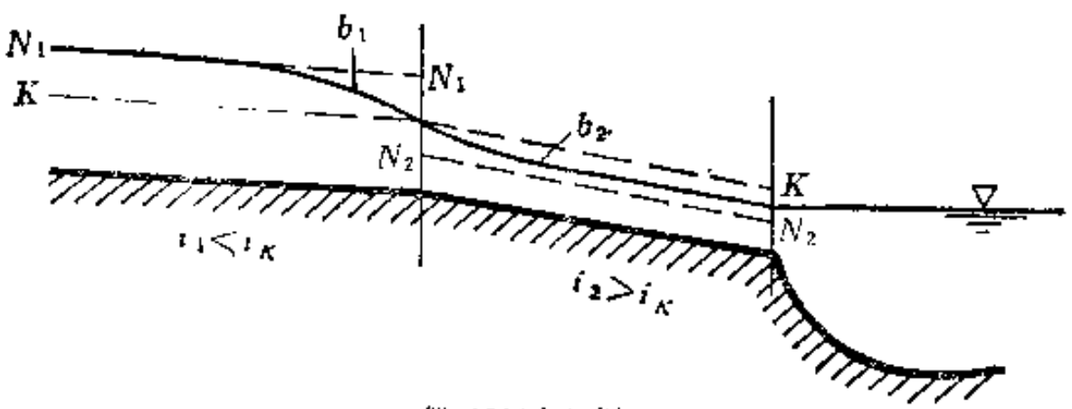
$\because\ h_{02}<h_K<h_{01}$

∴ 该渠道的上段属缓坡因$h_{c1}>h_K$，则$i_1<i_K$；而下段属陡坡因$h_{01}<h_K$，则$i_2>i_K$，其水面曲线变化如下图(a)，上段水面先沿N_1-N_1线到纵坡变更前为b_1型降水曲线，变坡断面处水深为临界水深，下段为b_2型降水曲线，最后为均匀流水深N_2-N_2线。

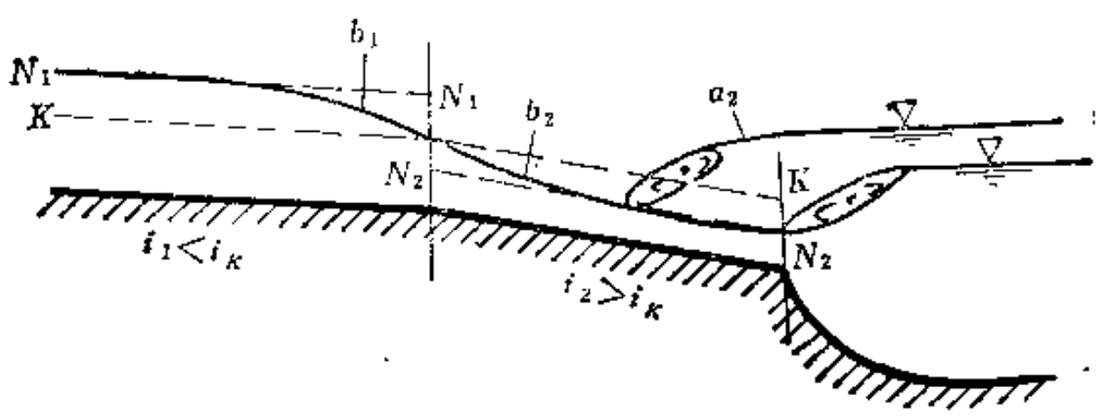
（2）如果渠道下段出口处水面受顶托抬高，水面曲线可能发生下列三种变化：



解 151(a) 图



解 151(b) 图

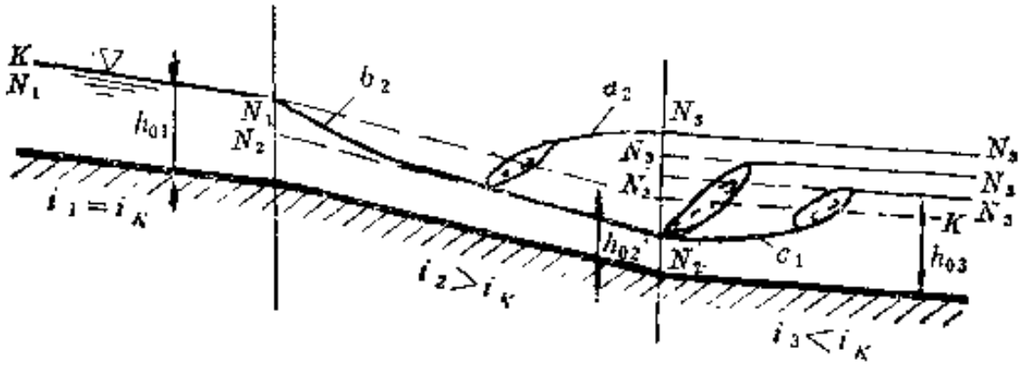


解 151(c) 图

①当出口处下游水面高于第二渠段末端的正常水深h_{02}，小于临界水深h_K，则在第二渠段中产生b_2型降水曲线，直接与下游抬高水位衔接，渠道中不发生均匀流，如图151(b)所示。

②当出口处下游水面高于末端断面的临界水深h_K，视水面高程的不同，可能在出口下游形成水跃，或在第二渠段下端出现a_2型壅水曲线与该陡坡渠道上端的急流在某一共轭水深处形成水跃。如图151(c)所示。

152 有三段不同底坡的渠道沿水流方向首尾相连，每段均很长，且断面形状、尺寸以及粗糙系数均相同。在通过某一特定流量下，其底坡分别可为缓坡，陡坡和临界坡。试定性画出下列三种情况下各渠道中水面曲线的可能连接形式：（1）渠道连接顺序为临界坡——→陡坡——→缓坡；（2）连接顺序若改为缓坡——→陡坡——→临界坡；（3）连接顺序若改为临界坡——→缓坡——→陡坡。如每一种情况下水面曲线的连接形式不只一种，除用图表示外，还需要用文字说明每一种连接形式发生的条件。



解 152(a) 图

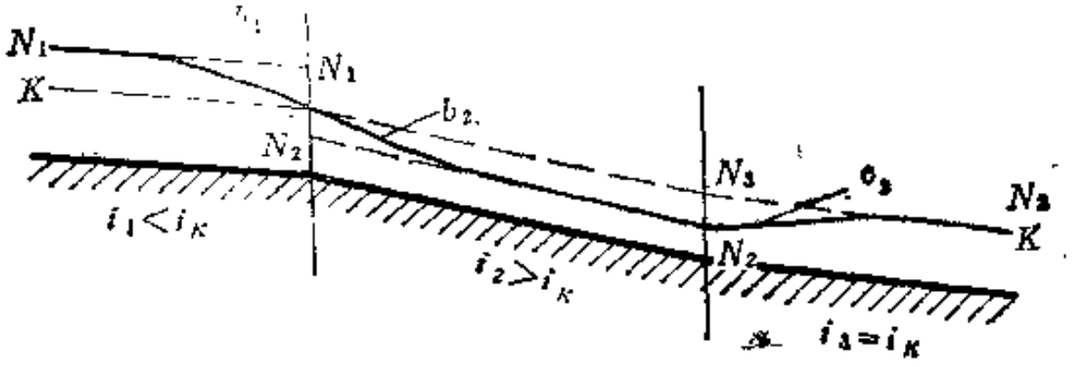
解：

（1）在临界坡渠段中水流为均匀流，在陡坡渠段中发生b_2型降水曲线。

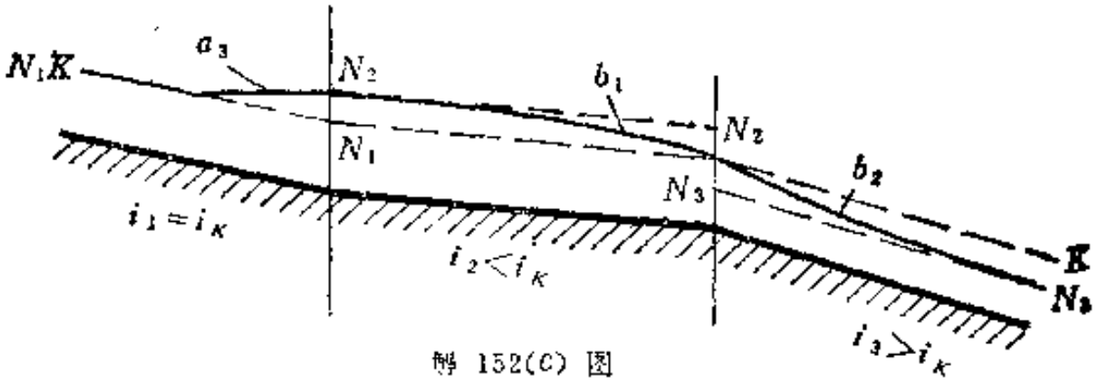
设h_{02}的跃后共轭水深为h''_{02}。

当下游缓坡渠段中正常水位较高时，则$h_{03}>h''_{02}$，在陡坡渠道中出现a_2型壅水曲线。

当缓坡渠段中正常水位稍低时，即$h_{03}=h''_{02}$，在陡坡渠道



解 152(b) 图



解 152(c) 图

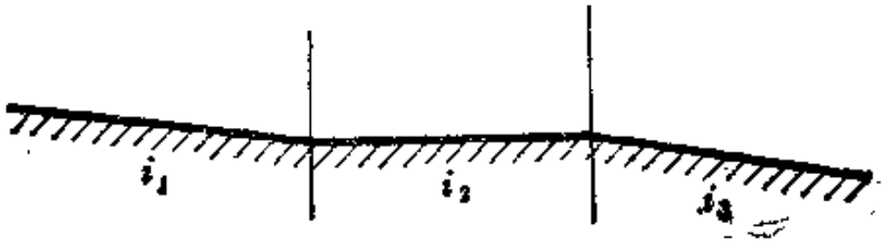
末端坡度转折点处恰好出现水跃。

当缓坡渠段中正常水位较低时，即$h_{03}<h''_{02}$，在缓坡渠道中出现c_1型壅水曲线而后发生水跃。如解152(a)图所示。

(2)第二种情况下各渠道中的水面曲线

(3)第三种情况下各渠道中的水面曲线，如(c)图所示。

153 有一矩形断面变坡渠道，渠道底宽为2m，糙率为0.025，渠段2的底坡为0.0039，当渠道的单宽流量q为m^3/s-m时，渠段1的正常水深为0.9m，渠段3的正常水深为1.2m，试分析渠道的水面曲线(注：设每段渠道均很长)



题 153 图

解：

（1）判断渠道中为均匀流时的流态

临界水深 $h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1\times 5^2}{9.8}}=1.37\text{m}$

临界底坡 $i_K=\frac{g\chi_K}{\alpha C_K^2 B_K}$

式中 $C_K=\frac{1}{n}R^{1/6}=\frac{1}{n}\left(\frac{B_K h_K}{B_K+2h_K}\right)^{1/6}$

$=\frac{1}{0.025}\left(\frac{2\times 1.37}{2+2\times 1.37}\right)^{1/6}=36.51\ \text{m}^{1/2}/\text{s}$

$\chi_K=B_K+2h_K=2+2\times 1.37=4.74\text{m}$

$\therefore\quad i_K=\frac{g\chi_K}{\alpha C_K^2 B_K}=\frac{9.8\times 4.74}{1\times 36.51^2\times 2}$

$=0.0174$

渠段2坡度$i_2=0.0039<i_K=0.0171$为缓坡渠道，均匀流时为缓流。

渠段1正常水深$h_{01}=0.9\text{m}<h_K$水流在均匀流时为急流。

渠段3正常水深$h_{03}=1.2\text{m}<h_K$，水流在均匀流时为急流。

（2）水面曲线分析

因渠道很长，从第一渠段上游来流为均匀流，且处于急流状态，而第二渠段在均匀流流段内应是缓流，渠段1到渠段2，水流由急流到缓流产生水跃，对应于h_{01}所需的跃后水深为

$$h''_{01}=\frac{h_{01}}{2}\left[\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_{01}^3}}-1\right]$$

$$=\frac{0.9}{2}\left[\sqrt{1+8\times\frac{5^2}{9.8\times 0.9^3}}-1\right]$$

$$=1.97\text{m}$$

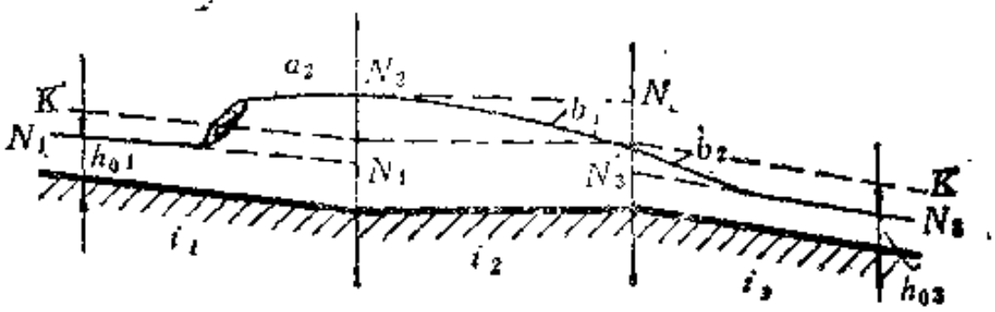
流量 $Q=CA\sqrt{Ri}=\frac{\sqrt{i}}{n}\frac{A^{5/3}}{\chi^{2/3}}$

$$=\frac{\sqrt{i}}{n}\cdot\frac{(bh_{02})^{5/3}}{(b+2h_{02})^{2/3}}=\frac{\sqrt{0.0039}}{0.025}$$

$$\times\frac{(2\times h_{02})^{5/3}}{(2+2h_{02})^{2/3}}=5\times\frac{h_{02}^{5/3}}{(1+h_{02})^{2/3}}$$

即 $$2\times5=5\times\frac{h_{02}^{5/3}}{(1+h_{02})^{2/3}}$$

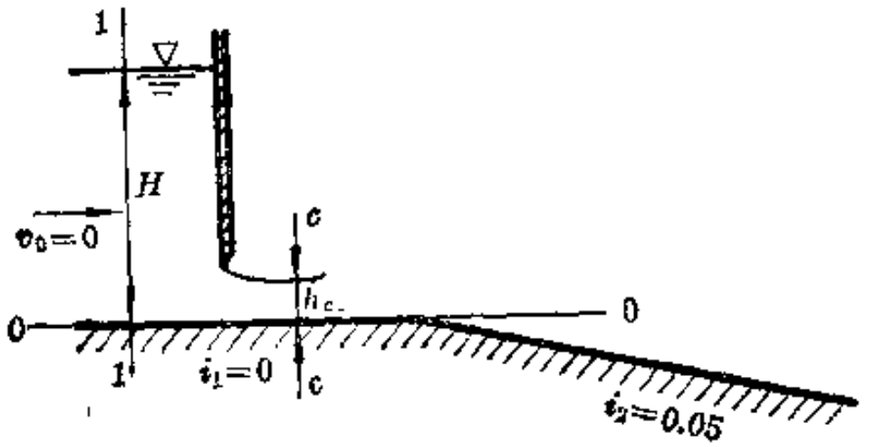
试算解得 h_{02} 2.5m



解 153 图

$h_{02}>h''_{k1}$，水跃发生在1渠段，跃后产生a_2型水面曲线与2渠段缓流衔接，3渠段下游系均匀急流，缓流到急流产生水面降落，水面曲线如图示。

154 一矩形断面渠道中，设一平面闸门（见图），已知闸前水深$H=14$m，闸门开启高度$e=1$m，渠道宽度$b=3$m，闸孔垂直收缩系数$\varepsilon=0.62$，闸门局部水头损失系数$\zeta=0.1$，两段渠道的底坡分别为$i_1=0$及$i_2=0.05$，渠道糙率$n=0.04$，不计闸前行近流速，试判别第二段渠道中的水流为缓流或急流，并定性地绘出两段渠道中的水面曲线（两段渠道均充分长）



题 154 图

解：

（1）计算收缩断面水深

$$h_c = \varepsilon e = 0.62 \times 1 = 0.62\text{m}$$

（2）计算过闸流量

以0-0为基准面，对断面1-1，c-c能量方程

$$H = h_c + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + \zeta \frac{v_c^2}{2g} + h_f$$

由于两断面间距离较短，取$h_f \approx 0$，$\alpha_c \approx 1$，整理得

$$v_c = \sqrt{\frac{2g(H - h_c)}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.8(14 - 0.62)}{1+0.1}}$$

$$= 15.44\text{m/s}$$

$$Q = A_c v_c = h_c b v_c = 0.62 \times 3 \times 15.44$$

$$= 28.72\text{m}^3/\text{s}$$

（3）计算临界底坡

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1 \times 28.72^2}{9.8 \times 3^2}}$$

$$= 2.11 \quad \text{m}$$

$$\chi_K = b + 2h_K = 3 + 2 \times 2.11 = 7.22 \quad \text{m}$$

$$C_K = \frac{1}{n} R_K^{1/6} = \frac{1}{n}\left(\frac{bh_K}{\chi_K}\right)^{1/6}$$

$$= \frac{1}{0.04}\left(\frac{3 \times 2.11}{7.22}\right)^{0.1667}$$

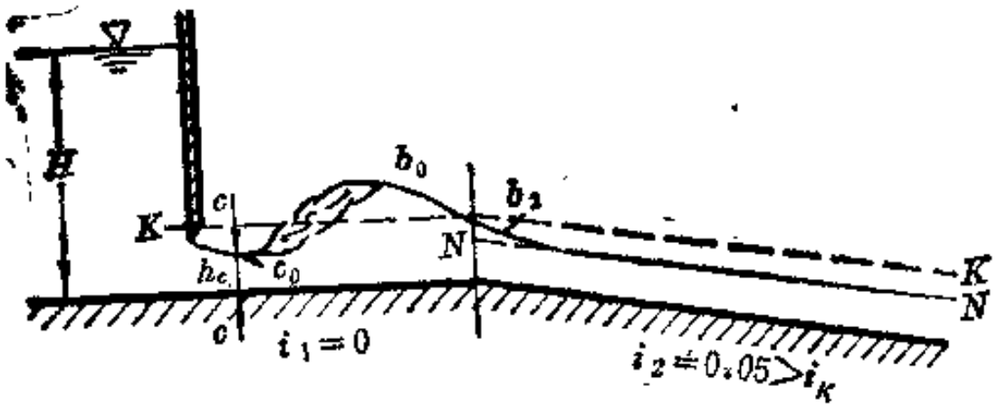
$$= 24.46 \ \text{m}^{1/2}/\text{s}$$

$$i_K = \frac{g\chi_K}{\alpha C_K^2 B_K} = \frac{9.8 \times 7.22}{1 \times 24.46^2 \times 3}$$

$$= 0.0394$$

（4）绘制水面曲线

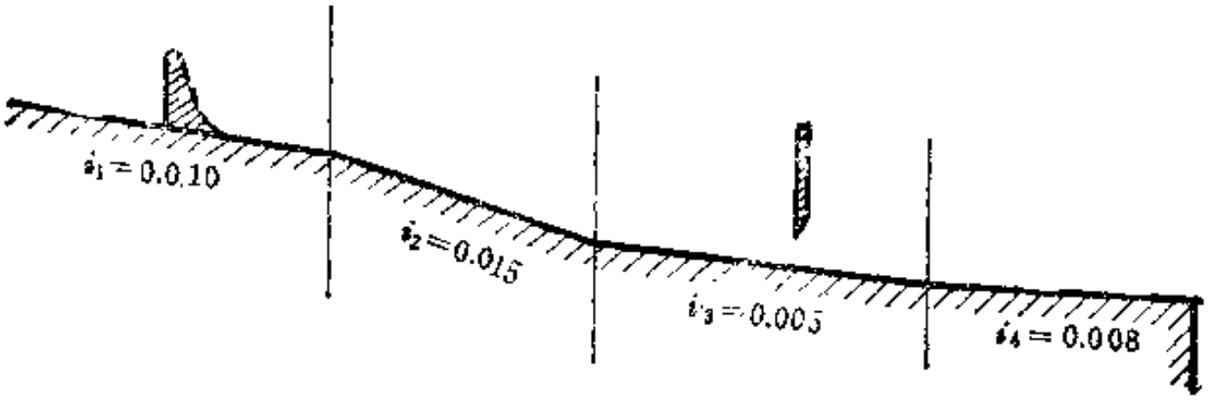
$i_2 > i_k$，第二段渠道为陡坡渠道，N-N线在K-K线下面，因此渠道中的水流为急流。从前面计算可知，$h_K > h_c$，故在第一段渠道中由侧孔泄出的水流，在c-c断面后形成c_0型壅水曲线，然后发生水跃(水流由急流过渡到缓流)，由于两段渠道均充分长，



解 154 图

水跃后为b_0型降水曲线，在第二段陡坡渠道中以b_2型水面曲线与均匀流水面相衔接，如图示。

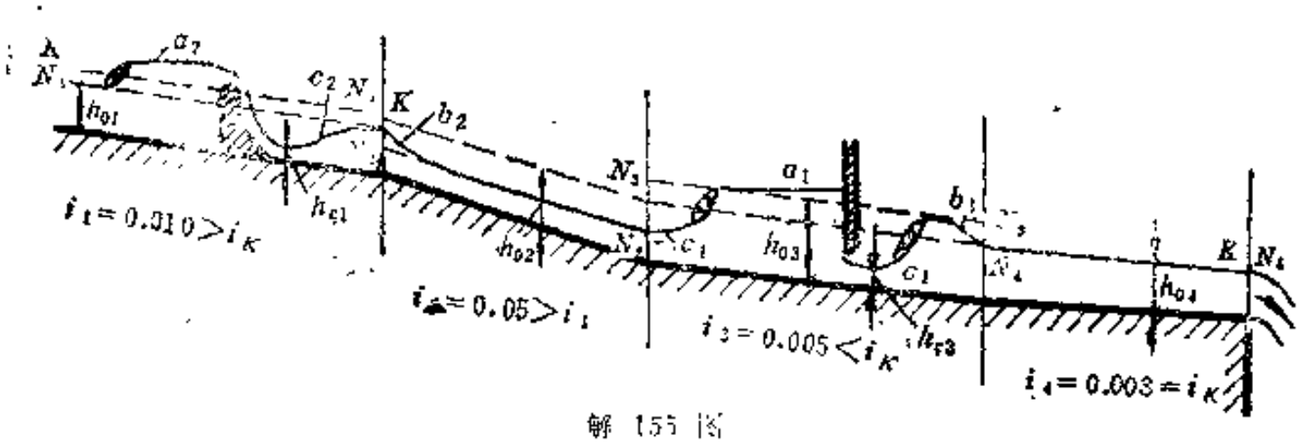
155 有一各段均充分长的变坡棱柱体渠道，各段底坡如图所示，如临界底坡$i_K=0.008$，试定性地绘制水面曲线，并注明水面曲线的型式。



题 155 图

解：

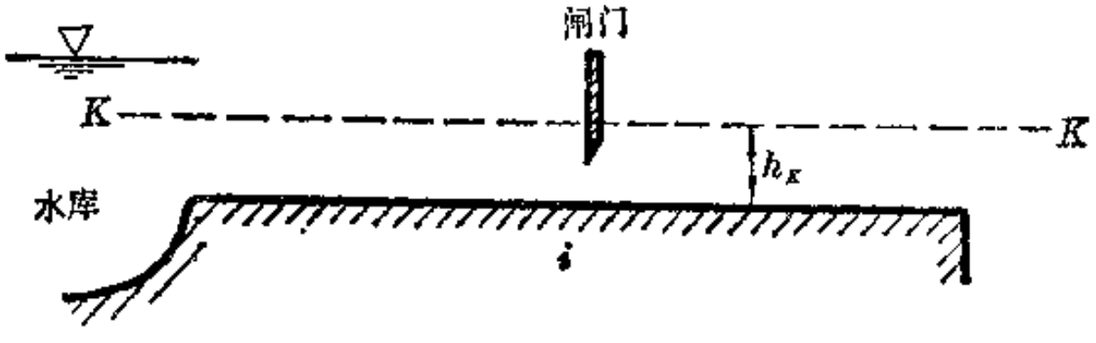
由于$i_1>i_K$，$h_{01}<h_K$设坝前水深大于h_K，则第一渠段产生a_2型水面曲线，坝趾收缩水深$h_{c1}<h_{01}$，坝后产生c_2型水面曲线；因$i_2>i_1>i_K$，$h_0<h_{01}<h_K$故在第二渠段中产生$b_2^{\#}$型水面曲线；又因$i_3<i_K$，$h_{03}>h_K$闸前水深大于h_{03}及闸下收缩水深$h_{c3}<h_K$，故在第三渠段中，闸门上游产生c_1型及a_1型水面曲线，闸门下游产生c_1型及b_1型水面曲线，第四渠段的$i_4=i_K$，渠中水流为均匀流。



解 155 图

各段水面曲线如解155图所示

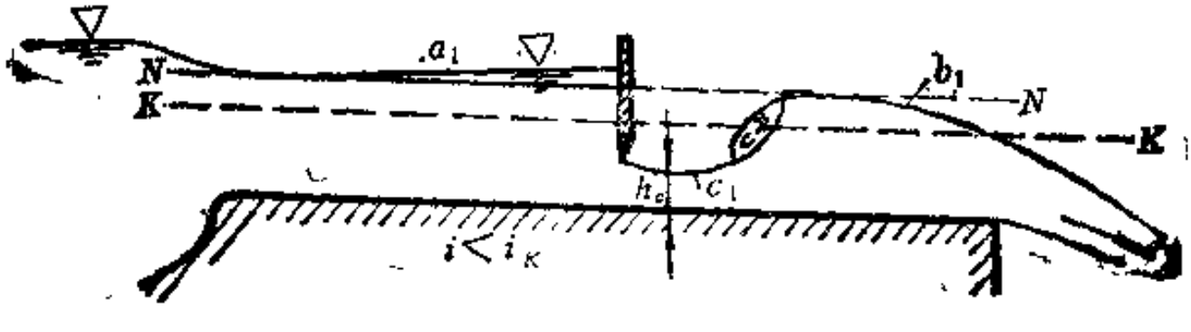
156 有一相当长的棱柱体矩形渠道自水库中引水，末端为一跌坎，有一闸门设置在渠道中，如图所示。当渠道底坡为：（1）缓坡$i<i_K$，（2）陡坡$i>i_K$时，试分别绘出这两种情况下水面曲线的示意图，并注明曲线的类型。



题 156 图

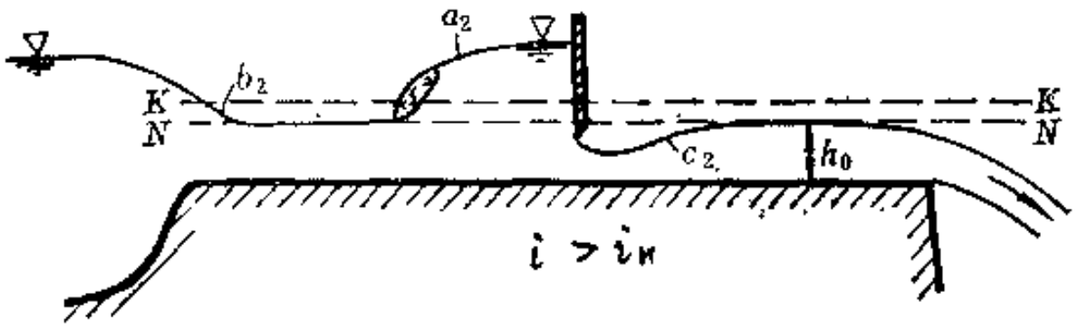
解：

（1）当渠道是缓坡渠道($i<i_K$)时，由于闸门影响，闸前产生a_1型壅水曲线，闸下水深$h_c<h_K$，由急流到缓流产生水跃，在渠道末端为一跌坎，为b_1型降水曲线水面曲线如图(a)所示。



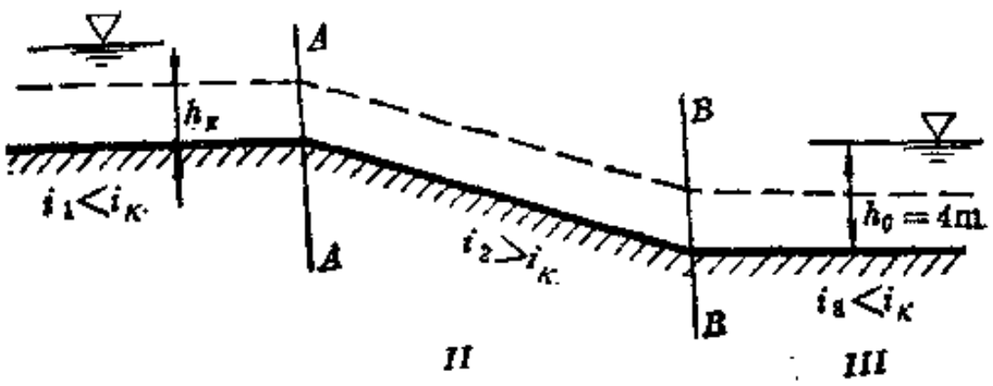
解 156(a)图

（2）当渠道为陡坡（$i>i_K$）时，闸门上游N–N线在K–K线下面，水流未受闸门影响前为急流，水流自水库流入渠道以b_2型降水曲线与正常水深衔接，闸前水流受闸门影响，水位壅高为缓流，急流到缓流产生水跃，闸门下游，由急流到急流，由于收缩断面水深小于渠道正常水深，故产生c_2型水面曲线衔接，如图（b）所示。



解 156(b)图

157 有一矩形断面渠道，由三段组成：I、III段为缓坡渠道，II段为陡坡渠道。各渠段底宽相同。已知，A–A断面水深$h_A=3.44$m，B–B断面水深$h_B=1$ m，第III段渠道下游为均匀流，其水深$h_0=4$ m。试（1）绘出水面曲线示意图，并注明曲线的类型；（2）求渠道中的单宽流量；（3）问第III段渠道中有无水跃发生？若有，水跃发生在B–B断面以上还是以下，或恰在B–B断面上？（4）问断面B–B及下游均匀流断面比能各为多少？应消除的余能为多少？（B–B断面与下游均匀流断面间的渠底高差可忽略不计）。

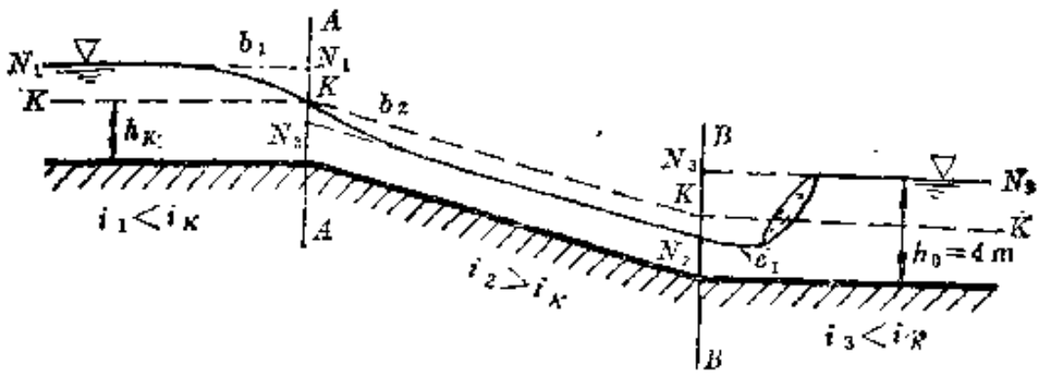


题 157 图

解：

（1）绘出渠道水面曲线图

渠道中I、III段为缓坡渠道，渠中水深大于临界水深，水流为缓流。II渠段为陡坡渠道，渠中无建筑物，水流为急流，缓流到急流产生水面降落，由急流到缓流产生水跃，绘出水面曲线如解157图所示。



解 157 图

（2）计算渠道中的单宽流量

渠道为矩形断面由临界水深计算式$h_K=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$整理得单宽流量

$$q=\sqrt{gh_K^3}=\sqrt{9.8\times3.44^2}=20\text{m}^3/\text{s-m}$$

（3）判断水跃位置

当跃前断面设在B-B断面，$h_B=1\text{m}$，跃后水深

$$h_B''=\frac{h_B}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_B^3}}-1\right)$$

$$=\frac{1.0}{2}\left(\sqrt{1+8\times\frac{20^2}{9.8\times1^3}}-1\right)$$

$$=8.55\text{m}$$

$h_B''>h_0=4\text{m}$，产生远驱式水跃，水跃位置在B-B断面以下。

（4）计算B-B断面及下游均匀流断面比能

B-B断面处流速

$$v_B=\frac{q}{h_B}=\frac{20}{1}=20\text{m/s}$$

B-B断面比能

$$E_{sB}=h_B+\frac{v_B^2}{2g}=1+\frac{20^2}{2\times 9.8}$$

$$=21.41\text{m}$$

III渠段均匀流断面平均流速

$$v_0=\frac{q}{h_0}=\frac{20}{4}=5\text{m/s}$$

均匀流断面比能

$$E_{s0}=h_0+\frac{v_0^2}{2g}$$

$$=5.28\text{m}$$

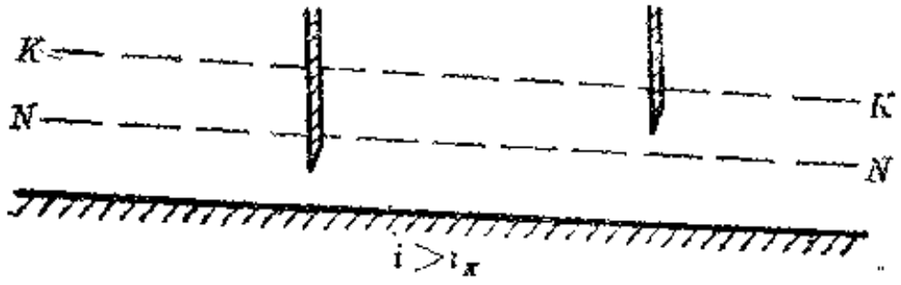
在忽略B-B断面与下游均匀流断面间的渠底高差的条件下，单位渠宽单位时间所消除的余能

$$N=\gamma q(E_{sB}-E_{s0})=9800\times 20\times(21.41-5.28)$$

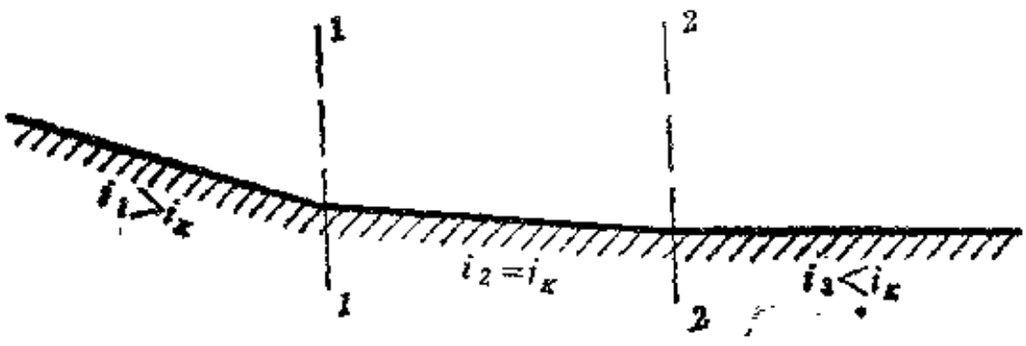
$$=3161500\text{N-m/s}$$

$$=3161.5\text{kW}$$

158 有一梯形断面土渠，已知流量$Q=15.6\text{m}^3/\text{s}$，底宽$b=$



题 158a 图



题 158 (b) 图

10m，边坡系数$m=1.5$、粗糙系数$n=0.02$，取不冲不淤流速$v=0.85$m/s，试求：（1）正常水深h_0；（2）底坡i；（3）试定性绘制下面棱柱形断面长渠道中产生的水面曲线。

解：

（1）求正常水深h_0

$$\because \quad A=\frac{Q}{v}=\frac{15.6}{0.85}=18.35\text{m}^2$$

$$A=(b+mh_0)h_0$$

$$\therefore \quad 18.35=(10+1.5h_0)h_0$$

$$1.5h_0^2+10h_0-18.35=0$$

$$h_0=\frac{-10\pm\sqrt{10^2+4\times1.5\times18.35}}{2\times1.5}$$

$$=\frac{-10\pm14.49}{3}$$

$h_0=1.5$m；$h_0=-8.16$m(因负值无意义)故取$h_0=1.5$m。

（2）求底坡i

$$i=\frac{Q^2}{A^2C^2R}$$

$$\because \quad R=\frac{A}{\chi}=\frac{A}{b+2h\sqrt{1+m^2}}$$

$$=\frac{18.35}{10+3\sqrt{1+1.5^2}}$$

$$=1.2\text{m}$$

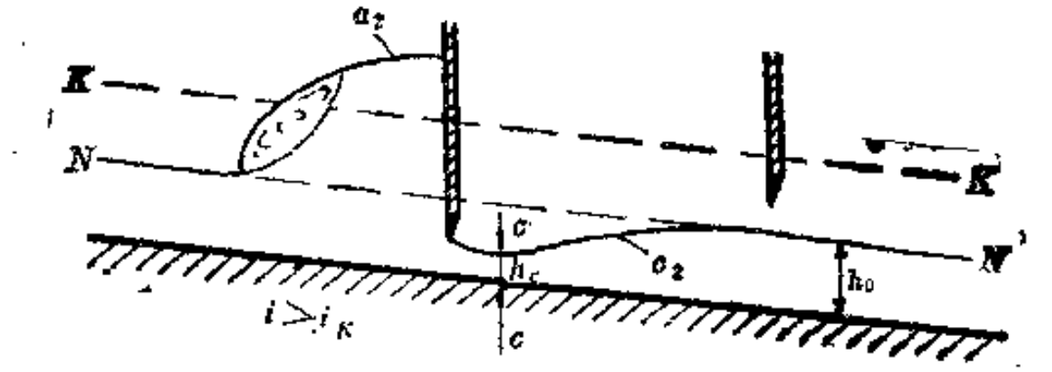
$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}=\frac{1}{0.02}\times1.2^{1/6}$$

$$=51.54\text{m}^{1/2}/\text{s}$$

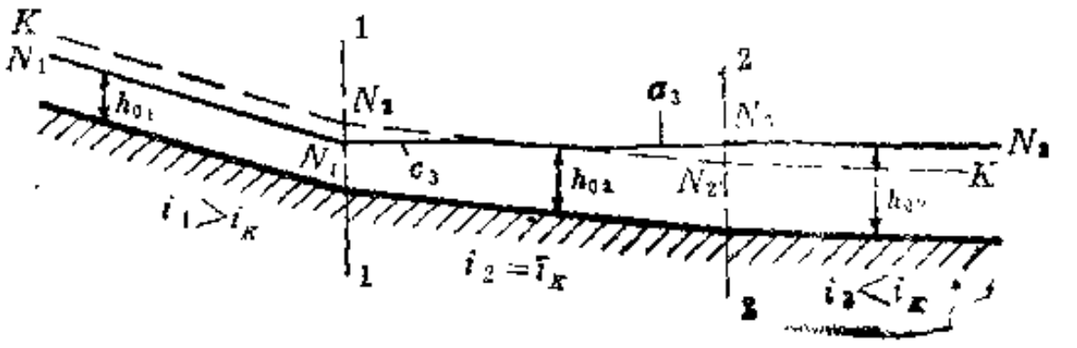
$$\therefore \quad i=\frac{15.6^2}{18.35^2\times51.54^2\times1.2}=0.00023$$

（3）定性绘水面曲线

如解158(a)图所示，因$i>i_K$，$h_0<h_K$，故为陡坡渠道，上游闸门后的收缩水深$h_c<h_0$，而下游闸门开度大于h_0，故上游闸前



解 158 (a) 图

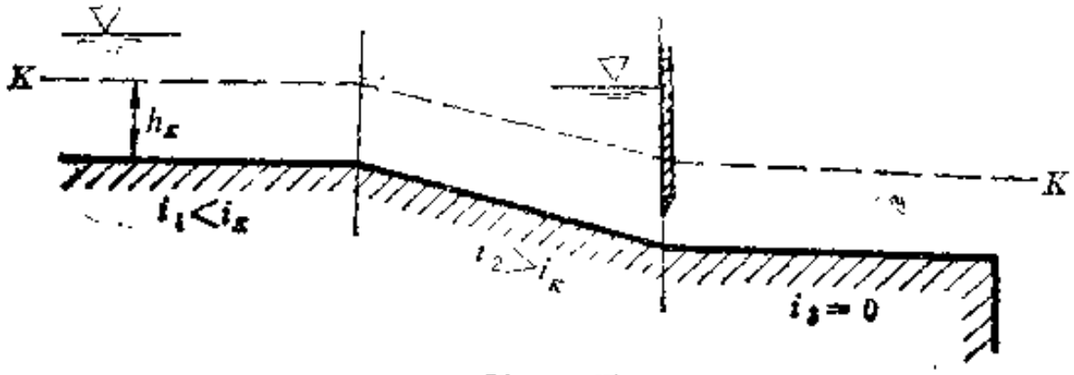


解 158 (b) 图

产生a_2型水面曲线，闸后为c_2型水面曲线。

如解158(b)图所示，因$i_1>i_2=i_K$，$h_{01}<h_{02}=h_K$，水深由h_{01}趋近h_{02}必为壅水，且均为急流，故在1-1变坡断面的上游水面不发生变化，为均匀流。变坡断面的下游产生c_3型水面曲线而后也为均匀流，又因为$i_2>i_3<i_K$，$h_{02}<h_{03}$，水深由h_{02}趋近于h_{03}，也必为壅水故在2-2变坡断面上游产生a_3型壅水曲线。

159 有一棱柱体渠道，缓坡与陡坡、平坡相连接，在陡坡



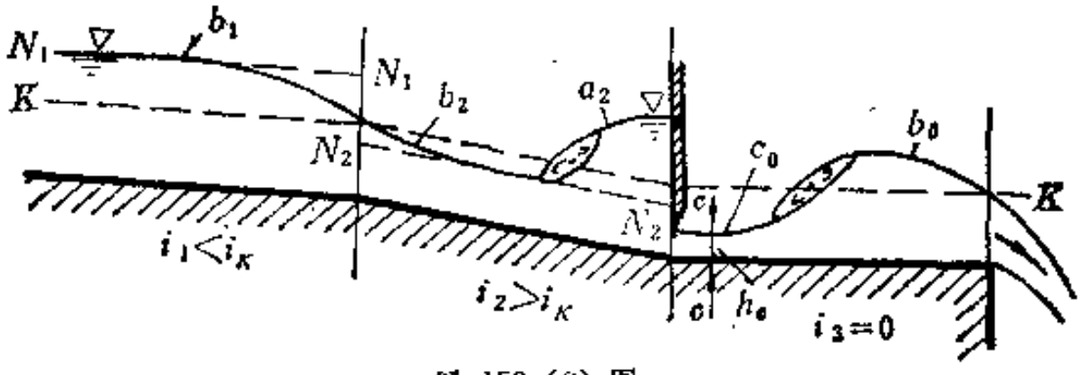
题 159 图

与平坡相连接处设有闸门，其开度如图所示。试绘出各段渠道水面曲线的衔接形式。

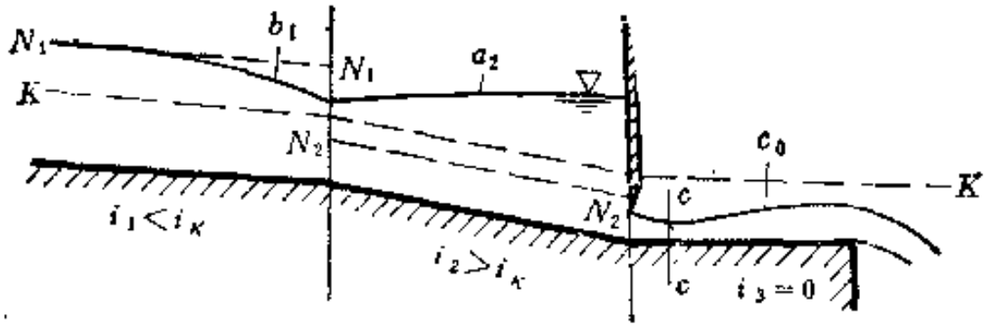
解：

设各段渠道为长渠，则其水面曲线如解159(a)图。

若各段渠道为短渠，则其水面曲线如解159(b)图。



解 159 (a) 图



解 159 (b) 图

160 某山区河道上游段河底纵坡$i_1=0.01$，下游段河底纵坡$i_2=0.005$，断面近似为宽矩形，糙率$n=0.03$。（1）当通过单宽流量$q=10\text{m}^3/\text{s-m}$时，试分析并定性绘出沿河水面线的变化，说明计算该水面线的方法（不必作具体数值计算）。（2）当通过的单宽流量改变为$q=50\text{m}^3/\text{s-m}$和$q=1\text{m}^3/\text{s-m}$时，分析水面线的性质有无改变？如何改变，分别定性绘出沿河水面线的变化情况。

解：

（1）当通过的单宽流量$q=10\text{m}^3/\text{s-m}$时，水面曲线分析：

对宽矩形断面　$R\approx h$

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{10^2}{9.8}}=2.168\text{m}\quad(\text{取}\alpha=1)$$

计算临界底坡i_K

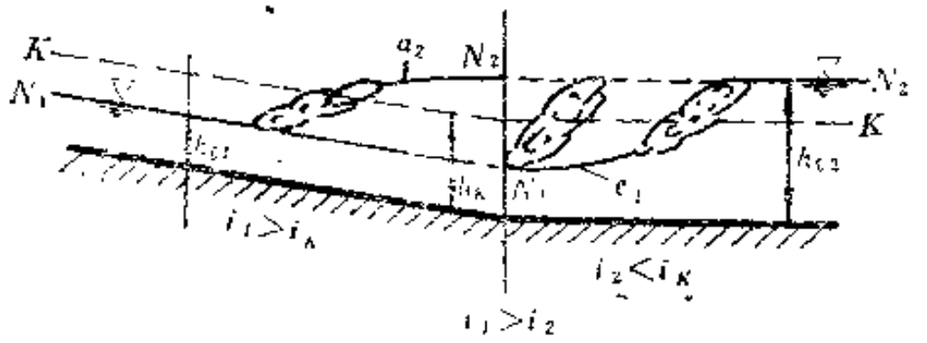
$$C_K=\frac{1}{n}R^{1/6}=\frac{1}{0.03}\times 2.168^{1/6}=37.92\quad \text{m}^{1/2}/\text{s}$$

$$i_K=\frac{g}{\alpha C_K^2}=\frac{9.80}{1/37.92^2}=0.00682$$

对上游河段 $i_1=0.01>i_K$ 为陡坡

下游河段 $i_2=0.005<i_K$ 为缓坡

定出两段河道正常水深N–N线与临界水深K–K线的相互位置，如解160(a)图所示，水流由急流变缓流必产生水跃衔接。



解 160 (a) 图

当水跃的跃后水深$h''_{c1}>h_{c2}$时，产生远驱式水跃衔接，上游河段为均匀流，下游河段产生c_1型壅水曲线。

当水跃的跃后水深$h''_{c1}=h_{c2}$时，产生临界式水跃衔接，上游河段为均匀流。

当水跃的跃后水深$h''_{c1}<h_{c2}$时，产生淹没式水跃衔接，水跃发生在上游河段，且产生a_2型壅水曲线，下游河段为均匀流，如解160(a)图所示。

水面曲线的计算方法如下：

(a)先计算出河段的临界水深h_K，均匀流水深h_{01}，h_{02}；

(b)以h_{01}为跃前断面水深，计算其共轭水深h''_{c1}，用h''_{c1}与下游河段的均匀流水深h_{c2}相比较，判别水跃衔接形式；

(c)若产生c_1型壅水曲线，则应分段，由已知水深h_{01}开始逐

段向下游计算。即假设下断面水深，求分段长度Δl。末端断面水深等于h_{02}的跃前水深。

水面曲线的计算公式为$\Delta l=\dfrac{E_{sd}-E_{su}}{i-\bar{J}}$

式中 E_{sd}、E_{su}分别表示Δl流段的下游及上游断面的断面比能.

水面曲线的总长度 $l=\Sigma\Delta l$

（2）当通过的单宽流量改变为$q=50\text{m}^3/\text{s-m}$和$q=1\text{m}^3/\text{s-m}$时，水面曲线的分析：

当$q=50\text{m}^3/\text{s-m}$时

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1\times 50^2}{9.80}}=6.34\text{m}$$

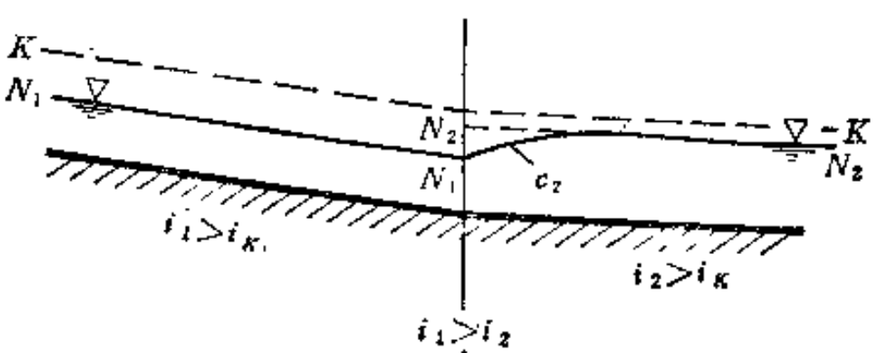
$$C_K=\frac{1}{n}R_K^{1/6}=\frac{1}{0.03}\times 6.34^{1/6}=45.35\quad \text{m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$$

$$i_K=\frac{g}{\alpha C_K^2}=\frac{9.80}{1\times 45.35^2}=0.00477$$

上游河段 $i_1=0.01>i_K$ 为陡坡

下游河段 $i_2=0.005>i_K$ 为陡坡

又因$i_1>i_2$，故$h_{01}<h_{02}$，在下游河段产生c_2型壅水曲线，上游河段为均匀流，水面曲线型式如b图所示。



解 160 (b) 图

当 $q=1\text{m}^3/\text{s-m}$时

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1^2}{9.80}}=0.467\quad \text{m}$$

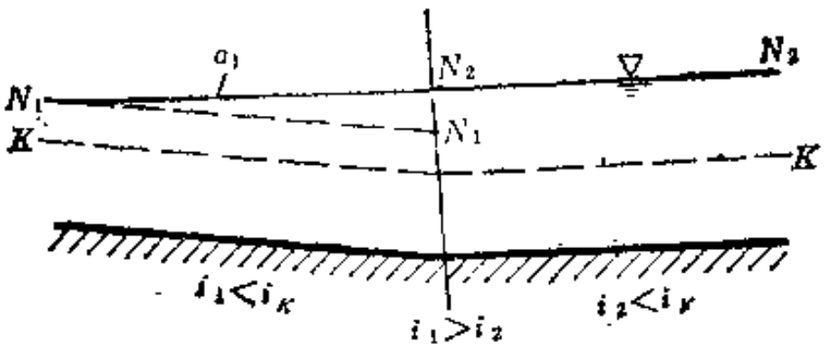
$$C_K=\frac{1}{n}R_K^{1/6}=\frac{1}{0.03}\times 0.467^{1/6}=29.36\quad \text{m}^{\frac{1}{2}}/\text{s}$$

$$i_K=\frac{g}{\alpha C_K^2}=\frac{9.81}{29.36^2}=0.0114$$

上游河段　$i_1=0.01<i_K$　为缓坡

下游河段　$i_2=0.005<i_K$　为缓坡

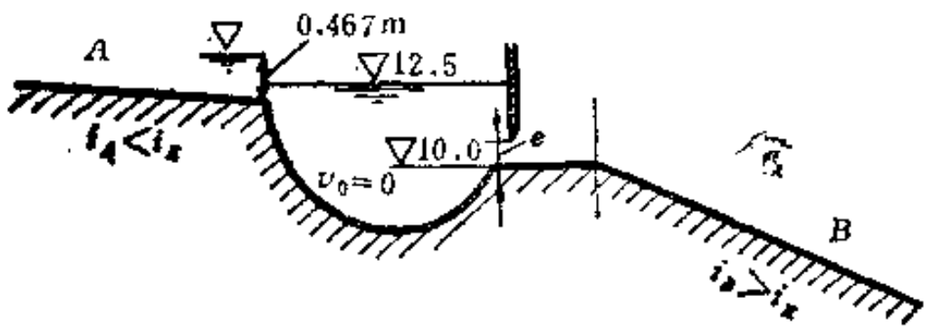
又因$i_1>i_2$，故$h_{01}<h_{02}$，在两段缓坡河段上，上游河段产生a_1型壅水曲线，下游河段产生均匀流。水面曲线如c图所示。



解 160 (c) 图

V、水跃及堰、闸出流

161　某水池与A、B两棱柱体渠道相联，A渠中的水流入水池，B渠自池中取水。A、B两渠道断面均为矩形，具有相同的底宽。今已知：A渠道底坡$i_A<i_K$，末端水深为0.467m，B渠道进口处设闸门，闸门宽与渠宽相同，闸后为陡坡渠道。问B渠进口闸门开度e为若干时，才能使池中水位稳定在高程▽12.5m处。提示，闸孔为自由出流，流量系数按$\mu=0.60-0.18\frac{e}{H}$计算。



题 161 图

解：

$\because\ v_0=0 \qquad \therefore\ H=H_0$

$$H=12.5-10.0=2.5\text{m}$$

因A渠道底坡$i_A<i_K$，故为缓坡渠道，渠中发生b_1型降水曲线，末端水深必为h_K，$h_K=0.467\text{m}$，由矩形断面临界水深公式可算出流量。

$$\because \qquad h_K=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

$$\therefore \qquad q=\sqrt{h_K^3 g}=\sqrt{0.467^3\times 9.8}$$

$$=0.999\text{m}^3/\text{s-m}$$

要使池中水位保持不变，稳定在高程▽12.5m处，必须使A渠流进水池流量等于由B渠流出的流量，故经闸孔自由出流的流量q应为$0.999\text{m}^3/\text{s-m}$，

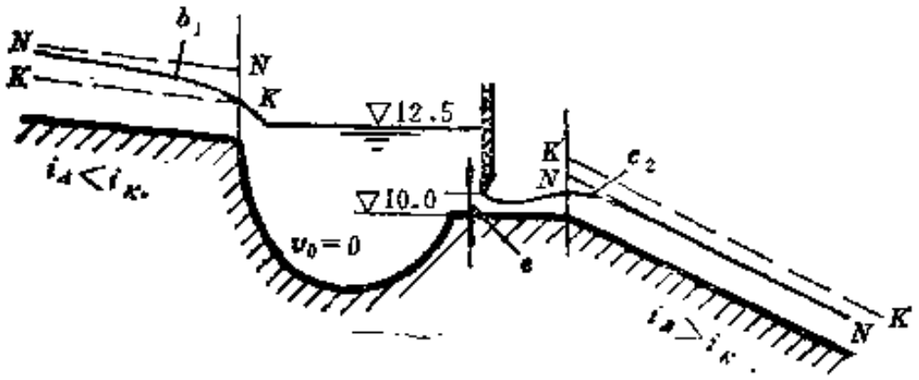
由闸下自由出流公式知

$$q=\mu e\sqrt{2gH}$$

则

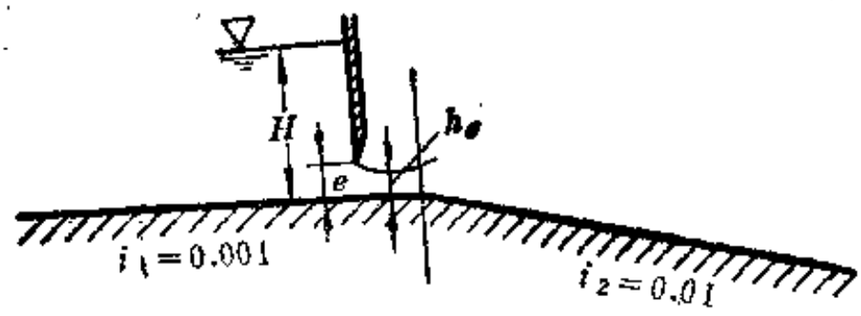
$$0.999=\left(0.60-0.18\frac{e}{2.5}\right)e\sqrt{19.6\times 2.5}$$

用试算法求得$e=0.25\text{m}$时，$q=1.0\text{m}^3/\text{s-m}$，故$e=0.25\text{m}$即为所求的闸门开度。$B$渠中的水面曲线如图所示。



解 161 图

162 某宽阔的矩形河槽中设置有平板闸（见图），今已知：闸上游的总水头$H_0\approx H=2\text{m}$，闸门开度$c=0.4\text{m}$，闸门的流速系数$\varphi=0.98$，垂直收缩系数$\varepsilon=0.6$，槽底坡$i_1=0.001$，$i_2=$



题 162 图

0.01，河槽粗糙系数$n_1=n_2=0.014$，试判别闸门上、下游水面曲线的类型，并绘出示意图

解：

计算闸下收缩水深及单宽流量

$$h_c=\varepsilon e=0.6\times0.4=0.24\text{m}$$

$$q=\varphi h_c\sqrt{2g(H_0-h_c)}$$

$$=0.98\times0.24\sqrt{2\times9.8(2-0.24)}$$

$$=1.38\text{m}^3/\text{s-m}$$

计算临界水深

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1.38^2}{9.8}}=0.579\text{m}$$

计算正常水深

对于宽阔矩形河槽，可令$R=h_0$，于是

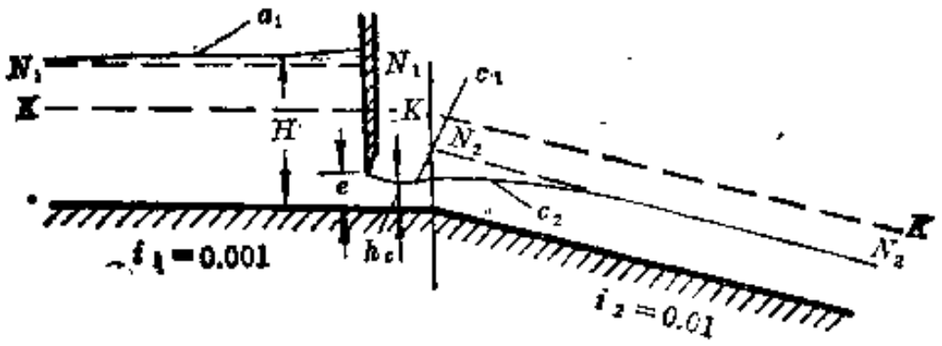
$$q=h_0\frac{1}{n}h_0^{1/6}\sqrt{h_0 i}=\frac{1}{n}h_0^{5/3}i^{1/2}$$

从而 $$h_0=\left(\frac{nq}{i^{0.5}}\right)^{0.6}$$

于是 $$h_{01}=\left(\frac{0.014\times1.38}{0.001^{0.5}}\right)^{0.6}=0.744\text{m}$$

$$h_{02}=\left(\frac{0.014\times1.38}{0.01^{0.5}}\right)^{0.6}=0.373\text{m}$$

因为$H=2\text{m}>h_{01}=0.744\text{m}>h_K=0.579\text{m}$，故闸上游的水面曲线为$a_1$型曲线。又因为$h_c=0.24\text{m}<h_{02}=0.373\text{m}<h_K=0.579\text{m}$，故闸下游的水面曲线为$c_2$型曲线，水面曲线的示意图



解 162 图

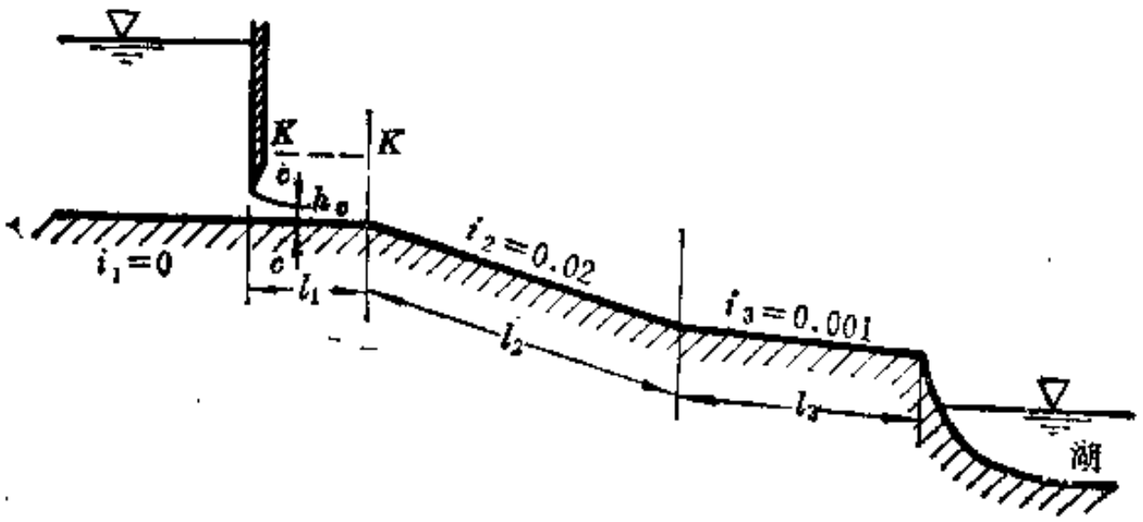
见解162图。

163 在棱柱体矩形渠道中设一闸门，已知闸门开度$e=0.3$m，闸门流速系数$\varphi=0.98$，垂直收缩系数$\varepsilon_2=0.615$，三段渠道宽$b=4$m，粗糙系数均为$n=0.02$，底坡分别为：$i_1=0$；$i_2=0.02$；$i_3=0.001$（l_1很短，l_2、l_3都有充分长）。渠道最后流入湖中，渠道的临界水深$h_K=0.6$m，若不计闸前行近流速，试求：

（1）定性分析闸门下游三段渠道中可能发生的水面曲线，绘出示意图，注明水面曲线类型；

（2）标出各段水流为均匀流还是渐变流，或急变流？是缓流还是急流？

（3）计算闸前水深$H=$？并求闸下收缩断面的佛汝德数为多少？



题 163 图

解：

（1）由题给条件已知临界水深$h_K=0.6\text{m}$

故
$$q=\sqrt{h_K^3 g}=\sqrt{0.6^3\times 9.8}=1.45\text{m}^2/\text{s}$$
$$Q=q\cdot b=1.45\times 4=5.8\text{m}^3/\text{s}$$

临界坡度为

$$i_K=\frac{g\chi_K}{\alpha C_K^2 b_K}$$

$$R_K=\frac{bh_K}{b+2h_K}=\frac{4\times 0.6}{4+1.2}=0.46\text{m}$$

$$C_K=\frac{1}{n}R_K^{1/6}=\frac{1}{0.02}\times 0.46^{1/6}$$

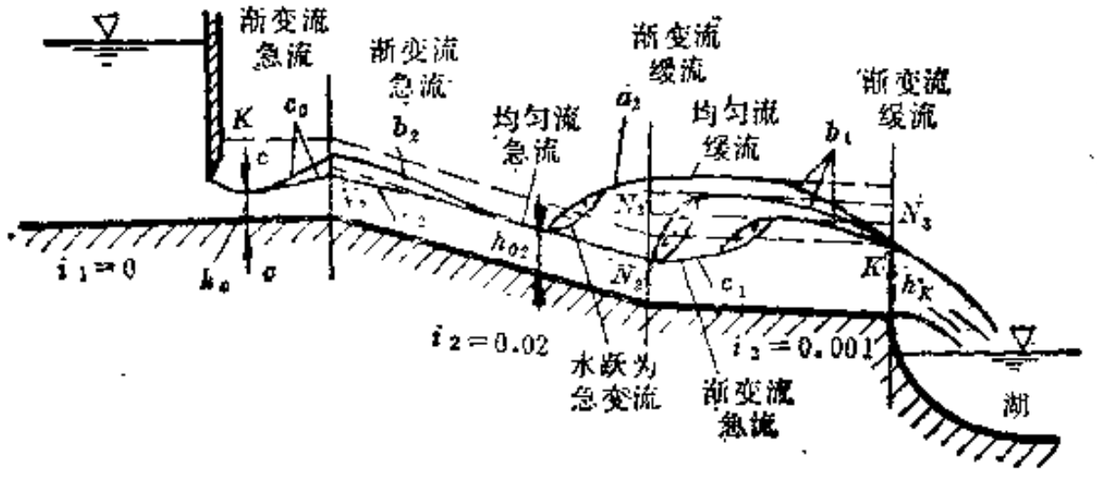
$$=43.93\ \text{m}^{1/2}/\text{s}$$

$$\chi_K=b+2h_K=4+1.2=5.2\text{m}$$

$$\therefore\quad i_K=\frac{9.8\times 5.2}{43.93^2\times 4}=0.006$$

$$\because\quad i_2=0.02>i_K\quad \text{故为陡坡}$$

$$i_3=0.001<i_K\quad \text{故为缓坡}$$



解 163 图

闸下收缩水深$h_c=\varepsilon e=0.615\times 0.3=0.185\text{m}<h_K=0.6\text{m}$，故闸下游三段渠道中可能发生的水面曲线如图所示。[3]第一段渠道中为C_0型壅水曲线，第二渠道中可能发生b_2型降水曲线或者C_2型壅水曲线，而后为均匀流，第三段渠道中可能有三种情况：①当

h_{02}的跃后水深$h''_{02}=h_{03}$时，发生临界式水跃；②当$h''_{02}>h_{03}$时发生远驱式水跃，水跃前产生C_1型壅水曲线，跌坎前为b_1型降水曲线；③当$h''_{02}<h_{03}$时，水跃发生在第二渠道中，与a_2型壅水曲线衔接。

（2）各渠道水流的流态已标于图中。

（3）计算闸前水深H_0

$$\because \quad Q=\varphi b h_c\sqrt{2g(H_0-h_c)}$$

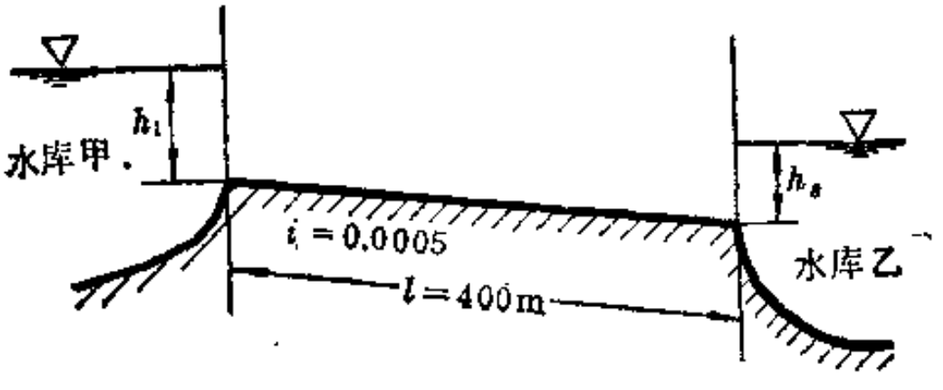
$$\therefore \quad 5.8=0.98\times 4\times 0.185\sqrt{19.6(H_0-0.185)}$$

$$H_0=3.45\text{m}$$

闸下收缩断面的佛汝德数

$$\mathrm{Fr}_c=\frac{v_c}{\sqrt{gh_c}}=\frac{\dfrac{5.8}{4\times 0.185}}{\sqrt{9.8\times 0.185}}=5.82$$

164 有一矩形断面渠道，其长度$l=400\text{m}$，底坡$i=0.0005$，底宽$b=8\text{m}$，糙率$n=0.025$，渠道两端各与甲、乙水库相连，如图所示，如水库甲的水位保持不变（渠道进口处水深$h_1=2\text{m}$），水库乙的水位是不断变化的（水库乙的水面对渠道出口处渠底的淹没深度由$h_s=0$增至$h_s=h_1+il$），要求：



题 164 图

（1）定性绘出渠道中可能出现的不同类型的水面曲线，并注明曲线名称；

（2）分析渠道中流量变化情况，并定性绘出流量Q随水深

h_2（渠道出口处断面的水深）的变化曲线；

（3）当渠道中水流为均匀流时，计算渠道中的流量；

（4）当水库乙水位已知，且$h_2<h_K$时，说明确定渠道临界水深h_K的方法及步骤（不作定量计算）。

解：

（1）定性绘出渠道中可能出现的不同类型的水面曲线，并注明曲线名称

由于不计进口水面跌落，可视渠道为长渠，分析水面曲线类型必须知道渠道的底坡是缓坡还是陡坡。

因已知进口$h_1=2$m，当下游水位使$h_2=h_2=h_1$时，渠道首尾两端水深相等，水流将形成均匀流，并具有正常水深$h_0=h_1=h_1$，此时的流量为均匀流流量Q_0，Q_0可计算如下

$$Q_0=CA\sqrt{Ri}$$

$$A=bh_0=8\times2=16\text{m}^2$$

$$\chi=b+2h_0=8+2\times2=12\text{m}$$

$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{16}{12}=1.333\text{m}$$

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}=\frac{1}{0.025}\times1.333^{1/6}$$

$$=41.96\ \text{m}^{1/2}/\text{s}$$

$$\therefore\quad Q_0=41.96\times16\sqrt{1.333\times0.0005}$$

$$=17.33\text{m}^3/\text{s}$$

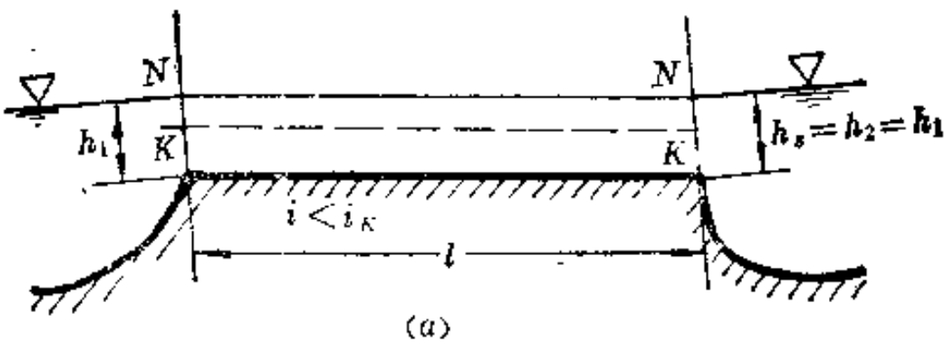
单宽流量为

$$q=\frac{Q}{b}=\frac{17.33}{8}=2.166\quad \text{m}^3/\text{s}-\text{m}$$

计算其临界水深

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1\times2.166^2}{9.80}}=0.782\quad \text{m}$$

因正常水深$h_0>$临界水深h_K，故渠道底坡为缓坡，$i<i_K$。水面曲线形式如解164（a）图所示。



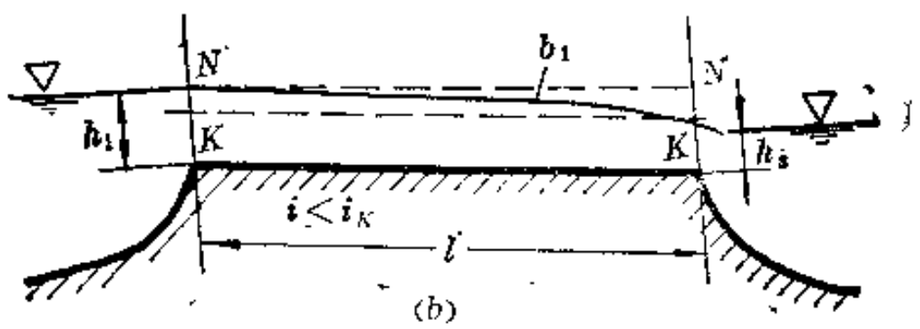
(a)

解 164(a) 图

此时 $h_1=h_2=h_0=h_s$

当上游水库甲的水位保持不变，渠中水面曲线主要受下游水库乙水位变化的影响。

①当下游水库水位自$h_s=0$增至$h_s=h_K$时，即下游水库水位总是在K-K线以下，渠道中产生b_1型降水曲线，如解164(b)图所示。

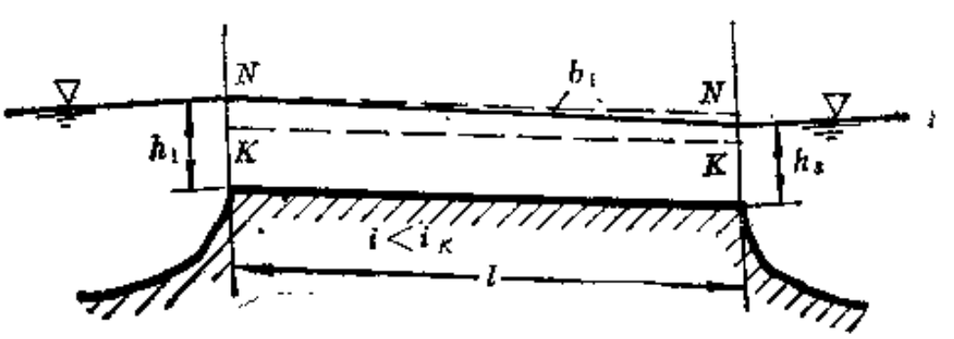


(b)

解 164(b) 图

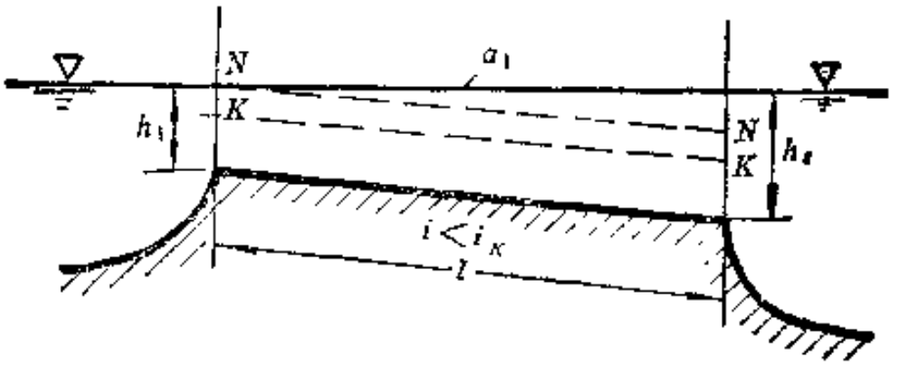
渠道出口水深$h_2=h_K$

②当下游水库水位自$h_s=h_K$增至$h_s=h_0$时，即下游水库水位在K-K，N-N线之间时，渠道中仍产生b_1型降水曲线，如解



(c)

解 164(c) 图



解 164(d) 图

164(c)图所示。

③当下游水库水位自$h_2=h_0$增至$h_2=h_1+il$时，即下游水库水位在N-N线以上，渠道中产生a_1型壅水曲线，如解 164(d)图所示。

此时渠道出口水深 $h_2>h_1$

④当下游水库水位$h_2=h_1+il=2+0.0005\times400=2.2$m时，水面为水平线，此时流量为零。

（2）分析渠道流量变化情况，并定性绘制流量Q随h_2的变化曲线

当渠道中产生均匀流时，$h_1=h_2=h_0$，渠中流量$Q=Q_0$，

当渠道中产生a_1型壅水曲线时，渠道中水深沿流程增加，此时$h_2>h_1$，渠中流量$Q<Q_0$。

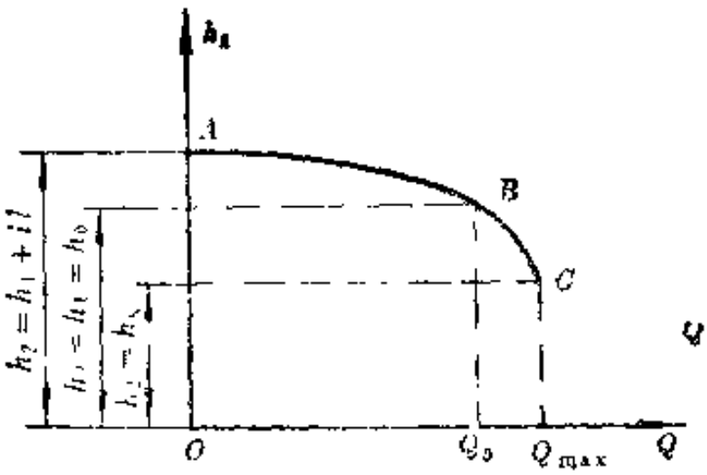
当渠道中产生b_1型降水曲线时，渠道中水深沿流程减小，此时$h_2<h_1$，流量$Q>Q_0$。

当渠道中产生b_1型降水曲线，且渠道出口水深$h_2=h_K$时，渠道中流量最大，即$Q=Q_{max}$。

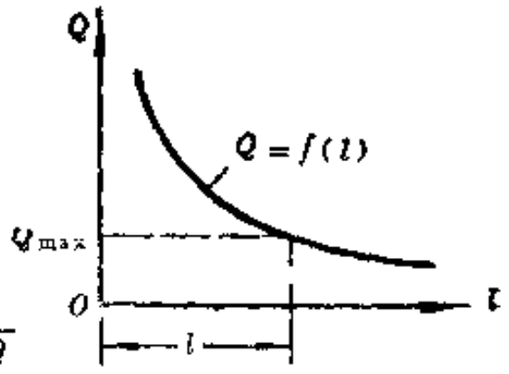
当$h_2=h_2=h_1+il$时，上下游水面为水平线，渠道中流量$Q=0$。

根据以上分析，定性绘制$Q=f(h_2)$关系曲线如解 164(c)图所示。

由图可知，AB段属回水曲线范围，在这一范围内，$h_2>h_1$，$Q<Q_0$。BC段属降水曲线范围，在此范围内，$h_2<h_1$，$Q>Q_0$。在C点，相应的水深为$h_2=h_K$，$Q=Q_{max}$。



解 164(e) 图



解 164(f) 图

（3）当渠道为均匀流时，其流量的计算如前（1），$Q_0=17.33m^3/s$

（4）当水库乙水位已知，且$h_t<h_K$时，说明确定渠道临界水深h_K的方法及步骤（不作定量计算）。

在此情况下，由于水库乙水位总是低于渠道的临界水深线K-K，出口水深$h_2=h_K$，相应的流量为最大，即$Q=Q_{max}$，渠道中的水面曲线为b_1型降水曲线，欲计算h_K，可采用如下步骤：

①给出一系列的正常水深h_0值，求相应的流量Q_0及临界水深h_K值；

②由已知的h_1、n、b、i、Q_0，并令$h_2=h_K$，用渐变流水面曲线的计算公式（分段求和法）：

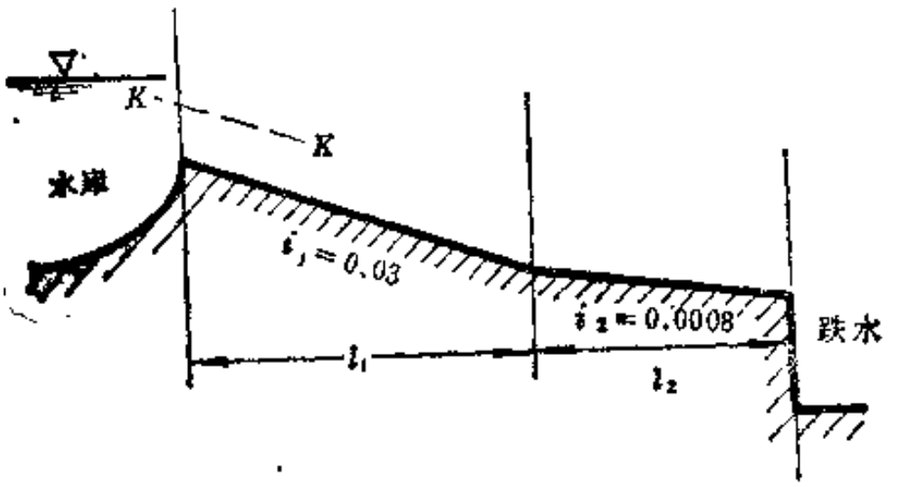
$$\Delta l=\frac{E_{s1}-E_{s2}}{i-\bar{J}}$$

计算各种流量时b_1型降水曲线长度l。

③根据已计算出的数据，绘制$Q=f(l)$曲线，如解164(f)图所示。

④由图查得，当$l=400m$时，其相应的流量即为最大流量Q_{max}，该流量所对应的水深h_K即为要求的临界水深。

165 某一宽矩形断面的渠道，由上、下两段相连，渠道上游端与水库相接，渠道末端有一跌水，如题165图所示，两段渠道的底坡$i_1=0.03$，$i_2=0.0008$，糙率$n_1=0.014$，$n_2=0.02$，



题 165 图

第一段渠道长度l_1很长，第二段渠道长度$l_2=250$m，从水库引用单宽流量$q=2.90\text{m}^3/\text{s-m}$，水库水位高于渠道进口断面临界水深所对应的高程，试分析渠道中水面曲线形式，判别有无水跃发生？若有水跃发生，试确定水跃的位置及水跃段单宽能量损失。

解：

（1）分析渠道中水面曲线形式

首先计算两段渠道的正常水深h_{01}，h_{02}，对宽矩形断面渠道$R\approx h$，谢才公式可写为

$$q=h_0C\sqrt{h_0i}=\frac{1}{n}h_0^{5/3}\sqrt{i}$$

则

$$h_0=\left(\frac{nq}{\sqrt{i}}\right)^{3/5}$$

∴ 对第一渠道

$$h_{01}=\left(\frac{n_1q}{\sqrt{i_1}}\right)^{3/5}=\left(\frac{0.014\times2.9}{\sqrt{0.03}}\right)^{3/5}$$

$$=0.419\text{m}$$

对第二段渠道

$$h_{02}=\left(\frac{n_2q}{\sqrt{i_2}}\right)^{3/5}=\left(\frac{0.02\times2.9}{\sqrt{0.0008}}\right)^{3/5}$$

$$=1.539\text{m}$$

临界水深

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1\times 2.9^2}{9.80}}=0.95\text{m}$$

对第一段渠道，因$h_{01}<h_K$，为陡坡渠道，水流由水库进入陡坡渠道，进口断面水深为临界水深h_K，因此在第一段渠道内产生b_2型降水曲线，如解165(a)图所示。又因l_1很长，第一段渠道下游端水深可视为均匀流水深，$h_{01}=0.419\text{m}$，该水深小于临界水深，故水流为急流。

第二段渠道因$h_{02}>h_K$，均匀流水深大于临界水深，为缓坡渠道，水流为缓流。

当水流由急流变为缓流时，一定产生水跃，但在本题所给条件下，水跃的形式及位置要通过计算才能确定。

（2）判别水跃形式及位置

因第一渠段很长，在渠道转折断面c-c处，水深为正常水深，即$h_c=h_{01}$，以此为跃前水深来计算跃后水深h_c''，与下游水深h_{02}作比较，即可判别水跃形式。

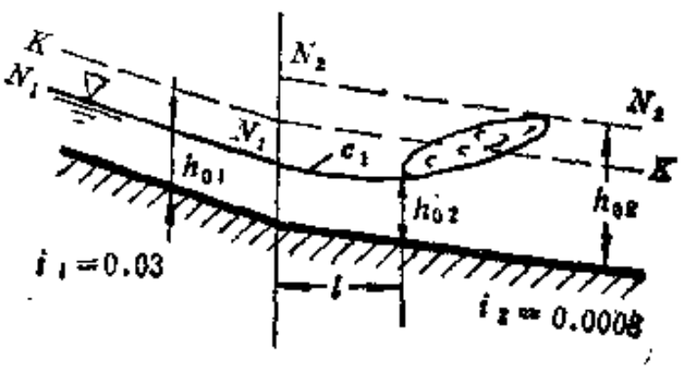
$$h_c''=\frac{h_c}{2}\left[\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_c^3}}-1\right]=$$

$$\frac{0.419}{2}\left[\sqrt{1+8\times\frac{2.9^2}{9.80\times 0.419^3}}-1\right]$$

$$=1.83\text{m}$$

因$h_c''>h_{02}$，故产生远驱式水跃衔接形式，跃前必产生c_1型壅水曲线。如解165(a)图。

若能计算出c_1型水面曲线的长度l，即可以确定水跃的



解 165(a)图

位置。

因h'_{02}为h_{02}的跃前水深，故

$$h'_{02}=\frac{h_{02}}{2}\left[\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_{02}^3}}-1\right]$$

$$=\frac{1.539}{2}\left[\sqrt{1+8\times\frac{2.9^2}{9.80\times1.539^3}}-1\right]$$

$$=0.537 \quad \text{m}$$

由此可知c_1型水面曲线的起始水深为$h_{01}=0.419$m，末端水深为$h'_{02}=0.537$m，根据水面曲线计算的公式，

$$l=\frac{E_{s1}-E_{s2}}{i-\bar{J}}$$

$$h_{01}=0.419 \quad \text{m}$$

$$v_1=\frac{q}{h_{01}}=\frac{2.9}{0.419}=6.92 \quad \text{m/s}$$

$$\frac{v_1^2}{2g}=\frac{6.92^2}{2\times9.80}=2.44 \quad \text{m}$$

$$R_1\approx h_{01}=0.419 \quad \text{m}$$

$$C_1=\frac{1}{n_1}R_1^{1/6}=\frac{1}{0.014}\times0.419^{1/6}=61.8 \quad \text{m}^{1/2}/\text{s}$$

$$J_1=\frac{v_1^2}{C_1^2R_1}=\frac{6.92^2}{61.8^2\times0.419}=0.02994$$

$$E_{s1}=h_1+\frac{v_1^2}{2g}=0.419+2.44=2.859 \quad \text{m}$$

$$h'_{02}=0.537 \quad \text{m}$$

$$v_2=\frac{q}{h'_{02}}=\frac{2.9}{0.537}=5.4 \quad \text{m/s}$$

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{5.4^2}{2\times9.80}=1.49 \quad \text{m}$$

$$R_2\approx h_{02}=0.537 \quad \text{m}$$

$$C_2=\frac{1}{n_2}R_2^{1/6}=\frac{1}{0.02}\times0.537^{1/6}=45.08 \quad \text{m}^{1/2}/\text{s}$$

$$J_2=\frac{v_2^2}{C_2^2R_2}=\frac{5.4^2}{45.08^2\times0.537}=0.02672$$

$$E_{s1}=h_2+\frac{v_2^2}{2g}=0.537+1.49=2.027 \quad \text{m}$$

$$\overline{J}=\frac{1}{2}(J_1+J_2)=\frac{1}{2}(0.02994+0.02672)$$

$$=0.02833$$

$$l=\frac{E_{s2}-E_{s1}}{i-\overline{J}}=\frac{2.027-2.0859}{0.0008-0.02833}=30.22 \quad \text{m}$$

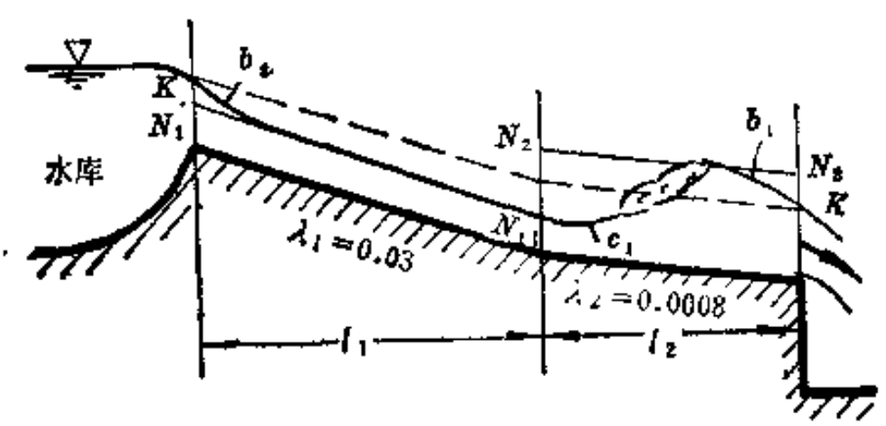
水跃长度$l_j=10.8h'_{02}(\mathrm{Fr}_2-1)^{0.93}$

$$\because \quad \mathrm{Fr}_2=\frac{v_2}{\sqrt{gh'_{02}}}=\frac{5.4}{\sqrt{9.8\times0.537}}=2.354$$

$$\therefore \quad l_j=10.8\times0.537(2.354-1)^{0.93}$$

$$=7.7 \quad \text{m}$$

由以上计算可知，水跃产生在转折断面c-c的下游30.22m处。由于$l+l_j<l_2$，且第二渠段末端有一跌水，$h_{02}>h_K$，跌坎断面水深定为h_K，因此水跃后为b_1型降水曲线，全渠道水面曲线形式如解165(b)图所示。



解 165(b)图

(3)计算水跃段的能量损失

对棱柱体矩形水平明渠，水跃段的水头损失公式为

$$E_j=\frac{h_1}{4\eta}[(\eta-1)^3-(\alpha_2-1)(\eta+1)]$$

该式对底坡较小的渠道也适用。

式中 α_2为跃后断面水流的动能修正系数，可按下式计算

$$\alpha_2=0.85Fr_1^{2/3}+0.25$$

$$\eta=\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1)$$

Fr_1为跃前断面的佛汝德数，为与前面符号数据统一，$h_1=h'_{c2}=0.537$m，$v_1=v_2=5.4$m/s，于是得

$$\alpha_2=0.85\times2.354^{2/3}+0.25=1.756,$$

$$\eta=\frac{1}{2}(\sqrt{1+8\times2.354^2}-1)=2.875$$

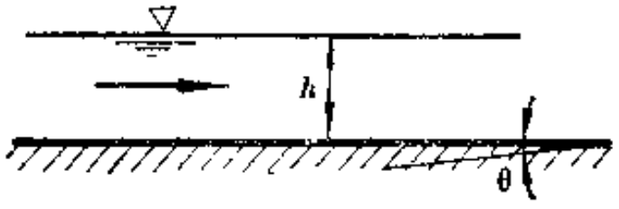
故 $$E_j=\frac{0.537}{4\times2.875}[(2.875-1)^3-(1.756-1)(2.875+1)]$$

$$=0.189 \quad \text{m}$$

单宽单位时间内水跃段内的能量损失

$$p_j=9.8qE_j=9.8\times2.9\times0.189=5.37 \quad \text{kW/m}$$

166 试述断面单位能量（断面比能）的定义。设渠道断面面积为A，恒定流流量为Q，水面宽度为B，其余尺寸见图。根据定义，试求明渠恒定渐变流断面单位能量E_s的表达式，绘出$E_s=f(h)$的示意图，并求相应的临界水深h_K的表达式。



题 166图

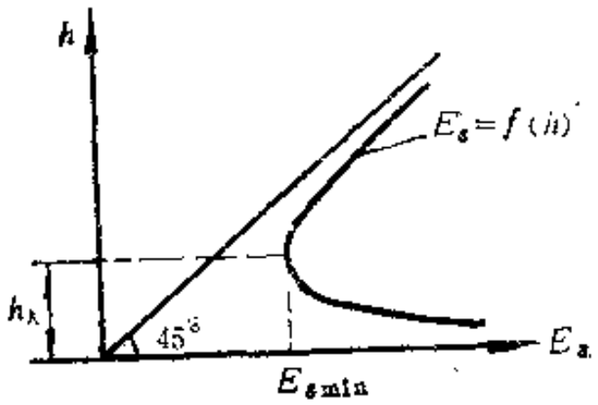
解：

以明渠均匀流或渐变流的过水断面最低点的水平面为基准面，则过水断面上单位重量液体所具有的总能量称为断面单位能量（断面比能），用E_s表示，

即 $$E_s=h\cos\theta+\frac{\alpha v^2}{2g}$$

$$=h\cos\theta+\frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{Q^2}{A^2}$$

当断面形状和流量一定时，断面比能E_s与水深h有关，绘出比能曲线$E_s=f(h)$示意图，如解166图所示。由图可知，断面比



解 166图

能最小值所相应的水深为临界水深，用h_K表示。因此只需对比能函数求导数，并令其等于零，即可求出临界水深表达式，即

$$\frac{dE_s}{dh}=\cos\theta+\left(-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\cdot\frac{dA}{dh}\right)=0$$

$$\because\qquad \frac{dA}{dh}=B$$

$$\therefore\qquad \frac{\alpha Q^2}{gA^3}B=\cos\theta$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g\cos\theta}=\frac{A^3}{B}=f(h_K)$$

该式即为临界水深h_K的表达式。当θ很小时$\cos\theta\approx 1$则得

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{A^3}{B}$$

渠道断面为矩形时 $h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}$

167 证明判别宽矩形（$R\approx h$）断面渠道的底坡i_0为陡坡还是缓坡的准则是：

$$i_0>12.63n^2q^{-2/9}\quad 或\quad i_0<12.63n^2q^{-2/9}$$

（注：题中R为水力半径，h为水深，n为糙率，q为单宽流量）

解：

对宽矩形断面渠道 $R\approx h$

临界底坡公式为

$$i_K=\frac{g}{\alpha C_K^2}$$

式中　取 $\alpha=1$，g 为重力加速度，$C_K=\frac{1}{n}R^{1/6}$

$$\therefore\quad i_K=\frac{g}{\frac{1}{n^2}h_K^{1/3}}=\frac{n^2g}{\left[\left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}\right]^{1/3}}$$

$$=\frac{n^2(g)^{1/3}}{q^{2/9}}=\frac{n^2(9.8)^{1/3}}{q^{2/9}}$$

$$=12.63n^2q^{-\frac{2}{9}}$$

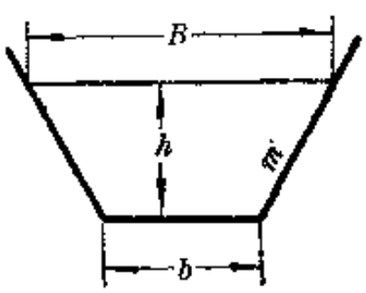
当渠道的底坡$i_0<i_K$时，为缓坡

当渠道的底坡$i_0>i_K$时，为陡坡

故　$i_0>12.63n^2q^{-\frac{2}{9}}$或　$i_0<12.63n^2q^{-\frac{2}{9}}$可作为判别缓坡与陡坡的标准。

168　试证明梯形断面渠道中临界水深h_K和断面比能E_s，边坡系数m及底宽b的关系式为

$$h_K=\frac{4mE_s-3b+\sqrt{16m^2E_s^2+16mE_sb+9b^2}}{10m}$$



题 168图

解，

梯形断面面积　$A=(b+mh)h$，水面宽　$B=b+2mh$，

断面比能　$E_s=h+\frac{\alpha v^2}{2g}$，取$\alpha=1$，则$v=\sqrt{2g(E_s-h)}$，

流量$Q=Av=(b+mh)h\sqrt{2g(E_s-h)}$

当断面比能E_s一定时，断面形状尺寸不变，Q仅为h的函

数，令$\frac{dQ}{dh}=0$，求最大流量所相应的水深，即为临界水深。为简便起见，先将上式取对数，然后再求导数。

$$\ln Q=\ln(b+mh)+\ln h+\frac{1}{2}\ln(2g)+\frac{1}{2}\ln(E_s-h)$$

对h求导得

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dh}=\frac{m}{b+hm}+\frac{1}{h}-\frac{1}{2(E_s-h)}$$

令 $\frac{dQ}{dh}=0$，则$h=h_K$

故
$$\frac{m}{b+mh_K}+\frac{1}{h_K}-\frac{1}{2(E_s-h_K)}=0$$

$$\frac{(b+mh_K)+mh_K}{h_K(b+mh_K)}=\frac{1}{2(E_s-h_K)}$$

$$h_K(b+mh_K)=2(E_s-h_K)[(b+mh_K)+mh_K]$$

简化得 $2E_sb+4E_smh_K-2bh_K-5mh_K^2-bh_K=0$

$$5mh_K^2+(3b-4mE_s)h_K-2E_sb=0$$

解此一元二次方程得

$$h_K=\frac{-(3b-4mE_s)\pm\sqrt{(3b+4mE_s)^2+4\times5m\times2E_sb}}{2\times5m}$$

$$=\frac{4mE_s-3b\pm\sqrt{9b^2-24bmE_s+16m^2E_s^2+40bmE_s}}{10m}$$

当$m\neq0$时，取正号解得

$$h_K=\frac{4mE_s-3b+\sqrt{9b^2+16bmE_s+16E_s^2m^2}}{10m}$$

169 试证宽浅式矩形断面渠道中恒定均匀流时的佛汝德数

$$Fr=\frac{i^{9/20}q^{1/10}}{n^{9/10}g^{1/2}}$$

式中 i为底坡，n为糙率，q为单宽流量，g为重力加速度。

解：

因水流是恒定均匀流，则根据谢才公式

$$q=hC\sqrt{Ri}$$

对宽浅式矩形断面渠道$R=h$，谢才系数采用满宁公式计算，

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}$$

则
$$q=\frac{1}{n}h^{1/6}h\sqrt{hi}=\frac{1}{n}h^{10/6}i^{1/2}$$

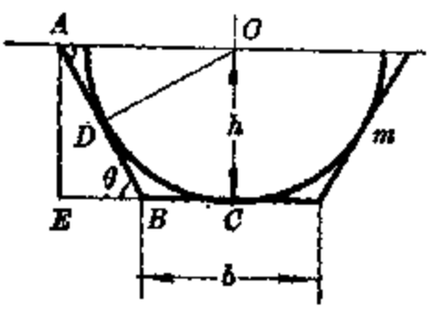
移项得
$$h=\left(\frac{nq}{i^{1/2}}\right)^{6/10}$$

流速
$$v=\frac{q}{h}=\frac{q}{\left(\frac{nq}{i^{1/2}}\right)^{6/10}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Fr}=\frac{v}{\sqrt{gh}}=\frac{\dfrac{q}{\left(\dfrac{nq}{i^{1/2}}\right)^{6/10}}}{g^{1/2}\left[\left(\dfrac{nq}{i^{1/2}}\right)^{6/10}\right]^{1/2}}$$

$$=\frac{q}{g^{1/2}\left(\dfrac{nq}{i^{1/2}}\right)^{6/20}\times\left(\dfrac{nq}{i^{1/2}}\right)^{6/10}}=\frac{i^{9/20}q^{1/10}}{g^{1/2}n^{9/10}}$$

170 试证明在明渠均匀流中，梯形水力最佳断面，实际上是半圆的外切多边形断面。



题 170 图

解：

在梯形断面水面中点O作OD垂直AB，

$$\angle ABE=\angle OAD=\angle\theta$$

在$\triangle AOD$中，$\sin\theta=\dfrac{OD}{OA}$

$$=\frac{OD}{\frac{1}{2}(b+2mh)}$$

在$\triangle ABE$中，$\sin\theta=\frac{AE}{AB}=\frac{h}{h\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{OD}{\frac{1}{2}\left(b+2mh\right)}=\frac{OD}{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{h}+2m\right)h}$$

水力最佳断面 $\frac{b}{h}=2(\sqrt{1+m^2}-m)$

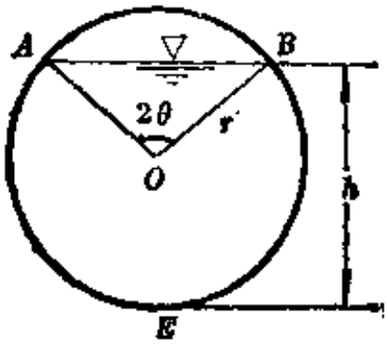
代入前式得 $$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{OD}{\frac{1}{2}(2\sqrt{1+m^2}-2m+2m)h}$$

$$=\frac{OD}{\sqrt{1+m^2}h}$$

$$\therefore\quad OD=h$$

$OD=h$并垂直于AB，故梯形是h为半径的半圆外切多边形断面。

171 在明渠恒定均匀流的圆管中，已知谢才系数C，底坡i为常数，用谢才公式证明通过断面平均最大流速时，水深h和管道直径d的比值是0.81。



题 171 图

解：

管道平均流速

$$v=C\sqrt{Ri}=C\sqrt{i}\left(\frac{A}{\chi}\right)^{1/2}$$

C、i已知，v与$\left(\frac{A}{\chi}\right)^{1/2}$成正比，当$\left(\frac{A}{\chi}\right)^{1/2}$最大时，断面平均流速$v$也是最大。

过水断面面积　$A=$扇形$OAEB+\triangle AOB$

$$=\frac{360^\circ-2\theta}{360^\circ}\pi r^2+2r\sin\theta\ \frac{r\cos\theta}{2}$$

$$=\left(1-\frac{\theta}{180^\circ}\right)\pi r^2+r^2\sin\theta\cos\theta$$

湿周　$\chi=(360^\circ-2\theta)\frac{2\pi r}{360^\circ}-(180^\circ-\theta)\frac{\pi r}{90}$

水力半径　$R=\frac{A}{\chi}=\frac{\left(1-\frac{\theta}{180^\circ}\right)\pi r^2+r^2\sin\theta\cos\theta}{\left(180^\circ-\theta\right)\frac{\pi r}{90}}$

$$=\frac{r}{2}+\frac{45r\sin2\theta}{\pi(180^\circ-\theta)}$$

对水力半径求极大值

$$\frac{dR}{d\theta}=0+\frac{45r}{\pi}\sin2\theta\cdot(-1)(180^\circ-\theta)^{-2}\cdot(-1)$$

$$+\frac{2\times45r\cos2\theta}{\pi(180^\circ-\theta)}=0$$

化简整理得

$$\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=-360^\circ+2\theta$$

$$\mathrm{tg}2\theta=-360^\circ+2\theta$$

通过试算求得　$2\theta=102.5^\circ$

故水深　$h=r+r\cos\theta=\frac{D}{2}\left(1+\cos\frac{102.5^\circ}{2}\right)$

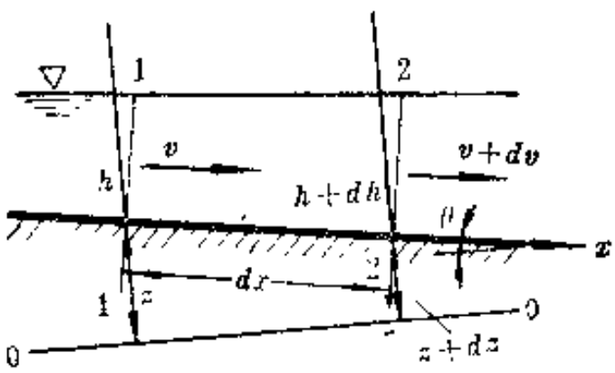
$=0.81D$

即　$\frac{h}{D}=0.81$

172　试证坡度很大$\left(\text{大于}\frac{1}{10}\right)$的棱柱形渠道中恒定渐变流基本方程式为

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\sin\theta-\dfrac{Q^2}{A^2C^2R}}{\cos\theta-\dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}B}$$

式中 h为水深；θ为底坡角；A为进水断面面积；B为水面宽；Q为流量；R为水力半径；C为谢才系数；χ为渠底线方向、α为动能修正系数、g为重力加速度。



题 172 图

解：

过水断面1-1及2-2相距dx，今以0-0为基面，则1-1断面处水流的总水头为

$$H=z+h\cos\theta+\frac{\alpha v^2}{2g}$$

上式对x取导，得

$$\frac{dH}{dx}=-J=\frac{dz}{dx}+\frac{dh}{dx}\cos\theta+\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)\qquad(1)$$

式中

$$\frac{dz}{dx}=-i=-\sin\theta$$

$$J=\frac{Q^2}{K^2}=\frac{Q^2}{A^2C^2R}$$

$$\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)=-\frac{\alpha Q^2}{2gA^3}\frac{dA}{dx}=-\frac{\alpha Q^2B}{gA^3}\frac{dh}{dx}$$

将以上诸关系式代入（1）解$\frac{dh}{dx}$，则得到

$$\frac{dh}{dx}=\frac{\sin\theta-\dfrac{Q^2}{A^2C^2R}}{\cos\theta-\dfrac{\alpha Q^2B}{gA^3}}$$

173 已知深水微幅势波的速度势函数为

$$\varphi=\frac{gH}{2\sigma}e^{Kz}\sin(Kx-\sigma t)$$

其中波高$H=2\text{m}$，波数（转圆曲率）$K=0.157/\text{m}$，圆频率（角速度）σ与波数K之间的关系为$\sigma^2=Kg$，其中g为重力加速度。试求：（1）波长l、周期T和波速c；（2）波面方程；（3）时刻$t=0$位于$x=0$，$z=-5\text{m}$的质点运动速度v_x和v_z；（4）水面面积为1m^2的波能量$\bar{E}$。

解：

（1）计算波长l，周期T和波速c

波长 $$l=\frac{2\pi}{K}=\frac{2\times3.14}{0.157}=40.0\text{m}$$

周期 $$T=\sqrt{\frac{2\pi l}{g}}=\sqrt{\frac{2\times3.14\times40}{9.8}}=5.06\ \text{s}$$

波速 $$c=\sqrt{\frac{gl}{2\pi}}=\sqrt{\frac{9.8\times40}{2\times3.14}}=7.90\ \text{m/s}$$

（2）确定波面方程

根据流速势函数$\varphi=\dfrac{gH}{2\sigma}e^{Kz}\sin(Kx-\sigma t)$可得出波面方程式

$$\zeta=\frac{H}{2}\cos(Kx-\sigma t)$$

$$\because\quad \sigma=(Kg)^{1/2}=(0.157\times9.8)^{1/2}=1.24$$

$$\therefore\quad \zeta=\frac{2}{2}\cos(0.157x-1.24t)$$

$$=\cos(0.157x-1.24t)$$

（3）计算v_x和v_z

当$x=0$，$t=0$，$z=-5$时，质点运动的速度是

$$v_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{gH}{2\sigma}Ke^{Kz}\cos(Kx-\sigma t)$$

$$=\frac{9.8\times2}{2\times1.24}\times0.157e^{0.157\times(-5)}\times\cos0^\circ$$

$$=0.566\quad \mathrm{m/s}$$

$$v_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{gH}{2\sigma}Ke^{Kz}\sin(Kx-\sigma t)$$

$$=\frac{gH}{2\sigma}Ke^{K\cdot}\sin0^\circ=0$$

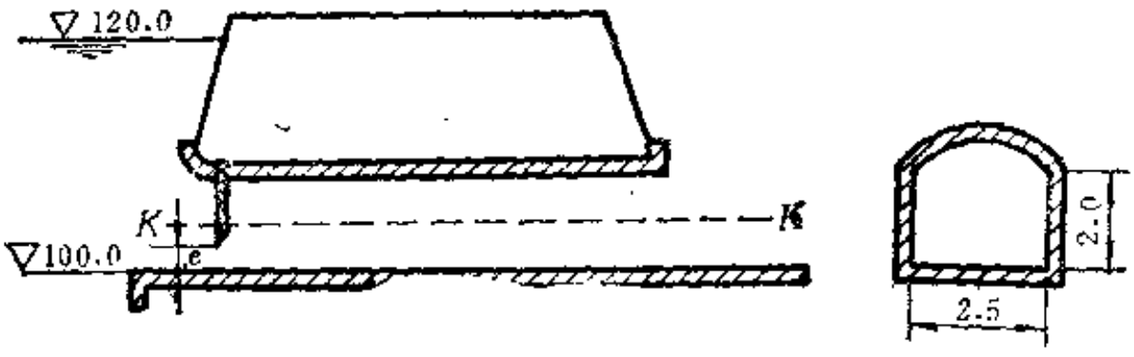
（4）水面面积为$1m^2$的平均波能量

公式$\bar{E}=\frac{\gamma H^2}{8}l$，这是一个波长为$l$，厚度（与纸面垂直方向）为1m的平均波能量公式，由于不到一个波长，故$1m^2$的平均波能量为

$$\bar{E}=\frac{\gamma}{8}H^2\times1^2=\frac{9800}{8}\times2^2$$

$$=4900\quad \mathrm{N\cdot m}$$

174 土坝岸边引水廊道断面为门洞型，尺寸如图示，进口由平板闸门控制，设计引水流量$Q=12.50m^3/s$，现要求出口段的水深（近似为均匀流）不超过垂直边墙高度，廊道底纵坡至少应为多少？廊道用混凝土建造，$n=0.015$，当库水位为120.0m时，求闸门开度，并定性画出廊道内水流水面变化曲线，加以扼要说明。



题 174 图

解：

（1）求出口段为均匀流且$h_0=2.0$m时的底坡i

要求出口段均匀流水深不超过垂直边墙高度，设水深h等于垂直边墙高即$h=2$m，$b=2.5$m，由均匀流公式$Q=AC\sqrt{Ri}$，$C=\frac{1}{n}R^{1/6}$代入整理得

$$i=\frac{Q^2n^2}{R^{4/3}A^2}=\frac{Q^2n^2(b+2h)^{4/3}}{(bh)^{10/3}}$$

$$=\frac{12.5^2\times0.015^2\times(2.5+2\times2)^{4/3}}{(2.5\times2)^{10/3}}=0.002$$

廊道底纵坡满足题给条件，$i=0.002$。

（2）计算闸门开度e

假设闸孔为自由出流，流量$Q=\mu eb\sqrt{2gH_0}$，计算中忽略行近流速影响，令$H_0\approx H=20$m，则由式可解出

$$e=\frac{Q}{\mu b\sqrt{2gH}}=\frac{12.5}{\mu\times2.5\sqrt{2\times9.8\times20}}$$

$$=\frac{0.2525}{\mu} \qquad (1)$$

根据μ的经验公式

$$\mu=0.6-0.176\frac{e}{H} \qquad (2)$$

在（2）式中，设$e=0.42$，则

$$\mu=0.6-0.176\times\frac{0.42}{20}=0.596$$代入（1）式

$$e=\frac{0.2525}{0.596}\approx0.42\text{m}。$$

故闸孔开度　　$e=0.42$m

对假设流态进行校核

$$\frac{e}{H}=\frac{0.42}{20}=0.021<0.65$$出流为闸孔出流。

当$\frac{e}{H}=0.021$时，近似取$\varepsilon=0.61$

$$h_c=\varepsilon e=0.61\times0.42=0.26\text{m}$$

$$v_c=\frac{Q}{bh_c}=\frac{12.5}{2.5\times0.26}=19.23\text{m/s}$$

收缩水深h_c的共轭水深

$$h_c''=\frac{h_c}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{v_c^2}{gh_c}}-1\right)$$

$$=\frac{0.26}{2}\left(\sqrt{1+8\times\frac{19.23^2}{9.8\times0.26}}-1\right)=4.30\text{m}$$

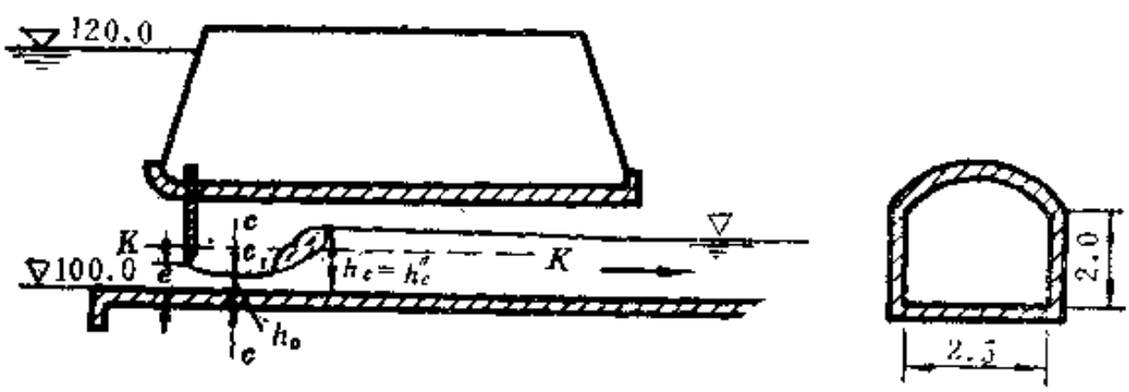
因为$h_c''>h_0=2\text{m}$，闸孔为自由出流，假设成立。

（3）定性绘廊道水面曲线

计算临界水深

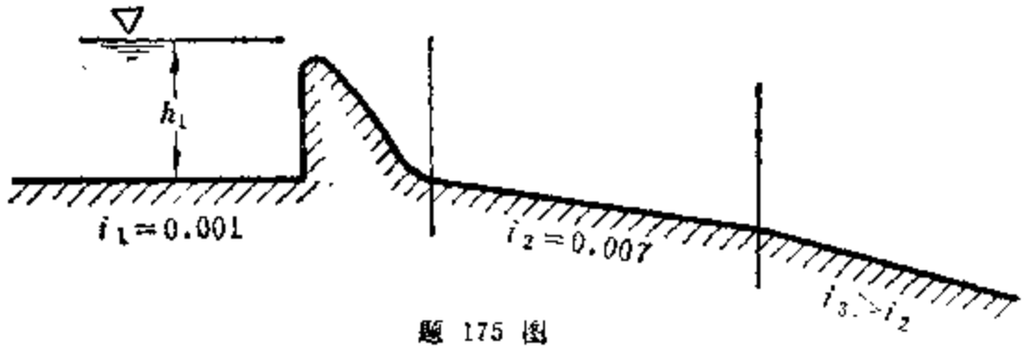
$$h_K=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{Q}{b}\right)^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{12.5}{2.5}\right)^2}{9.8}}=1.37\text{m}$$

由于$h_c<h_K<h_0<h_c''$该廊道底坡为缓坡，闸下游产生远驱式水跃，收缩断面至水跃跃首之间为c_1型曲线，跃后水流为均匀流，定性绘出廊道内水面曲线如解174图图示。



解 174 图

175 有一溢流坝位于一宽阔的矩形渠槽中，如图所示（槽宽沿程不变），今已知坝顶水头$H_0\approx H-3\text{m}$，下游坝高$P=5.48\text{m}$，溢流坝流量系数$m=0.5$，流速系数$\varphi=0.95$、底坡$i_1=0.001$、$i_2=0.007$、$i_3>i_2$，粗糙系数$n_1=n_2=n_3=0.014$，试判断各渠段中水面曲线的类型，并绘出水面曲线示意图



题 175 图

解：

渠中流量为

$$q=m\sqrt{2g}\ H_0^{3/2}=0.5\sqrt{2\times9.8}\times3^{3/2}$$
$$=11.5\mathrm{m}^3/\mathrm{s}\text{-}\mathrm{m}$$

坝趾收缩断面水深h_c可按下式求得

$$P+H_0=h_c+\frac{q^2}{2g\varphi^2h_c^2}$$

$$5.48+3=h_c+\frac{11.5^2}{2\times9.8\times0.95^2\times h_c^2}$$

用试算法求解，今设$h_c=1\mathrm{m}$代入上式，得

$$8.48=1+\frac{11.5^2}{19.6\times0.95^2\times1^2}=8.48$$

上式等号两端相等，故所设的h_c即为所求的解。

对于宽阔的矩形渠道$R\approx h$，$C=\frac{1}{n}h^{1/6}$，

故
$$q=h_0C\sqrt{Ri}=h_0\frac{R^{1/6}}{n}\sqrt{Ri}\approx h_0\frac{h_0^{1/6}}{n}\sqrt{h_0i}$$

$$=\frac{1}{n}h_0^{5/3}i^{1/2}$$

由上式解得

$$h_0=\left(\frac{nq}{\sqrt{i}}\right)^{3/5}$$

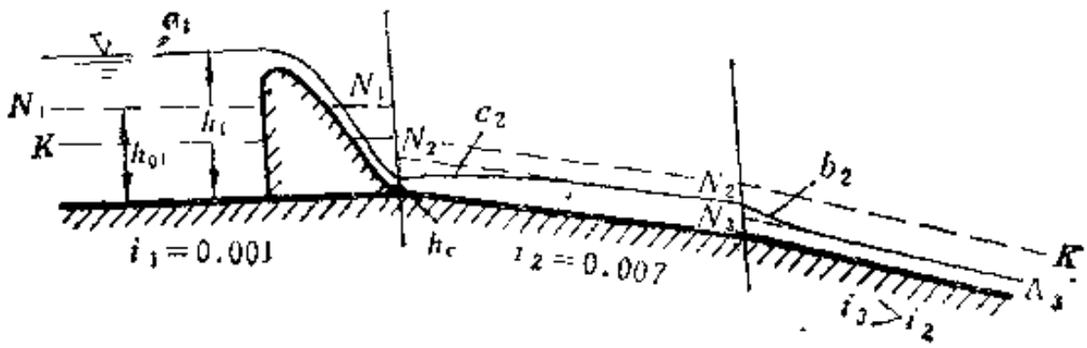
于是渠段 I 及II中的正常水深h_{01}及h_{02}分别为

$$h_{01}=\left(\frac{0.014\times11.5}{\sqrt{0.001}}\right)^{3/5}=2.66\mathrm{m}$$

$$h_{02}=\left(\frac{0.014\times 11.5}{\sqrt{0.007}}\right)^{3/5}=1.48\text{m}$$

临界水深为

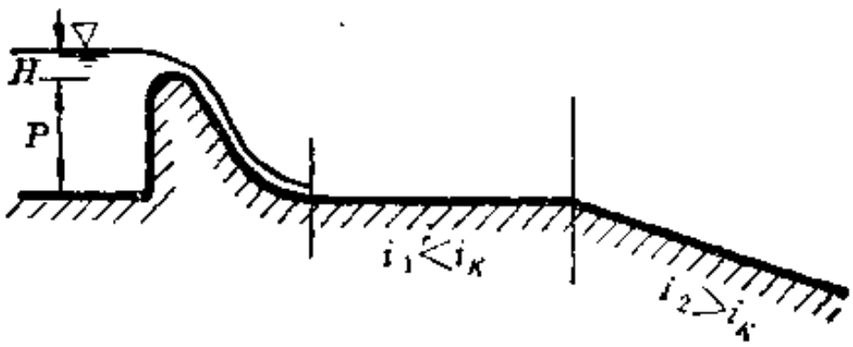
$$h_K=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{11.5}{9.8}}=2.38\text{m}$$



解 175 图

因为$h_{01}>h_K$，故第Ⅰ渠段为缓坡；$h_{02}<h_K$，故第Ⅱ渠道为陡坡；又因为$i_3>i_2$，故第Ⅲ渠段也为陡坡。因为$h_1>h_{01}>h_K$及$h_c<h_{02}<h_k$；$h_{03}<h_{02}$，如各区段相当长时，各渠段中水面曲线的类型及示意图如解175图所示。

176 一实用堰，堰高$P=7.0\text{m}$。单宽流量$q=8.0\text{m}^3/\text{s-m}$，流量系数$m=0.49$，流速系数$\varphi=0.95$。在堰之后相继为一棱柱体缓坡长渠和一断面尺寸相同的棱柱体陡坡长渠，已知缓坡长渠的均匀流水深$H_0=3.0\text{m}$，试判别堰下游渠道的水流衔接形式，并定性画出水面曲线。



题 176 图

解：

首先判别堰下游水面衔接形式

假定该实用堰为无侧收缩、自由出流，取$\sigma_s=1$，$\varepsilon=1$，流量$q=m\sqrt{2g}H_0^{3/2}$，则水头$H_0=\left(\frac{q}{m\sqrt{2g}}\right)^{2/3}$

$$=\left(\frac{8}{0.49\times\sqrt{2\times9.8}}\right)^{2/3}=2.386\text{m}$$

计算堰下收缩水深h_c

$$E_0=P+H_0=7+2.386=9.386\text{m}$$

$$E_0=h_c+\frac{q^2}{2g\varphi^2h_c^2}$$

$$9.386=h_c+\frac{8^2}{2\times9.80\times0.95^2\times h_c^2}=h_c+\frac{3.618}{h_c^2}$$

用试算法求解，一般需假设h_c，直到等式两端相等为止，经试算得$h_c=0.643\text{m}$

计算临界水深

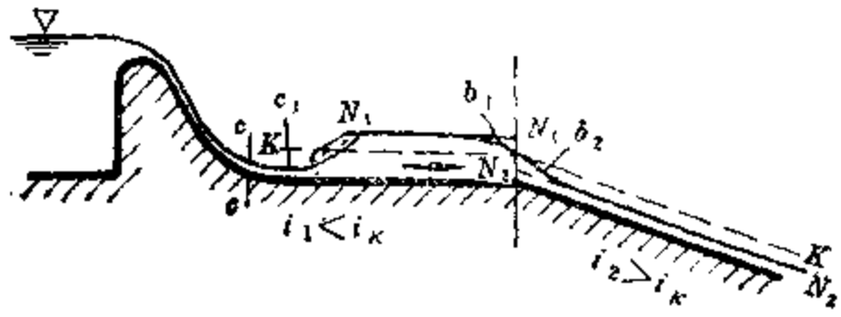
$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1\times8^2}{9.80}}=1.87\text{m}$$

∵ $h_c<h_K$，堰下收缩水深处水流为急流。

$h_0>h_k$渠道内水流为缓流。

水流由急流到缓流，必产生水跃衔接形式，水跃的形式及位置判别如下：

计算跃后水深



解 176 图

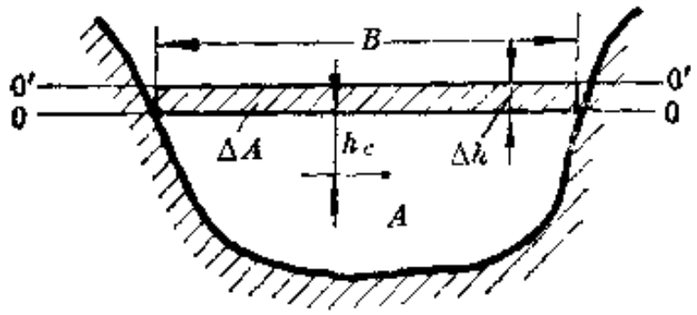
$$h_c''=\frac{h_c}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_c^3}}-1\right)$$

$$=\frac{0.643}{2}\left(\sqrt{1+8\times\frac{8^2}{9.8\times0.643^3}}-1\right)=4.197\text{m}$$

∵ $h_c''>h_0$，下游产生远驱式水跃衔接。

又已知$i_1<i_K$，$i_2>i_K$，故堰下游渠道中的水流衔接形式及水面曲线如解176图所示。

177 证明棱柱体明渠水跃函数为极小值时的水深就是临界水深。



解 177 图

解：

因为水跃函数$J(h)=\frac{Q^2}{gA}+Ah_c$

由微分学得知，与$J(h)_{min}$相应的水深应满足下列方程，即

$$\frac{d[J(h)]}{dh}=\frac{d\left[\frac{Q^2}{gA}+Ah_c\right]}{dh}=-\frac{Q^2B}{gA^2}+\frac{d(Ah_c)}{dh}$$

$$=0 \qquad (1)$$

由图中可看出，式中Ah_c乃是过水断面面积A对水面线0-0的静矩。为了确定$\frac{d(Ah_c)}{dh}$，今给予水深一增量Δh（水面线从而上升至0'-0'）。由水深增量所导致的面积静矩增量$\Delta(Ah_c)$当为

$$\Delta(Ah_c)=\left[A(h_c+\Delta h)+B\Delta h\frac{\Delta h}{2}\right]-Ah_c$$

$$=\left(A+B\frac{\Delta h}{2}\right)\Delta h$$

式中方括号内的函数式是以0'-0'为轴的新面积的静矩。于是

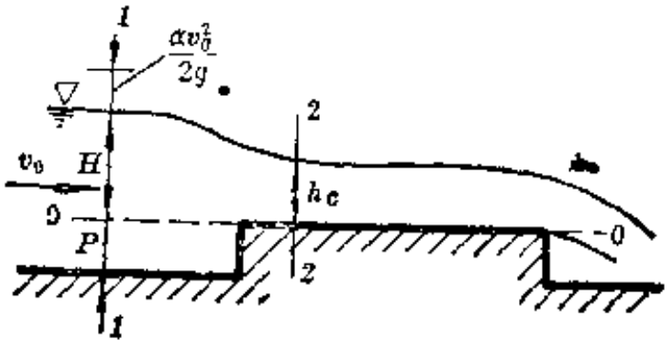
$$\frac{d(Ah_c)}{dh}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\Delta(Ah_c)}{\Delta h}=\lim_{\Delta h\to 0}\left(A+B\frac{\Delta h}{2}\right)$$
$$=A$$

将上式代入（1）式，则

$$\frac{Q^2}{g}=\frac{A^3}{B}$$

上式与临界水深的条件式相同，因此，与$J(h)_{min}$相应的水深即是临界水深。

178 试推证宽顶堰流量系数最大值为0.385



解 178 图

解：

以宽顶堰顶水平面0-0为基准面，列1-1和2-2断面的能量方程式

$$H_0=h_c+\frac{\alpha v_c^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v_c^2}{2g}$$

若忽略水头损失，则 $H_0=h_c+\frac{\alpha v_c^2}{2g}$ （1）

$$v_c=\sqrt{2g(H_0-h_c)}$$

设 $h_c=kH_0$，k为垂直收缩系数。

$$q=h_c v_c=kH_0\sqrt{2g(H_0-kH_0)}$$
$$=k\sqrt{1-k}\sqrt{2g}H_0^{3/2}=m\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

式中 $m=k\sqrt{1-k}$ 为流量系数。

当H_0为定值，流量系数最大时，流量Q为最大，由（1）式可知，H_0一定即表示2-2断面的断面比能 E_{s_c} 为定值，在此情况下，与最大流量Q_{max}相应的水深为临界水深，即$h_c=h_K$

故有

$$k=\frac{h_c}{H_0}=\frac{h_K}{H_0}=\frac{\frac{2}{3}E_s}{H_0}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}H_0}{H_0}=\frac{2}{3}$$

则

$$m=k\sqrt{1+k}=\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}}=0.385$$

∴ 宽顶堰流量系数最大值为0.385。

179 若在一宽度为b的矩形渠道中发生水跃，设跃前水深为h_1，流速为v_1；跃后水深为h_2；渠底坡度很小，可视 $i=0$，边壁阻力不计，试证明

（1）水跃发生的条件为 $v_1>\sqrt{gh_1}$

（2）水跃过程中单位质量的机械能损失为$\frac{(h_2-h_1)^3}{4h_1h_2}g$

解：

（1）证明水跃发生的条件为$v_1>\sqrt{gh_1}$

发生水跃跃前水流必须是急流，即$\mathrm{Fr}_1=\frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}>1$，

故：
$$v_1>\sqrt{gh_1}$$

（2）证明水跃过程中，单位质量的机械能损失为

$$\frac{(h_2-h_1)^3}{4h_1h_2}g$$

因水跃的水头损失

$$E_f=\left(h_1+\frac{\alpha_1v_1^2}{2g}\right)-\left(h_2+\frac{\alpha_2v_2^2}{2g}\right) \qquad (1)$$

或

$$E_j=h_1-h_2+\frac{1}{2g}(v_1^2-v_2^2) \qquad (2)$$

设

$$\eta=\frac{h_2}{h_1}$$

由矩形断面水跃共轭水深计算式可得

$$\eta=\frac{1}{2}\sqrt{1+8\mathrm{Fr}^2}-1)$$移项整理可得

$$\mathrm{Fr}_1^2=\frac{\eta(\eta+1)}{2}$$

代入（2）式化简整理可得

$$E_j=\frac{h_1}{4\eta}(\eta-1)^3 \qquad (3)$$

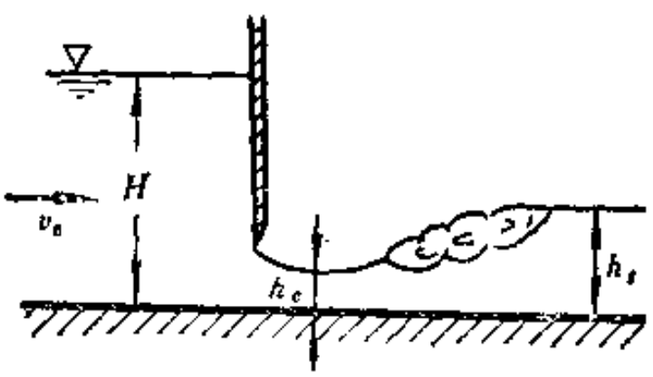
E_j是单位重量液体在水跃中损失的能量，因此单位质量液体在水跃中损失的能量是E_jg

（3）式乘以g得

$$E_jg=\frac{h_1}{4\eta}(\eta-1)^3g=\frac{h_1}{4\frac{h_2}{h_1}}\left(\frac{h_2}{h_1}-1\right)^3g$$

$$=\frac{(h_2-h_1)^3}{4h_1h_2}g$$

180 试证矩形平底渠槽闸孔自由出流，可由下列不等式判别



第 180 图

$$\frac{h_t}{h_c}\left(\frac{h_t}{h_c}+1\right)\leqslant 4\varphi^2\left(\frac{H_0}{h_c}-1\right)$$

式中 H为闸前水头；$H_0=H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$；$\varphi$为闸孔出流的流速系数；$h_t$为下游渠道水深；$h_c$为闸下收缩断面水深。上述有关符号如图。

解：

闸孔出流时，当闸孔下游收缩水深h_c的跃后水深h_c''大于或等于闸后渠道中的下游水深h_t时，即$h_c''\geqslant h_t$时，下游水深h_t的大小不影响闸孔出流，此时为闸孔自由出流。

对矩形平底渠槽闸孔出流的h_c''可按下式计算

$$h_c''=\frac{h_c}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_c^3}}-1\right)$$

式中 $$q=\varphi h_c\sqrt{2g(H_0-h_c)}$$

∵ 闸孔自由出流的条件为 $h_c''\geqslant h_t$

∴ $$\frac{h_c}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{\varphi^2 h_c^2\cdot 2g(H_0-h_c)}{gh_c^3}}-1\right)\geqslant h_t$$

$$\frac{h_c}{2}\sqrt{1+8\frac{\varphi^2\cdot 2(H_0-h_c)}{h_c}}\geqslant h_t+\frac{h_c}{2}$$

上式平方得

$$\frac{h_c^2}{4}\left[1+8\frac{\varphi^2\cdot 2(H_0-h_c)}{h_c}\right]\geqslant h_t^2+h_t h_c+\frac{h_c^2}{4}$$

$$h_c^2\cdot 4\varphi^2\left(\frac{H_0}{h_c}-1\right)\geqslant h_t^2+h_t h_c$$

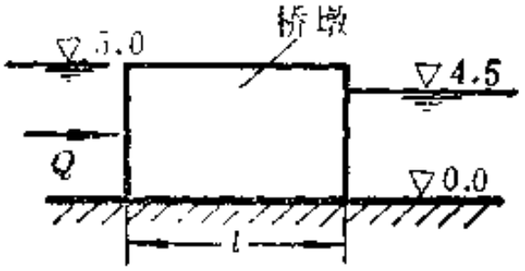
上式除以h_c^2整理后得

$$\frac{h_t}{h_c}\left(\frac{h_t}{h_c}+1\right)\leqslant 4\varphi^2\left(\frac{H_0}{h_c}-1\right)$$

181 某泄水渠为宽10m的矩形断面，来流流量$Q=35\text{m}^3/\text{s}$，相应正常水深为3.0m，渠道末端有一桥孔，孔净高5m，孔底为平坡，孔底高度与河底高程相同，孔长$l=15\text{m}$，桥外最高潮水位为▽4.5m，

（1）为保证渠水不浸淹桥顶，试问桥孔的最小净宽应当多少？

（2）分析桥上游渠道中水面曲线的类型？为什么？（以上计算桥孔流量系数$m=0.32$，淹没系数σ_s由下述数据中选取，当$H_2/H_1=0.95$、0.9、0.85时，相应$\sigma_s=0.552$，0.739，0.855，H_2为下游水深，H，H_1为上游水位）。



题 181 图

解：

（1）根据题意，因桥孔净高为5m，如果要保证渠水不浸淹桥顶而又使桥孔净宽为最小，则必须使桥孔水深小于等于桥孔净高，即$H_1\leqslant 5\text{m}$

因坡度为平坡，孔底高程与河底高程相同，则

$$H_1=H=5\text{m}$$

又 $2.5<\dfrac{l}{H}=\dfrac{15}{5}=3<10$，故桥孔水流属无坎宽顶堰流，桥孔最小净宽为

$$b=\frac{Q}{m'\sigma_s\sqrt{2g}H_{10}^{3/2}}$$

因 $\dfrac{H_2}{H_1}=\dfrac{4.5}{5}=0.90$ 取$\sigma_s=0.739$

$$\because\quad v_0=\frac{Q}{A}=\frac{Q}{H_1B}=\frac{35}{5\times 10}=0.7\text{m/s},\qquad \frac{v_0^2}{2g}=\frac{0.7^2}{19.6}$$

$$=0.025\text{m}$$

$$\therefore\quad H_{10}=H_1+\frac{v_0^2}{2g}=5+0.025=5.025\text{m}$$

由此可求得

$$b=\frac{35}{0.32\times0.739\times4.43\times5.025^{3/2}}=2.97\text{m}$$

（2）分析桥上游渠道中水面曲线类型

临界水深 $h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}=\sqrt[3]{\frac{1\times35^2}{9.8\times10^2}}=1.08\text{m}$

正常水深 $h_0=3\text{m}$

∵ $h_0>h_K$，故渠中水流属缓流。

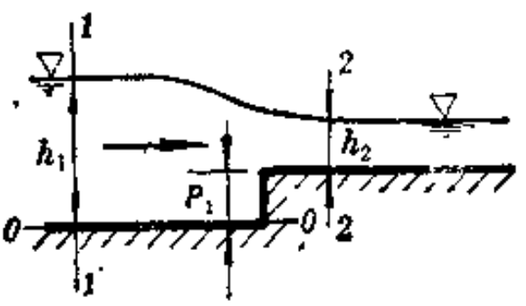
又 $H_1>h_0>h_K$，故桥孔上游渠中水面曲线为a_1型壅水曲线。

182 有一矩形断面渠道，底宽$b=2\text{m}$，水深$h_1=0.8\text{m}$，通过流量$Q=2.5\text{m}^3/\text{s}$，在渠中某处渠底抬高$P_1=0.1\text{m}$，试计算：

（1）坎顶水深h_2为多少？（不计水头损失）并判别坎顶水流的流态是急流还是缓流；

（2）当坎顶高度为多少时，方可使坎顶水深出现临界水深h_K；

（3）证明当坎为宽顶堰流时，堰顶水深$h_2=h_K$，其泄流量为最大。



题 182 图

解：

（1）计算坎顶水深h_2，并判别坎顶水流流态

以渠底0-0为基准面，写1-1，2-2断面的能量方程式，得

$$h_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=P_1+h_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

因 $v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{Q}{bh_1}=\frac{2.5}{2\times0.8}=1.563\text{m/s}$

根据连续性方程

$$v_2=\frac{A_1}{A_2}v_1=\frac{h_1}{h_2}v_1=\frac{0.8}{h_2}\times 1.56;$$

$$=\frac{1.25}{h_2}\text{m/s}$$

取 $\alpha_1=\alpha_2=1$

将以上数据代入能量方程式，整理后得

$$h_2+\frac{0.7965}{h_2^2}=0.8245$$

用试算法求得

$$h_2=0.61\text{m}$$

判别流态

∵ 临界水深

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1\times\left(\frac{2.5}{2}\right)^2}{9.80}}=0.542\text{m}$$

故 $h_2>h_K$ 坎顶水流为缓流

（2）计算坎顶出现临界水深时的坎高P_1

根据前面所列能量方程式

$$h_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=P_1+h_2+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$$

要使坎顶水深为临界水深，

$$h_2=h_K=0.542\text{m}$$

$$v_2=v_K=\frac{Q}{bh_K}=\frac{2.5}{2\times 0.542}=2.306\text{m/s}$$

故 $$P=\left(h_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right)-\left(h_K+\frac{\alpha_2 v_K^2}{2g}\right)$$

$$=\left(0.8+\frac{1\times 1.563^2}{2\times 9.80}\right)-\left(0.542+\frac{1\times 2.306^2}{2\times 9.80}\right)$$

$$=0.1113\text{m}$$

（3）证明当$h_2=h_K$时，泄流量最大

当坎为宽顶堰流时，以堰顶为基准面，写1-1，2-2断面的能

量方程式（不计水头损失）为方便起见，令$h_1-P=H$，则能量方程可写为

$$H+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=h_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

令 $H+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=H_0$，$v_2=\frac{Q}{A_2}$

则 $$H_0=h_2+\frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

故 $$Q=\sqrt{2gA_2^2(H_0-h_2)}$$

由上式可知，流量Q随堰顶水深h_2而变，将Q对h_2求导数，并令$\frac{dQ}{dh}=0$，则可求得流量为最大值时的堰顶水深。

$$\frac{dQ}{dh_2}=\frac{d}{dh_2}(\sqrt{2g}\cdot A_2\sqrt{H_0-h_2})$$

$$=\sqrt{2g}\left[\frac{dA_2}{dh_2}\sqrt{H_0-h_2}-\frac{1}{2}\frac{A_2}{\sqrt{H_0-h_2}}\right]$$

$$=\sqrt{2g}\left[B\sqrt{H_0-h_2}-\frac{A_2}{2\sqrt{H_0-h_2}}\right]$$

式中 $\frac{dA_2}{dh_2}=B$，B为水面宽，令$\frac{dQ}{dh}=0$

则 $$B\sqrt{H_0-h_2}=\frac{A_2}{2\sqrt{H_0-h_2}}$$

化简后得 $h_2=H_0-\frac{A_2}{2B}$

该式即为流量最大值时的堰顶水深。

又 $$H_0=h_2+\frac{\alpha Q^2}{2gA_2^2}$$

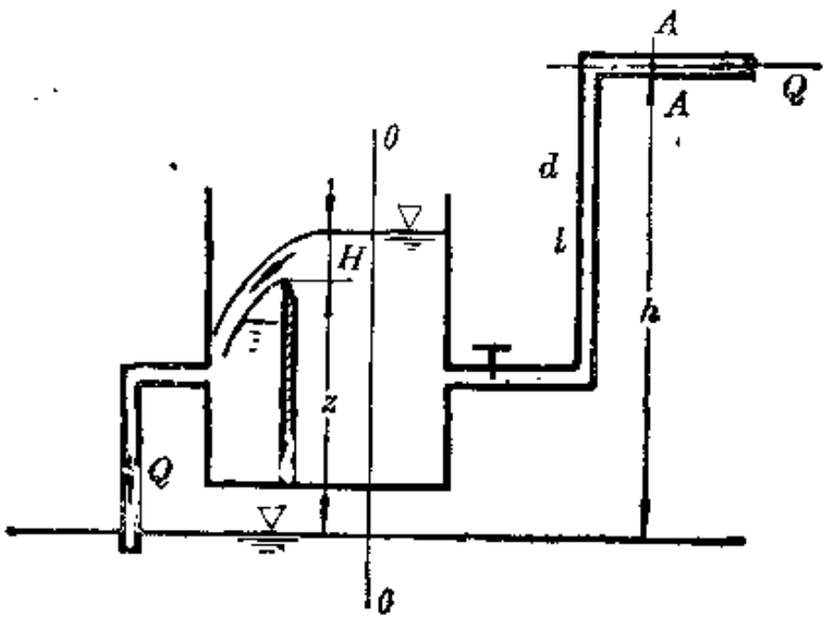
将 $h_2=H_0-\frac{A_2}{2B}$代入上式得

$$\frac{\alpha Q^2}{2gA_2^2}-\frac{A_2}{2B}=0$$

或 $$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{A_2^3}{B}$$

该式即为临界流方程式，满足临界流方程式的水深必为临界水深。

183　如图所示管路，通过流量$Q=80l/s$，直径$d=200mm$，以A点算起的长度$l=12m$，沿程阻力系数$\lambda=0.02$，局部阻力系数：阀门$\zeta_1=0.15$，弯道$\zeta_2=0.2$，管道中A点在下游水池水面以上的高度$h=10m$处。为使A点的负压值不超过6 m水柱高，在管路出口设置一装有矩形薄壁堰板的木箱，堰宽$b=0.5m$，流量系数$m=0.41$，求堰顶高程z为多少？



题 183 图

解：

根据连续性原理，通过矩形薄壁堰的流量应等于管路的流量。

由矩形薄壁堰公式计算堰顶水头H（忽略堰前行近流速水头）。

$$\because \quad Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2}$$

$$\therefore \quad H=\left(\frac{Q}{mb\sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

$$=\left(\frac{0.08}{0.41\times0.5\sqrt{2\times9.80}}\right)^{2/3}$$

$=0.198\text{m}$

以水池水面为基准面，写A-A与0-0断面的能量方程式，得

$$h+\frac{p_A}{\gamma}+\frac{\alpha v_A^2}{2g}=z+H+\frac{p_a}{\gamma}+h_w$$

$$\frac{p_a}{\gamma}-\frac{p_A}{\gamma}=h-(z+H)+\frac{\alpha v_A^2}{2g}-\left(\lambda\frac{l}{d}+\zeta_1+2\zeta_2\right)\frac{v_A^2}{2g}$$

式中 $\frac{p_a}{\gamma}-\frac{p_A}{\gamma}=h_v=6\text{m}$为$A$点的真空值；

$$v_A=\frac{Q}{A_A}=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\times0.08}{3.14\times0.2^2}=2.548\,\text{m/s}。$$

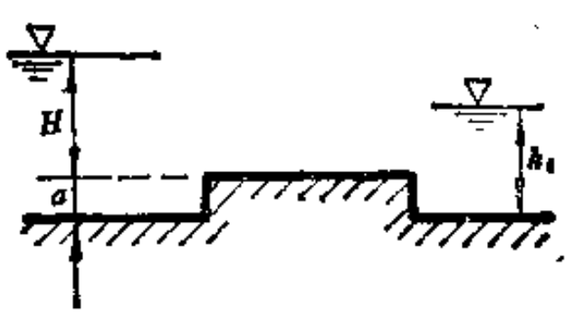
将以上数值代入能量方程，整理后得

$$z=h-H-h_v+\left(\alpha-\lambda\frac{l}{d}-\zeta_1-2\zeta_2\right)\frac{v_A^2}{2g}$$

$$=10-0.198-6+\left(1-0.02\times\frac{12}{0.2}-0.15-2\times0.2\right)\times\frac{2.548^2}{2\times9.8}$$

$$=3.554\text{m}$$

184 有一泄水闸，进口采用直角锐缘宽顶堰，如图所示，堰上水头$H=1.51\text{m}$，堰高$a=1.0\text{m}$，闸宽$b=1.0\text{m}$，流量系数$m=0.32$，无侧向收缩，下游水深$h_t=2.3\text{m}$，求水流作用于上游堰坎上的水平作用力R（取动能修正系数$\alpha=1$，且不计摩阻）。



题 184 图

注：淹没系数见下表。

$\frac{h_s}{H_0}$	0.90	0.89	0.88	0.87	0.86	0.85	0.84	0.83
σ_s	0.8	0.825	0.85	0.87	0.89	0.91	0.925	0.938

解：

（1）求流量Q

宽顶堰流量公式为

$$Q=\sigma_s\varepsilon_1 mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

由于行近流速不能忽略，要采用逐步近似计算法，无侧收缩时$\varepsilon_1=1$

流量系数$m=0.32$

第一次近似计算：

假设$H_0=H=1.51$m，判别下游是否淹没

$$\because \quad \frac{h_s}{H_0}=\frac{h_t-a}{H_0}=\frac{2.3-1}{1.51}=0.861>0.8$$

$\therefore$ 为淹没出流，查上表得 $\sigma_s=0.89$

故第一次试算流量

$$Q_1=0.89\times1\times0.32\times\sqrt{2\times9.80}\times1.51^{3/2}$$

$$=2.341\text{m}^3/\text{s}$$

第二次近似计算流量

$$\text{因}\quad v_0=\frac{Q_1}{A}=\frac{Q_1}{(a+H)b}=\frac{2.341}{(1+1.51)\times1}$$

$$=0.933\ \text{m/s}$$

$$\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}=\frac{1\times0.933^2}{2\times9.80}=0.0444\text{m}$$

$$H_0=H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}=1.51+0.0444=1.5544\text{m}$$

$$\because \quad \frac{h_s}{H_0}=\frac{2.3-1}{1.5544}=0.836>0.8\text{为淹没出流}$$

查表得 $\sigma_s=0.9302$

故第二次试算流量

$$Q_2=0.9302\times0.32\sqrt{2\times9.80}\times1.5544^{3/2}$$
$$=2.56\text{m}^3/\text{s}$$

第三次近似计算流量

$$v_0=\frac{Q_2}{A}=\frac{2.56}{2.51}=1.02\text{m/s}$$

$$\frac{\alpha_0v_0^2}{2g}=\frac{1.02^2}{2\times9.8}=0.0531\text{m}$$

$$H_0=H+\frac{\alpha_0v_0^2}{2g}=1.51+0.0531=1.563\text{m}$$

$\because$ $\frac{h_s}{H_0}=\frac{1.3}{1.563}=0.832>0.8$为淹没出流

由上表内查得 $\sigma_s=0.9357$

故 $Q_3=0.9357\times0.32\times\sqrt{2\times9.80}\times1.563^{3/2}$
$=2.592\text{m}^3/\text{s}$

第四次近似计算流量

$$v_0=\frac{Q_3}{A}=\frac{2.592}{2.52}=1.033\ \text{m/s}$$

$$\frac{\alpha_0v_0^2}{2g}=\frac{1.033^2}{2\times9.80}=0.0544\ \text{m}$$

$$H_0=H+\frac{\alpha_0v_0^2}{2g}=1.51+0.0544=1.564\ \text{m}$$

$\frac{h_s}{H_0}=\frac{1.3}{1.564}=0.83>0.8$为淹没出流

由表内查得 $\sigma_s=0.9367$

故 $Q_4=0.9367\times0.32\times\sqrt{2\times9.80}\times1.564^{3/2}$
$=2.598\text{m}^3/\text{s}$

第四次近似计算的流量Q_4与第三次近似计算之流量Q_3近乎相等，故取流量

$$Q=2.598\ \text{m}^3/\text{s}$$

（2）计算堰顶水深

以堰顶0′-0′为基准面，列0-0，1-1断面的能量方程，得

$$H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}=h_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+h_w$$

由于不计摩阻 $h_w=0$

故
$$h_1=H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}-\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$$

$\therefore$
$$v_0=\frac{Q}{A}=\frac{2.598}{2.51}=1.035\ \text{m/s}$$

$$v_1=\frac{Q}{h_1 b}=\frac{2.598}{h_1}$$

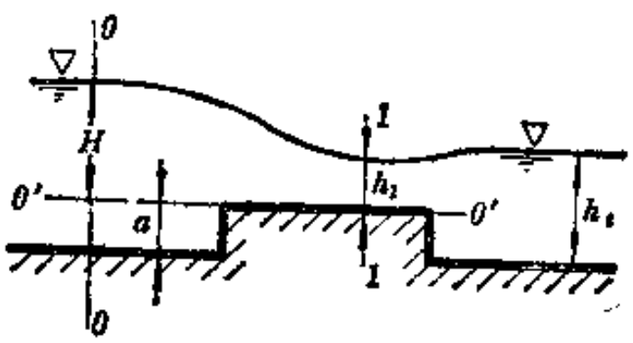
$\therefore$
$$h_1=1.51+\frac{1\times 1.035^2}{2\times 9.80}-\frac{\left(\frac{2.598}{h_1}\right)^2}{2\times 9.80}$$

$$=1.565-\frac{0.344}{h_1^2}$$

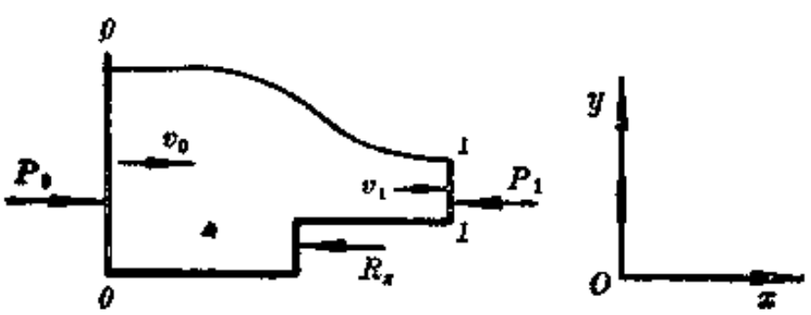
用试算法求得 $h_1=0.6$ m

（3）求水流作用于上游堰坎上的水平力R

取0-0，1-1断面之间的水体为控制体，坐标系统如图所示，该控制体所受之力有



解 184(a) 图



解 184(b) 图

$$P_0=\frac{1}{2}\gamma(a+H)^2b=\frac{1}{2}\times9.8\times(1+1.51)^2\times1$$
$$=30.87\text{kN}$$
$$P_1=\frac{1}{2}\gamma h_1^2b=\frac{1}{2}\times9.8\times0.6^2\times1=1.764\text{kN}$$

设堰坎对水流的反作用力为R_x

取x方向的动量方程式得

$$P_0-P_1-R_x=\frac{\gamma}{g}Q(\beta_1v_1-\beta_0v_0)$$

令$\beta_0=\beta_1=1$

$$v_1=\frac{Q}{hb}=\frac{2.598}{0.6\times1}=4.33\text{m/s}$$

则
$$R_x=P_0-P_1-\frac{\gamma}{g}Q(v_1-v_0)$$
$$=30.87-1.764-\frac{9.8}{9.8}\times2.598(4.33-1.035)$$
$$=20.5\text{kN}$$

185 矩形渠道中完整水跃的共轭水深工程上采用的近似公式$h''=\frac{0.452Q}{b\sqrt{h'}}-0.5h'$是怎样建立起来的？

解：

设跃前断面水深为h'，跃后断面水深为h''，

工程上采用的近似公式$h''=\frac{0.452Q}{b\sqrt{h'}}-0.5h'$证明如下：

$\because$
$$h''=\frac{h'}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh'^3}}-1\right)$$
$$=\frac{h'}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{q^2b^2}{gh'^2b^2h'}}-1\right)$$

$\because$ $\frac{q^2}{gh'^3}=\text{Fr}'^2$，完全稳定水跃时 $4.5\leqslant\text{Fr}'\leqslant9$，

$\therefore$ $8\text{Fr}'^2\gg1$，故式中根号内的1可忽略不计，上式可写为

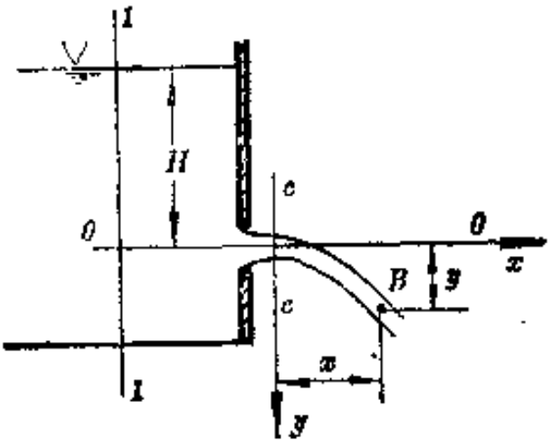
$$h''=\frac{h'}{2}\left(\sqrt{\frac{8}{9.8}\frac{Q^2}{h'^2b^2h'}}-1\right)$$

$$=\frac{h'}{2}\sqrt{\frac{8}{9.8}}\ \frac{Q}{h'b\sqrt{h'}}-0.5h'$$

$$=\frac{0.452Q}{b\sqrt{h'}}-0.5h'$$

186 钢箱侧壁开一孔口，孔口面积 $A=650\text{mm}^2$，水从孔口中流出，测得 $x=1.5\text{m}$，$y=0.5\text{m}$，流量 $Q=0.117\text{m}^3/\text{min}$，$H=1.2\text{m}$。计算孔口的流速系数，流量系数和收缩系数。（略去空气阻力）

解：



题 186 图

设 t 是水质点由收缩断面到达 B 点需要的时间，略去空气阻力，

$$x=vt$$

$$\because \quad y=\frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad t=\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$\text{收缩断面处流速 } v=\frac{x}{t}=\sqrt{\frac{gx^2}{2y}}=\sqrt{\frac{9.8\times1.5^2}{2\times0.5}}$$

$$=4.7\ \text{m/s}$$

以0-0为基准面，写1-1，c-c断面的能量方程

$$H=\frac{\alpha v^2}{2g}+\zeta\frac{v^2}{2g}$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\zeta}}\sqrt{2gH}=\varphi\sqrt{2gH}$$

流速系数

$$\varphi=\frac{v}{\sqrt{2gH}}=\frac{4.70}{\sqrt{2\times9.8\times1.2}}=0.9$$

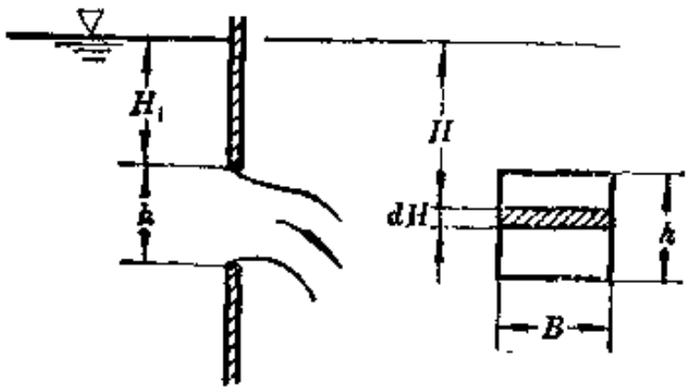
经过孔口的流量 $Q=\mu A\sqrt{2gH}$

流量系数 $$\mu=\frac{Q}{A\sqrt{2gH}}=\frac{\frac{0.117}{60}}{0.00065\sqrt{2\times9.8\times1.2}}$$

$$=0.62$$

收缩系数 $$\varepsilon=\frac{\mu}{\varphi}=\frac{0.62}{0.97}=0.64$$

187 水库中有一矩形泄水孔，孔宽$B=0.7\text{m}$，高$h=1.5\text{m}$，上缘距水面$H_1=0.4\text{m}$，试推导出大孔口的流量表达式，如按小孔口计算流量，造成的误差是多少。（不计局部阻力）



题 187 图

解：

在大孔口上取高为dH的水平微小孔口，距水面高为H，孔口面积$dA=BdH$，不计局部阻力，根据能量方程可得小孔口流速公式

$$v=\sqrt{2gH}$$

$$dQ=vdA=\sqrt{2gH}BdH$$

$$Q=\int_{H_1}^{H_1+h} B\sqrt{2gH}\,dH=\frac{2}{3}B\sqrt{2g}[(H_1+h)^{3/2}-H_1^{3/2}]$$

$$=\frac{2}{3}\times 0.7\times\sqrt{2\times 9.8}\times[(0.4+1.5)^{3/2}-0.4^{3/2}]$$

$$=4.888\ \mathrm{m^3/s}$$

大孔口流量$Q=4.888\mathrm{m^3/s}$，若按不计局部阻力的小孔口公式计算，计算水头$H=\frac{H_1+H_1+h}{2}=H_1+\frac{h}{2}$，则流量公式是

$$Q=Bh\sqrt{2g\left(H_1+\frac{h}{2}\right)}$$

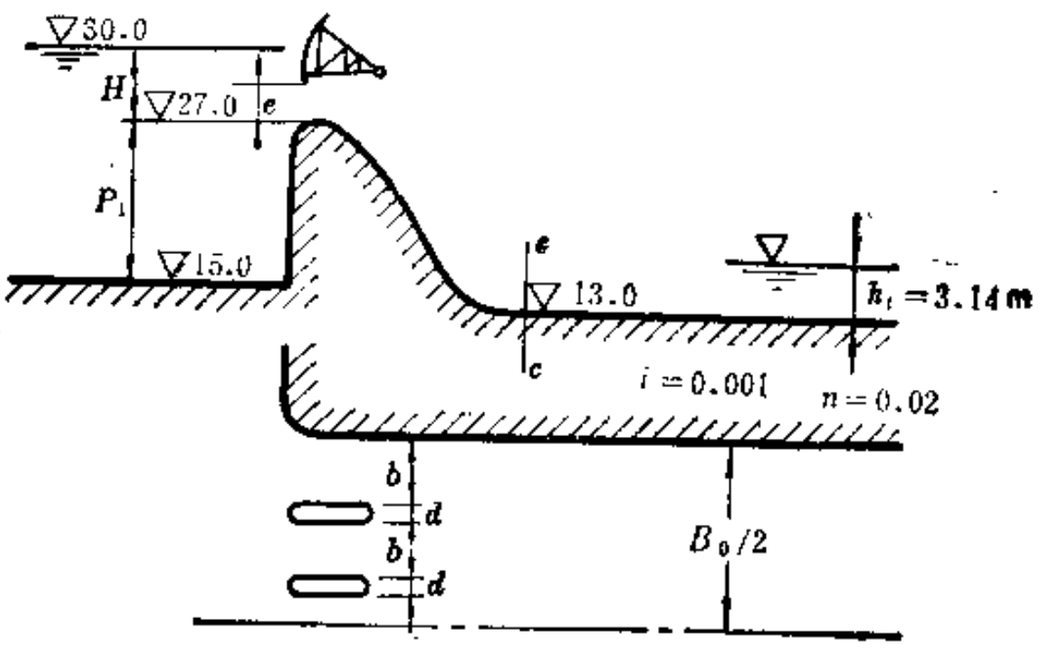
$$=0.7\times 1.5\sqrt{2\times 9.8\times\left(0.4+\frac{1.5}{2}\right)}$$

$$=4.985\ \mathrm{m^3/s}$$

相对误差

$$e=\frac{4.888-4.985}{4.888}=-1.98\%$$

188 如图所示，某河流上建有一座WES曲线型实用堰，共分5孔，每孔净宽$b=4.0\mathrm{m}$，堰顶设有弧形闸门，闸墩采用厚度d



题 188 图

$=1.0$m的半圆形墩头，不设边墩。侧收缩系数 $\varepsilon=0.946$，溢流堰上游底板高程为15.0m，下游坝趾处高程为13.0m，堰顶高程为27.0m，堰下游河槽可近似视为与堰等宽的矩形断面渠槽，其底坡 $i=0.001$，糙率 $n=0.02$，当溢泄设计洪水时，上游水位为30.0m，下游河槽水深 $h_t=3.14$m，此时闸门的开度 $e=2.4$m。试问：

（1）溢流堰下游是否需要修建消能设备（取 $\varphi=0.95$）；

（2）如需修建消能设备，若采用挖深式消能池方案，试求其池深 $s=?$

（3）如果不修建消能设备，问此时河床需要保护的长度 $l=?$ 并分析 $c-c$ 断面至跃首断面间的水面线线型（水跃计算可近似按平底槽计算）

解：

（1）上游坝高 $P_1=27.0-15.0=12$m

$$H=30.0-27.0=3.0\text{m}$$

$$\because \quad \frac{P_1}{H}=\frac{12.0}{3.0}=4.0>1.33,\ \text{可令}H_0\approx H$$

$$\frac{e}{H}=\frac{2.4}{3}=0.8>0.75\ \text{故为堰流。}$$

对于WES型实用堰，可取流量系数 $m_d=0.502$。

判别是否淹没

因下游坝高 $P_2=27.0-13.0=14$ m

下游水深 $h_t=3.14$ m

$\therefore \quad P_2>h_t \quad h_s<0$ 又因为 $\frac{P_2}{H}=\frac{14}{3}=4.7>2$ 故为非淹没堰，所以淹没系数 $\sigma_s=1$

实用堰的流量

$$Q=\sigma_s\varepsilon mnb'\sqrt{2g}H^{3/2}$$

$$=1\times0.946\times0.502\times5\times4\sqrt{19.6}\times3^{3/2}$$

$$=218.49\ \text{m}^3/\text{s}$$

单宽流量 $q=\frac{218.49}{5\times4+4\times1}=9.10\text{m}^3/\text{s-m}$

现判别坝下游水跃的衔接形式

$$E_0=P_2+H=14+3=17\text{m}$$

$$E_0=h_c+\frac{q^2}{2g\varphi^2h_c^2}\qquad \text{取}\ \varphi=0.95$$

用试算法确定h_c

设 $h_c=0.533$ m代入上式，则

$$17=0.533+\frac{9.1^2}{2\times9.8\times0.95^2\times0.533^2}=17\text{m}$$

故取$h_c=0.533\text{m}$，其共轭水深为

$$h_c''=\frac{h_c}{2}\left[\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_c^3}}-1\right]$$

$$=\frac{0.533}{2}\left[\sqrt{1+8\times\frac{9.1^2}{9.8\times0.533^3}}-1\right]$$

$$=5.37\text{m}>h_t=3.14\text{m}$$

∵ $h_c''>h_t$故在下游发生远驱式水跃，需要修建消能设备。

（2）消能池池深 s 的计算

首先估算池深 $s=\sigma_1h_c''-h_t=1.05\times5.37-3.14$

$=2.5$ m

设$s=2.4\text{m}$，于是

$$E_0'=E_0+s=17+2.4=19.4\text{m}$$

与前面作法相同 $E_0'=h_{c1}+\frac{q^2}{2g\varphi^2h_{c1}^2}$

用试算法求得$h_{c1}=0.498\text{m}$

$$h_{c1}''=5.58\text{m}$$

$$\Delta z=\frac{q^2}{2g}\left[\frac{1}{(\varphi'h_t)^2}-\frac{1}{(\sigma_1h_{c1}'')^2}\right]$$

$$=\frac{9.1^2}{2\times9.8}\left\{\frac{1}{(0.95\times3.14)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(1.05\times5.58)^2}\right]$$

$=0.352\text{m}$

消能池池深 $s=\sigma_j h''_{c_1}-(h_t+\Delta z)=1.05\times5.58-(3.14+0.352)$

$=2.37\text{m}\approx2.4\text{m}$

与原假设基本符合，故所求池深$s=2.4\text{m}$

（3）如果不修建消能池，溢流堰下游发生远驱式水跃，现分析c-c断面至跃前断面间水面曲线型式。

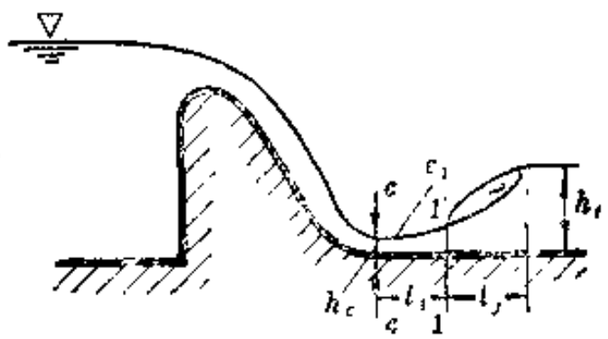
因 $$h_K=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{9.1^2}{9.8}}=2.04\text{m}$$

而溢流坝下游河槽正常水深 $h_0=h_t=3.10\text{m}$

∴ $h_K<h_0$故河槽为缓坡，

又∵ $$h_c=0.533\text{m}<h_K$$

∴ 水面曲线为c_1型壅水曲线。坝趾下游水面衔接情况如图所示。



解 188 图

河床需保护的长度

$$l=l_1+l_j$$

式中 l_1为c_1型壅水曲线的长度，其计算如下

$$l_1=\frac{E_{s1}-E_{sc}}{i-\overline{J}}$$

式中 $$E_s=h+\frac{av^2}{2g}$$

各有关水力要素$A=bh$, $\chi=b+2h$, $R=\frac{A}{\chi}$, $CR^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n}R^{1/6}$

因$h_c=0.533\text{m}$

$$h_1=\frac{h_t}{2}\left[\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_t^3}}-1\right]$$

$$=\frac{3.14}{2}\left[\sqrt{1+8\frac{9.1^2}{9.8\times3.14^3}}-1\right]$$

$$=1.23\text{m}$$

则c-c断面及1-1断面的有关水力要素按下列各式分别求得为

$$A_c=24\times0.533=12.79\text{m}^2$$

$$A_1=24\times1.23=29.52\text{m}^2$$

$$\chi_c=24+2\times0.533=25.07\text{m}$$

$$\chi_1=24+2\times1.23=26.46\text{m}$$

$$R_c=\frac{12.79}{25.07}=0.51\text{m}$$

$$R_1=\frac{29.52}{26.46}=1.12\text{m}$$

$$C_cR_c^{1/2}=\frac{1}{n}R_c^{2/3}=\frac{1}{0.02}\times0.51^{2/3}=31.92\text{m/s}$$

$$C_1R_1^{1/2}=\frac{1}{n}R_1^{2/3}=\frac{1}{0.02}\times1.12^{2/3}=53.93\text{m/s}$$

$$v_c=\frac{218.49}{12.74}=17.08\text{m/s}$$

$$v_1=\frac{218.49}{29.52}=7.4\text{m/s}$$

$$\frac{v_c^2}{C_c^2R_c}=\left(\frac{17.08}{31.92}\right)^2=0.286,$$

$$\frac{v_1^2}{C_1^2R_1}=\left(\frac{7.4}{53.93}\right)^2=0.0188$$

$$\overline{J}=\frac{1}{2}\left(\frac{v_c^2}{C_c^2R}+\frac{v_1^2}{C_1^2R_1}\right)=\frac{1}{2}(0.286+0.0188)$$

$$=0.1524$$

$$E_{sc}=h_c+\frac{v_c^2}{2g}=0.533+\frac{17.08^2}{19.6}=15.42\text{m}$$

$$E_{s1}=h_1+\frac{v_1^2}{2g}=1.23+\frac{7.4^2}{19.6}=4.02\text{m}$$

则 $$l_1=\frac{4.02-15.42}{0.001-0.1524}=75.3\text{ m}$$

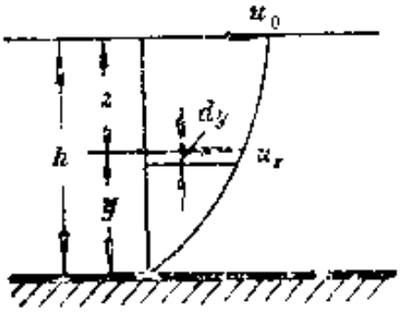
水跃跌长为

$$l_j=10.8h_1(\mathrm{Fr}_1-1)^{0.93}$$

$$=10.8\times1.23\left(\sqrt{\frac{9.1^2}{9.8\times1.23^3}}-1\right)^{0.93}=14.9\text{ m}$$

于是 $$l=73.3+14.9=88.2\text{m}$$

VI、液体运动的流场理论



题 189 图

189 某二元水流的流速分布规律为$u_x=u_0\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]$，$u_y=u_z=0$，今已知表面流速$u_0=3\text{ cm/s}$，水深$h=2\text{ cm}$，运动粘滞系数$\nu=0.01\text{ cm}^2/\text{s}$，试求其雷诺数及佛汝德数，并判别该二元水流为层流还是紊流？急流还是缓流？无涡流还是有涡流？

解：

先求出断面平均流速

$$v=\frac{1}{h}\int_0^h u_x dy=\frac{u_0}{h}\int_0^h\left[1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]dz$$

$$=\frac{u_0}{h}\left[h-\frac{h}{3}\right]=\frac{2}{3}u_0$$

$$=\frac{2}{3}\times3=2\text{ cm/s}$$

该水流的雷诺数Re为

$$\mathrm{Re}=\frac{vR}{\nu}=\frac{2\times2}{0.01}=400\text{（宽浅式明渠}R\approx h\text{）}$$

∵ $\mathrm{Re}=400<500$ 故水流为层流

该水流的佛汝德数为

$$\mathrm{Fr}=\frac{v}{\sqrt{gh}}=\frac{2}{\sqrt{980\times 2}}=0.045<1$$

故水流为缓流。

$\because$

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}u_0\left(-\frac{2z}{h^2}\right)=-\frac{u_0 z}{h^2}\neq 0$$

故水流为有涡流。

190 已知流动速度场为

$$u_x=-\frac{x}{1+t}$$

$$u_y=y$$

$$u_z=0$$

试求：

（1）在$t=t_0$瞬间，通过$A(x_0,y_0,z_0)$点的流线方程；

（2）在$t=t_0$瞬间，位于$A(x_0,y_0,z_0)$点的迹线方程。

解：

（1）流线方程的一般表达式为$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z}$，将本题已知条件代入，则有

$$\frac{dx}{-\frac{x}{1+t}}=\frac{dy}{y}$$

$$\frac{1+t}{x}dx=\frac{1}{y}dy$$

积分得

$$(1+t)\ln x=\ln y+\ln C'$$

$$\ln\frac{x^{(1+t)}}{y}=\ln C'$$

即

$$y=Cx^{(1+t)}\qquad (C\text{为常数})$$

当$t=t_0$时，$x=x_0$，$y=y_0$

$$y_0 = Cx_0^{(1+t_0)}$$

$$\therefore \quad C = y_0 x_0^{-(1+t_0)}$$

故过$A(x_0, y_0, z_0)$点的流线方程为

$$y = y_0 x_0^{-(1+t_0)} x^{(1+t)}$$

（2）求迹线方程

迹线一般表达式为$\frac{dy}{u_y} = \frac{dx}{u_x} = dt$，代入本题已知条件有

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{\dfrac{x}{1+t}} = dt \\ \dfrac{dy}{y} = dt \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{1+t} & (1) \\ \dfrac{dy}{y} = dt & (2) \end{cases}$$

由（1）式得 $\ln x = \ln(1+t) + \ln C = \ln[C(1+t)]$

$$x = C(1+t)$$

当$t = t_0$，$x = x_0$代入上式得 $C = \frac{x_0}{1+t_0}$

$$\therefore \quad x = \frac{x_0}{1+t_0}(1+t)$$

由（2）式得 $\ln y = t + \ln C = \ln e^t + \ln C = \ln(Ce^t)$

$$y = Ce^t$$

当$t = t_0$，$y = y_0$ 代入上式，得$C = y_0 e^{-t_0}$

$$\therefore \quad y = y_0 e^{(t-t_0)}$$

故迹线方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_0}{1+t_0}(1+t) \\ y = y_0 e^{(t-t_0)} \\ z = z_0 \end{cases}$$

消去t后，得

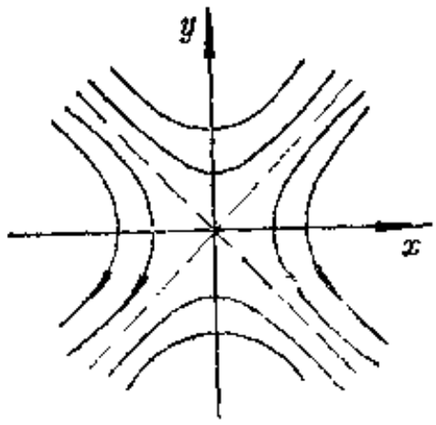
$$y = \frac{y_0}{e^{t_0}} e^{\frac{1+t_0}{x_0}(x-1)}$$

191 已知某水流的流场为：$u_x=2y$，$u_y=2x$，$u_z=0$，试求：

（1）判断水流是恒定流还是非恒定流，是否连续？

（2）求出流线方程式，并绘出流线的示意图；

（3）分析该水流的运动特性。



解 191 图

解：

（1）u_x，u_y，u 均与 t 无关，故为恒定流

因 $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0$ 故流场连续

（2）流线方程为

$$\frac{2y}{dx}=\frac{2x}{dy}$$

$$2ydy=2xdx$$

$$y^2=x^2+C'$$

$$x^2-y^2=C$$

C 为常数，可见流线为一簇 xy 平面内以直角平分线为渐近线的双曲线。

（3）因 $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0$，故液体质点无直线变形。

$$\because\quad \theta_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0$$

$$\theta_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=0$$

$$\theta_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(2+2)=2\neq 0$$

$\therefore$ 液体有直角变形。

$$\because \quad \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(2-2)=0$$

$\therefore$ 液体质点为无涡运动，有势函数存在。

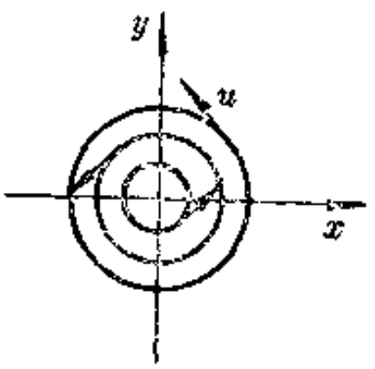
求势函数

$$\because \quad u_x=\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ u_y=\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$d\varphi=u_x dx+u_y dy=2ydx+2xdy$$

$$\therefore \quad \varphi=2xy+C$$

192 已知某水流的 $u_x=-ky$，$u_y=kx$，$u_z=0$，试判别此水流为恒定流还是非恒定流，是有涡流还是无涡流？并绘出其流线的示意图。



解 192 图

解：

$$\because \quad \frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial u_z}{\partial t}=0$$

所以此水流为恒定流。

又因 旋转角速度

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(k+k)=k\neq 0$$

所以 此水流为有涡流。根据流线方程 $u_z=0$

$$\therefore \quad \frac{u_x}{dx}=\frac{u_y}{dy} \qquad \text{即} \quad -kydy=kxdx$$

积分得 $-\frac{1}{2}ky^2-\frac{1}{2}kx^2=C'$

$$x^2+y^2=C \qquad (C\text{为常数})$$

$$\because \quad \cos(u,x)=\frac{u_x}{u}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos(u,y)=\frac{u_y}{u}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\therefore$ 流线为同心圆簇逆时针运动，如图所示。

193 已知流场的流函数$\psi=ax^2-ay^2$；（1）证明此流动是无涡的；（2）求出相应的速度势函数；（3）证明流线与等势线正交。

解：

（1）该流场为二元流，速度分量与流函数的关系式如下

$$u_x=-\frac{\partial\psi}{\partial y}=-2ay$$

$$u_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-2ax$$

$$\because \quad \omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(-2a+2a)=0$$

$\therefore$ 此流动为无涡流，存在速度势函数。

（2）求速度势函数

解法一：

$$\because \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=-2ay$$

$$\therefore \quad \varphi=\int\frac{\partial\psi}{\partial y}dx=-\int 2aydx=-2ayx+C(y) \qquad (1)$$

现在来确定$C(y)$：为此将上式对y取偏导数，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-2ax+C'(y)=-2ax$$

因而 $C'(y)=0$. 即 $C(y)=C$ （C为常数）

将上式代入（1）式，即得到流速势函数

$$\varphi = -2axy + C$$

解法二：

$\because$ $d\varphi = u_x dx + u_y dy = -2aydx - 2axdy$

令式中 $-2ay = P$, $-2ax = Q$

$\because$ $$\frac{\partial P}{\partial y} = -2a = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\therefore$ 原方程为全微分方程，其解为

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

取 $x_0 = 0$ $y_0 = 0$ 得

$$\varphi = -2axy + C$$

（3）等流函数线就是流线，其方程为

$$d\psi = u_x dy - u_y dx = 0$$

流线上任一点的斜率

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x}$$

等流速势线就是等势线，其方程为

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = 0$$

在同一点上等势线的斜率为

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}$$

$\because m_1 \cdot m_2 = -1$

$\therefore$ 流线与等势线在该点上相互正交。

194 已知平面不可压缩流的速度分布分别为

（1）$\begin{cases} v_x = y \\ v_y = -x \end{cases}$ （2）$\begin{cases} v_x = x - y \\ v_y = -x + y \end{cases}$ （3）$\begin{cases} v_x = x^2 - y^2 + x \\ v_y = -(2xy + y) \end{cases}$

试判断是否满足速度势函数 φ 和流函数 ψ 的存在条件，并求 φ 和 ψ。

解：

满足平面势流速度势函数 φ 存在的充分必要条件是无涡，即

$\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial x}$，满足平面流函数$\psi$存在的充分必要条件是连续性方程，即 $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$。

（1） $\begin{cases}v_x=y\\v_y=-x\end{cases}$

$\because$ $\frac{\partial v_x}{\partial y}=1$， $\frac{\partial v_y}{\partial x}=-1$， $\frac{\partial v_x}{\partial y}\neq\frac{\partial v_y}{\partial x}$

$\therefore$ 该水流不是势流。

$\because$ $\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$ $\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$ $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$

$\therefore$流函数存在，流函数为

$$d\psi=v_x dy-v_y dx$$
$$=ydy+xdx$$

上式积分得 $$\psi=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2+C_1$$

即 $$\psi=x^2+y^2+C$$

（2） $\begin{cases}v_x=x-y\\v_y=x+y\end{cases}$

$\because$ $\frac{\partial v_x}{\partial y}=-1$， $\frac{\partial v_y}{\partial x}=1$，

$\therefore$ $\frac{\partial v_x}{\partial y}\neq\frac{\partial v_y}{\partial x}$该水流不是势流。

$\because$ $\frac{\partial v_x}{\partial x}=1$， $\frac{\partial v_y}{\partial y}=1$

$\therefore$ $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=2\neq 0$ 该流动无流函数存在。

（3） $\begin{cases}v_x=x^2-y^2+x\\v_y=-(2xy+y)\end{cases}$

$\because$ $\frac{\partial v_x}{\partial y}=-2y$， $\frac{\partial v_y}{\partial x}=-2y$

$\therefore$ $\dfrac{\partial v_x}{\partial y}=\dfrac{\partial v_y}{\partial x}$为势流。势函数为：

$$d\varphi=v_xdx+v_ydy$$
$$=(x^2-y^2+x)dx-(2xy+y)dy$$

该方程属全微分型，代入公式可得势函数

$$\varphi=\int_0^x(x^2-y^2+x)dx-\int_0^y ydy$$
$$=\frac{1}{3}x^3-y^2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+C$$

$\because$ $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}=2x+1$，$\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=-2x-1$

$\therefore$ $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=2x+1-2x-1=0$流场连续，故有流函数存在。其流函数为

$$d\psi=v_xdy-v_ydx$$
$$=(x^2-y^2+x)dy+(2xy+y)dx$$

该方程属全微分型，代入公式可得流函数

$$\psi=-\int_0^y y^2dy+\int_0^x(2xy+y)dx$$
$$=(x+1)xy-\frac{1}{3}y^3+C$$

195 给出一个二元流场，其中$u_x=x^2+2x-4y$，$u_y=-2xy-2y$，试问：

（1）是否符合不可压缩流连续性条件；

（2）旋转角速度ω为多少；

（3）流函数ψ的表达式如何；

（4）驻点位置的坐标值。

解：

（1）是否符合不可压缩流连续条件

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=2x+2-2x-2=0$$

即满足不可压缩流连续条件。

（2）旋转角速度 ω

在二元流场中

$$\omega = \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-2y+4) = 2-y$$

（3）流函数 ψ

$\because$ $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \dfrac{\partial(-u_y)}{\partial y} = -2x+2$，

$$d\psi = u_x dy - u_y dx$$

$$= (x^2+2x-1y)dy + (2xy+2y)dx$$

上式属全微分型 程

$\therefore$ $$\psi = \int (2xy+2y)dx - \int 4y dy$$

$$= x^2y + 2xy - 2y^2 + c$$

（4）驻点位置坐标

在驻点处速度 $u=0$， 从而 $u_x=0$ $u_y=0$

由 $u_x=0$ 得 $x^2+2x-4y=0$

由 $u_y=0$ 得 $-2xy-2y=0$

由以上两方程联解得 $x=-1$， $y=-\dfrac{1}{4}$

故驻点的位置坐标是 $x=-1, y=-\dfrac{1}{4}$

196 求证用 $\varphi_1 = \dfrac{1}{2}(x^2-y^2)+2x-3y$ 所表示的流场和用 $\psi_2 = xy+3x+2y$ 所表示的流场实际上是相同的。

解：

计算第一个流场的流函数

$$u_{x1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = x+2$$

$$u_{y_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=-(y+3)$$

$\because$ $u_{x1}=\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}$, $u_{y1}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$

$\therefore$ $d\psi_1=u_{x1}dy-u_{y1}dx=(x+2)dy+(y+3)dx$上式属全微分型，积分得

$$\psi_1=\int_0^y(x+2)dy+\int_0^x 3dx$$
$$=xy+2y+3x$$
$$=\psi_2$$

计算第二个流场的势函数

$$u_{x2}=\frac{\partial\psi_2}{\partial y}=x+2$$

$$u_{y2}=-\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=-(y+3)$$

$\because$ $u_{x2}=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}$, $u_{y2}=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}$

$\therefore$ $d\varphi_2=u_{x2}dx+u_{y2}dy=(x+2)dx-(y+3)dy$

上式属全微分型，积分得

$$\varphi_2=\int_0^x(x+2)\,dx-\int_0^y(y+3)dy$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-y^2)+2x-3y$$
$$=\varphi_1$$

由以上计算可知，$\varphi_1=\varphi_2$，$\psi_1=\psi_2$，故两个流场实际上是完全相同的。

197 设有一平面流场，其流速为$u_x=v\cos\theta$，$u_y=v\cdot\sin\theta$，其中v，θ均为常数。试求：

（1）证明该平面流是连续的无涡流流动；

（2）求该流动的流函数ψ和速度势函数φ；

（3）求出流线方程及等势线方程；

（4）绘制该流动的流网图。

解：

（1）因 $\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$　　$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$

故是连续流动的。

$$\because \quad \omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0$$

$\therefore$ 是连续的无涡流动。

（2）流函数　$\psi=\int u_x dy-\int u_y dx$

$$=\int v\cos\theta dy-\int v\sin\theta dx$$
$$=vy\cos\theta-vx\sin\theta+C$$

势函数　$\varphi=\int v_x dx+\int v_y dy$

$$=\int v\cos\theta dx+\int v\sin\theta dy$$
$$=vx\cos\theta+vy\sin\theta+C$$

（3）由流线方程 $\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}$ 得

$$\frac{dx}{v\cos\theta}=\frac{dy}{v\sin\theta}$$

$$\sin\theta dx=\cos\theta dy$$

两边积分得

$$x\sin\theta=y\cos\theta+C'$$

故

$$y=x\,\mathrm{tg}\theta+C$$　　为其流线方程

由等势线方程

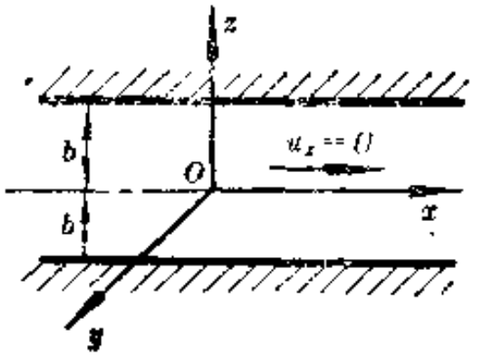
$$d\varphi=u_x dx+u_y dy$$
$$=v\cos\theta dx+v\sin\theta dy=0$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta=C'$$

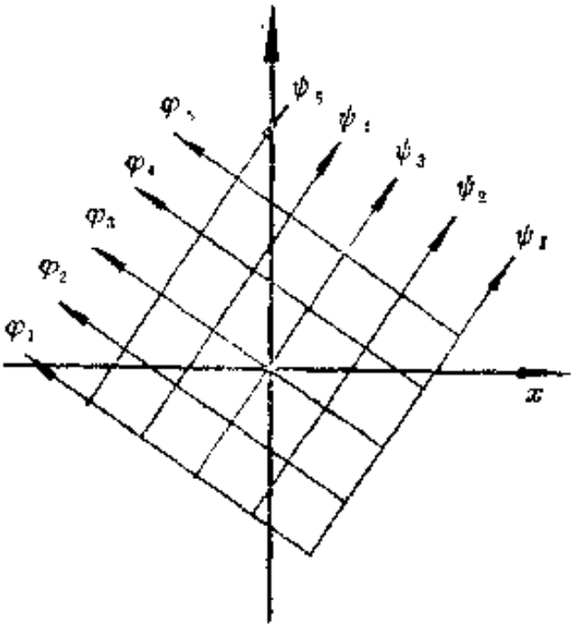
故　$y=-\mathrm{ctg}\theta\cdot x+C$　为其等势线方程

（4）流线为一簇斜率为$\mathrm{tg}\theta$的直线，等势线为一簇与流线相正交的直线，相互组成正方网格，即为流网。

198 在重力作用下，粘性不可压缩液体在两平行板中沿 x 轴方向作恒定直线流动，即$u_x=U$，$u_y=0$，$u_z=0$，边界方程$z=\pm b$，试证明横截面内的速度分布为　$u_x=\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}(z^2-b^2)$



题 198 图



解 198 图

解：

在x轴方向上的纳维埃-司托克斯公式为

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2u_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

依题意，因为只有重力作用，所以$X=0$，又因为水流为恒定流，故　$\dfrac{\partial u_x}{\partial t}=0$，且　$u_y=0$，$u_z=0$

上式可简化为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u_x}{\partial z^2}\right)=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

对于不可压缩液体，根据连续性方程有

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

$\because$ $u_y=u_z=0$

$\therefore$ $\frac{\partial u_x}{\partial x}=0$，　则　$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}=0$

若两平行板很宽，则液体只沿 x 轴方向运动

$\therefore$ $\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=0$　　u_x只是与 z 有关，则　$\frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{du_x}{dz}$

故方程可写为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{d^2u_x}{dz^2}=0$$

即

$$\frac{d^2u_x}{dz^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

积分

$$\frac{du_x}{dz}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot z+C_1$$

再积分

$$u_x=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z^2+C_1z+C_2$$

当$z=\pm b$时，$u_x=0$

$\therefore$ $$0=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}b^2+C_1b+C_2$$

当$z=0$时，　$\frac{du_x}{dz}=0$

$\therefore$ $$0=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\times 0+C_1$$

$$C_1=0$$

$\therefore$ $$C_2=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}b^2$$

故 $$u_x=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(z^2-b^2)$$

199　有一恒定二元明渠均匀层流（见图），因二元流时，

$u_y = u_z = 0$，恒定流时，$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$，于是纳维埃-司托克斯方程式及连续性方程式可写作：

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) = 0$$

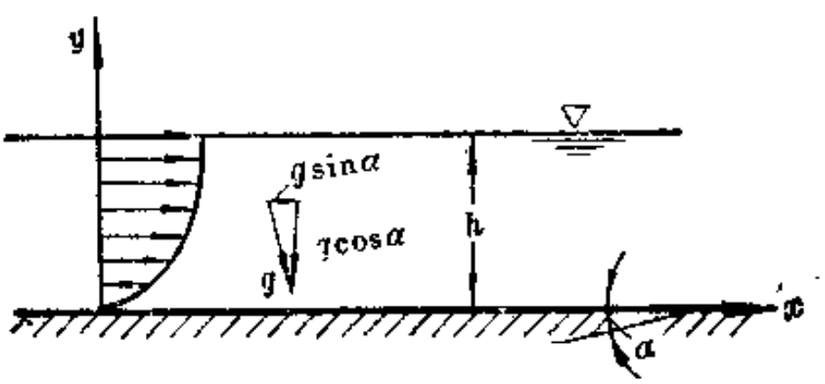
$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

连续性方程式 $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$

试证明该水流

（1）流速分布公式为 $u_x = \frac{g}{2\nu}(\sin\alpha)(2yh - y^2)$；

（2）单宽流量 $q = \frac{gh^3}{3\nu}\sin\alpha$。



题 199 图

解：

（1）依题意得知在 x、y 轴的单位质量力

$$X = g\sin\alpha$$

$$Y = -g\cos\alpha$$

又因为水流为均匀层流，压强分布与 x 无关，即 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$，纳-司方程可写为

$$g\sin\alpha + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

$$-g\cos\alpha-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

因为u_x只与y方向有关，与x无关，所以偏微分可写为全微分，则（1）式可写为

$$g\sin\alpha+\nu\frac{d^2u_x}{dy^2}=0$$

积分得

$$\frac{du_x}{dy}=-\frac{g}{\nu}\sin\alpha\cdot y+C_1$$

$$u_x=-\frac{g}{2\nu}\sin\alpha\cdot y^2+C_1y+C_2$$

根据边界条件，求积分常数C_1及C_2，当$y=0$时，$u_x=0$；当$y=h$时，$\frac{du_x}{dy}=0$，得$C_2=0$；

$C_1=\frac{g}{\nu}\sin\alpha\cdot h$，代入原方程

$$u_x=-\frac{g}{2\nu}y^2\sin\alpha+\frac{g}{\nu}\sin\alpha\cdot h\cdot y$$

$$=\frac{g}{2\nu}\sin\alpha(2yh-y^2)$$

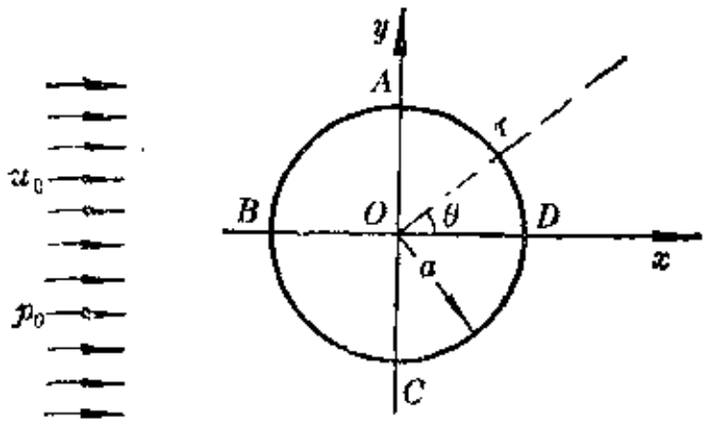
（2）
$$q=\int_0^h u_x\,dy=\int_0^h\frac{g}{2\nu}\sin\alpha(2yh-y^2)dy$$

$$=\frac{g}{2\nu}\sin\alpha\left(h^3-\frac{h^3}{3}\right)$$

$$=\frac{g}{3\nu}h^3\sin\alpha$$

200 已知圆柱绕流的流速势函数$\varphi=u_0\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$，圆柱半径为$a$，任一点的极坐标为$(r,\theta)$，无穷远处的流速与压强为$u_0$和$p_0$，试问

（1）分别说明流速势φ，流函数ψ和流网存在的充要条件。



题 200 图

（ 2 ）半侧ABC和BCD上所受的水平分力和垂直分力（忽略重力影响，计算单位宽度上所受的力）。

解：

（ 1 ）流函数ψ存在的充分必要条件就是满足流体二元运动的连续性方程式，即$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$。

流速势φ存在的充要条件是流场中流体微团的角速度$\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$，即为无涡流。对于平面势流$\omega_z=0$，即$\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial y}$。

流网存在的充要条件，即在平面势流中，既有流函数ψ存在，也有流速势φ存在，且ψ和φ满足柯西-黎曼条件。

（ 2 ）圆柱绕流为均匀等速流与偶极子流叠加。

已知流速势函数为

$$\varphi=u_0\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$

则其相应的流速分量为

$$\begin{cases} u_r=\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=u_0\cos\theta\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right) \\ u_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-u_0\sin\theta\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

在圆柱表面上，即当$r=a$时，由上式可得出圆柱表面上的流

速分布

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = -2u_0\sin\theta \end{cases}$$

当不计重力时，根据恒定势流的能量方程（欧拉方程），得

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}$$

将圆柱表面的点和均匀来流比较(按相同高度的平面考虑)得

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{u_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{u_\theta^2}{2}$$

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}(u_0^2 - u_\theta^2)$$

圆柱面上的压强分布为

$$p = p_0 + \frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta)$$

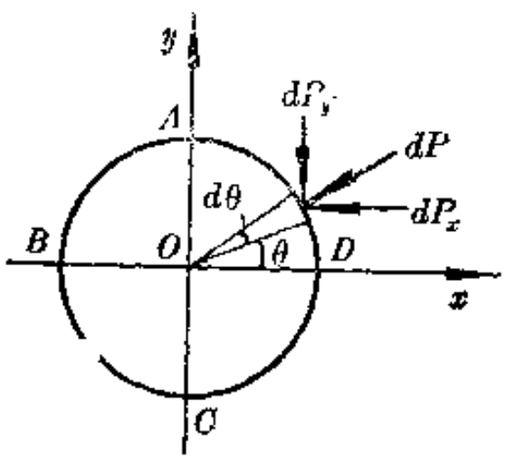
如图取微分量$d\theta$，单位宽度上 $dp = ad\theta p$，在 x 轴的分压力为

$$dp_x = -pad\theta\cos\theta$$

在 y 轴的分压力为

$$dp_y = -pad\theta\sin\theta$$

对半圆ABC有



解 200 图

$$P_x = -a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} p\cos\theta d\theta =$$

$$-a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \times\left[p_0 + \frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta)\right] \times \cos\theta d\theta$$

$$= -a\left\{p_0 \cdot [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{\rho u_0^2}{2} \times \left\{[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{4}{3}[\sin^3\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right]\right\} = \left(2p_0 - \frac{1}{3}\rho u_0^2\right)a$$

$$P_y=-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}p\sin\theta d\theta=a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\times\left[p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}(1-4+4\cos^2\theta)\right]d(\cos\theta)$$

$$=a\left\{p_0[\cos\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\frac{\rho u_0^2}{2}\right.$$

$$\left.\times\left[-3[\cos\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\frac{4}{3}[\cos^3\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right]\right\}$$

$$=0$$

对半圆ECD有

$$P_x=-a\int_{\pi}^{2\pi}p\cos\theta d\theta$$

$$=-a\left\{p_0[\sin\theta]_{\pi}^{2\pi}+\frac{\rho u_0^2}{2}\left[[\sin\theta]_{\pi}^{2\pi}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{4}{3}[\sin^3\theta]_{\pi}^{2\pi}\right]\right\}$$

$$=0$$

$$P_y=-a\int_{\pi}^{2\pi}p\sin\theta d\theta$$

$$=a\left\{p_0[\cos\theta]_{\pi}^{2\pi}+\frac{\rho u_0^2}{2}\left[-3[\cos\theta]_{\pi}^{2\pi}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4}{3}[\cos^3\theta]_{\pi}^{2\pi}\right]\right\}$$

$$=\left(2p_0-\frac{5}{3}\rho u_0^2\right)a$$

201 如图所示不可压缩流体，恒定流平面问题中流速分布为：

当$r\leqslant a$时，$v=v_\theta=K_1r$，$v_r=0$；

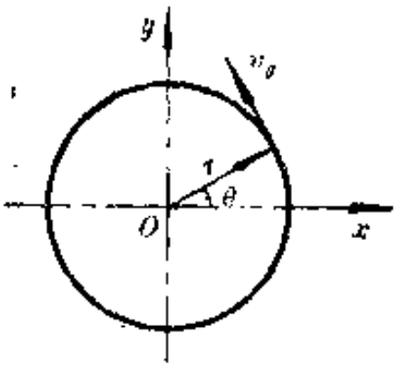
当$r>a$时，$v=v_\theta=K_2/r$，$v_r=0$；

其中r，θ为极坐标，a，K_1，K_2为常量。

（1）试说明流动是可能的；

（2）试说明流动是有涡流还是无涡流；

（3）如果流体是理想的，质量力只有重力并且其方向与平面垂直，试求其压强分布。



题 201 图

解：

（1）说明流动的可能性；

若流动是可能的，必满足连续性方程，以极坐标表示的连续性方程为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}=0 \qquad (1)$$

① 当$r\leqslant a$时，$v_\theta=K_1 r$，$v_r\approx 0$

$\because$ $\frac{\partial v_r}{\partial r}=0$，$\frac{v_r}{r}=0$，$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}=0$

$\therefore$ 满足（1）式，故流动是可能的。

② 当$r>a$时，$v_\theta=\frac{K_2}{r}$，$v_r=0$

$\because$ $\frac{\partial v_r}{\partial r}=0$，$\frac{v_r}{r}=0$，$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}=0$

$\therefore$ 满足（1）式，流动是可能的。

（2）说明流动是有涡流还是无涡流

由平面极坐标表示的旋度公式为

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \qquad (2)$$

① 当$r\leqslant a$时，$v_\theta=K_1 r$，$v_r=0$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(K_1r^2)$$
$$=2K_1\neq 0$$

故流动为有涡流。

② 当 $r>a$ 时，$v_\theta=\frac{K_2}{r}$，$v_r=0$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(K_2)=0$$

故流动为无涡流

（3）如果流体是理想液体，质量力只有重力并且方向与平面垂直，求压强分布

对恒定、平面流动，质量力只有重力，流动的欧拉运动微分方程为（以极坐标表示）

$$\begin{cases}v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} & (3)\\ v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_rv_\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} & (4)\end{cases}$$

① 当$r\leqslant a$时，将$v_r=0$及$v_\theta=K_1r$分别代入（3）、（4）两式可得

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=0$$
$$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho\frac{(K_1r)^2}{r}=\rho K_1^2r$$

积分得 $$p=p_0+\frac{1}{2}K_1^2\rho r^2$$

② 当$r>a$时，将$v_r=0$及$v_\theta=\frac{K_2}{r}$代入（3）、（4）两式得

$$\begin{cases}\frac{\partial p}{\partial\theta}=0\\ \frac{\partial p}{\partial r}=\rho\frac{K_2^2}{r^3}\end{cases}$$

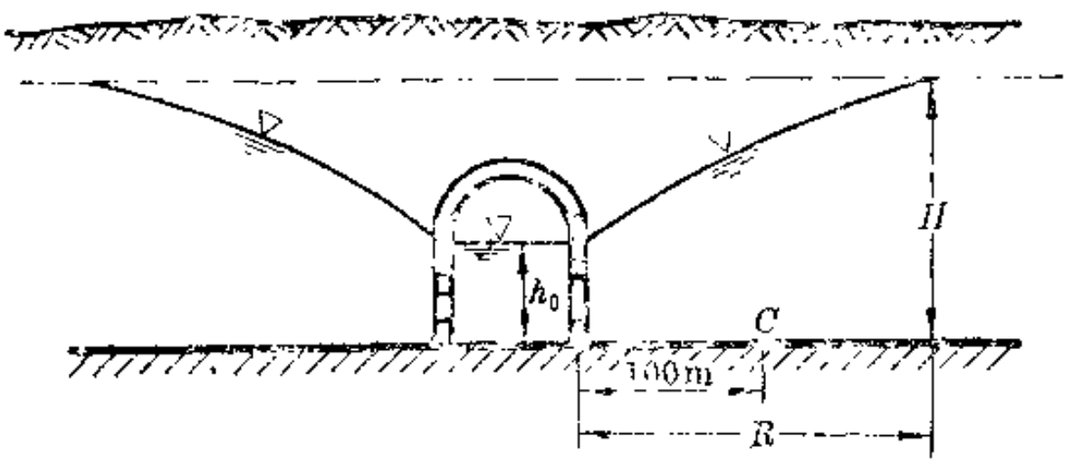
积分得 $p=-\rho\frac{K_2^2}{2r^2}+p_{r=a}$

VII 渗流，相似原理及量纲分析

202 如图所示不透水层上的排水廊道，已知：垂直于纸面方向长100m，廊道中水深$h_0=2$m，含水层中水深$H=4$m，土壤的渗透系数$k=0.001$cm/s，廊道的影响半径$R=200$m。试求：

（1）廊道的排水流量Q；

（2）距廊道100m处C点的地下水深h_c。



解：

（1）按平底地下河槽浸润曲线计算公式

$$\frac{qR}{k}=\frac{1}{2}(H^2-h_0^2)$$

$$\frac{q\times200}{0.00001}=\frac{1}{2}(16-4)$$

$$q=\frac{0.00006}{200}=3.0\times10^{-7}\ \text{m}^3/\text{s-m}$$

$$Q=q\times2\times100=6.0\times10^{-5}\ \text{m}^3/\text{s}$$

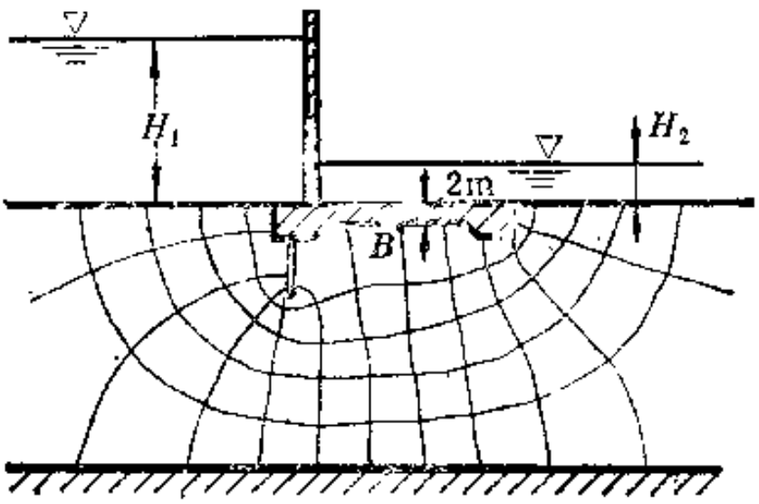
（2）$$\frac{q\times100}{k}=\frac{1}{2}(h_c^2-h_0^2)$$

$$\frac{0.3\times10^{-6}\times100}{0.1\times10^{-3}}=\frac{1}{2}h_c^2-\frac{1}{2}\times4^2$$

$$3+2=\frac{1}{2}h_c^2$$

$$h_c=3.16\ \text{m}$$

203 求图中渗流流网的单宽流量q及B点的压强$\frac{p_B}{\gamma}$，已知：水头$H_1=8.0\text{m}$，$H_2=2.0\text{m}$，渗透系数$k=2\times10^{-4}\text{m/s}$。



题 203 图

解：

（1）计算渗流的单宽流量

$$q=\frac{kH(n-1)\Delta b}{(m-1)\Delta s}$$

式中 $H=H_1-H_2=8-2=6\ \text{m}$

n为流线条数，$n=6$

m为等势线条数$m=13$

取$\Delta b=\Delta s$

$$\therefore\quad q=\frac{2\times10^{-4}\times6(6-1)}{(13-1)}=5\times10^{-4}\text{m}^3/\text{s-m}$$

（2）计算B点的渗透压强$\frac{p_B}{\gamma}$

$$\frac{p_B}{\gamma}=h_B-h_{fB}$$

式中 h_B为B点的位置深度（从上游水面算起）

h_{fB}为入渗点到B点的水头损失$h_{fB}=7/13H$。

$$\Delta H=\frac{H}{m-1}=\frac{6}{13-1}=0.5$$

故 $$\frac{p_n}{\gamma}=H_1+2-7\Delta H=8+2-7\times0.5$$

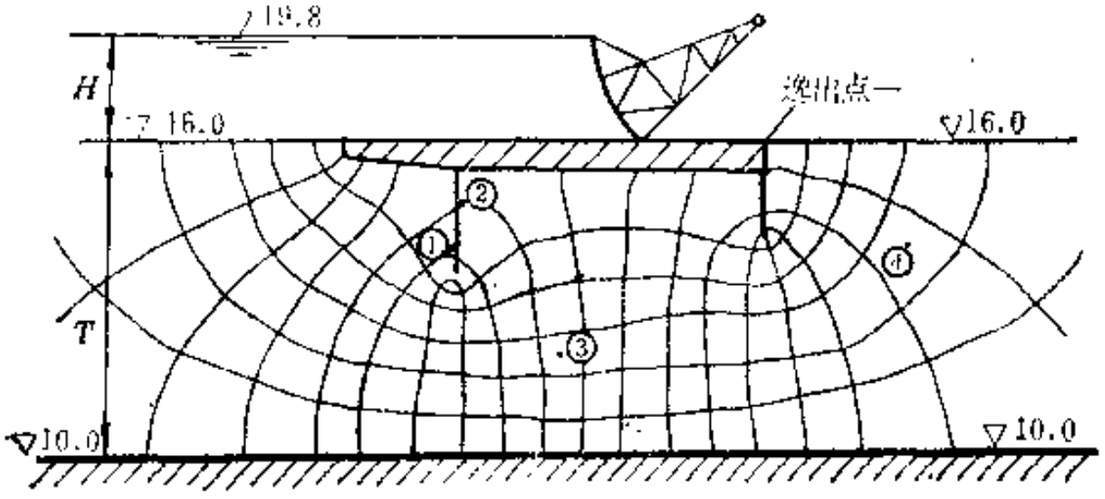
$$=6.5\ \text{m水柱}$$

204 有一水闸，其渗透流网如图所示。已知①点高程为14.20m，②点高程为15.20m，③点高程为12.0m，④点高程为14.0m，其它高程如图示。下游无水，上下游设置板桩，地基土壤的渗透系数$k=5\times10^{-2}$cm/s，允许渗透坡降$[J]=0.25$，③点处网格等势线间距离$\Delta b_3=0.8$m，流线间距离$\Delta s_3=0.8$m，④点处网格流线间距离$\Delta s_4=1.7$m，渗流逸出处网格等势线间距离$\Delta b=0.8$m。

（1）求①点和②点处的渗透动水压强各等于若干？

（2）③点处网格的渗流速度$u_3=$？通过④点处的渗流速度是否和③点处相同？如不同，则$u_4=$？

（3）如果下游不设置板桩，其逸出流速是否改变？如何变化？此时会发生管涌现象吗？



题 204 图

解：

（1）任意两等势线间的水头差为

$$\Delta H=\frac{H}{m-1}=\frac{19.8-16}{20-1}=0.2\ \text{m}$$

式中 m为流网中等势线的条数（包括边界等势线在内）。

①点的动水压强（以液柱高计）为

$$\frac{p_1}{\gamma}=h_1-h_{f1}=(19.8-14.2)-5\times0.2$$

$$=4.6\ \text{m}$$

上式中h_1表示①点在上游液面下的深度。

②点的渗透动水压强为

$$\frac{p_2}{\gamma}=h_2-h_{f2}=(19.8-15.2)-9\times0.2$$

$$=2.8\ \text{m}$$

（2）③点处网格的渗透速度为

$$u_3=kJ=k\frac{\Delta H}{\Delta s_3}=5\times10^{-2}\times\frac{0.2}{0.8}$$

$$=1.25\times10^{-2}\ \text{cm/s}$$

④点处网格的渗透速度为

$$u_4=kJ=k\frac{\Delta H}{\Delta s_4}=5\times10^{-2}\times\frac{0.2}{1.7}$$

$$=5.88\times10^{-3}\ \text{cm/s}$$

（3）如果下游不设板桩，则其逸出流速增大，当流速增加到一定程度时，其渗透坡降大于允许渗透坡降即$[J]=0.25$时，就会发生管涌现象。

205 某板桩渗透绕流的流网图已绘出，如题205图所示，求

（1）定性绘出A、B、C、D四点处测压管中水位并说明原因。

（2）求板桩两侧压强分布及流速分布，并估计单宽渗透流量。

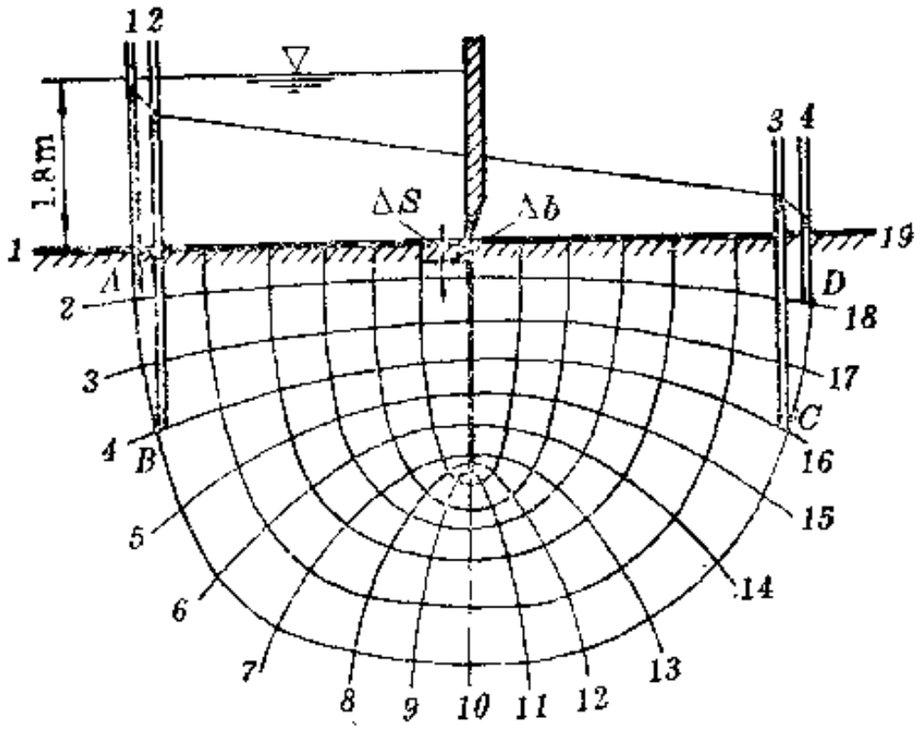
设板桩上等水头线之间的距离于下页表中。

土壤的渗透系数$k=10^{-3}$cm/s。

解：

（1）绘A、B、C、D四测压管水位

渗透区任一点的渗透动水压强为



题 203 图

等水头线	1- 2	18 19	0.9 m
等水头线	2—3	17—18	0.85m
等水头线	3--4	16--17	0.80m
等水头线	4- 5	15 --16	0.75m
等水头线	5—6	14—15	0.70m
等水头线	6—7	13- 14	0.65m
等水头线	7—8	12--13	0.60m
等水头线	8—9	11—12	0.25m
等水头线	9 -10	10 11	0.10m

$$\frac{p_N}{\gamma} - h_N - h_{fN} = (H + z_N) - h_{fN}$$

$$= (18 + z_N) - h_{fN}$$

式中 z_N 表示渗流区中任一点到入渗边界的垂直距离，对A、B、C、D四点来说总是一定的，而且不影响测管液面高低。

h_{fN}为任一点水头损失，是影响测压管液面高低的主要因素。

如图所示，1、2、3、4根测压管均位于同一根流线上，但位于不同等势线上，当渗流从入渗点开始渗入孔隙介质，沿同一流线流径A、B、C、D四点直至出渗点，因水头损失h_f沿渗径逐渐增加，则测管水头线沿程下降，故测管水位沿程下降，A、B、C、D四根测压管液面比上游水面分别下降1m、3m、15m、17m，如图所示。

（2）求板桩两侧压强分布及流速分布；渗流单宽流量。

①板桩两侧的压强分布

$$\because \quad \frac{p}{\gamma}-h-h_f=(H+z)-h_f$$

设任意两等势线间水头损失为ΔH，板桩两侧点号为1′，2′，3′……19′

$$\therefore \quad p=\gamma[(H+z)-h_f],\ \Delta H=\frac{H}{m-1}=\frac{18}{19-1}=1\text{m}$$

列表计算，其计算成果如下表（一）

表（一）

计算点	z (m)	h_f (m)	$p=\gamma[(H+z)-h_f]=9.8[(18+z)-h_f]$ kN/m²	计算点	z (m)	h_f (m)	$p=\gamma[(H+z)-h_f]=9.8[(18+z)-h_f]$ kN/m²
1′	0	0	176.4	11′	1.5	10	132.3
2′	0.9	1	175.4	12′	0.75	11	120.05
3′	1.75	2	173.95	13′	1.45	12	104.37
4′	2.55	3	171.99	14′	1.0	13	88.2
5′	3.3	4	169.54	15′	1.3	14	71.54
6′	4.0	5	166.6	16′	2....	15	54.39
7′	4.65	6	163.17	17′	1.75	16	36.75
8′	5.25	7	159.25	18′	0.9	17	18.62
9′	5.5	8	151.9	19′	0	18	0
10′	5.6	9	143.08				

②计算板桩两侧的流速分布，见表（二）

③估算渗透流量

如流网图所示，由板桩右侧方格量得$\Delta b=0.9\text{m}$，$\Delta s=0.9\text{m}$，

表（二）

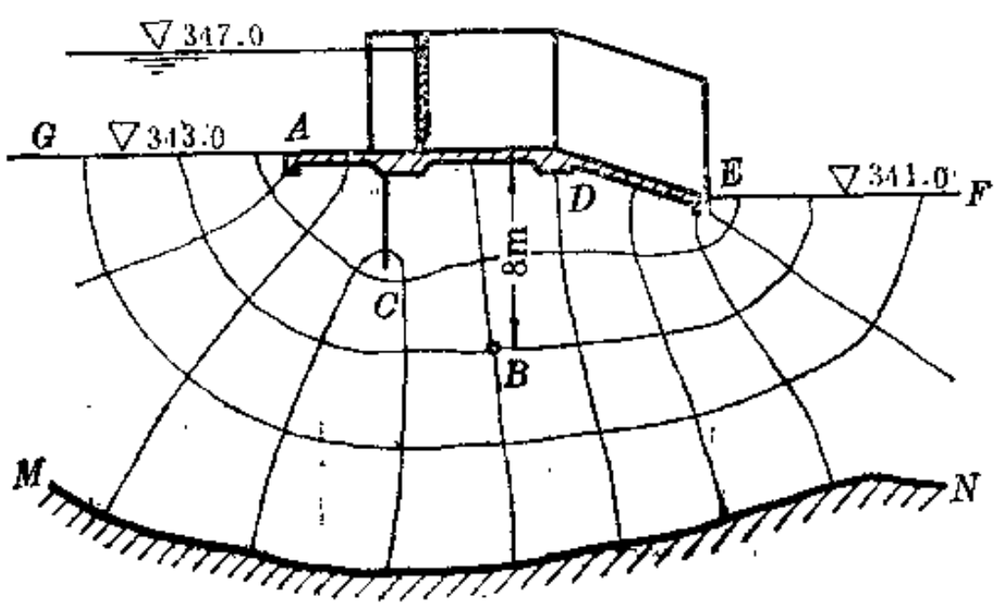
计算点	$-\Delta H$ (m)	Δs (m)	$J=\frac{\Delta H}{\Delta s}$	$v=-k\frac{\Delta H}{\Delta s}=-10^{-3}\frac{\Delta H}{\Delta s}$ (m/s)	计算点	$-\Delta H$ (m)	Δs (m)	$J=\frac{\Delta H}{\Delta s}$	$v=-k\frac{\Delta H}{\Delta s}=-10^{-3}\frac{\Delta H}{\Delta s}$ (cm/s)
1′	−1					−1	0.10	−10	10×10^{-3}
2′	−1	0.9	−1.11	1.11×10^{-3}	11′	−1	0.25	−4.0	4.0×10^{-3}
3′	−1	0.85	−1.18	1.18×10^{-3}	12′	−1	0.60	−1.67	1.67×10^{-3}
4′	−1	0.80	−1.25	1.25×10^{-3}	13′	−1	0.65	−1.54	1.54×10^{-3}
5′	−1	0.75	−1.33	1.33×10^{-3}	14′	−1	0.70	−1.43	1.43×10^{-3}
6′	−1	0.7	−1.43	1.43×10^{-3}	15′	−1	0.75	−1.33	1.33×10^{-3}
7′	−1	0.65	−1.54	1.54×10^{-3}	16′	−1	0.80	−1.25	1.25×10^{-3}
8′	−1	0.60	−1.67	1.67×10^{-3}	17′	−1	0.85	−1.18	1.18×10^{-3}
9′	−1	0.25	−4.0	4.0×10^{-3}	18′	−1	0.90	−1.11	1.11×10^{-3}
10′	−1	0.10	−10	10×10^{-3}	19′				

故通过整个渗流区的流量为：

$$q=k\frac{(n-1)H\Delta b}{(m-1)\Delta s}=10^{-3}\times\frac{(7-1)\times18\times0.9}{(19-1)\times0.9}$$

$$=6\times10^{-3}\text{cm}^3/\text{s}$$

206 图示为某闸基地下轮廓的渗流流网，土壤渗透系数



题 206 图

$k=4\times10^{-4}$cm/s。

（1）指出那些是边界流线，那些是边界等水头线，并求单宽渗流量q。

（2）求出B点压强水头$\frac{p_B}{\gamma}$的数值。

解：

（1）边界流线，边界等水头线，单宽流量

边界流线是$ACDE$和MN

边界等水头线是AG和EF

单宽流量：有流线5条，$n=5$，有等势线11条，$m=11$，$\Delta s=\Delta b$

$$q=\frac{k(n-1)H\Delta b}{(m-1)\Delta s}=\frac{4\times10^{-4}\times(5-1)\times600}{11-1}$$

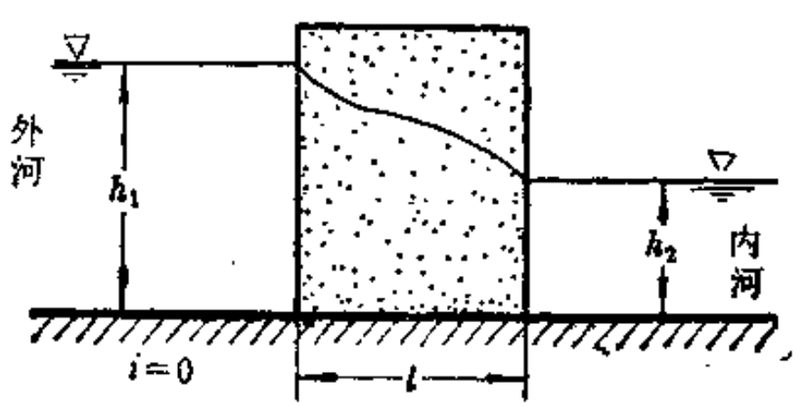
$$=9.6\times10^{-2}\text{cm}^3/\text{s-cm}$$

（2）B点压强水头

$$\frac{p_B}{\gamma}=8+(347-343)-5\times\frac{H}{m-1}$$

$$=12-5\times\frac{6}{11-1}=9\text{ m}$$

207 有一如图所示的矩形断面土堤，将内外两河分开，土堤宽度$l=20$m，土堤长（垂直于纸面方向）为100m，外河水深$h_1=5$m，内河水深$h_2=1$m，土堤的渗透系数$k=5\times10^{-3}$m/s，试计算由外河向内河经过土堤的渗透流量$Q=$？



题 207 图

解：

根据渗流的达西公式

$$Q=-kA\frac{dh}{dl}$$

$$=-kbh\frac{dh}{dl}$$

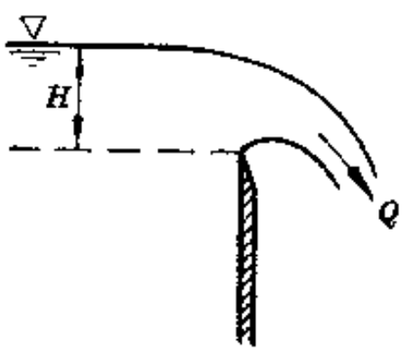
$$Q\int_0^l dl=-kb\int_{h_1}^{h_2}hdh$$

积分整理得

$$Q=\frac{kb}{2l}(h_1^2-h_2^2)=\frac{5\times10^{-3}\times100}{2\times20}(5^2-1^2)$$

$$=0.3\ \mathrm{m^3/s}$$

208　试用量纲和谐原理（齐次性原则）建立直角三角形量水堰的流量计算关系式。假定流量Q与H、g之间的函数关系为一单项指数式。



题 208 图

解：

设　$Q=kH^xg^y$　　各物理量的量纲均用基本量纲$[L][T][M]$来表示。

根据量纲和谐原理

$$\because\quad Q=[H]^x[g]^y$$

$$\therefore\quad [L^3T^{-1}]=[L]^x[LT^{-2}]^y$$

对L：$3=x+y$

对T：$-1=-2y$

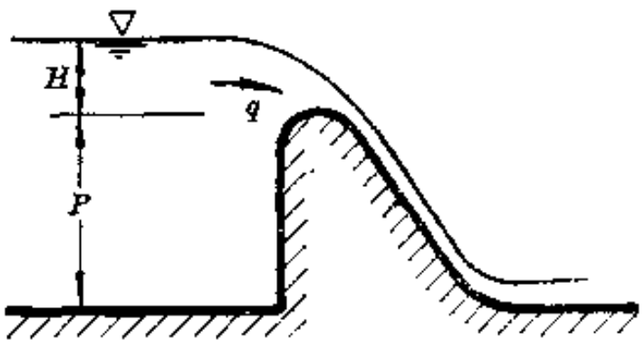
联解上述二式得

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

代入原式，得

式中$m=k/\sqrt{2}$。 $Q=kH^{5/2}g^{1/2}=m\sqrt{2g}H^{5/2}$

209 试用量纲分析原理导出图中的理想液体的堰流的单宽流量q的表达式$q=f\left(\dfrac{H}{p}\right)\sqrt{g}H^{3/2}$，式中$f\left(\dfrac{H}{p}\right)$为函数；$H$，$p$分别为堰上水深及堰高，$g$为重力加速度。



题 209 图

解：

（1）对理想液体堰流流量q与水头H，堰高P，重力加速度g，密度ρ有关，写出函数关系式为

$$q=f(H,P,\rho,g)$$

（2）选H，g，ρ为三个基本物理量，并检查是否为独立的变量

$$\because \quad [H]=[L^1T^0M^0]$$
$$[g]=[L^1T^{-2}M^0]$$
$$[\rho]=[L^{-3}T^0M^1]$$

则
$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$$

故是独立的变量。

（3）写出 $(k+1)-m=(4+1)-3=2$ 个无量纲 π 项

$$\pi=\frac{q}{H^{x}g^{y}\rho^{z}}$$

$$\pi_4=\frac{P}{H^{x_4}g^{y_4}\rho^{z_4}}$$

写出量纲方程，由量纲和谐法则求出指数 x、y、z。

$$[q]=[H]^{x}[g]^{y}[\rho]^{z}$$

$$[L^2T^{-1}M^0]=[L]^{x}[L^1T^{-2}M^0]^{y}[L^{-3}T^0M^1]^{z}$$

对于 L：$x+y-3z=2$

对于 T：$-2y=-1$

对于 M：$z=0$

联解以上方程得

$$\begin{cases} z=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

故

$$\pi=\frac{q}{H^{\frac{3}{2}}g^{\frac{1}{2}}}$$

同理求 π_4

$$[P]=[H]^{x_4}[g]^{y_4}[\rho]^{z_4}$$

$$[L^1T^0M^0]=[L]^{x_4}[L^1T^{-2}M^0]^{y_4}[L^{-3}T^0M^1]^{z_4}$$

对于 L：$x_4+y_4-3z_4=1$

T：$-2y_4=0$

M：$z_4=0$

联解以上方程，得

$$\begin{cases} z_4=0 \\ y_4=0 \\ x_4=1 \end{cases}$$

故

$$\pi_4=\frac{P}{H}$$

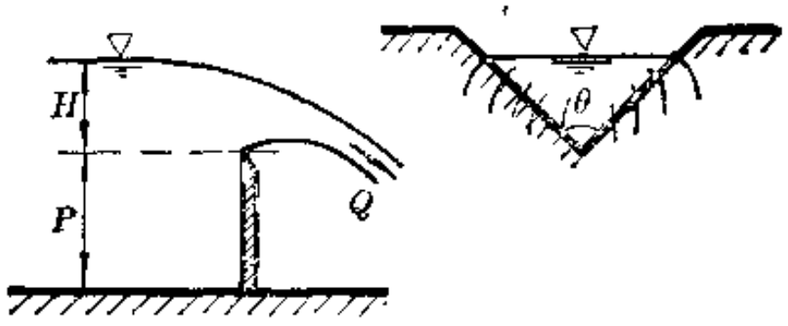
（4）写出 π 定理方程式

$$\pi=f(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4)$$

$$\because \quad \frac{q}{H^{3/2}g^{1/2}}=f\left(\frac{P}{H}\right)$$

$$\therefore \quad q=f\left(\frac{P}{H}\right)\sqrt{g}H^{3/2}$$

210　设有一对称的三角形薄壁堰，夹角为θ，如图所示。根据试验分析认为流量Q和堰顶水头H，重力加速度g，水的密度ρ及动力粘滞系数μ，表面张力系数σ有关，试用π定理确定三角形薄壁堰流量公式的基本形式。



题 210 图

解：

（1）写出三角堰流量Q与其它诸变量的函数关系

$$Q=f(H、g、\rho、\mu、\sigma)$$

（2）从函数式中的6个物理量中选出3个物理量作为基本物理量（如选H、g、ρ），并检查这三个物理量是否为独立变量。其方法是看这三个变量的量纲的指数所组成的行列式是否为零。

即

$$[H]=[L^1T^0M^0]$$

$$[g]=[L^1T^{-2}M^0]$$

$$[\rho]=[L^{-3}T^0M^1]$$

指数行列式为

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2$$

因$\triangle\neq 0$，故选择的三个物理量是独立的变量

（3）求无量纲数π

流量公式中共有6个变量，选择3个变量为基本变量后，尚

可用3个无量纲数π组成的关系式来表达，其无量纲数为

$$\pi=\frac{Q}{H^{x}g^{y}\rho^{z}}$$

$$\pi_{4}=\frac{\mu}{H^{x_4}g^{y_4}\rho^{z_4}}$$

$$\pi_{5}=\frac{\sigma}{H^{x_5}g^{y_5}\rho^{z_5}}$$

分别用Q，μ，σ的量纲和谐规则来求出指数x_k，y_k，z_k，

① $$[Q]=[H]^{x}[g]^{y}[\rho]^{z}$$

$$[L^{3}T^{-1}M^{0}]=[L^{1}]^{x}[L^{1}T^{-2}]^{y}[M^{1}L^{-3}]^{z}$$

对于L：$x+y-3z=3$

T：$-2y=-1$

M：$0=z$

联解上列方程，得

$$\begin{cases}z=0\\ y=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

故 $$\pi=\frac{Q}{H^{5/2}g^{1/2}}$$

② $$[\mu]=[H]^{x_4}[g]^{y_4}[\rho]^{z_4}$$

$$[L^{-1}T^{-1}M^{-1}]=[L^{1}]^{x_4}[L^{1}T^{-2}]^{y_4}[L^{-3}M^{-1}]^{z_4}$$

对于L：$x_4+y_4-3z_4=-1$

T：$-2y_4=-1$

M：$z_4=1$

联解求得

$$\begin{cases}z_4=1\\ y_4=\dfrac{1}{2}\\ x_4=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

故 $$\pi_4=\frac{\mu}{\rho H^{3/2}g^{1/2}}$$

③同理可算出 $$\pi_5=\frac{\sigma}{\rho H^2 g}$$

（4）写出无量纲数π表达的流量关系式

$$\pi=f(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4,\ \pi_5)$$

$$\frac{Q}{H^{5/2}g^{1/2}}=f\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{\mu}{\rho H^{3/2}g^{1/2}},\ \frac{\sigma}{\rho H^2 g}\right)$$

于是 $$Q=\sqrt{g}\,H^{5/2}f\left(\frac{\mu}{\rho H^{3/2}g^{1/2}},\ \frac{\sigma}{\rho H^2 g}\right)$$

式中 $$\frac{\rho H^{3/2}g^{1/2}}{\mu}=\frac{\sqrt{gH}\cdot H\rho}{\mu}=\frac{vH}{\nu}=\mathrm{Re}\text{为雷诺数}$$

$$\frac{\rho H^2 g}{\sigma}=\frac{\rho H\cdot(gH)}{\sigma}=\mathrm{We}\text{为韦伯数}$$

故 $$Q=\sqrt{2g}H^{5/2}f\left(\frac{1}{\mathrm{Re}},\ \frac{1}{\mathrm{We}}\right)$$

令函数 $$f\left(\frac{1}{\mathrm{Re}},\ \frac{1}{\mathrm{We}}\right)=m$$

则 $$Q=m\sqrt{2g}H^{5/2}$$

上式即为三角形薄壁堰流量公式的基本形式，式中流量系数m为雷诺数与韦伯数的函数，需要通过试验来确定。

211 深水重力表面波的传播速度v是波长L，水深h，水的密度ρ，以及重力加速度g的函数。试用π定理确定v与其它变量的函数关系。并以尽可能简单的形式表示。

解：

由题可知重力表面波的传播速度公式可写成下面的一般函数式

$$v=f(L,\ h,\ \rho,\ g) \qquad (1)$$

今选择L，ρ，g三个物理量作为基本物理量，则（1）式可用2个无量纲数组成的关系式来表达。其无量纲数π为

$$\pi=\frac{v}{L^x\rho^y g^z} \qquad (2)$$

$$\pi_4=\frac{h}{L^{x_4}\rho^{y_4}g^{z_4}} \qquad (3)$$

由基本物理量所组成的无量纲数均等于1，

即 $$\pi_1=\pi_2=\pi_3=1$$

因π，π_4均为无量纲数，故（2）、（3）式的右端分子与分母的量纲应相等，即

$$[v]=[L]^x[\rho]^y[g]^z$$

上式中各物理量的量纲均用$[L][M][T]$表示。

有 $$\left[\frac{L}{T}\right]=[L]^x\left[\frac{M}{L^3}\right]^y\left[\frac{L}{T^2}\right]^z$$

$$=[L]^{x-3y+z}[M]^y[T]^{-2z}$$

上式等号两边相同量纲的指数应相等

对L而言 $1=x-3y+z$

对M而言 $0=y$

对T而言 $-1=-2z$

解方程组，得 $$x=\frac{1}{2}$$

$$y=0$$

$$z=\frac{1}{2}$$

故 $$\pi=\frac{v}{L^{1/2}g^{1/2}}$$

同理可求得

$$\pi_4=\frac{h}{L},\ \text{而}\ \pi_1=\pi_2=\pi_3=1$$

根据π定理

$$\pi=f(1,\ 1,\ 1,\ \pi_4)$$

即 $$\frac{v}{\sqrt{gh}}=f\left(\frac{h}{L}\right)$$

或 $$v=\sqrt{gh}\,f\left(\frac{h}{L}\right)$$

212 船体的阻力与什么因素有关？根据量纲分析确定阻力系数的表达式，阻力相似的条件是什么？

解：

浮船在水中行驶时，水对船体的阻力由三部份组成的，即表面摩擦阻力，压力阻力和波阻力。所以船体的阻力F_d与速度v，特征长度L，密度ρ，动力粘滞系数μ和重力加速度g等因素有关。各变量间的函数关系式为

$$F(F_d,\ v,\ L,\ \rho,\ \mu,\ g)=0$$

各变量的量纲为

	F_d	v	L	ρ	μ	g
M	1	0	0	1	1	0
L	1	1	1	−3	−1	1
T	−2	−1	0	0	−1	−2

由表中指数可知，各变量中含有M、L、T三个基本量纲，又v，L，ρ三个自变量的指数所组成的行列式不为零，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \neq 0$$

故选择v、L、ρ为三个基本物理量，总物理量数目$n=6$，基本物理量数目$m=3$，无量纲组合数目为$n-m=3$，由π定理得

$$F(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3)=0$$

计算π_1：

$$\pi_1 = F_d v^{x_1} \cdot L^{y_1} \cdot \rho^{z_1}$$

$$[M^0L^0T^0]=[MLT^{-2}][LT^{-1}]^{x_1}[L]^{y_1}[ML^{-3}]^{z_1}$$

根据量纲和谐原则，等式两端M，L、T的幂相等。

对M：　　$0=1+z_1$

对L：　　$0=1+x_1+y_1-3z_1$

对T：　　$0=-2-x_1$

联立求解，得$x_1=-2$，$y_1=-2$，$z_1=-1$

则 $$\pi_1=\frac{F_d}{\rho v^2L^2}$$

计算π_2

$$\pi_2=\mu v^{x_2}L^{y_2}\rho^{z_2}$$

$$[M^0L^0T^0]=[ML^{-1}T^{-1}][LT^{-1}]^{x_2}[L]^{y_2}[ML^{-3}]^{z_2}$$

根据量纲和谐的原则，M、L和T的幂相等。

对M： $0=1+z_2$

对L： $0=-1+x_2+y_2-3z_2$

对T： $0=-1-x_2$

联立求解，得 $x_2=-1$，$y_2=1$，$z_2=-1$

则 $$\pi_2=\frac{\mu}{\rho vL}=\frac{1}{\mathrm{Re}}$$

计算π_3

$$\pi_3=gv^{x_3}L^{y_3}\rho^{z_3}$$

$$[M^0L^0T^0]=[LT^{-2}][LT^{-1}]^{x_3}[L]^{y_3}[ML^{-3}]^{z_3}$$

根据量纲和谐的原则，M，L，T的幂相等。

对M： $0=z_3$

对L： $0=1+x_3+y_3$

对T： $0=-2-x_3-3z_3$

联立求解，得 $x_3=-2$，$y_3=1$，$z_3=0$

则 $$\pi_3=\frac{Lg}{v^2}=\frac{1}{\mathrm{Fr}^2}$$

要求的关系式为

$$\frac{F_d}{\rho v^2L^2}=\mathrm{F}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}},\ \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}\right)$$

因F是未知函数，故可以把上式写成

$$\frac{F_d}{\rho v^2L^2}=F'(\mathrm{Re},\ \mathrm{Fr}^2)$$

令 $F'(\mathrm{Re},\ \mathrm{Fr}^2)=C_d$

C_d为无量纲数，称阻力系数，它与雷诺数Re及佛汝德数Fr有关。

故 $$\frac{F_d}{\rho v^2L^2}=C_d$$

从阻力公式可以看出，阻力相似的条件，应满足原型和模型的雷诺数Re，佛汝德数Fr相等。但在一个模型上要同时满足雷诺数准则和佛汝德准则相似是很困难的。所以在实际进行船体模型试验中，由于原型螺旋桨转动时，流动的雷诺数已足够大，这时阻力相似已不必要求雷诺数相等（即起主要作用的力不是粘滞力，而是重力），在模型中雷诺数Re大到足以使模型中的阻力也与雷诺数无关，可以按重力准则设计模型，即按佛汝德数准则设计模型，仍可以满足工程需要。

213 有一长500m，直径5m的泄洪隧洞，洞中水流属紊流粗糙区，现需进行模型试验。要求：（1）说明按何种相似准则设计模型，并写出其相似准则表达式；

（2）按相似准则导出流速、流量、力及糙率比尺的表达式。

解：

（1）应按阻力相似准则设计模型。因为水流在紊流粗糙区，只要模型与原型的相对粗糙度相等，就可采用佛汝德数相似准则设计阻力相似模型。其表达式为

$$\frac{v_P^2}{g_P L_P} = \frac{v_M^2}{g_M L_M}$$

（2）

①流速比尺 $\lambda_v = \dfrac{v_P}{v_M} = \sqrt{\dfrac{g_P L_P}{g_M L_M}}$

$\because$ $g_P = g_M$

$\therefore$ $\lambda_v = \lambda_L^{0.5}$

②流量比尺 $\lambda_Q = \dfrac{Q_P}{Q_M} = \dfrac{A_P v_P}{A_M v_M} = \lambda_L^2 \lambda_L^{0.5} = \lambda_L^{2.5}$

③力的比尺 $\lambda_F = \dfrac{M_P a_P}{M_M a_M} = \dfrac{\rho_P V_P \left(\dfrac{dv}{dt}\right)_P}{\rho_M V_M \left(\dfrac{dv}{dt}\right)_M} = \lambda_\rho \lambda_L^3$

若模型和原型液体一样，$\lambda_\nu=1$，则$\lambda_F=\lambda_L^3$

④糙率比尺 $\lambda_n=\dfrac{n_P}{n_M}=\dfrac{\frac{1}{C_P}R_P^{1/6}}{\frac{1}{C_M}R_M^{1/6}}=\dfrac{\lambda_L^{1/6}}{\lambda_C}$

因模型与原型的相对粗糙相等，对于紊流粗糙区，$\lambda_C=1$，所以$\lambda_n=\lambda_L^{1/6}$。

二　思考题

214　判断下列各题（在对的答案处打√）。

（1）一输水管道，在流量和温度一定时，随着管径的加大，水流的雷诺数就

①加大，　√②减小，　③不变，　④不定。

（2）在管流中，紊流时的断面流速分布符合

①均匀规律，　②直线变化规律，　③抛物线规律，

√④对数曲线规律。

（3）在二元平面流动中两个流函数之差等于

①流线方程，　②两流线间的流速差，　③两流线间的压差，　√④两流线间的单宽流量。

（4）两个水流力学相似的必要和充分条件是

①佛汝德数相等，　②雷诺数相等，　③牛顿数相等，

④斯特罗哈数相等。

（5）当水流条件一定时，随着液体动力粘性系数μ的加大，紊流附加切应力就

①加大，　②减小　√③不变，　④不定。

215

（1）某管道长$l=1000\text{m}$，突然关闭出口阀门时，产生水击，若关门时间为$t=1\text{s}$，水击波传播速度$a=1000\text{m/s}$时，则产生<u>直接</u>水击。

（2）若已算得消力池挖池以后的跃后水深h_c''，如下游水深$h_t=3\text{m}$，当不计消力池出口落差Δz，取水跃淹没系数$\sigma'=1.05$，则消力池深度$d=$<u>$1.05h_c''-3$</u>。

（3）某挡水坝上下游水头差为10m，地下轮廓线下已绘制成曲边正方形的流网，若流网有17根等势线和6根流线，渗流系数$k=5\times10^{-5}\text{cm/s}$，则坝底下单位宽度的渗流量

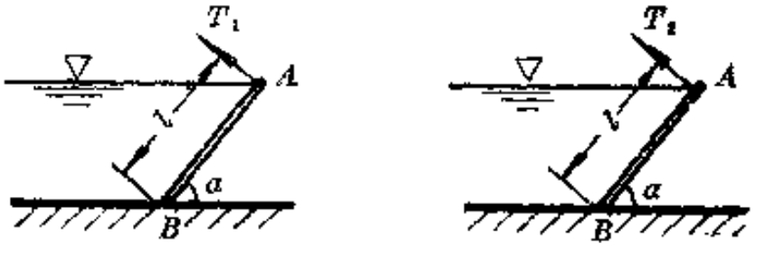
$q =$ $1.56\times10^{-3}\text{cm}^2/\text{s-cm}$。

（4）某模型试验按重力相似准则设计，模型比为1:100，如测得模型中某点速度$u_M=0.5\text{m/s}$，则原型中对应点的流速$u_P=$ 5m/s。

216 有两个单面承受水压力的挡水板，如题216图a、b所示，一为矩形，一为圆形，二面积相等，均为A，试回答下列问题：

（1）作用在二者上的静水总压力是否相等？各等于多少？

（2）垂直于挡水板的拉力T_1，T_2是否相等，为什么？（假设挡水板的重量相同，设为G，不要求计算T_1和T_2的值）



(a)　　题216图　　(b)

解：

（1）求作用在两挡水板上的静水总压力

对矩形挡水板

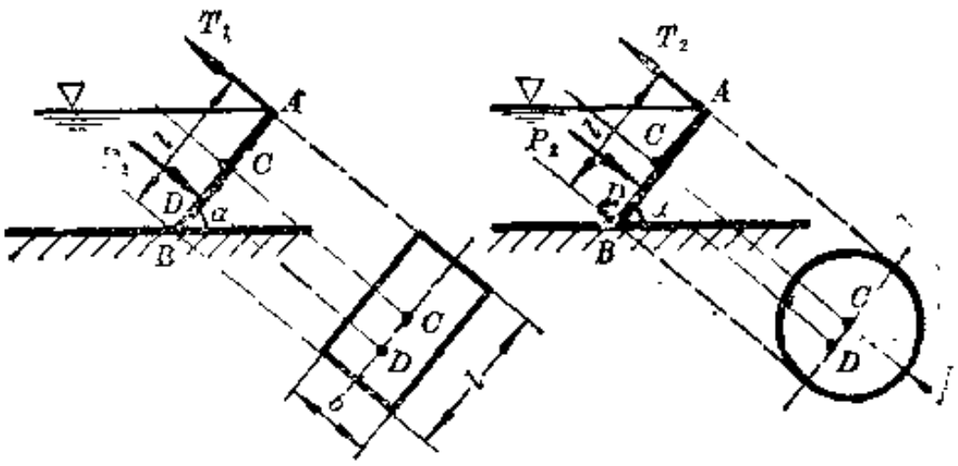
$$P_1=\gamma h_{c1}A=\frac{1}{2}\gamma Al\sin\alpha$$

对圆形挡水板

$$P_2=\gamma h_{c2}A=\frac{1}{2}\gamma Al\sin\alpha$$

因两板面积相等，倾角α和闸门高l相同，所以作用于两挡水板上的静水总压力P_1和P_2相等。

（2）垂直于两挡水板的拉力T_1与T_2不相等，因为作用于两挡水板的静水总压力虽然相等，但其压力中心不等，P_1及P_2的作



(a) 解 216(a) 图 (b)

用点距A点的距离分别为

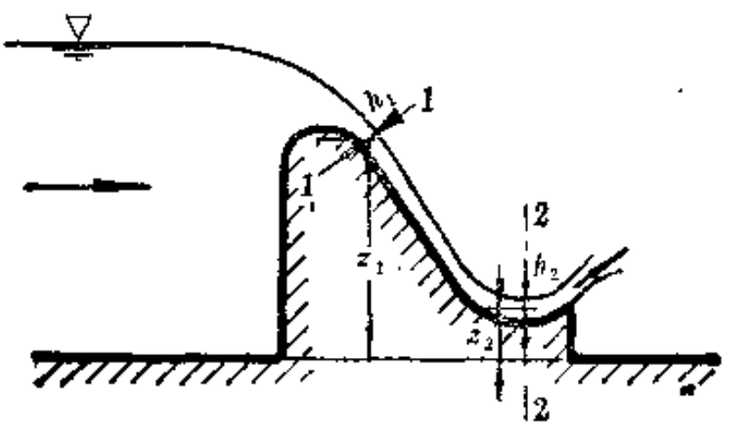
$$L_{D1}=\frac{2}{3}l$$

$$L_{D2}=L_c+\frac{I_c}{L_cA}=\frac{l}{2}+\frac{\frac{\pi}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^4}{\frac{l}{2}\times\frac{\pi}{4}l^2}=\frac{5}{8}\,l$$

故 $L_{D1}>L_{D2}$

两挡水板的重量相等，重心距B点的垂距也相等，则作用于挡水板上的诸力分别对B点取矩（$\Sigma M_B=0$），可得出T_1小于T_2。

217 如果在下图所示的滚水坝上恒定泄流断面1--1及断面2--2应用伯诺里方程，应作那些修正？并写出符合这种边界条件下的



题 217 图

能量方程式（方程式中的压强项应分别以断面1-1和断面2-2上的水深h_1和h_2表示）

解：

总流能量方程式的表达式为

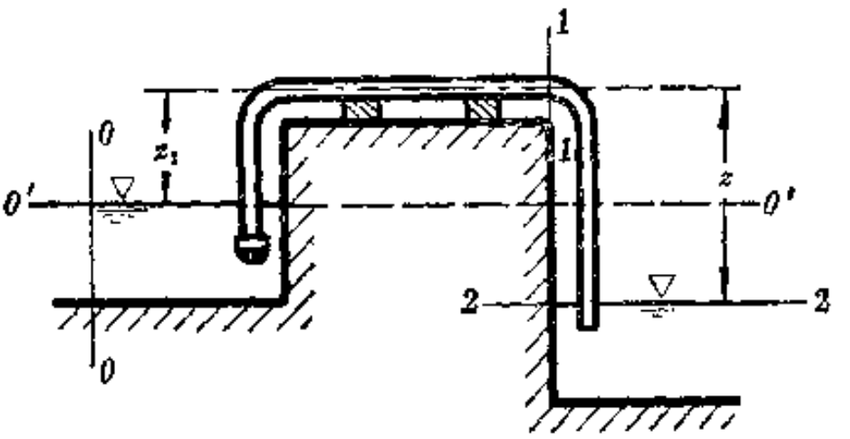
$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

在溢水坝的*1-1*断面和2-2断面应用能量方程时，由于2-2断面不是渐变流，在该断面上因离心惯性力的作用，动水压强不符合静水压强分布规律，断面上各点的$z+\frac{p}{\gamma}$不等于常数。由于2-2断面水股弯曲向下，离心力的作用将使该断面上动水压强比静水压强大，所以能量方程应作如下修改：

2-2断面上各点的$z+p/\gamma$值用平均值$\overline{z_2+p_2/\gamma}=z_2+\beta h_2$表示，$\beta$为大于1的系数，故能量方程可表示为

$$z_1+h_1\cos\alpha+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\beta h_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

218 分析某虹吸管路中哪个断面的平均压强最小，并说明理由。



题 218 图

解：

如图所示，以0′-0′为基准面，对0-0和1-1两断面写能量方程式

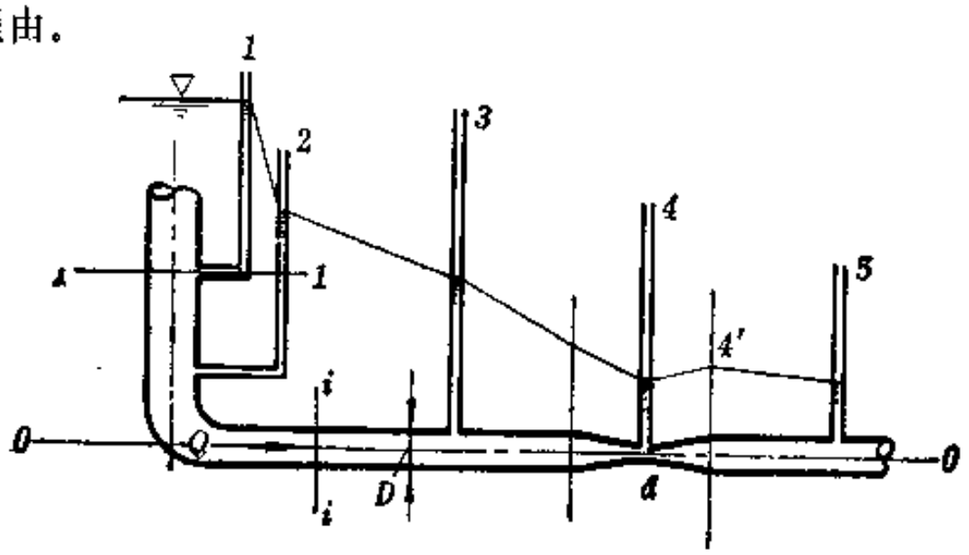
$$0=z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+h_w$$

则
$$\frac{p_1}{\gamma}=-\left(z_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+h_w\right)$$
$$=-\left(z_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v_1^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v_1^2}{2g}\right)$$
$$=-\left[z_1+\frac{v_1^2}{2g}\left(\alpha_1+\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\right]$$

由上式可知，在Q，d 和 λ 一定的情况下，要使$\frac{p_1}{\gamma}$最小，公式右端的绝对值应最大。当在*1-1*断面处时，公式右端的绝对值为最大。因为*1-1*断面以后各断面，z 减小，l 和 $\Sigma\zeta$增加，但是$\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{v_1^2}{2g}$的增加值与$z_1$的减小值相比，仍然是微不足道的。所以，在这种虹吸管装置中，最大的负压一定是发生在虹吸管顶部第二个弯头前*1-1*断面处。

219　回答下列两问题：

（1）定性绘出图中测压管 2、3、4、5 中的水位，并说明理由。



题 219(a) 图

解：

如图所示，以水平管轴中心线*0-0*为基准面，对 *1-1* 和 *i-i*断面写能量方程式

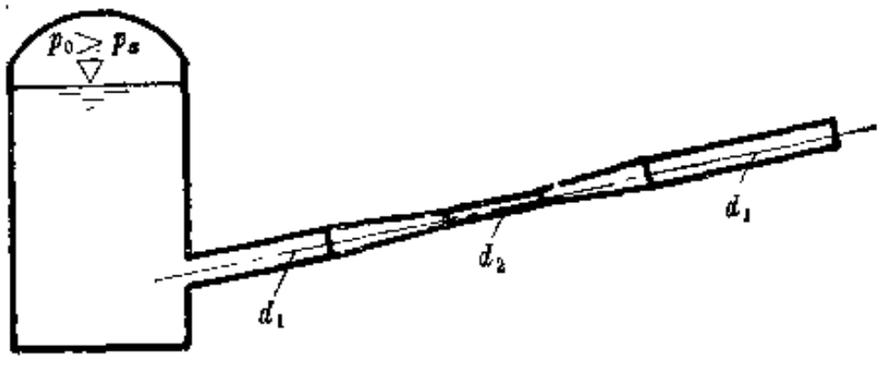
$$H+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=0+\frac{p_i}{\gamma}+\frac{v_i^2}{2g}+h_{f_i}+h_{j_i}$$

则

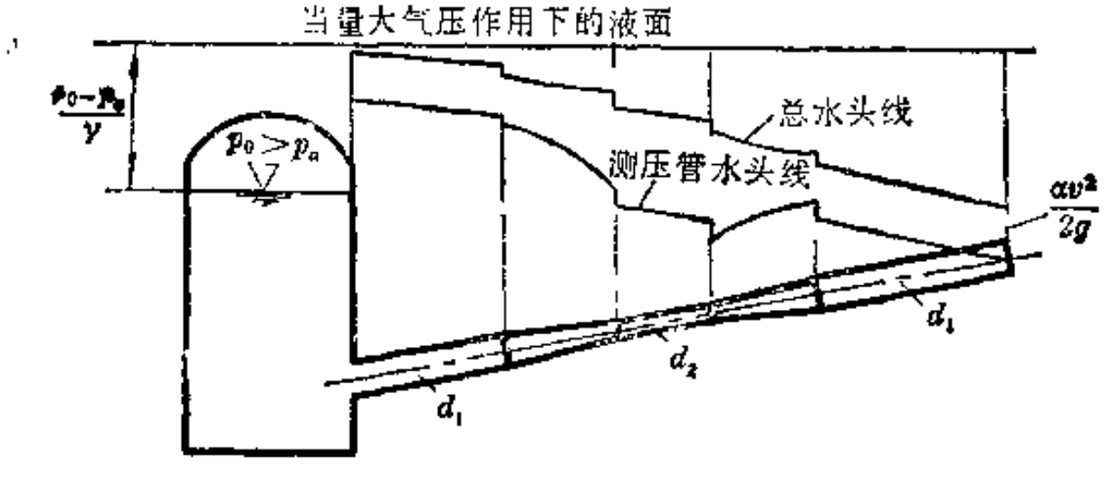
$$\frac{p_i}{\gamma}=\left(H+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}\right)-\left(\frac{v_i^2}{2g}+h_{fi}+h_{ji}\right)$$

由上式可知，当$\left(H+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}\right)$一定时，$\frac{p_i}{\gamma}$则随$\left(\frac{v_i^2}{2g}+h_{fi}+h_{ji}\right)$的增大而减小，所以，2、3、4号测压管液面沿程下降。

在4号测压管处，管径减为最小（设为d），流速v_4最大，则动能$\frac{v_4^2}{2g}$也最大，加之h_{f4}和h_{j4}增大，故$\frac{p_4}{\gamma}$最小，4号测压管液面降至最低。由喉管管径d逐渐扩大到直径D，动能逐渐减小，压能逐渐增大，测压管液面略有回升，直到渐变出口为止（如图4'点），以后测压管水头线又随h_f的增加而均匀地下降至5号测压管液面为止。



题 219(b) 图



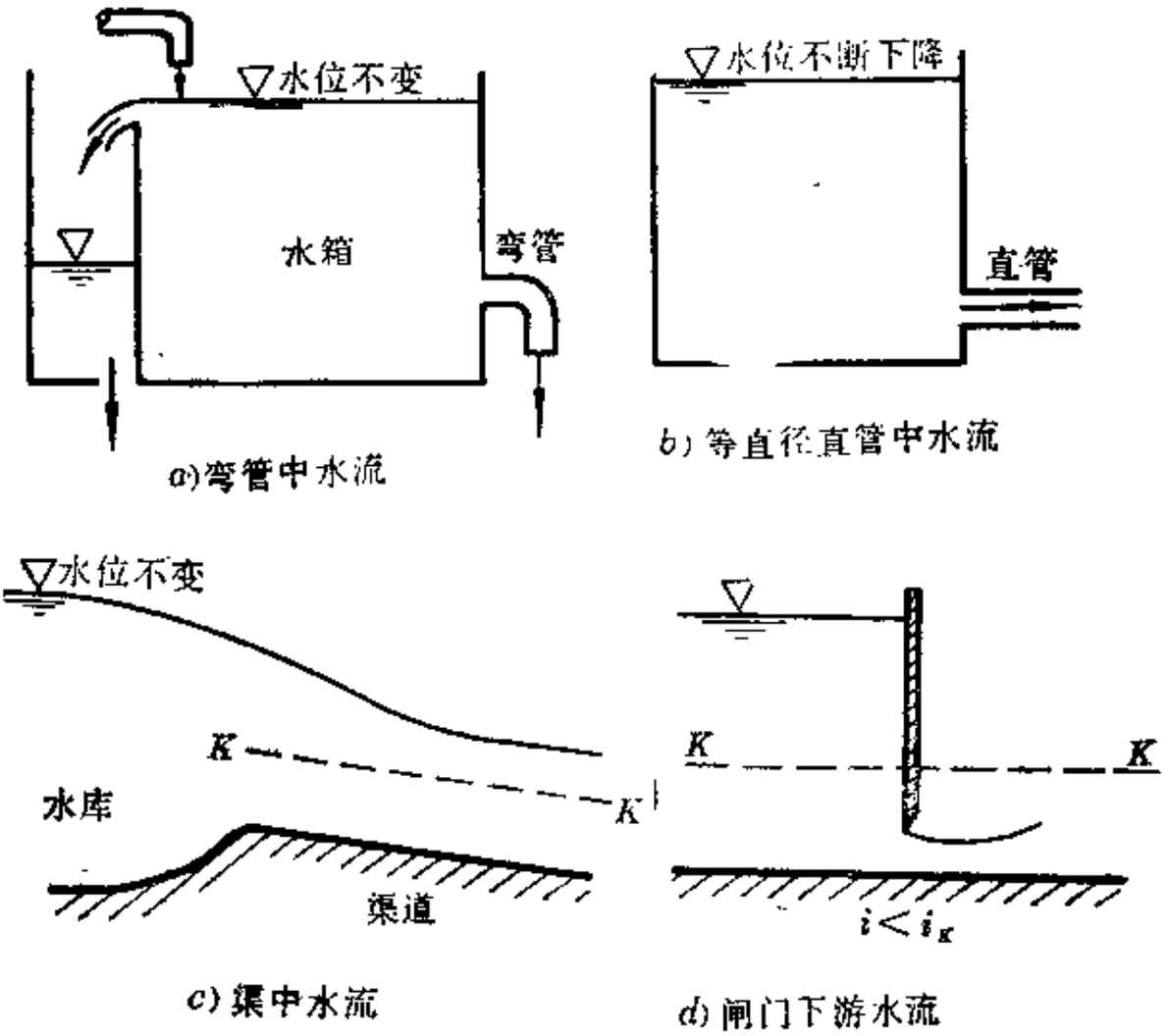
解 219(b)图

（2）定性画出管道的总水头线和测压管水头线，封闭容器中的p_0大于大气压强p_a，大管管径d_1，小管管径d_2，大小管以渐变段相连。

解：

绘制总水头线与测压管水头线如图所示。因容器中的$p_0>p_a$，所以容器中液面各点的测压管高度应高出原液面$\frac{p_0-p_a}{\gamma}$m。

220 指出下列各图中的水流属于何种流动：恒定流或非恒定流，均匀流或非均匀流，缓流或急流，并分别说明其迹线与流线是否重合。



a)弯管中水流　b)等直径直管中水流

c)渠中水流　d)闸门下游水流

题 220图

解

（1）弯管中水流：由于水箱水位不变，经过弯管水流流线

不是平行的直线故为恒定非均匀流，流线与迹线重合。

（2）等直径直管中水流：因为水箱水位不断下降，直管中断面平均流速随时间变化，直管中水流为非恒定非均匀流，流线与迹线不重合，若管道为刚性材料，水箱水位下降过程中，管道无变形，直管中水流为非恒定瞬时均匀流，流线和迹线重合。

（3）渠中水流：水库水位不变，由水库进入渠道中的水流、流线不相互平行，各断面水深大于临界水深，水流为恒定非均匀缓流，流线与迹线重合。

（4）闸门下游水流：闸前水位不变，闸下出流，闸后水深小于临界水深，闸门下游水流为恒定非均匀急流，流线与迹线重合。若闸前水位变化，闸下水流为非恒定非均匀急流，流线与迹线不重合。

221 回答下列问题：

（1）说明雷诺数Re，佛汝德数Fr的物理意义及其在水力学中的主要用途。

解：

（1）雷诺数Re的物理意义：它表征液流惯性力与粘滞力的对比关系，即$Re=v\cdot d/\nu$。在水力学中主要用它来判别液流的型态是层流还是紊流。

佛汝德数Fr的物理意义：它表征水流的惯性力和重力两种作用力的对比关系。其能量意义是表示过水断面单位重量液体平均动能与平均势能之比的二倍开平方，即$Fr=\sqrt{2\frac{\frac{v^2}{2g}}{h}}$。在水力学中主要用它来判别水流的流态是缓流、临界流或急流。

（2）何谓水力光滑管？何谓水力粗糙管？

解：

雷诺数较小时，粘性底层δ_0大于粗糙凸出高度Δ很多倍，凸出高度完全淹没在δ_0之中，边壁粗糙度对紊流不起任何作用，这

样的壁面称水力光滑面，具有这种性质的管道称水力光滑管。当雷诺数较大时，δ_0极薄，$\frac{\Delta}{\delta_0}>6$，此时，边壁的粗糙度对紊流已起主要作用，当紊流流核绕过凸出高度时形成小旋涡，造成较大阻力。这种面称水力粗糙面，具有这种性质的管道称水力粗糙管。

（3）管道中紊流状态下的恒定流动严格的说是属于定常流还是非定常流？工程上引用什么概念来简化这种流动？

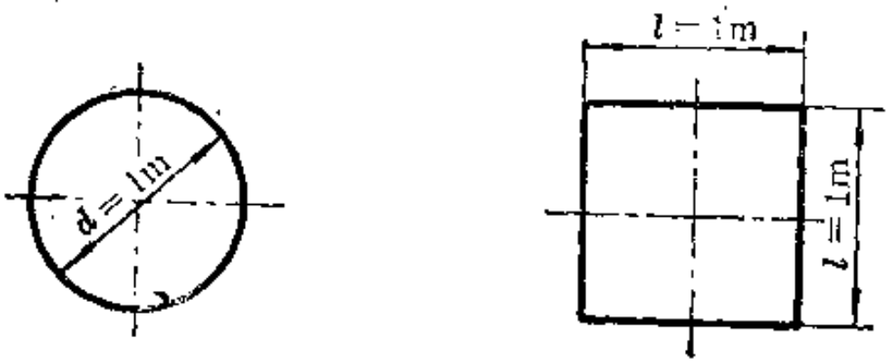
解：

管道中紊流状态下的恒定流动，严格的说是属于非定常流，因为紊流中某一空间点的流速是随时间而发生波动的。工程上引用时间平均概念来简化这种流动，在足够长的时间过程中，时间平均流速是保持不变的。

222 如图系两管流的过水断面形式。设两管道的管壁为同一材料，水流都为恒定流，流量一样，两管道中水流温度也一样。试回答下列问题：

（1）两管流的雷诺数是否一样？如不一样，何者大？临界雷诺数是否一样，为什么？

（2）分别就紊流光滑区、粗糙区比较两管流谢才系数C的大小。



题 222图

解：

（1）两管流的雷诺数比较

圆管的雷诺数 $\mathrm{Re}=\frac{vR}{\nu}$

$$=\frac{\frac{4Q}{\pi d^2}\cdot\frac{d}{4}}{\nu}$$

$$=\frac{Q}{\pi d\nu}$$

方管的雷诺数 $$\mathrm{Re}=\frac{vR}{\nu}$$

$$=\frac{\frac{Q}{l^2}\times\frac{l}{4}}{\nu}$$

$$=\frac{Q}{4l\nu}$$

题给两管的Q、ν相同，$d=l=1\mathrm{m}$，故圆管的雷诺数比方管的雷诺数大，且为方管的$\frac{4}{\pi}$倍。

两管的临界雷诺数Re_K不一样大，对圆管，临界雷诺数$\mathrm{Re}_K=2000$；对于方管，由于边界形状不同，有不同的临界雷诺数值。

（2）紊流光滑区和粗糙区的两管流谢才系数C的大小比较：

在紊流光滑区，沿程阻力系数λ可采用伯拉修斯公式计算

$$\lambda=\frac{0.3164}{\mathrm{Re}^{1/4}} \qquad (1)$$

谢才系数C与沿程阻力系数λ之间具有下列关系

$$C=\sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \qquad (2)$$

将（1）式代入（2）式得

$$C=\sqrt{\frac{8g}{\frac{0.3164}{\mathrm{Re}^{1/4}}}}=15.75\mathrm{Re}^{1/8}$$

由上式可知，谢才系数C与雷诺数Re成比例．当Re增大，C也随之增大。在题给条件下，由（1）可知，圆管的雷诺数比

方管的雷诺数大，所以，圆管的谢才系数大于方管的谢才系数。

在紊流粗糙区，谢才系数C用满宁公式计算

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}$$

圆管的水力半径 $R=\frac{d}{4}=\frac{1}{4}\text{m}$

方管的水力半径 $R=\frac{A}{\chi}=\frac{l^2}{4l}=\frac{l}{4}=\frac{1}{4}\text{m}$

由于两管的n、R大小相同，故谢才系数C相等。

223 判断下列诸式各适用于何种流动型态？并属于何种流区？

（1） $$F=6\pi R\mu u$$

F为阻力；μ为动力粘滞系数；R为球半径；u为球在水中的运动速度。

（2） $$u=K\frac{h_w}{l}$$

u为流速；l为流动距离；h_w为该距离内的水头损失；k为常数。

（3） $$h_f=(v^2n^2l)/R^{4/3}$$

v为断面平均流速；n为糙率；R为水力半径；l为流动距离，h_f为该距离内的沿程水头损失。

（4） $$\tau=\rho\frac{A}{\text{Re}^{0.25}}\frac{v^2}{8}$$

τ为切应力；ρ为密度；v为断面平均流速；A为常数；Re为雷诺数。

解：

（1） $$F=6\pi R\mu u$$

根据斯托克斯公式，球体在层流中所受的阻力为：

$$F=3\pi\mu uD$$
$$=6\pi\mu uR$$

故该式适用于层流区。

（2） $$u=K\frac{h_w}{l}$$

该式为渗流的基本公式——达西公式，适用于层流渗流。

（3）　　$h_f=(v^2n^2l)/R^{4/3}$

上式可变换为

$$J=\frac{v^2}{\frac{1}{n^2}R^{4/3}}$$

$$v=\frac{1}{n}R^{1/6}\sqrt{RJ}$$

$$=C\sqrt{RJ}$$

该式为明渠均匀流基本公式——谢才公式，适用于均匀流阻力平方区。

（4）　　$\tau=\rho\frac{A}{\mathrm{Re}^{0.25}}\frac{v^2}{8}$

根据边壁切应力$\tau_0=\frac{\lambda}{8}\rho v^2$，两式比较可知$\lambda=\frac{A}{\mathrm{Re}^{0.25}}$，$\lambda$只与雷诺数有关，和伯拉修斯公式$\lambda=\frac{0.3164}{\mathrm{Re}^{0.25}}$相类似，该式适用于紊流光滑区。

224　已知某等径直管的管径d及管段长度l，管段两端各装一根测压管，要求：

（1）说明测量该管段沿程阻力系数的方法和步骤；

（2）若已测得三组流量和沿程水头损失的数据：Q_1、h_{f1}；Q_2、h_{f2}；Q_3、h_{f3}；应用这些数据，试举出两种方法来判别管中水流是否属于紊流粗糙区。

解：

（1）由达西公式知

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

则沿程阻力系数为

$$\lambda=\frac{2gdh_f}{lv^2}$$

测量λ的步骤：

①用重量法测出在Δt时间内从管中流出的水流重量W，由公式$Q=\frac{W}{\gamma\Delta t}$算出$Q$，再由流量公式$Q=vA=v\cdot\frac{\pi}{4}d^2$算出$v=\frac{4Q}{\pi d^2}$。

②测得管端两测压管的读数，二者读数之差即为h_f。

③将以上算出的v和h_f代入公式中，且d、l为已知，即可求出λ。

（2）①因为在管径d为定值的情况下，$Q\propto v$，所以将三组数据比较，若h_f与Q^2成正比，则管中水流为紊流粗糙区。

②若管中的水流属于紊流粗糙区，则λ与Re无关，而

$$\lambda=\frac{2gd}{lv^2}h_f,\quad v=\frac{\mathrm{Re}}{d}\nu$$

则
$$\lambda=\frac{2gd^3}{l\cdot\mathrm{Re}^2\nu^2}h_f$$
$$=\frac{2gd^3}{l\nu^2}\frac{h_f}{\mathrm{Re}^2}$$

令
$$C=\frac{2gd^3}{l\nu^2}\quad(C=\mathrm{const})$$

则
$$\lambda=C\frac{h_f}{\mathrm{Re}^2}$$

因为λ与Re无关，故$\frac{h_f}{\mathrm{Re}^2}$为定值

又因
$$\frac{h_f}{\mathrm{Re}^2}=\frac{h_f}{v^2d^2}\nu^2=\frac{\nu^2}{d^2}\frac{h_f}{\left(\frac{4}{\pi d^2}Q\right)^2}=\frac{\pi d^2}{4}\nu^2\frac{h_f}{Q^2}$$

所测得的三组数据中（水温不变），如果$\frac{h_f}{Q^2}=\mathrm{const}$我们便可判定水流属于紊流粗糙区，反之，则不是紊流粗糙区。

225 有一恒定管流，水流属紊流水力光滑区，设其他条件都不变（如管道长度l、管径d、糙率n），只是流量增至原来的两倍，问沿程水头损失增至原来的多少倍（设沿程阻力系数λ采

用 $\lambda=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}$)？

解：

根据达西公式，沿程水头损失为

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

式中 $$\lambda=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}$$

故
$$\begin{aligned}h_f&=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}\cdot\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\\&=\frac{0.3164}{\left(\frac{Qd}{A\nu}\right)^{1/4}}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2\\&=\frac{0.3164\nu^{1/4}\cdot l}{d^{5/4}\cdot 2g}\cdot\frac{Q^{7/4}}{A^{7/4}}\\&=\frac{0.016\nu^{1/4}\cdot l}{d^{5/4}\cdot A^{7/4}}\cdot Q^{7/4}\\&=KQ^{7/4}\end{aligned}$$

式中 $$K=\frac{0.016\nu^{1/4}\cdot l}{d^{5/4}\cdot A^{7/4}}$$

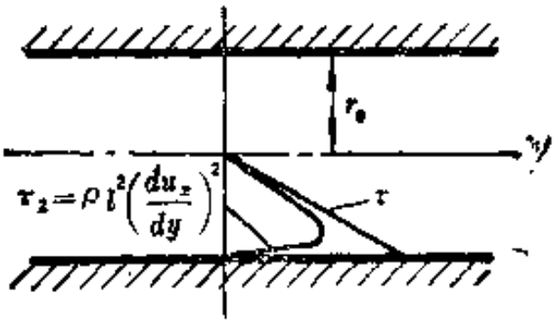
当l，d，ν一定时，K为常数，沿程损失h_f仅与流量Q有关。

若流量Q增至原来的两倍（l，d，ν，n不变），则

$$\begin{aligned}h_f&=K(2Q)^{7/4}=2^{7/4}KQ^{7/4}\\&=3.36KQ^{7/4}\end{aligned}$$

故沿程损失增至原来的3.36倍。

226 写出管道内紊流时均匀流动中全部切应力的表达式，并



解 226 图

画出其每一部分在断面上的定性分布图。

解：

紊流运动两流层之间的时均切应力 $\bar{\tau}$ 由两部分组成，第一部分为粘滞切应力 $\bar{\tau}_1 = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy}$；第二部分是由于脉动流速所产生的附加切应力 $\bar{\tau}_2 = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2$。因此紊流切应力表达式为

$$\bar{\tau} = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2$$

切应力在断面上的定性分布见解226图。

227 试由混合长度理论，从 $\tau = -\overline{\rho u_x' u_y'}$，推导二元流动的流速对数分布式，并阐明式中各项符号的意义。

解：

因 $$\tau = -\overline{\rho u_x' u_y'} \qquad (1)$$

式中 u_x'，u_y' 为脉动流速，必须先换为时均流速表达式，再进行积分，则可得对数流速公式。

根据混渗长度理论可得

$$\overline{|u_x'|} = \overline{\left| l_1 \cdot \frac{du_x}{dy} - u_{x_0}' \right|} = \bar{l}_1 \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

因在 y 方向的脉动流速 u_y' 的绝对值的时均值 $|u_y'|$ 与 $|u_x'|$ 相关联，且属于同一数量级，可令

$$|u_y'| = k_1 \cdot \overline{|u_x'|} = k_1 \times \bar{l}_1 \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

同时可认为 $|u_x' u_y'|$ 与 $\overline{|u_x'|}\,\overline{|u_y'|}$ 有一定比例关系，即

$$\overline{|u_x' \cdot u_y'|} = k_2 \overline{|u_x'|}\ \overline{|u_y'|}$$

$$= k_1 \cdot k_2 \bar{l}_1^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2$$

式中 k_1，k_2 均为比例系数，若令 $l^2 = k_1 \cdot k_2 \bar{l}_1^2$，称为混渗长度，则

$$|u_x' u_y'| = l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2$$

又因u_x'与u_y'的符号相反，其乘积永为负值，故$-\rho\overline{u_x'u_y'}$必定是正值。将以上结果代入（1）式，得

$$\tau=-\rho\overline{u_x'u_y'}=\rho l^2\left(\frac{d\overline{u}_x}{dy}\right)^2 \qquad (2)$$

又由试验得知：对于固体边界附近的流动有$l=\kappa y$（κ为卡门常数）。同时，试验结果也表明：在固体边壁附近$\tau=\tau_0=\text{const}$，τ_0为边界面上切应力，略去时均符号，并以$l=\kappa y$代入，（2）式可写成

$$\frac{du_x}{dy}=\frac{1}{\kappa y}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=\frac{u_*}{\kappa\cdot y} \qquad (3)$$

式中 $u_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$为阻力流速

积分（3）式得$u_x=\frac{u_*}{\kappa}\ln y+C$，若取$\kappa\approx0.4$，并将自然对数换成常用对数，即得二元流动的流速对数公式

$$u_x=5.75u_*\lg y+C$$

式中C为积分常数，由边界条件确定。

228 试从水流特点和沿程水头损失的规律等两方面说明层流和紊流的区别，并举例说明层流中有没有非恒定的急变流，紊流中有没有恒定的缓流？

解：

从水流特点看，液体流动时有两种不同的流态—层流、紊流。层流是当水流的流速很小时，各流层的液体质点呈现为有条不紊的，一层一层的向前流动，各流层之间质点互不混杂，运动要素没有脉动。紊流是当水流的流速较大时，各流层的液体质点形成涡体，在流动过程中质点互相混掺，运动要素随着时间而瞬息变化。

从水流的水头损失的规律看，层流和紊流水头损失规律有很大差异，就沿程水头损失而论，层流时，沿程水头损失与流速的一次方成比例；紊流时，沿程水头损失与流速的1.75～2次方成

比例。

层流中有非恒定的急变流，如上游水位变化的闸基板桩下的渗流就是层流非恒定急变流。紊流中有可能产生恒定的缓流，例如缓坡渠道上的均匀紊流为缓流。

229 若矩形断面明渠水流作均匀流，水深h_0为3.0m，而相应流量时的临界水深$h_K=1.5$m，问水流的佛汝德数Fr为多大？为什么？若这时糙率n变大，流量不变，Fr将增大还是减小？为什么？

解：

均匀流时水深　　$h_0=3.0$m

临界水深　　$h_K=1.5$m

因　$h_0>h_K$　故均匀流为缓流，$Fr<1$

根据均匀流公式：

$$q=h_0C_0\sqrt{R_0i}$$

$$=\frac{1}{n}R_0^{1/6}h_0\sqrt{R_0i}=\frac{1}{n}R_0^{2/3}h_0i^{1/2}$$

由上式可知，当q一定时，正常水深h_0随n的增加而增大，而水深增加时Fr减小，故糙率增大时，佛汝德数Fr将减小。

230 有一底坡为i的宽浅矩形明渠中的均匀流动，若流量Q变化时，问均匀流动的流态可能有何变化？

解：

对于宽浅式矩形明渠，如设$\alpha=1$，则临界坡度公式为

$$i_K=\frac{g}{C_K^2}=\frac{n^2g}{h_K^{1/3}}=\frac{n^2g^{10/9}}{q^{2/9}}$$

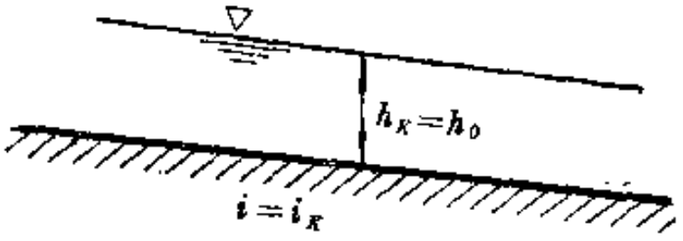
由上式可看出，i_K随着单宽流量q的增加而减小。当流量大到一定程度时可使$i>i_K$，则渠中均匀流为急流。所以，当渠中均匀流为缓流时，随着渠中流量的增大，渠中均匀流可由缓流经临界流而转为急流。同理，当渠中均匀流为急流时，随着渠中流量的

减小，均匀流可由急流经临界流转为缓流。

231 试举出在明渠中发生临界水深的四个实例，并用图标明临界水深的位置。

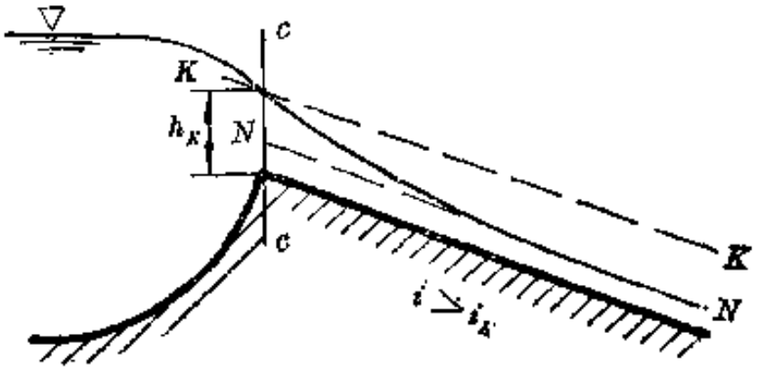
解：

（1）在底坡为临界坡度的渠中，均匀流水深为临界水深。



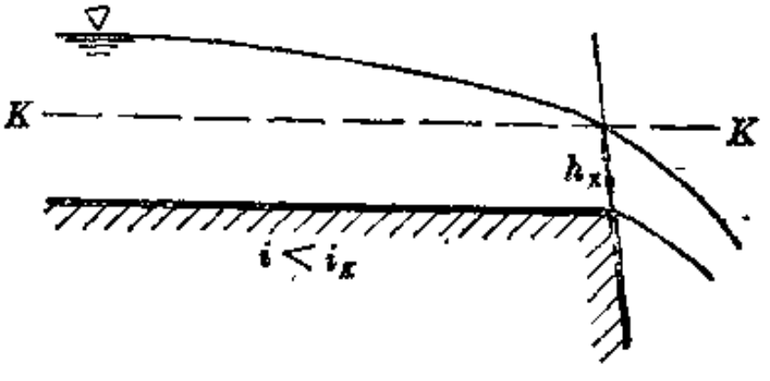
解 231(*a*)图

（2）当水流自水库进入陡坡渠道时，水流由缓流过渡到急流必经临界水深。



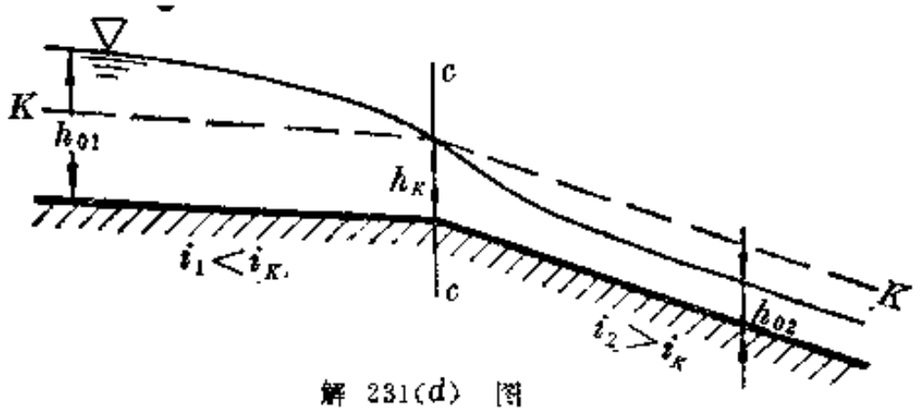
解 231(*b*)图

（3）当水流在缓坡渠道末端自由跌落时，坎上水深为临界水深。



解 231(*c*)图

（4）当缓坡渠道与陡坡渠道相连接时，水流由缓流过渡到急流必产生水跌，其间必经过临界水深，而两渠段联接处的水深即为临界水深。



解 231(d) 图

232 一棱柱体渠道，由三段底坡组成，各段均充分长，糙率相同。

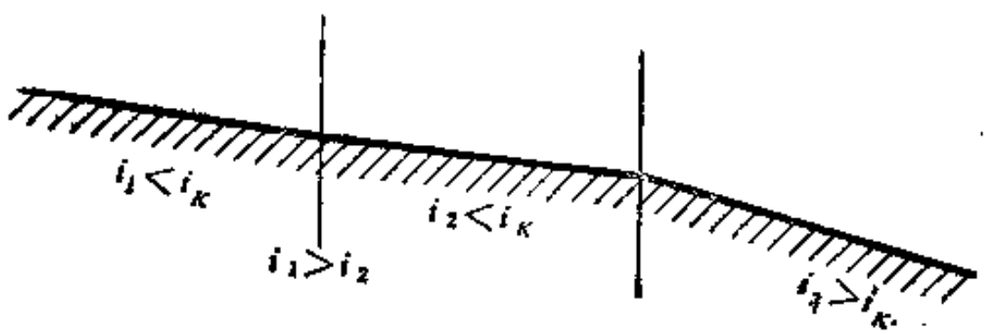
（1）绘制可能的水面曲线连接，标出曲线型号；

（2）说明每一段水流的断面单位能量E_s沿程变化情况；

（3）说明每一段水流各属于缓流还是急流？

（4）说明每一段水流的佛汝德数沿程变化情况及其数值范围；

（5）如有一干扰使水面产生波动，则该波动在三段渠道中传播的速度又如何变化？



题 232图

解：

（1）水面曲线型式如图所示

（2）因$i_1<i_K$，$i_2<i_K$，而$i_1>i_2$

所以前两段均为缓坡，第一段渠道中为a_1型壅水曲线，在第二段

渠道中产生b_1型降水曲线，水流均为缓流。由断面比能曲线特征得知，缓流时$\frac{dE_s}{dh}>0$，而急流时$\frac{dE_s}{dh}<0$，故在第一段，因h沿程增加，则E_{s1}沿程增加；在第二段，h沿程减小，则E_{s2}是沿程减小。第三段因其底坡$i_3>i_K$为陡坡，渠中发生b_2型降水曲线，水流为急流，水深沿程减小，故E_s沿程增加。

（3）第一、二段渠道中水流为缓流，第三段为急流

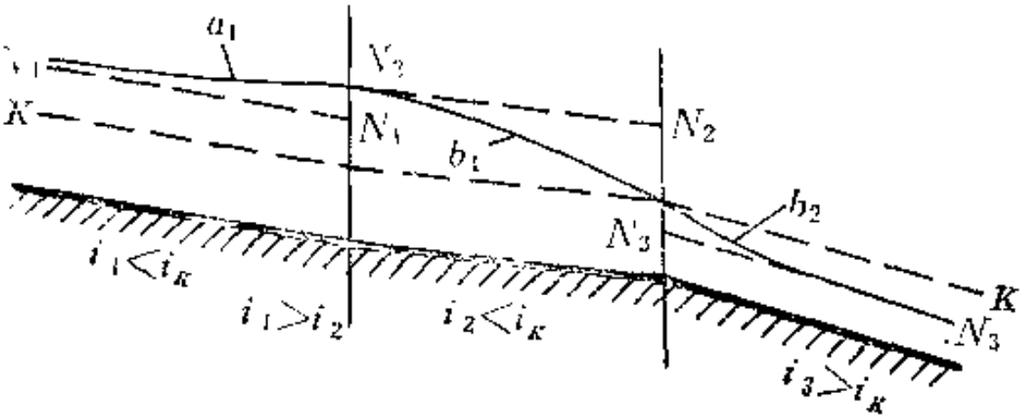
（4）第一段水流，佛汝德数沿程减小，且$Fr<1$

第二段水流，佛汝德数沿程增加，且$Fr<1$

第三段水流，佛汝德数沿程增加，且$Fr>1$

在第二、三段变坡断面的水深为临界水深h_K，其$Fr=1$。

（5）因第一、二段为缓流，干扰波即可向上游传播，又可向下游传播。



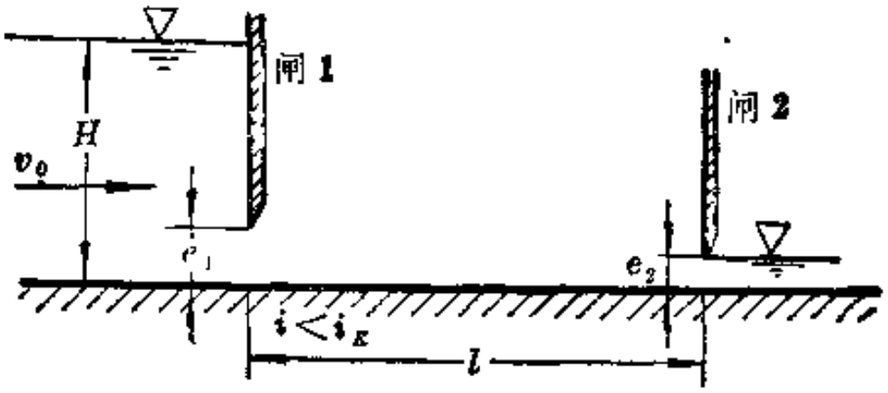
解 232 图

设水流断面平均流速为v，微波相对速度为v_w，则第一、二段向上游传播的速度为(v_w-v)，向下游传播的速度为$(v+v_w)$。

又因第三段为急流，干扰波只能向下游传播，其传播速度为$(v+v_w)$。

233 在如图所示的矩形断面渠中设置两个单孔闸。已知：闸1的开度为e_1，上游水深为H_1，行近流速为v_0，两闸间渠长为l，底坡为$i<i_K$（由于底坡i较小，在水跃计算中可视为平底坡）。试问：

（1）在不采取消能措施条件下，能否使闸1的泄流量不受



题 233 图

影响且其后保护段（护坦）最短？其控制条件是什么？

（2）在上述控制条件下，写出计算闸 2 开度e_2的计算步骤及主要公式（公式中各种系数均认为已知）。

解：

（1）在不采取消能措施条件下，要使闸 1 的泄流量不受影响，必须使水流在闸下产生临界式水跃（即$h_t=h_c''$）或远离式水跃（即$h_t<h_c''$）。但远离式水跃需要较长的护坦，故使闸 1 泄流量不受影响且其后护坦最短就必须使水流在闸下产生临界式水跃。其控制条件为闸 1 下游水深h_t等于闸下收缩断面的共轭水深h_c''（即$h_t=h_c''$），且要求通过闸 2 的流量与通过闸 1 的流量相等。

闸 1 收缩水深　　$h_c=\varepsilon\cdot e_1$

其共轭水深　　$$h_c''=\frac{h_c}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_c^3}}-1\right)$$

式中单宽流量

$$q=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\cdot\varepsilon\cdot e_1\cdot\sqrt{2g(H_0-\varepsilon e_1)}$$

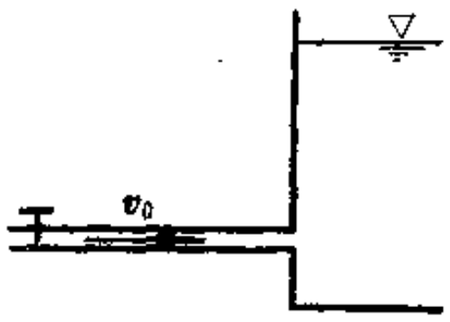
（2）闸 2 前的水头应为h_c''，通过闸 2 的流量应与通过闸 1 的流量相等，均等于q。

故

$$q=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\varepsilon\cdot e_2\sqrt{2g(h_c''+il-\varepsilon e_2)}$$

式中 q、ζ、ε、h_c'、g均为已知，用试算法即可求出e_2。

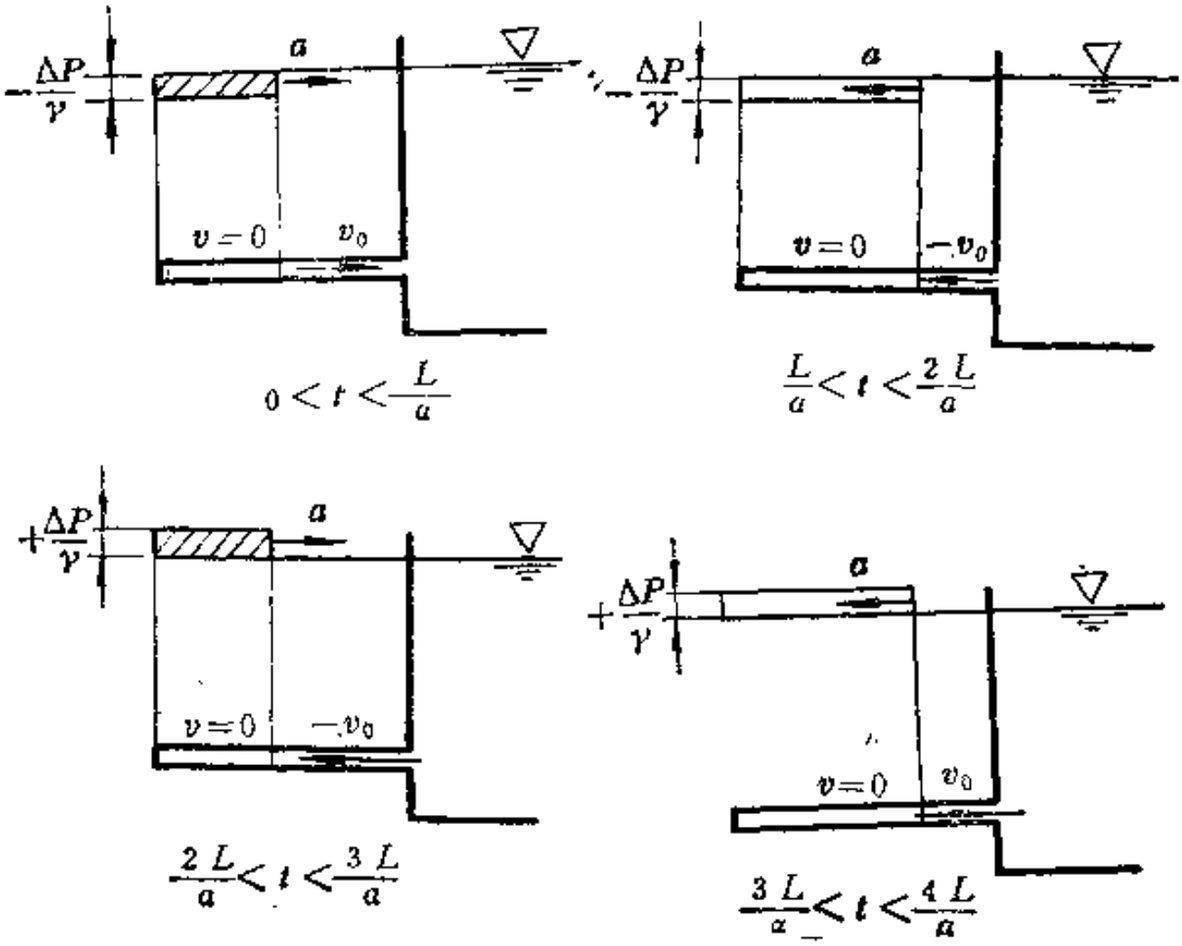
234 一管道输水入大水库，管长为L，如图所示。若突然完全关闭管道首端阀门，管道中将产生水击，若不计水头损失及流速水头，试用示意图表示下列各时段$0<t<\frac{L}{a}$，$\frac{L}{a}<t<\frac{2L}{a}$，$\frac{2L}{a}<t<\frac{3L}{a}$，$\frac{3L}{a}<t<\frac{4L}{a}$，水击波是升压波或降压波，波的传播方向及管内水流方向（a为水击波的传播速度）。



题 234图

解：

若阀门突然关闭，管道中将产生水击，在$0<t<\frac{L}{a}$时段，



解 234图

水击波传播速度 a 未影响到全部管长L，在影响范围管中速度为零，未影响范围，管中仍以速度v_0前进，水击波为降压波。

在$\frac{L}{a}<t<\frac{2L}{a}$时段，降压波已经走完全管长$L$的路程，由于管道压强降低，但水库内压强高于管道，水流又发生以速度v_0向阀门方向流动，压强恢复到原来情况，产生升压波。

在$\frac{2L}{a}<t<\frac{3L}{a}$时段，升压波又走完管长$L$的路程，水流受阀门阻止，动能又转化为压能，压强增加，产生升压波，在影响范围内流速$v_0=0$，未影响范围管内仍以流速v_0向阀门方向流动。

在$\frac{3L}{a}<t<\frac{4L}{a}$时段，升压波又走完全管长，管内压强增加$\Delta p$，在压差$\Delta p$作用下，水流以流速$v_0$向水库流动，产生降压波。

上述四个时段水击波的传播见解234图。

235 何谓直接水击？直接水击的最大水击压强与哪些因素有关？管中水击波波速 a 的物理意义及其影响因素？

解：

当阀门关闭时间等于或小于一相时，即$T_s\leqslant\frac{2L}{a}$时，（式中 a 表示弹性波的传播速度，L表示有压管道长度。）阀门处的最大水击压强未受反射回来的减压顺波的影响，即阀门处的压强不受阀门关闭时间长短的影响，这种水击叫做直接水击。

直接水击的最大水击压强与水击发生时流速的初、终值，水击波的波速，液体的密度和初压强有关。

水和管道实际上都是弹性体，弹性体中的扰动的传播是通过弹性作用，即通过弹性波而传播的。由水击产生的弹性波简称水击波，其波速 a 与液体的体积弹性系数K及管壁材料的弹性系数E、管径D、管壁厚度δ以及液体的密度ρ等有关，水击波速 a 可表达为

$$a=\frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1+\frac{K}{E}\frac{D}{\delta}}}$$

236 何谓明渠中的涨水顺波？明渠中的波速与哪些因素有关？何谓深水立波？其波高、波长与原推进波有何异同？

解：

明渠中波的传播方向与水流方向一致，且波到达后，引起明渠水位抬高的这种波叫做明渠中的涨水顺波。

明渠中的波速与断面平均速度、水深和波高有关。

由深水推进波形成的立波称为深水立波。其波高为原推进波的二倍，其波长和原推进波长相同。

237 已知不可压缩液体在圆管中流速分布公式为 $u=\frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2-r^2)$。试对此流动进行分析：

（1）是恒定流动还是非恒定流动？

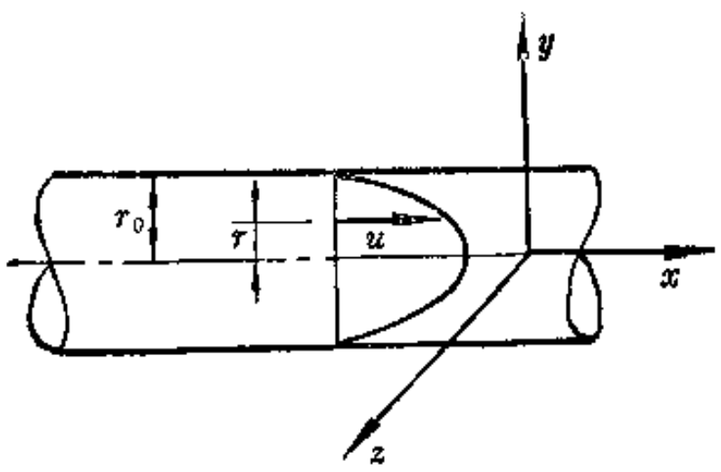
（2）是均匀流动还是非均匀流动？

（3）是否满足连续性微分方程？

（4）有无直线变形？

（5）是有涡流动还是无涡流动？

（6）有无剪切变形？



题 237图

解：

（1）公式 $u=\frac{\gamma J}{4\mu}(\gamma_0^2-\gamma^2)$ 为圆管中层流运动的流速分布公式。层流运动时液体质点只有沿 x 轴向的流动，没有横向运动，所以 $u_x=u=\frac{\gamma J}{4\mu}(\gamma_0^2-\gamma^2)$，$u_y=u_z=0$，

$\because$ $\frac{\partial u_x}{\partial t}=0$ 故为恒定流

（2）因 r_0 和 r 仅与 y、z 有关，与 x 无关。

$$r_0=y_0=z_0 \qquad r^2=y^2+z^2$$

故
$$u_x=\frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2-y^2-z^2)$$

$\because$ $\frac{\partial u_x}{\partial x}=0$ 故为均匀流

（3）

$\because$ $\frac{\partial u_x}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}=0$

$\therefore$ $\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$ 满足连续性方程

（4）

$\because$ $\frac{\partial u_x}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}=0$ 故无直线变形

（5）

$\because$ $\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\gamma J}{4\mu}\cdot 2z-0\right)\neq 0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{\gamma J}{4\mu}\cdot 2y\right)\neq 0$$

故 为有涡流动。

（6）

$\because$ $\theta_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=0$

$$\theta_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\gamma J}{4\mu}\cdot 2z+0\right)\neq 0$$

$$\theta_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(0-\frac{\gamma J}{4\mu}\cdot 2y\right)\neq 0$$

故有剪切变形。

238 均匀平直管道侧壁所量测到的动水压强能否代表过水断面顺水流方向的动水压强，试说明其理由。

解：

均匀平直管道侧壁所量测到的动水压强可代表过水断面顺水流方向的动水压强。虽然对实际液体，任一点三个正交方向的动水压强不等，为

$$\left.\begin{aligned}p_{xx}&=p-2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\\p_{yy}&=p-2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}\\p_{zz}&=p-2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

式中 $p=\dfrac{p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}}{3}$

但是，当水流为均匀流时，只存在顺水流方向的速度分量u_x，而$u_y=u_z=0$，故$\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0$，由连续性方程$\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0$，可得出$\dfrac{\partial u_x}{\partial x}=0$，代入方程组（1）可得$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p$。

239 在那几种情况和条件下，流场中同一点上三个正交方向的动水压强相等（即$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}$），并说明其理由。

解：

在实际液体中，压强表达式是

$$\begin{cases} p_{xx}=p-2\mu\dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\ p_{yy}=p-2\mu\dfrac{\partial u_y}{\partial y} \\ p_{zz}=p-2\mu\dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases}$$

在下列三种情况下 $p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}$

（1）理想液体时，不考虑粘滞性，$\mu=0$

故 $$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}$$

（2）在固体壁面处，$u_x=u_y=0$，$\therefore\ \dfrac{\partial u_x}{\partial x}=\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=0$，由连续性方程$\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0$，可得$\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0$，故$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}$。

（3）均匀流时，取x方向与流线重合，则$\dfrac{\partial u_x}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0$，故$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}$。

240 （1）推导流动相似中的重力相似准则（佛汝德准则）和粘滞力相似准则（雷诺准则），并分别导出其流速、流量比尺与长度比尺的关系式。

（2）说明自动模型区（阻力平方区）的意义，在圆管流动中怎样划分和判别这个流动区域的范围。

解：

（1）由相似原理知，在几何相似的液流中，若要动力相似，则必须牛顿数Ne相等，即满足：

$$\frac{\lambda_\rho\lambda_L^2\lambda_v^2}{\lambda_F}=\lambda_{Ne}=1 \qquad (1)$$

式中$\lambda_F=\dfrac{F_P}{F_M}$，$\lambda_\rho=\dfrac{\rho_P}{\rho_M}$，$\lambda_L=\dfrac{L_P}{L_M}$，$\lambda_v=\dfrac{v_P}{v_M}$，$\lambda_{Ne}=\dfrac{N_{eP}}{N_{eM}}$，脚标$P$代表原型，$M$代表模型。

①推导重力相似准则：

重力可表示为

$$G=\rho gV \quad 或 \quad \lambda_G=\lambda_\rho\lambda_g\lambda_L^3$$

用λ_G代替（1）式中的λ_F，则

$$\frac{\lambda_\rho\lambda_L^2\lambda_v^2}{\lambda_\rho\lambda_g\lambda_L^3}=1 \quad 或 \quad \frac{\lambda_v^2}{\lambda_L\lambda_g}=1 \qquad (2)$$

也可写成$\frac{v_P^2}{g_PL_P}=\frac{v_M^2}{g_ML_M}$。由此可知，作用力只有重力时，两个相似系统的佛汝德数应相等，即重力相似准则。

重力相似的流速、流量比尺：

流速比尺　$\lambda_g=1$，代入（2）式可得

$$\lambda_v^2=\lambda_L \qquad \lambda_v=\lambda_L^{0.5}$$

流量比尺　$\lambda_Q=\lambda_v\lambda_A=\lambda_L^{0.5}\lambda_L^2=\lambda_L^{2.5}$

②推导粘滞力相似准则

在层流中，起主要作用的力为粘滞力

$$F=\tau_0\chi L=\mu\frac{du}{dy}\chi L=\rho\nu\frac{du}{dy}\chi L$$

可以写为　$\lambda_F=\lambda_\rho\lambda_\nu\lambda_v\lambda_L$代入（1）式得

$$\frac{\lambda_\rho\lambda_L^2\lambda_v^2}{\lambda_\rho\lambda_\nu\lambda_v\lambda_L}=1 \quad 或 \frac{\lambda_v\lambda_L}{\lambda_\nu}=1 \qquad (3)$$

也可写成$\frac{v_PL_P}{\nu_P}=\frac{v_ML_M}{\nu_M}$。所以粘滞力作用相似的准则是模型与原型的雷诺数必须相等。

层流阻力相似流速，流量比尺：

若模型与原型用同一种液体，则$\lambda_\nu=1$，由（3）式可得

$$\lambda_v=\lambda_L^{-1}$$

$$\lambda_Q=\lambda_v\lambda_A=\lambda_L^{-1}\lambda_L^3=\lambda_L$$

（2）阻力平方区的意义为：当雷诺数较大时，粘性底层极薄，以致使边壁粗糙高度Δ暴露在紊流区内，当紊流流核绕过凸出高度时将形成小漩涡，边壁对水流的阻力主要是由这些小漩涡造成，而粘性底层的粘滞力只占次要地位，几乎可以忽略不计。沿程阻力系数λ决定于相对粗糙度$\frac{\Delta}{r_0}$，与雷诺数无关，此时沿

程水头损失是与平均流速的平方成比例，该流区常称为阻力平方区。

由相似原理知，只要原型和模型的水流属粗糙区，相对粗糙度$\frac{\Delta}{r_0}$相等，则λ相等，就可做到模型与原型流动的阻力相似，也即可用佛汝德准则进行阻力作用相似的模型设计，因此粗糙区也叫自动模型区，在圆管流动中，只要$Re>2000$，$Re^*=\frac{\Delta\cdot u_*}{\nu}>70$或$\frac{\Delta}{\delta_0}>6$（$\delta_0$层流底层厚度）其流动就在自动模型区。

241 如何用模型实验决定小桥的流量系数（阐明模型的设计，可用什么仪器量测有关数据，实验结果如何推广到原型）

解：

水流流经桥墩时，由于受到侧向收缩的影响，过水断面减小，流速增大，形成进口水面跌落，产生与宽顶堰类似的水流状态，因此桥孔的水力计算可应用无坎宽顶堰的计算公式。桥孔水流重力起主导作用，所以按佛汝德相似准则设计模型，根据实验要求（如模型中水流的流态应与相应原型的相同）及场地、供水流量等条件选定长度比尺λ_L，并根据$(Fr)_M=(Fr)_P$决定其它所需物理量比尺，如流量比尺$\lambda_Q=\lambda_L^{5/2}$。根据选定的比尺可求得模型中桥孔的宽度$b_M$及流量$Q_M$。

$$b_M=\frac{b_P}{\lambda_L}$$

$$Q_M=\frac{Q_P}{\lambda_Q}$$

做实验时可用量筒测针测量水位（即作用水头H_{0M}），用三角薄壁堰或矩形薄壁堰测流量Q_M。

流量系数m'可按下式计算

$$m'=\frac{Q_M}{b_M\sqrt{2g}H_{0M}^{3/2}}$$

将模型中测得的b_M、H_{0M}及Q_M代入上式右端，即可求得m'。

m'为无量纲数，故原型的m'与模型中的相同。

242 回答下列问题：

（1）有两个力学相似的水流甲和乙，已知甲水流的某质点上受到若干个力的作用，这些力构成一个力矢多边形，问在乙水流的相应质点上将受到哪些力的作用？这些力构成的力矢多边形与甲水流质点的力矢多边形之间存在什么关系？为什么？

（2）宽度$b=30\text{cm}$的溢流坝模型，放水后测得坝面某过水断面水深$h=3\text{cm}$，流量$Q=4.5\text{l/s}$，问相应的原型断面的平均流速v_p为多少？（模型比尺$\lambda_L=100$）

解：

（1）根据动力相似原理，原型和模型中任何对应点上作用着同名的力，各同名力互相平行且大小具有同一比值。甲水流和乙水流为两个力学相似的水流，则相应点作用的力矢多边形应为同名力组成，且力矢多边形相似，相应边（即同名力）的大小成比例。

（2）溢流坝模型水流以受重力作用为主，因此应满足重力相似准则，按重力相似设计模型，其流速比尺与模型长度比尺的关系为

流速比尺 $\lambda_v=\lambda_L^{0.5}=100^{0.5}=10$

模型流速 $v_M=\dfrac{Q}{bh}=\dfrac{4.5\times1000}{30\times3}=50\text{cm/s}$

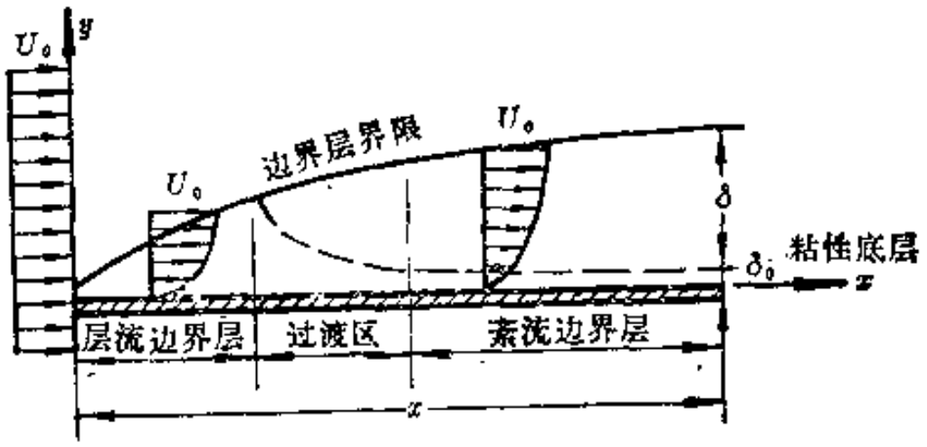
原型流速 $v_P=v_M\lambda_v$

$=50\times10=500\text{cm/s}$

243 什么叫边界层？简述边界层内液体流动的特征。

解：

实际液体绕物体流动时，在紧靠物体表面，由于粘滞性，液体质点将附着于物体表面，与边界无相对运动，不管流动的雷诺数Re多大，边界上的流速必为零（相对边壁而言）。在距物体边界法线方向液流的流速从零逐渐增大，这样在边界至未受扰动的液流之间存在着一个流速分布不均匀的区域，在这个区域里流



解 243图

速梯度很大，粘滞性的作用不能忽略，所以边界层是指流场中靠近壁面的流体薄层。边界附近的这个流区就叫做边界层（又称附面层）。

为了说明边界层内流动特征，以实际液体绕平板流动为例，设想流动为等速平行的平面流动，各处流速都为U_0，在这样的流动里放置一块与流动平行的静止薄板，其边界层如图所示，边界层的厚度常用δ表示，在边界层流区内，流速由零逐渐增大到U_0，流速梯度很大，内摩擦阻力十分显著，服从粘性液体运动规律（纳维埃-司托克斯方程），面在边界层以外的区域流速梯度为零，可视为理想液体流动，符合势流运动规律。

边界层内液流流动特征主要有

（1）边界层厚度δ与物体长度相比是很小的。

（2）边界层厚度δ从绕流物体前缘处为零，沿水流方向，平板阻滞水流的作用向流体内部扩展，边界层厚度顺流增加，一般规定流速$u_x=0.99U_0$的地方作为边界层的界限。

（3）边界层内流速由紧贴物体边界上液体质点流速为零，距平板法线方向流速逐渐增大，边界层内存在着流速梯度，属粘性流动，内摩擦切应力很大。

（4）边界层内的液流同样有层流和紊流两种流态。整个边界层流动开始表现为层流在板端附近边界层极薄，流速梯度很大

以致产生很大的内摩擦阻力，属层流。沿板端距离增加，边界层厚度增厚，流速梯度随边界层厚度增加而变小，内摩擦阻力也相应减小，层流边界层将经过一个过渡区，在过渡区形成大尺度漩涡，然后发展成为紊流而成为紊流边界层，但在紊流边界层中，靠近固体表面仍有一层极薄的粘性底层存在，判别边界层内流动型态的判别数，仍用雷诺数，其表达式为

$$\mathrm{Re}_x=\frac{U_0 x}{\nu}$$

式中U_0为自由流流速；x为距板端的距离，距板端愈远，雷诺数愈大，当雷诺数达到某一临界值时，液流即自层流转变为紊流，此临界层取决于自由流的紊动程度和壁面糙率。

（5）因边界层很薄，边界层内的压强可近似地认为沿固体边界的外法线方向上压强不变，它等于边界层外边界上的压强值，所以边界层内压强只是沿壁面坐标x的函数。

（6）由边界层内的流速分布可以求得边界层内角速度矢量不等于零，是有旋流动。

（7）由于边界层很薄，作用于液体上的重力相对于惯性力、压力、粘滞力来说是很小的，可以忽略不计。

244　回答下列问题：

（1）何谓渗流模型，它必须符合哪些条件？

解：

“渗流模型”是一个假想的渗流，认为渗流是充满整个渗流区域的连续水流，包括土粒骨架所占据的空间在内，均由水所充满，似乎无土粒存在一样。即把液体的渗流运动看作是连续空间内的连续介质运动。这种假想的渗流就叫做渗流模型。

它必须符合以下条件：①通过模型渗流的流量必须和实际渗流的流量相等。②对某一确定的作用面，从渗流模型所得出的动水压力，应与真实渗流的动水压力相等。③渗流模型的阻力和实际渗流应相等，即水头损失应相等。

（2）试比较明渠恒定均匀流和恒定均匀渗流的异同点

解：

明渠恒定均匀流是指水体在地表的渠道或河道中均匀流动。恒定均匀渗流是指水体在孔隙介质（土壤或岩石）中恒定均匀流动，即地下水流动。

明渠恒定均匀流所遵循的基本公式为谢才公式，其断面平均流速 $v=C\sqrt{RJ}$

或 $v=C\sqrt{Ri}$

式中C为谢才系数，R为水力半径，i为渠道底坡。

恒定均匀渗流所遵循的基本公式为达西公式，即断面平均渗流流速 $v=ki$

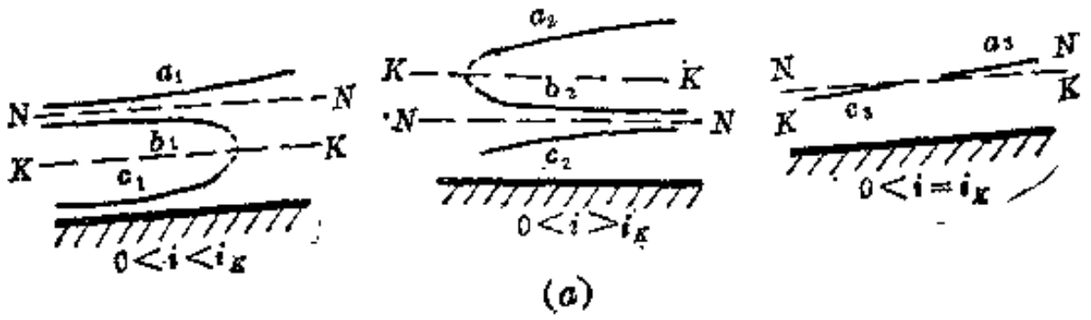
式中k为渗透系数，i为地下河槽底坡。

明渠均匀流过水断面上流速分布不均匀，而均匀渗流过水断面上流速分布均匀。

明渠恒定均匀流与恒定均匀渗流的相同点为：它们都是恒定均匀流，水流运动要素（如流速，压强等）既不随时间变化，也不沿流程变化，流线为互相平行的直线，其水力坡度J，水面坡度J_P和渠道坡度i彼此相等，过水断面上的动水压强符合静水压强分布规律，即

$$z+\frac{p}{\gamma}=C \qquad (C=\text{const})$$

（3）草绘出正底坡棱柱形明渠恒定渐变流的水面线和正底坡恒定渐变渗流的浸润曲线，并比较二者的异同点并分析其原因。



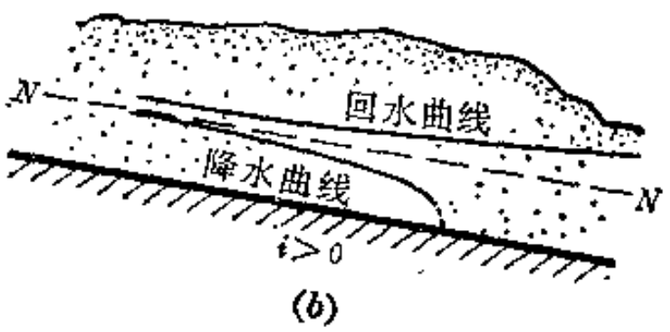
(a)

解 244(a)图

解：

正底坡棱柱体明渠恒定渐变流的水面曲线型式如解244（a）图所示：

正底坡恒定渐变渗流的浸润曲线如解224(b)图所示：



(b)

解 244(b)图

在正底坡情况下，明渠恒定渐变流水面曲线形式比恒定渐变渗流浸润曲线形式多，主要是由于正底坡明渠存在临界底坡i_k，因此可将正底坡明渠分为缓坡，陡坡、临界坡三种，每种底坡又可用正常水深线N-N，临界水深线K-K分为三个区域，当实际非均匀流水深处于不同区域时，水面曲线的形式就不同，共计8种水面曲线型式。而正底坡恒定渐变渗流，因不存在临界水深，（可以想象临界水深$h_K=0$）就没有急流、缓流；也没有陡坡、缓坡之分，因此对正底坡地下河槽渐变渗流只有正常水深N-N线，将流区分为a、b两个区域，只存在a区的壅水曲线和b区的降水曲线两条浸润曲线。

245 试述水电比拟法的理论根据，在势流、涡流、层流、紊流、符合达西定律的渗流，这些流动中那些可以比拟，为什么？如用水电比拟法绘出流网，将如何求任一点的速度和压强？

解

水电比拟法的理论主要是根据电流场中各种电流要素和水流场中各种水流要素具有数学上和物理上的类比关系，用电场来模拟流场，只要测出电场中的等位线，就得到了流场中的等势线，从而很容易绘出流网图。根据这一原理，只有势流、符合达西定

电流密度的欧姆定律	渗流的达西定律
$i_x=-\sigma\frac{\partial V}{\partial x}$ $i_y=-\sigma\frac{\partial V}{\partial y}$ $i_z=-\sigma\frac{\partial V}{\partial z}$	$u_x=-k\frac{\partial H}{\partial x}$ $u_y=-k\frac{\partial H}{\partial y}$ $u_z=-k\frac{\partial H}{\partial z}$
电荷守恒(克希荷夫定律)	质量守恒(连续性方程)
$\frac{\partial i_x}{\partial x}+\frac{\partial i_y}{\partial y}+\frac{\partial i_z}{\partial z}=0$	$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$
电位函数的拉普拉斯方程	水头函数的拉普拉斯方程
$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$	$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=0$

律的渗流可以用水电比拟法。

例如符合达西定律的渗流，其流场中运动要素与电流场中的运动要素存在着上表的数学和物理上的类比关系。

电场中的电位函数V和渗流场中渗流水头函数H均满足拉普拉斯方程，是有势的调和函数，因此电场中的物理量和渗流场中的水流要素存在着一定的类比关系，若能保持电场与渗流场几何相似，导电性质和渗透性质相似及边界条件相似，则电场中的等位线就是渗流场中的等势线，绘出了等势线就很容易绘出流网图。

若用水电比拟法已绘出流网，需求任意点的流速u，则可用以下公式

$$u=k\frac{\Delta H}{\Delta s}=\frac{kH}{(m-1)\Delta s}$$

式中：k为渗流系数；

m为等势线条数；

Δs为流网网格的平均流线长度；

H为上、下游水位差，即渗流区作用水头。

任意点的压强p_N，可用下式求得

$$\frac{p_N}{\gamma}=h_N-h_l$$

式中 h_N为任意点N在上游液面下的淹没深度，

h_l为入渗点到该点N的水头损失，

γ为水的容重。

三 研究生入学考试水力学试题实例

1. 某校一九八三年攻读硕士学位研究生入学考试水力学试题

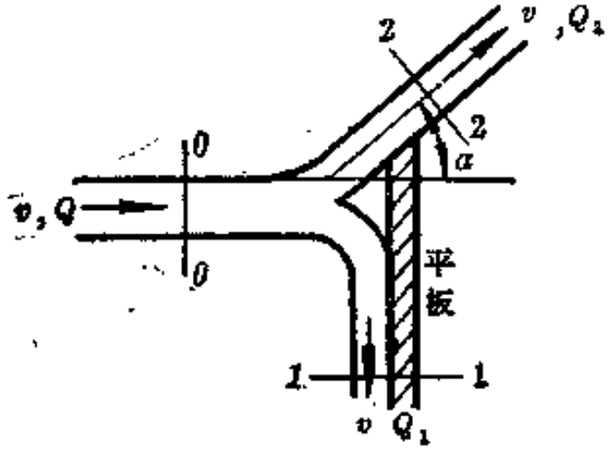
（一）流量为Q，平均流速为v的射流，冲击直立光滑的平板后分为两股。一股沿平板直泻而下，流量为Q_1，平均流速为v；另一股从平板顶点处以α倾角射出，流量为Q_2，平均流速v。若重力不计，试证：作用于平板的射流冲击力的大小为

$$R=\rho Qv\left[1-\frac{\sqrt{1-\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2}}{1+\frac{Q_1}{Q_2}}\right]$$

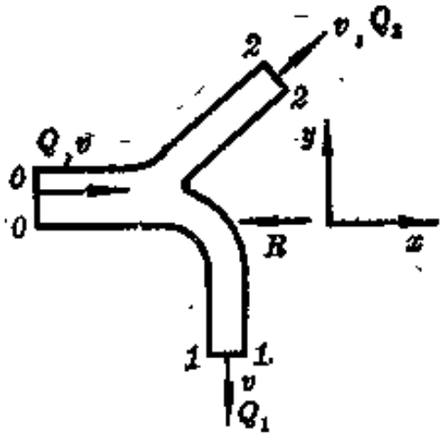
ρ为水的密度　　（15分）

解：

取0-0、1-1、2-2断面间水体为控制体，受力如解1,-（一）图所示，设平板对水股的作用力为R。



题 1-(一)图



解 1-(一)图

写x方向的动量方程

$$-R=\rho Q_2\beta_2 v\cos\alpha-\rho Q\beta v \qquad (1)$$

写y方向的动量方程

$$0=-\rho Q_2\beta_2 v\sin\alpha-\rho Q_1\beta_1 v \qquad (2)$$

令$\beta=\beta_1=\beta_2=1$

由式（2）得

$$\sin\alpha=-\frac{Q_1}{Q_2}$$

又∵

$$Q=Q_1+Q_2$$

$$=Q_2\sin\alpha+Q_2=Q_2(\sin\alpha+1)$$

∴

$$Q_2=\frac{Q}{1+\sin\alpha} \qquad (4)$$

将（3）、（4）式代入（1）式得

$$R=\rho Qv-\rho\frac{Q}{1+\sin\alpha}v\cos\alpha$$

$$=\rho Qv\left(1-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)$$

$$=\rho Qv\left(1-\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1+\sin\alpha}\right)$$

$$=\rho Qv\left[1-\frac{\sqrt{1-\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2}}{1+\frac{Q_1}{Q_2}}\right]。$$

（二）为测定刚出厂的无缝新钢管在恒定有压均匀流动情况下的沿程水头损失，

（1）试设计这种实测装置，并简述它的工作原理；

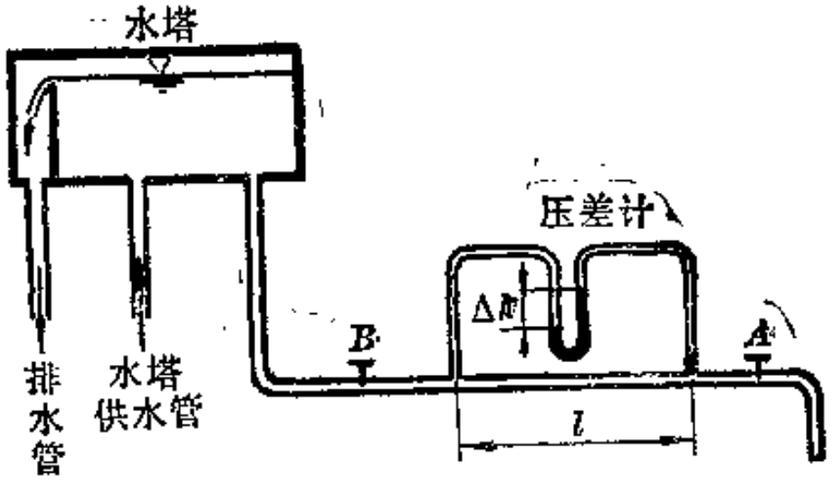
（2）试在坐标系上定性地画出光滑紊流（区）时，此新钢管的沿程阻力系数的变化规律的曲线。（15分）

解：

（1）沿程水头损失实测装置

①设备

②从水位恒定的水塔引出管道，与需要测量水头损失的新钢管相联，为了便于操作和计算，该管水平放置，两端各开一个测压孔，测压孔直径$d=1.0$mm左右，外接内径$d=6.0$mm左右的



解 1-(二)(1)图

测压管，用橡皮管与压差计相连接。测压孔间距L视采用压差计类型和测量精度而定，做到读数准确，误差在5%以内。

⑥在测压孔两端设A、B两个闸阀，控制流量与排气。闸阀距测压孔距离应大于（6～10）d，（d为新钢管直径），避免闸阀后旋涡水流对测压管测流的影响。

⑥在管道出口采用重量法或体积法测量流量。也可在管路上装流量计测量流量。

②工作原理

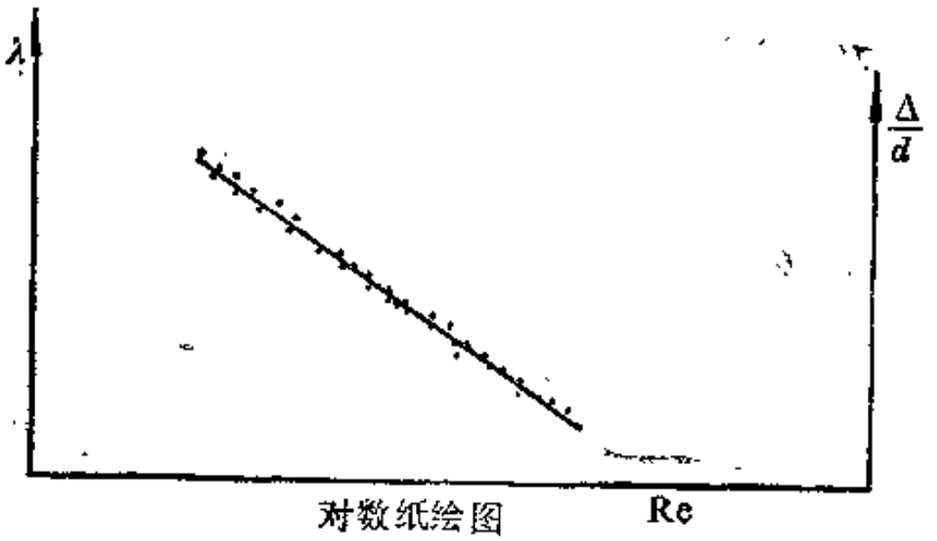
水塔水位恒定，当闸阀开度一定时，管中通过的流量一定，测出流量。管道直径保持不变，经过管道的水流为有压均匀流，水力坡度与测压管坡度相等，由压差计测出的压差经简单换算即得长度为L的管道的沿程水头损失，即

$$h_f=\frac{p_1-p_2}{\gamma}+(z_1-z_2)+\frac{1}{2g}(v_1^2-v_2^2)$$

$$=\frac{p_1-p_2}{\gamma}$$

（2）沿程阻力系数λ在紊流光滑区的变化规律

大量实验证明，在紊流光滑区，沿程阻力系数λ只与雷诺数Re有关，与绝对粗糙度Δ无关。不论管壁的相对光滑度如何，所有实验点都落在同一微曲的线上，如图示。



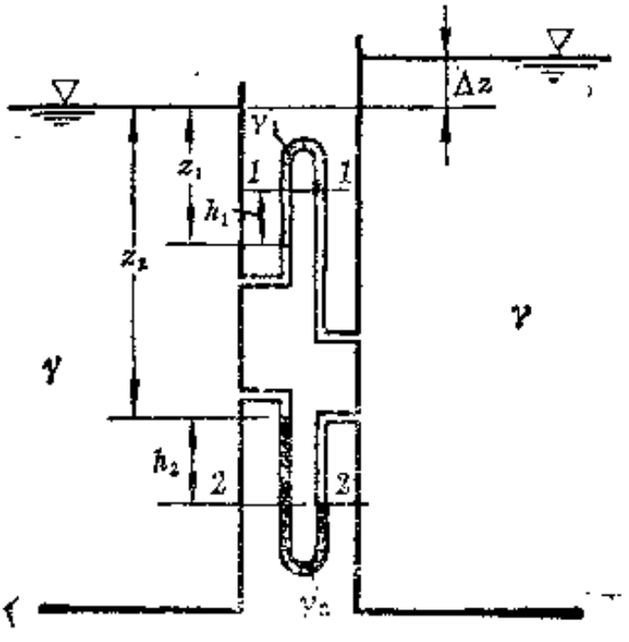
解 1-(二)(2)图

（三）两水箱具有不同的水位高程。箱内水的重率（容重）为γ。用两个比压计连接两水箱如图。

试证：

$$\gamma=\frac{\gamma_1 h_1+\gamma_2 h_2}{h_1+h_2}$$

γ_1和γ_2为比压计内工作液体的重率。（15分）



题 1-(三)图

解：

设z_1，z_2如图示，作等压面1-1，则

$$\gamma z_1-\gamma_1 h_1=\gamma(z_1+\Delta z)-\gamma h_1$$

化简得

$$\Delta z=\frac{(\gamma-\gamma_1)h_1}{\gamma} \qquad (1)$$

作等压面2-2，则

$$\gamma(z_2+\Delta z+h_2)=\gamma z_2+\gamma_2 h_2$$

化简得

$$\Delta z=\frac{(\gamma_2-\gamma)h_2}{\gamma} \qquad (2)$$

（1），（2）式相等

$$\frac{(\gamma-\gamma_1)h_1}{\gamma}=\frac{(\gamma_2-\gamma)h_2}{\gamma}$$

整理得

$$\gamma=\frac{\gamma_1 h_1+\gamma_2 h_2}{h_1+h_2}$$

（四）（1）设流速势函数为$\varphi=xyz$，求点（1，2，1）处的速度、加速度和流线方程。（8分）

（2）设不可压缩液体的流速场为

$$u_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

试判别该流动是有涡流还是无涡流，并论证它是否满足连续性方程（原点除外）。（7分）

解：

（1）速度、加速度和流线方程

速度

$\because$

$$u_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=yz$$

$$u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=xz$$

$$u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=xy$$

$$\begin{aligned}u&=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\\&=\sqrt{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}\\&=\sqrt{2^2\times1^2+1^2\times1^2+1^2\times2^2}\\&=3\end{aligned}$$

加速度：

$$\begin{aligned}a&=\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u_x\frac{\partial u}{\partial x}+u_y\frac{\partial u}{\partial y}+u_z\frac{\partial u}{\partial z}\\&=0+yz\cdot\frac{xz^2+xy^2}{\sqrt{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}}+xz\frac{yz^2+yx^2}{\sqrt{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}}\\&\quad+xy\cdot\frac{zy^2+zx^2}{\sqrt{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}}\\&=\frac{2(xyz^3+xy^3z+x^3yz)}{\sqrt{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}}\\&=\frac{2\times(1\times2\times1^3+1\times2^3\times1+1^3\times2\times1)}{\sqrt{2^2\times1^2+1^2\times1^2+1^2\times2^2}}=8\end{aligned}$$

流线方程

$$\frac{u_x}{dx}=\frac{u_y}{dy}=\frac{u_z}{dz}$$

即

$$\begin{cases}u_xdy-u_ydx=0 & (1)\\ u_ydz-u_zdy=0 & (2)\end{cases}$$

由（1）式可得

$$ydy-xdx=0$$

$$y^2-x^2=C_1$$

当$x=1$，$y=2$，$z=1$时，$C_1=3$

由（2）式得

$$zdz-ydy=0$$

$$z^2-y^2=C_2$$

∴

当$x=1$，$y=2$，$z=1$时，$C_2=-3$

即

$$\begin{cases} y^2-x^2=3 & (3) \\ z^2-y^2=-3 & (4) \end{cases}$$

（3）减（4）式得流线方程式

$$2y^2-x^2-z^2=6$$

（2）判别是有涡流，还是无涡流，是否满足连续性方程

①判断是有涡流，还是无涡流

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}+(y^2-x^2)(-2)\frac{2y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=\frac{2y(x^2+y^2)+4y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}-2xy\frac{-4x}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=\frac{-2y(x^2+y^2)+8x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

旋转角速度

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}-\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right]=0$$

$$\omega_x=\omega_k=0$$

故该流动为无涡流。

②是否满足连续性方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}+(y^2-x^2)(-2)\frac{2x}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=\frac{-2x(x^2+y^2)+4x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}+(-2xy)(-2)\frac{2y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=\frac{-2x(x^2+y^2)+8xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=-\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

连续性方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}-\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=0$$

故满足连续性方程。

（**五**）有一管道系统，水箱水头 H 不变。原来接两段管道 AB、BC，管道为铸铁管，管长 $l_{AB}=l_{BC}$，管径 $d_{AB}=d_{BC}$，通过流量为 Q。

（1）如果在 AB 段再并联一管段，管材、管长和管径均与 AB 相同，问管道系统的流量将如何？

（2）如果在 AB、BC 之后再串联一管段 CD，管材、管长和管径均与 AB 相同，问管道系统的流量又将如何？（20分）

注：全部按长管计算。

解：

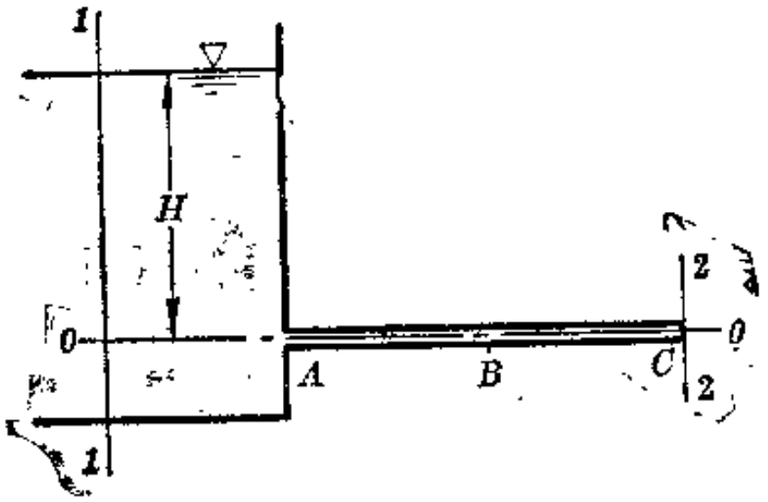
（1）计算管道未并联、串联前的流量

设 $l=l_{AB}+l_{BC}=2l_1$

$$d_{AB}=d_{BC}=d$$

根据长管计算则有

$$H=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

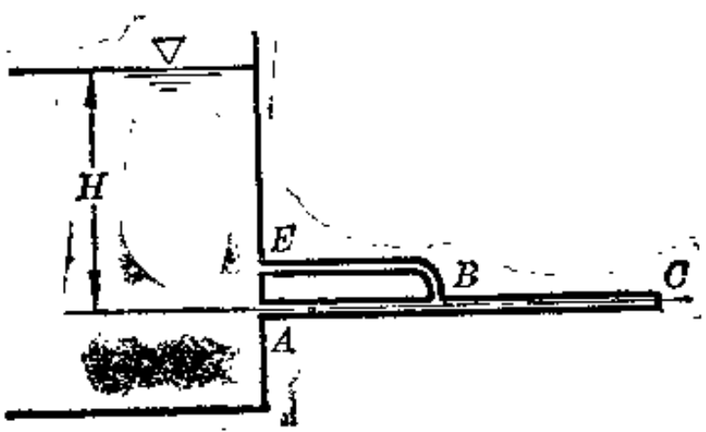


题 1-(五)图

$$v=\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}$$

$$Q=vA$$

$$=A\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}$$



解 1-(五)(1)图

（2）并联时管道通过的流量Q_1

并联管EB、AB两管管材、管长、管径相同，根据并联管的特点，两管沿程水头损失相同，即

$$h_{f_{EB}}=h_{f_{AB}}$$

而

$$h_{f_{EB}}=\lambda\frac{l_1}{d}\frac{v_{EB}^2}{2g}=\lambda\frac{l}{2d}\frac{Q_{EB}^2}{2gA^2}$$

$$h_{f_{AB}}=\lambda\frac{l_1}{d}\frac{v_{AB}^2}{2g}=\lambda\frac{l}{2d}\frac{Q_{AB}^2}{2gA^2}$$

所以由　　$h_{f_{EB}}=h_{f_{AB}}$可得

$$Q_{EB}=Q_{AB}$$

$$h_{f_{BC}}=\lambda\frac{l_1}{d}\frac{v_{BC}^2}{2g}$$

$$=\lambda\frac{l}{2d}\frac{Q_1^2}{2gA^2}$$

$$=\lambda\frac{l}{2d}\frac{(2Q_{AB})^2}{2gA^2}$$

式中　$Q_1=Q_{EB}+Q_{AB}=2Q_{AB}$

又因

$$H=h_{f_{AB}}+h_{f_{BC}}$$

$$=\lambda\frac{l}{2d}\frac{Q_{AB}^2}{2gA^2}+\lambda\frac{l}{2d}\frac{(2Q_{AB})^2}{2gA^2}$$

$$=2.5\lambda\frac{l}{d}\frac{Q_{AB}^2}{2gA^2}$$

$$Q_{AB}=A\sqrt{\frac{1}{2.5}}\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}$$

$$Q_1=2Q_{AB}$$

$$=2A\sqrt{\frac{1}{2.5}}\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}$$

$$=1.26A\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}$$

$$\frac{Q_1}{Q}=\frac{1.26A\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}}{A\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}}=1.26$$

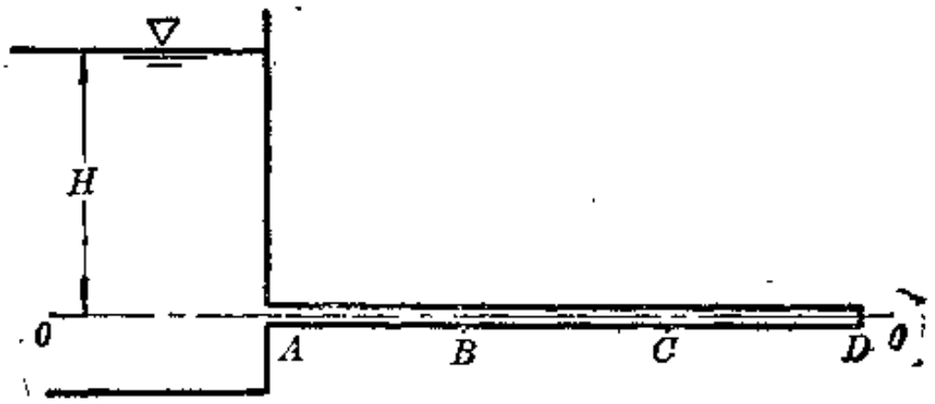
$$Q_1=1.26Q$$

所以在原管道上，并联EB管道后，流量增加了26%.

（3）串联管道CD通过的流量Q_2

串联管道CD，管材、管长、管径与AB相同，根据串联管道特点，按长管计算

$$H=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\lambda\frac{l_{CD}}{d}\frac{v^2}{2g}$$



解 1-(五)(2) 图

$$= \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{2d}\frac{v^2}{2g}$$

$$= \frac{3}{2}\lambda \frac{l}{d}\frac{Q_2^2}{2gA^2}$$

$$Q_2 = A\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}$$

$$= 0.82A\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}$$

$$\frac{Q_2}{Q} = \frac{0.82A\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}}{A\sqrt{\frac{d}{\lambda l}}\sqrt{2gH}} = 0.82$$

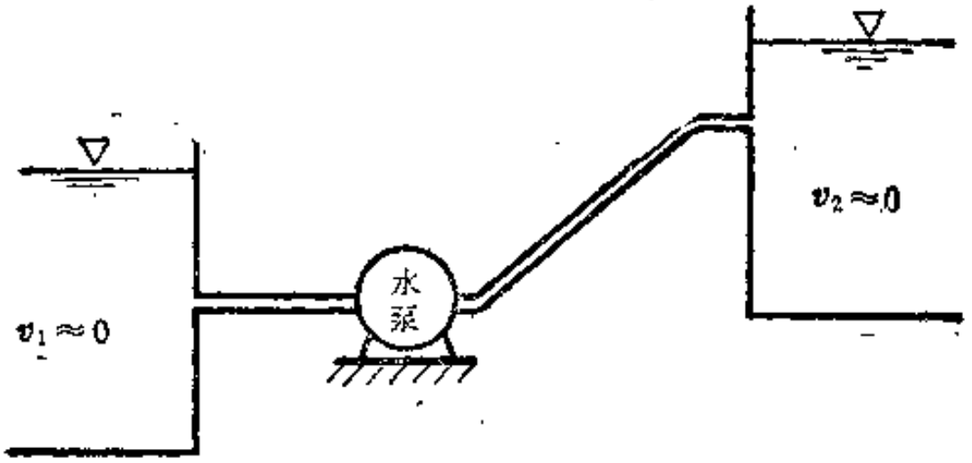
$$Q_2 = 0.82Q$$

在原管道上串联管段CD后，流量减少18%

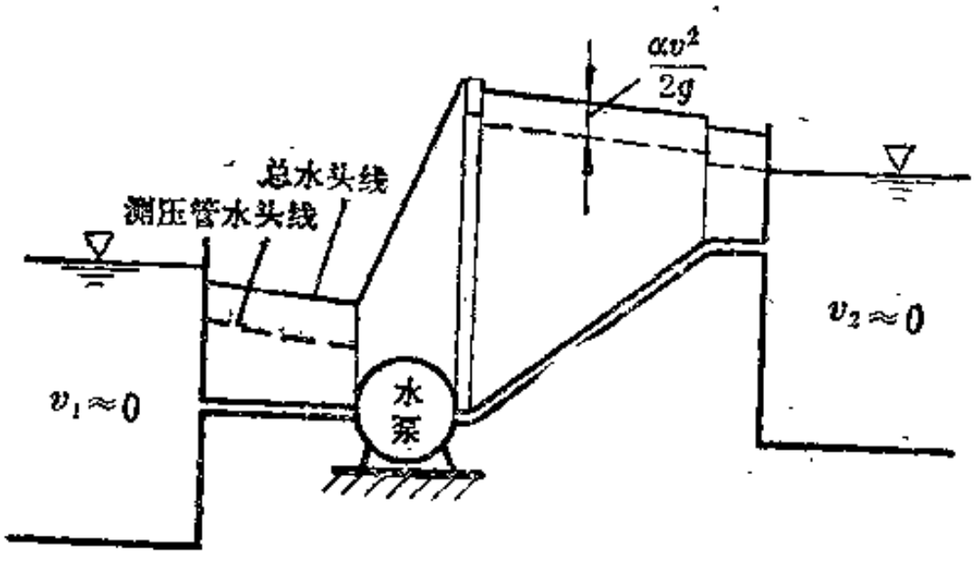
（六）绘出下面恒定管流的总水头线和测管水头线。（10分）

解：

水泵进水口和出水口，流速很小，流速水头近似为零，水池水面线是测压管水头线，也是总能线。管道进口有局部水头损失，总能线下降h_{j1}。而经管道产生的沿程水头损失，由于管道直径保持不变，总能线为一下降斜线，在水泵进口，总能线降到最低点，水流经水泵后获得能量，总能线升到最大值，而后由于管道的沿程和局部损失而降低，到达管道出口断面总能线降到最



题 1-(六) 图



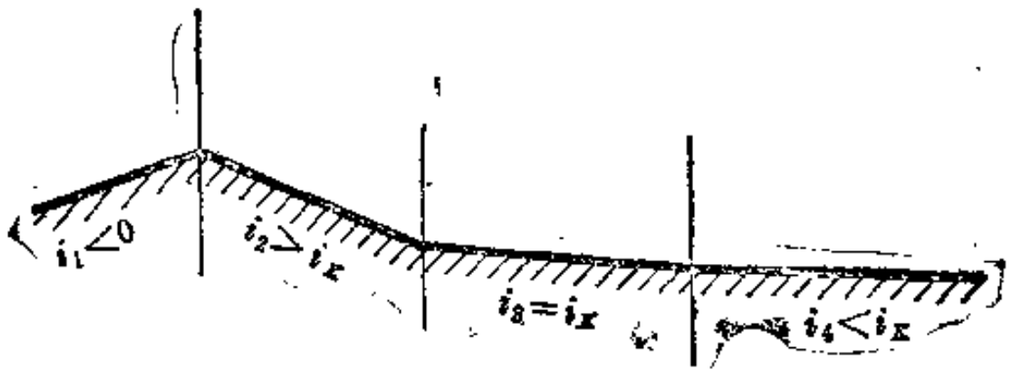
解 1-(六) 图

低，高于出水池水面$\frac{\alpha v^2}{2g}$。总能线画好后减去管中的流速水头$\frac{\alpha v^2}{2g}$则得测压管水头线如图所示。

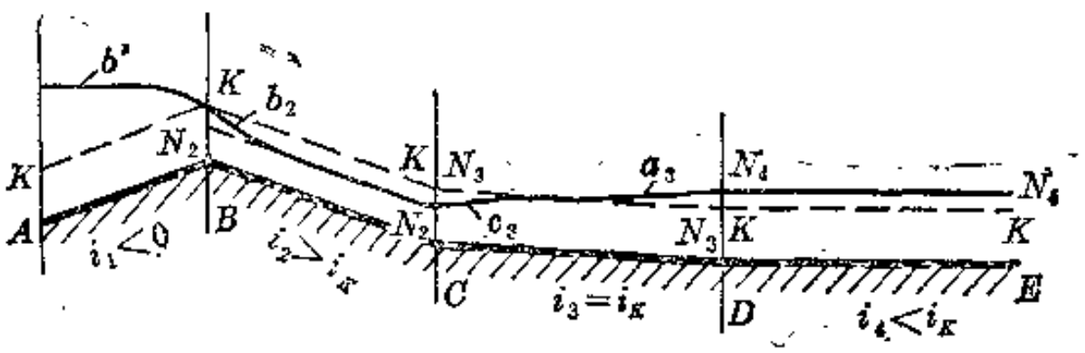
（七） 绘出下面棱柱体渠道中恒定流水面曲线的示意图。（10分）

解：

绘出各渠段的K-K线，绘出2，4渠段的N-N线，第二段为陡坡渠道N-N线在K-K线下面，第四段缓坡渠道相反N-N线在K-K线之上，第三渠段N-N线与K-K线重合，第一渠段负坡无N-N线。渠中无建筑物，绘出的水面曲线示意图如解一（七）



题 1-(七) 图



解 1-(七) 图

图所示。

2.某校一九八四年攻读硕士学位研究生入学考试水力学试题

（一） （1）一水箱的横剖面如图所示，长 1.2m 并 充满了承压水，压力表读数为0.14工程大气压。求使圆柱体保持如图示位置所需的各分力。圆柱体的重量忽略不计。（10分）

解：

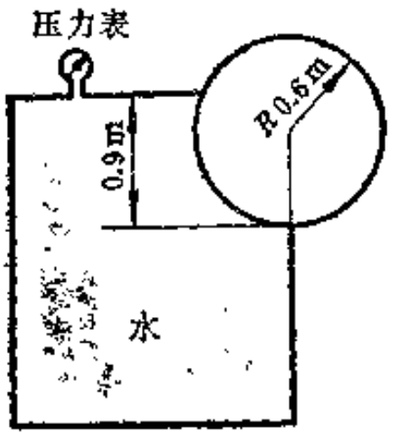
（1）压力表压强换算成水柱高

$$p=0.14\text{工程大气压}$$

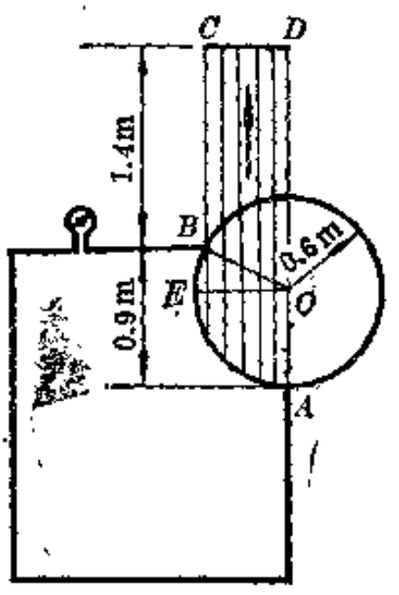
$$=1.4\text{m水柱高}$$

（2）静水总压力的水平分力

$$P_x=\gamma h_c A_x$$



题 2-(一)(1) 图



解 2-(一)(1) 图

$$=9800\left(1.4+\frac{0.9}{2}\right)\times 0.9\times 1.2$$

$$=19580\text{N}$$

(3) 静水总压力的垂直分力

$$P_z=\gamma V_{ABCDO}$$

$$=\gamma(\text{扇形}ABO+\text{梯形}OBCD)\times L$$

$$\angle BOE=\arcsin\frac{BE}{OB}$$

$$=\arcsin\frac{0.3}{0.6}$$

$$=30^\circ$$

$$\angle AOB=30^\circ+90^\circ=120^\circ$$

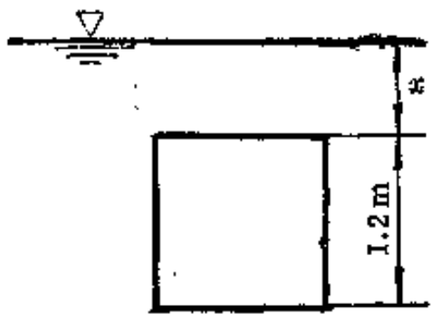
$$L=1.2\text{m}$$

$$P_z=\gamma\left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\times\pi R^2+\frac{1.4+1.7}{2}\times R\cos 30^\circ\right)L$$

$$=9800\left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\times 3.14\times 0.6^2+\frac{1.4+1.7}{2}\times 0.6\times\cos 30^\circ\right)$$

$$\times 1.2=13903\text{N}$$

圆柱体保持其图示位置所需水平分力$F_x=19580\text{N}$，垂直分



题 2-(一)(2)图

力$F_y=13803$N，作用的方向与P_x和P_z相反。

（2）一个边长为1.2 m的正方形置于静水中（如图），为使压力中心低于形心75 mm，问该正方形顶边距离水面x是多少m？（10分）

解：

设压力中心和形心距水面分别为y_D和y_c，则

$$y_c=x+0.6$$

$$y_D=y_c+0.075$$

又因

$$y_D=y_c+\frac{I_c}{Ay_c}$$

$$=y_c+\frac{\frac{1.2^4}{12}}{1.2^2y_c}$$

$$=y_c+\frac{1.2^2}{12y_c}$$

于是

$$y_c+0.075=y_c+\frac{1.2^2}{12(x+0.6)}$$

从而

$$x=\frac{1.2^2}{12\times0.075}-0.6=1.0\ \text{m}$$

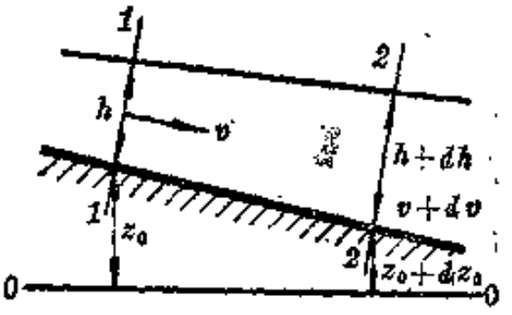
（二）（1）证明在不计摩阻力时，断面为矩形的棱柱体渠道的水面曲线方程为$l=\frac{h}{2i}\left[2+\left(\frac{h_K}{h}\right)^3\right]+C$，式中$h$为水深，$h_K$为临界水深，$i$为底坡，$C$为常数。（10分）

解：

以0-0为基面写1-1，2-2断面的能量方程

$$z_0+h\cos\theta+\frac{\alpha_1v^2}{2g}$$

$$=z_0+dz_0+(h+dh)\cos\theta+\frac{\alpha_2(v+dv)^2}{2g}$$



解 2-(二)(1)图

$$\frac{v^2}{2g}=dz_0+dh\cos\theta+\frac{1}{2g}[v^2+2vdv+(dv)^2]$$

略去二阶微量，当θ较小时$\cos\theta\doteq1.0$，整理得

$$dz_0+dh+\frac{dv^2}{2g}=0$$

$\because$ $$dz_0=-idl$$

$\therefore$ $$d\left(-il+h+\frac{\alpha v^2}{2g}\right)=0$$

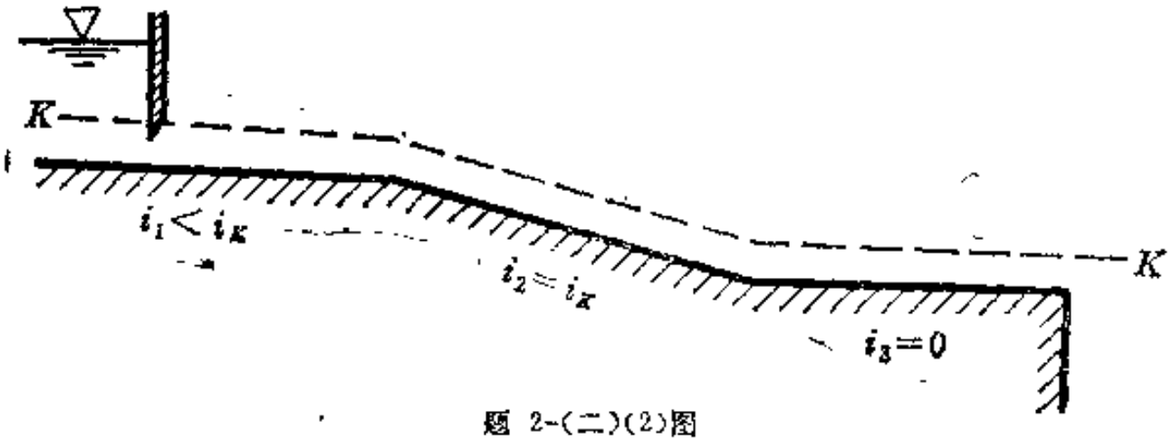
积分整理得

$$l=\frac{1}{i}\left(h+\frac{\alpha v^2}{2g}\right)+C$$

$$=\frac{h}{2i}\left(2+\frac{\alpha q^2}{gh^3}\right)+C$$

$$=\frac{h}{2i}\left(2+\left(\frac{h_K}{h}\right)^3\right]+C$$

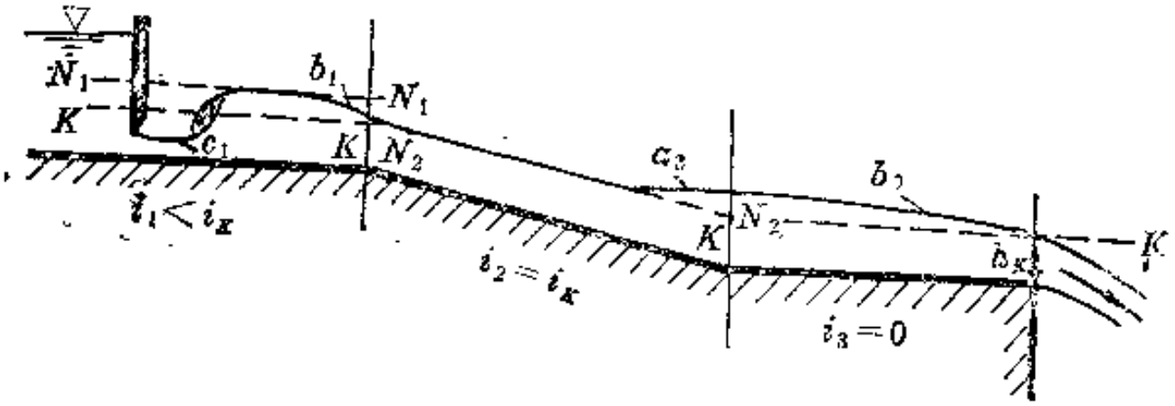
（2）定性绘制棱柱体渠道的水面曲线。（渠道充分长，糙率沿程不变）（10分）



题 2-(二)(2)图

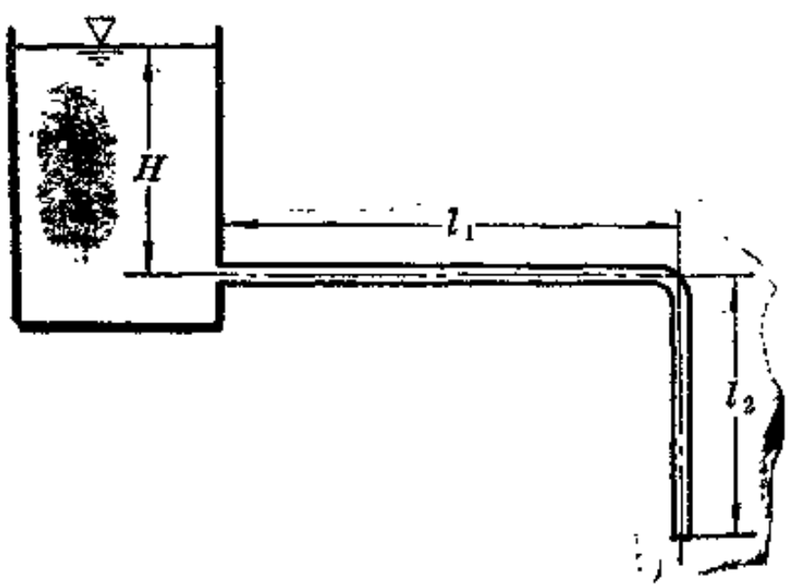
解：

第一渠段是缓坡渠道，N-N线在K-K线以上，由于闸孔开度小于h_K，闸下产生水跃。第二渠段是临界坡渠道N-N与K-K重合，第三渠段为平坡渠道，无N-N线，绘出各段渠道水面曲线的示意图如图示。



解 2-(二)(2)图

（三）如图所示水箱和管路，已知$H=3$m，管径为$d=0.025$m，管长：水平段$l_1=10$m，垂直段$l_2=15$m。管子为镀锌铁管（清洁，其当量粗糙度$k_s=2.5\times10^{-4}$m）。管子转弯半径$R=0.5$m，求▽。固定不变时，管路过流能力；并绘出水平段的测压管水



解 2-(三)图

头线（变化点注明数值）及总水头线。水的运动粘滞系数 $\nu=0.00658cm^2/s$，进口局部损失$\zeta_1=0.5$，缓弯管局部水头损失$\zeta_2=\left[0.131+0.163\left(\frac{d}{R}\right)^{3.5}\right]\frac{\theta}{90^\circ}$ （20分）

解：

（1）计算流量

①确定沿程阻力系数λ和局部阻力系数

沿程阻力系数：假设在题给条件下，水流在紊流粗糙区，沿程阻力系数由尼库拉兹经验公式计算

$$\lambda=\frac{1}{\left[2\lg\left(3.7\frac{d}{k_s}\right)\right]^2}$$

$$=\frac{1}{\left[2\lg\left(3.7\times\frac{0.025}{2.5\times10^{-4}}\right)\right]^2}$$

$$=0.0379$$

局部阻力系数

$$\zeta_2=\left[0.131+0.163\left(\frac{d}{R}\right)^{3.5}\right]\frac{\theta}{90^\circ}$$

$$=\left[0.131+0.163\left(\frac{0.025}{0.5}\right)^{3.5}\right]\frac{90^\circ}{90^\circ}$$

$$=0.131$$

$\zeta_1=0.5$

②计算流量

以2-2断面为基准面，写1-1、2-2断面的能量方程

$$H+l_2=\frac{\alpha v^2}{2g}+h_f+h_j$$

$$H+l_2=\frac{v^2}{2g}\left(\alpha+\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)$$

$$v=\sqrt{\frac{2g(H+l_2)}{\alpha+\lambda\frac{L}{d}+\zeta_1+\zeta_2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times 9.8(3+15)}{1+0.0379\times\frac{25}{0.025}+0.5+0.131}}$$

$$=2.99\text{m/s}$$

$$Q=\frac{\pi d^2}{4}v$$

$$=\frac{3.14\times 0.025^2}{4}\times 2.99$$

$$=0.00147\text{m}^3/\text{s}=1.47\text{l/s}$$

③校核假设水流在紊流粗糙区的正确性

$$\text{Re}=\frac{vd}{\nu}$$

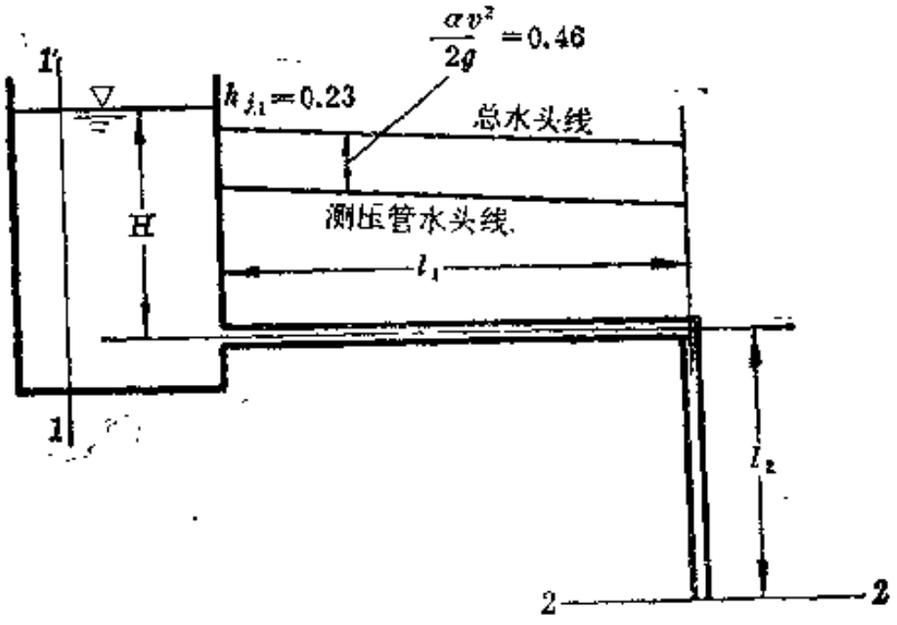
$$=\frac{299\times 2.5}{0.00658}$$

$$=1.14\times 10^5$$

$$\because\quad \frac{382}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{r}{k_s}\right)=\frac{382}{\sqrt{0.0378}}\left(\frac{0.025/2}{2.5\times 10^{-4}}\right)$$

$$=0.981\times 10^5$$

$$\therefore\quad 1.14\times 10^5>0.981\times 10^5$$



解 2-(三)图

故水流在紊流粗糙区，假设正确。

（2）绘制总水头线和测压管水头线

$$h_{j1}=\zeta_1\frac{v^2}{2g}=0.5\times\frac{2.99^2}{2\times9.8}$$

$$=0.23\text{m}$$

$$h_{f1}=\lambda\frac{l_1}{d}\frac{v^2}{2g}=0.0379\times\frac{10}{0.025}\times\frac{2.99^2}{2\times9.8}$$

$$=6.91\text{m}$$

根据上述数据，绘出水平管道的总水头线，总水头线减去$\frac{v^2}{2g}=\frac{2.99^2}{2\times9.8}\approx0.46$m得测压管水头线如图所示。

（四）一坝下平面有压渗流，均质土壤，渗透系数$k=2.0\times10^{-4}$cm/s，上游水头$H_1=25$m，下游水头$H_2=12$m，如已绘制了曲线正方形的流网，共有等势线14条，流线12条，现将基准面取在下游水面上。

（1）该流网图的比尺为1:200。图中某正方形网格的边长$\Delta s=4$cm，问该网格水流的平均水力坡度$J=$？渗流速度$u=$？

（2）垂直于坝轴线单位宽度上的渗流量$q=$？

（3）最后一条等势线，也就是坝后河床面上某点的渗流压强$p=$？

（4）从坝上游向下游数第2条等势线的流速势$\varphi_2=$？

（20分）

解：

（1）计算水力坡度J和渗流速度u

流网图比尺为1:200，$\Delta s=4\times200=800$cm

$$\Delta H=\frac{H_1-H_2}{m-1}=\frac{25-12}{14-1}=1.0\text{m}$$

$$J=\frac{\Delta H}{\Delta s}=\frac{1.0}{8.0}=0.125$$

$$u=kJ=2.0\times10^{-4}\times0.125$$

$$=2.5\times10^{-5}\text{cm/s}$$

（2）计算渗流单宽流量 q

$\Delta q = u\Delta b$ 流网为正方形网格 $\Delta b = \Delta s$

$$q = (n-1)\Delta q$$
$$= (n-1)u\Delta b$$
$$= (12-1)\times 2.5\times 10^{-5}\times 800$$
$$= 0.22\text{cm}^3/\text{s-m}$$

（3）计算最后一条等势线上的压强 p

$$p = \gamma[H_1-(m-1)\Delta H]$$
$$= 9800[25-(14-1)\times 1]$$
$$= 117600\text{N/m}^2$$
$$= 11.76\text{N/cm}^2$$

（4）计算第 2 条等势线的流速势 φ

$$\varphi = -kH$$
$$\varphi_2 = -k(H_1-H_2-\Delta H)$$
$$= -2.0\times 10^{-5}(25-12-1)$$
$$= -2.0\times 10^{-5}\times 12$$
$$= -2.4\times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$$

（五）某平面运动的流速场可表示为：$u_x = Cx$；$u_y = -Cy$。C 为常数。问该流动

（1）欧拉加速度 a = ？

（2）是否满足连续方程？

（3）是否有涡？

（4）是否有角变形？

（5）势函数的表达式，等势线方程；

（6）流函数的表达式，流线方程；

（7）等势线族和流线族的示意图。（20分）

解：

（1）欧拉加速度 a

$$a_x = \frac{du_x}{dt}$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$= 0 + Cx \times C + (-Cy) \times 0$$

$$= C^2x$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt}$$

$$= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$= 0 + Cx \times 0 + (-Cy) \times (-C)$$

$$= C^2y$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$= \sqrt{(C^2x)^2 + (C^2y)^2}$$

$$= C^2\sqrt{x^2 + y^2}$$

（2）是否满足连续性方程

$\because$ $$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = C - C$$

$$= 0$$

故 满足连续性方程

（3）是否有涡

$\because$ $$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0 - 0)$$

$$= 0$$

故 该流动无涡

（4）是否有角变形

$\because$ $$\theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0 + 0)$$

$$= 0$$

故 无角变形

（5）势函数的表达式，等势线方程

势函数表达式

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy$$
$$= Cx dx - Cy dy$$

$\therefore$
$$\varphi = \frac{C}{2}x^2 - \frac{C}{2}y^2 + C'$$
$$= \frac{C}{2}(x^2 - y^2) + C'$$

等势线方程

$\because$
$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = 0$$

$\therefore$
$$\frac{C}{2}(x^2 - y^2) = k'$$

即
$$x^2 - y^2 = k$$

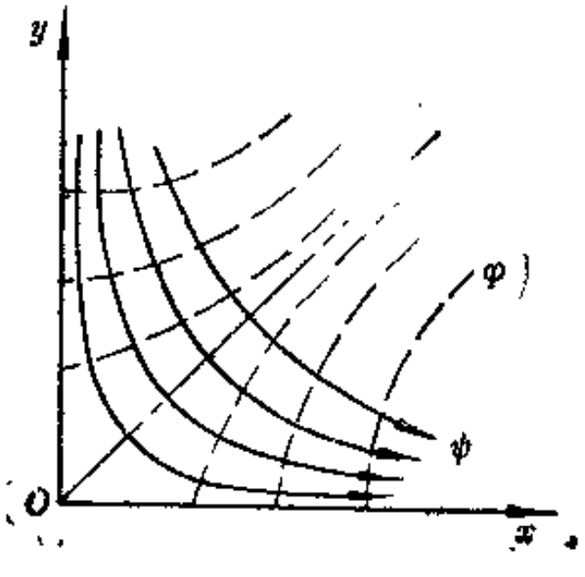
（6）流函数的表达式，流线方程

流函数表达式

$\because$
$$d\psi = u_x dy - u_y dx$$
$$= C(x dy + y dx)$$

又 $\frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial(-u_y)}{\partial y}$ 属全微分型

$\therefore$
$$\psi = Cxy + C_1$$



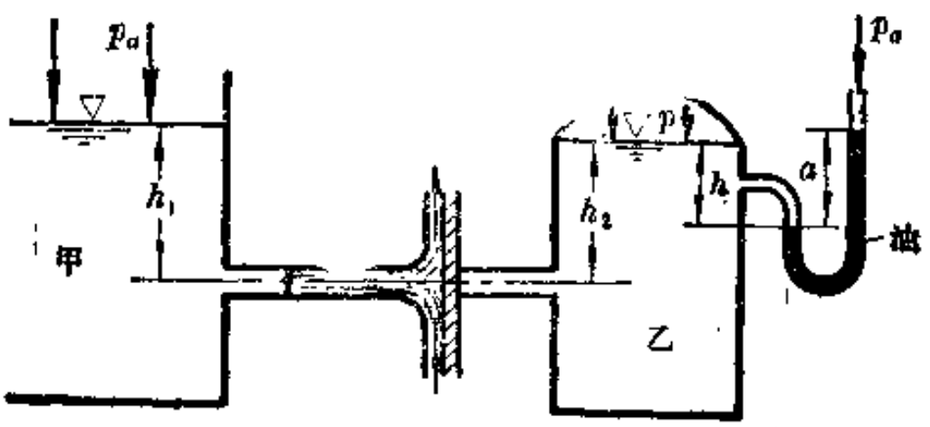
解 2-(五)(7)图

（7）等势线族和流线族示意图

流线是以坐标轴为渐近线的等轴双曲线用实线表示，等势线也是等轴双曲线用虚线表示，当只考虑第一象限时绘图如解2-（五）（7）。

3.某校一九八五年攻读硕士学位研究生入学考试水力学试题

（一）水从甲水库侧壁上的圆柱管嘴射出（管嘴的流量系数$\mu=0.82$），沿水平方向冲击在平板上，平板的另一侧封住乙水库的泄水管出口，设甲、乙两水库的水位保持不变，管嘴及泄水管内径相同（均以d表示）。试求使平板两侧水流作用力相互平衡时的h_1值。水的重率为γ；油的重率为γ_0；Q、h、h_2均为已知。（15分）



题 3-(一)图

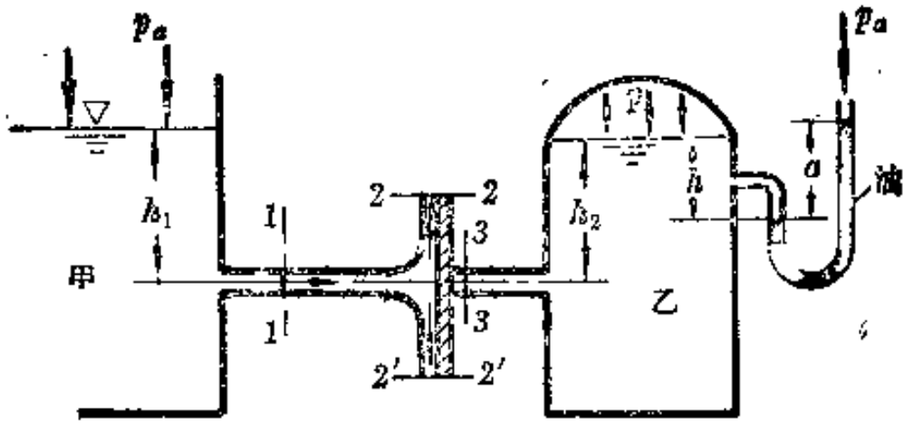
解：

由管嘴射出的流量为

$$Q=\mu\sqrt{2gh_1}\cdot\frac{\pi d^2}{4}$$

管嘴出口断面1-1上的平均流速为

$$v_1=\frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}=\mu\sqrt{2gh_1}$$



解 3-(一)(a)图

取1-1和2-2、2′-2′断面间的水体为控制体，列x方向的动量方程，设x方向如图所示，平板对控制体的作用力为$R_x(\leftarrow)$，则

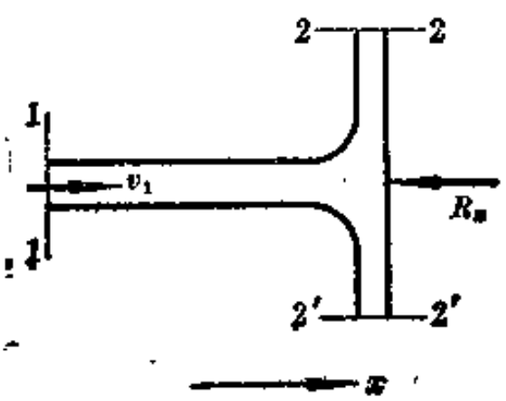
$$-R_x=\rho Q(v_{2x}-v_1)$$

$$\because \quad v_{2x}=0$$

$$\therefore \quad R_x=\rho\mu\sqrt{2gh_1}\cdot\frac{\pi d^2}{4}\cdot\mu\sqrt{2gh_1}$$

$$=\rho\mu^2\frac{\pi d^2}{4}\cdot 2gh_1$$

（与管嘴射流作用在平板上的力大小相等，方向相反。）



解 3-(一)(b)图

乙库水作用在平板上的力为

$$P_x=[\gamma_0 a+\gamma(h_2-h)]\cdot\frac{\pi d^2}{4}$$

$$\because \qquad R_2 = P_x$$

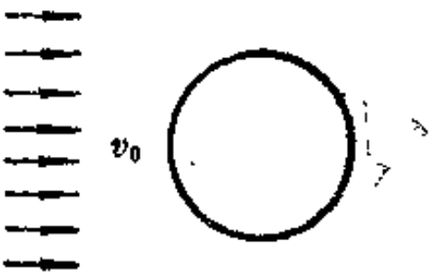
$$\therefore \qquad \rho\mu^2\frac{\pi d^2}{4}\cdot 2gh_1 = \frac{\pi d^2}{4}[\gamma_0 a+\gamma(h_2-h)]$$

于是

$$h_1 = \frac{1}{2\mu^2}\left[\frac{\gamma_0}{\gamma}a+(h_2-h)\right]$$

$$= \frac{1}{1.34}\left[\frac{\gamma_0}{\gamma}a+(h_2-h)\right]$$

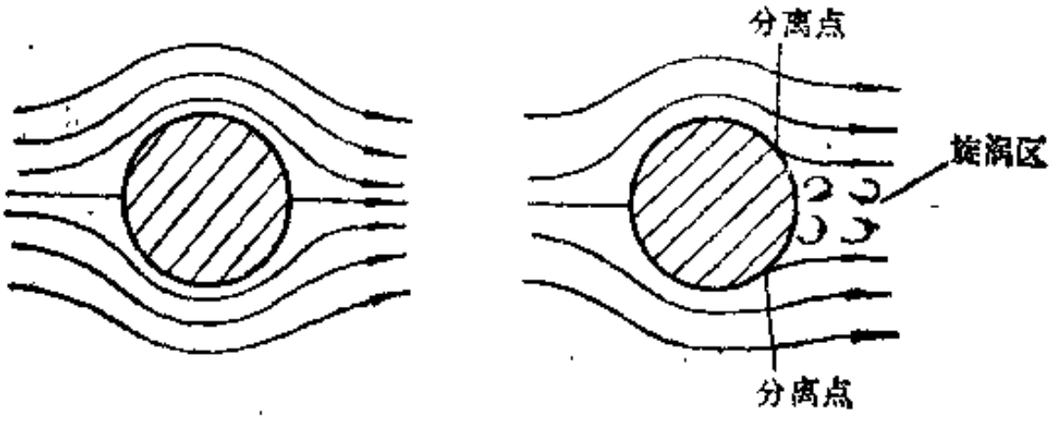
（二）什么是边界层？边界层内及边界层外的流动有何区别？一水平放置的圆柱，静止置于均匀流中如图所示，当均匀流的流速v_0不是太小时，试绘出理想液体及实际液体分别绕过圆柱时的流动示意图。（15分）



题 3-(二) 图

解：

当实际流体与固体间存在相对运动时，实际流体在固体边界上的相对速度为零。因此，流速梯度与切应力均在边界上有极大值，而在流体内部则逐渐减小。对于粘性很低但速度或加速度相当大的流体来讲，也是如此，即在靠近固体边界的一定流动区域内，其流速梯度大从而产生明显的切应力，在此区域外，流速梯度则迅速坦化。此流动区域称为边界层。在边界层内流速沿边界层厚度有一定数量的变化，粘性力与惯性力同数量级；在边界层

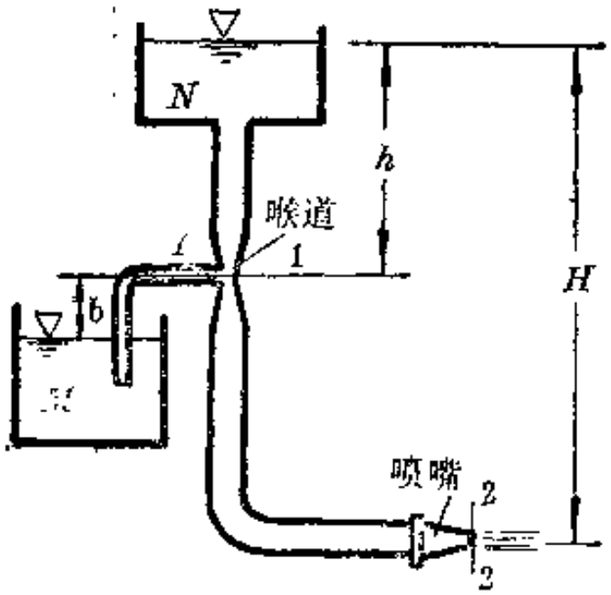


理想液体　　解 3-(二)图　　实际液体

外，粘性力对流体运动的影响甚小，因此，边界层外主流区的流线基本上与势流的一致。

理想液体及实际液体绕过圆柱时的流动示意图如解3-(二)图

（三）图示一吸水装置，水库N及M的水位不变，今已知H、b、h，若不计损失，问喉道断面面积A_1与喷嘴出口断面面积A_2之间应满足什么条件才能开始将水自水库M中吸入喉道。（15分）



题 3（三）图

解：

对喉道断面1-1及喷嘴出口断面2-2写能量方程，以过喷嘴轴线的水平面为基准面（不计水头损失，并设$\alpha_1=\alpha_2=1$）得

$$(H-h)+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_a}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g} \qquad (1)$$

对N水库水面及喷嘴出口断面2-2写能量方程，（同样不计水头损失，并设$\alpha_1=\alpha_2=1$）得

$$H=\frac{v_2^2}{2g} \qquad (2)$$

将（2）式的v_2代入（1）式中，得

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_a}{\gamma}-(H-h)+H-\frac{v_1^2}{2g} \qquad (3)$$

又∵ $$v_1A_1=v_2A_2$$

∴ $$v_1^2-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2v_2^2=2g\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\cdot H$$

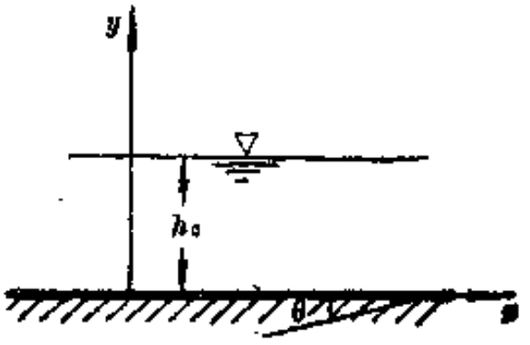
将上式代入（3）式中，得

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_0}{\gamma}-(H-h)+H-H\cdot\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2$$

$$=\frac{p_0}{\gamma}+H\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]-(H-h)$$

当$\frac{p_1}{\gamma}\leqslant\frac{p_a}{\gamma}-b$时，水自水库$M$被吸入喉道，即$\frac{p_0}{\gamma}+H\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]-(H-h)\leqslant\frac{p_a}{\gamma}-b$时，水自水库$M$中被吸入喉道，于是由上列不等式解得

$$\frac{A_2}{A_1}\geqslant\sqrt{\frac{b+h}{H}}$$



题 3-(四) 图

（四）.如图所示的斜面上，水流为二元均匀层流，今已知自由表面上的切应力为零，试由纳维埃-司托克斯方程导出下列公式：

（1）过水断面上的液体压强分布公式；

（2）斜面上切应力的表达式；

（3）过水断面上流速的分布公式；

（4）单宽流量公式。（20分）

解：

（1）因水流是二元均匀层流，$u_x \neq 0$，$u_y = 0$，惯性力项可忽略，故由纳维埃-司托克斯方程可简化为

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

式中 $$X = g\sin\theta,\quad Y = -g\cos\theta$$

由（1）式可知$\frac{\partial p}{\partial x}$与$x$无关，于是$p = f(y)$，故$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dp}{dy}$对式（2）积分，得

$$p = -\rho g y\cos\theta + C \qquad (3)$$

当$y = h_0$时 $p = 0$于是积分常数

$$C = \gamma h_0\cos\theta$$

将积分常数C代入式（3），得到过水断面上的压强分布公式为

$$p = \gamma(h_0 - y)\cos\theta = \gamma h\cos\theta \quad (h\text{为水面下深度})$$

（2）因为$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$，所以式（1）可简化为

$$g\sin\theta + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0$$

因为u_x只与y方向有关，与x无关，故偏微分可写为全微分，对上式积分，得

$$\frac{du_x}{dy} = -\frac{\gamma y}{\mu}\sin\theta + A \qquad (4)$$

再积分

$$u_x = -\frac{\gamma y^2}{2\mu}\sin\theta + Ay + B \qquad (5)$$

当$y = h_0$时 $\tau|_{y=h_0} = 0$ 从而$\frac{du}{dy} = 0$

于是由（4）式解得

$$A=\frac{\gamma h_0}{\mu}\sin\theta$$

将积分常数A代入（4）式得

$$\frac{du_x}{dy}=\frac{\gamma}{\mu}(h_0-y)\sin\theta$$

于是，斜面上切应力的表达式为

$$\begin{aligned}(\tau)_{y=0}&=\mu\left(\frac{du_x}{dy}\right)_{y=0}\\&=\mu\cdot\frac{\gamma}{\mu}h_0\sin\theta\\&=\gamma h_0\sin\theta\end{aligned}$$

（3）当$y=0$时，$u_x=0$由式（5）解得$B=0$

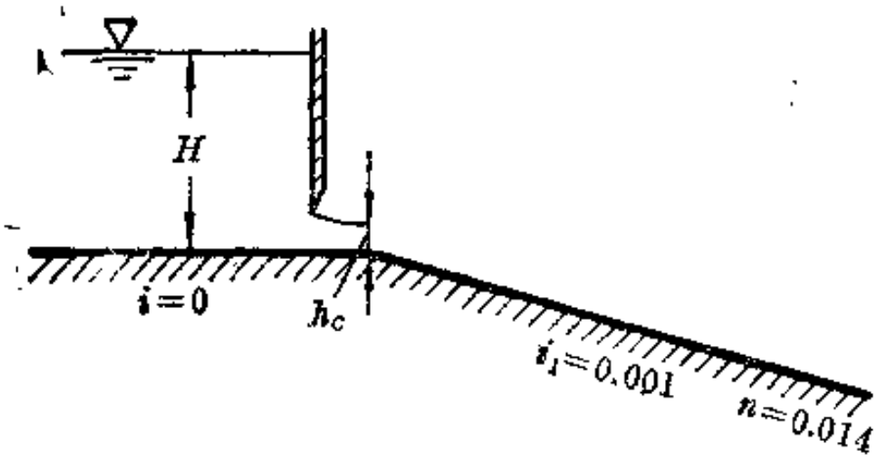
于是，过水断面上的流速分布公式为

$$\begin{aligned}u_x&=-\frac{\gamma y^2}{2\mu}\sin\theta+\frac{\gamma h_0 y}{\mu}\sin\theta\\&=\frac{\gamma}{2\mu}(2h_0y-y^2)\sin\theta\end{aligned}$$

（4）单宽流量q为

$$\begin{aligned}q&=\int_0^{h_0}u_x dy\\&=\frac{\gamma\sin\theta}{2\mu}\int_0^{h_0}(2h_0y-y^2)dy\\&=\frac{\gamma\sin\theta}{2\mu}\left(h_0y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{h_0}\\&=\frac{\gamma\sin\theta}{2\mu}\left(h_0^3-\frac{h_0^3}{3}\right)\\&=\frac{\gamma h_0^3}{3\mu}\sin\theta\end{aligned}$$

（五）一平板闸门位于宽阔的矩形槽中，如图所示，今已知，闸前水深$H=5$m；闸下收缩水深$h_c=0.6$m；闸下出流的流速系数$\varphi=0.98$；闸下游渠道的底坡坡度i_1及糙率n分别为$i_1=$



题 3-(五) 图

0.001及 $n=0.014$，如略去闸前行进流速不计，并设 $\alpha=\alpha_0=1$（α及α_0分别为水流能量及动量校正系数），试计算闸下出流的单宽流量并绘出闸下游水面曲线的示意图。（20分）

解：

先假设闸下出流为自由出流，则

$$q=\varphi h_c\sqrt{2g(H-h_c)}$$
$$=0.98\times0.6\sqrt{2\times9.8\times(5-0.6)}$$
$$=5.46\text{m}^2/\text{s}$$

因矩形槽为宽阔槽，故 $R\approx h_0$。于是，由谢才公式及满宁公式

$$q=h_0C\sqrt{Ri_1}=\frac{1}{n}h_0^{5/3}\cdot i_1^{\frac{1}{2}}\text{解得}$$

$$h_0=\left(\frac{nq}{\sqrt{i_1}}\right)^{0.6}$$
$$=1.698\approx1.7\text{m}$$

又因临界水深为

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{5.46^2}{9.8}}$$
$$=1.45\text{m}$$

于是

$$h_0>h_K$$

故

$$i_1<i_K \quad \text{为缓坡}$$

又∵

$$h_c<h_K$$

∴ 槽中产生水跃

由于i_1甚小，可按下式计算h_c的共轭水深，即

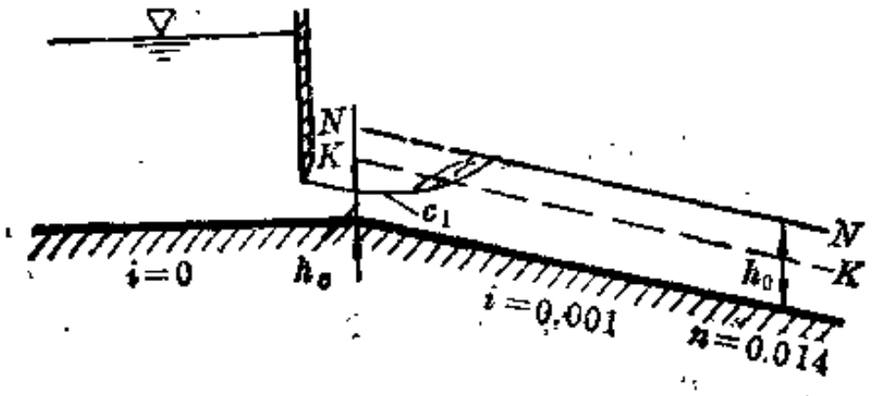
$$h_c''=\frac{h_c}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_c^3}}-1\right)$$

$$=\frac{0.6}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{5.46^2}{9.8\times0.6^3}}-1\right)$$

$$=2.896\approx2.9\text{m}$$

因为$h_0<h_c''$故闸下游产生远离式水跃，从而闸下出流为自由出流，前面按闸下自由出流公式计算出的$q=5.46\text{m}^3/\text{s-m}$即为本题之解。

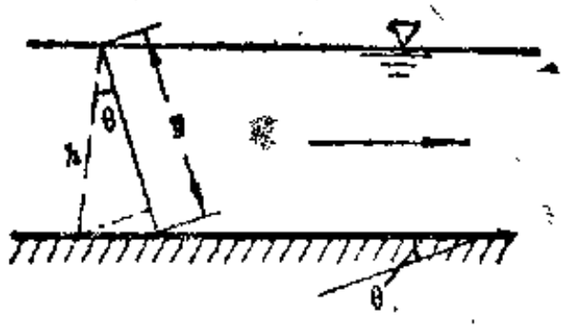
闸下游水面曲线的示意图如下



解 3-(五) 图

（六）一矩形陡槽中产生均匀水流如图所示，今已知，陡槽底面与水平面的夹角$\theta=30°$；铅垂水深$y=0.2\text{m}$；单宽流量$q=4\text{m}^3/\text{s-m}$；水流能量校正系数$\alpha=1.1$，试求：（1）槽底上的水流压强；

（2）试导出此矩形陡槽临界水深的公式，并根据已知条件计算临界水深；



题 3-(六) 图

（3）计算所给水流的佛汝德数。（15分）

解：

（1）设各过水断面水深为 h，因水流为均匀流，过水断面上各点压强可按静水压强计算，槽底各点的测压管高度为 $h\cos\theta$，故其压强为

$$\begin{aligned} p|_{z=0} &= \gamma h\cos\theta \\ &= \gamma y\cos^2\theta \\ &= 9800\times 0.2\times\cos^2 30^\circ \\ &= 1470\mathrm{N/m^2} \end{aligned}$$

（2）因水流为均匀流，各过水断面的断面比能相等，为

$$E_s = h\cos\theta + \frac{\alpha q^2}{2gh^2}$$

由比能曲线特征得知，相应于断面比能最小值的水深为临界水深，故令 $\dfrac{dE_s}{dh}=0$

于是

$$\frac{dE_s}{dh} = \cos\theta - \frac{\alpha q^2}{gh_k^3} = 0$$

由上式解 h_k，得

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g\cos\theta}} = \sqrt[3]{\frac{1.1\times 4^2}{9.8\times\cos 30^\circ}} = 1.28\mathrm{m}$$

（3）水流的佛汝德数为

$$Fr=\frac{v}{\sqrt{gh\cos\theta/\alpha}}=\frac{q}{y\cos\theta\sqrt{gy\cos^2\theta/\alpha}}$$

$$=\frac{4}{0.2\cos30^\circ\sqrt{9.8\times0.2\cos^230^\circ/1.1}}$$

$$=19.98$$

$$\approx20$$

[General Information]
书名=水力学难题分析
作者=
页数=425
SS号=11043627
出版日期=

封面
书名
版权
前言
目录
目录
一、计算题及证明题
Ⅰ．液体的主要物理性质及水静力学（题１～５２）
Ⅱ．水动力学基本原理，液流型态及水头损失（题５３～１０７）
Ⅲ．有压管道中的恒定及非恒定流动（题１０８～１４３）
Ⅳ．明槽流（题１４４～１６０）
Ⅴ．水跃及堰，闸出流（题１６１～１８８）
Ⅵ．液体运动的流场理论（题１８９～２０１）
Ⅶ．渗流，相似原理及量纲分析（题２０２～２１３）
二、思考题（题２１４～２４５）
三、研究生入学考试水力学试题实例
１．某校一九八三年攻读硕士学位研究生入学考试水力学试题
２．某校一九八四年攻读硕士学位研究生入学考试水力学试题