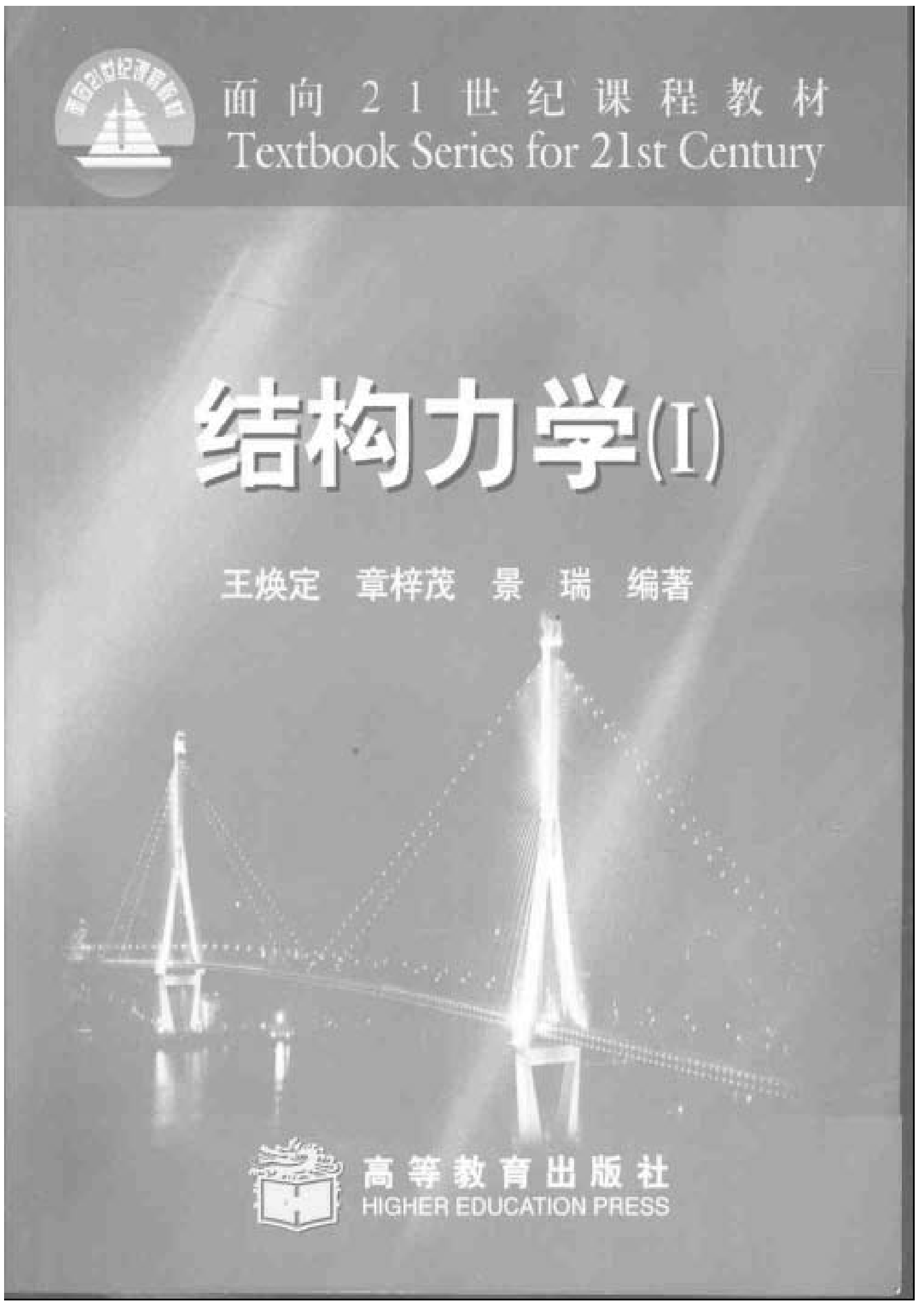
面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

结构力学(I)

王焕定　章梓茂　景　瑞　编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Structural Mechanics

O342-43
411



ISBN 7-04-007994-1
9 787040 079944 >
定价 27.90 元
(含光盘1张)

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

结构力学(I)

王焕定　章梓茂　景　瑞　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

结构力学 (Ⅰ)/王焕定等编著.—北京:高等教育出版社,2000.2
面向 21 世纪课程教材
ISBN 7-04-007994-1

Ⅰ.结… Ⅱ.王… Ⅲ.结构力学-高等学校-教材 Ⅳ.O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 64390 号

结构力学(Ⅰ)
王焕定 章梓茂 景 瑞 编著

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009
电 话 010 64054588 传 真 010-64014048
网 址 http://www.hep.edu.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 中国科学院印刷厂
纸张供应 山东高唐纸业集团总公司

开 本 787×960 1/16 版 次 2000年2月第1版
印 张 16.75 印 次 2000年2月第1次印刷
字 数 280 000 定 价 27.90 元

如有缺页、倒页、脱页等
部门联系调换。

内 容 提 要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是教育部面向21世纪课程教材和教育部工科力学"九五"规划教材。本书与同类教材相比，具有以下特色：注意与相关课程的贯通、融合与渗透，减少了不必要的相互重叠内容；对经典内容加以精选，使之更加简练，并富有新意；在保证基础的前提下，引进了一些反映近代科技成果的新内容，将经典的手算与计算机分析有机地结合起来；广泛涉及诸多工程概念，重组课程体系；注意启发式教学，为学生独立思维留出较大的空间。本书第(Ⅰ)册附有《结构力学教学实践和工程计算分析》软件光盘1张。

全书分(Ⅰ)、(Ⅱ)两册，第(Ⅰ)册为结构静力分析篇，共7章，含现有结构力学中的经典内容，第(Ⅱ)册为结构计算机分析篇和结构动力分析篇，共10章。本书为第(Ⅰ)册。

本书可作为高等学校土木、交通、水利和力学等各专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书。本书第(Ⅰ)册还可作为非结构类等专业和各层次有关土木类等专业的教材。

序

本书是教育部"面向21世纪力学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践"项目的研究成果之一，是项目课题组总负责人范钦珊教授结合土木类专业提出的模块式改革方案中的一个模块。本书成书之前，相关的教学讲义经过哈尔滨建筑大学和北方交通大学三年试用。

本书的特点是：加强了相关课程，即理论力学、材料力学和结构力学内容的贯通，消除了一些不必要的重叠。在保证结构力学基本概念、基本原理和基本方法的基础上，根据少而精和推陈出新的原则，删除了一些过于繁杂的手算内容，将经典内容与计算机数值分析方法有机地结合起来，力求实现在经典的基础上更新，在更新的前提下加深对经典内容的理解；注意启发式教学，为读者的独立思维留有较大空间，以利于创新能力的培养；为适应因材施教的需要，在保证结构力学现有教材基本理论系统性的基础上，增加了有限单元法、结构非线性动力响应分析、结构地震响应和结构振动控制等新概念、新理论、新内容和新方法，以供不同院校、不同层次的学生选教选学。本书附有《结构力学教学实践和工程计算分析软件》光盘1张。

全书分为(Ⅰ)、(Ⅱ)两册，第(Ⅰ)册为结构静力分析篇，包括结构力学经典的内容共7章；第(Ⅱ)册为结构计算机分析篇和结构动力分析篇，共10章。第(Ⅱ)册除经典内容外，还引入了一些现代计算机分析的内容。

本书可作土木类等多学时专业的教材，第(Ⅰ)册也可作非结构类等专业和各层次有关土木类专业的结构力学教材。书中带*的章节可按专业的要求和学生的层次加以取舍。

参加本书编写工作的有王焕定(绪论，结构静力分析篇的引言，第2、6、7章，结构计算机分析篇的第1章和结构动力分析篇第8章的部分内容、第10章及所有章的结论与讨论)、章梓茂(结构动力分析篇的第6、7及第8章主要内容)、景瑞(结构静力分析篇的第4章)、张金生(结构静力分析篇的第1、3、5章)、王伟(结构计算机分析篇的第2～5章)、于桂兰(结构动力分析篇的第9章主要内容)。刘季编写了结构动力分析篇的改革试点讲义，并进行了一

440691/04

轮教学实践，该讲义是动力分析篇的基础。此外，耿淑伟参加了结构动力分析篇中单自由度非线性、子空间迭代和时程分析内容的编写和程序开发。本书插图由王璐绘画。全书由范钦珊和王焕定统稿。

本书承蒙西安建筑科技大学刘铮教授主审、东南大学单建教授和西安建筑科技大学吴敏哲教授审阅，三位教授提出了许多建设性意见和具体修改建议，为提高本书质量作出了重要贡献。

在本书的编写过程中得到教育部“面向21世纪力学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”项目课题组总负责人范钦珊教授以及清华大学、哈尔滨建筑大学、北方交通大学和高等教育出版社的大力支持。

藉本书出版之际，编者谨向审阅书稿的三位教授、支持本书编写和出版的人们致以衷心的谢忱。

由于编者水平的局限，书中难免有疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

1999年教师节

主要符号表

A	面积	M^F	固端弯矩
c	支座广义位移	M_u	极限弯矩
d	节间距离	M_e	弹性极限弯矩
E	弹性模量	q	均布荷载集度
E_P	结构总势能	R	广义反力、半径
E_P^*	荷载势能	r	单位位移引起的广义反力、半径
f	矢高、工程频率	S	转动刚度、影响线量值
F_P	荷载	u	水平位移
$\boldsymbol{P}$	结构荷载向量	v	竖向位移、挠度
F_H	水平推力	V_ε	应变能
F_{Ax}, F_{Ay}	A 处铰支座(约束)的分反力	W	功、平面体系计算自由度、
F_N	轴力		弯曲截面系数
F_Q	剪力	X	广义未知力
F_Q^L、F_Q^R	截面左、右的剪力	y	位移
F_{cr}	临界荷载	Z	广义未知位移
F_{Pu}	极限荷载	α	线膨胀系数
F_P^+	可破坏荷载	Δ	结构广义位移
F_P^-	可接受荷载	$\boldsymbol{\Delta}$	结构位移向量
G	切变模量	δ	虚位移、广义位移
i	线刚度	ε	线应变
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵	σ	应力
k	刚度系数、剪力分布不均匀系数	σ_s	屈服应力
M	力矩、力偶矩、弯矩	σ_u	极限应力

本书符号表说明

为了深入贯彻国家技术监督局发布的国家标准(GB 3100～3102—93)《量和单位》,本书对结构力学符号和单位的传统用法作了调整,既保证了对国家标准的认真实施,又考虑了教师和学生使用上的习惯与方便。

在实施国家标准的过程中,为保证国家标准和现有惯例的衔接,本书作了认真的考虑,现作如下说明,请读者注意。

1. 国家标准规范的物理量和名称和符号,按国家标准使用,注重量的物理属性。如,旧称剪应变(剪切角)γ,现改称切应变;又如,各种力(包括荷载、反力和内力)都用 F 作为主符号,而将其特性以下标(上标)表示;等等。

2. 对于在结构力学中广泛使用的广义力(包括力与力偶矩、力矩)和广义位移(包括线位移与角位移),为了体现其广义性(有时还有未知性),考虑到全书叙述的统一和表达的简洁、完整,本书仍沿用 X(多余力未知力)、R 和 r(约束反力)、Δ 和 δ(位移)、c(支座位移)等广义物理量。至于它们在具体问题中对应的量和相应单位,则视具体问题而定。

3. 在结构力学力法和位移法、位移和影响线计算中普遍应用的单位力 $\bar{X}=1$ 和 $F_P=1$ 等以及单位位移 $\bar{Z}=1$ 和 $\Delta=1$ 等,均应理解为"广义量的系数",是广义量自身相比的比值。为了书写方便且考虑到习惯用法,均简记为 $\bar{X}=1$ 和 $F_P=1$ 等以及 $\bar{Z}=1$ 和 $\Delta=1$ 等,其余的单位量与此类同。

目　录

结构力学总论

§1　结构力学的研究对象和研究内容 …… 1
1-1　研究对象 …… 1
1-2　课程所涉及的内容 …… 1
1-3　结构力学与其他课程和结构设计的关系 …… 2
§2　一些工程结构实例与计算简图 …… 3

结构静力分析篇

第1章　杆系结构的组成分析 …… 13
§1-1　基本概念 …… 13
1-1-1　自由度 …… 13
1-1-2　约束 …… 14
1-1-3　约束的分类 …… 15
1-1-4　计算自由度 …… 16
1-1-5　体系的分类 …… 17
§1-2　静定结构的组成规则 …… 18
1-2-1　静定结构组成规则 …… 18
1-2-2　组成分析举例 …… 20
§1-3　结论与讨论 …… 22
1-3-1　本章结论 …… 22
1-3-2　几点讨论 …… 23
习题 …… 23
第2章　静定结构受力分析 …… 26
§2-1　弹性杆内力分析回顾和补充 …… 26
2-1-1　材料力学内容回顾 …… 26
2-1-2　曲杆平衡方程 …… 27

2－1－3 结构力学与材料力学规定的异同 …… 27
2－1－4 区段叠加法作弯矩图 …… 28
§2－2 静定结构的内力分析方法 …… 29
2－2－1 静定结构内力分析方法 …… 29

§3-4 图乘法 …… 75
3-4-1 图乘法原理 …… 75
3-4-2 图乘法求位移时需注意的问题 …… 76
§3-5 各种外因引起的位移计算 …… 76
§3-6 互等定理 …… 86
3-6-1 功的互等定理 …… 86
3-6-2 位移互等定理 …… 87
3-6-3 反力互等定理 …… 88
*3-6-4 位移-反力互等定理 …… 88
§3-7 结论与讨论 …… 89
3-7-1 本章结论 …… 89
3-7-2 几点讨论 …… 90
习题 …… 91

第4章 超静定结构解法 …… 97
§4-1 求解超静定结构的一般方法 …… 97
§4-2 力法 …… 99
4-2-1 力法思路 …… 99
4-2-2 超静定次数的确定 …… 101
4-2-3 力法的解题步骤 …… 102
4-2-4 力法解超静定结构举例 …… 103
§4-3 力法计算的简化 …… 114
4-3-1 无弯矩状态的判别 …… 115
4-3-2 对称性利用 …… 116
*4-3-3 其他简化措施 …… 118
§4-4 位移法 …… 120
4-4-1 位移法的准备工作 …… 120
4-4-2 位移法思路 …… 126
4-4-3 位移法基本未知量及基本结构 …… 128
4-4-4 典型方程位移法解题步骤 …… 129
4-4-5 位移法解超静定结构举例 …… 131
*§4-5 混合法 …… 141
§4-6 超静定结构特性 …… 142
§4-7 结论与讨论 …… 143
4-7-1 本章结论 …… 143
4-7-2 几点讨论 …… 144
习题 …… 145

第5章 移动荷载作用下的结构分析 …… 151

§5-1 移动荷载及影响线概念 …… 151
5-1-1 活荷载 …… 151
5-1-2 影响线 …… 151
§5-2 静力法作影响线 …… 152
5-2-1 简支梁影响线 …… 152
5-2-2 经结点传荷的主梁影响线 …… 154
5-2-3 静定桁架影响线 …… 155
5-2-4 三铰拱影响线 …… 156
5-2-5 超静定结构影响线 …… 158
§5-3 虚功法作影响线 …… 159
5-3-1 虚功法(机动法)基本原理 …… 159
5-3-2 虚功法作影响线举例 …… 160
§5-4 影响线的应用 …… 164
5-4-1 利用影响线求固定荷载作用的量值 …… 164
5-4-2 利用影响线确定定位荷载最不利荷载分布 …… 165
5-4-3 利用影响线确定移动荷载最不利位置 …… 166
5-4-4 简支梁的绝对最大弯矩 …… 170
5-4-5 内力包络图 …… 172
§5-5 结论与讨论 …… 173
5-5-1 本章结论 …… 173
5-5-2 几点讨论 …… 174
习题 …… 175

第6章 矩阵位移法 …… 179
§6-1 概述 …… 179
§6-2 单元刚度方程 …… 182
6-2-1 平面桁架单元刚度方程 …… 182
6-2-2 连续梁单元刚度方程 …… 183
6-2-3 不考虑轴向变形的平面弯曲单元刚度方程 …… 183
6-2-4 平面弯曲自由式单元刚度方程 …… 184
6-2-5 单元刚度矩阵的性质 …… 185
6-2-6 单元分析举例 …… 185
§6-3 坐标转换问题 …… 187
6-3-1 平面自由式单元位移、力的坐标转换 …… 187
6-3-2 平面自由式单元刚度方程的坐标转换 …… 188
6-3-3 平面桁架单元的坐标转换 …… 189
6-3-4 坐标转换举例 …… 190
§6-4 整体分析 …… 192

6-4-1　连续梁的结构刚度方程 …… 193
6-4-2　平面刚架的结构刚度方程 …… 195
6-4-3　结构刚度方程集成举例 …… 200
§6-5　结构刚度和综合荷载元素速算法及单元内力计算 …… 202
6-5-1　结构刚度矩阵元素速算确定方法 …… 202
6-5-2　综合结点荷载元素的速算确定方法 …… 205
6-5-3　单元内力的计算 …… 208
§6-6　计算程序的主程序框图及算例 …… 209
6-6-1　主程序框图 …… 209
6-6-2　程序计算算例 …… 209
§6-7　结论与讨论 …… 213
6-7-1　本章结论 …… 213
6-7-2　几点讨论 …… 214
习题 …… 215
第7章　结构稳定及极限荷载计算的基本知识 …… 218
§7-1　两类稳定问题概述 …… 218
7-1-1　工程结构稳定验算问题 …… 218
7-1-2　稳定问题分类 …… 219
§7-2　两类稳定问题分析简例 …… 221
7-2-1　完善体系分支点失稳分析简例 …… 221
7-2-2　非完善体系极值点失稳分析简例 …… 225
§7-3　结构的极限荷载 …… 227
7-3-1　基本假定 …… 228
7-3-2　基本概念 …… 228
§7-4　极限平衡法及比例加载时极限荷载的一些定理 …… 230
7-4-1　极限平衡法 …… 230
7-4-2　比例加载时判定极限荷载的若干定理 …… 232
§7-5　结论与讨论 …… 234
7-5-1　本章结论 …… 234
7-5-2　几点讨论 …… 235
习题 …… 236
附录A　习题答案 …… 238
附录B　结构力学教学实践和工程计算分析软件使用说明 …… 244
附录C　索引 …… 247
主要参考书目 …… 250
作者简介 …… 251

结构力学总论

什么是结构力学，其研究对象、研究内容以及研究方法是什么，结构力学与理论力学和材料力学、结构力学与后续课程、结构力学与结构工程有何关系，等等，即为本书绪论的主要内容。

§1 结构力学的研究对象和研究内容

1-1 研究对象

结构力学作为力学学科的一个分支，其研究对象涉及较广，根据所涉及范围，通常将结构力学分为“狭义结构力学”、“广义结构力学”和“现代结构力学”。

● **狭义结构力学**。其研究对象为由杆件所组成的体系，即**结构**(structure)。这种体系能承担外界荷载作用，并起传力骨架作用。这又称为经典结构力学。

● **广义结构力学**。其研究的对象为可变形的物体。除可变形杆件组成的体系外，还包括可变形的连续体(平板、块体、壳体等)。

● **现代结构力学**。将工程项目从论证到设计，从施工到使用期内维护的整个过程作为大系统，研究大系统中的各种各样力学问题。显然其研究对象范围更广。

根据本课程的特点以及结构工程对人才的需要，本书将以狭义结构力学为主，适当涉及广义结构力学。

1-2 课程所涉及的内容

当今结构力学的研究内容包括以下三方面：

● **分析**。在已知结构和荷载的前提下，根据强度、刚度和稳定性等方

面的要求，通过分析计算，使所设计的结构既经济合理，又安全可靠。这内容是属于经典内容。

● **识别**。与传统的分析不同，很多问题往往需要在已知系统外部作用结果的情形下，根据结构信息反过来确定外界的作用信息，或者根据外界的作用信息，确定系统的有关信息。如果将外界作用下系统的反应（结果）分析称为正问题，则在已知反应情形下，确定外界作用或系统的信息则称为反问题。确定外界作用信息的反问题称为**荷载识别**（load identification），而确定结构信息的反问题称为**系统识别**（system identification）。

● **控制**。控制理论和控制技术在结构（建筑结构、桥梁结构和水工结构，等等）工程方面，直到20世纪70年代才被提出，它是人们在抵御外界作用方面往智能化结构方向迈出的可喜一步。因此，立即引起广大学者和工程技术人员的关注，从而得到了迅速发展。这是结构工程领域的高科技课题之一。

本书将以最基本的分析为主，介绍结构在实际工程常见各种可能外界作用下的受力、变形和稳定性分析的基本概念、基本原理和基本方法。同时，也考虑发展的需要，适当介绍一些识别和控制的基本概念。

本书所涉及的内容大致可分成以下三部分：

● **结构静力分析**。研究结构的组成规律、静力荷载作用下的受力变形分析及其稳定性的概念、原理和方法，以及移动荷载下的结构设计特点和方法等。

● **结构计算机分析**。简单介绍应用计算机进行结构分析的基本原理和计算方法，以杆系结构为基础，也将包含连续体（平面问题）的分析方法和程序。

● **结构动力分析**。主要研究结构的动力特性，以及在动荷载作用下的分析原理和方法。同时，还将简单介绍地震反应分析和结构振动控制的基本概念等。

1-3 结构力学与其他课程和结构设计的关系

理论力学、材料力学、高等数学和计算机基础知识都是结构力学的基础，特别是理论力学中关于力系的平衡、约束的性质、质点系及刚体虚位移原理、运动及动力分析；材料力学中的内力分析、强度、刚度和稳定性分析等重要内容，不仅作为结构力学的基础，而且在结构力学中将得到扩展和延伸。读者学习本课程时应当与理论力学和材料力学贯通起来，形成总体概念。

结构力学与理论力学和材料力学不同的是，结构力学与工程结构联系更为紧密，其基本概念、基本理论和基本方法将作为钢筋混凝土结构、钢结

构、地基基础和结构抗震设计等工程结构课程的基础；结构力学的分析结果又是各类结构的设计依据。当前的计算机辅助设计软件，其核心计算部分的基本理论和方法也都以结构力学作为基础。

§2 一些工程结构实例与计算简图

实际工程是很复杂的，例如图 1 到图 7 所示的高层建筑、大型水利工程、桥梁结构、大跨结构、高耸结构、核电站结构和体育馆建筑，等等，如果不作任何简化，分析计算将十分困难。

分析实际结构，需利用力学知识、结构知识和工程实践经验，经过科学的抽象，并根据实际受力、变形规律等主要因素，对结构进行合理的简化。这一过程称为**力学建模**，经简化后可以用于分析计算的模型，称为**结构的计算简图**。



图 1 上海金茂大厦

确定计算简图的原则是：

● 尽可能符合实际——计算简图应尽可能反映实际结构的受力、变形等特性。

● 尽可能简单——忽略次要因素，尽量使分析过程简单。

理论力学中已经引入了支座和结点的计算简图，现归纳、补充如下：

支座是将结构和基础联系起来的装置。其作用是将结构固定在基础上，并将结构上的荷载传递到基础和地基。支座对结构的约束力称为**支座反力**(reactions at support)，支座反力总是沿着它所限制的位移方向。

本书中所用的支座计算简图及相应的支座反力如图 8 所示，有以下形式：

● **固定铰支座**。限制各方向位移，但不限制转动。其反力可用沿坐标的分量表示，如图 8a、b 所示。

● **可动铰支座**。限制某些方向位移，但不限制转动。其反力沿所限制的位移方向，如图 8c 所示。

● **固定端(固定支座)**。限制全部位移(移动和转动)，其反力用沿坐

标的分量和力偶来表示，如图 8d、e 所示。



图 2 施工中的长江三峡五级船闸



图 3 长江西陵大桥

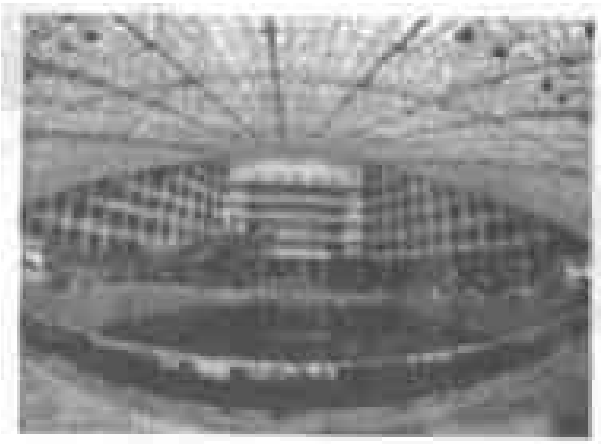


图 4 哈尔滨梦幻乐园网架屋盖



图 5 天津电视塔

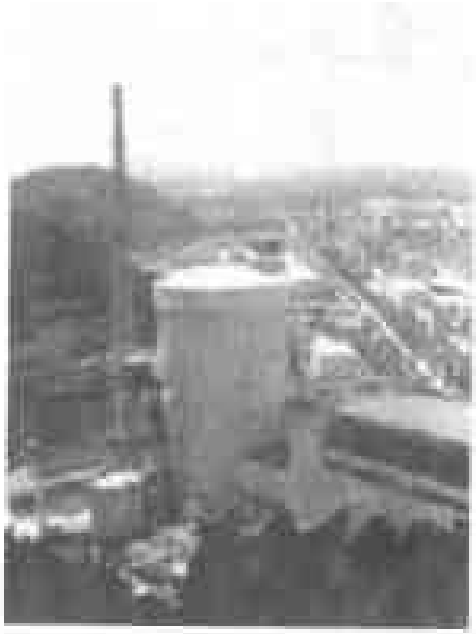
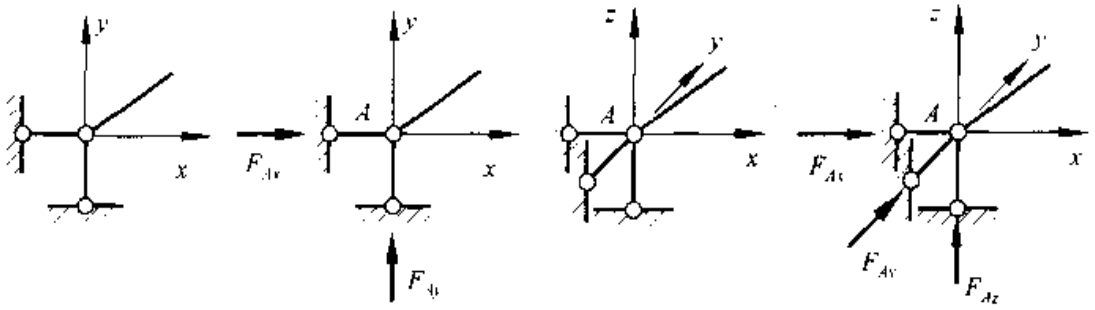


图 6 秦山核电站安全壳

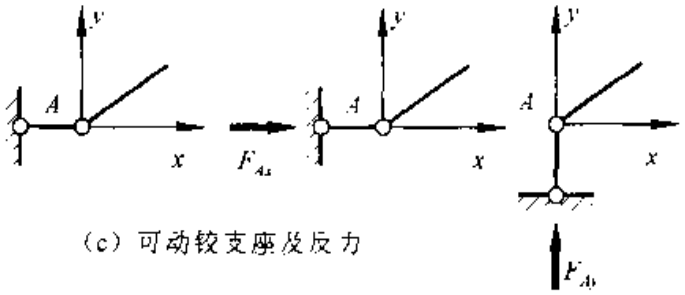


图 7 北京朝阳体育馆

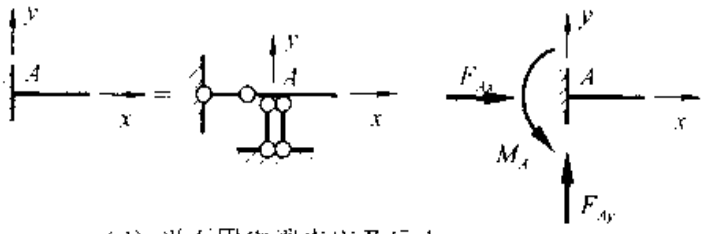
487490



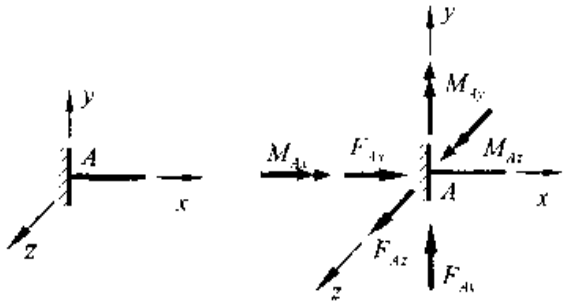
(a) 平面固定铰支座及反力　　(b) 空间固定铰支座及反力



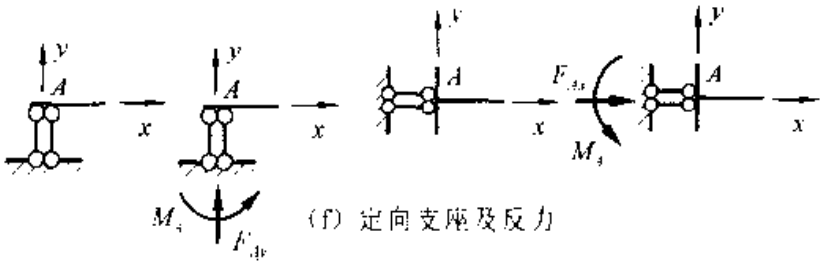
(c) 可动铰支座及反力



(d) 平面固定端支座及反力



(e) 空间固定端及反力



(f) 定向支座及反力

图 8　支座计算简图、所约束的位移和反力

● **定向支座**。限制某些方向的位移和转动，而允许某一方向产生位

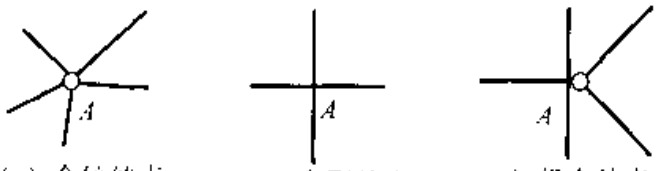
移，其反力除所限制位移方向力外，还有支座反力偶，如图 8f 所示。在结构分析中，由于利用对称性往往出现这种支座。

对于由杆件所组成的系统（杆系结构），杆件的汇交点称为**结点**（joint 或 node）。由于连接情况不同，结点可分为铰结点、刚结点和组合结点，其简图如图 9 所示。

● **铰结点**。各杆件在此点互不分离，但可以相对转动，因此相互间作用的是力，如图 9a 所示。

● **刚结点**。各杆件在此点既不能相对移动，也不能相对转动（保持夹角不变），因此相互间作用除力以外还有力偶，如图 9b 所示。

● **组合结点**。各杆件在此点不能相对移动，部分杆件间还不能相对转动，也即部分杆件之间属铰结点，另部分杆件之间属刚结点，如图 9c 所示。



(a) 个铰结点　(b) 全刚结点　(c) 组合结点

图 9　全铰、全刚和组合结点计算简图

结构静力分析篇

第 1 章　杆系结构的组成分析
第 2 章　静定结构受力分析
第 3 章　结构位移计算
第 4 章　超静定结构解法
第 5 章　移动荷载作用下的结构分析
第 6 章　矩阵位移法
第 7 章　结构稳定及极限荷载计算的基本知识

结构静力分析篇

本篇主要讨论杆系结构在静力荷载作用下的受力和变形。

所谓杆系结构是指由杆件所组成的结构。所有杆件与荷载位于同平面时为平面结构，否则为空间结构，本书以平面结构为主。

常见的结构及计算简图如下：

● 由等截面直杆理想铰结形成、仅在结点处受荷载作用的结构，称为**桁架**(truss)，其计算简图如图 1a 所示。其各杆仅受轴力作用(二力杆)，称为桁架杆。

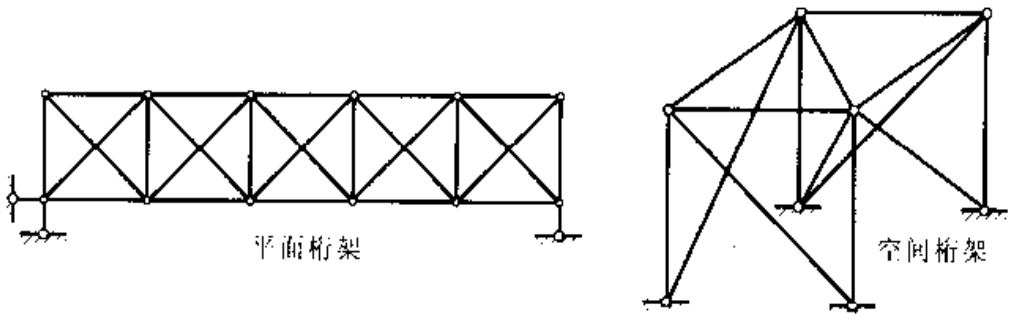
● 由曲杆组成，仅在竖向荷载作用下能产生水平推力(反力)的结构称为**拱**(arch)。其计算简图如图 1b 所示。

● 杆轴共线或虽为曲杆但主要受弯的结构称为**梁**(beam)，前者为直梁，后者为曲梁。其计算简图如图 1c 所示。

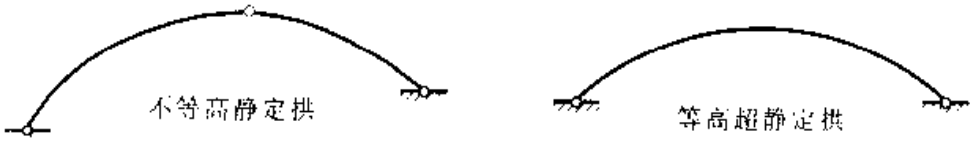
● 由等截面直杆刚结或部分刚结、部分组合结点连接而成的结构称为**刚架**(或框架 frame)，刚架中的杆件主要承受弯曲变形，其计算简图如图 1d 所示。

● 部分杆件属桁架杆，另一部分杆又属于弯曲(梁式)杆，这种结构称为**组合结构**(composite structure)。其计算简图如图 1e 所示。

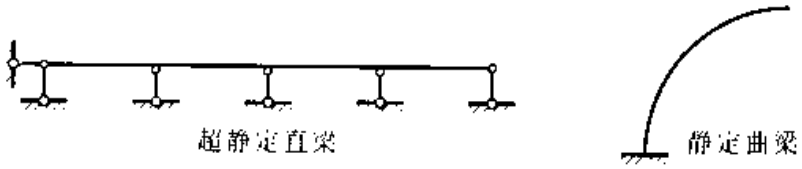
本篇首先讨论结构的组成，然后介绍静定结构的受力分析问题，接着解决静定结构变形(位移)的计算问题，超静定结构受力和变形的计算问题、最后介绍结构在移动荷载作用下的分析方法，以及结构稳定和极限荷载问题的基本知识。



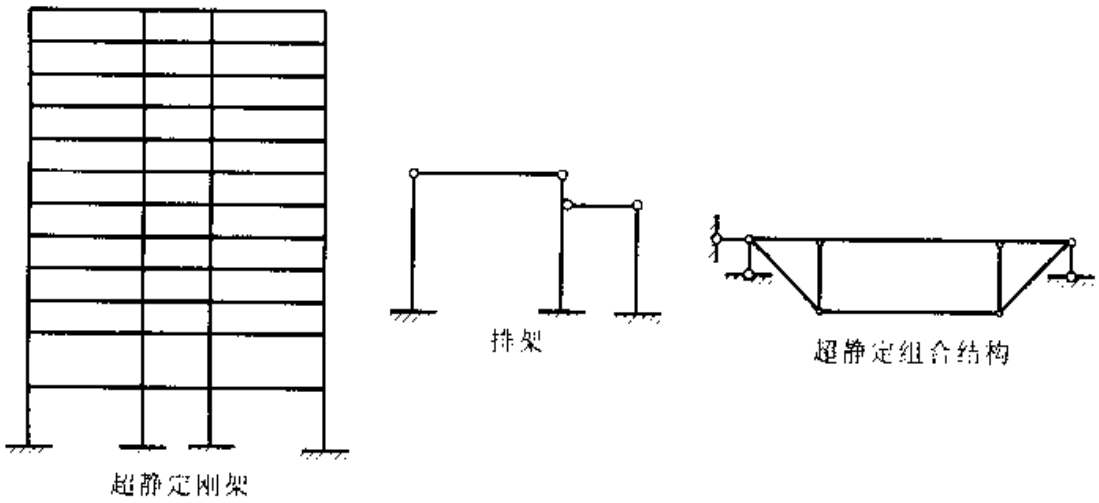
(a) 直杆铰结体系



(b) 曲杆结构



(c) 受弯结构



(d) 直杆刚结体系受弯结构

(e) 既有桁架杆，又有受弯杆的组合结构

图 1 常见杆系结构及计算简图

第1章

杆系结构的组成分析

由若干杆件用各种结点连接而成的杆件体系，当能承担一定范围内任意荷载作用时，称为杆件结构，简称结构。而不能承担任意荷载的体系称机构，它是机械工程等的研究对象。土木等工程中应用的都是结构，但结构的组成方式不同将影响其力学性能和分析方法。因此，在分析结构受力、变形之前，必须首先了解结构的组成。

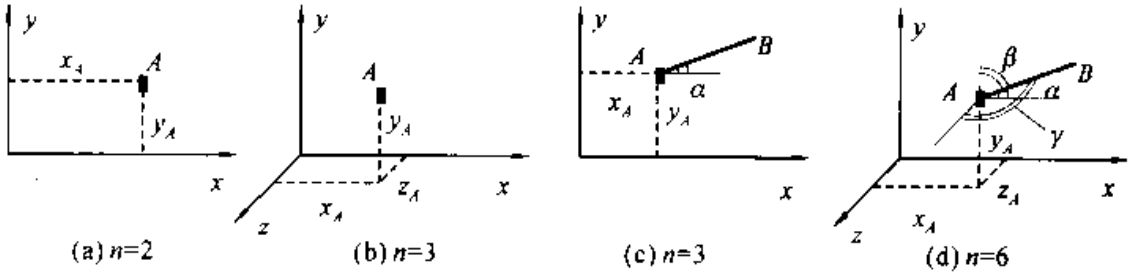
实际结构中的杆件在外界因素作用下都是可变形的。但在小变形的情形下，分析结构组成时，其变形可以忽略不计，因而所有杆件均将视为刚体。

§1-1 基本概念

1-1-1 自由度

自由度(degree of freedom)是指确定体系空间位置所需的独立坐标数，或者体系运动时可以独立改变的几何参数的数目。体系的自由度通常记作 n。

根据上述自由度定义，图 1-1 所示的平面和空间的一自由点 A，以及一自由刚体 AB(平面刚体也称为刚片，其形状任意)的自由度分别为 $n=2$ 和 $n=3$ 图 1-1a、b，以及 $n=3$ 和 $n=6$(图 1-1c、d)。



(a) n=2　(b) n=3　(c) n=3　(d) n=6

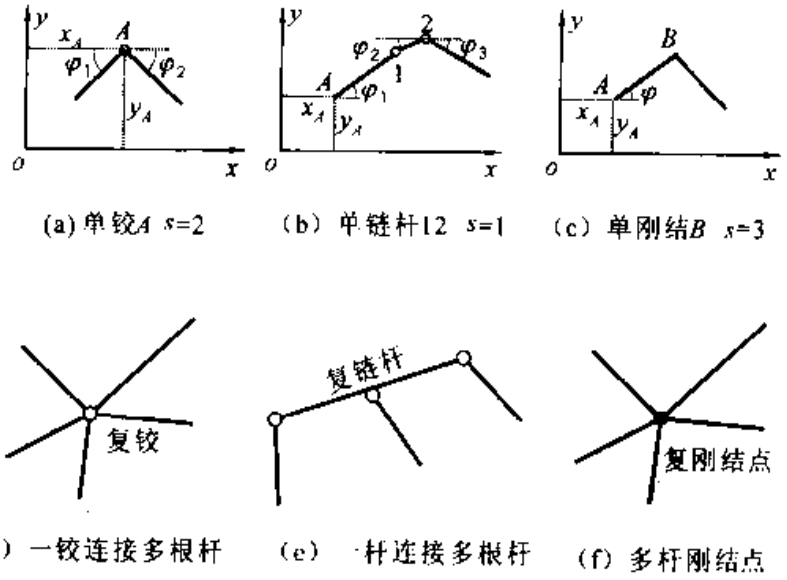
图 1－1　自由点与自由刚体的自由度

1-1-2 约束

组成杆件体系的部件之间以及体系和基础之间都要通过结点、支座相互联系。相互联系产生相互约束。

能减少体系自由度的装置称为**约束**(constraint)(也称为**联系**),能减少 s 个自由度的装置称为有 s 个约束。常见的约束有:

- **单铰**(simple hinge)。仅连接两个刚片的铰称为单铰,如图 1－2a 所示。
- **链杆**(connection link)。仅用于将两个刚片连接在一起的两端铰结的杆件称为链杆。图 1－2b 中的 12 杆即为链杆。
- **单刚结点**(simple rigid jojnt)。仅连接两杆的刚结点,图 1－2c 所示的 B 处即为单刚结点。



(a) 单铰A s=2　(b) 单链杆12 s=1　(c) 单刚结B s=3

(d) 一铰连接多根杆　(e) 一杆连接多根杆　(f) 多杆刚结点

图 1－2　约束

同时连接多个刚片的铰、链杆和刚结点分别称为**复铰**(multiple hinge)、**复链杆**(multiple connection link)和**复刚结点**(multiple rigid joint),分别如图

1-2d、e、f所示。图1-2d~f中，这些约束能减少的自由度个数以及相当于单铰、(单)链杆和单刚结点的个数是多少，请读者自行归纳分析。

链杆、单铰和刚结点从运动的可能性或从所提供的约束力方面考虑，可以如图1-3和图1-4所示互相代替，也即双向箭头⇔所表示的是相互可以等价替换的。例如图1-3中相交两链杆等价于一个实铰，延长线相交的两链杆等价于一个虚铰等。

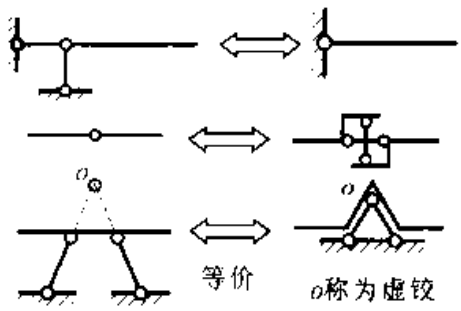


图1-3 铰与链杆的关系

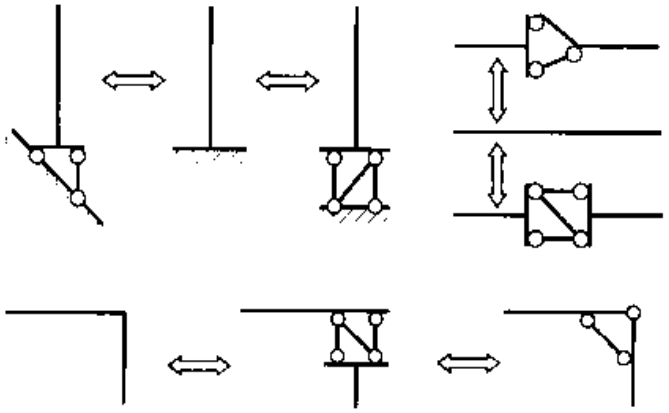


图1-4 刚结与链杆的关系

1-1-3 约束的分类

根据对自由度的影响，体系中的约束可分为两类：

● 除去约束后，原体系将变成几何可变体，这类约束称为**必要约束**。如图1-5a中结构除去A处水平链杆后，原来的结构变为图1-5c所示的可动体系，因此该水平链杆是必要约束。

● 除去约束后，原体系仍然能保持为几何不变体，这类约束称为**多余约束**。如图1-5a中的超静定结构，除去竖向链杆C后，变成图1-5b

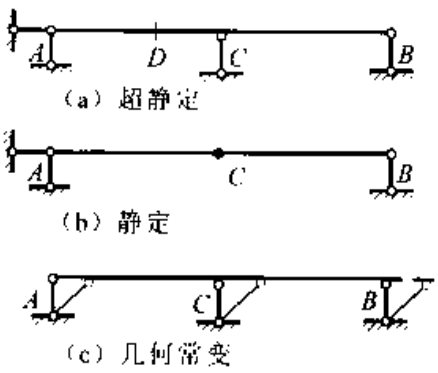


图1-5 多余约束和必要约束

所示静定结构，因此 C 是多余约束。

在有多余约束的体系中，什么约束是多余的什么约束是必要的，答案并不唯一。例如在图 1－5a 所示结构中，若将 B、C 链杆看作必要的，则 A 处竖向链杆是多余的；若将 A 处竖向链杆与 B 链杆看成必要的，则 C 链杆就是多余的。如图 1－5 中将 AD 杆与 DB 杆间阻止转动的刚性联结约束看成多余而改变为铰结，则 A、B、C 处的所有链杆都是必要的。由于 D 的位置可改变，这时，正确的答案便有无限个。

1－1－4　计算自由度

体系中无任何约束的刚片以及结点的总自由度数减去体系中总约束数记作 W，称为体系的**计算自由度**。由此定义不难验证计算自由度可用下式计算

$$W = 3 \cdot m - (2 \cdot h + 3 \cdot g + b) \qquad (1-1)$$
$$W = 2 \cdot j - b$$

或

$$W = 3 \cdot m + 2 \cdot j - (2 \cdot h + 3 \cdot g - b)$$

式中，m 为体系中认定的刚片（杆件，有时地面也可看成刚片）总数，h 为单铰总数，g 为单刚结总数，b 为单链杆（包括支座链杆）总数，j 为铰结点总数。

［**例题 1－1**］　试计算图 1－6 所示体系的计算自由度。

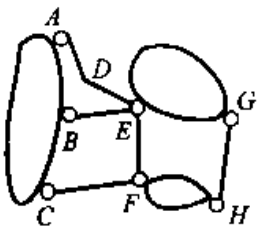


图 1－6　例题 1－1 图

解：　按式(1－1)中第一个公式计算：

$$m = 8, \quad h = 10, \quad g = b = 0$$
$$W = 3 \times 8 - 2 \times 10 = 4 > 0$$

按第二个公式计算：

$$j = 7, \quad b = 10$$
$$W = 2 \times 7 - 10 = 4 > 0$$

需要指出的是，m 也可视为等于 9（ADE 视为两个刚片），则 $g = 1$，$h = 10$，$b = 0$，计算自由度 W 不变。由此可见，公式的应用是很灵活的。又如假设体系和地面之间由三根链杆相联系，则 $b = 3$，$W = 1$。

［**例题 1－2**］　试计算图 1－7 所示体系的计算自由度。

解：　按式(1－1)中第一个公式计算：

$$m = 10, \quad h = 14$$
$$W = 3 \times 10 - 2 \times 14 = 2 > 0$$

按第二个公式计算：

$$j=7,\quad b=12$$

$$W=2\times7-12=2>0$$

如果仍假设体系和地面之间由三根链杆相联系，则 $W=-1$。

若 $W>0$，则表明约束不足以阻止体系部件运动，体系为机构。但 $W\leqslant0$ 却并不一定是结构（几何不可变），由后面分析可知，例题 1-1 和例题 1-2都是几何可变形的。

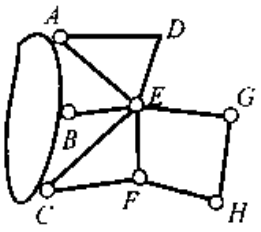


图 1-7 例题 1-2 图

1-1-3 体系的分类

根据可变性，杆件体系可分为几何不变和几何可变的体系：

杆件体系
- 几何不变体系（形状、位置不变）
  - 无多余约束（图 1-8a 静定）
  - 有多余约束（图 1-8e、f 超静定）
- 几何可变体系（形状、位置可变）
  - 常变体系（图 1-8b、c 机构）
  - 瞬变体系（图 1-8d）

图 1-8d 为只能发生瞬时微小变化的体系，称为瞬变的体系，而图 1-8b、c所示机构则称为常变体系。

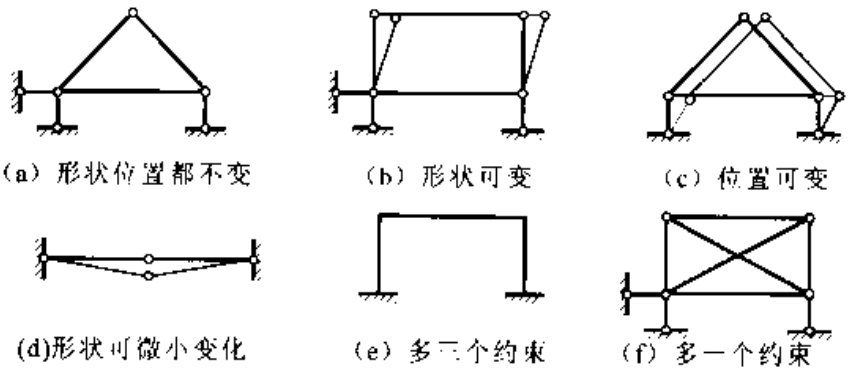


图 1-8 杆件体系

土木和水利等工程结构，都必须是几何不变体系。当仅从计算自由度来分析体系时，$W>0$ 体系一定是常变的；但 $W\leqslant0$ 时，由于可能存在多余约束和约束配置不当，结果体系可能一部分有多余约束，而另一部分又可能是可变的，总体而言是可变的。这也就是说，$W\leqslant0$ 仅是几何不变的必要条件，而不是充分必要条件。

根据静力特征，结构可分为静定和超静定结构，前者可由平衡方程确定全部未知约束反力和内力，后者则不能。

结构(几何不变)
- 静定结构(桁架、拱、梁、刚架、组合结构)⇔无多余约束
- 超静定结构(桁架、拱、梁、刚架、组合结构)⇔有多余约束

由此可见,不同静力特征的结构其分析计算方法是不同的。因此,要正确分析必须首先准确无误地判断体系的可变性以及静定和超静定性质。

§1-2　静定结构的组成规则

静定结构——几何特征为无多余约束几何不变,是实际结构的基础。静定结构撤销约束或不适当的更改约束配置可以使其变成可变体系,而增加约束又可以使其成为有多余约束的不变体系(即超静定结构)。因此,熟练掌握静定结构的组成规则,不仅可以正确地确定超静定结构中的多余约束数,而且可以正确地通过减少约束使超静定结构变成静定结构(不是可变体系)。

1-2-1　静定结构组成规则

当三条边能组成三角形时,所组成的三角形形状是唯一的,这是静定结构组成规则的基本出发点。由此基本点出发,可得如下构造静定结构的规则,统称为三角形规则。

规则 1　三刚片规则

三个刚片用**三个不共线单铰**两两相连可组成一静定结构,它们统称为**三铰结构**。根据这一规则可构造出如图 1-9 所示的各种三铰结构。

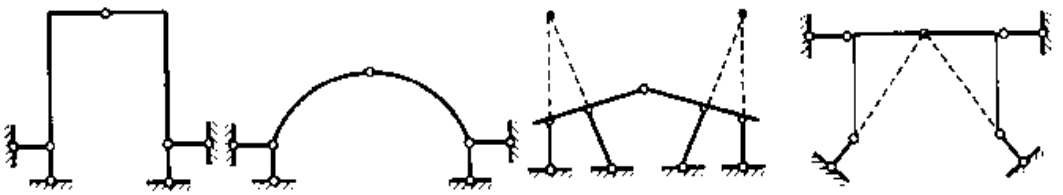


图 1-9　三铰结构和体系

需要注意的是:

● 刚片的形状是可以任意转换的,例如图 1-9a 三铰刚架中的折杆可以换成直杆。

● 三个铰可以是真实铰,也可以是二链杆组成的虚铰,如图 1-9c 所示。

● 若三铰共线，则为瞬变体系，例如图 1-8d 和图 1-9d 所示的体系。

规则 2 两刚片规则

两个刚片用**一个单铰和一个不通过铰的链杆**相连可构成静定结构，称为单体或联合结构，当刚片为一直杆时称为梁式结构。

需要注意的是：

● 当铰由两链杆构成时，规则叙述改为：两个刚片用**三个既不平行也不交于一点的链杆**相连构成静定结构，如图 1-10b、c 所示。

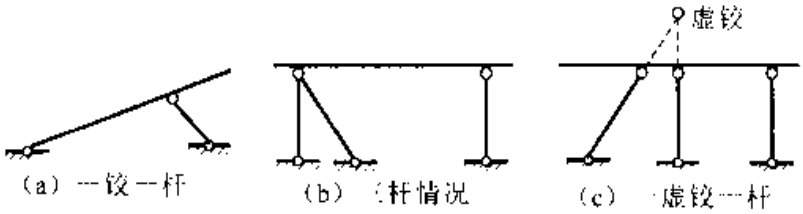


图 1-10 单体(或联合)结构

● 若链杆通过铰，则所组成的体系为瞬变体系，图 1-11 所示的即为瞬变体系。

● 对两刚片三杆的情况，请读者自行分析**不满足既不平行也不交于一点**时的结论。

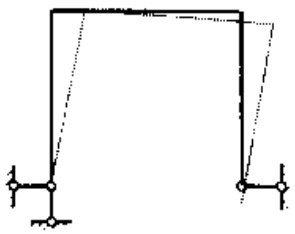


图 1-11 瞬变体系

规则 3 二元体规则

在体系上用两个不共线杆件或刚片连接一个新结点，这种产生新结点的装置称为二元体。如图 1-12a 所示为二元体，而图 1-12b 因不符合上述定义，故不是二元体。

基于二元体的定义，在任意一体系上加二元体或减二元体都不会改变体系的可变性。

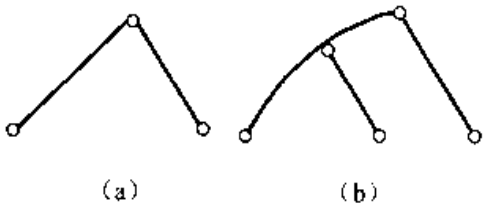


图 1-12 二元体和非二元体

利用加二元体规则，可在一个按上述两刚片或三刚片规则构成的静定结构基础上，通过增加二元体组成新的静定结构，如此组成的结构称为**主从结构**。基础部分称为主结构或**基本部分**，后增加的二元体部分称为从结构

或**附属部分**。图 1－13 所示结构均为主从结构。需要注意的是，此类结构的组成有先后次序，如图 1－13a 先构造 *ABC*，然后加上 *DEF*，前者是基本部分，后者则为附属部分。

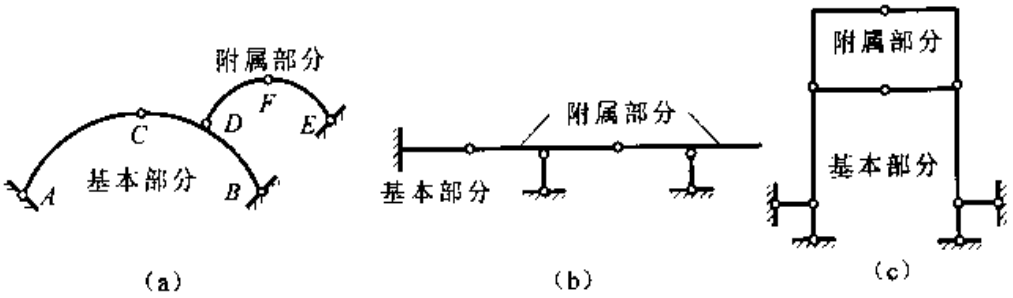


图 1－13　主从结构

需要指出的是，结构力学中，一般并不是应用这些规则构造静定结构，而是用以判定一个体系是否属于几何不变，是否具有多余约束，或者分析体系的组成顺序以便选取计算方法，等等。

1－3－3　组成分析举例

[**例题 1－3**]　试分析图 1－14a 所示体系的几何组成。

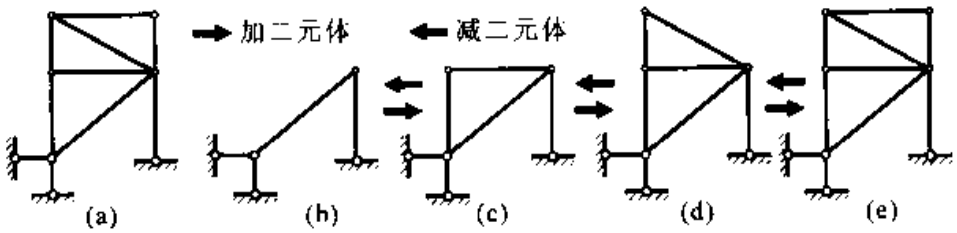


图 1－14　例题 1－3 图

解：　图 1－14a 所示体系可视为在图 1－14b 所示静定结构的基础上逐次增加两个杆按规则 3 构成，如图 1－14c、d、e 所示。也可如图按相反次序依次撤除两杆，使体系简化后再分析。两种方法分析结果该体系都是无多余约束的几何不变体系，可作为静定(桁架)结构。

由此分析可见，在进行体系的几何组成分析时应首先判断体系是否存在二元体。有二元体时，应利用减二元体规则将体系简化后再分析。

[**例题 1－4**]　试分析图 1－15a 所示体系的几何组成。

解：　将原体系的支座去掉得图 1－15b 所示体系，显然，若它几何不变，则由两刚片规则可确定原体系不变。图 1－15b 所示体系去二元体后得图 1－15c 所示体系，是具有一个自由度的几何可变体系。因此，原体系是具有一个自由度的可变体系。如果求其计算自由度，则 $W=2\times14-27=1$，也得

相同的结论。

若要使其成为无多余约束的几何不变体系，需要加一个约束。例如可在 A、B 两点间加一个链杆，或在 C 点加一个竖向链杆如图 1-15d 所示，它们都可构成静定结构，但图 1-15d 所示体系用三角形规则不能判定，要用其他方法判定。

由此分析可见，在分析一个与基础用一铰和一不通过铰的链杆（或三个不交于一点、不全部平行的链杆）相连的体系时，只需分析去掉与基础相连的约束后的部分。上述为分析体系的内部可变性。

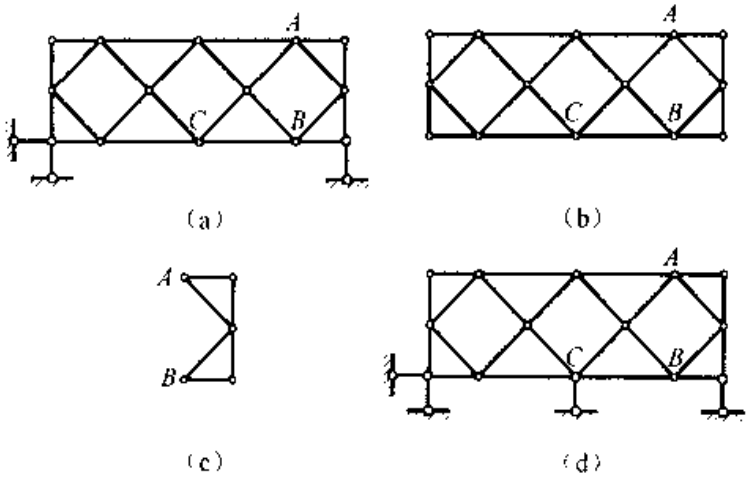


图 1-15 例题 1-4 图

[**例题 1-5**] 试分析图 1-16a 所示体系的几何组成。

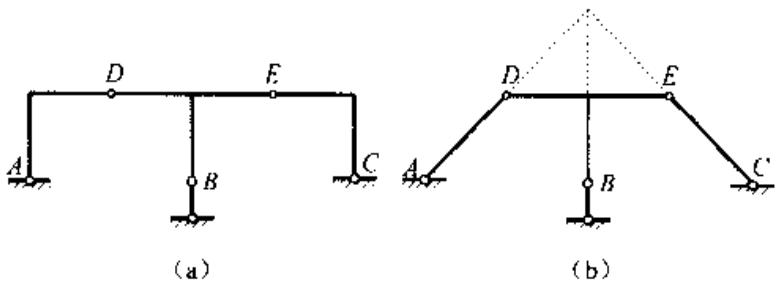


图 1-16 例题 1-5 图

解： 将折杆 AD 看成链杆，其约束作用与连接 A、D 两点的直链杆相同，用直链杆代替后如图 1-16b 所示。因二刚片三杆相连，三杆交于一点构成虚铰，故原体系为瞬变体系。

若将 B 点链杆换成水平链杆，则可使原体系变为静定结构；若在 B 点加一个水平链杆，则得到有一个多余约束的超静定结构。当然还有其他多种选择，可使原来的可变体系变为静定结构。

由此分析可见，在分析中有时需要把与其他部分用两个铰相连的刚片以一链杆代替，从而可使分析过程简化。

[**例题 1－6**]　试分析图 1－17a 所示体系的几何组成。

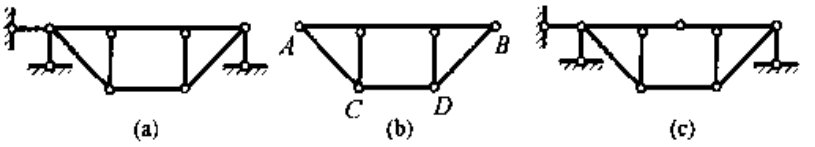


图 1－17　例题 1－6 图

解：　图 1－17a 所示体系除去支座后，得到图 1－17b 所示体系，这一体系可视为刚片 AB，CD 用四根链杆（相当于两个单铰）相连。因此，原来的体系为几何不变体系，且有一个多余约束，为超静定结构。

若要将原体系改造成静定结构，需要除去一个约束。例如拆去支座链杆以外的任意一根链杆；或者在 AB 杆中加一个铰如图 1－17c 所示。由此可见，在一个连续的杆中加铰（刚结变铰结）相当于减少一个约束。

§1－3　结论与讨论

1－3－1　本章结论

● 灵活运用三角形规则可构造各种静定结构。结构的组装顺序和受力分析次序密切相关。

● 超静定结构可通过合理地减少多余约束使其变成静定结构。这时，要注意规则的限制条件，也即产生可变的条件。

● 静定结构和超静定结构的受力等分析方法是不同的，正确区分静定、超静定，正确判定超静定结构的多余约束数对以后的分析十分重要。

● 应用三角形规则分析一个体系可变性时，应注意刚体形状可任意改换。**按照找大刚体（或刚片）、减二元体、去支座分析内部可变性等，使体系得到最大限度简化后，再应用三角形规则分析。**

● 当计算自由度 $W>0$ 时，体系一定是可变的；但 $W\leqslant 0$ 仅是体系几何不变的必要条件。

● 对于复杂体系，当用三角形规则难以分析时，可采用其他分析方法，这将在以后给予说明。

1-3-2 几点讨论

● 三刚片三铰体系中，有无穷远虚铰的情形应视不同情形区别对待。例如图 1－18a 所示为有一个虚铰在无穷远处的体系，若将刚片 Ⅰ 用链杆 AB 代替，则得图 1－18b 所示两刚片体系。若三链杆平行且等长，则为常变体系；三链杆平行但不等长，则为瞬变体系；三链杆不全平行且不交于一点，则为不变体系。对于有两个或三个虚铰在无穷远处的情形，留给读者自行分析研究。

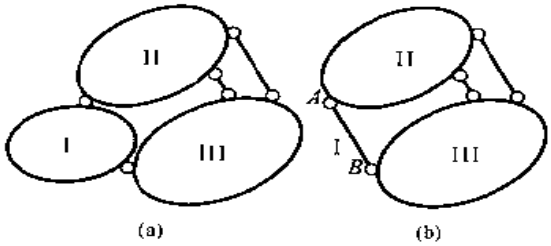


图 1－18　三刚片三铰体系中有无穷远虚铰的情形

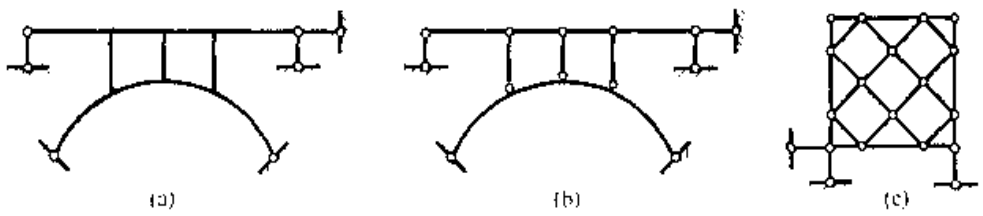
● 杆件体系可变性分析，实质上是刚体体系的运动可能性分析问题。因此，可从任一不动点（内部可变性时设某部件不动）开始，根据连接情况和理论力学运动学知识，逐杆分析，最终看能否产生运动。由此思路出发，曾经提出通过作速度图分析体系可变性，对此有兴趣的读者可参考华东水利学院编，《结构力学》，上册，水利水电出版社出版，1983 年。

● 随着计算机在结构力学应用中的发展，复杂杆件体系的可变性分析，可用计算机来解决。有兴趣的读者可参考清华大学袁驷教授编著，《程序结构力学》，高等教育出版社，2000 年。也可利用本书第（Ⅱ）册的知识来分析可变性。

● 对空间杆件体系也可仿此在四面体基础上进行分析，请有兴趣的读者自行研究。

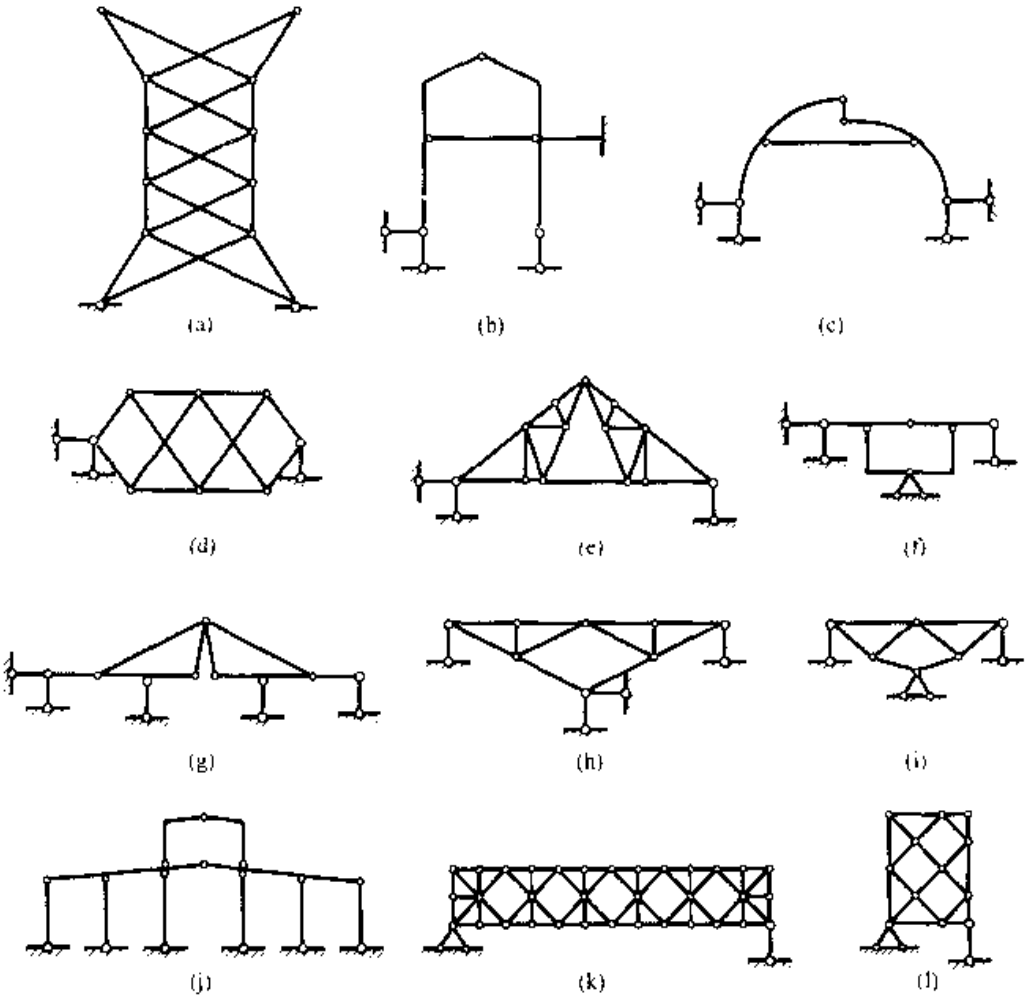
习　题

1－1　试计算图示体系的计算自由度。由结果判定其是否能作为结构？



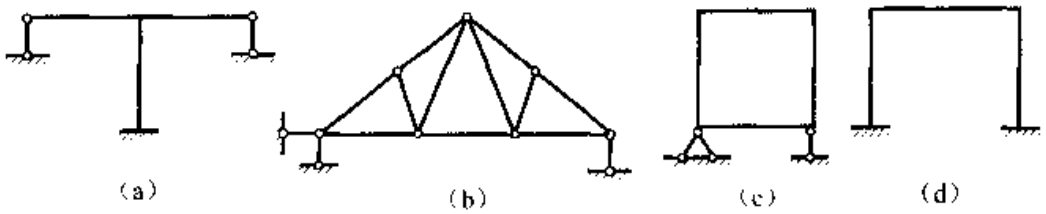
习题 1－1 图

1－2　试分析图示体系的几何组成。



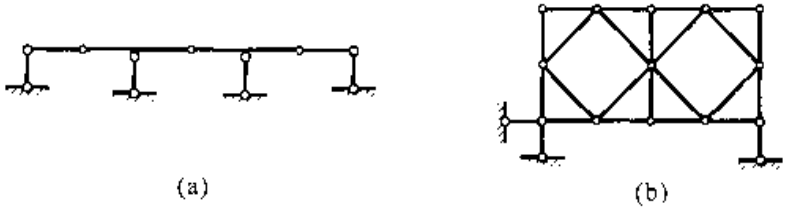
习题 1－2 图

1－3　试将图示超静定结构改造成静定结构(不少于三种选择)。



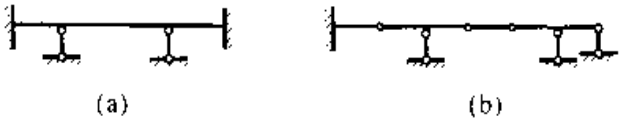
习题 1-3 图

1-4　试将图示几何可变体系改造成静定结构。



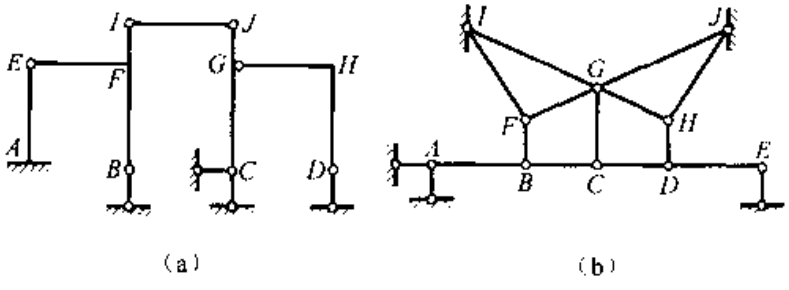
习题 1-4 图

1-5　试将图示结构改造成具有一个自由度的几何可变体系(不少于三种选择)。



习题 1-5 图

1-6　对于图示静定结构，试分析其组成顺序。



习题 1-6 图

第2章

静定结构受力分析

静定结构的受力分析，主要是确定各类结构由荷载所引起的内力和相应的内力图。本章将在理论力学的受力分析和材料力学的内力分析的基础上，分析静定结构的内力。主要是应用结点法、截面法和内力与荷载间的平衡微分关系来确定各种静定结构的内力和内力图。本章一些计算机分析结果是用随书发行光盘上的程序计算并作出的。

§2-1 弹性杆内力分析回顾和补充

2-1-1 材料力学内容回顾

材料力学中关于杆件内力分析的要点有：

● **内力符号规定**。轴力 F_N，拉为正，压为负；剪力 F_Q 使截开部分产生顺时针旋转者为正，反之为负；梁的弯矩 M 使杆件产生上凹者为正，反之为负。

● **求内力的方法——截面法**。用假想截面将杆截开，以截开后受力简单部分为平衡对象，由平衡条件求得内力。

● **直杆平衡方程(也称为微分关系)**

$$\frac{dF_N}{dx} = -p(x), \quad \frac{dF_Q}{dx} = q(x), \quad \frac{dM}{dx} = -m(x) + F_Q$$

其中，$p(x)$、$q(x)$分别为轴向和横向分布荷载集度，在右手坐标系中其指向与坐标正向相同者为正，$m(x)$为作用在荷载平面内的分布力偶矩集度，逆

时针方向为正。

● **内力图绘制方法**。利用截面法确定控制截面上的内力，应用微分关系确定控制截面之间内力的图形。

● **叠加法的应用**。小变形情况下，复杂荷载引起的内力，可由简单荷载引起的内力叠加确定。

2-1-2 曲杆平衡方程

曲杆平衡方程建立的方法和直杆一样，用夹角 $d\varphi$ 截取的微段两截面并不平行。考察图 2-1 所示曲杆微段的平衡，由沿微段轴线切向、法向力的平衡方程和力矩的平衡方程，即可得曲杆平衡方程：

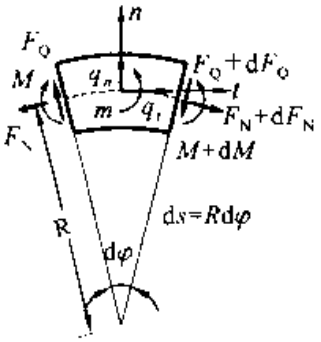


图 2-1 曲杆微段受力图

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma F_t=0,\quad \frac{dF_N}{ds}=-q_t(s)+\frac{F_Q}{R}\\
&\Sigma F_n=0,\quad \frac{dF_Q}{ds}=q_n(s)-\frac{F_N}{R}\\
&\Sigma M=0,\quad \frac{dM}{ds}=-m(s)+F_Q
\end{aligned}\right\}\qquad (2-1)$$

式中，$q_t(s)$、$q_n(s)$分别为切向和法向分布荷载集度，$m(s)$为分布力偶矩集度，其正向如图所示，R 为曲率半径，s 为曲线坐标。

式 (2-1) 表明，当曲率半径 R 很大时，F_Q/R 和 F_N/R 的值与 $q_t(s)$和 $q_n(s)$值相比甚小，这时可用直杆平衡方程代替曲杆的方程。

2-1-3 结构力学与材料力学规定的异同

结构力学中一些规定与材料力学规定相比，需要强调指出的是：

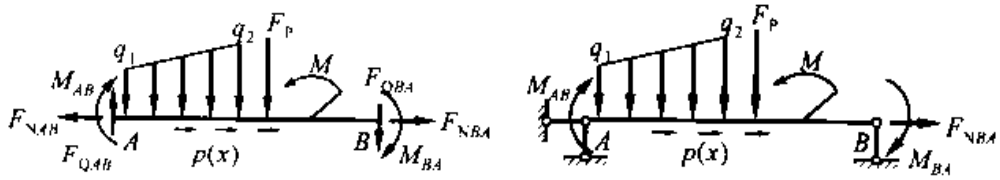
(1) 轴力和剪力的符号规定同材料力学，轴力拉为正，剪力使截面顺时针转动为正。

(2) 结构力学中规定 AB 杆 A 端的杆端弯矩记为 M_{AB}，B 端的杆端弯矩记为 M_{BA}。习惯上规定杆端弯矩顺时针为正，反之为负。杆端轴力和杆端剪力的标记方法和杆端弯矩相同，如图 2-2 所示，例如，A 端的杆端轴力和杆端剪力分别记为 F_{NAB} 和 F_{QAB}，其正负号规定与材料力学相同。

(3) 结构力学弯矩图必须画在杆件纤维受拉的一侧，弯矩图上不标正负号。

2-1-4　区段叠加法作弯矩图

图 2－2a 表示结构中任意一直线区段，用截面法求得区段两端横截面上的内力如图所示。图 2－2b 为与图 2－2a 对应的一简支梁，受相同荷载、杆端弯矩和右端轴力作用。



(a) 直杆段受力示意　　(b) 区段叠加示意

图 2－2　区段叠加法示意图

利用平衡条件可以证明，简支梁的竖向、水平支座反力与图 2－2a 中的杆端剪力、左端轴力完全相同。因此，用截面法求对应横截面上的内力当然也完全相同。这表明，杆段 AB 弯矩图可由与之对应的简支梁用叠加法作出。

对于图 2－2b 所示的简支梁，其上有多个荷载作用的弯矩图，可用叠加法绘制。以图 2－3a 所示简支梁为例，叠加法的步骤为：

(1) 首先确定只有杆端弯矩作用时的弯矩图。这时根据两端截面上的弯矩，因为杆上无荷载，因此弯矩图为直线，如图 2－3b。

(2) 在直线弯矩图的基础上，叠加其余各种荷载作用引起的简支梁弯矩图，如图 2－3c 和 d。图 2－3d 所示最终叠加结果就是简支梁在所示荷载下的弯矩图，也就是原杆段的弯矩图。

上述这种作弯矩图的方法称为**区段叠加法**(section superposition method)。

需要注意的是，叠加是弯矩的代数值相加，也即图形纵坐标相加。区段叠加法不仅能用来作弯矩图，也一样可用于作其他内力图。

由图 2－3 可见，为能快速进行区段叠加，必须熟悉简支梁在各种荷载作用下弯矩图的形状。

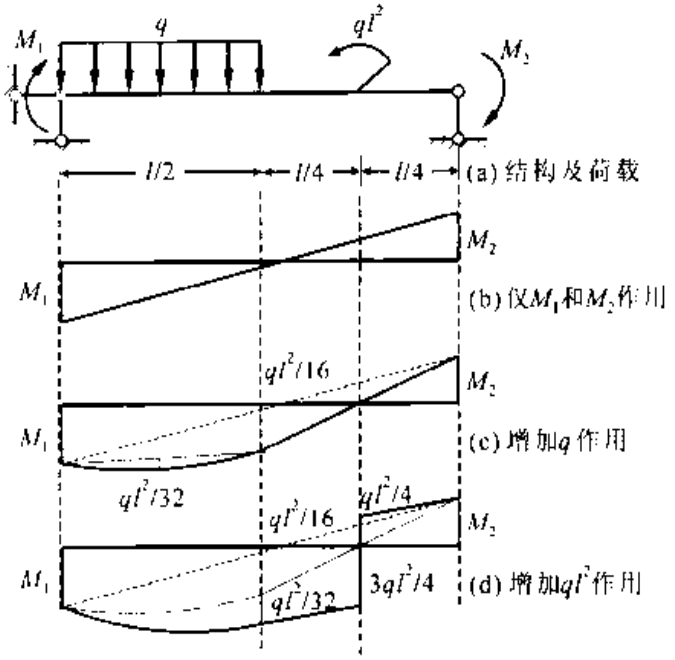


图 2－3　简支梁叠加法作弯矩图

§2－2　静定结构的内力分析方法

静定结构有多种，受力性能也不一样，但应用截面法和平衡方程，是分析所有静定结构内力的基础。

2－2－1　静定结构内力分析方法

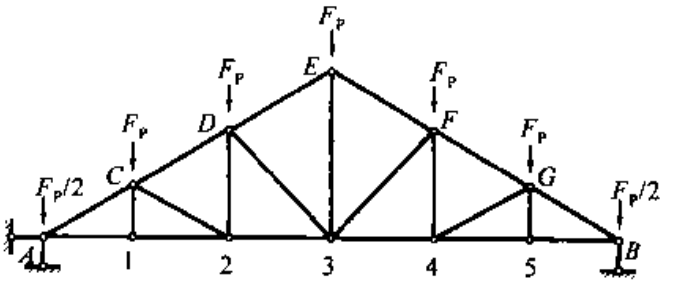
静定结构内力分析问题可以仅利用平衡条件解决，但各种不同结构受力性能不同，因此分析的具体内容也有所不同。但以下三个方面却是共同的。

● **基本原则**。循着结构组成的相反顺序（例如可按 *B5G4F*…顺序），逐步应用平衡方程。

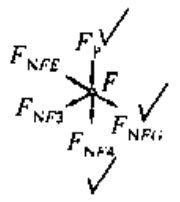
● **基本思路**。首先定性分析是否可能使问题简化，然后确定反力，并根据所要解决的问题，选取合适的结点或结构部分（图 2－4b、c）作为平衡对象——**隔离体**（insulator），最后由平衡条件求得问题的解答。

● **基本方法**。应用截面法（包括截取结点），也即切取隔离体，列平衡方程求未知力。

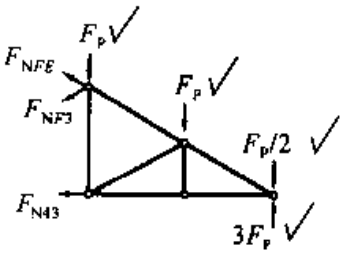
上述三个方面的内容可用图 2－4 来说明，图中✓表示力已知。由图 2－4b列 $\Sigma F_x=0$、$\Sigma F_y=0$ 等可求未知轴力，由图 2－4c 对 B、F、3 等取矩可求未知轴力。



(a)按组成的相反顺序求解
(例如按$B5G4F$ … 顺序求解)



(b)取结点隔离体



(c)截面法取隔离体

图 2－4　静定结构内力分析的三个方面

2-2-3 受弯结构作内力图的顺序

材料力学中，一般是先作剪力图，再作弯矩图。而在结构力学中，对梁和刚架等受弯结构作内力图的顺序为：

(1) 一般先求反力(不一定是全部反力)。

(2) 利用截面法求控制截面弯矩。以便将结构用控制截面拆成为杆段(单元)。

(3) 在结构图上利用区段叠加法作每一单元的弯矩图，从而得到结构的弯矩图。

(4) 以单元为对象，对杆端取矩可以求得杆端剪力，在结构图上利用微分关系作每单元的剪力图，从而得到结构剪力图。需要指出的是，剪力图可画在杆轴的任意一侧，但必须标注正负号。

(5) 以未知数个数不超过两个为原则，取结点由平衡求单元杆端轴力，在结构图上利用微分关系作每单元的轴力图，作法和剪力图一样，从而得到结构轴力图。

综上所述，**结构力学作内力图顺序为先区段叠加作 M 图，再由 M 图作**

F_Q 图，最后由 F_Q 图作 F_N 图。需要指出的是，这种作内力图的顺序对于超静定结构也是适用的。

上述作图顺序可用图 2－5 简单示意。

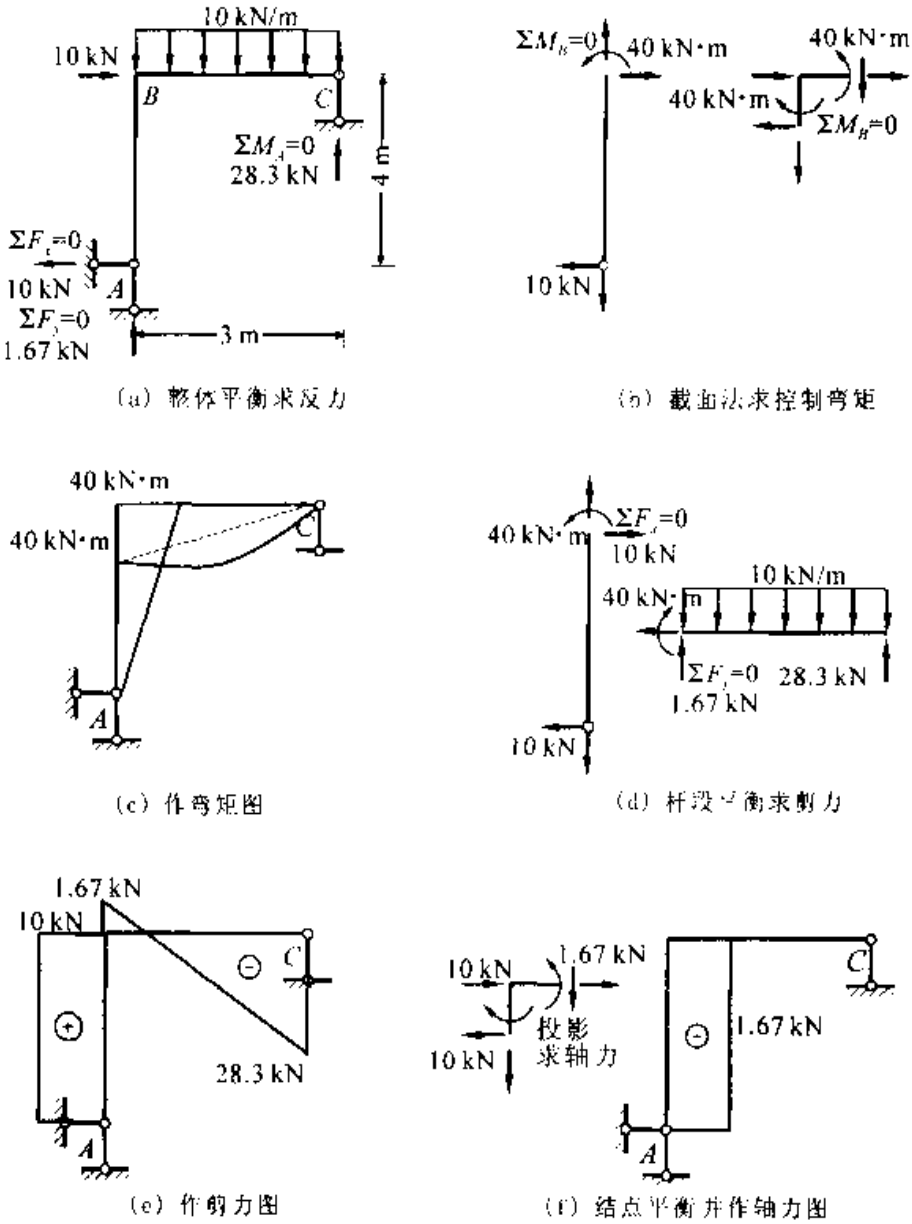


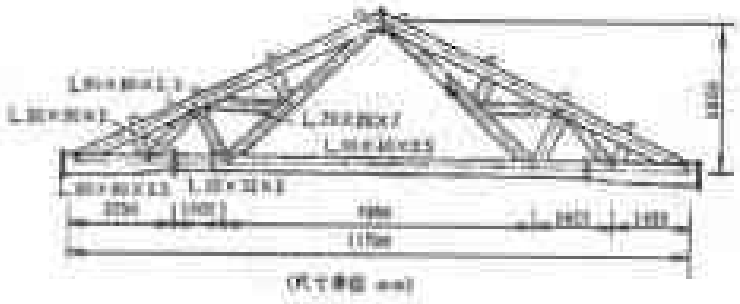
图 2－5　受弯结构作内力图步骤示意

还要指出的是，这种作内力图的过程对于只有少数杆件的结构，与材料力学中作内力图的方法相比显得较为繁琐，但对于由多个杆件组成的结构，其优势是明显的。

§2-3　桁架结构内力分析

2-3-1　桁架结构

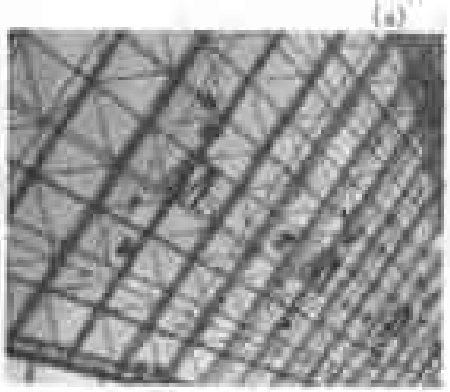
如图 2-6 所示，一些杆轴交于一点的工程结构经抽象简化后，其计算简图都可化成**只受结点荷载作用的直杆、铰结体系**，称为**桁架结构**(truss structure)，其受力特性是结构内力只有轴力，而没有弯矩和剪力。理论和实验结果都证明，这一受力特性反映了实际结构的主要因素，因此轴力又称为**主内力**(primary internal forces)。实际结构中由于结点非理想铰结等原因，还同时产生弯矩、剪力，但这两种内力相对于轴力的影响是很小的，故称为**次内力**(secondary internal forces)。图 2-7 所示杆轴交于一点承受结点荷载的结构，用计算机分别按桁架和刚架进行分析，从下面给出的轴力结果(由于对称，只给出一半计算结果，轴力 F_N 单位为 kN)对比显然可得到“杆轴交汇、只受结点荷载作用下主内力十分接近”的结论。因此，求桁架内力均可取铰结的计算简图。



(a)



(b)



(c)



(d)

图 2-6　桁架结构实例(a 屋架；b 电视塔；c 网架；d 桥梁)示意

杆号	起点号	终点号	桁架轴力	刚架轴力	杆号	起点号	终点号	桁架轴力	刚架轴力
1	2	4	-35.000	-34.966	18	4	5	39.051	38.991
2	4	6	-60.000	-59.973	19	6	7	23.431	23.392
3	6	8	-75.000	-74.977	20	8	9	7.8102	7.7877
4	8	10	-80.000	-79.977	25	1	2	-48.000	-47.958
9	1	3	0.0000	0.032 11	26	3	4	-42.000	-41.926
10	3	5	35.000	35.005	27	5	6	-30.000	-29.958
11	5	7	60.000	59.997	28	7	8	-18.000	-17.974
12	7	9	75.000	74.991	29	9	10	-12.000	-11.981
17	2	3	54.672	54.560					

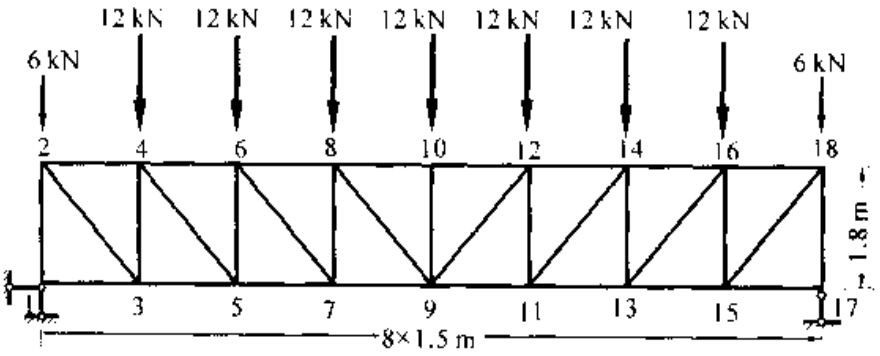


图 2-7 杆轴交于一点且承受结点荷载的结构

桁架结构可有多种分类：

● 简化后简图中各杆件轴线处于同一平面的称为**平面桁架**(plane truss)，否则称为**空间桁架**(space truss)。图 2-6a、d 所示桁架为平面桁架；图 2-6b、c 中所示为空间桁架。

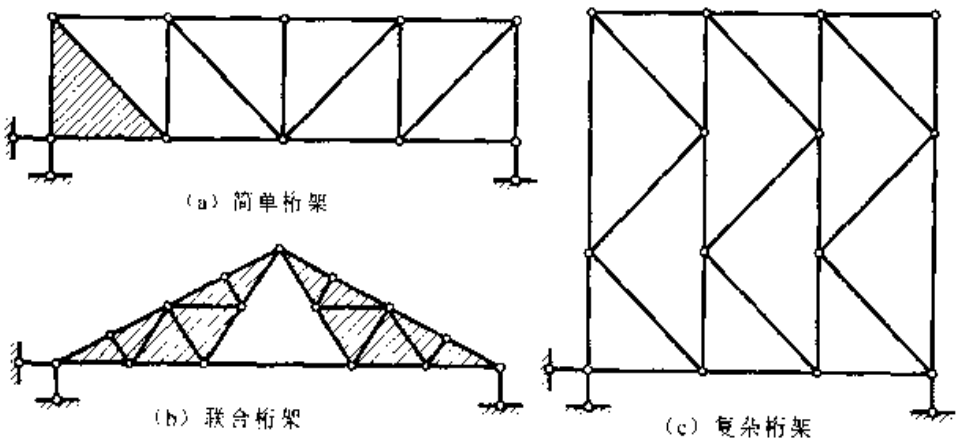


图 2-8 桁架组成分类

● 根据结构组成规则，若是先组成三角形，然后由加二元体组成桁架

时，则称为**简单桁架**(simple truss)，如图 2－8a 所示。由几个简单桁架按二、三刚片组成规则构造的静定结构，称为**联合桁架**(combined truss)，如图 2－8b 所示。除这两类以外的其他桁架，称为**复杂桁架**(complicated truss)，如图 2－8c 所示。

● 仅在竖向荷载作用下，不会产生水平反力的桁架称为普通桁架，或者梁式桁架。而仅在竖向荷载作用下会产生水平反力的桁架，则称为**拱式桁架**(arch-truss)。图 2－8 中的桁架都是普通桁架，图 2－9 为拱式桁架。

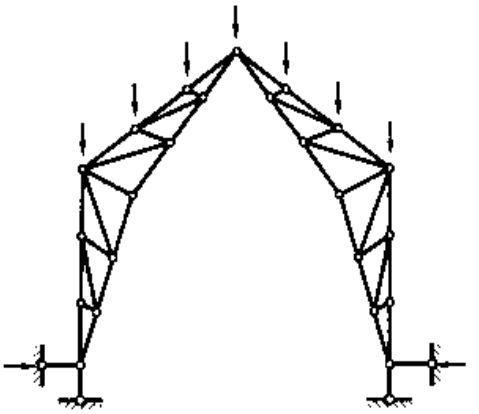


图 2－9　拱式桁架

● 桁架还可按外形等分类，这里不再赘述。

2－3－2　结点法

以桁架的结点作为平衡对象时，结点承受汇交力系作用。因此，如果对简单桁架**遵循按组成相反顺序的求解基本原则**，逐次建立各结点的平衡方程，则桁架各点未知内力数目一定不超过独立平衡方程数。据此，可求得桁架各杆内力。这种方法称为**结点法**(method of joint)。

[例题 2－1]　图 2－10 为一施工用托架计算简图，是简单桁架。试求在所示荷载作用下各杆的轴力。

解：(1) 取整体对支座结点 A、B 分别取矩，可求得支座反力为 $F_{Ay}=F_{By}=19$ kN，水平投影得 $F_{Ax}=0$。

(2) 此简单桁架可看作其结点组成顺序为 BGF、E、D、C、A，因此结点求解顺序为 A、C、D、…。当然这不是唯一的组成和求解顺序。

(3) 由图 2－10b，$\sum F_y=0$，可得 $F_{NAD}=34.8$ kN；$\sum F_x=0$，可得 $F_{NAC}=-33$ kN。

(4) 由图 2－10c，$\sum F_y=0$，可得 $F_{NCD}=-8$ kN；$\sum F_x=0$，可得 $F_{NCE}=-33$kN。

(5) 由图 2－10d，$\sum F_y=0$，可得 $F_{NDE}=-5.4$ kN；$\sum F_x=0$，可得 $F_{NDF}=37.5$ kN。

类似地，可求得其他杆各杆内力，不再赘述。

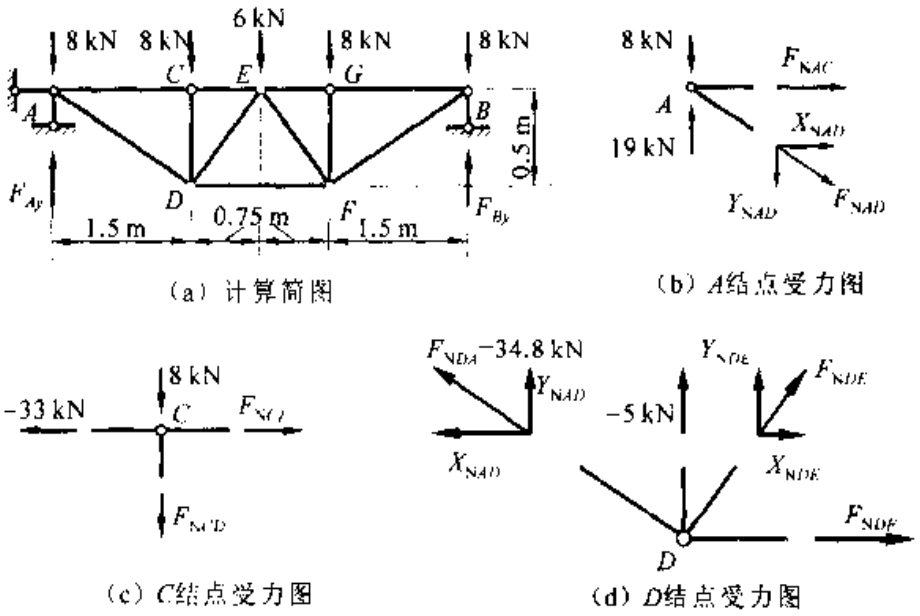


图 2-10 施工用托架求解过程

在用结点法进行计算时，注意以下两点，可使计算过程得到简化。

(1) **对称性**。杆件轴线对某轴线（空间桁架为某面）对称，结构的支座也对同一条轴对称的静定结构，称为**对称结构**(symmetrical structure)。**对称结构在对称或反对称的荷载作用下，结构的内力和变形(也称为反应)必然对称或反对称，这称为对称性**(symmetry)。因此，只要计算对称轴一侧的杆件内力，另一侧杆件的内力可由对称性直接得到。例题 2-1 中水平反力为零，所以可以利用对称性只计算一半。

(2) **结点单杆与零杆**。仅以某结点为平衡对象，全部杆内力未知而能仅用一个方程求出内力的杆件，称为**结点单杆**。利用这个概念，根据荷载状况可判断此杆内力是否为零。零内力杆简称**零杆**(zero bar)。图 2-11 给出了一些零杆情形。

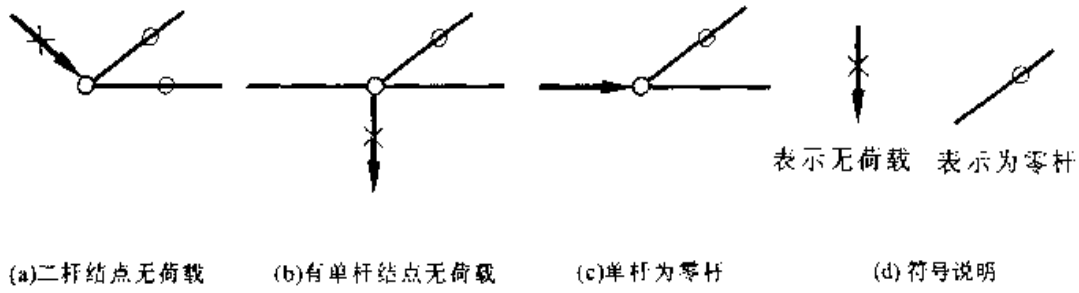


图 2-11 一些零杆情况

2-3-3 截面法

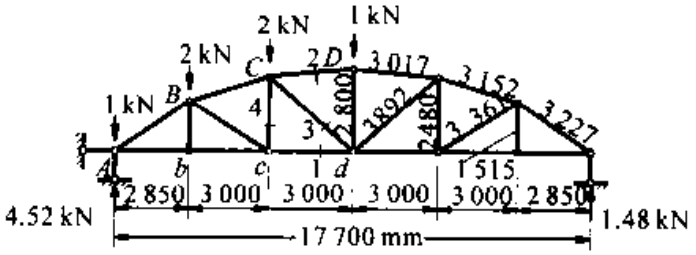
实际工作中，如果只需确定少数杆件的内力或用结点法必须求解联立方程时（如联合桁架），可用截面法确定某些指定杆的内力。此时适当选择截断所求杆的截面，以桁架的局部为平衡对象，由平衡方程即可求得所需杆件轴力。

截面法所取隔离体的独立平衡方程数，对于平面桁架（属平面任意力系）为 3，对于空间桁架（属空间任意力系）为 6。因此，一般情形下截断的杆件未知轴力数应该少于可列的独立平衡方程数。否则，可能无法求得所需杆件的轴力。

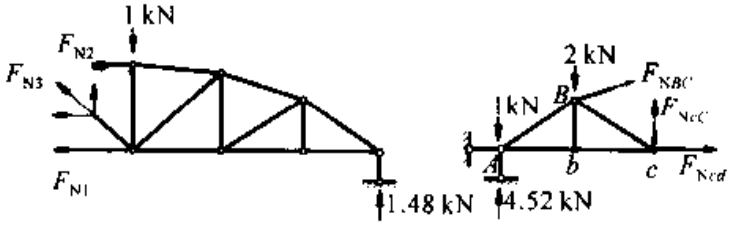
［**例题 2－2**］ 试求图 2－12 桁架在所示荷载作用下的指定杆 1、2、3、4 的轴力。图中杆边所注的数字为杆长，长度单位为 mm。

解： （1）取整体为对象，对 A 点取矩和对右支座取矩可得支座反力为 $F_{BY}=1.48$ kN，$F_{Ay}=4.52$ kN，水平投影得 $F_{Ax}=0$。

（2）用截面将桁架从 1、2、3 杆处切断，取隔离体如图 2－12b 所示。



（a）计算简图



（b）隔离体图　　（c）隔离体图

图 2－12　抛物线桁架示意

● 对 C 点取矩可求 1 杆内力 $F_{N1}=5.87$ kN。

● 对 d 点取矩可求 2 杆内力。为便于计算，将 2 杆内力在 D 点沿坐标轴方向分解，使竖向分力的力矩等于零，水平分力的力臂等于杆 Dd 长度。计算结果为 $F_{N2}=-4.7$ kN。

● 对 CD 和 cd 延长线交点取矩可求 3 杆内力。同样为了简化计算，可将 3 杆内力在 d 点沿坐标轴方向分解，使水平分力无力矩。据此可得结

果为 $F_{N3}=-1.54$ kN。

(3) 用截面将桁架 BC、4、cd 杆截断，取左边部分为平衡对象，对 BC 和 cd 杆交点取矩，可得 $F_{N4}=3.9$ kN。如果考虑到 1 杆内力已求得，能否使计算过程更简单些？请读者自行考虑。

(4) 请读者自行总结：采用截面法求解时，如何由一个方程求解一个未知量；为使计算过程简化，应怎样将轴力分解，等等。

需要指出的是，应用截面法时同样可以利用对称性，同样存在单杆，在一定荷载作用下可直接判断出零杆。

(1) 对称性。对于平面对称桁架，利用对称性也可只取对称轴一侧的结构为计算简图，此时对称轴位置处也可以用支座形式表示，如图 2-13 所示。

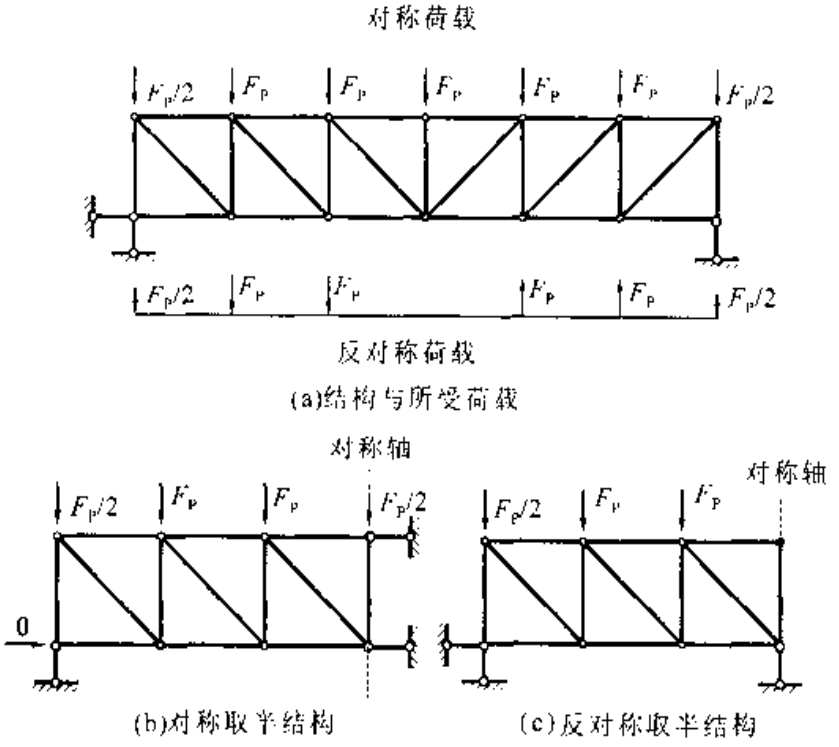
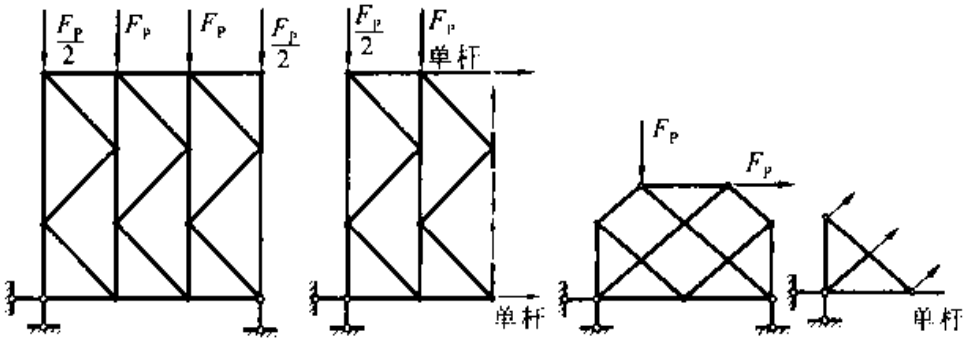


图 2-13 对称结构在对称和反对称荷载下取半结构示意

注意：这种取半结构思想适用于任意对称静定结构。

(2) 单杆和零杆。截面法取出的隔离体，不管其上有几个轴力，在全部内力未知的条件下，如果某杆的轴力可以通过列一个平衡方程求得，则此杆称为截面单杆，可能的截面单杆如图 2-14 所示。

截开桁架后，除截面单杆外，若其他截开杆的轴力作用线相交于一点，则称为相交情形(图 2-14a)；若其他截开杆的作用线互相平行，则称为平行情形(图 2-14b)。



(a) 相交情况　　(b) 平行情况

图 2－14　截面单杆

对于相交情形，如果荷载与反力对其他未知力交点的总力矩为零，则截面单杆为零杆。对于平行情形，如果荷载与反力对垂直于平行力的某直线投影之和为零，则截面单杆为零杆。此外，对称结构承受对称或反对称荷载时，如图 2－15 还有三种零杆情形。

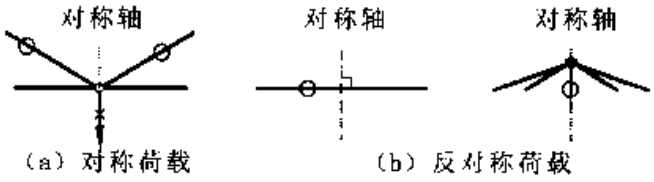


图 2－15　对称时的零杆

需要指出的是，**分析桁架内力时，应首先分析并确定单杆和零杆，应充分利用对称性**(对非对称荷载作用下的简单结构，不一定用)，**从而使计算过程简化**。

2－3－4　联合法

图 2－16a 所示桁架通常称为 K 式桁架，确定此类桁架斜杆轴力需同时应用结点法和截面法。凡需同时应用结点法和截面法才能确定杆件内力时，统称为**联合法**(method of combination)求解。

[**例题 2－3**]　试求图 2－16a 所示 K 式桁架中杆 1、2、3、4 的轴力。

解：(1) 取整体为对象，分别对 A 点和 B 点取矩(或根据对称性)可得支座反力为 $F_{By}=2F_P$，$F_{Ay}=2F_P$。水平投影 $F_{Ax}=0$。

(2) 用截面Ⅰ－Ⅰ将桁架从杆 1、ED、DC、4 处截开，隔离体如图 2－16b 所示。

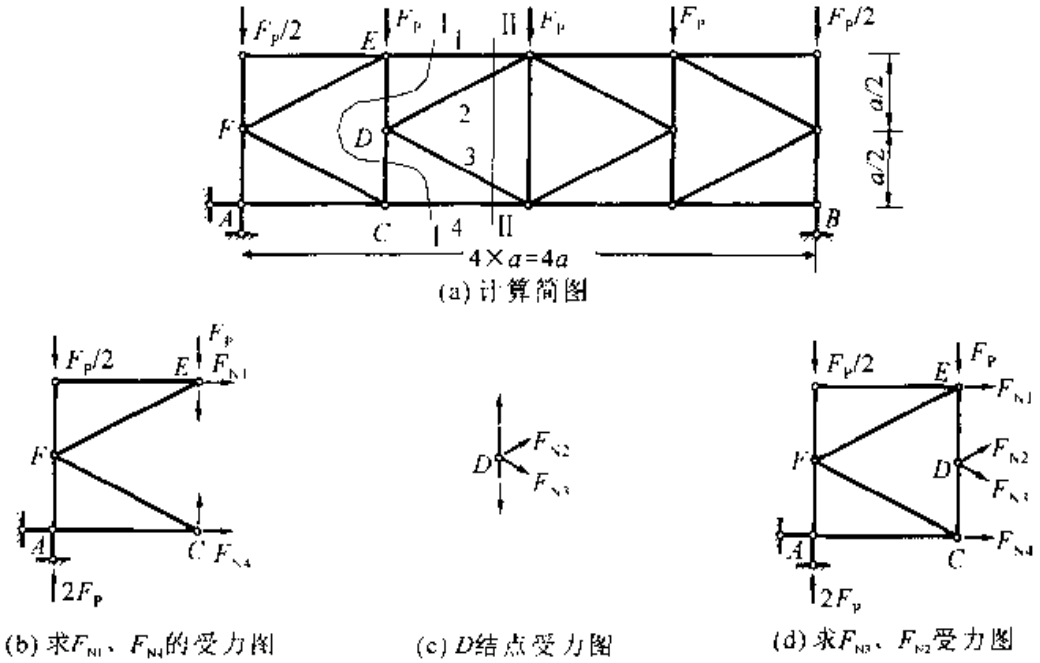


图 2－16　K 式桁架示意

- 对 C 点取矩，求得 1 杆内力 $F_{N1}=-1.5F_P$。
- 对 E 点取矩，求得 4 杆内力 $F_{N4}=1.5F_P$。

(3) 以结点 D 为平衡对象，由图 2－16c 所示之受力图和平衡方程可知杆 2、3 杆内力等值反向。

(4) 用 Ⅱ－Ⅱ 截面从杆 1、2、3、4 处将桁架截开，其左边部分受力如图 2－16d所示。由 $\sum F_y=0$ 可求得 $F_{N2}=-F_{N3}=-\dfrac{3\sqrt{5}}{4}F_P$。

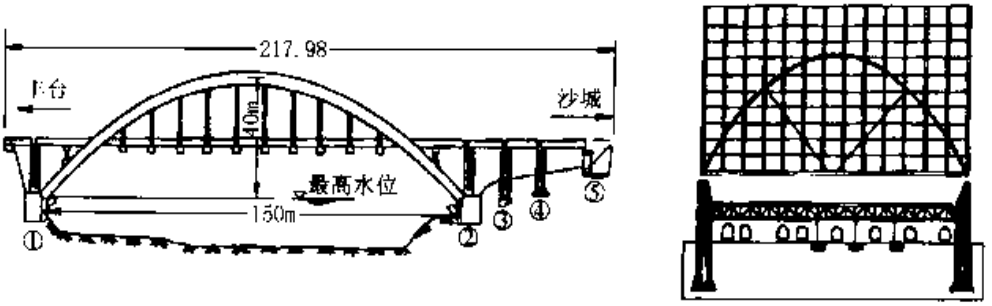
上述分析过程表明，如果要求 ED 或 DC 杆内力，应先确定相邻节间斜杆(杆 EF、FC)的内力，然后再用结点法（结点 E 或 C)求解。

需要注意的是：本节例题都是平面桁架。对于空间桁架，无论采用结点法还是截面法，已知力与未知力都将组成空间力系，这时需应用空间力系平衡方程，分析方法和过程与平面桁架相同。空间桁架等实际结构杆件很多，手算很困难，因此目前都用计算机进行分析。

§2－4　三铰拱受力分析

轴线为曲线、仅在竖向荷载下能产生水平反力（推力）的结构称为拱。图 2－17 所示为拱结构的工程实例。图 2－18 所示为几种静定拱的不同

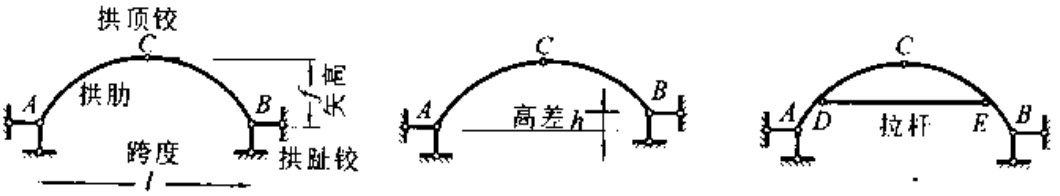
形式。



(a) 拱桥　　(b) 伦敦利物浦大街跨越铁道站台 BEH 办公楼

图 2－17　工程中的拱结构

构成拱的曲杆称为拱肋，拱的支座称为拱趾。不同形式拱的一些专有名称如图 2－18 所示。



(a) 等高三铰拱　　(b) 不等高三铰拱　　(c) 带拉杆三铰拱

图 2－18　静定拱的不同形式及一些名称

具有与拱相同跨度、且承受相同竖向荷载的简支梁称为等代梁(equivalent beam)，简称**代梁**。在拱的受力分析中常用代梁作对比。

2-4-1 拱反力计算

图 2－18a、b 所示的拱都有四个反力，而以整体为对象只有三个独立平衡方程，故无法求得全部支座反力。

等高拱：整体对拱趾铰取矩可求竖向反力，取受力简单部分为隔离体，对拱顶铰取矩可求水平反力。只有竖向荷载作用时，竖向反力与代梁反力相同，水平反力等值反向，称为**推力**(push forces) 记作 F_H，可证明 $F_H = M_C/f$ (如何证明，请读者考虑)。式中 M_C 为代梁对应于顶铰 C 处截面上的弯矩。

不等高拱：先由整体对受力较多拱肋的拱趾铰取矩，再由受力简单部分对拱顶铰 C 取矩，联立求解此两力矩方程，可得受力简单部分拱趾铰反力。另两反力由整体平衡来求。(方法并不唯一，读者可自行研究。)

按上述思路，图 2-19a、b 中二拱在所示荷载作用下的反力计算过程和结果如图所示，括号中数字表示求解步骤。

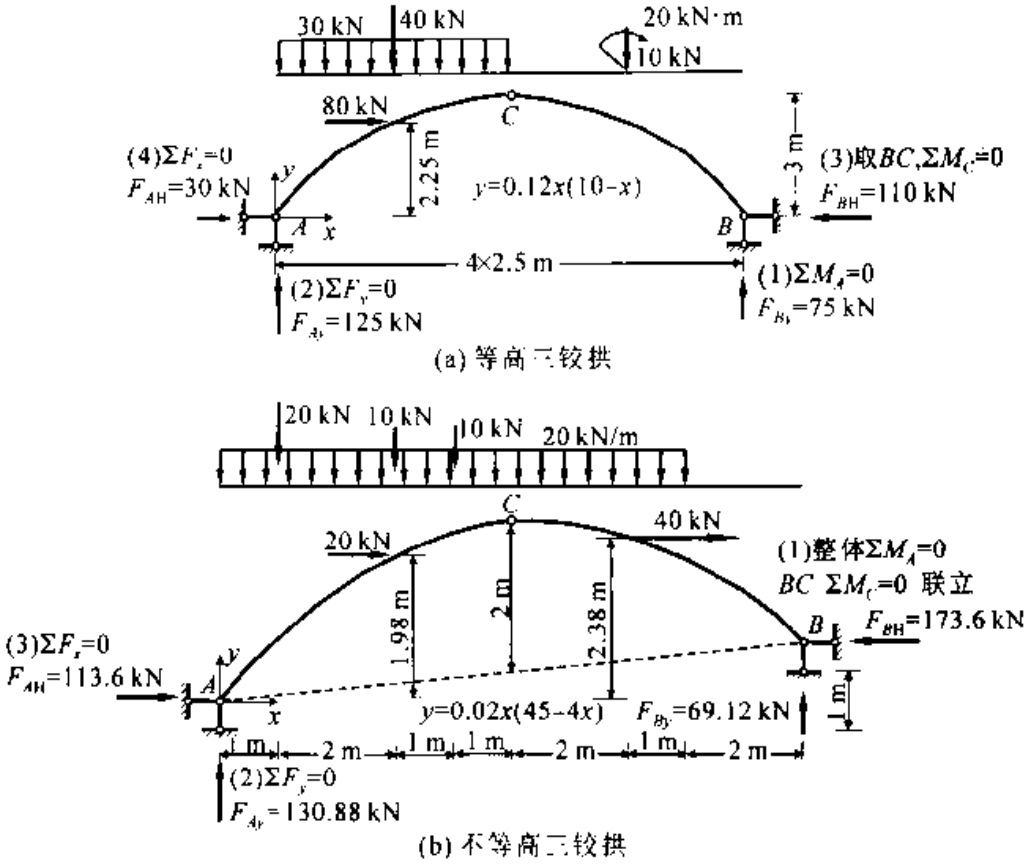


图 2-19 拱的反力计算示意

2-4-2 竖向荷载作用下等高拱指定截面内力计算公式

为建立竖向荷载作用下等高拱指定截面内力计算公式，取隔离体如图 2-20所示(图中所标的力都是正向)，由图 2-20a、b 受力情形对比可有如下关系：

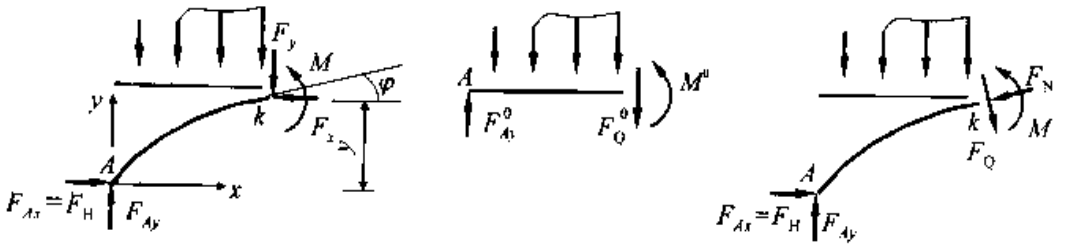
$$F_x = F_H, \quad F_y = F_Q^0, \quad M = M^0 - F_H y \tag{2-2a}$$

式中，带上角 0 的内力为代梁的内力。y 由给定的拱轴方程计算。再由图 2-20a、c 对比拱肋同一点的两截面受力，设指定截面的切线倾角为 φ(可由轴线方程求导获得，逆时针为正)，由沿截面和沿截面法向投影，可得内力公式为

$$\left.\begin{aligned} F_Q &= F_y\cos\varphi - F_x\sin\varphi - F_Q^0\cos\varphi - F_H\sin\varphi \\ F_N &= -(F_y\sin\varphi + F_x\cos\varphi) = -(F_Q^0\sin\varphi + F_H\cos\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{2-2b}$$

需要指出的是，非竖向荷载作用和不等高三铰拱等情形，上述公式是不

适用的。这时需要由截面法直接求解内力。



(a)截面k坐标方向力　　(b)代梁受力　　(c)截面内力

图2-20　拱内力公式分析过程

2-8-3　拱的内力图

将跨度等分成若干份，利用内力计算公式(2-2)求等分点处截面上的内力，再用直线连接等分点内力值即可作出拱的内力图。这一过程可借助于计算机完成。下面的数值和图2-21a、b即为计算机计算和作出的内力图。

等高抛物线三铰拱计算结果（力的单位为kN，力偶矩和弯矩的单位为kN·m）：

左右支座的竖向支座反力和水平推力分别为83.000，57.000，61.667，-61.667。

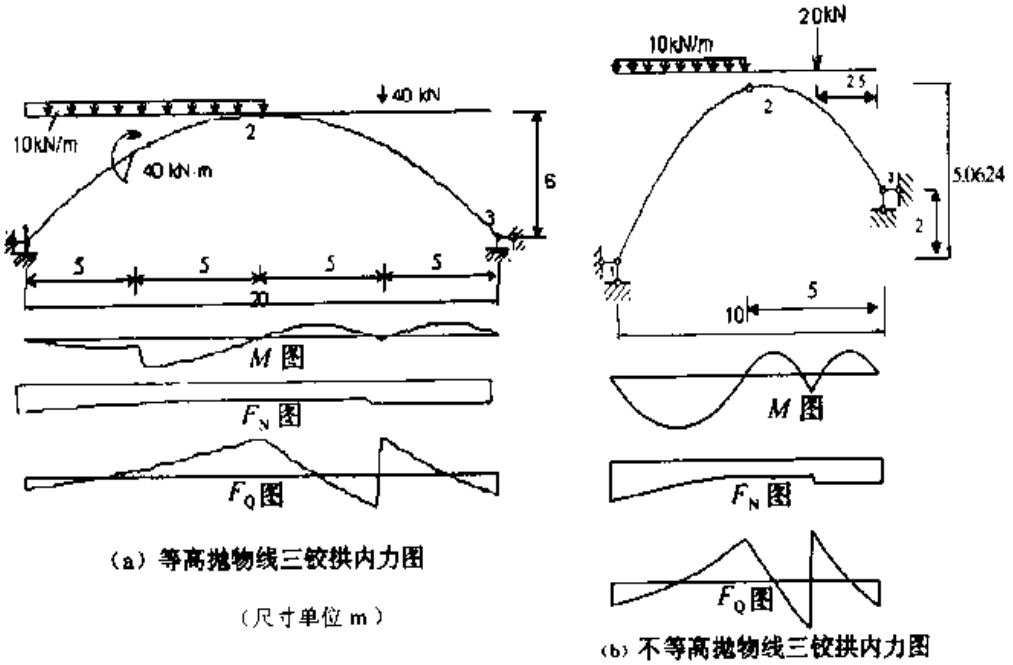
截面离左支座距离	弯矩 M_K	剪力 F_{QK}	轴力 F_{NK}	截面离左支座距离	弯矩 M_K	剪力 F_{QK}	轴力 F_{NK}
0.000	0.000	5.762	103.240	11.001	-13.310	-9.524	63.254
1.001	7.706	4.347	95.454	12.001	-19.202	-2.132	63.931
2.001	12.804	2.740	88.108	13.001	-17.695	4.899	63.779
3.001	15.301	0.917	81.301	14.001	-8.787	11.365	62.949
4.001	15.199	-1.138	75.164	15.001	7.480	-17.143	82.207
5.001	52.496	-3.432	69.852	16.001	-8.813	-10.219	83.351
6.001	47.193	-5.953	65.543	17.001	-17.705	-3.976	83.881
7.001	39.291	-8.659	62.422	18.001	-19.198	1.592	83.960
8.001	28.788	-11.477	60.663	19.001	-13.290	6.527	83.721
9.001	15.686	-14.300	60.394	20.000	0.000	10.883	83.267
10.000	0.000	-17.000	61.667				

不等高抛物线三铰拱计算结果(力的单位为kN，力偶矩和弯矩的单位

为kN·m)：

左右支座的竖向支座反力和水平反力分别为 46.875,23.125,21.875,-21.875

截面离左支座距离	弯矩 M_K	剪力 F_{QK}	轴力 F_{NK}	截面离左支座距离	弯矩 M_K	剪力 F_{QK}	轴力 F_{NK}
0.000	0.000	3.642	51.600	6.001	-4.000	-0.489	22.092
1.001	6.004	2.518	42.793	7.001	-0.993	5.955	21.279
2.001	9.001	0.978	34.631	8.001	-1.006	-5.169	31.410
3.001	8.998	-1.151	27.597	9.001	-3.999	0.344	31.830
4.001	5.995	-3.996	22.576	10.000	0.000	4.359	31.532
5.000	0.000	-7.354	20.837				



(a) 等高抛物线三铰拱内力图

(尺寸单位 m)

(b) 不等高抛物线三铰拱内力图

图 2-21 拱内力图示意

2-4-3 合理拱轴线

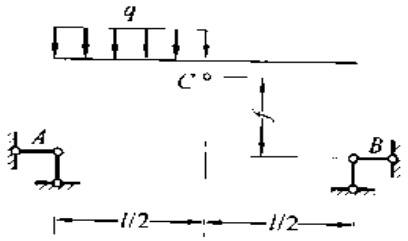
使拱在给定荷载下只产生轴力的拱轴线，被称为与该荷载对应的**合理拱轴**(reasonable axis of arch)。当拱轴线为合理拱轴时，拱截面上只受压力、

应力均匀分布，因此材料能充分发挥作用。

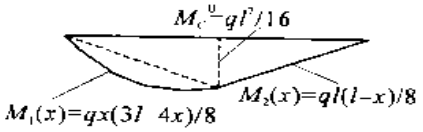
对给定竖向荷载作用的拱，令 $M = M^0 - F_H y = 0$，可得到合理拱轴为 $y = M^0/F_H$。这表明，**与代梁弯矩图成比例的轴线为合理拱轴**。因此对满跨均布荷载，合理拱轴为二次抛物线。

［**例题 2－4**］　三铰拱在图 2－22a 所示荷载作用下，矢高为 f、跨度为 l。试求三铰拱的合理拱轴。

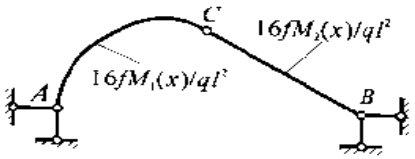
解：　根据图 2－22a 所示荷载可作出 2－22b 代梁弯矩图，由 $y = M^0/F_H = M^0 f/M_C^0$ 可知，只要将代梁弯矩图翻过来并乘以系数 f/M_C^0，则此弯矩图形状就是所示荷载的合理拱轴，如图 2－22c 所示。



(a)荷载与三个铰的位置



(b)代梁弯矩图



(c)所示荷载下合理拱轴

图 2－22　合理拱轴分析过程示意

对**非竖向荷载作用**情形，例如受静水压力作用的拱，可由曲杆平衡方程和合理拱轴定义来确定合理拱轴。对于均匀静水压力作用下的拱，可证明合理拱轴为圆弧线。

§2－5　受弯结构受力分析

2－5－1　多跨静定梁

由一些可能的基本部件（如图 2－23 所示）按静定结构组成规则组合而成、杆轴共线的受弯结构，称为**多跨静定梁**（multi-span statically determinate

beam)。能独立(不需要其他部件支撑)承担荷载的部件称为**基本部分**(fundamental part)。否则,需要其他部件的支撑才能承担荷载的,称为**附属部分**(accessory part)。用部件组成多跨静定梁的可能形式很多,图 2-24 只给出其中几种形式。

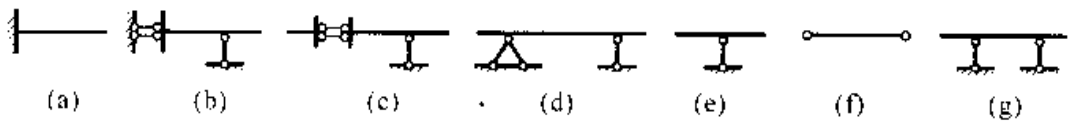


图 2-23 组成多跨静定梁的可能部件示意

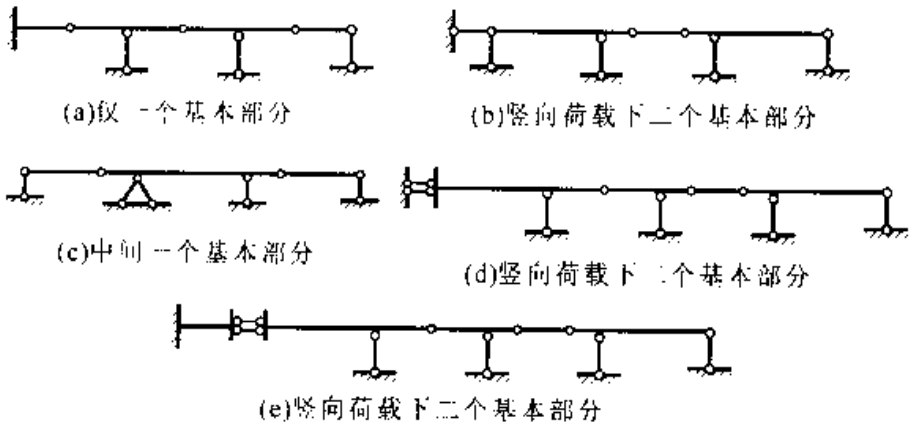


图 2-24 几种可能的多跨静定梁构造示意

从多跨静定梁的组成可知,其部件都是单跨梁,因此**只要注意部件间的相互作用和反作用关系**,根据各单跨梁所受荷载和单跨梁作内力图的知识,**按组成相反顺序:先附属部分,后基本部分。先求支座反力和支座截面控制弯矩,然后用平衡微分关系即可作出多跨静定梁的内力图**。

图 2-25a~d 是多跨静定梁求解过程示例。图 2-25d 是根据已求得的支座反力和荷载,像材料力学一样自左向右应用微分关系作出的。图 2-25e、f 是图 2-24a、b 所示两种形式多跨静定梁在所示荷载下计算机作的弯矩、挠度(flexibility)图。读者可自行按组成相反顺序,像所示的求解过程一样,先求支座反力和支座截面弯矩,然后利用区段叠加法复核弯矩图的正确性。

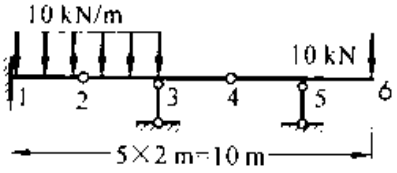
关于挠度图的勾画,需要说明以下几点:

(1) **因为弯矩图是画在杆件纤维受拉侧的,因此若弯矩图在杆轴上侧,挠曲线应该是凸的。反之,弯矩在轴线下方,则挠曲线是凹的。**

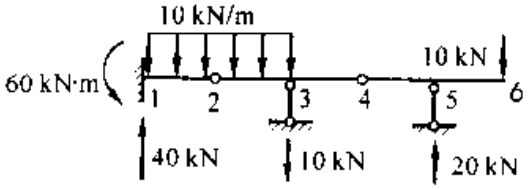
(2) **所勾画的挠曲线必须符合支座处的位移约束条件。**

(3) 弯矩的零点应该是挠曲线的反弯点。

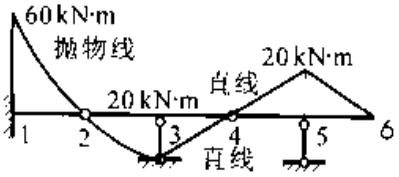
根据这些说明,读者可在复核了弯矩图后,进一步复核所示挠度图的正确性。



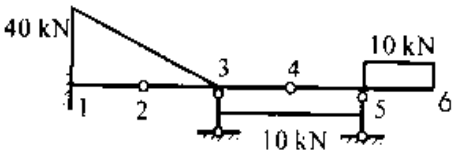
(a)结构及所受荷载



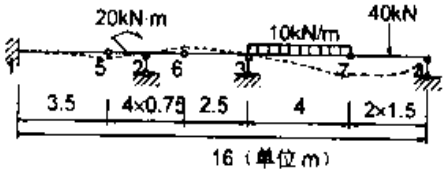
(b)“先附属、后基本”求反力

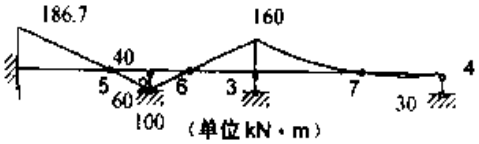


(c)由控制弯矩和微分关系作弯矩图

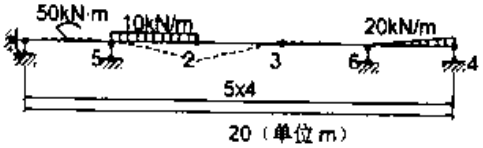


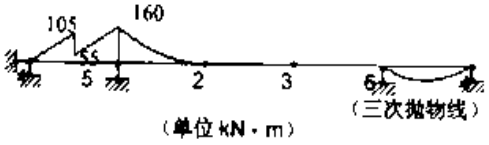
(d)由控制剪力作剪力图





(e) 一个基本部分多跨梁





(f) 一个基本部分多跨梁

图 2-25　多跨静定梁求解过程及弯矩、挠度图(图中虚线)

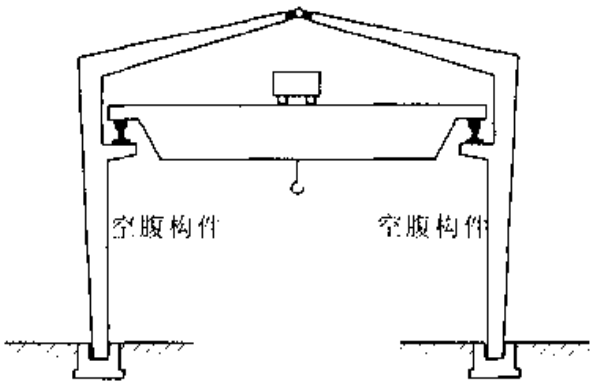
2-5-2 静定刚架

静定刚架(statically determinate frame)。刚架也称框架,是工程中最常见的结构形式之一,一般都是超静定的。但也有如图 2-26a 所示的小型厂房框架是静定的,其计算简图如 2-26b 所示。

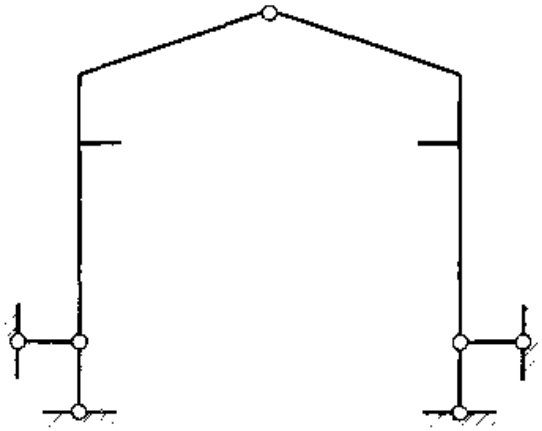
静定刚架按组成方式有“单体刚架”、“三铰刚架”和具有“基本-附属关系”的刚架,分别如图 2-27 所示。

1. 单体刚架

单体刚架的分析计算过程和多跨静定梁类似。**但需注意:对悬臂式单体刚架,只要取悬臂端部分作受力图,用平衡方程求控制截面弯矩即可。否则,应先求反力(不一定都求)再求控制截面弯矩,最后用区段叠加法作弯矩图,进一步按作内力图顺序作剪力和轴力图。**

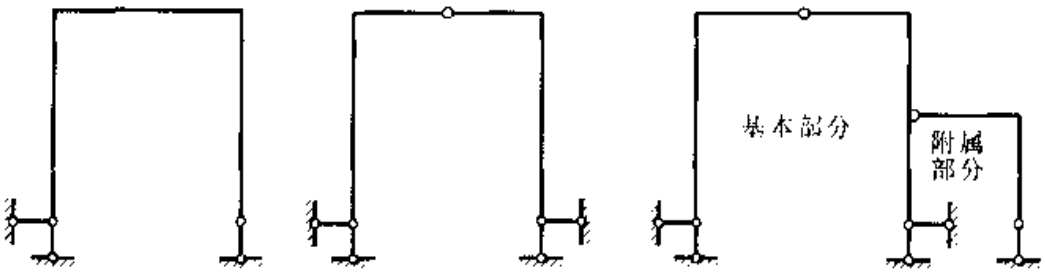


（a）江苏泰兴某厂房三铰刚架



（b）计算简图

图 2－26　厂房及计算简图



（a）两刚片单体刚架　　（b）三刚片三铰刚架　　（c）有基本、附属关系的刚架

图 2－27　静定刚架示意

图 2－28a 为一悬臂单体刚架，以其为例说明分析计算过程。

（1）取 2－3 杆为平衡对象，对 2 点取矩可得杆端弯矩为 $M_{23}=-40\ \text{kN}\cdot\text{m}$。

（2）取结点 2 为平衡对象，可得杆端弯矩为 $M_{21}=40\ \text{kN}\cdot\text{m}$。

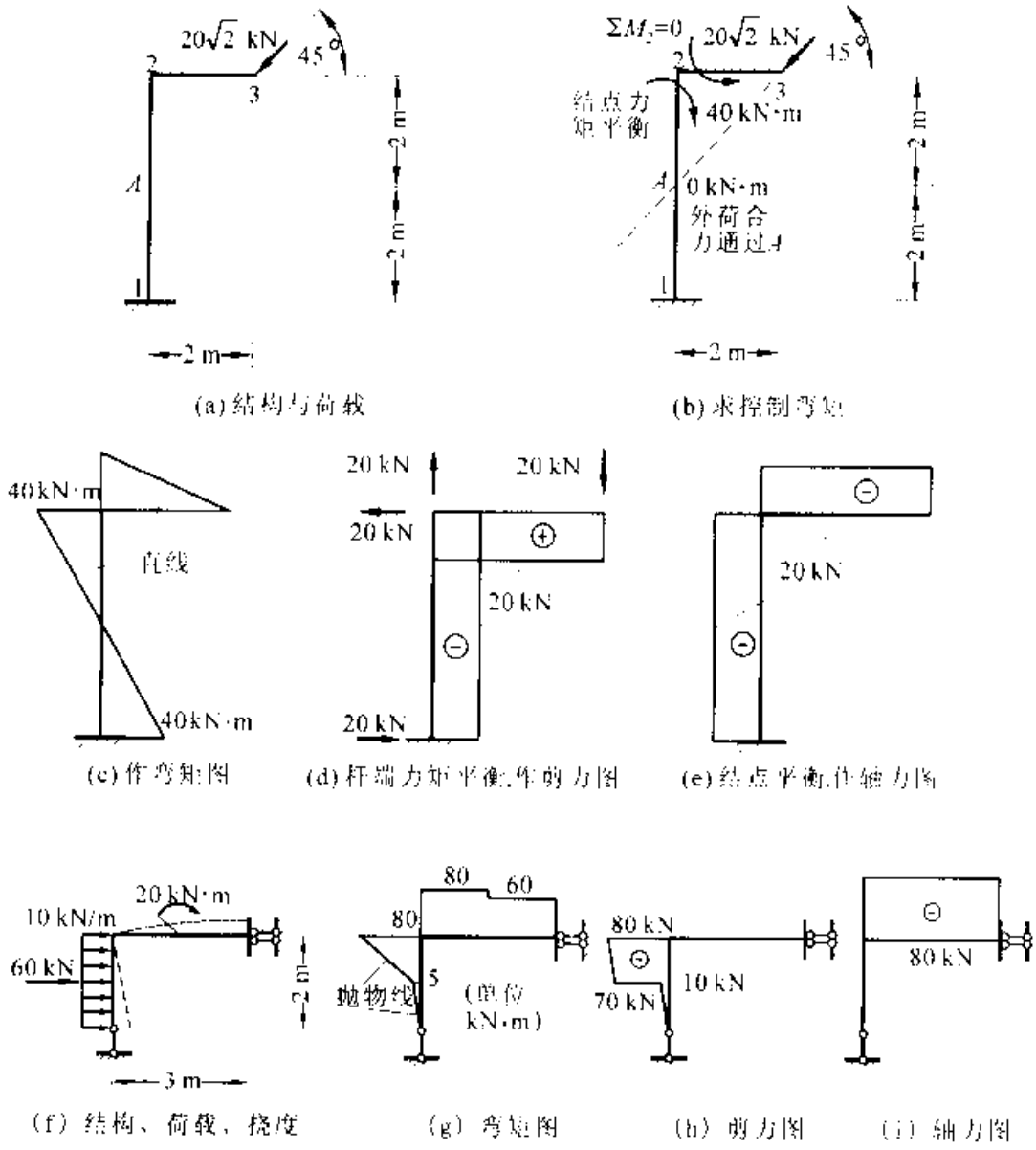


图 2－28　单体刚架内力、挠度示意

(3) 因为悬臂部分上荷载合力作用线通过 A 点，因此 A 点的弯矩为零。有了上述控制截面弯矩，利用平衡微分关系根据杆上荷载即可作出弯矩图。

(4) 取杆件 1－2 和 2－3 为平衡对象，在已知杆端弯矩的条件下，对杆端取矩可求得杆端剪力 $F_{Q12}=-20$ kN、$F_{Q23}=20$ kN，与材料力学一样可作剪力图。

(5) 取结点 2 为平衡对象，列投影方程可得 $F_{N12}=F_{N23}=-20$ kN，由此可作轴力图。

上述分析计算过程如图 2－28a～e 所示。限于篇幅，以下受弯结构的分析过程将都用图形表示，初学的读者在做作业时，希望仍然用文字按步骤进

行计算分析。

图 2-28f~i 给出一个单体刚架在图示荷载作用下计算机计算并作出的内力图和挠度图，建议读者用截面法和微分关系复核弯矩图的正确性。

2. 三铰刚架(frame with three hinges)

三铰刚架是由两个单体刚架像三铰拱一样用三个铰组成的静定结构。因为杆轴都是直线，因此分析过程比三铰拱还要简单。**关键在求反力：首先以整体为平衡对象，对底铰取矩；以部分为平衡对象时，对顶铰取矩，即可解决反力计算。**

图 2-29 给出了三铰刚架分析过程示例(以后图中带括号数字均表示求解步骤)。图 2-30、图 2-31 给出了等高和不等高三铰刚架在所示荷载作用下计算机计算并作的内力及挠度图，读者可用微分关系等复核弯矩图的正确性。

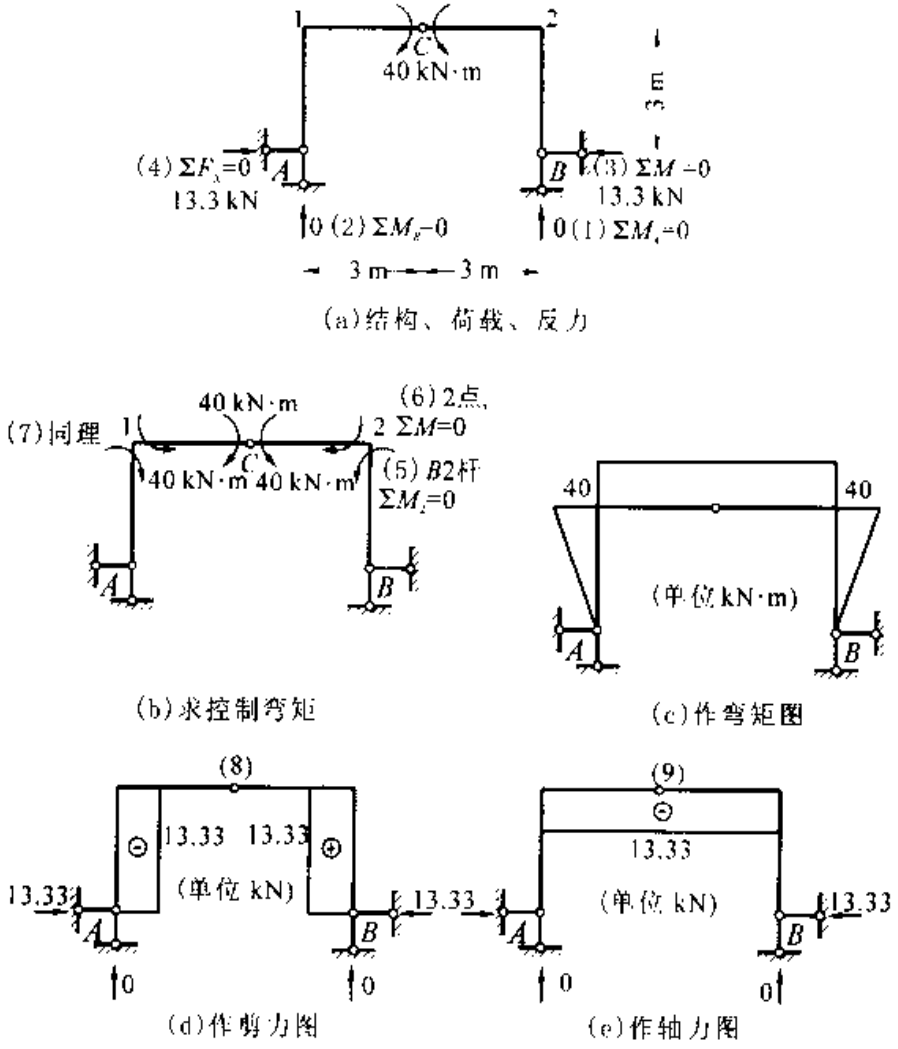
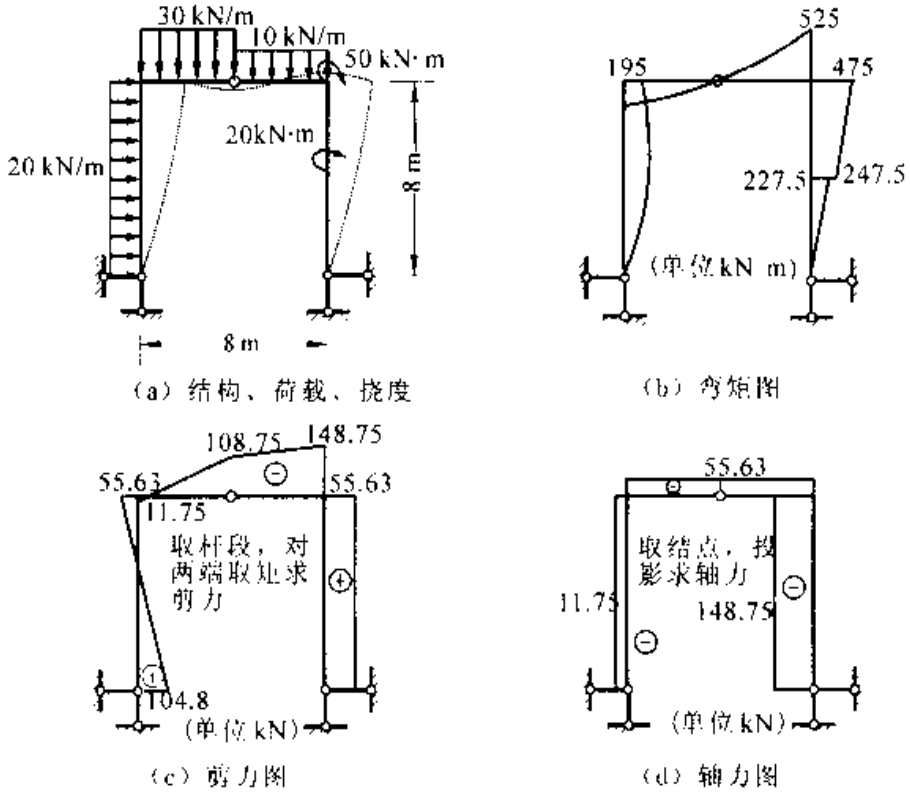
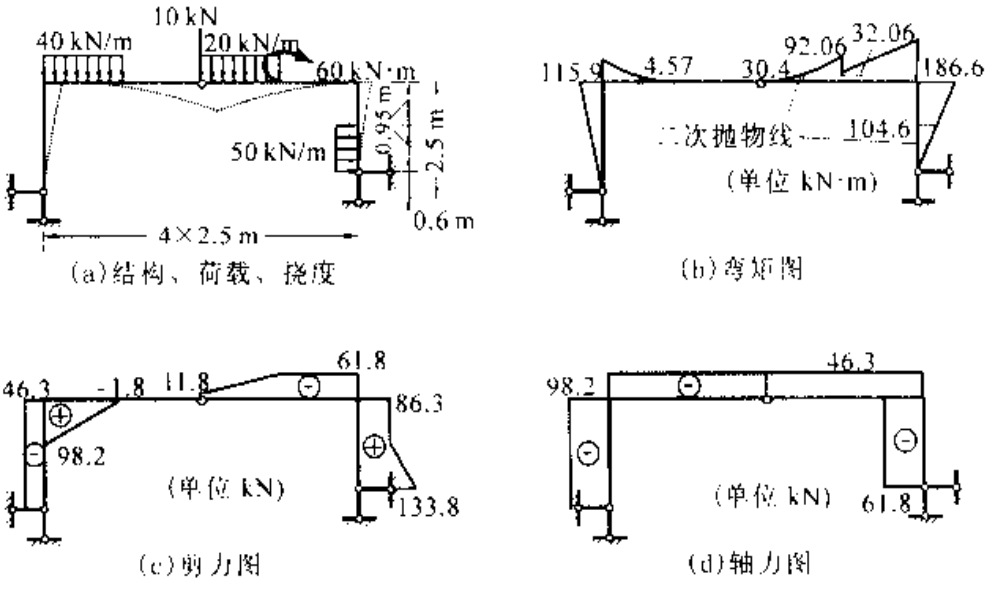


图 2-29 三铰刚架分析过程示例



(a) 结构、荷载、挠度　(b) 弯矩图　(c) 剪力图　(d) 轴力图

图2-30 等高三铰刚架



(a)结构、荷载、挠度　(b)弯矩图　(c)剪力图　(d)轴力图

图2-31 不等高三铰刚架

3. 有基本-附属关系的刚架(frame with fundamental and accessory part)

这类刚架的分析过程与多跨静定梁一样，首先分析什么是基本和附属部分，然后按先分析附属部分后分析基本部分的顺序作计算，此时应注意各部分之间的作用－反作用关系。

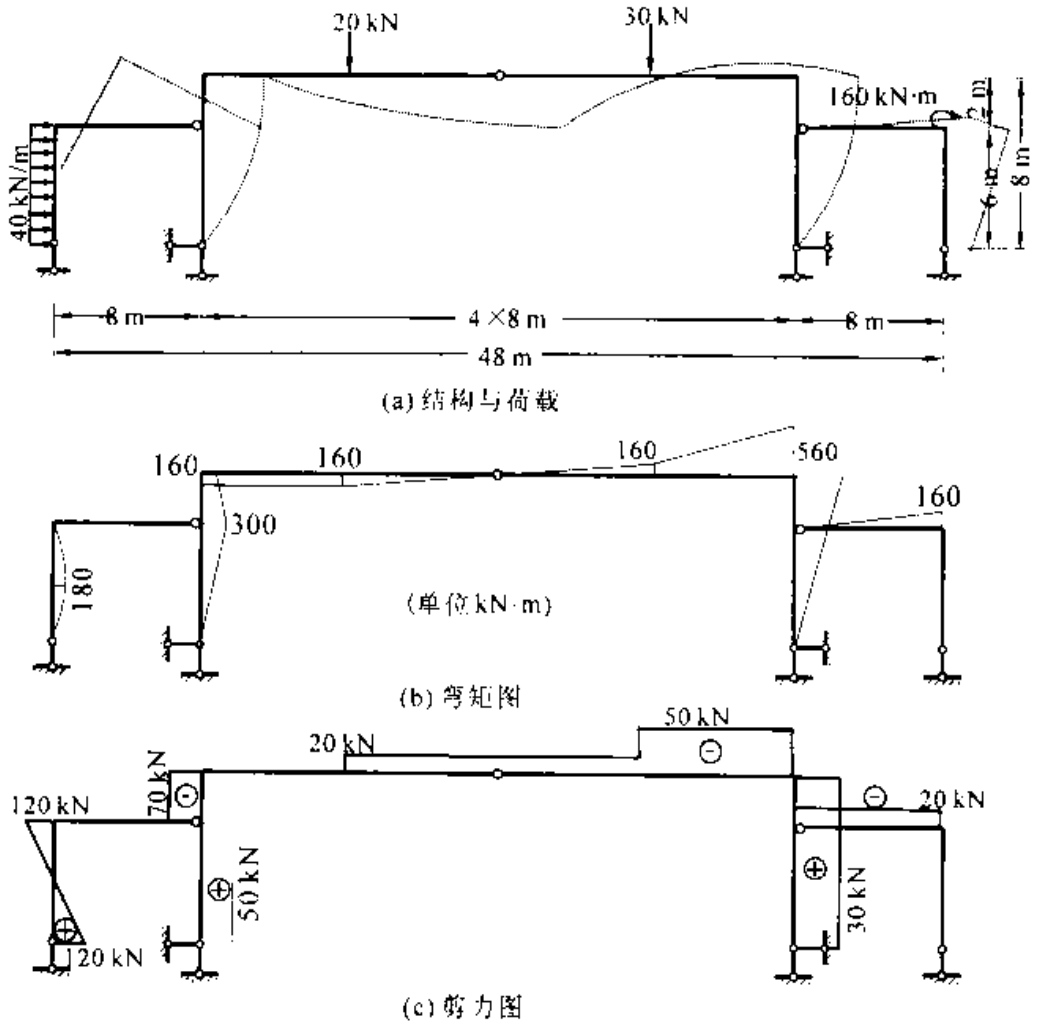


图 2－32　有基本－附属关系刚架的弯矩和剪力等示意

图 2－32 给出了这种刚架在所示荷载下计算机计算并作出的弯矩、剪力和挠度等示意图，读者可自行用截面法和微分关系等复核弯矩图的正确性。

2－5－3　静力学中的反分析

已知结构、荷载求反应，这属于分析，是传统的正命题。**已知结构的反应，推求结构或荷载，这属于识别，称为反分析，也称反问题。**

弹性结构的正命题解答是唯一的。反分析解答一般不唯一，视已知条件而定。例如图 2－33a 仅给出了某结构在某荷载作用下的弯矩图，为满足全部平衡关系，杆段和结点的受力可能如图2－33b，如果已知结构，根据平

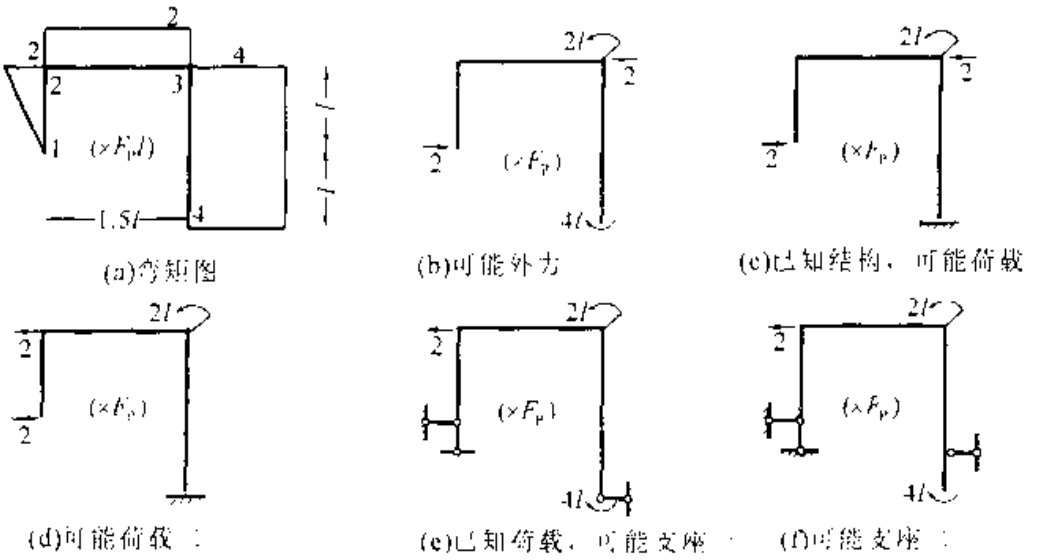


图 2－33　反分析简例

衡条件(包括微分关系)可推测得可能的荷载如图 2－33c、d 所示。如果已知荷载，同样根据平衡条件(包括微分关系)可推测到可能的结构如图 2－33e、f 所示。但是，如果已知全部反应(弯矩、剪力、轴力图)和结构，要反推出荷载，可以证明，其解答也是唯一的。如果已知反应和荷载，反推出结构则仍将是不唯一的。

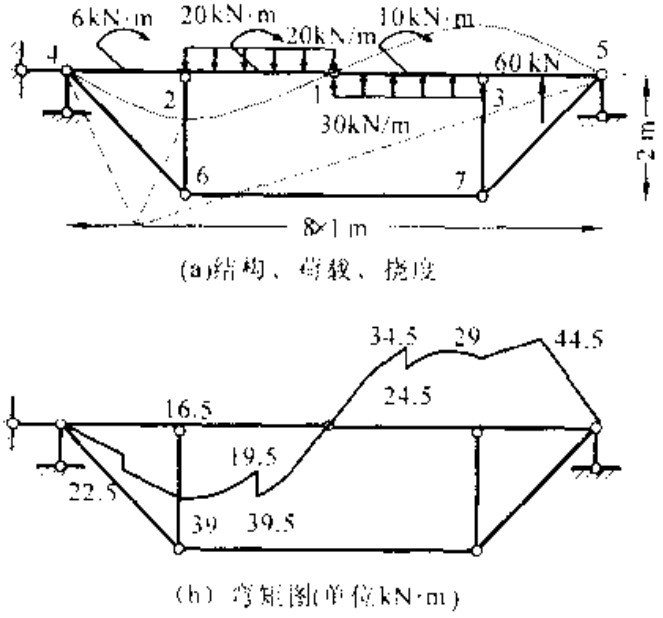


图 2－34　组合结构弯矩、挠度图

2-5-4 组合结构

部分杆件为二力杆、其余杆件又属于弯曲杆的结构，称为组合结构。二力杆只有轴力，而弯曲杆将有弯矩、剪力、轴力三个内力。对图2-34所示联合型组合结构，一般先求联系杆轴力；再求其他桁架杆内力；最后求弯曲杆内力，这时相关的桁架杆内力视为外力。其他形式组合结构，按组成相反顺序原则进行分析，当切断弯曲杆时要暴露3个力。

图2-34给出了一种组合结构计算机分析结果示例。读者可在求得支座反力后，用截面法截断6-7杆和拆开4处的铰来求6-7杆的轴力；再求其他桁架杆的轴力；然后以421和135为平衡对象求2、3点的控制截面弯矩；最后用微分关系即可复核弯曲杆弯矩图的正确性。

§2-6 各类结构的受力特点

● **桁架结构**。各杆只受轴力作用，由于杆横截面上正应力均匀分布，材料能充分发挥作用，因而是合理的结构形式。图2-35对作为屋架用的几

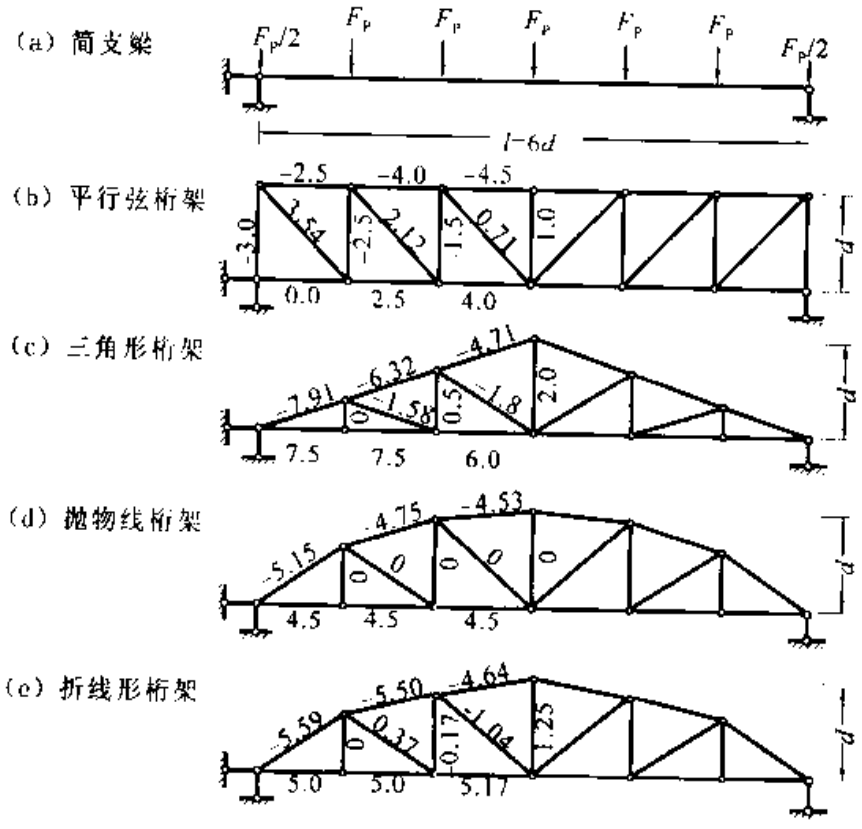


图2-35 不同外形桁架受力情况对比

种常见梁式桁架，在同样节间数、节间距和同样荷载下给出了各杆的轴力值（图中数值还需乘 F_P）。读者从中可以总结出桁架各类杆内力变化规律及不同外形桁架受力特点。有兴趣的读者还可利用随书发行光盘上的软件自行计算一批桁架结构，从中总结受力规律。对平行弦式桁架，简支梁截面弯矩由弦杆承担、剪力由腹杆承受，建议读者自行分析其间关系。

● **拱结构**。由于在竖向荷载下存在水平推力，其弯矩比等代梁小，以压力为主、压弯联合的截面应力分布比梁均匀。特别当按主要荷载情况设计为合理拱轴时，结构中弯矩很小，截面主要承受压应力，从而可使拉压强度不等的脆性材料更好发挥作用。但是推力对支座的要求提高，用作屋架时或地基很软弱难以承担很大推力时，可改用拉杆承受推力。三铰刚架的情形与其类似。

● **多跨梁**。可利用部件的外伸部分使支座处产生负弯矩，从而相对于等跨度的简支梁可使最大弯矩值减少。因此，同样荷载作用下，比连续排放的简支梁可有更大跨度。多跨静定梁主要承弯，截面上正应力沿高度直线分布，故材料不能充分发挥作用，这是缺点。但是多跨静定梁构造简单、易于施工等又是这种结构的优点。因此，设计时要综合考虑。

● **组合结构**。其中受弯杆属组成分析的复链杆，因此也将产生负弯矩，从而降低最大弯矩值。部件、外形的合理设计，可使受力达最合理。有兴

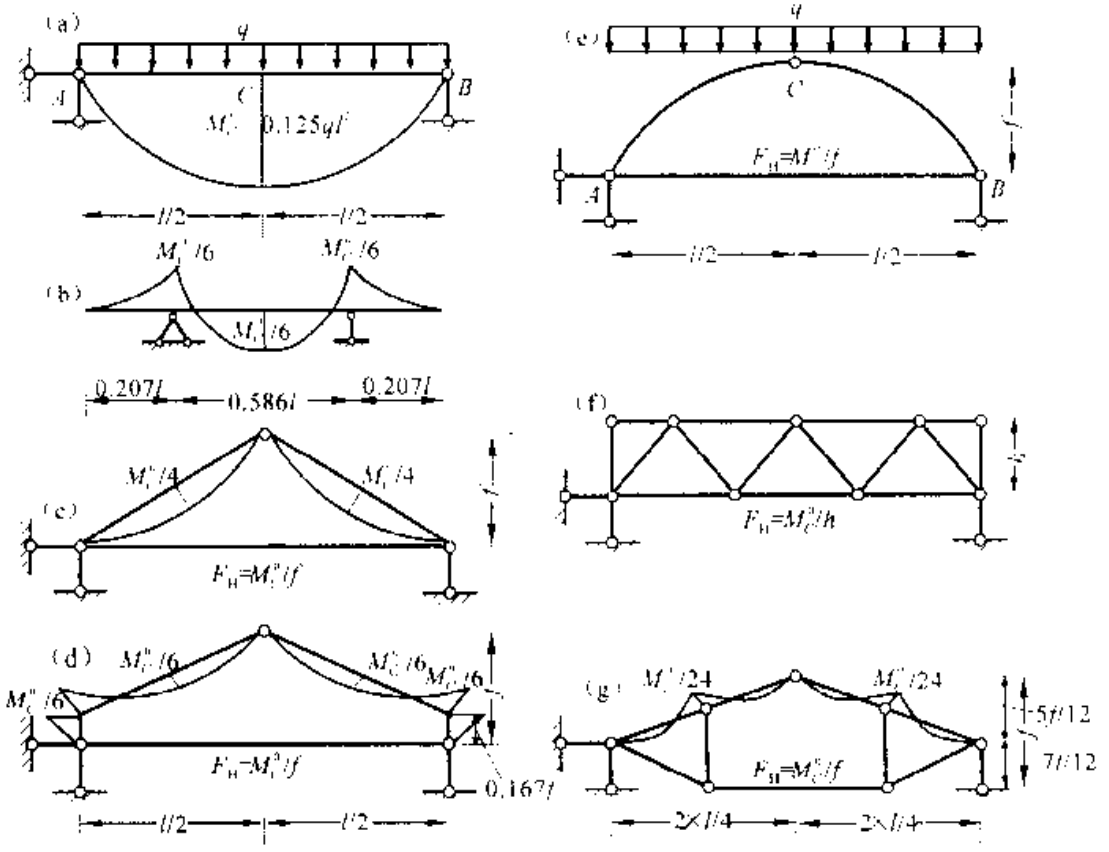


图 2　36　同样荷载、跨度各种静定结构弯矩对比

趣的读者可研究图2－34所示联合型组合结构，受沿水平长度均布竖向荷载作用且等节间距条件下，什么样的外形是最合理的。

图2－36给出了各种静定结构的弯矩值对比，可以帮助读者加深对受力特点的理解。其中图2－36(a) 简支梁；(b) 外伸梁；(c) 带拉杆三铰刚架之一；(d) 带拉杆三铰刚架之二；(e) 带拉杆抛物线三铰拱；(f) 梁式桁架；(g) 组合结构。

§2－7 静定结构性质

2-7-1 静定结构解答唯一性

静定结构的内力和反力都可以仅用平衡方程确定，也可用刚体虚位移原理来确定。应用刚体虚位移原理求解的过程是：解除与所要求的量相对应的约束，使静定结构变成单自由度系统，使内力变成外力；然后令单自由度系统产生沿约束力方向的单位虚位移，并计算全部主动力所作的总虚功；最后由总虚功为零即可求得所要求的量。

由于静定结构是无多余约束的几何不变体系，解除一个与所要求的量相对应的约束并用力代替后，结构变成单自由度的几何可变体系，所要求的量变成了主动力。因为解除约束后的系统发生单位虚位移是可能和唯一的，因此应用刚体虚位移原理的虚功方程，可以求得唯一的、有限的约束力。这表明，**一组满足全部平衡条件的解答，就是静定结构的真实解答。这是静定结构最基本的性质。称作静定结构解答唯一性。**

2-7-2 导出的性质

根据静定结构解答唯一性这一基本性质，可导出静定结构以下的性质：

(1) 支座移动、温度改变、制造误差等因素只使结构产生位移，不产生内力、反力，如图2－37a所示。

(2) 结构局部能平衡荷载时，仅此部分受力，**其他部分没有内力**，如图2－37b所示。

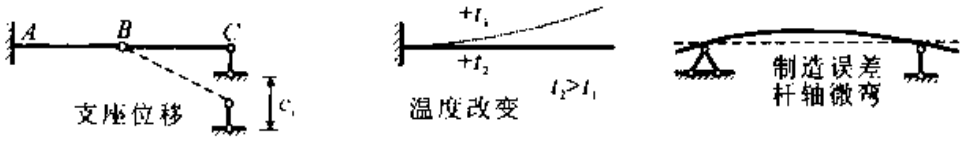
(3) 结构的一几何不变部分上的荷载作静力等效变换时，仅使变换部分范围内的内力发生变化，如图2－37c所示。

(4) 结构的一几何不变部分在保持连接方式、不变性的条件下，用另一构造方式的几何不变体代替，则其他部分受力不变，如图2－37d所示。

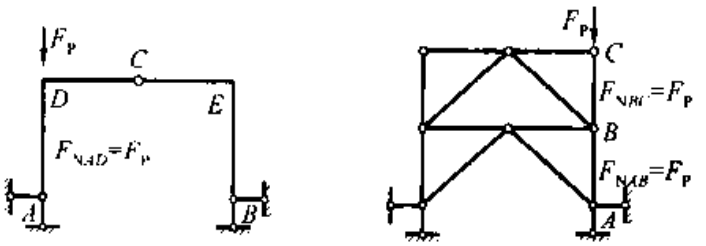
(5) **具有基本部分和附属部分的结构，当仅基本部分承受荷载时，附属**

部分不受力，如图 2－37e 所示。

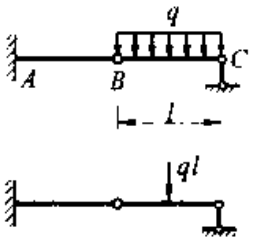
图 2－37 是上述导出性质的示意图，熟练地应用静定结构性质，可使分析计算得到简化。



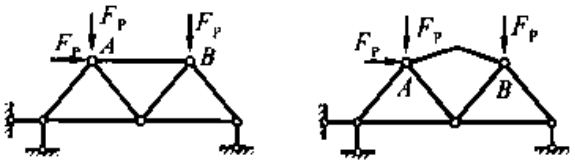
(a) 导出性质一，无反力和内力



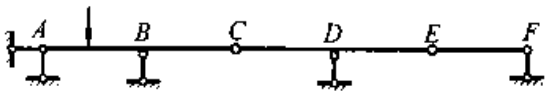
(b) 导出性质二，仅部分受力



(c) 导出性质三，仅*BC*受力改变



(d) 导出性质四，除*AB*外受力不变



(e) 导出性质五，仅*AB*受力

图 2－37　静定结构导出性质示意图

§2－8　结论与讨论

2－8－1　[illegible]

通过本章学习应该掌握下列重要结论：

● 对于静定结构，只要遵循求解步骤与结构组成顺序相反，适当选取隔离体（结点或部分），利用平衡条件，总可求得全部反力和内力。这是最基本的。

● 受弯结构的内力以弯矩为主。弯矩图作于受拉侧，步骤为：一般先求反力，然后分单元（杆段），用截面法求控制截面弯矩值，在结构上对各单元由控制弯矩、单元荷载用区段叠加法（注意微分关系）作弯矩图。剪力和

轴力图可在作出弯矩图后以单元、结点为对象，用平衡条件在求得控制剪力和轴力后作出。

● 通过判断单杆、零杆，利用对称性，以及适当地选取截面（这要在练习过程中归纳、总结来积累），可使桁架分析过程大为简化。

● 各种结构形式都有自身特点，桁架杆只受轴力，根据主要荷载设计的拱（具有对应此荷载的合理拱轴）主要承压，这两种情形下材料都能充分发挥作用；虽然弯曲正应力在截面形心处很小，材料不能充分发挥作用。但是，梁结构简单、刚架的可用空间大，设计时要综合考虑这些因素，以便合理地确定结构选型。

● 对称的结构，一般利用对称性可使分析得到简化；荷载不对称时，可将其分成对称荷载和反对称荷载，分别分析计算后叠加。也可利用对称性取一半结构进行分析。

● 静定结构满足平衡要求的解答是唯一的。掌握由这一基本性质所导出的性质，可提高分析速度和能力。

2-8-2 几点讨论

● 复杂直杆铰结体系的组成分析，当不符合三角形基本规则、而计算自由度又等于零时，可以利用静定结构解答唯一性进行分析。如果在无荷载作用下其反力和各杆轴力均等于零，能满足全部平衡条件，体系一定是静定的（无多余约束几何不变）。如果在无荷载作用下，体系具有能自相平衡的"自内力"，则体系中一定存在约束配置不合理，因而是几何可变的。这种分析体系可变性的方法，称为**零载法**(zero load method)。零载法是否仅适用铰结体系？是否也适用于超静定结构？除零载法外，是否还能有其他方法确定复杂体系的可变性？这些问题留给读者自己研究。

● 一些拱型桥梁结构，为了便于行车，需填土使桥梁顶面水平。请读者考虑，对这种受回填土压力作用（荷载集度与拱轴方程有关）的拱，应该如何确定合理拱轴？它的合理拱轴是什么曲线？

● 在说明静定结构解答唯一性时，介绍了用刚体虚位移原理（称为**虚功法** virtual workmethod）确定静定结构某一指定反力或内力的方法。虚功法的关键是要求得单位虚位移引起的外力对应的位移，因此虚功法的实质是把平衡问题化为几何问题来解决。请读者考虑，能否反过来用刚体虚位移原理？例如能否用它确定静定结构由于支座移动引起的某指定点、指定方向的位移？这一问题也留给有兴趣的读者自己研究。

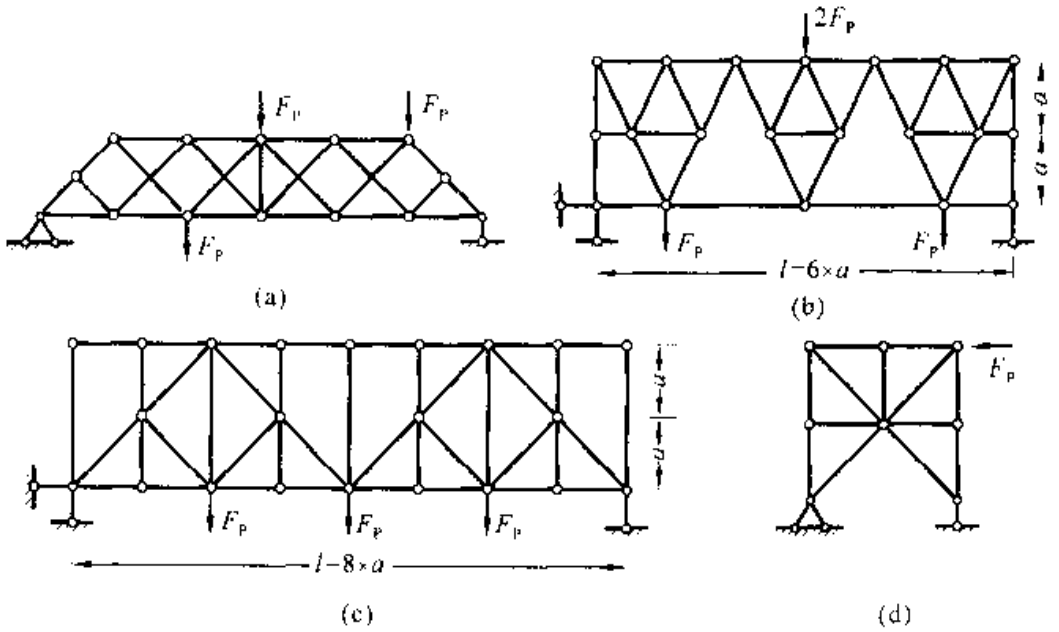
● 本章只介绍了静定平面结构的受力分析，在此基础上应如何将求桁架内力的结点法、截面法等引伸到空间静定桁架？如何把受弯结构区段

叠加法引伸到简单的空间刚架受力分析？请读者自行考虑。

● 建议读者利用本书光盘上的 jlifx.exe 程序分析一些实际工程结构，以便加深对本章内容的理解，并从中归纳总结出规律性的结论。

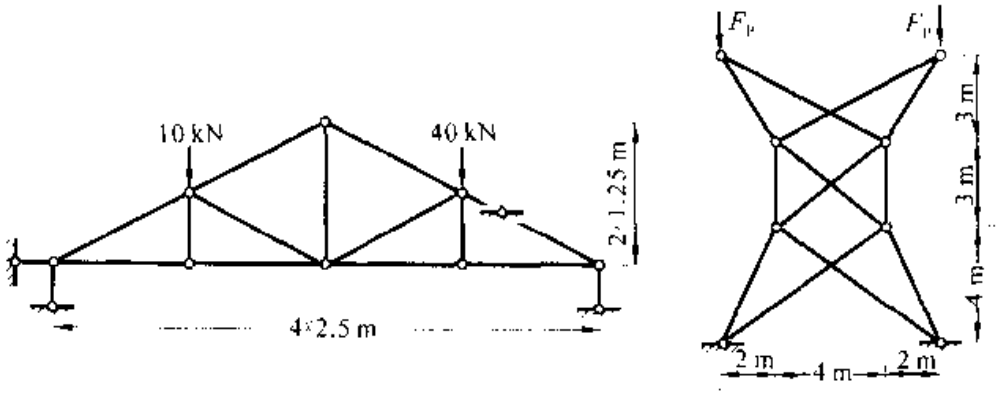
习　题

2－1　试判断图示桁架中的零杆。



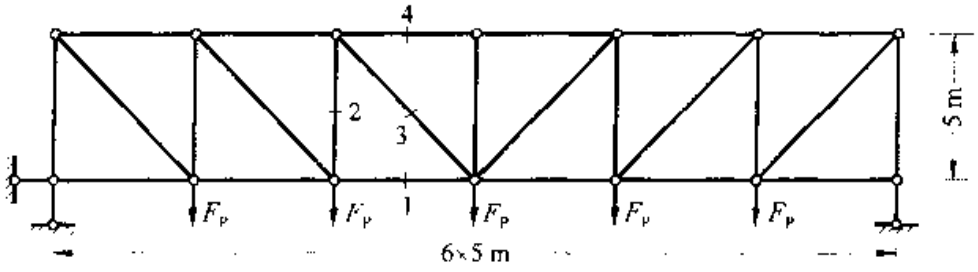
习题 2－1 图

2－2　试用结点法求图示桁架的各杆内力(建议用光盘程序进行计算)。



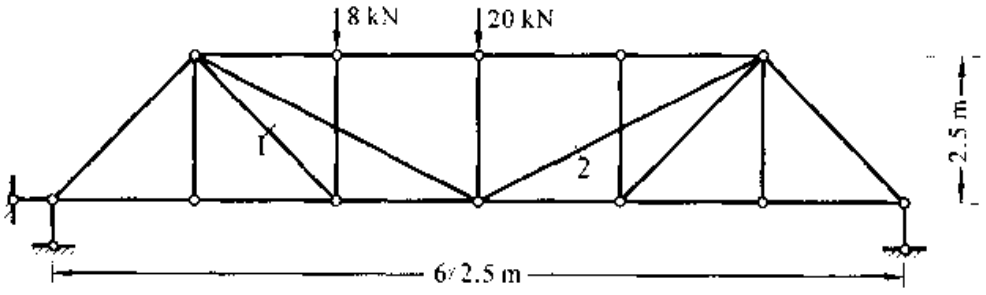
习题 2－2 图

2-3　试用截面法求图示桁架指定杆件的内力。



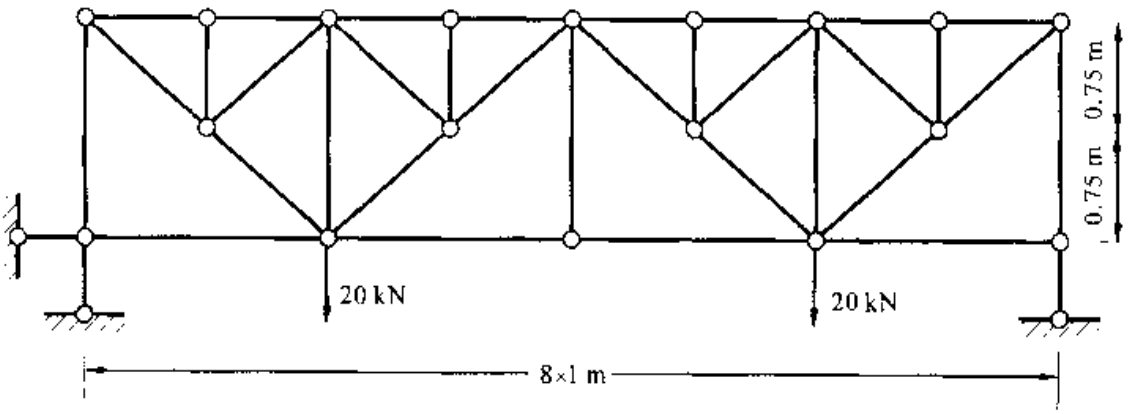
习题 2-3 图

2-4　试判断图示桁架的零杆，并求 1、2 杆轴力。



习题 2-4 图

2-5　试用对称性求图示桁架各杆内力。



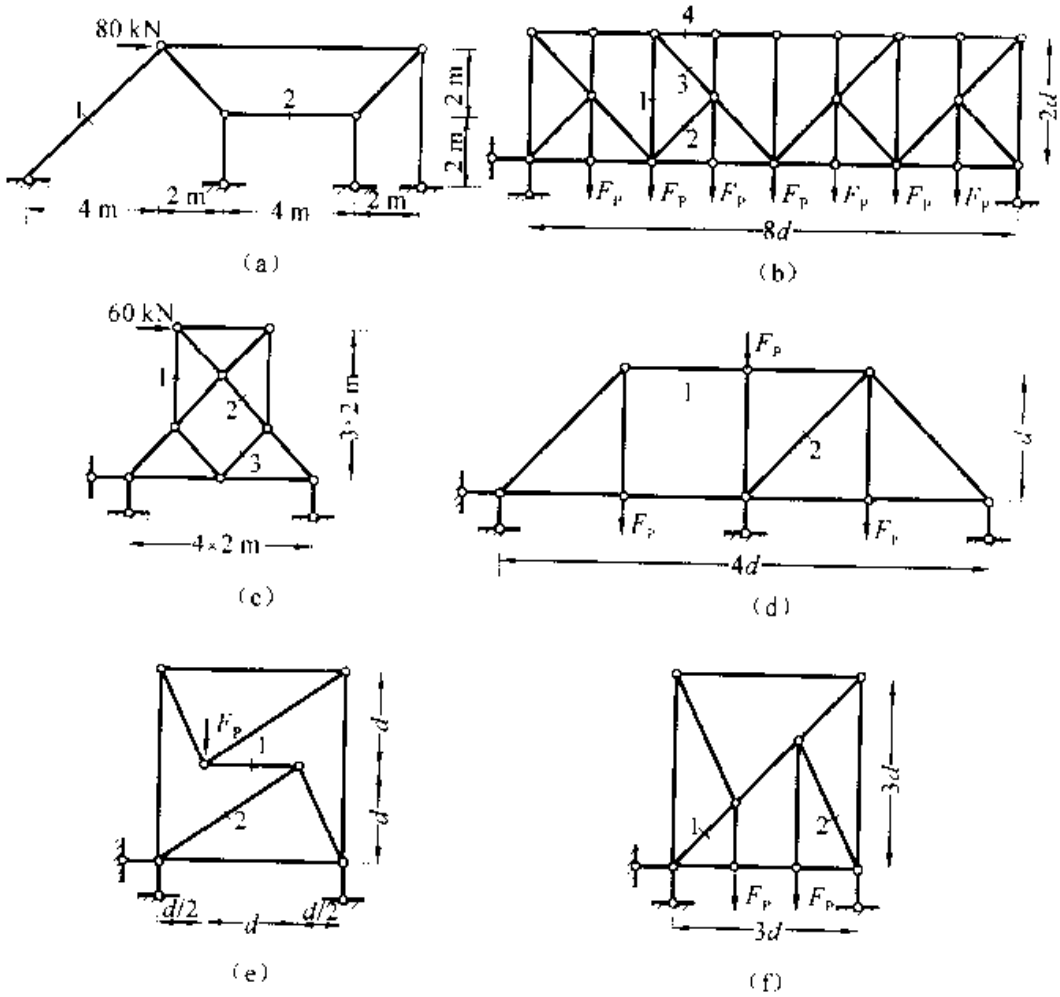
习题 2-5 图

2-6　试说明如何用较简单的方法求解图示桁架指定杆件内力。

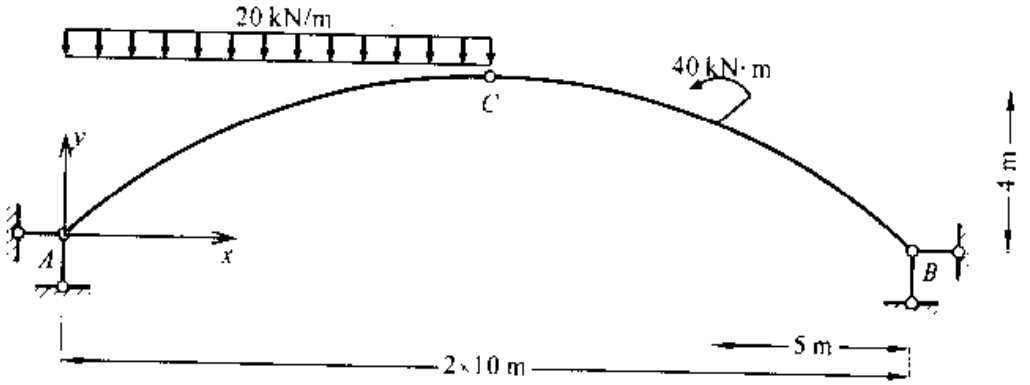
2-7　试求图示抛物线($y=4fx(l-x)/l^2$)三铰拱距左支座 5 m 的截面内力。

2-8　试求在图示荷载作用下，抛物线不等高三铰拱的支座反力和 D 截面内力。

2-9　试作图示多跨静定梁内力图。

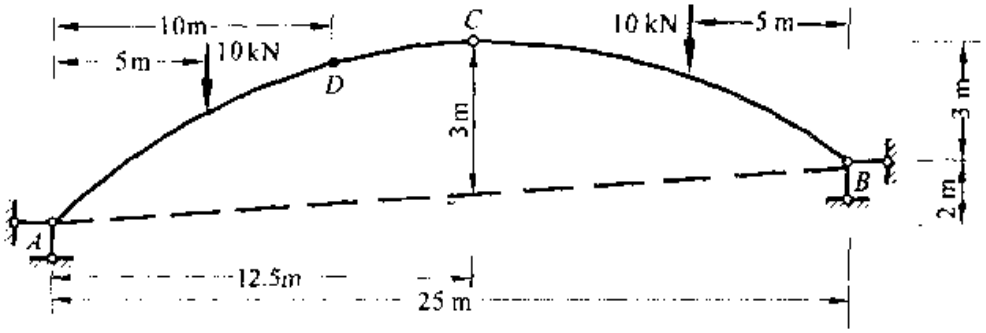


习题 2-6 图

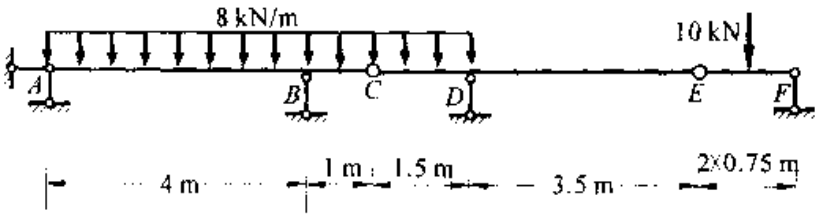


习题 2-7 图

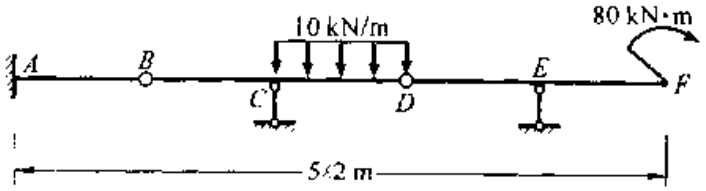
2-10　试找出下列弯矩图中的错误。



习题 2－8 图

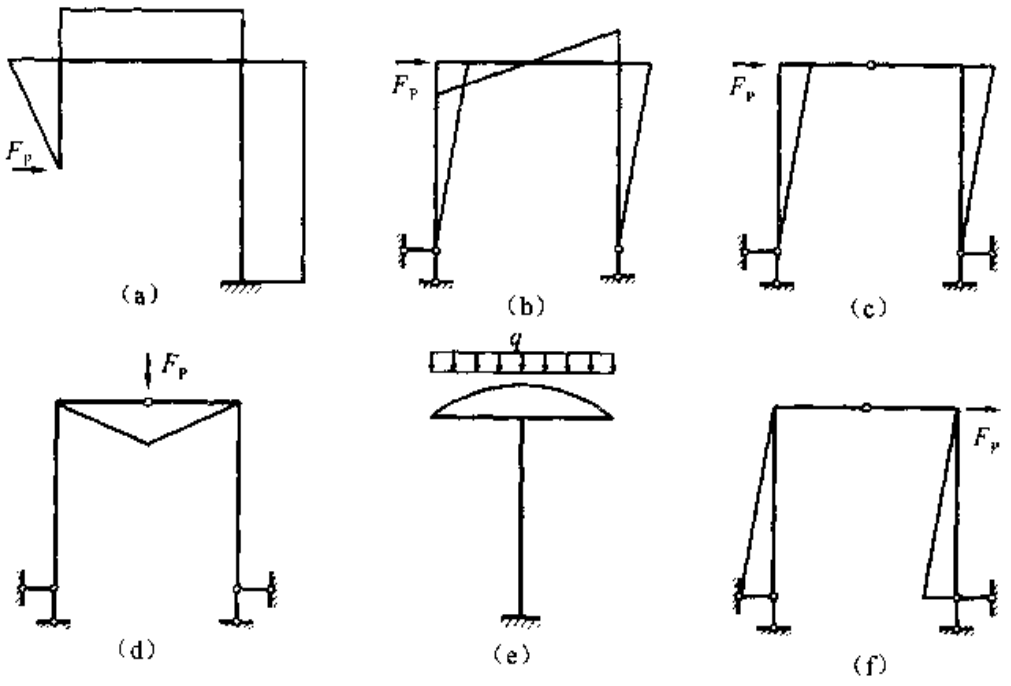


（a）作内力图



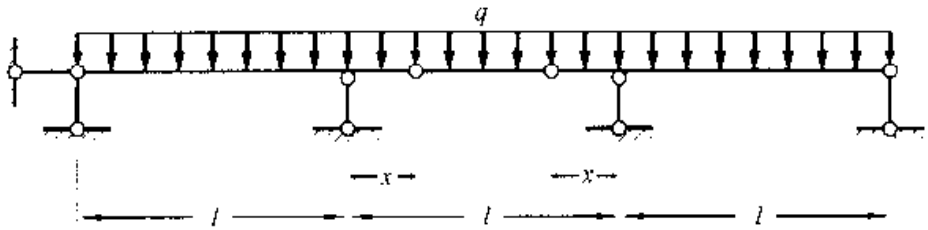
（b）作弯矩图

习题 2　9 图



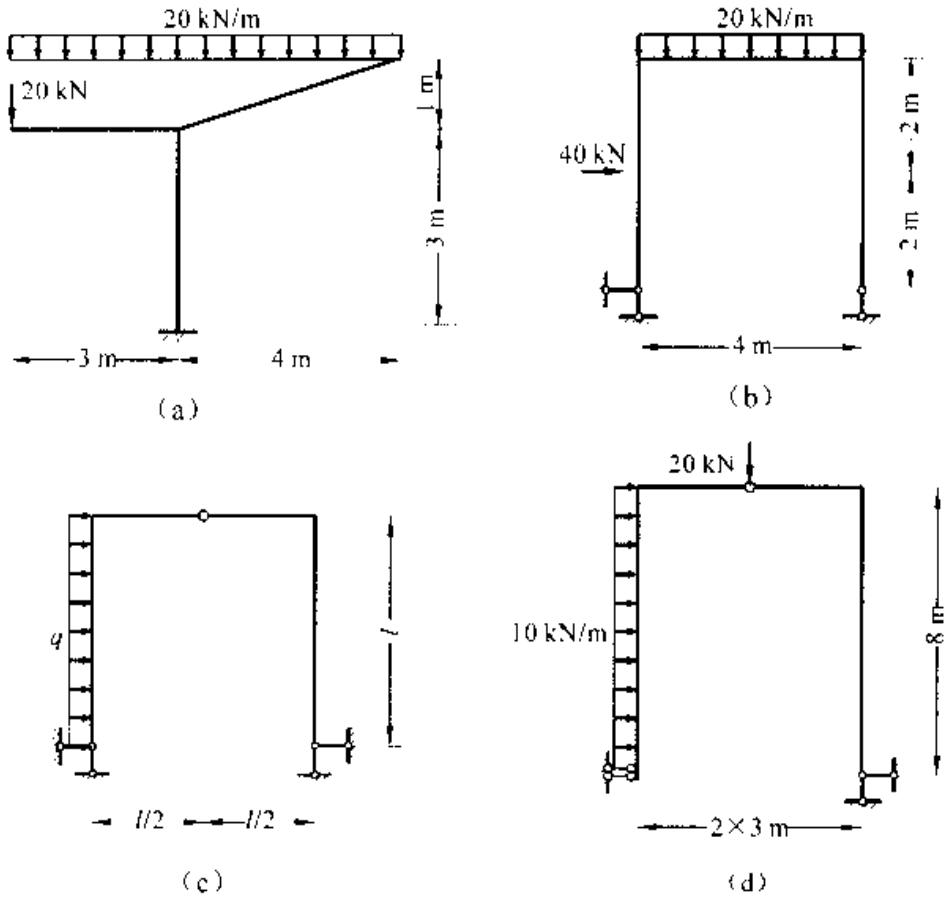
习题 2－10 图

2－11　试选择铰的位置，使中跨的跨中截面弯矩与支座弯矩相等。



习题 2－11 图

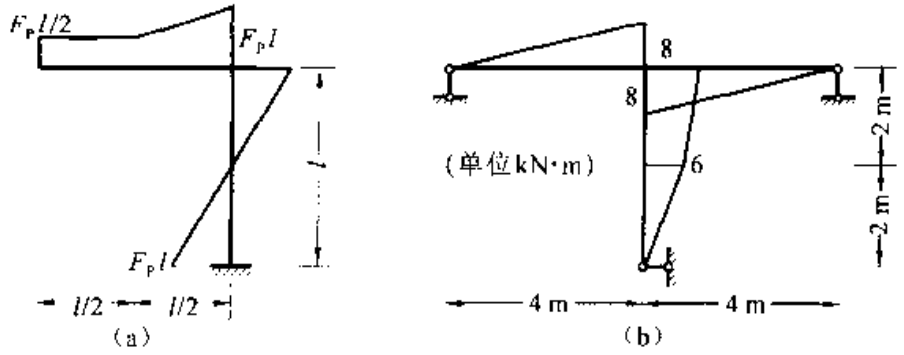
2－12　试作图示刚架内力图。



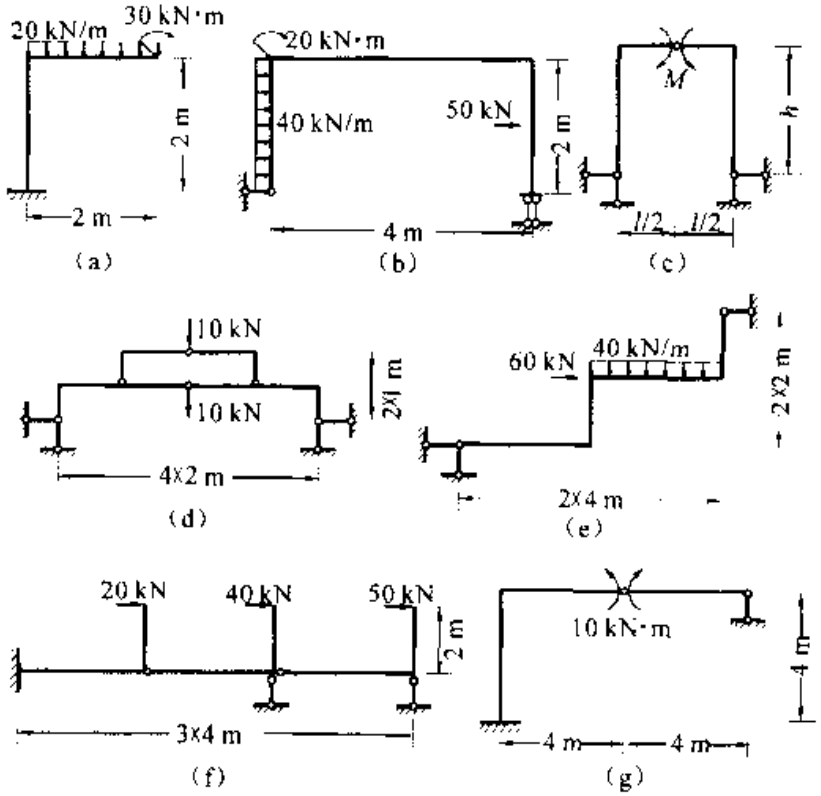
习题 2－12 图

2－13　已知结构的弯矩图，试确定一种可能的荷载。

2－14　试快速作图示刚架的弯矩图。



习题 2-13 图



习题 2-14 图

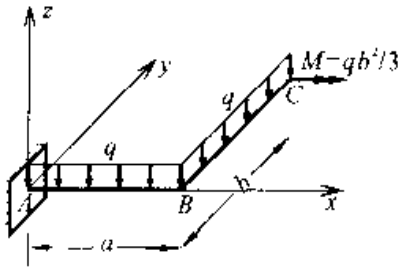
*2-15　图示杆件轴线位于水平面内的刚架，受竖直均布荷载和力偶作用。试作其内力图。

*2-16　图示水平面内圆环受竖向力作用，试作圆环的剪力、弯矩和扭矩图。

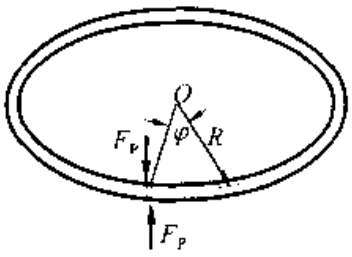
2-17　试作图示结构的弯矩图。

2-18　试作图示组合结构的内力图。

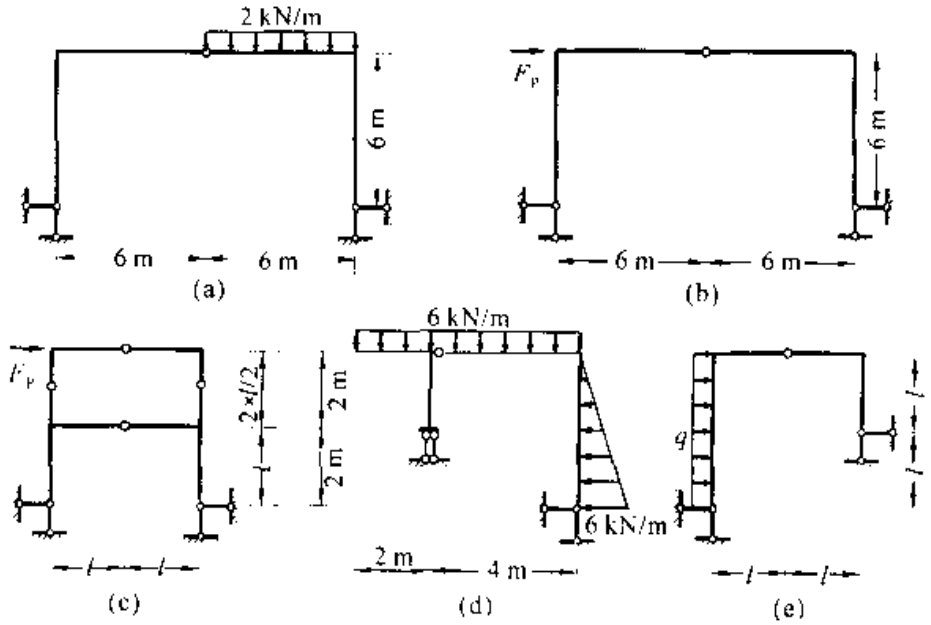
*2-19　试利用随本书发行光盘上的计算机程序，尽可能多作一些题目，并对计算结果进行分析总结。



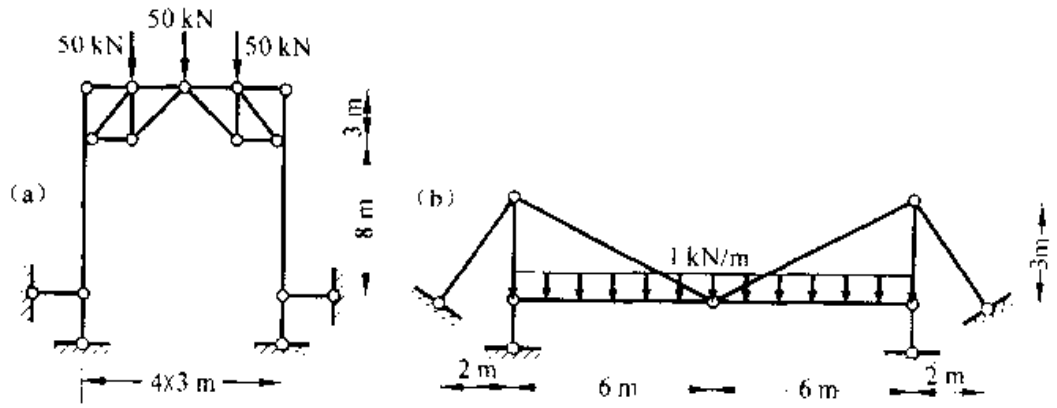
习题 2－15 图



习题 2－16 图



习题 2　17 图



习题 2－18 图

2－20　试用零载法分析图 2－8c 所示复杂桁架的几何可变性。

第3章

结构位移计算

工程结构除了满足强度要求外，还必须保证具有足够的刚度，即不能产生过大的弹性变形。此外，工程中大量的结构是超静定的，超静定结构分析要综合考虑“平衡、协调和材料的物性关系”三个方面。因此，不仅要分析结构的内力，而且要分析结构的变形。结构的变形是由各部分位移表征的。

本章基于材料力学中关于杆件微段变形的若干结论，在变形体虚功原理基础上，推导了单位荷载法，建立了杆系结构位移计算公式，进而导出了线性弹性结构的互等定理。

§3-1 弹性杆件的变形与应变能密度计算

材料力学中关于基本受力与变形形式下，内力与变形关系已有如下结论：

- 拉压变形 $\varepsilon=\dfrac{F_N}{EA},\quad \Delta l=\dfrac{F_N l}{EA}$
- 弯曲变形 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{EI}=\kappa$ (a)
- 扭转变形 $\varphi=\dfrac{M_x}{GI_p}$
- 剪切变形 $\gamma=\dfrac{kF_Q}{GA}$

对于线弹性问题，弹性杆件基本受力与变形形式下的单位长度应变能密度可按下述公式计算：

- 拉压变形　$v_\varepsilon = \frac{1}{2}F_N\varepsilon = \frac{F_N^2}{2EA} = \frac{1}{2}EA\varepsilon^2$
- 弯曲变形　$v_\varepsilon = \frac{1}{2}M\kappa = \frac{M^2}{2EI} = \frac{1}{2}EI\kappa^2$
- 扭转变形　$v_\varepsilon = \frac{1}{2}M_x\varphi = \frac{M_x^2}{2GI_p} = \frac{1}{2}GI_p\varphi^2$　(b)
- 剪切变形　$v_\varepsilon = \frac{1}{2}F_Q\gamma = \frac{kF_Q^2}{2GA} = \frac{1}{2}kGA\gamma^2$

实质上，v_ε 为单位微元体内力所作的实功，即内力在自身所引起的变形上作的功。

§3-2　变形体虚功原理

变形体的虚功原理是适用于任意变形体的普遍原理，用它可导出位移计算方法和计算公式，以及线性弹性体的一些互等定理等。

3-2-1　变形体虚功原理的表述和说明

任何一个处于平衡状态的变形体，当发生任意一个虚位移时，变形体所受外力在虚位移时所作的总虚功 δW_e，恒等于变形体所接受的总虚变形功 δW_i。也即恒有如下虚功方程成立：

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{3-1}$$

为了以后正确应用虚功原理，需要说明以下几点：

(1) 虚功原理中涉及两种状态：一个是变形体处于平衡的力状态；一个是不管产生位移原因的满足协调条件的位移状态。

(2) 根据变形体处于平衡状态的前提，当以变形体和从变形体中取出的任何部分为对象时，它们一定都是平衡的，因此变形体上外力自然都是平衡力系。

(3) 所谓虚位移，是指在变形体内部位移协调(光滑、连续)，在边界上满足边界位移约束条件的微小位移。"虚"的含义是指，位移状态和力状态无关，或者说"力"在"位移"过程中是不变的，是保守力。

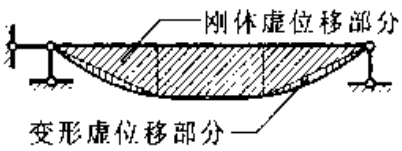


图3-1　虚位移分解

(4) 从变形体中取出的任何部分，可以是有限尺寸的"单元"体，也可以是无限

小的微元体。当变形体发生虚位移时，每一部分的虚位移总可分解成刚体虚位移和变形虚位移两部分。需要强调的是，当只考虑各部分的刚体虚位移或只考虑变形虚位移时，相邻部分间将都是不协调(如图 3-1 所示都将不光滑)的。

(5) 变形体所接受的总虚变形功，是指变形体任何部分上的全部外力在该部分变形虚位移上所作总虚功的总和。这里"总和"的意义是指对所有部分求和。

(6) 虚功方程式(3-1)中 δW_e 是变形体所受外力在虚位移时所作的总虚功，δW_i 是变形体所接受的总虚变形功。在取微元体(或微段)分析时，由于微元体上外荷载在变形虚位移上所作的功是高阶小量，因此总虚变形功等于应力(或内力)在虚应变(或虚变形)上所作的功。故可以把总虚变形功称作内力功，这也即采用 δW_i 的原因。

(7) 平衡的变形体上所受的外力可以是集中力、集中力偶、分布荷载(力和力偶)等，统称为**广义力**(generalized force)，通常记为 P[①]。从做功的角度与上述广义力相对应的位移，可以是线位移、角位移、相对线位移和相对角位移，等等，它们统称为**广义位移**(*generalized displacement*)，通常记为 Δ[②]。

3-2-2 杆系结构的虚功方程

在满足虚功原理所要求条件(力系平衡，位移协调)时，虚功方程式(3-1)对一切变形体问题都是适用的，为了应用它解决某具体问题，还必须写出该问题的具体表达式。

对于杆系结构，设所受的荷载有集中的广义力 $P_i(i=1,2,\cdots)$ 和广义分布荷载集度 $q_j(j=1,2,\cdots)$。与这些荷载对应的虚位移记为 $\delta\Delta_{Pi}$ 和 $\delta\Delta_{qj}$。则虚功方程中的 δW_e 为

$$\delta W_e = \sum_i P_i \delta\Delta_{Pi} + \sum_j \int q_j \delta\Delta_{qj} \mathrm{d}s$$

其中，第一项为广义集中力的总虚功，第二项为广义分布荷载的总虚功。对于其他变形体问题 δW_e 表达形式是不同的。

为了便于说明总虚变形功的计算，图 3-2 给出了任意直杆微段的两种状态。图 3-2a 为平衡状态中微段的受力情形示意，图 3-2b～e 为虚位移状态中微段的相对变形分解示意。由于在直杆小变形情形下，弯矩不在剪

① 在结构力学中广泛使用的广义力(包括力和力偶矩、力矩)，为了体现其广义性，考虑到全书叙述的统一和表达的简洁、完整，本书仍沿用 P。

② 与注①同理，本书广义位移(包括线位移、角位移)仍沿用 Δ。

切变形、扭转变形和轴向变形上做功、剪力不在弯曲变形、扭转变形和轴向变形上做功，等等，也即截面内力在相对虚变形位移上所作的功是互不耦联的。此外，微段上荷载在虚变形位移上所做的功和截面内力的虚变形功比是高阶小量。因此，总虚变形功为

$$\delta W_{\mathrm{i}}=\sum\int_{0}^{l}\left(F_{\mathrm{N}}\delta\varepsilon+F_{\mathrm{Q}}\delta\gamma+M\delta\kappa+M_{\mathrm{t}}\delta\varphi\right)\mathrm{d}s$$

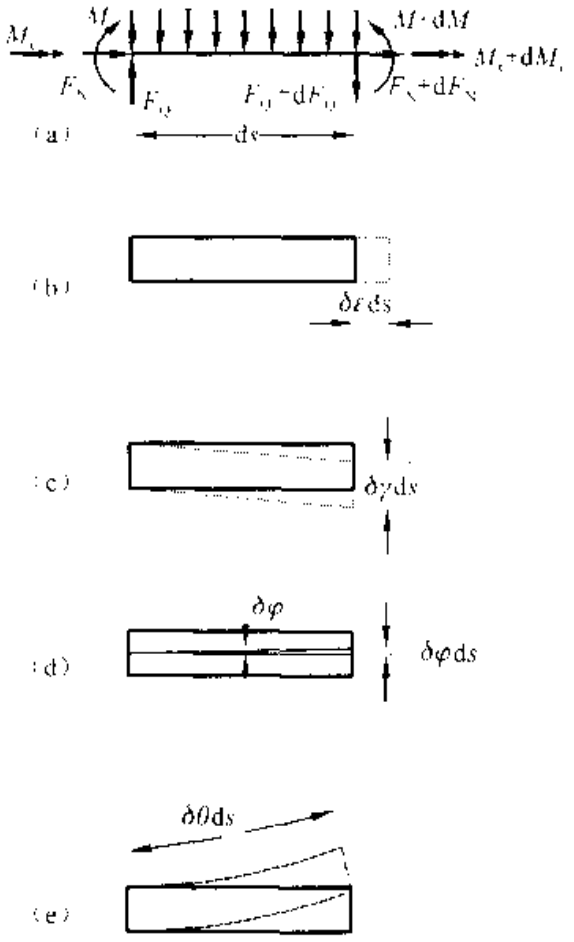


图 3-2　微段小变形示意

其中，F_{N}、F_{Q}、M、M_{t} 分别为平衡的力状态下杆件中的轴力、剪力、弯矩和扭矩，$\delta\varepsilon$、$\delta\gamma$、$\delta\kappa$、$\delta\varphi$ 分别为由于虚位移引起的微段虚轴向应变、虚剪切角、虚曲率、虚扭转角。$\sum$ 表示对结构的一切杆件求和。

将上述结果代入虚功方程式(3-1)，则可得到杆系结构的虚功方程具体表达式为

$$\delta W_{\mathrm{e}}=\sum P_i\delta\Delta_{i}+\sum\int q_i\delta\Delta_{qi}\,\mathrm{d}s$$

$$= \sum \int_0^l (F_N \delta\varepsilon + F_Q \delta\gamma + M\delta\kappa + M_t \delta\varphi) ds = \delta W_i \qquad (3-2)$$

与式(3-1)一样,式(3-2)也适用于一切杆系结构,它是本章下面所有讨论的理论基础。

§3-3 单位荷载法

虚功原理中有两种状态,与其对应可有两种应用。一种是已知平衡的力状态,应用虚功方程求位移;另一种是已知协调的位移状态,应用虚功方程求平衡的力。这里只讨论第一种应用。

3-3-1 结构位移

工程中的结构在外界因素作用下都将产生位移(变形),结构的位移包含截面线位移、角位移、两个截面相对线位移与相对角位移等,图 3-3 即为各种广义位移的示意图。

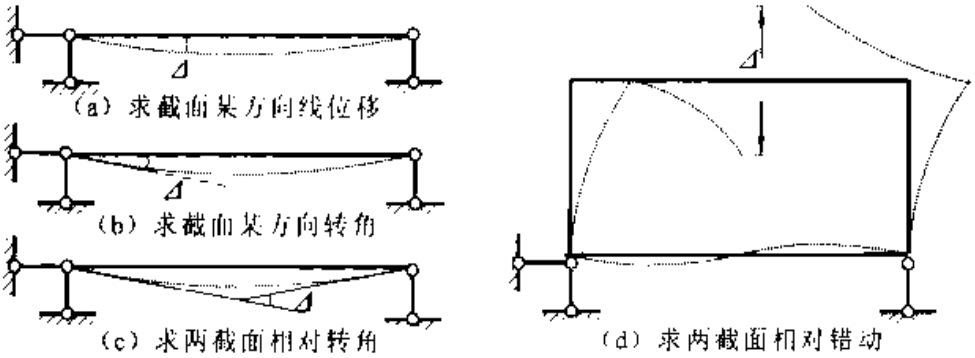


图 3-3 结构可能需求位移情形示意

利用广义位移和广义力的概念,功的表达式可改为

$$W = P\Delta \qquad (3-3)$$

3-3-2 单位荷载法

为了说明用虚功原理导出位移求解方法的基本思路,首先需要确定虚功原理中的两种状态。

因为现在的目的是求解外界因素作用下的结构位移,因此待求位移的结构状态应该视为虚功原理中的虚位移状态。这时,由于外界因素作用,待求位移结构的虚轴向变形、虚剪切角、虚曲率可分别记为 δ_ε、δ_γ 和 δ_κ。此外,

为了从虚功原理的虚功方程能够求得位移，还需建立一个与待求广义位移对应的、平衡的力状态。例如，为了求图 3－4a 中 k 截面的竖向位移 Δ_k，应以所示位移状态作为虚位移状态，以图 3－4b 所示与所求位移 Δ_k 对应，在 k 点受 F_{P1} 竖向集中力作用下的受力状态作为平衡的力状态。此时，由于 F_{P1} 作用引起结构中的弯矩、剪力和轴力分别记为 M_1，F_{Q1}，F_{N1}。

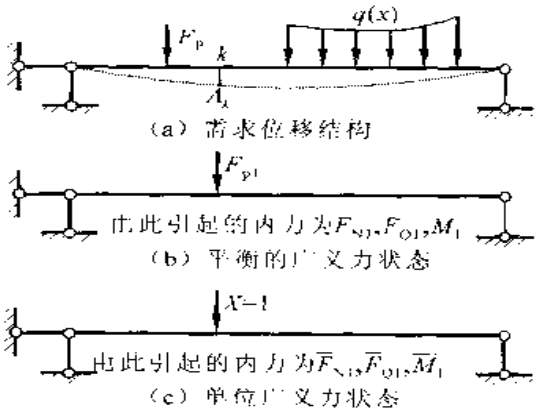


图 3－4　求位移思路示意图

有了上述两种状态，则根据虚功原理可得

$$F_{P1}\cdot\Delta_k=\sum\int_0^l(F_{N1}\delta\varepsilon+F_{Q1}\delta\gamma+M_1\delta\kappa)\mathrm{d}s \tag{a}$$

对上式两边同时除以 F_{P1}，则可得

$$1\cdot\Delta_k=\sum\int_0^l\left(\frac{F_{N1}}{F_{P1}}\delta\varepsilon+\frac{F_{Q1}}{F_{P1}}\delta\gamma+\frac{M_1}{F_{P1}}\delta\kappa\right)\mathrm{d}s \tag{b}$$

式中，量纲一[①] 的 $1\left(=\dfrac{F_{P1}}{F_{P1}}\right)$，习惯上称为**单位广义力**，记为 $X_1=1$[②]。若记

$$\bar{F}_{N1}=\frac{F_{N1}}{F_{P1}},\quad \bar{F}_{Q1}=\frac{F_{Q1}}{F_{P1}},\quad \bar{M}_1=\frac{M_1}{F_{P1}} \tag{c}$$

则根据上述对各符号意义的说明，$\bar{F}_{N1}$、$\bar{F}_{Q1}$、$\bar{M}_1$ 分别表示由于单位广义力引起的轴力、剪力和弯矩。因此，习惯上他们由图 3－4c 所示的单位广义力 $X_1=1$ 的作用得到。

将式 (c) 代入式 (b) 则可得

① 所有量纲指数为零的量，以往称为无量纲，但实际上其量纲为 $A^0=1$，这种量纲一的量表示为数。

② 由于多余未知力是未知的广义力(包括集中力和力矩)。为叙述的统一和完整，本书仍沿用 X。这里的单位力 $X_1=1$ 属单位物理量，是量纲指数为零的量。

$$\Delta_k = \sum_e \int_0^l (\bar{F}_{N1}\delta\varepsilon + \bar{F}_{Q1}\delta\gamma + \bar{M}_1\delta\kappa)ds \qquad (d)$$

当荷载作用下存在扭矩、扭转变形时，上式将修改成：

$$\Delta_k = \sum_e \int_0^l (\bar{F}_{N1}\delta\varepsilon + \bar{F}_{Q1}\delta\gamma + \bar{M}_1\delta\kappa + \bar{M}_{x1}\delta\varphi)ds \qquad (e)$$

式(d)或式(e)即为根据虚功原理推得的求 Δ_k 的位移计算公式。

显然，不失一般性，当要求任一指定广义位移 Δ 时，只要在结构上施加一与所求广义位移 Δ 对应的单位广义力 $X_1 = 1$，并类似地将单位广义力引起的内力分别记为 $\bar{F}_N$、$\bar{F}_Q$、$\bar{M}$ 和 $\bar{M}_x$，则即可得求广义位移 Δ 的计算公式为

$$\Delta = \sum_e \int_0^l (\bar{F}_N\delta\varepsilon + \bar{F}_Q\delta\gamma + \bar{M}\delta\kappa + \bar{M}_x\delta\varphi)ds \qquad (3-4)$$

为加深理解，再次强调式中各项的物理含义：

$\bar{F}_N$、$\bar{F}_Q$、$\bar{M}$、$\bar{M}_x$ 分别为单位广义力状态中的轴力、剪力、弯矩和扭矩，实质上它们是荷载引起的内力除以荷载的结果，习惯上统称为单位内力。

$\sum_e$ 表示对所有杆求和，积分上限 l 为杆长。

$\delta\varepsilon$、$\delta\gamma$、$\delta\kappa$、$\delta\varphi$ 分别为外界因素作用下待求位移结构的虚轴向变形、虚剪切角、虚曲率和虚扭转角。

这种通过建立平衡的单位广义力状态，利用虚功方程求位移的方法，称为**单位荷载法**(dummy load method)。式(3-4)适用于任何材料力学行为、任何外因的杆系结构，因此是杆系结构位移计算的一般性公式。

基于上述说明，需要强调指出的是，单位广义力 $X_1 = 1$ 只是一种习惯上的用法，除本章外，它将在后面力法和影响线等中广为应用。根据上述说明，读者应该理解，实质上单位广义力是广义力除以自身的结果，是个等于1的比例系数。它有广义力的方向、作用点，它的大小为1。但是，它没有量纲(称量纲一)和具体的单位。按国家标准《量和单位》中的规定，应该表示为 $|X| = 1$(见本书符号说明)，为便于读者参阅其他结构力学书籍和资料，本书仍采用习惯上的表示法，记为 $X_1 = 1$。

3-3-2 各种外因下的位移计算公式

在式(3-4)结构位移计算公式中，对静定结构而言，单位广义力状态的轴力、剪力、弯矩和扭矩可按第二章方法获得。因此，要用式(3-4)计算位移的关键是确定外界因素作用下的对应虚变形。下面**在线性弹性假设的基础上**，讨论各种不同外因作用下的位移计算公式。

1. 仅荷载引起的结构位移

设在荷载作用下，待求位移实际结构内力分别记作 F_{NP}、F_{QP}、M_P、M_{xP}，

则由第一节回顾的材料力学公式(a)即可得到实际变形状态所对应的"虚变形"表达式。将它们代入位移计算一般性公式(3-4)中,即可得如下荷载下的位移计算公式

$$\Delta=\sum\int_{0}^{l}\left(\frac{\bar{F}_{N}F_{NP}}{EA}+\frac{\bar{F}_{Q}F_{QP}k}{GA}+\frac{\bar{M}M_{P}}{EI}+\frac{\bar{M}_{x}M_{xP}}{GI_{P}}\right)\mathrm{d}s \tag{3-5}$$

上式适用于一切线性弹性杆系结构。

2. 仅支座移动引起的结构位移

需要指出的是,本节暂时只讨论静定结构。

由静定结构性质可知,支座位移不引起静定结构内力,当然也就没有变形,因此总虚变形功 $\delta W_{i}=0$。但是,这并不表明结构没有位移,这是因为待求位移结构存在支座已知位移 c_{i},因此单位广义力状态所引起的支座反力就要在这一位移上做功。

将单位广义力状态引起的和 c_{i} 对应的反力记为 $\bar{F}_{Ri}$,则虚功方程为

$$\delta W_{i}=1\cdot\Delta+\sum_{i}\bar{F}_{Ri}c_{i}-\delta W_{i}=0$$

于是,得到支座位移引起的位移计算公式为

$$\Delta=-\sum_{i}\bar{F}_{Ri}c_{i} \tag{3-6}$$

对于式(3-6)及用它求位移,需要指出以下几点:

(1) 因为支座位移不引起静定结构变形,因此实质上式(3-6)也可从刚体虚位移原理导出。

(2) 式(3-6)是外力总虚功等于零移项得到的,因此求和号前有负号。

(3) 求和号下每一项都是单位广义力引起的广义支座反力的功,因此广义支座反力 $\bar{F}_{Ri}$ 和广义支座位移 c_{i} 方向一致时做正功,也即乘积为正,反之做负功、积为负。

(4) 哪个支座有广义位移 c_{i},只需求与此广义位移 c_{i} 对应的单位广义力引起的广义反力 $\bar{F}_{Ri}$。

3. 仅温度改变引起的结构位移

本节也暂时只讨论静定结构。与支座位移一样,由静定结构性质"温度改变不引起静定结构内力",那么是否没有变形,因此 $\delta W_{i}=0$ 呢?实际上,结构经受温度改变时,虽然不产生内力,但由于热胀冷缩,结构是要产生变形的。因此,必须考虑微段的温度变形。为此,设材料线膨胀系数为 α。从结构中取出任意微段如图3-5示意,设微段轴向温度变化相同,温度沿截面高度线性变化,截面高度为 h,设截面对中性轴对称。

将杆段看成层状叠合物,由于温度改变每层都要伸缩,在图3-5a所示

两侧温度不同(不失一般性,假设 $t_2 > t_1$)的情形下,微段发生图 3-5b 所示相对变形。如果记杆轴线温度改变为 $t_0 = (t_1 + t_2)/2$,两侧温差绝对值为 $\Delta t = |t_2 - t_1|$,则不难想象,微段相对变形可分解成轴线变形 $\delta\varepsilon ds$ 和绕中性轴的截面转动变形 $\delta\kappa ds$,而温度改变不能产生截面错动和扭转变形。因此,由图 3-5 可得

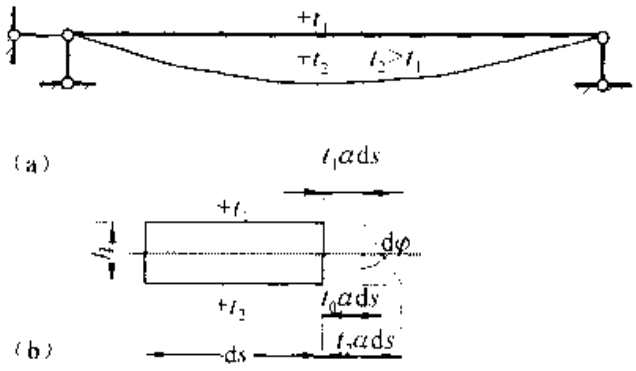


图 3-5 微段温度变形示意图

$$\delta\varepsilon = \alpha t_0, \quad \delta\kappa = \frac{\alpha\Delta t}{h}, \quad \delta\gamma = \delta\varphi = 0$$

将上述实际结构由温度所引起的"虚变形"代入虚功方程式(3-4),即可得温度引起的位移计算公式为

$$\Delta = \sum_r \int_0^l (\bar{F}_N \alpha t_0 \pm \bar{M}\frac{\alpha\Delta t}{h})\mathrm{d}s \tag{3-7}$$

如果材料、温度沿杆长不变而且杆件为等截面,则式(3-7)可改写作

$$\Delta = \sum_r (\pm A_{\bar{F}_N} t_0 \pm A_{\bar{M}}\frac{\Delta t}{h})\alpha \tag{3-8}$$

式中,$A_{\bar{F}_N}$ 和 $A_{\bar{M}}$ 分别为单位广义力引起的杆件轴力图面积和弯矩图面积。式中符号确定问题将在后面集中解释。

4. 其他外因引起的结构位移

不管外因是什么,只要深刻理解**位移计算公式是由虚功方程推得的,如果支座可位移,应在外力虚功中考虑,如果外因引起杆件变形,则应在虚变形功中考虑**,就可以自己导出其他外因引起的位移计算公式。建议读者考虑有弹性支座和有制造误差情况静定结构的位移计算公式。

实际结构所受外因往往不是单一的。另一方面,在下一章超静定结构计算中会知道,在解决支座位移、温度改变等引起的超静定结构位移计算时,是按静定结构内力、支座位移和温度改变共同引起的位移来计算的。因此,实际问题往往都将遇到多因素引起的位移计算问题,线弹性结构多外因

的位移计算可进行叠加，因此

$$\Delta=\sum_i\int_0^l\left(\frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA}+\frac{k\bar{F}_Q F_{QP}}{GA}+\frac{\bar{M}M_P}{EI}+\frac{\bar{M}_t M_{tP}}{GI_p}\right)\mathrm{d}s-\sum_i\bar{F}_{Ri}c_i+\sum_i\left(\pm A_{F_N}t_0\pm A_M\frac{\Delta t}{h}\right)\alpha \tag{3-9}$$

5. 各类结构的位移计算公式

不同的结构受力特点不同，公式的形式有所区别，例如：

桁架结构

$$\Delta=\sum_i\frac{\bar{F}_N F_{NP}l}{EA}-\sum_i\bar{F}_{Ri}c_i+\sum_i\pm A_{F_N}\alpha t_0 l \tag{3-10}$$

受弯结构

$$\Delta=\sum_i\int_0^l\frac{\bar{M}M_P}{EA}\mathrm{d}s-\sum_i\bar{F}_{Ri}c_i-\sum_i\left(\pm A_{F_N}t_0+A_M\frac{\Delta t}{h}\right)\alpha \tag{3-11}$$

小曲率拱结构

$$\Delta=\int_l\left[\frac{\bar{M}M_P}{EI}+\frac{\bar{N}N_P}{EA}+\alpha\left(t_0\bar{F}_N+\frac{\Delta t}{h}\bar{M}\right)\right]\mathrm{d}s-\sum_i\bar{F}_{Ri}c_i \tag{3-12}$$

组合结构

$$\Delta=\sum_{i1}\frac{\bar{F}_N F_{NP}l}{EA}+\sum_{i2}\int_0^l\frac{\bar{M}M_P}{EA}\mathrm{d}s-\sum_i\bar{F}_{Ri}c_i+\sum_{i1}\pm A_{F_N}\alpha t_0+\sum_{i2}\left(\pm A_{F_N}t_0\pm A_M\frac{\Delta t}{h}\right)\alpha \tag{3-13}$$

6. 几个需要注意的问题

在进行位移计算时应该注意以下问题：

● 是否线弹性结构。根据结构材料的力学特性，以便确定式(3-9)能否适用。

● 搞清公式中各项物理量的含义。例如带上划线"—"的量为由单位广义力引起，等等。

● 符号规定。因为位移计算公式中每一项都是功，因此广义力和广义位移方向相同做正功，即此项为正。否则做负功，此项为负。这是确定某一计算项符号的根本原则。但也要注意，有支座位移时公式中求和号前有"-"号。

● 公式对直杆结构是精确的，对微曲杆可近似利用公式计算。对大曲率杆，要考虑曲率影响。

§3-4 图 乘 法

对式(3-11)和式(3-13)中的 $\sum\int_0^l \frac{\bar{M}M_P}{EI}ds$ 项，在一定条件下可用本节介绍的所谓图乘法代替积分计算。

3-4-1 [illegible]

假设在定积分 $I=\int_A^B f(x)g(x)\,dx$ 的被积函数中 $f(x)$ 为曲线，$g(x)$ 为直线，如图 3-6 所示。若以图中 O 点为原点，$g(x)$ 可表示为

$$g(x)=x\tan\alpha$$

其中，$\tan\alpha$ 是 $g(x)$ 的斜率。由此积分成为

$$I=\tan\alpha\int_A^B xf(x)dx$$

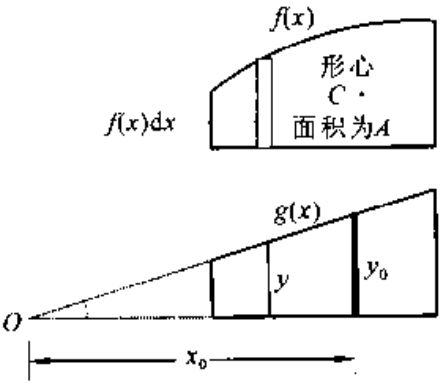


图 3-6 图乘法原理

若记 $f(x)dx$ 为 dA，它是 $f(x)$ 图曲线下的微面积，则积分 I 表示 $f(x)$ 图曲线下面积对通过 O 点竖向轴的静矩。如以 x_0 表示 $f(x)$ 图面积的形心位置坐标，A 为曲线下面积，则定积分变成

$$I=\int_A^B f(x)g(x)dx=\tan\alpha\cdot A\cdot x_0=A\cdot y_0$$

其中，A 为曲线图形的面积，$y_0=x_0\tan\alpha$ 为曲线图面积形心对应的直线图形的竖标，上式即为图乘法的依据。

● **图乘法计算位移的前提条件**

杆件为等截面直杆，也即 EI 是常数；被积函数中至少有一个是直线图。

● **图乘法计算位移的公式**

$$\int_A^B\frac{\bar{M}M_P}{EI}ds=\frac{1}{EI}\int_A^B\bar{M}M_P dx=\frac{1}{EI}Ay_0$$

受弯结构位移计算公式(3-11)可改为

$$\Delta=\sum\frac{Ay_0}{EI}-\sum\bar{F}_{Ri}c_i+\sum(\pm A_{\bar{F}_N}t_0\pm A_M\frac{\Delta t}{h})\cdot\alpha \qquad (3-14)$$

3-4-3 图乘法求位移时需注意的问题

- A 与 y_0 在杆轴线同侧时 Ay_0 为正，反之为负。
- 利用式(3-14)求位移时，y_0 必须取自直线图形。
- 如果整根杆件不符合图乘法条件，但经过分段后可以使其符合图乘条件，则仍可应用图乘法。
- 拱、曲杆结构和连续变截面的结构只能用公式积分，不能进行图乘。
- 应该熟练掌握**常用图形的面积及形心位置计算。**

图 3-7 给出了标准二次抛物线和三角形的面积公式和形心位置。图中所谓**顶点**，是指图形切线与基线平行或重合的点。

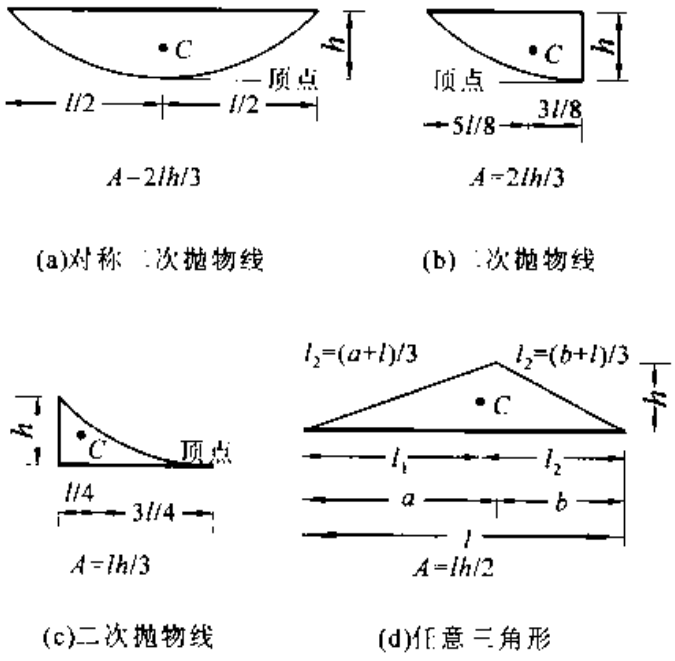


图 3-7　标准图形的面积公式和形心位置

§3-5　各种外因引起的位移计算

应用单位荷载法计算位移一般需按如下步骤进行：

(1) 根据所要求的广义位移，确定对应的单位广义力，建立单位广义力状态。图 3-8a、b、c、d 所示分别为求图 3-3 所示竖向线位移、截面转角、两截面相对转角和相邻两截面的相对竖向错动位移所建立的单位广义力状态。

(2) 当外因仅为支座位移时，求单位广义力引起的与已知支座位移对应的支座反力。否则，作结构在单位广义力下的内力图。作什么内力图因结构类型而定。

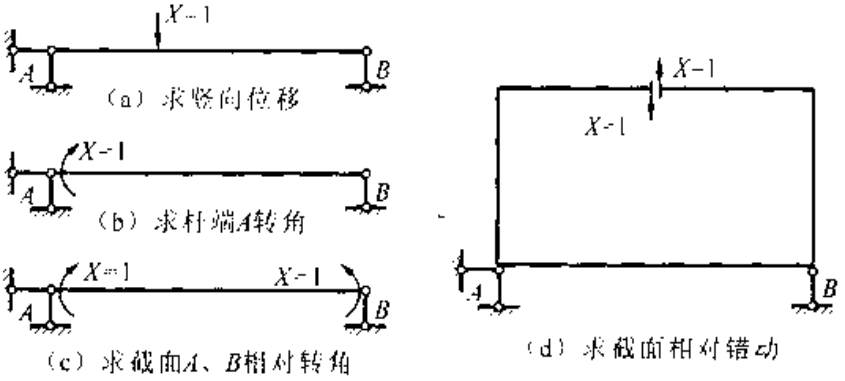


图 3－8　与图 3－3 对应的单位广义力

(3) 外因中有荷载时，作结构在荷载下的内力图。作什么内力图因结构类型而定。

(4) 根据结构类型选用式(3－9)～式(3－13)中相应公式，计算所要求的位移。

(5) 认真校核每一步，特别是数值计算时单位的统一。

原则上，根据上述步骤，利用各种结构的位移计算公式进行计算，就可求得位移。但实际计算中还有一些具体问题和简化算法，这些内容将结合下面所给出的一些例题加以介绍。

[例题 3－1]　图 3－9a 为一等截面悬臂曲梁，梁轴线为 $\frac{1}{4}$ 圆弧。E，G，A，I 已知。试求图示荷载作用下自由端竖向位移 Δ_{Ay}。

解：　前已说明，当曲杆的曲率不大时，可用直杆公式计算位移，其误差并不大。实际计算结果表明，当杆轴曲率半径大于截面高度 5 倍时，曲率对位移的影响只在 0.3% 左右。因此，本例按式(3－5)(取前三项)计算。

为求 A 点竖向位移，需在该点施加一个竖向单位力如图 3－9b 所示。利用图示隔离体平衡条件，可得内力方程。利用位移计算公式(3－5)，则有

$$\Delta_{Ay}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin\theta)\frac{(-F_P\sin\theta)}{EA}R\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\cos\theta\frac{F_P\cos\theta}{GA}R\mathrm{d}\theta+$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-F_PR\sin\theta)\frac{(-R\sin\theta)}{EI}R\mathrm{d}\theta$$

$$=\Delta_{FN}+\Delta_{FQ}+\Delta_M$$

$$=\frac{\pi}{4}\frac{F_PR}{EA}+k\frac{\pi}{4}\frac{F_PR}{GA}+\frac{\pi}{4}\frac{F_PR^3}{EI}(\downarrow)$$

其中，Δ_{FN}、Δ_{FQ}、Δ_M 分别表示轴力、剪力和弯矩引起的位移；计算结果为正，表示 A 点竖向位移的方向与所加单位力方向相同。

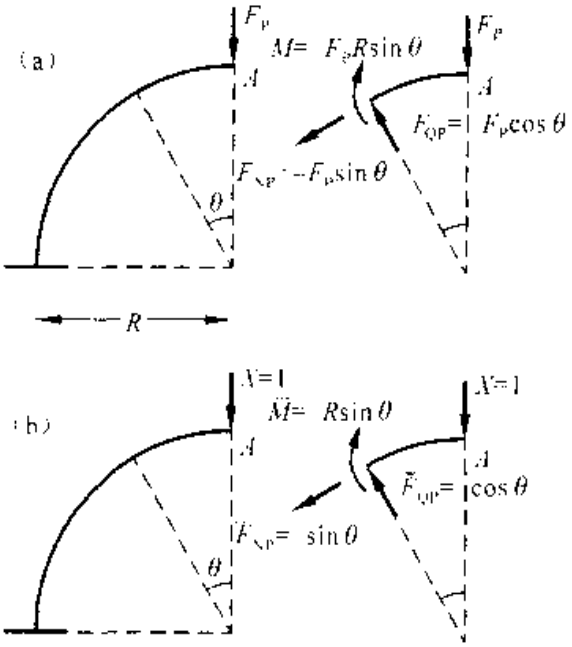


图 3－9　例题 3－1 图

若该梁是高度为 h 的矩形截面钢筋混凝土梁，则 $G\cong 0.4E$，$\frac{I}{A}=\frac{h^2}{12}$。又设 $\frac{h}{R}=\frac{1}{10}$，则 $\frac{\Delta_{FQ}}{\Delta_M}<\frac{1}{400}$，$\frac{\Delta_{FN}}{\Delta_M}<\frac{1}{1\,200}$。可见，受弯构件中剪切与轴向变形对位移的影响较小，可以略去不计。这就是式(3－11)中只有弯矩项的原因。

[例题 3－2]　图 3－10a 所示三铰拱，拱轴方程为 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$，EI、EA 均为常数。试求顶铰 C 的竖向位移。

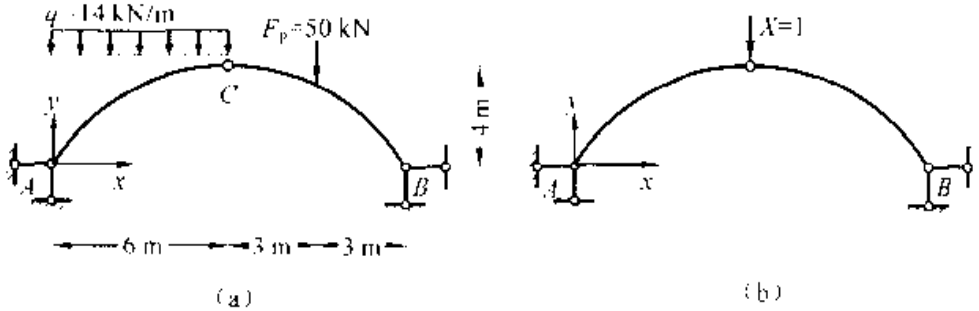


图 3－10　例题 3－2 图

解：当结构上荷载比较复杂或者结构由变截面杆件组成时，式(3－5)中

的积分运算比较困难。此时，可采用数值积分法，例如梯形法、辛卜生法等。为此，下面给出梯形法、辛卜生法的计算公式：

● **梯形法**

为了计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值，将区间 $[a,b]$ 等分为长度 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ 的 n 个小区间，设各分点的函数值为 $f_0=f(x_0)$，$f_1=f(x_1)$，$\cdots$，$f_n=f(x_n)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\Delta x\left(\frac{1}{2}f_0+f_1+f_2+\cdots f_{n-1}+\frac{1}{2}f_n\right) \tag{a}$$

● **辛卜生法**

辛卜生法的精确度高于梯形法，步骤与梯形法相同，但要求等分区间数为偶数，公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{\Delta x}{3}\left[f_0+4(f_1+f_3+\cdots+f_{n-1})+2(f_2+f_4+\cdots f_{n-2})+f_n\right] \tag{b}$$

作为简例，本题采用梯形法计算。单位荷载状态如图 3-8b，不计剪切变形影响，由式(3-5)有

$$\Delta_{Cv}=\int_s\left(\frac{\bar{M}M_P}{EI}+\frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA}\right)\mathrm{d}s=\int_0^{12}\left(\frac{\bar{M}M_P}{EI}+\frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA}\right)\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{c}$$

设将拱沿跨度分为 8 等分，得 9 个分点，每分长度 $\Delta x=1.5$ m。按第 2 章所述方法求出图 3-10a、b 两种状态各分点的弯矩、轴力和 $\sqrt{1+y'^2}$ 的值，代入式(c)应用梯形法公式，则有

$$\Delta_{Cv}=\Delta x\left(\frac{1}{2}f_0+f_1+f_2+\cdots f_7+\frac{1}{2}f_8\right)=-\frac{70.35}{EI}+\frac{503.98}{EA}$$

其中，f_i 为 $\left(\frac{\bar{M}M_P}{EI}+\frac{F_N F_{NP}}{EA}\right)\sqrt{1+y'^2}$ 在 x_i 点处的被积函数值。不难看出，人工手算是很繁琐的，应该利用计算机进行这种重复性的繁琐计算工作。

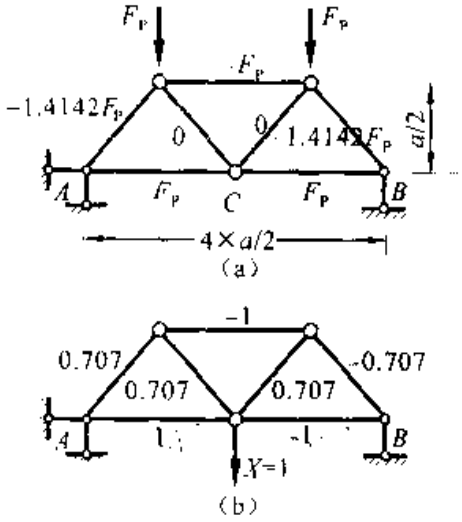


图 3-11 例题 3-3 图

[**例题 3-3**] 图 3-11a 所示桁架，各杆 EA 相等。试求结点 C 竖向位移。

解：为用式(3-10)计算位移，用结点法或截面法解出荷载和单位荷载作用下的各杆轴力，并标注在图 3-11 杆边。将其代入式(3-10)，可得

$$\Delta_{Cy}=\sum\frac{F_N F_{NP} l}{EA}$$

$$=\frac{1}{EA}\left[2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\sqrt{2}F_P\right)\frac{\sqrt{2}}{2}a+2\times\frac{1}{2}\cdot F_P\cdot a+\left(-F_P\right)(-l)a\right]$$

$$=(2+\sqrt{2})\frac{F_P a}{EA}\quad(\downarrow)$$

[例题 3-4]　试求图 3-12a 所示等截面简支梁 B 端截面转角

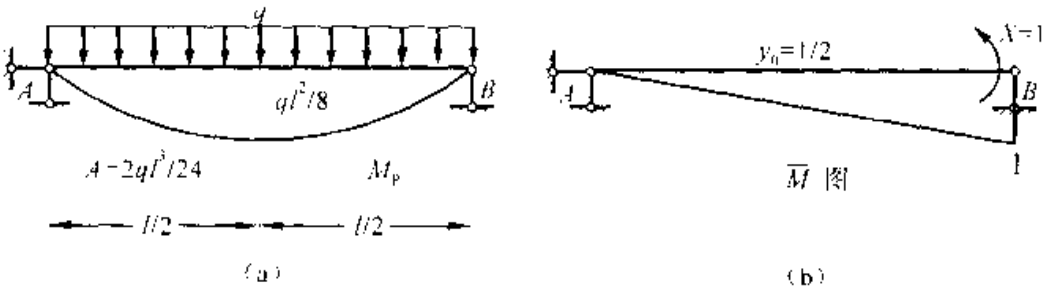


图 3-12　例题 3-4 图

解：为了求 B 截面转角，在 B 截面加一单位集中力偶，如图 3-12b。分别作出结构在荷载和单位力偶作用下的弯矩图。

由于单位广义力的弯矩图是直线，梁又是等截面的，因此可用图乘法代替积分。对本例由荷载弯矩图（曲线）计算出 A，由单位弯矩图计算出 y_0，代入图乘公式可得

$$\theta_B=\frac{A\cdot y_0}{EI}=\frac{1}{24}\frac{ql^3}{EI}\quad(\text{逆时针})$$

[例题 3-5]　试求图 3-13a 所示刚架 C 点水平位移。

解：为应用图乘法，首先作出 M_P 和 $\overline{M}$ 分别如图 3-13b、c 所示。由于图 3-13b 中横梁弯矩图面积及形心位置均难以确定，为方便计算可将其分解成矩形和三角形，如图 3-13d 所示。因此，原 $A\cdot y_0=A_1\cdot y_{10}+A_2\cdot y_{20}$。于是，根据 $\overline{M}$ 和 M_P 图，由图乘法可得

$$\Delta_{Cx}=-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\times\frac{F_P l}{8}\cdot l\times\frac{2}{3}l-\frac{1}{4EI}\left(\frac{F_P l}{8}\cdot l\times\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{3F_P l}{16}\cdot l\times\frac{7l}{12}\right)$$

$$=-\frac{67}{1536}\frac{F_P l^3}{EI}\quad(\leftarrow)$$

[例题 3-6]　试求图 3-14a 所示三铰刚架铰 E 两侧截面的相对转角 φ。

解：为求铰 E 两侧截面相对转角，在铰 E 两侧施加一对方向相反的单位集中力偶。并作出 M_P 和 $\overline{M}$ 图如图 3-14b、c 所示。由于 $\overline{M}$ 图全是直线，因此可由式(3-14)进行计算。

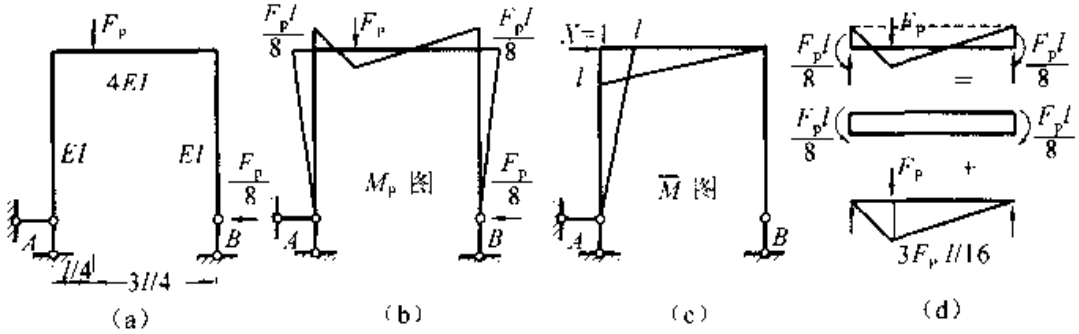


图 3－13　例题 3－5 图

图乘运算时，由于 AC 杆 M_P 图不是标准图形，因此需将其分解为一个三角形和一个对称抛物线，如图 3－14d 所示。由图乘法即可求得

$$\varphi = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \cdot l \times \frac{ql^2}{4} \times \frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{2EI} \cdot l \times 1 \times 0 + \frac{1}{EI} \times \left(\frac{1}{2} \cdot l \times \frac{ql^2}{4} \times \frac{2}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \cdot l \times \frac{ql^2}{8} \times \frac{1}{2} \times 1 \right)$$

$$= -\frac{1}{24} \times \frac{ql^3}{EI} \quad \text{（位移与单位广义力反向）}$$

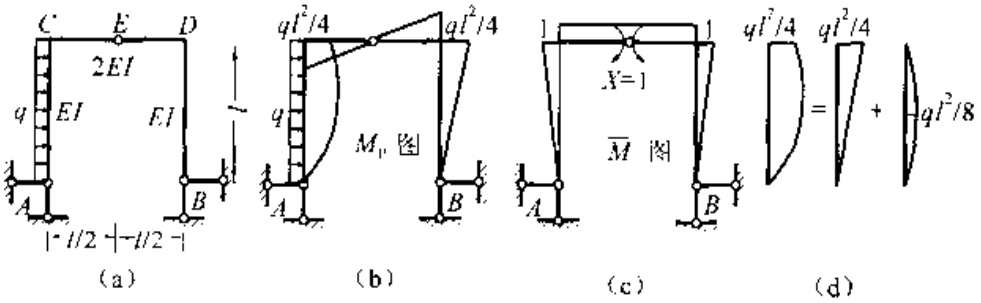


图 3－14　例题 3－6 图

［**例题 3－7**］　图 3－15a 所示两跨简支梁，在图示支座移动状态下，试求铰 B 两侧截面的相对转角 φ。已知 $a = 0.04$ m，　$b = 0.1$ m　$c = 0.08$ m，　$l = 16$ m。

解：根据所要求的位移建立单位广义力状态如图 3－15b 所示，进而确定单位广义力作用下，有支座移动的支反力（图 3－15b）。将其连同支座位移一并代入式(3－6)，可得

$$\varphi = -\sum F_{Ri} \cdot c_i = -\left[\left(-\frac{1}{l} \right) \cdot a + \frac{2}{l} \cdot b + \left(-\frac{1}{l} \right) \cdot c \right]$$

$$= -0.005 \text{ rad} \quad \text{（与单位广义力反方向）}$$

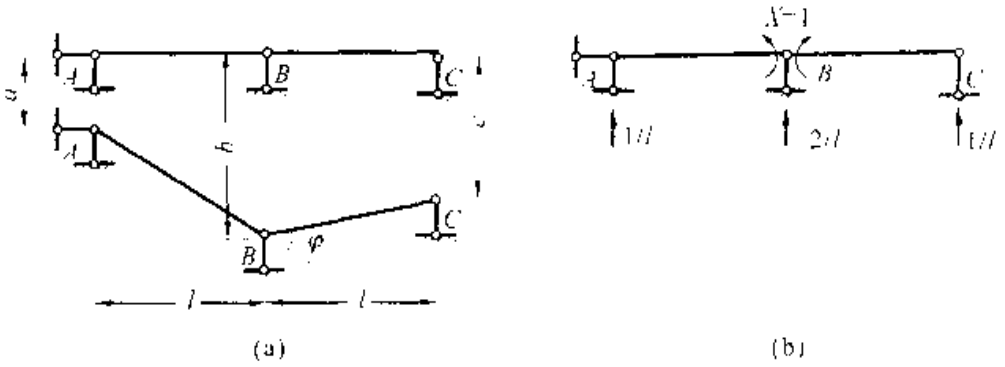


图 3－15　例题 3－7 图

[例题 3－8]　图 3－16a 所示刚架，外侧温度不变，内侧温度上升 20℃。已知 l = 4 m，线胀系数 $\alpha = 10^{-5}$℃$^{-1}$，各杆均为高度 $h = 0.4$ m 的矩形截面。试求 A 点竖向位移。

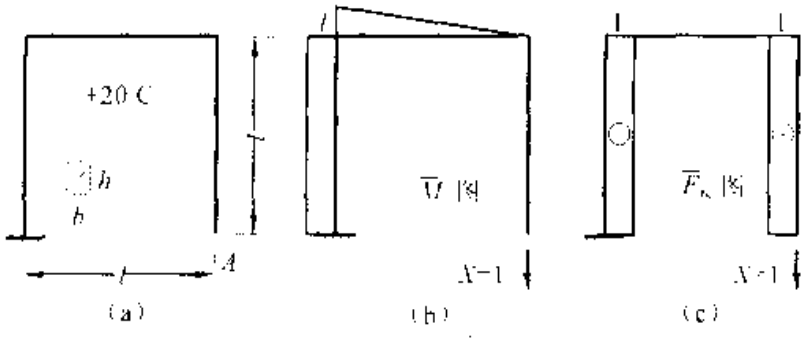


图 3－16　例题 3－8 图

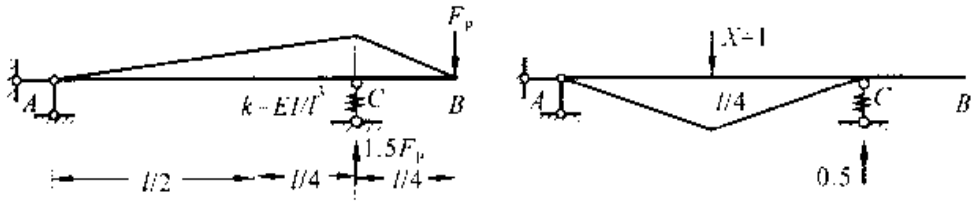
解： 在 A 点按所求位移加单位力，作出结构的单位弯矩图和轴力图，分别如图 3－16b、c 所示。求出各杆轴线处温度改变量 t_0 和杆横截面两侧温差的绝对值 Δt 为

$$t_0 = \frac{0\ ^\circ\mathrm{C} + 20\ ^\circ\mathrm{C}}{2} = 10\ ^\circ\mathrm{C},\quad \Delta t = 20\ ^\circ\mathrm{C} - 0\ ^\circ\mathrm{C} = 20\ ^\circ\mathrm{C}$$

代入温度改变引起的位移计算式(3－7)即可，式中各项的符号由对比温度改变引起的变形与单位力引起的变形确定，当二者一致时取正号，反之取负号。由此得

$$\begin{aligned}\Delta_{AV} &= \sum\left(\pm A_{F_N} t_0 \pm A_M \frac{\Delta t}{h}\right)\alpha \\ &= \left[1\cdot l\cdot 10\ ^\circ\mathrm{C} + (-1)\cdot l\cdot 10\ ^\circ\mathrm{C} - \left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l + l\cdot l\right)\cdot\frac{20\ ^\circ\mathrm{C}}{h}\right]\alpha \\ &= -1.2\times 10^{-3}\ \mathrm{m}\quad (\uparrow)\end{aligned}$$

[**例题 3-9**] 试求图 3-17a 所示具有弹性支座梁 C 截面处的竖向位移。弹性支座的弹簧刚度系数 $k=EI/l^3$。



(a) 结构、荷载与M_P图　　(b) 单位弯矩$\overline{M}$图与反力

图 3-17 例题 3-9 图

解：本例特点是有弹性支座。这种情况下的位移计算有两条途径可供选择。其一是将弹簧看成结构中的一个可变形的构件（本例为一拉压杆）。若单位广义力和荷载作用下此弹簧构件内力记为 $\overline{F}_R$ 和 F_{RP}，则与 $\overline{F}_R$ 对应的虚变形位移为 $\frac{F_{RP}}{k}$，因此由虚功方程可得

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s+\overline{F}_R\cdot\frac{F_{RP}}{k}$$

另一途径是将荷载作用下弹性支座的变形视作主体结构的支座位移。若将荷载作用下支座反力记为 F_{RP}，则支座位移为 $\frac{F_{RP}}{k}$。现在是荷载和支座位移共同作用的情形，由位移计算一般公式可得

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s-\sum F_{Ri}\cdot c_i=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s+\frac{F_R F_{RP}}{k}$$

可见，两种途径所得结果相同。上述分析过程表明，$\overline{F}_R$ 与 F_{RP} 同向时，式中第二项结果为正。将图示所求得的 $\overline{M}$，M_P，F_R，F_{RP} 代入上述公式则有

$$\Delta_{Cy}=-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{l}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{F_P l}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\frac{3}{2}F_P}{k}=\frac{23}{32}\frac{F_P l^3}{EI}\quad(\downarrow)$$

[**例题 3-10**] 图 3-18a 所示桁架，若上弦各杆均做长了 8 mm，试求由此而引起的 C 点竖向位移。

解：将杆件加长看成是杆件变形，则根据 $\Delta=\sum\int F_N\delta\varepsilon\mathrm{d}s=\sum\overline{F}_N\Delta l$，因此只要求出单位广义力作用下有制造误差杆件的对应内力 $\overline{F}_N$（图 3-18b），即可求得所求位移为

$$\Delta_{Ay}=(-\frac{4}{5})\times0.008\ \mathrm{m}\times4=-0.025\,6\ \mathrm{m}\quad(\uparrow)$$

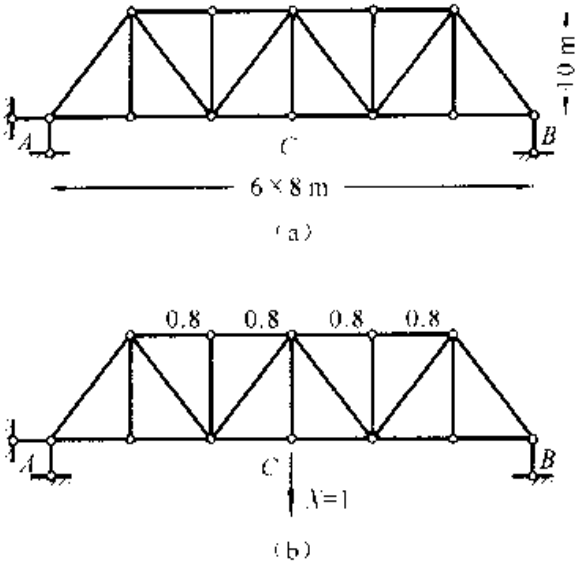
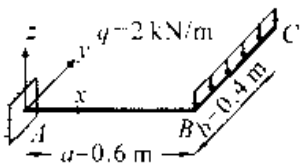
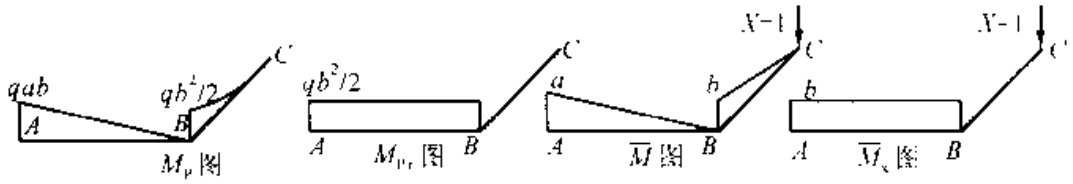


图 3-18　例题 3-10 图

*[**例题 3-11**]　图 3-19a 为一个水平放置的刚架，承受竖向荷载，各杆均为直径 $d=30$ mm 的圆钢，$E=210$ GPa，$G=80$ GPa。试求 C 点竖向位移。



(a) 结构及荷载



(b) 内力图

图 3-19　例题 3-11 图

解：这是一个由细长杆构成的空间刚架结构，可以不计剪切（和轴向）变形的影响，逐杆分析不难作出荷载和单位广义力状态的弯矩图、扭矩图，见图 3-19b。由图乘法原理可知，只要满足图乘条件扭矩也可用图乘计算，因此将 $\bar{M}$ 与 M_P 和 $\bar{M}_x$ 与 M_{xP} 进行图乘，即可得

$$\Delta_{Cy}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot b\times\frac{1}{2}qb^2\times\frac{3}{4}b+\frac{1}{2}\cdot a\cdot qab\times\frac{2a}{3}\right]+\frac{1}{GI_p}\times\frac{1}{2}qb^2\cdot a\cdot b$$

$$=13.688\ \text{mm}\quad(\downarrow)$$

*[**例题 3-12**] 图 3-20a 所示截面为矩形的等截面梁，材料的应力、应变关系为 $|\sigma|=B\sqrt{|\varepsilon|}$，$B$ 为常数。试求梁自由端 A 处由荷载 F_p 引起的竖向位移。

解：由于材料是非线性的，因此不能用位移计算公式(3-5)求位移，应该用单位荷载法的一般公式(3-4)：

$$\Delta=\int_0^l(\bar{F}_N\delta\varepsilon+\bar{F}_Q\delta\gamma+\bar{M}\delta\kappa+\bar{M}_x\delta\varphi)\mathrm{d}s$$

不计剪切且无轴向变形和扭转变形，则上式为

$$\Delta=\int_0^l\bar{M}\delta\kappa\mathrm{d}s \tag{a}$$

为此需确定荷载作用下引起的弯矩 M_p 与曲率 κ 之间的关系。

(1) 距中性层 y 处的应变与曲率的关系为

$$\varepsilon=\kappa y \tag{b}$$

(2) 应力与应变关系为

$$|\sigma|=B\sqrt{|\varepsilon|} \tag{c}$$

将式(b)代入式(c)得

$$|\sigma|=B\sqrt{|\kappa y|} \tag{d}$$

(3) 弯矩与应力关系为

$$|M|=2\int_0^{h/2}|\sigma|by\,\mathrm{d}y \tag{e}$$

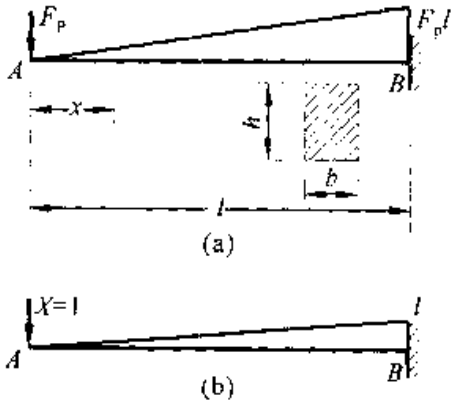


图 3-20 例题 3-12 图

(4) 将式(d)代入式(e)，得弯矩与曲率关系为

$$|M|=2\int_0^{h/2}Bb\sqrt{|\kappa y|}\,y\mathrm{d}y=\frac{BbH^{5/2}}{5\sqrt{2}}\sqrt{|\kappa|}$$

$$|\kappa|=\frac{50}{B^2b^2h^5}M^2$$

为求 A 点竖向位移，在 A 点加竖向单位力。在单位力作用下的截面弯矩为

$$\bar{M}=-1\cdot x$$

荷载作用下各截面的曲率 κ_p 为

$$\kappa_p=-\frac{50}{B^2b^2h^5}F_p^2x^2$$

由式(a)得

$$\Delta_{Ay}=\int_0^l \bar{M}\kappa_P \mathrm{d}x=\frac{25}{2}\frac{F_P{}^2 l^4}{B^2 b^2 h^5}\quad(\downarrow)$$

§3-6　互等定理

本节讨论中假定:材料线性弹性;变形是微小的。

3-6-1　功的互等定理

研究图3-21所示结构(可以是任意结构)的两状态,分别将其称为1、2状态,荷载作用所产生的内力分别记作 F_{N1}、F_{Q1}、M_1 和 F_{N2}、F_{Q2}、M_2。

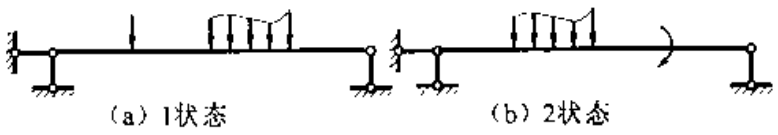


图3-21　结构两种受力状态

首先令1状态为平衡的力状态,2状态所产生的位移作为协调的虚位移状态。这时由虚功方程式(3-2)[或式(3-5)]可得

$$\delta W_{12}=\sum\int_0^l\left(\frac{F_{N1}F_{N2}}{EA}+\frac{F_{Q1}kF_{Q2}}{GA}+\frac{M_1M_2}{EI}\right)\mathrm{d}s \tag{a}$$

式中,δW_{12}的下标表示1状态外力在2状态虚位移上所作的总虚功。

然后反过来,令2状态为平衡的力状态,1状态所产生的位移作为协调的虚位移状态。由虚功方程式(3-2)[或式(3-5)]可得

$$\delta W_{21}=\sum\int_0^l\left(\frac{F_{N2}F_{N1}}{EA}+\frac{F_{Q2}kF_{Q1}}{GA}+\frac{M_2M_1}{EI}\right)\mathrm{d}s \tag{b}$$

式中,δW_{21}的下标表示2状态外力在1状态虚位移上所作的总虚功。

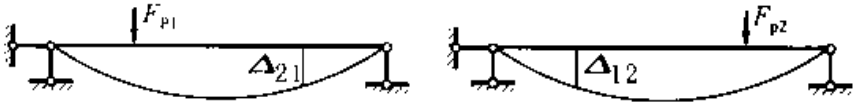
对比式(a)和式(b)立即可得

$$\delta W_{12}=\delta W_{21} \tag{3-15}$$

上式用文字来叙述则为:**处于平衡的1、2两状态,1状态外力在2状态外力所产生的位移上所作的总虚功,恒等于2状态外力在1状态外力所产生的位移上所作的总虚功**。这就是**功的互等定理**(reciprocal theorem of work),它是线弹性体系普遍定理,是最基本的。下面的定理可以由它导出,也可直接从虚功原理得到。

3-6-2 位移互等定理

设1、2、两状态都只有一个广义力，分别记作 F_{P1} 和 F_{P2}。由广义力 F_{P1} 引起和广义力 F_{P2} 对应的广义位移记作 Δ_{21}。同理，由广义力 F_{P2} 引起和广义力 F_{P1} 对应的广义位移记作 Δ_{12}。如图 3-22 所示。



(a) 1状态　　(b) 2状态

图 3-22　两种受力、位移状态

利用功的互等定理可得

$$\delta W_{12} = F_{P1}\Delta_{12} \equiv F_{P2}\Delta_{21} = \delta W_{21}$$

等式两边同除广义力乘积 $F_{P1} \cdot F_{P2}$ 后变为

$$\frac{\Delta_{12}}{F_{P2}} \equiv \frac{\Delta_{21}}{F_{P1}}$$

从上式不难证明，**不管广义力和对应的广义位移是什么，上式比值的量纲或单位是相同的**。例如，设 F_{P1} 是集中力偶，国家标准《量和单位》中规定的量纲（以下简称量纲）是 ML^2T^{-2}，单位是 kN·m。F_{P2} 是集中力，量纲是 MLT^{-2}，单位是 kN。对应的广义位移 Δ_{12} 是转角，量纲一，单位是 rad。但是，必须特别指出的是，rad 是一个特殊的单位，实际上弧度是弧长与半径的比值，在弧长和半径单位一致时，其单位是 1。Δ_{21} 是线位移，量纲是 L，单位是 m。因此，比值的量纲为

$$\dim \frac{\Delta_{12}}{F_{P2}} = M^{-1}L^{-1}T^2$$

$$\dim \frac{\Delta_{21}}{F_{P1}} = L \cdot M^{-1}L^{-2}T^2 = M^{-1}L^{-1}T^2$$

这说明“量纲、单位相同”结论是正确的。下述定理同样可证明具有此结论，但不再赘述。

若记比值 $\frac{\Delta_{12}}{F_{P2}} = \delta_{12}$、$\frac{\Delta_{21}}{F_{P1}} = \delta_{21}$，并称为**位移系数**(displacement coefficient)或**柔度系数**(flexibility coefficient)，它表示单位广义力引起的位移。则可得如下结论：

$$\delta_{ij} \equiv \delta_{ji} \tag{3-16}$$

这就是**位移互等定理**(reciprocal theorem of displacement)。请读者用文字来

叙述。

3-4-3　反力互等定理

设超静定结构的 1、2 两状态都仅是支座发生一个广义位移，分别记为 Δ_1 和 Δ_2。由广义位移 Δ_1 引起和广义位移 Δ_2 对应处的支座广义反力记为 F_{R21}。同理，由广义位移 Δ_2 引起和广义位移 Δ_1 对应处的支座广义反力记为 F_{R12}。如图 3－23 所示。



（a）1状态　　（b）2状态

图 3－23　两种位移、反力状态

利用功的互等定理可得

$$\delta W_{12} = F_{R21}\Delta_2 \equiv F_{R12}\Delta_1 = \delta W_{21}$$

等式两边同除广义位移的乘积 $\Delta_1 \cdot \Delta_2$，并称比值为**反力系数**(reaction force coefficient)，或**刚度系数**(stiffness coefficient)，它表示单位广义位移引起的广义力。则有

$$k_{21} = \frac{F_{R21}}{\Delta_1} = \frac{F_{R12}}{\Delta_2} = k_{12} \tag{3-17a}$$

对于更一般情况，则有

$$k_{ij} = k_{ji} \tag{3-17b}$$

这就是**反力互等定理**(reciprocal theorem of reaction force)。请读者用文字来叙述。

3-4-4　广义反力互等定理

设超静定结构 1 状态仅受一个广义力作用、2 状态只发生一个支座广义位移，分别记为 F_{P1} 和 Δ_2。由广义力 F_{P1} 引起和广义位移 Δ_2 对应处的支座广义反力记为 F_{R21}。由广义支座位移 Δ_2 引起和广义力 F_{P1} 对应处的广义位移记为 Δ_{12}。如图 3－24 所示。

虽然 2 状态支座位移将产生支座反力，但 1 状态没有支座位移，因此利用功的互等定理可得

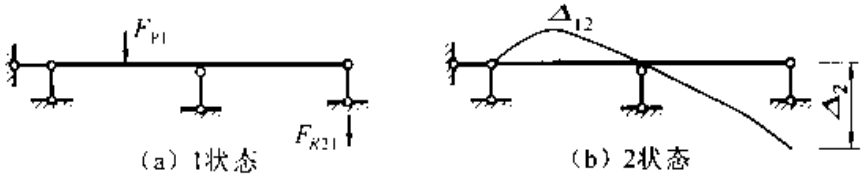
$$\delta W_{12} = F_{P1}\Delta_{12} + F_{R21}\Delta_2$$

$$\delta W_{21} = 0$$

$$\delta W_{12} = \delta W_{21}$$

则

$$F_{P1}\Delta_{12} + F_{R21}\Delta_2 = 0$$



(a) 1状态　　(b) 2状态

图 3-24 位移、反力互等

上式移项后，等式两边同除广义力和广义位移的乘积 $F_{P1}\cdot\Delta_2$，则有

$$\delta_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_2} \equiv -\frac{F_{R21}}{F_{P1}} = -k_{21} \tag{3-18}$$

对于更一般情况，则有

$$\delta_{ij} \equiv -k_{ji} \tag{3-19}$$

这就是**位移与反力互等定理**(reciprocal theorem of displacement and reaction force)。请读者用文字叙述。

§3-7 结论与讨论

3-7-1 本章结论

● 变形体虚功原理所揭示的是，体系上平衡的外力在体系的协调位移上的一个虚功恒等关系。这里的前提条件是力系平衡、位移协调，结论是虚功方程恒成立。它适用于一切变形体。

● 本章所导出的单位荷载法，只是虚功原理的一种应用。必须指出的是，习惯上的单位广义力 $F_P = 1$(或 $X = 1$)是比例系数，因此它是量纲一[①]的数。

● 对于荷载作用下由直杆组成的结构位移计算，由于单位广义力引起的单位内力图一般是直线，如果杆件截面几何性质相同或分段相同，则位移计算中的积分可以用图乘代替。用图乘法计算时应注意以下几点：杆段是否等截面直杆、二内力图是否至少有一个是直线，也即图乘适用条件是否满足；不要遗漏刚度 EA、EI、GA、GI_p 等；非标准图形要合理地转换成标准

① 见本书§3-3中有关量纲一注释，所以这里量纲一的量也表示为数。

图形的组合后再计算；要注意每项的符号，也即面积与坐标同侧为正。

● 由支座位移引起的结构位移计算最为简单，只要求出单位广义力下有位移支座的反力，代公式简单运算即可。注意公式前有负号。

● 对温度引起的结构位移计算问题，要注意轴线温度改变引起的位移必须考虑。因此，单位内力图有轴力和弯矩图。每项符号按温度和单位广义力所引起的变形是否一致来确定，一致时为正。反之为负。

● 引起结构位移的因素很多，单位荷载法来源于虚功原理，公式中所有项的实质都是功。因此，根据所求位移确定单位广义力状态后，关键是求外因引起的变形位移。掌握了这最核心的思想，则不管是什么性质材料的结构、不管外因是什么，都能解决需求位移计算问题。

● 对于由曲杆组成的结构或变截面且受复杂荷载的结构等，可用数值积分来求位移近似值。

● 线弹性结构在多种外因共同作用下的位移计算，可用统一公式进行计算，也可按各因素分别计算后叠加得到。

● 任何线性弹性结构都有四个互等定理，其中功的互等定理是最基本的定理。它们将在后面超静定结构解法等中得到应用。

● 位移、反力、位移和反力互等定理所指出的都是影响系数互等，它们的量纲和单位都是相同的。说这些互等定理仅仅“数值”相等是不够准确的，希望引起读者注意。

3-7-2 几点讨论

● 将变形体虚功原理和**达朗伯尔原理**(d'Alembert prisciple)相结合，利用瞬时平衡的概念，它可作为结构动力分析篇的基本原理。

● 虚功原理要求力系平衡、位移协调，结论是使虚功方程恒成立。如果改变前提条件，结论也将改变。**在力系给定时，如果位移是虚设的、协调的、任意的，则可以证明虚功方程恒成立是给定力系平衡的充分必要条件，这一命题称为虚位移原理。**与虚位移原理相对应，**如果位移给定，力系是虚设的、平衡的、任意的，则可以证明虚功方程恒成立是给定位移协调的充分必要条件，它称为虚力原理。**这两个原理可以看作是命题条件变化后虚功原理的应用(或称为推论)。这三个原理的必要性命题显然是完全相同的。但是，它们的论述和具体应用所解决的问题是不同的。

● 位移计算公式(3-5)是在直杆结构情况下推导的，这时杆件截面形心轴与中性轴重合，弯矩 M_P 只引起截面转角，轴力 F_N 只引起轴向位移，它们引起的位移见§3-1中的式(a)。对曲杆结构中的弯曲杆情况，截面形心轴与中性轴不重合，M_P 不只引起截面转角，也将引起形心轴的线位移；

F_{NP}不只引起轴向位移也将引起截面转角。因此，位移计算公式（3－5）不再成立。对于矩形截面曲杆，由图3－25可知由F_{NP}引起的微段两侧截面轴向相对线位移为$d\varepsilon^N=\dfrac{F_{NP}}{EA}ds$，引起的两端截面相对转角为$d\theta^N=\dfrac{d\varepsilon^N}{R}=\dfrac{F_{NP}}{EAR}ds$。弯矩$M_P$引起的截面轴向位移为（推导略）$d\varepsilon^M=\dfrac{M_P}{EAR}ds$，引起的截面相对转角为$d\theta^N=\dfrac{M_P}{ESR}ds$。式中，$R$为变形前曲率半径，$S$为截面对中性轴的静矩。由此，矩形截面曲杆结构位移计算公式为

$$\Delta=\sum\int\frac{\bar{M}M_P}{ERS}ds+\sum\int\frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA}ds+\sum\int\frac{\kappa\bar{F}_Q F_{QP}}{GA}ds+\sum\int\frac{\bar{M}F_{NP}}{EAR}ds+\sum\int\frac{\bar{F}_N M_P}{EAR}ds \tag{3-20}$$

实际应用时，对于截面高度与曲率半径的比值较小的曲杆，可证明按直杆公式计算误差不大。

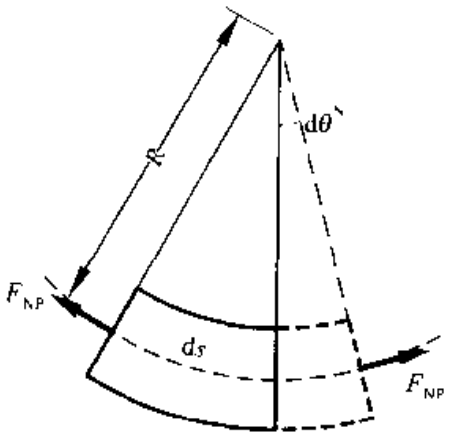


图3－25　曲杆微段的变形位移

● 在推导温度改变引起的位移计算时，假设杆件截面对中性轴对称。而实际工程结构中杆件截面不一定都为对称的。当杆件截面对中性轴不对称时，请读者考虑对位移计算有什么影响？

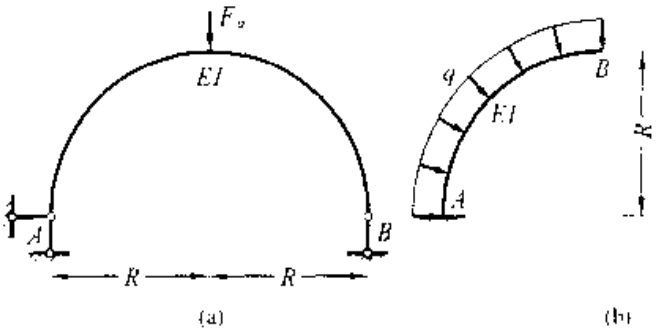
● 必须注意：对非线弹性结构，与式（3－5）不同的是虚变形的计算［§3－1式(a)］不再适用，这时必须考虑材料的具体力学行为，代入对应材料特性的变形计算公式，就可以建立这种材料的荷载位移计算公式。

习　题

3－1　试求图示圆弧形曲梁B点水平位移（用直杆公式）。EI为常数。

3－2　图示柱的A端抗弯刚度为EI，B端为$EI/2$，沿柱长刚度线性变化。试求B端水平位移。

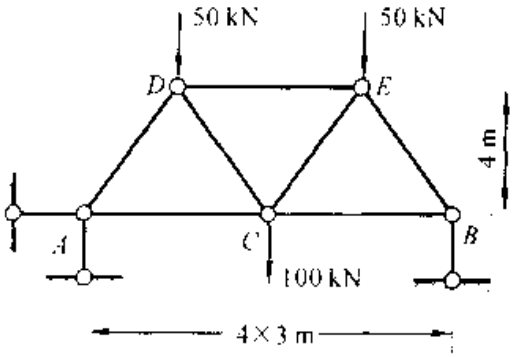
3－3　试求图示桁架C点竖向位移和CD杆与CE杆的夹角改变量。已知各杆截面相同$A=1.5\times10^{-2}\ m^2$，$E=210\ GPa$。



习题 3　1 图



习题 3　2 图



习题 3　3 图

3－4　试用图乘法求图示结构指定位移。除图 f 标明杆件刚度外，其他各杆 EI 均为常数。

3－5　图示结构各杆件均为截面高度相同的矩形截面，内侧温度上升 t，外侧不变。试求 C 点竖向位移。线膨胀系数为 α。

3－6　试求图示刚架在温度作用下产生的 D 点水平位移。已知 $EI_2 = 2EI_1 = 2\times10^5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$，横梁为高度 $h = 0.8$ m 的矩形截面梁，线胀系数为 $\alpha = 10^{-5}\,℃^{-1}$。

3－7　图示桁架各杆温度上升 t，已知线膨胀系数 α。试求由此引起的 K 点竖向位移。

3－8　上题结构中 AK 杆做长了 5 mm，试求由此引起的 K 点竖向位移。

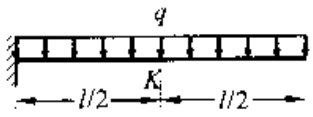
3－9　试求图示结构由于支座移动引起的 K 点水平位移。

3－10　图示结构上侧温度上升 10 ℃，下侧上升 30 ℃，并有图示支座移动和荷载作用。试求 C 点竖向位移。

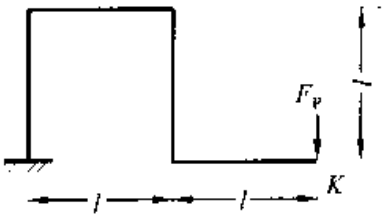
3－11　试求图示结构考虑弯曲变形和剪切变形的最大挠度。截面为矩形，$k = 1.2$。

3－12　图示桁架 AB 杆的 $\Sigma = E\sqrt{\varepsilon}$，其他杆的 $\sigma = E\varepsilon$。试求 B 点竖向位移。

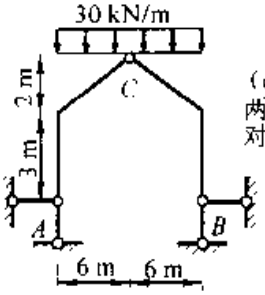
3－13　欲使图示简支梁中点的挠度为 0，试问施加多大杆端弯矩 M_0？



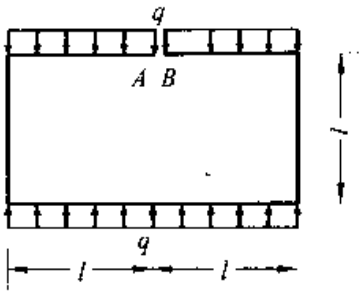
（a）求K点竖向位移



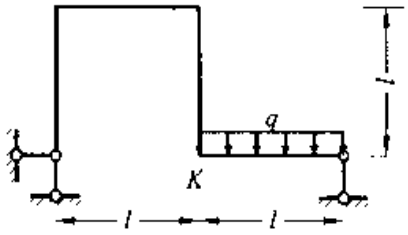
（b）求K点竖向位移



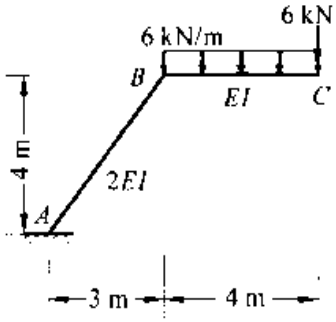
（c）求C铰两侧截面相对转角



（d）求A,B截面相对水平、竖向位移和相对转角，勾画变形曲线

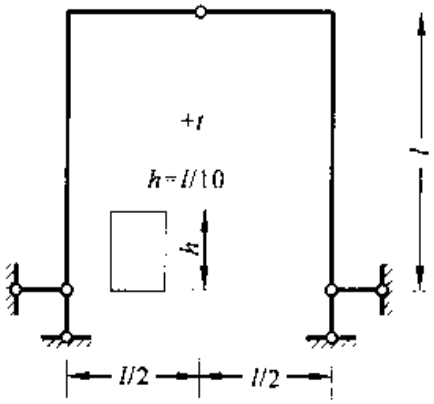


（e）求K点竖向位移，并绘变形曲线

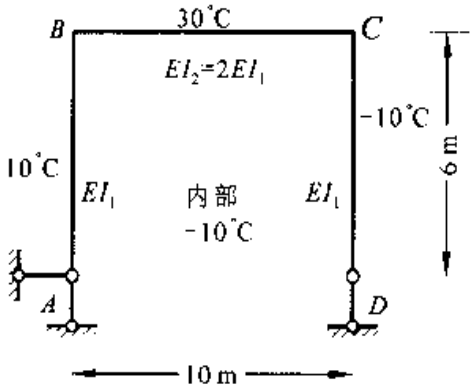


（f）求C点竖向位移，并绘变形曲线

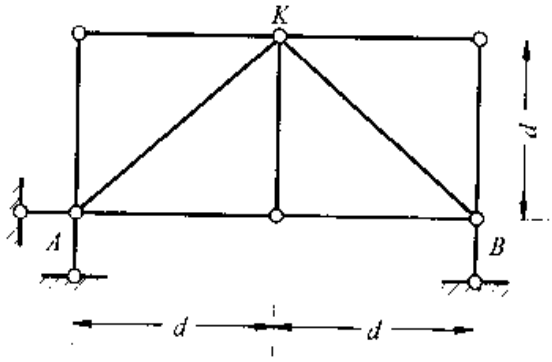
习题 3－4 图



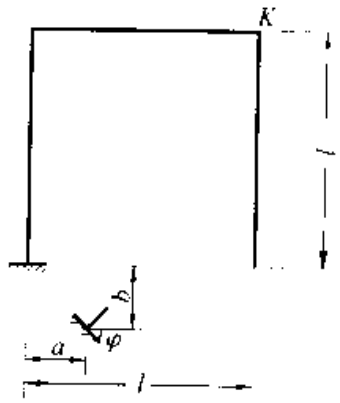
习题 3－5 图



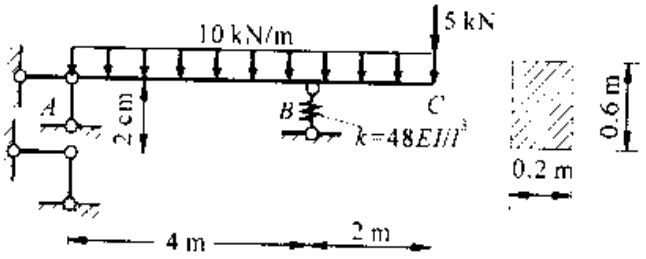
习题 3－6 图



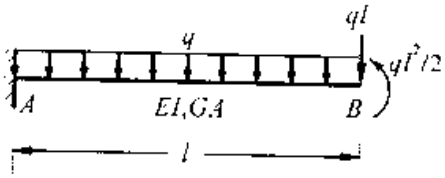
习题 3－7 图



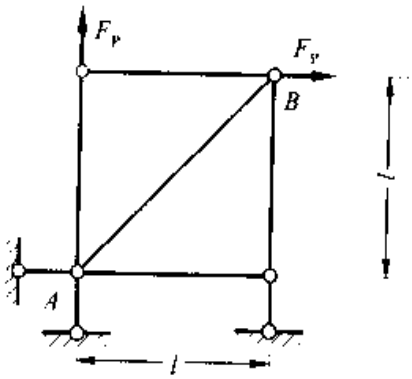
习题 3－9 图



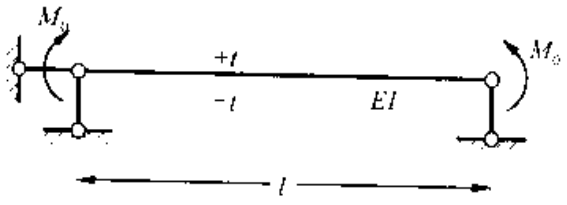
习题 3－10 图



习题 3－11 图

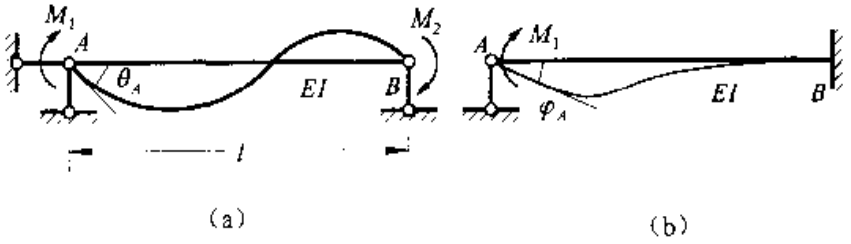


习题 3－12 图



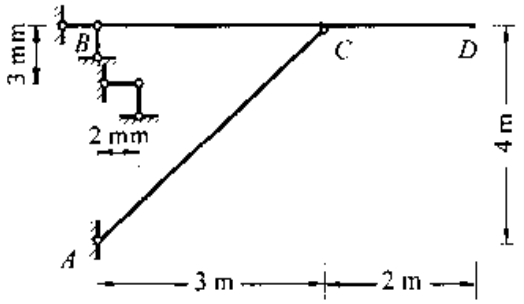
习题 3－13 图

3－14　已知在图 a 荷载作用下，$\theta_A=\frac{1}{3EI}\left(M_1-\frac{M_2}{2}\right)$。试求图 b 梁 A 端转角。



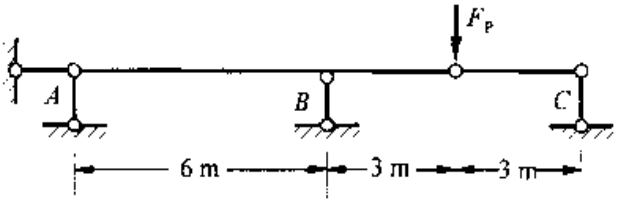
习题 3－14 图

3－15　图示结构中 AC 杆做长了 0.001 m，BCD 杆做成了半径为 200 m 的圆弧，同时支座 B 发生图中所示的移动。试求 D 端截面转角。



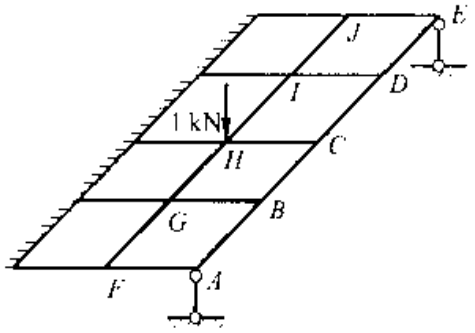
习题 3－15 图

3－16 已测得 A 截面逆时针转了 0.001 rad。试求 C 铰两侧截面的相对转角。



习题 3－16 图

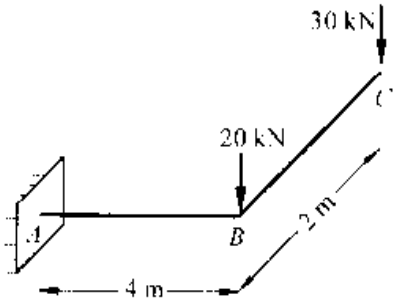
3－17　已测得在图示荷载作用下各点竖向位移为 H 点 1.2 cm，G、I 点 0.1 cm，F、C、J 点 0.06 cm，D、B 点 0.05 cm。试求当 10 kN 竖向力平均分布作用于 15 个结点上时 H 点的竖向位移。



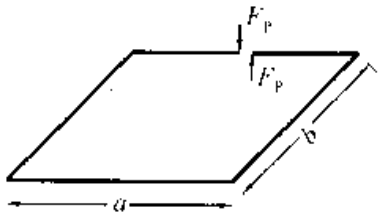
习题 3－17 图

3－18　已知图示空间刚架各杆的 $E=200\times10^6$ kN/m^2，$G=80\times10^6$ kN/m^2，$I=100\times10^6$ mm^4，$I_p=180\times10^6$ mm^4。试求 C 点竖向位移。

3－19　图示结构各杆的 E、G、I、I_p 均相同。试求 AB 两点竖向相对位移。



习题 3－18 图



习题 3－19 图

第4章

超静定结构解法

通过前面的学习已经掌握了如何从几何上组成结构，如何利用平衡条件分析静定结构受力，还掌握了结构位移计算的原理和方法。上述内容虽有其本身的工程意义，但更多的是为解决大量工程中的超静定结构计算奠定基础。

超静定结构从受力上看，需求反力或内力的未知量总数多于能建立的独立平衡方程数。因此仅仅利用平衡方程不能全部解决反力或内力的计算，必须建立补充方程。在材料力学推导应力公式时，已经介绍了综合“平衡、变形和材料力学行为分析”解决超静定问题的一般方法。本章主要介绍以力和位移作为基本未知量解超静定结构的力法和位移法，同时还将介绍与求解相关的方法、技巧和超静定结构的特性。

随着计算机的普及，结构的计算分析和设计愈来愈自动化，但本章内容是结构力学的基本原理和方法，是结构矩阵分析、计算机分析方法的基础，同时对判断和审核计算机分析结果的正确性也是必不可少的。

§4-1 求解超静定结构的一般方法

静定结构没有多余约束，因此仅利用平衡条件就可以求出全部反力和内力。超静定结构由于存在多余约束，待求未知量总数将多于可建立的独立平衡方程数，因此对图 4-1a 所示结构而言，如果图 4-1b 中 $F_{Ay,1}=$

$F_{P1}+F_{P2}-F_{By,1}$，$M_{A,1}=\sum_{1}^{2}F_{Pi}a_i-F_{By,1}l$，显然满足平衡条件。又如图 4-1c，如果 $F_{By,2}\neq F_{By,1}$，但 $F_{Ay,2}=F_{P1}+F_{P2}-F_{By,2}$，$M_{A,2}=\sum_{1}^{2}F_{Pi}a_i-F_{By,2}l$，同样可以满足平衡条件。由此可见，仅满足平衡条件的解答可以有无穷多种。

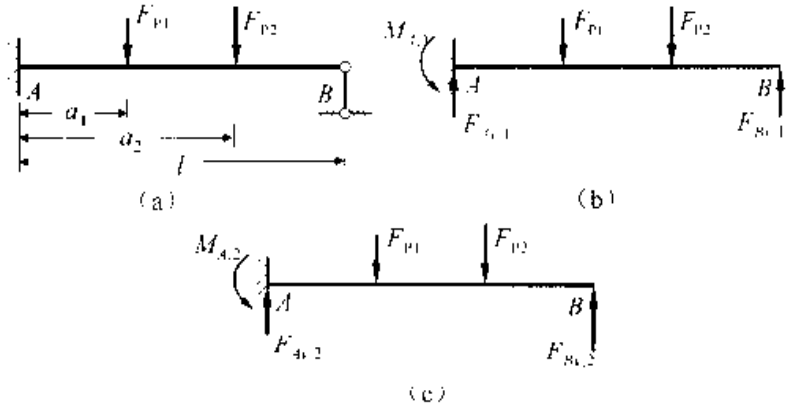


图 4-1　超静定结构仅满足平衡条件的解答不唯一示意

从材料力学可知，截面应力有无限个，仅从它应该平衡荷载来说是超静定的。为了解决应力计算，采取从实验观察入手，根据宏观现象作出关于变形的假设(例如平截面假设)，在此基础上求得变形，然后利用应力应变关系得到应力变化规律，最终利用平衡条件导出应力计算公式。综合应用如下三方面：变形分析——使变形协调；本构关系分析——使符合材料性能；平衡分析——使满足平衡要求，就可以解决超静定计算问题。这一分析思路对变形体力学是普遍适用的，超静定结构的求解也必须遵循。

仅用平衡条件，超静定问题解答不是唯一的。但是，同时满足变形协调、本构关系(也即应力应变关系)和平衡条件的解答只有一个，也即超静定计算的结果也是唯一的。

遵循"变形、本构、平衡"分析思想可有不同的出发点：

● 一种是：以力作为基本未知量，在自动满足平衡条件的基础上进行分析，这时主要应解决变形协调问题。这种分析方法称为**力法**(force method)。

● 另一种是：以位移作为基本未知量，在自动满足变形协调条件的基础上来分析，这时主要需解决平衡问题。这种分析方法称为**位移法**(displacement method)。

● 如果一个问题中既有力的未知量，也有位移的未知量，则力的部分考虑位移协调，位移的部分考虑力的平衡。这种分析方案称为**混合法**(mix-

ture method)。

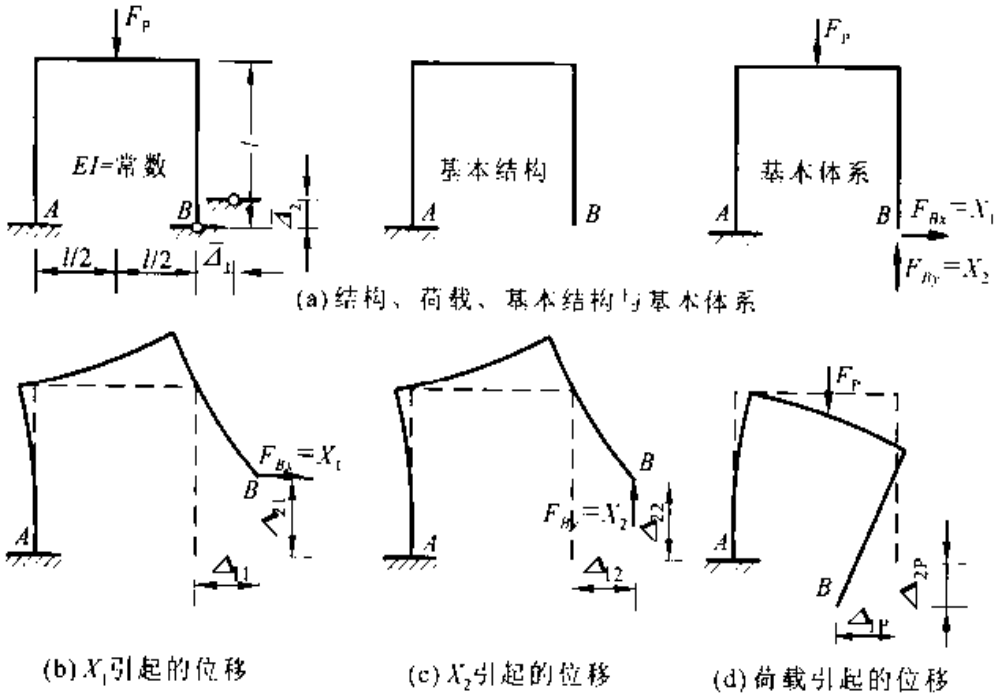
在本章中将主要介绍力法和位移法。

§4-2 力 法

4-2-1 力法基础

在本章以前，超静定结构如何求解是未知的，而静定结构的受力、变形分析都是已掌握的。力法的基本思想就是设法将未知的超静定问题转换成已知的静定问题来解决，这里核心是**转换**。

为了更容易理解，先用一具体例子说明以力作基本未知量的“转换”思想。图 4-2a 是一超静定刚架，承受如图所示荷载和支座位移作用。从组成分析可知，它有两个多余约束。适当解除多余约束(例如解除 B 点的支座)可使超静定结构变成静定结构，这个静定结构以后称为**基本结构**(fundamental structure)。由于拆除约束的任意性，例如还可在 AC 和 CD 杆的任何位置加两个简单铰，解除限制截面相对转动的约束来得到，显然一个超静定结构的基本结构可有无限多种可能。但是，不同的基本结构的求解工作量会有所不同。



(a) 结构、荷载、基本结构与基本体系

(b) X_1 引起的位移　(c) X_2 引起的位移　(d) 荷载引起的位移

图 4-2 力法求解思路

基本结构只做了几何上的转换，它当然与原结构是不同的。为了使转换后基本结构在受力上也和原结构一样，除在基本结构上应该作用原有荷载外，还必须将原有多余约束力的作用也考虑上。但是，现在这些多余约束力是未知的，它应该是优先求解的量，因此称为**基本未知量**(fundamental unknown)。承受荷载和基本未知量的基本结构称为**基本体系**(fundamental system)。

有了上述准备知识，现在可以说明求解思路的核心问题。显然，基本体系在荷载和基本未知力共同作用下的位移，可以由叠加原理用静定结构的位移计算方法得到。这里基本未知力的大小 X_1、X_2[①] (因为是广义未知力，所以 F_{Bx} 记为 X_1，F_{By} 记为 X_2)是待定的。图 4-2b、c、d 绘出了单一因素作用下的变形情况和沿未知力方向的位移，因此由图示位移叠加可得

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P}, \quad \Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} \tag{a}$$

式中，Δ_{11}、Δ_{21} 与 X_1 有关，是 X_1 引起的，Δ_{12}、Δ_{22} 与 X_2 有关，是 X_2 引起的。对线弹性结构，其间关系是线性的，因此 $\Delta_{ij} = \delta_{ij}X_j$，也即可由单位未知力 $X_j = 1$[②] 引起的位移系数 δ_{ij} 放大 X_j 倍来计算。显然，在不同未知力 X_1、X_2 作用下，位移 Δ_1 和 Δ_2 是不同的。这时与原超静定结构相比，虽然基本体系也是平衡的，但支座 B 处的位移 Δ_1 和 Δ_2 在不同未知力 X_1、X_2 作用下可能与原超静定结构的已知位移 $\bar{\Delta}_1$ 和 $\bar{\Delta}_2$ 不相等，也可称为不协调。

为了消除基本体系和原超静定结构的差别，必须令式(a)位移 Δ_1 和 Δ_2 与原结构的对应位移 $\bar{\Delta}_1$ 和 Δ_2 协调。这样，有多少个未知力就可以建立多少个位移协调条件，也就能够求出这些未知力。因此，这些协调条件被称为**力法方程**(equation of force method)。

对任意线弹性结构，根据位移(变形)协调条件——基本体系所产生的未知力方向位移 Δ_i 等于原超静定结构对应位移 $\bar{\Delta}_i$，所列出的是线性代数方程组为

$$\Delta_i = \sum_j \delta_{ij}X_j + \Delta_{iP} = \bar{\Delta}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

式中，δ_{ij} 为**位移系数**，它的物理意义是：基本结构在单位力 $X_j = 1$ 作用下，在 X_i 作用处沿 X_i 方向所产生的位移；Δ_{iP} 为基本结构所受外因(因为外因可以不是荷载，所以下标用 P)引起的 X_i 方向的位移，称为**广义荷载位移**；$\bar{\Delta}_i$ 为原超静定结构 X_i 方向的**已知(广义)位移**。式(4-1)称为**力法典型方程**。

---

① 本书广义未知力(包括力与力偶矩、力矩)仍沿用 X。

② 按国家标准 GB 3101—93 中规定单位广义力的写法应为 $|X|=1$，为行书写方便，本书均简记为 $X=1$。

典型方程也可写作矩阵形式：

$$\bar{\boldsymbol{\Delta}} = \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Delta}_P$$

其中，$\boldsymbol{\delta}$ 为**柔度矩阵**，其元素 δ_{ij} 为位移系数（也称为柔度系数），δ_{ii} 称为主系数，$\delta_{ij}(i \neq j)$ 称为副系数。根据位移计算公式可知，力沿自身方向所产生的位移恒大于零，因此主系数一定恒正。由位移互等定理可知，$\delta_{ij} = \delta_{ji}$。因此，$\boldsymbol{\delta}$ 为对称矩阵。$\boldsymbol{\Delta}_P$ 为**广义荷载位移矩阵**、$\boldsymbol{\Delta}$ 为**已知位移矩阵**、$\boldsymbol{X}$ 为**未知力矩阵**，其元素分别由广义荷载位移、已知广义位移和基本未知力组成。

求解线性代数方程组(4-1)，即可得到基本未知量——多余约束力，在它与荷载共同作用下，基本体系就既平衡又协调了。根据解答唯一性，它们就是超静定结构真实解答。

由于已经消除基本体系和原超静定结构的差别，而基本体系是已掌握的静定结构，所以原超静定结构的其他计算内容（如内力和位移计算等），就可以通过基本体系用计算静定结构的方法来解决。这就是力法将超静定结构转换成静定结构进行分析的思路。

4-2-2 超静定次数的确定

基本未知力的个数又称为**超静定次数**，记为 n。显然确定超静定次数是力法计算的第一项工作。从力法思路说明可见**超静定次数等于多余约束数等于变成基本结构所解除的约束数等于基本体系上所暴露的约束力数**。不管怎么理解，本质上这是组成分析问题，图4-3给出了三个结构超静定次数确定的示例。

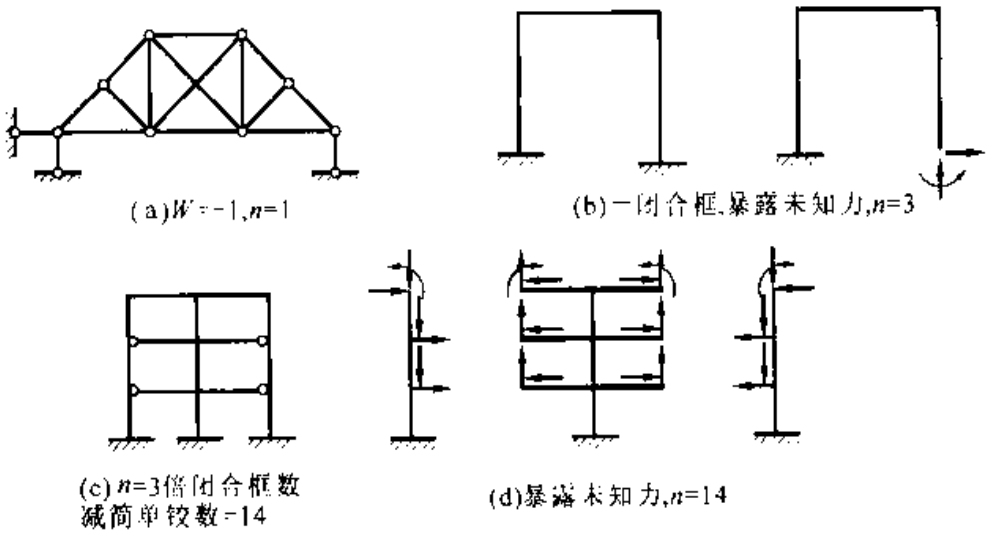


图4-3 以静定结构为基本结构时超静定次数确定示例

图4-3a为一超静定桁架，从铰结体系的可变性分析可知，这是有一个

多余约束的几何不变体系；从计算自由度分析 $W=-1$ 且几何不变。由此可知，此桁架的超静定次数为 1。

图 4－3b 为一超静定刚架，由图可见拆除右边固定端支座变成静定结构，相当解除 3 个约束；将右边固定支座用约束反力代替，暴露出 3 个未知力。因此，此超静定结构为三次超静定。因为此刚架与地面一起构成一个无铰的闭合框，故可得一个无铰闭合框三次超静定的结论。

图 4－3c 也是一个超静定刚架，用闭合框分析时，有六个闭合框，但与图 4－3b 不同每个框中都含有铰。由于从刚结到简单铰结相当于解除一个约束，因此如图所示按闭合框分析结果为十四次超静定。又可与图 4－3b 一样，拆除约束或数所暴露的未知力个数（图 4－3d）确定超静定次数，结果都是十四次超静定。

超静定次数如何确定，读者可以根据对“定义”的理解来分析。需要指出的是，超静定次数的确定非常重要，如分析错了，则后面的工作就无法计算正确。

4－2－3　力法的解题步骤

力法求解超静定结构的具体步骤为：

（1）确定超静定次数和基本结构等。显然，随着超静定次数的确定，基本结构、基本未知力、基本体系等自然可以确定下来。需要指出的是，一个超静定结构可以用不同的基本结构分析，不同基本结构计算工作量将不同，要选取工作量较少的基本结构，需要通过总结后面例题和自己作练习来归纳。

（2）作基本结构在单位未知力和荷载作用下的内力图。为了求基本结构在未知力、外因作用下的位移（$\Delta_{ij}=\delta_{ij}X_j$、$\Delta_{iP}$），由静定结构位移计算可知，必须要有单位内力图和荷载内力图。对桁架结构，内力是轴力。对受弯结构，剪力和轴力对变形的影响可以忽略，因此内力是弯矩。对于组合结构，桁架杆是轴力、弯曲杆是弯矩。对于拱，一般是弯矩和轴力。

（3）求基本结构在各单位未知力作用下所引起的沿某单位未知力方向的位移 δ_{ij}。对线性结构 δ_{ij} 由单位内力图计算。当可用图乘法时，δ_{ii} 由 i 内力图自乘、δ_{ij} 由 i 内力图和 j 内力图互乘计算。

（4）求外因作用引起基本结构沿单位力方向的位移 Δ_{iP}。这可由第 i 单位内力（反力）根据各种外因引起的位移计算公式求得。

（5）建立力法方程并求解。求得 δ_{ij}、Δ_{iP} 后，即可建立力法典型方程

$$\sum_j \delta_{ij}X_j+\Delta_{iP}=\bar{\Delta}_i,\quad \text{或}\quad \boldsymbol{\delta X}+\boldsymbol{\Delta}_P=\bar{\boldsymbol{\Delta}} \tag{4-1}$$

用消去法进行求解即可获得基本未知力。当未知力个数超过3个时，手算是很繁的，需要用计算机来求解。

(6) 作超静定结构内力图。根据叠加原理，在求得未知力后，由单位内力乘以对应未知力后和荷载内力叠加，即可得到超静定结构内力，依此可作内力图。受弯结构与静定结构一样按弯矩、剪力、轴力的顺序来计算。也可将已求得的 X_i（或 X）和荷载加到基本结构上，然后按静定结构的方法计算结构内力。

(7) 求超静定结构位移。基本结构有无穷种，但解答是唯一的，这一解答可看作是从任一基本结构求得。所以，有了内力，从任一基本体系出发，可以按静定结构受（多种）外因作用求位移的方法，求超静定结构外因下的位移。

(8) 校核分析结果。由于单位内力、荷载引起的内力都是平衡的，因此即使未知力计算有错，叠加结果仍必然自动满足平衡条件。所以，力法的校核主要是检查变形条件，也即计算位移看是否满足协调条件。结构工程师，不仅应能分析，还必须熟练掌握结果的校核方法。具体的校核方法，通过下面的例题来说明。

力法是计算超静定结构最基本的方法之一。上述力法求解步骤适用于一切超静定结构、一切外因作用。

4-2-4 力法解超静定结构举例

下面就不同类型结构、不同外因作用举一些典型例子，以便帮助读者掌握好力法这种超静定结构基本解法。

超静定桁架结构

[**例题 4-1**] 试求图 4-4a 所示超静定桁架的各杆内力。

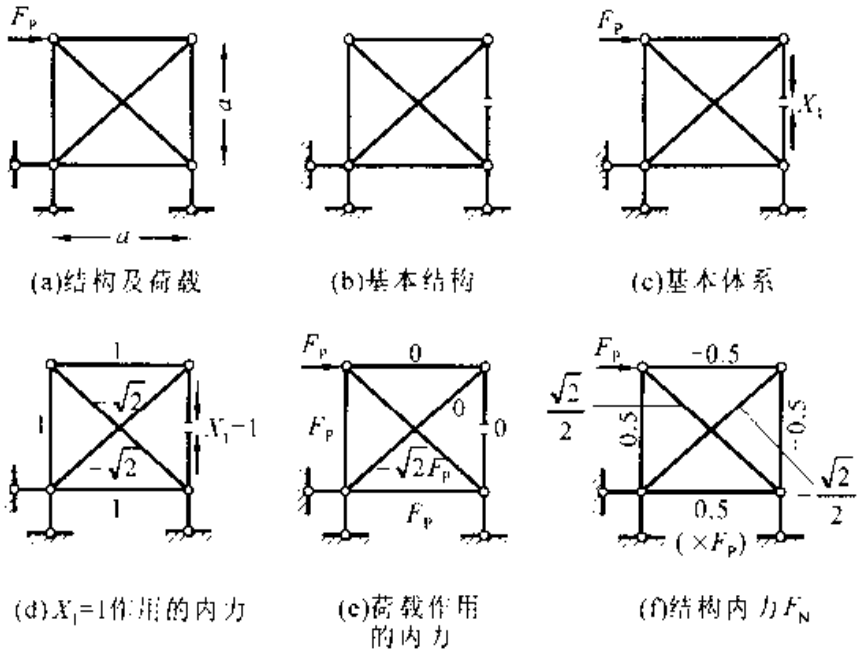
解：(1) 此桁架超静定次数为 1，解除其中一杆的轴向约束得基本结构如图 4-4b，基本体系如图 4-4c。

(2) 为了求位移系数 δ_{11} 和荷载位移 Δ_{1P}，求单位轴力和荷载轴力如图 4-4d、e。如第 3 章所指出，记单位未知力为 $X_1=1$，实际上它是比例系数，是量纲一。

(3) 根据图 4-4d、e 可求得

$$\delta_{11}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}^2 l}{EA}=\frac{4(1+\sqrt{2})a}{EA}\quad(\text{自乘})$$

$$\Delta_{1P}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}F_{NP}}{EA}=\frac{2(1+\sqrt{2})}{EA}F_P a\quad(\text{互乘})$$



(a)结构及荷载　(b)基本结构　(c)基本体系

(d)$X_1=1$作用的内力　(e)荷载作用的内力　(f)结构内力F_N

图 4－4　例题 4－1 图(结构及求解过程)

(4) 由力法方程 $\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$ (因为 $\bar{\Delta}_1=0$),可得 $X_1=-0.5F_P$。

(5) 再由 $F_N=\bar{F}_{N1}X_1+F_{NP}$对每一对应杆进行叠加,即可得到图 4－4f 所示桁架的各杆内力。

几点说明:

● 解除轴向约束是指图 4－5 所示拆除轴向链杆。

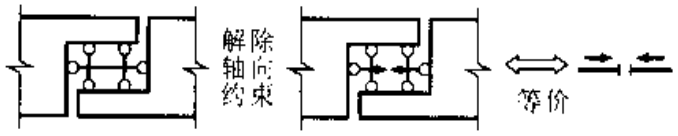


图 4－5　解除轴向约束

● 也可用拆除一根桁架杆的静定结构作为基本结构,这时计算 δ_{11} 不考虑已拆除的杆,而力法方程为两结点间的相对位移等于所拆除杆的拉(压)变形。读者可自行按此思路计算,结果应该与图 4－4f 所示各杆内力相同。

● 由计算可知,荷载作用情形下,超静定桁架的内力与杆件的绝对刚度 EA 无关,只与各杆刚度比值有关。

[**例题 4－2**]　试求图 4－6a 所示桁架由图示支座位移所产生的内力。

解: (1) 此桁架超静定次数为 2,取图 4－6b 为基本结构,基本体系如图 4－6c。

(2) 单位内力图如图 4-6d。

(3) 由位移计算可得

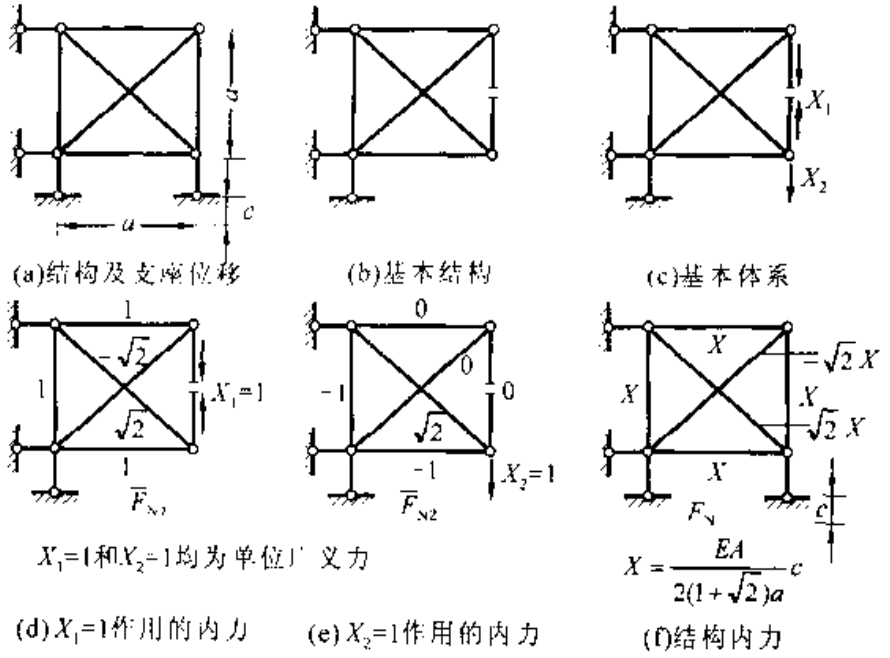


图 4-6 例题 4-2 图(结构及求解过程)

$$\delta_{11}=\frac{4(1+\sqrt{2})a}{EA} \quad (自乘)$$

$$\delta_{22}=\frac{2(1+\sqrt{2})a}{EA} \quad (自乘)$$

$$\delta_{12}=-\frac{2(1+\sqrt{2})a}{EA} \quad (互乘)$$

(4) 力法典型方程为

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=c$$

代入系数并求解,可得

$$X_1=\frac{EA}{2(1+\sqrt{2})a}c, \quad X_2=2X_1$$

(5) 由 $F_N=F_{N1}X_1+\bar{F}_{N2}X_2$ 叠加,可得图 4-6e 所示各杆内力。

两点说明:

● 支座位移将引起超静定结构内力,这一内力和杆件的绝对刚度 EA 有关。

● 请读者考虑,如果保留右支座而解除一水平链杆支座作基本结构,力法方程有否变化?

1. 超静定梁

[**例题 4-3**]　试求作图 4-7a 所示单跨梁的弯矩图。

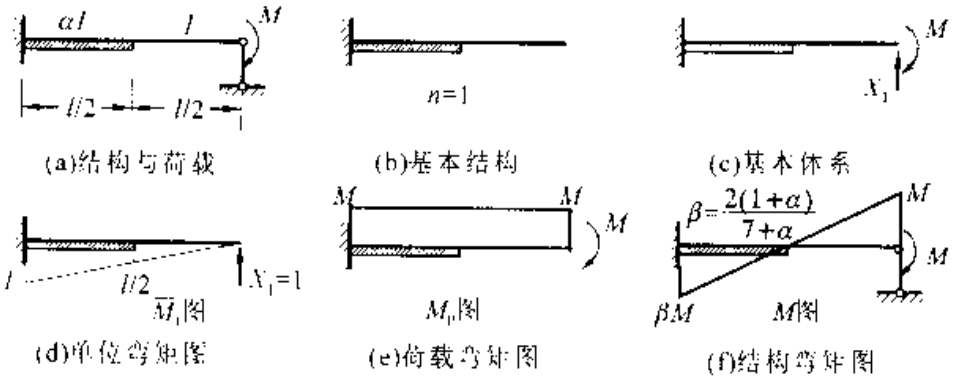


图 4-7　例题 4-3 图(结构及求解过程)

解：(1) 此梁超静定次数为 1，取图 4-7b 和 c 为基本结构和基本体系。

(2) 单位弯矩图如图 4-7d，荷载弯矩图如图 4-7e。

(3) 由 M_1 图自乘，可得

$$\delta_{11}=\frac{(0.5l)^3}{3EI}+\frac{1}{\alpha EI}\left(\frac{1}{2}\cdot l\times\frac{1}{2}\times\frac{5l}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{2l}{3}\right)=\frac{l^3}{24EI}\left(1+\frac{7}{\alpha}\right)$$

由 $\bar{M}_1$ 图和 M_P 图互乘，可得

$$\Delta_{1P}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\cdot M}{EI}+\frac{\frac{3l}{4}\times\frac{l}{2}\cdot M}{\alpha EI}=-\frac{Ml^2}{8EI}\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)$$

(4) 由力法典型方程 $\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$，可得

$$X_1=\frac{3M}{l}\frac{\alpha+3}{\alpha+7}\quad\left(\text{当 }\alpha=1\text{ 时 }X_1=\frac{3M}{2l}\right)$$

(5) 由 $M=M_1X_1+M_P$ 叠加，可得图 4-7f 所示单跨梁的弯矩图。

说明：荷载作用情况下，超静定梁内力也只与杆件相对刚度 α 有关，与绝对刚度无关。

[**例题 4-4**]　试求作图 4-8a 所示单跨梁的弯矩图。

解：(1) 此梁超静定次数为 3，取图 4-8b 为基本结构，基本体系如图 4-8c。

(2) 荷载弯矩图如图 4-8d，单位弯矩图如图 4-8e。

(3) 由单位内力图(图 4-8e)的自乘和互乘，可得如下位移系数：

$$\delta_{11}=l/EA,\quad \delta_{12}=\delta_{13}=0,\quad \delta_{22}=l^3/12EI,\quad \delta_{23}=0,\quad \delta_{33}=l/EI$$

由位移互等定理可知 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$，因此 $\delta_{21}=\delta_{31}=\delta_{32}=0$。

(4) 由 $\bar{M}_i(i=1,2,3)$ 图与 M_P 图互乘，可得

$$\Delta_{1P}=\Delta_{2P}=0,\quad \Delta_{3P}=-\frac{ql^3}{24EI}$$

(5) 由力法典型方程 $\Delta_i=\sum_j\delta_{ij}X_j+\Delta_{iP}=0\ (i=1,2,3)$，可得

$$X_1=X_2=0,\quad X_3=\frac{ql^2}{24EI}$$

(6) 由 $M=M_3X_3+M_P$，可得图 4-8f 所示的弯矩图。

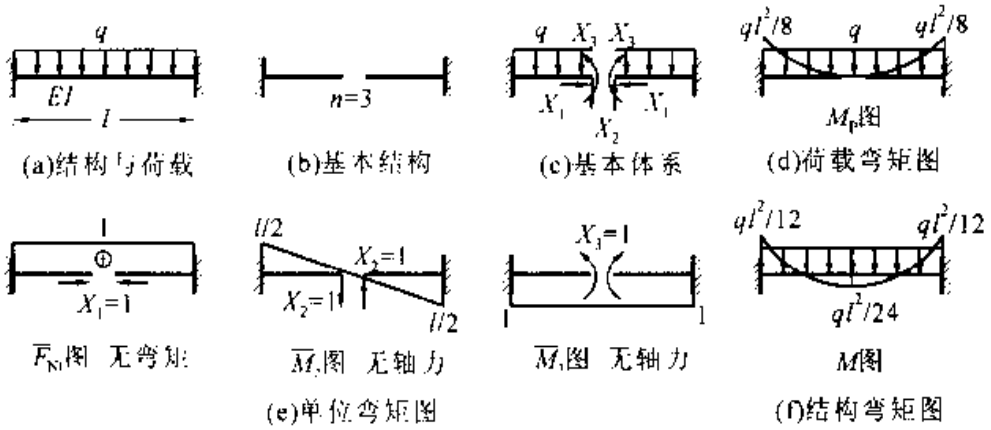


图 4-8 例题 4-4 图(结构及求解)

两点说明：

● 对称结构受对称荷载作用将只产生对称的内力(变形)，反对称内力(变形)等于零。不难推测，对称结构受反对称荷载作用将只产生反对称的内力(变形)，对称内力(变形)等于零。

● 在垂直杆轴的竖向荷载作用下，超静定单跨梁的轴力恒为零，因此在此条件下轴向未知力可不作为独立的基本未知量。

[**例题 4-5**] 试求作图 4-9a 所示定向支座单跨梁由图示温度改变引起的弯矩图。材料线胀系数为 α。

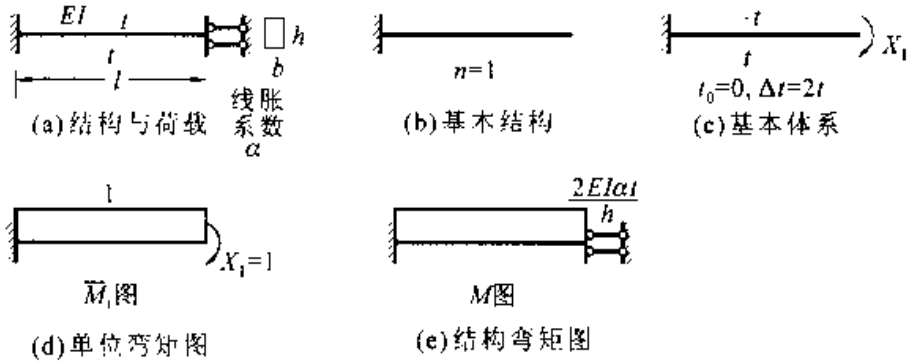


图 4-9 例题 4-5 图(结构及求解过程)

解：(1) 由于温度不产生轴向伸长，可证明轴向力为零。在不计轴向未

知力时，此梁超静定次数为1，取图4-9b为基本结构，基本体系如图4-9c。

(2) 单位弯矩图如图4-9d。

(3) 由 $\bar{M}_1$ 图自乘可得 $\delta_{11}=\frac{l}{EI}$。从图可见 $t_0=0$，$\Delta t=2t$，由温度引起的位移计算可得

$$\Delta_{1t}=-1\cdot l\cdot\alpha\cdot\frac{\Delta t}{h}=-\frac{2\alpha tl}{h}$$

(4) 由力法典型方程 $\delta_{11}X_1+\Delta_{1t}=0$，可得 $X_1=\frac{2EI\alpha t}{h}$，由此可得图4-9e所示弯矩图。

几点说明：

● 温度改变将引起超静定结构内力，这一内力也和杆件的绝对刚度 EI 有关。温度低的一侧受拉，此结论适用于温度改变引起的其他支承情况的单跨超静定梁。

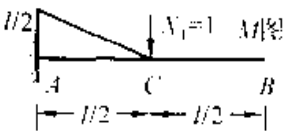


图4-10　单位力状态

● 若要求本例梁中点的挠度，可取图4-10所示的单位力状态(见解法步骤(7)的说明)。**必须注意**，计算时除了要考虑弯矩引起的位移外，还必须考虑基本结构的温度改变引起的位移，因此**要用多因素的位移公式**。具体计算如下：

$$\Delta_C=\Delta_M+\Delta_t=\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{2EI\alpha t}{h}-\frac{\alpha\times 2t}{h}\times\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}=0$$

● 对于超静定结构支座位移引起的位移计算，也一样要**用多因素的位移公式**。

● 请读者考虑，此梁两侧同时升温 t 时如何求解？两侧温度为 t_1、t_2 时如何求解？

[例题4-6] 试作图4-11a所示两端固定单跨梁由支座位移引起的弯矩图。

解：(1) 此梁超静定次数为3，取图4-11b为基本结构，基本体系如图4-11c。

(2) 单位内力图如图4-11d。

(3) 由单位内力图(图4-11d)的自乘和互乘，可得如下位移系数：

$$\delta_{11}=l/EA,\quad \delta_{12}=\delta_{13}=0,\quad \delta_{22}=l/3EI=\delta_{33},\quad \delta_{23}=-l/6EI$$

由位移互等定理可知 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$，因此 $\delta_{21}=\delta_{31}=0$。

(4) 由位移协调，可建立如下力法典型方程：

$$\delta_{11}X_1=0,\quad \delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3=0,\quad \delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3=0$$

代入位移系数并求解，可得

$$X_1=0,\quad X_2=\frac{2EI}{l}\theta,\quad X_3=\frac{4EI}{l}\theta$$

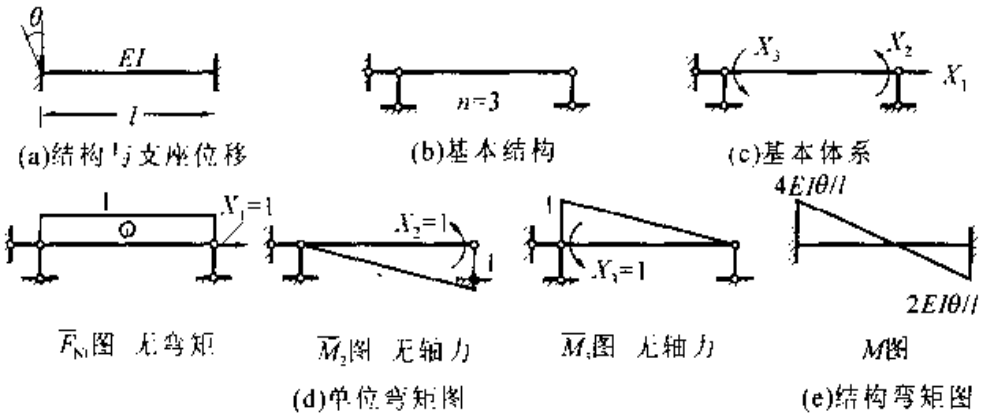


图 4-11 例题 4-6 图(结构及求解过程)

(5) 由 $M=\overline{M}_2X_2+\overline{M}_3X_3$,可得图 4-11e 所示的弯矩图。

说明:单跨超静定梁支座发生竖向和转动位移时,轴力为零,超静定次数可减少 1 次。

2. 超静定刚架

[例题 4-7] 试求作图 4-12a 所示刚架的弯矩图。

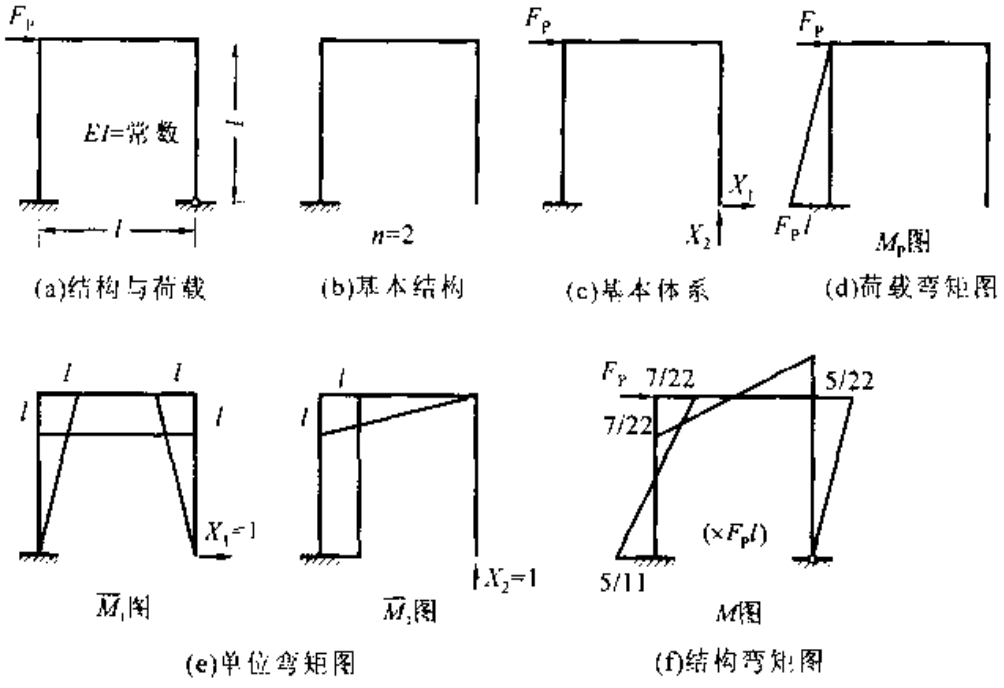


图 4-12 例题 4-7 图(结构及求解过程)

解:(1) 此刚架超静定次数为 2,取图 4-12b 为基本结构,基本体系如图 4-12c。

(2) 荷载弯矩图如图 4－12d,单位弯矩图如图 4－12e。

(3) 由单位弯矩图(图 4－12e)的自乘和互乘,可得如下位移系数:

$$\delta_{11}=5l^3/3EA,\quad \delta_{22}=4l^3/3EI,\quad \delta_{12}=l^3/EI=\delta_{21}$$

(4) 由 $M_i(i=1,2)$图与 M_P 图互乘,可得 $\Delta_{1P}=-F_Pl^3/6EI$,$\Delta_{2P}=-F_Pl^3/2EI$

(5) 列力法典型方程,代入系数并求解,可得

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0,\quad X_1=-\frac{5}{22}F_P$$

$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0,\quad X_2=\frac{12}{22}F_P$$

(6) 由 $M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2$,可得图 4－12f 所示的弯矩图。

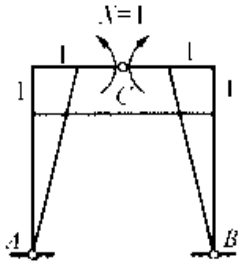


图 4－13　单位弯矩图

说明:为校核结果的正确性,可将单位弯矩图和最终弯矩图互乘,看是否满足位移协调条件。也可求解结构某一已知位移,看是否满足位移协调条件。为此建立图 4－13 所示静定结构(视作基本结构)单位广义力状态,作出所示弯矩图。将它与图 4－12f 互乘,校核是否为零。具体计算如下:

$$EI\Delta=-\frac{1}{2}\times\frac{17}{22}F_Pl\cdot l\times\frac{1}{3}+\frac{7}{22}F_Pl\cdot l\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{12}{22}F_Pl\cdot l\times 1+$$

$$\frac{7}{22}F_Pl\cdot l\times 1-\frac{1}{2}\times\frac{5}{22}F_Pl\cdot l\times\frac{2}{3}=0$$

此结果表明图 4－12f 弯矩图是正确的。

[**例题 4－8**]　试求作图 4－14a 所示刚架因温度改变引起的弯矩图。

解:(1) 刚架超静定次数为 2,取图 4－14b 为基本结构,基本体系如图 4－14c。

(2) 单位弯矩图仍为图 4－12e,单位轴力图如图 4－14d。

(3) 由单位弯矩图(图 4－12e)的自乘和互乘可得如下位移系数:

$$\delta_{11}=5l^3/3EA,\quad \delta_{22}=4l^3/3EI,\quad \delta_{12}=-l^3/EI=\delta_{21}$$

(4) 因为 $\Delta t=0$,所以由 $\overline{F}_{Ni}(i=1,2)$图用温度位移计算公式,可得 $\Delta_{1t}=\alpha lt/2$,$\Delta_{2t}=0$。

(5) 列力法方程,代入系数并求解,可得

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1t}=0,\quad X_1=-6\alpha EIt/11l^2$$

$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2t}=0,\quad X_2=9\alpha EIt/11l^2$$

(6) 由 $M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2$,可得图 4－14e 所示的弯矩图。

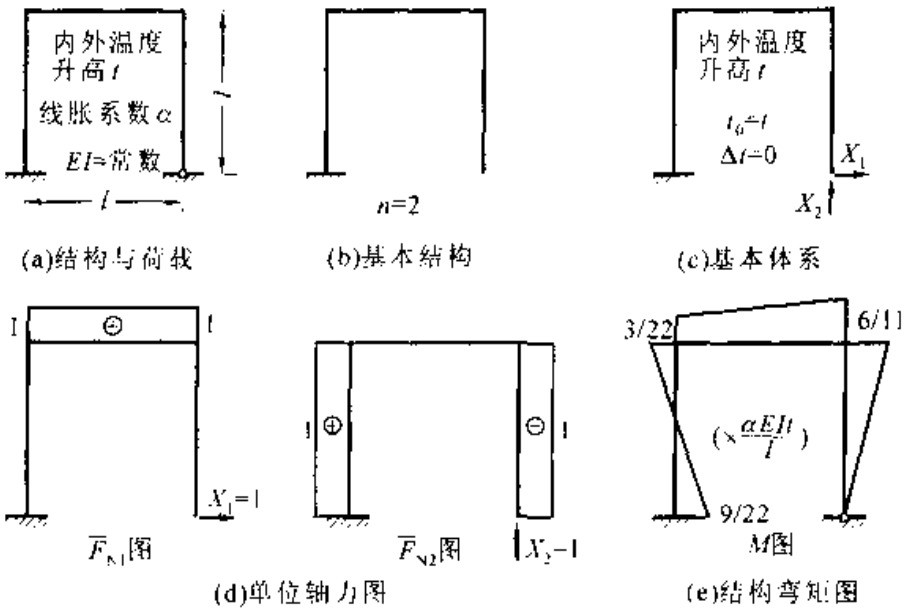


图 4-14 例题 4-8 图(结构及求解过程)

几点说明:

● 求超静定结构位移时,可取任意一个静定基本结构建立单位广义力状态。

● 求超静定结构位移时,既要考虑内力(弯矩)产生的位移,也要考虑静定基本结构温度改变等产生的位移,因此必须用多因素位移计算公式。

● 为校核 X_2 方向的位移,由单位内力图,用多因素位移计算公式计算如下:

$$\Delta_2=\frac{1}{2}\times\frac{12}{22}\alpha t\cdot l-\frac{3}{22}\alpha t\cdot l-\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\left(\frac{3}{22}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{22}\right)\cdot\frac{\alpha t}{l}+$$

$$\alpha t\cdot\left(\frac{1}{l}\cdot l-\frac{1}{l}\cdot l\right)=0$$

● 当既有轴线温变 t_0,又有温差 Δt 时,Δ_{it} 应包含两部分引起的位移。

3. 超静定拱

超静定拱的计算实际上和刚架相似,其最主要的区别为:

(1) 拱肋为曲杆,求力法方程系数时图乘法不再适用。

(2) 根据拱的受力特点,位移系数计算时往往要考虑轴力的影响。

(3) 当拱肋截面高度与曲率半径的比值较大时,如上一章讨论中所指出的,位移计算要考虑曲率的影响。

根据具体问题,只要注意了上述与刚架的不同点,则求解超静定拱不会有困难。下面以例题加以说明。

[例题 4-9]　试求图 4-15a 所示等截面对称两铰拱的跨中截面 C 弯矩 M_C。

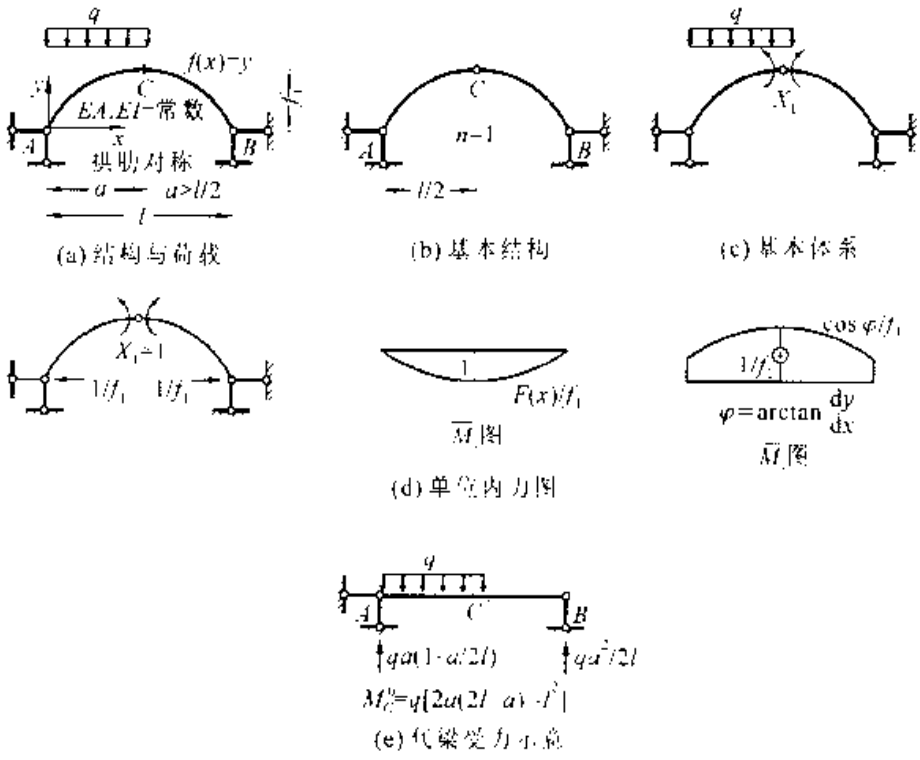


图 4-15　例题 4-9 图(结构及求解)

解：(1) 两铰拱超静定次数为 1，取图 4-15b 三铰拱为基本结构，基本体系如图 4-15c。

(2) 单位力作用下反力和内力如图 4-15d。

(3) 荷载作用下与基本体系对应的代梁受力如图 4-15e，由此可得

推力(水平反力)：　$F_{HP}=\dfrac{M_C}{f_1}=\dfrac{q}{8f_1}[2a(2l-a)-l^2]$

弯矩：

$$M_P=\frac{qa}{2l}(2l-a)x-\frac{qx^2}{2}-F_{HP}f(x)\quad(x<a)$$

$$M_P=\frac{qa^2}{2l}(l-x)-F_{HP}f(x)\quad(x\geqslant a)$$

(4) 对于两铰拱，一般在计算位移系数时考虑轴力和弯矩的影响，在计算荷载位移系数时只考虑弯矩影响。因此，根据位移计算公式可得

$$\delta_{11}=\int_s\frac{\cos^2\varphi}{EAf_1^2}\mathrm{d}s+\int_s\frac{f^2(x)}{EIf_1^2}\mathrm{d}s,\quad \Delta_{1P}=\int_0^a\frac{M_Pf(x)}{f_1EI}\mathrm{d}s+\int_a^l\frac{M_Pf(x)}{f_1EI}\mathrm{d}s\quad(a)$$

其中，

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

(5) 由力法典型方程,可得 $X_1 = M_C = -\dfrac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$。

在已知拱轴线方程 $f(x)$的情况下,由式(a)积分即可求得超静定两铰拱的基本未知力。有了基本未知力,利用内力叠加公式即可求作内力图。在竖向荷载作用下若是只需求指定截面内力,则可利用三铰拱的内力公式进行计算。

几点说明:

● 本例因为要求跨中弯矩,所以将它作为基本未知力。一般解两铰拱时以水平推力作基本未知力。

● 对小曲率的扁平拱,可近似取 $ds = dx$,$\cos\varphi \approx 1$,使计算得以简化。

● 对于带拉杆的两铰拱,以拉杆轴力作为基本未知量,这时 $\delta_{11} = \delta'_{11} + \dfrac{l}{EA}$。式中,$\delta'_{11}$为无拉杆两铰拱的位移系数,$EA$ 为拉杆的抗拉刚度。由有、无拉杆两铰拱的水平推力对比可发现,设计拉杆拱时,为减小拱肋的弯矩,应该尽可能使拉杆刚度大一些。

● 实际工程中的拱结构(屋盖、桥梁和隧洞衬砌等)往往是变截面的,位移系数的计算一般要用数值积分(例如上章介绍的梯形公式或辛普生公式)来计算,显然手算的工作量是很大的。当前计算机已经相当普及,这一繁琐的工作应由计算机完成。为了更好地理解力法解超静定拱,建议有条件的读者,参考随本书发行光盘上的三铰拱计算程序,作为小论文试着自行编制一个静定、超静定拱通用的计算程序。

4. 超静定组合结构

和静定组合结构一样,求解的关键是:在求位移时区分梁式(弯曲)杆和桁架(二力)杆。对梁式杆可只考虑弯矩图乘求 δ'_{ij},对桁架杆按 $\delta''_{ij} = \sum_k \dfrac{F_{Ni}F_{Nj}l_k}{EA_k}$ 计算,总的位移系数为二者之和。下面按此思路以例题说明求解过程。

[**例题 4-10**] 试求图 4-16*a* 所示超静定组合结构各桁架杆的内力。

解: (1) 此组合结构超静定次数为 1,取图 4-16*b* 为基本结构,基本体系如图 4-16*c*。

(2) 基本结构在单位力作用下的内力如图 4-16*d*,在荷载作用下的弯矩图如图 4-16*e*。

(3) 由单位内力可求得

$$\delta_{11} = \frac{4(1+\sqrt{2})a}{EA} + \frac{8a^3}{3EI}$$

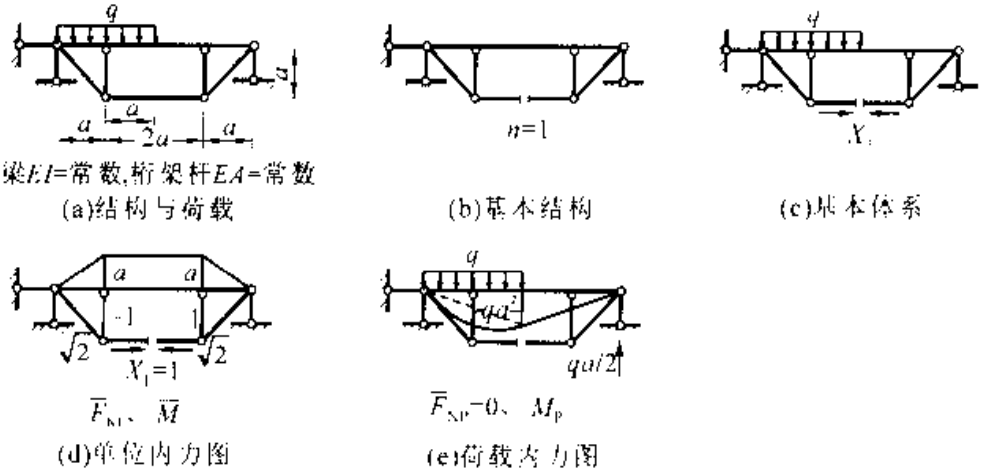


图 4－16　例题 4－10 图(结构及求解)

由单位弯矩图与荷载弯矩图图乘,可得

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{qa^2}{2}\cdot a\times\frac{2a}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{qa^2}{8}\cdot a\times\frac{a}{2}+\left[\frac{2}{3}\times\frac{qa^2}{8}\cdot a+qa^2\cdot a+\frac{1}{2}\cdot\left(qa^2+\frac{qa^2}{2}\right)\cdot a\right]\cdot a+\frac{1}{2}\times\frac{qa^2}{2}\cdot a\times\frac{2a}{3}\right\}=-\frac{57qa^4}{24EI}$$

(4) 由力法典型方程,可求得

$$X_1=\frac{57qa}{64}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3(1+\sqrt{2})EI}{2EAa^2}}=\frac{57qa}{64}\cdot\frac{1}{1+K},\quad K=\frac{3(1+\sqrt{2})EI}{2EAa^2}\qquad\text{(a)}$$

(5) 有了基本未知力,由单位内力图中各杆轴力放大 X_1 倍,即得组合结构桁架杆内力。如果要作梁式杆的弯矩图,由 $M=\bar{M}_1X_1+M_P$ 即得到。

说明:

由式(a)中 K 的分析可知,当桁架杆刚度较大、梁式杆刚度较小时,$K\to0$,梁的弯矩接近于三跨连续梁情况。反之,当桁架杆拉压刚度较小、梁式杆刚度较大时,K 很大,$X_1\to0$,梁的弯矩接近于简支梁情况。

本节例举了 10 个例子,但工程问题千变万化,教材和讲课都不可能一一枚举。要想切实掌握力法,以便能用它来解决具体工程问题,只有深刻理解力法"将超静定结构转化为静定结构问题来解决"的基本思路,熟记求解步骤,通过自行练习和总结才能达到。

§4－3　力法计算的简化

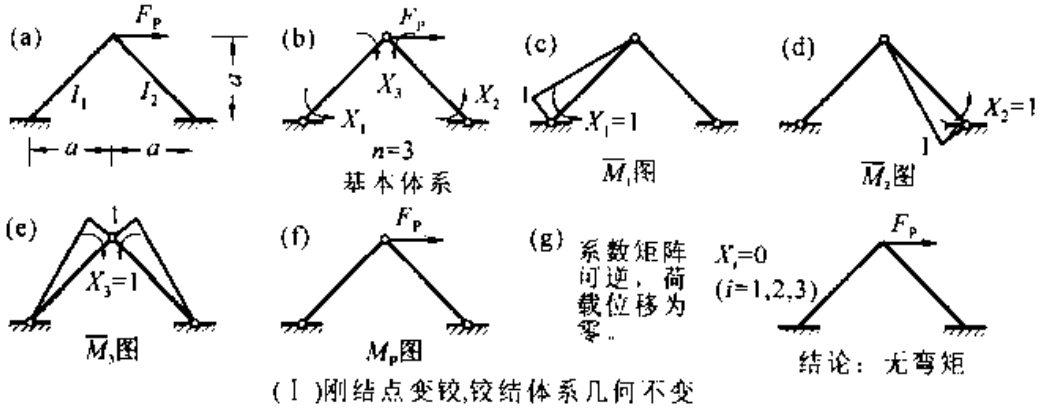
线性结构的力法方程是线性联立方程组,由位移系数的物理意义可知,

主系数 δ_{ii} 恒大于零，而副系数 δ_{ij} 是代数量，可正、可负、可零。如果能设法使得尽可能多的副系数等于零，不仅可以减少系数的计算，而且还可减少解方程的工作量。这就是本节讨论的内容。

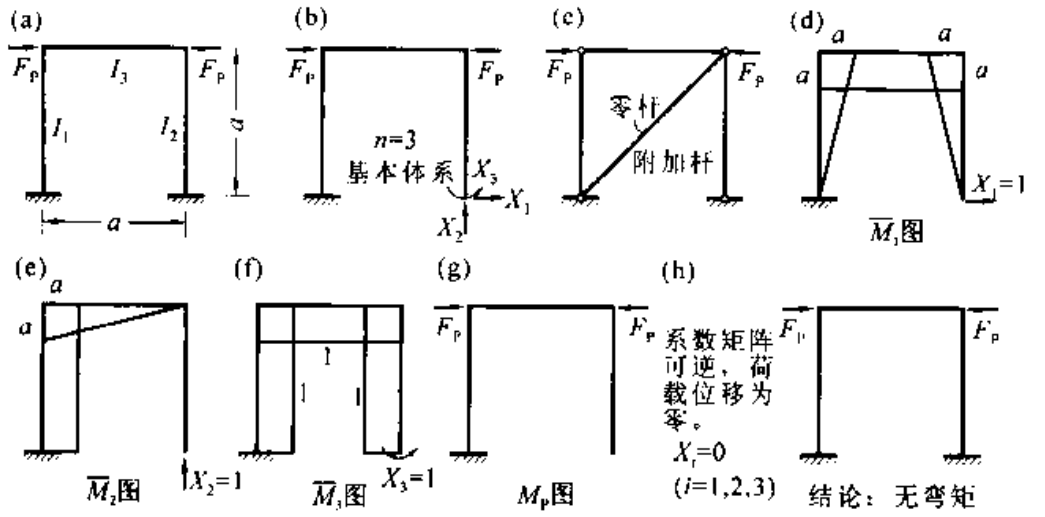
4－3－1　无弯矩状态的判别

对一些只承受结点荷载的刚架结构，在不计轴向变形的情况下，有可能是无弯矩的。如果能够方便地判断出来，显然将可减少许多求解的计算工作量。

这里不作详细证明（读者可用力法计算证明），仅通过图 4－17 所示两个例子来说明。图 4－17（Ⅰ）为将刚结点变成铰后，所得体系是几何不变的情形。图 4－17（Ⅱ）为所得的可变铰结体系，但通过加链杆使其变成不变体系后，所附加的链杆在载荷下作用均为零杆的情况。与前面力法例题一样图



（Ⅰ）刚结点变铰，铰结体系几何不变



（Ⅱ）刚结点变铰，铰结体系几何可变，但使铰结体系不变所附加的杆均为零杆

图 4－17　承受结点荷载刚架处于无弯矩状态示例

中给出了求解过程的有关图形，由于柔度矩阵可逆，广义荷载位移矩阵为零，因此基本未知量均为零，结构处于无弯矩状态。需要再次强调指出的是，**无弯矩状态判别的前提条件是不计轴向变形，只受结点荷载作用**。

在图 4－17 示例的基础上，下面给出无弯矩状态的判别方法：

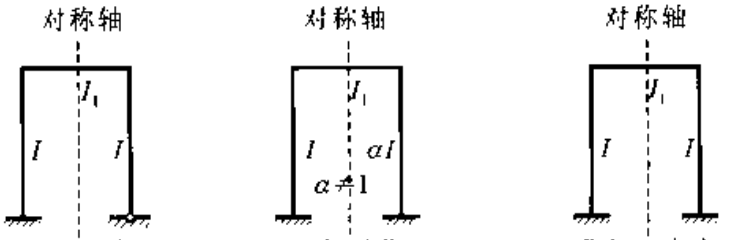
● 将刚架的刚结点都变成铰结点，所得铰结体系如果几何不变，则此刚架在结点荷载作用下一定是无弯矩的，如图 4－17（Ⅰ）所示。

● 将刚架的刚结点都变成铰结点，所得铰结体系如果几何可变，则附加必要链杆使体系达到几何不变。在结构荷载作用下，求解附加链杆所受的轴力。如果全部附加链杆均不受力，则原结构在所给结点荷载作用下一定是无弯矩的。否则，当有任一附加链杆轴力不为零时，结构将是有弯矩的，如图 4－17（Ⅱ）所示。

4－3－2　对称性利用

在静定结构受力分析中已经指出，对称结构利用对称性可以简化分析工作量。但是，静定结构仅仅用静力平衡条件即可求得全部反力和内力，而对超静定结构，由力法求解思路可知，除平衡条件外，还必须计算位移，考虑变形协调条件。因此，对结构的对称条件必须加以补充。

对超静定结构来说，如果杆件、支座和刚度分布均对称于某一直线，则称此直线为对称轴，此结构为对称结构。如图 4－18 所示，杆件、支座和刚度三者之一有任一个不满足对称条件时，就不能称为对称结构。



(a) 非对称结构　　(b) 对称结构

图 4－18　何谓对称结构

根据对称结构定义，与静定结构一样，如果荷载对称或反对称作用于对称轴，则可利用对称性使计算得到简化。即使受任意荷载作用，也可将荷载分解成对称和反对称两组，分别利用对称性计算后，叠加所得结果即可得到问题解答，这样做往往仍比直接求解简单（注意：此结论不一定适用任意情况，有一些问题可能直接求解更简单）。

对称结构受对称或反对称荷载作用时，可取半结构进行计算。为了说明如何利用对称性取半个结构进行分析，如图 4－19 所示可将超静定结构分为奇数跨和偶数跨两类。在此基础上，用图 4－20 和图 4－21 给出了对称结构取半结构分析时的计算简图。**需要强调的是，图中荷载应该理解为广义荷载，它可以是荷载、支座移动、温度改变，等等。**

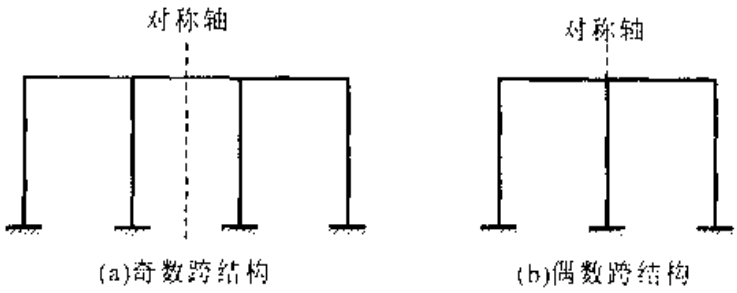


图 4－19　对称结构分类

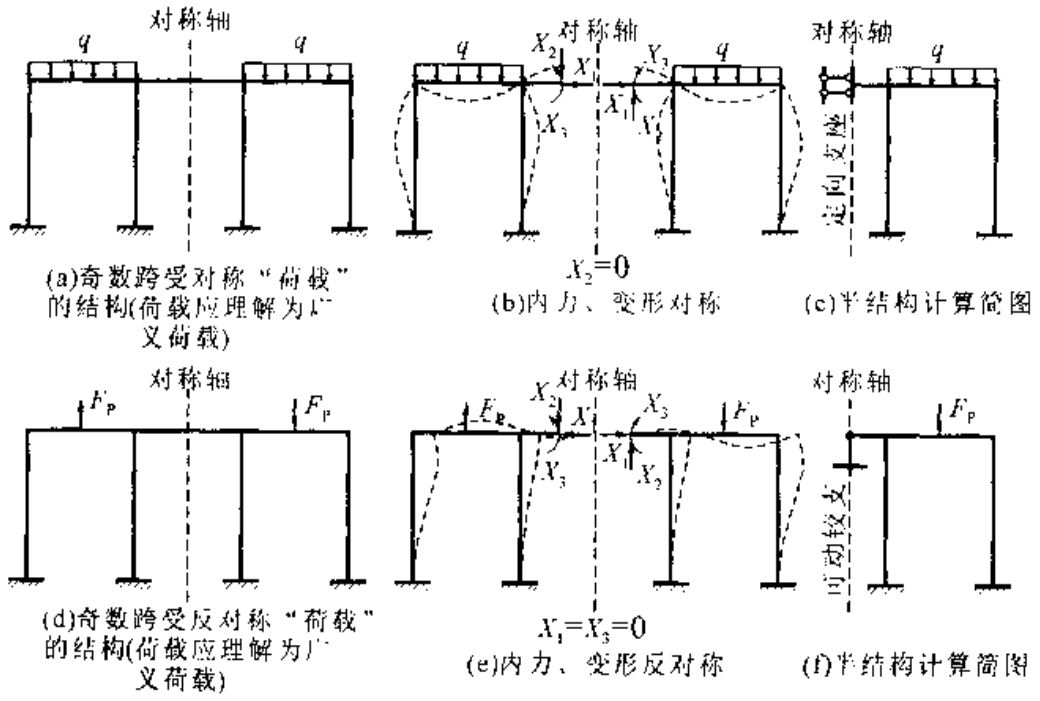


图 4－20　奇数跨对称结构取半结构计算简图

为了更好地理解和掌握利用对称性建立取半结构计算简图，请读者自行根据图示说明，用语言来表达上述图示四种情况的内力特点和计算简图的确定方法。

下面用一个典型例子说明对称性带来的简化。

［**例题 4－11**］　试作图 4－22a 所示对称、三次超静定结构的弯矩图。

解：图 4－22a 所示结构对称，但荷载不对称。为此，如图 4－22b 将荷

载分解成两组，对称组经判断为无弯矩状态，反对称组可取图 4－22c 简图进行分析。

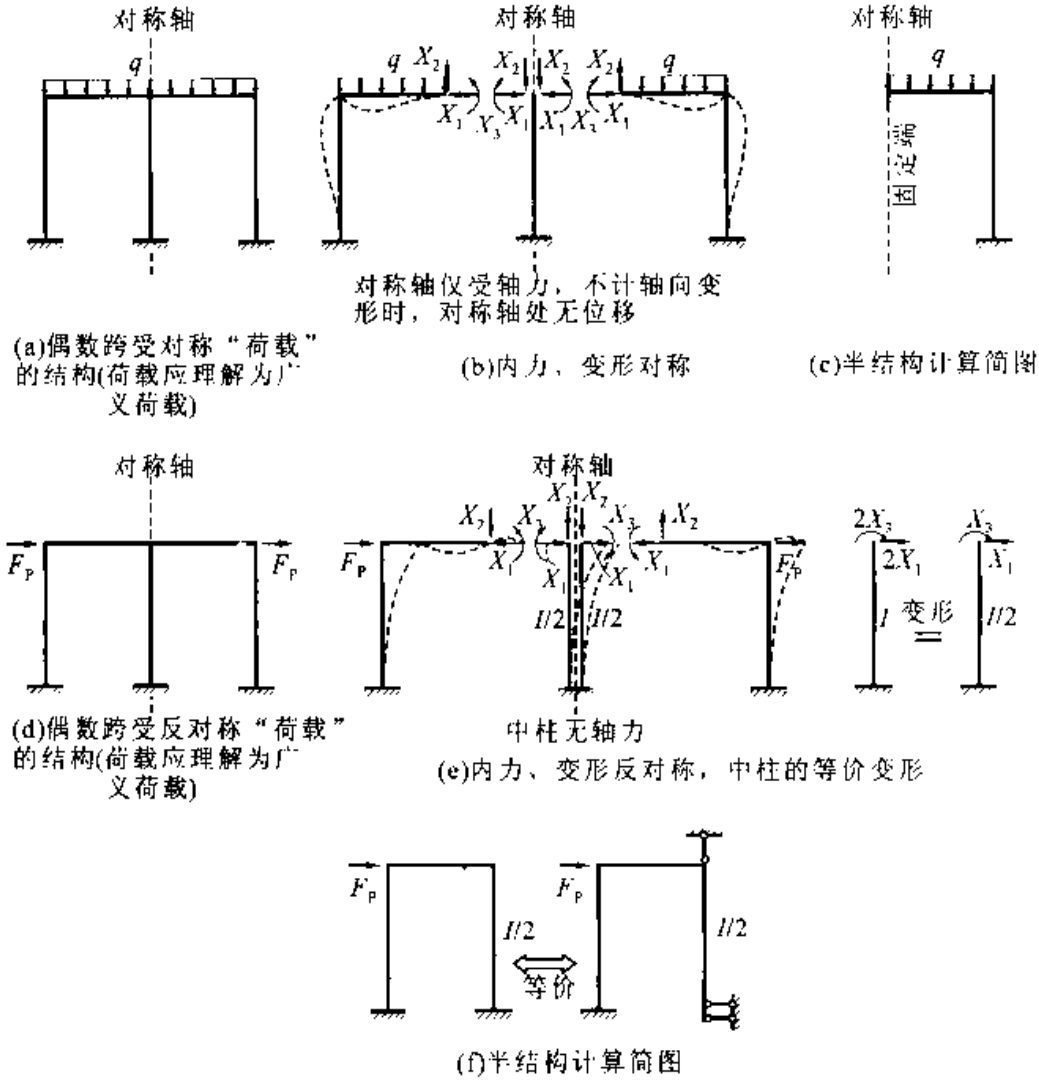


图 4－21　偶数跨对称结构取半结构计算简图

图 4－22c 简图仍是对称结构任意荷载作用情况，可再次如图 4－22d 将荷载分解，从而得图 4－22e 半结构计算简图。这是一个静定刚架，可得图 4－22f所示弯矩图。然后，再根据图 4－22g 和图 4－22h，即可作出原结构的最终弯矩图。

由上述例子可见，熟练掌握对称性利用，对求解对称结构是非常有用的。

4-3-3　其他简化措施

除对称结构可用对称性简化计算外，还有许多方法可使尽可能多的副系数 $\delta_{ij}=0$，下面仅以图示例子对两种方法加以简单说明。有兴趣的读者，

可参考龙驭球、包世华主编,《结构力学》,上册,高等教育出版社出版,1994年。

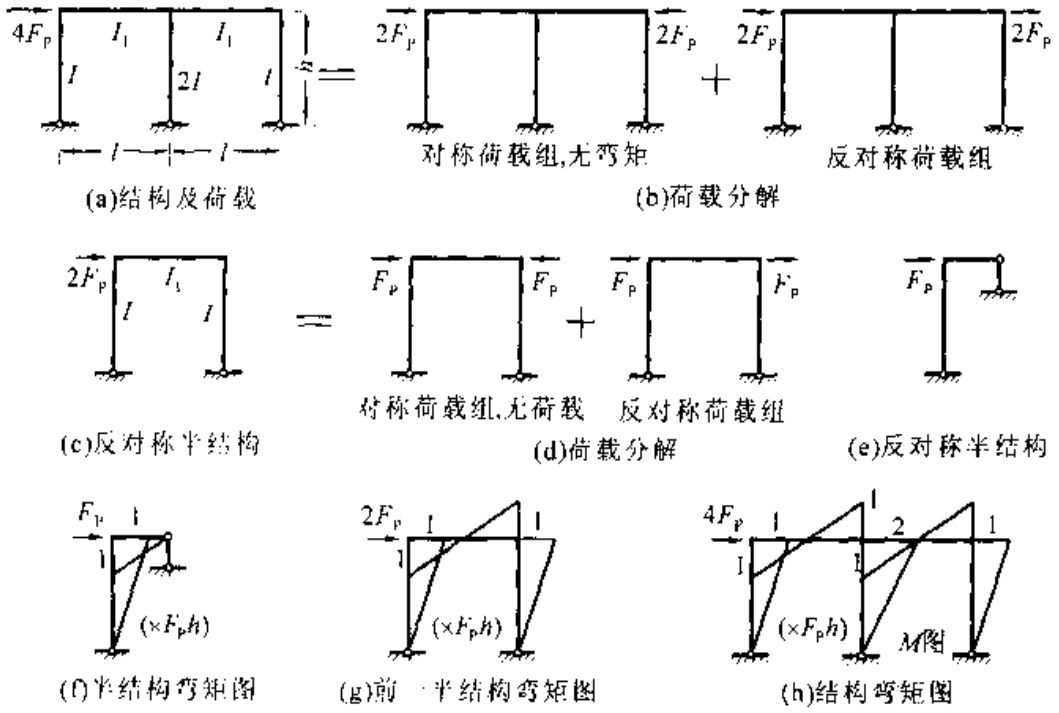


图4-22 对称性利用求解示意

● **成组广义未知力**

一些对称多层刚架结构在侧向(水平)荷载作用下,可以简化成图4-23a所示的"半刚架"结构。采用图4-23b所示的成组广义未知力,可使单位弯矩图只局限在小的范围内,从而根据图乘法可看出,位移系数 $\delta_{13}=\cdots=$

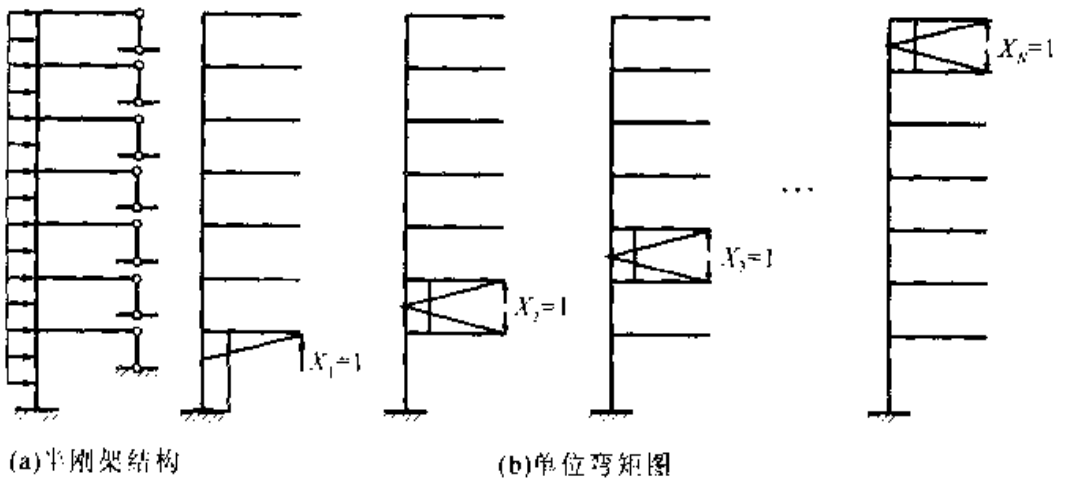
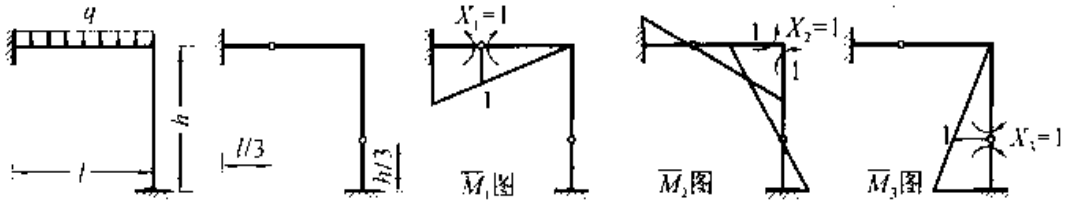


图4-23 利用成组广义未知力使尽可能多的副系数 $\delta_{ij}=0$

$\delta_{1N}=\cdots=\delta_{N-2,N}=0$。这样，尽可能实现较多的副系数 $\delta_{ij}=0$。

● **适当加铰**

图 4-24a 所示刚架结构，取图 4-24b 为基本结构，由图 4-24c 单位弯矩图和图乘法可见，能使全部副系数 $\delta_{ij}=0$。



(a)结构与荷载　(b)基本结构　(c)单位弯矩图

图 4-24　以适当加铰的基本结构来简化计算

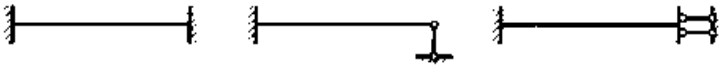
§4-4　位　移　法

前面介绍了力法求解超静定结构，本节将介绍另一种以位移作为基本未知量的手算方法——位移法。为减少基本未知量，这里隐含不考虑轴向变形这一假定。

4-4-1　位移法的基本工作

对图 4-25 所示单跨梁，类似力法例题 4-4 例题 4-6 那样进行求解，从而可建立表 4-1 所示杆端内力。需要指出的是，对于斜杆除表中所示弯矩、剪力外，还有轴力。

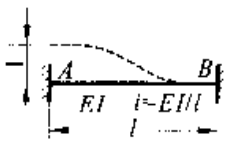
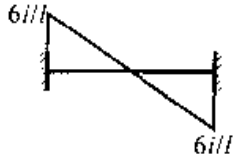
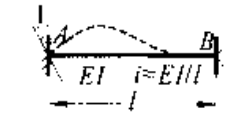
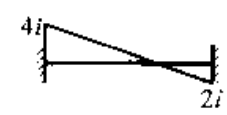
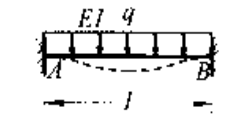
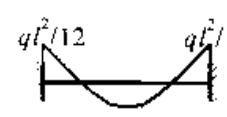
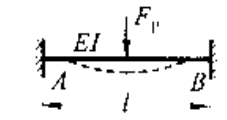
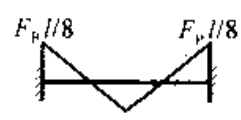
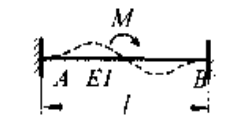
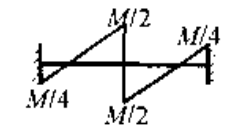
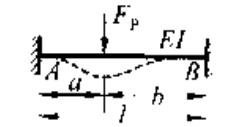
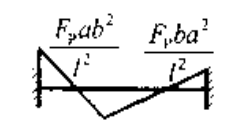
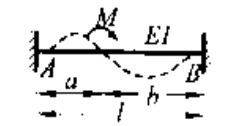
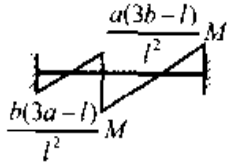
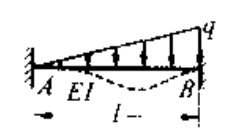
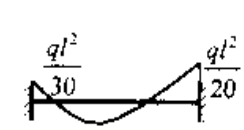
由位移引起的杆端内力称为**形常数**(shape constant)。由广义荷载产生的杆端内力称为**载常数**(load constant)，其中荷载产生的杆端内力称为固端内力。杆端内力的正、负符号如第 2 章规定。



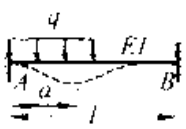
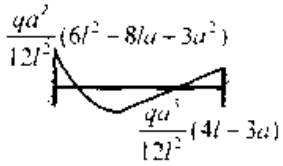
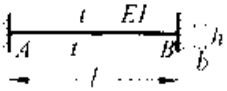
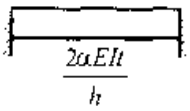
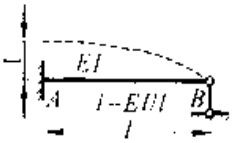
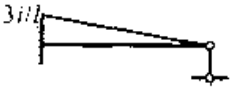
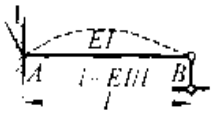
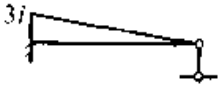
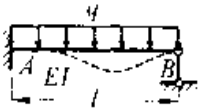
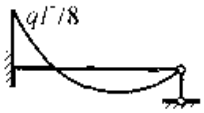
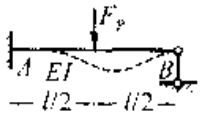
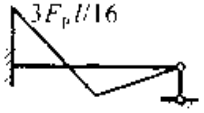
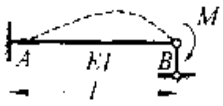
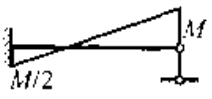
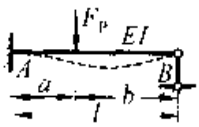
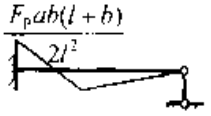
(a)两端固定梁　(b)一端固定一端铰支梁　(c)一端固定一端定向梁

图 4-25　位移法基本单跨梁示意图

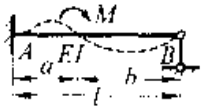
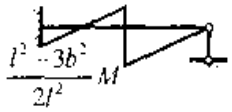
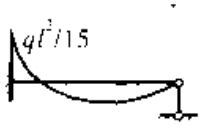
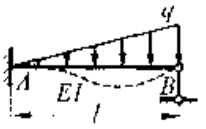
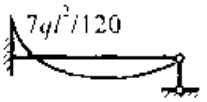
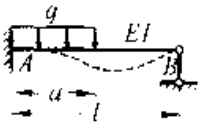
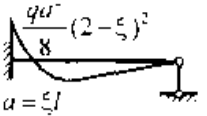
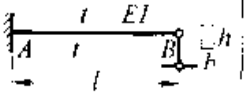
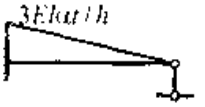
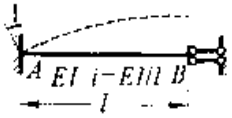
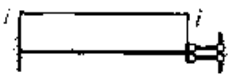
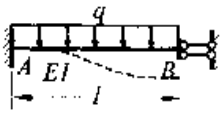
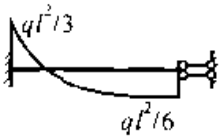
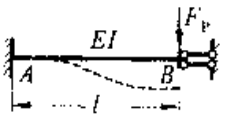
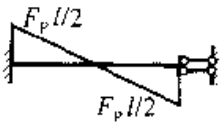
表 4－1 形常数和载常数表

序号	计算简图及挠度图	弯矩图	固端剪力	
			F_{QAB}	F_{QBA}
1			$\frac{12EI}{l^3}$	$\frac{12EI}{l^3}$
2			$\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{6EI}{l^2}$
3			$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
4			$\frac{F_P}{2}$	$-\frac{F_P}{2}$
5			$-\frac{3M}{2l}$	$-\frac{3M}{2l}$
6			$\frac{F_Pb^2(l+2a)}{l^3}$	$-\frac{F_Pa^2(l+2b)}{l^3}$
7			$M\frac{6ab}{l^3}$	$-M\frac{6ab}{l^3}$
8			$\frac{3}{20}ql$	$-\frac{7}{20}ql$

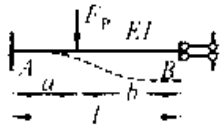
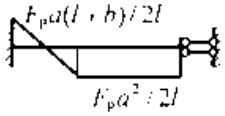
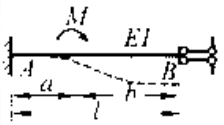
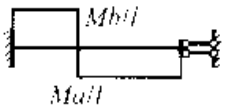
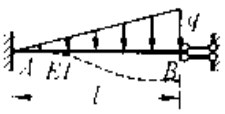
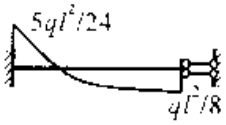
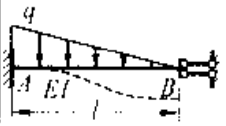
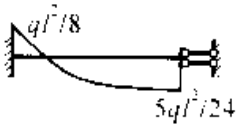
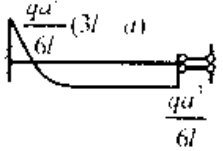
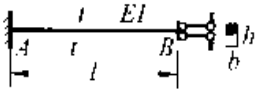
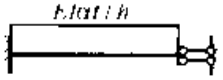
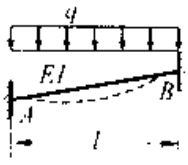
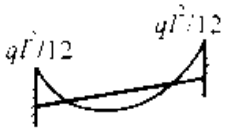
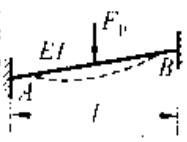
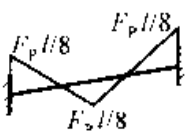
续表

序号	计算简图及挠度图	弯矩图	固端剪力 F_{QAB}	固端剪力 F_{QBA}
9			$\frac{qa}{2l^3}(2l^3-2la^2+a^3)$	$\frac{qa^3}{2l^3}(2l-a)$
10			0	0
11			$\frac{3EI}{l^3}$	$\frac{3EI}{l^3}$
12			$\frac{3EI}{l^3}$	$\frac{3EI}{l^3}$
13			$\frac{5ql}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$
14			$\frac{11F_p}{16}$	$\frac{5F_p}{16}$
15			$-\frac{3M}{2l}$	$\frac{3M}{2l}$
16			$\frac{F_pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$	$\frac{F_pa^2(2l-b)}{2l^3}$

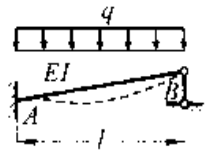
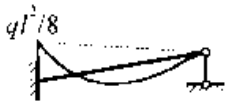
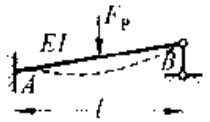
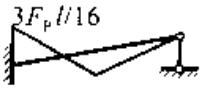
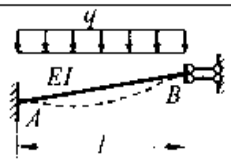
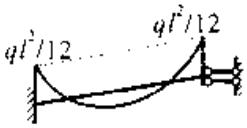
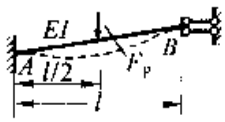
续表

序号	计算简图及挠度图	弯矩图	固端剪力	
			F_{QAB}	F_{QBA}
17			$-M\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}$	$M\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}$
18			$\frac{11ql}{40}$	$-\frac{9ql}{40}$
19			$\frac{9ql}{40}$	$-\frac{11ql}{40}$
20			$qa-\frac{q\xi^3}{8}(4l-a)$	$-\frac{q\xi^3}{8}(4l-a)$
21			$\frac{3EI\alpha}{hl}$	$\frac{3EI\alpha}{hl}$
22			0	0
23			ql	0
24			F_P	F_P

续表

序号	计算简图及挠度图	弯矩图	固端剪力 F_{QAB}	固端剪力 F_{QBA}
25			F_P	0
26			0	0
27			$\frac{ql}{2}$	0
28			$\frac{ql}{2}$	0
29			qa	0
30			0	0
31			$\frac{ql}{2}\cos\alpha$	$-\frac{ql}{2}\cos\alpha$
32			$\frac{F_P}{2}\cos\alpha$	$-\frac{F_P}{2}\cos\alpha$

续表

序号	计算简图及挠度图	弯矩图	固端剪力	
			F_{QAB}	F_{QBA}
33			$\frac{5ql}{8}\cos\alpha$	$-\frac{3ql}{8}\cos\alpha$
34			$\frac{11F_P}{16}\cos\alpha$	$-\frac{5F_P}{16}\cos\alpha$
35			$\frac{ql}{2}\cos\alpha$	$\frac{ql}{2}\cos\alpha$
36			$\frac{ql}{2}\cos\alpha$	$-\frac{ql}{2}\cos\alpha$

根据表 4-1，图 4-26 所示的两端固定单跨梁，可利用形、载常数和叠加原理可得杆端内力。例如 A 端杆端弯矩为

$$M_{AB}=\frac{6EI}{l^2}\Delta_1-\frac{4EI}{l}\Delta_2+\frac{6EI}{l^2}\Delta_3-\frac{2EI}{l}\Delta_4+M_{AB}^F \tag{a}$$

A 端杆端剪力为

$$F_{QAB}=\frac{12EI}{l^3}\Delta_1+\frac{6EI}{l^2}\Delta_2-\frac{12EI}{l^3}\Delta_3+\frac{6EI}{l^2}\Delta_4+F_{QAB}^F \tag{b}$$

式(a)和式(b)中 M_{AB}^F 和 F_{QAB}^F 为荷载引起的固端弯矩和固端剪力。同理，也可叠加得到 B 端的杆端内力 M_{BA} 和 F_{QBA}。这些将杆端位移和杆端内力联系一起的式子，称为**两端固定单跨梁的转角位移方程**(slope-deflection equation)或**刚度方程**(stiffness equation)。

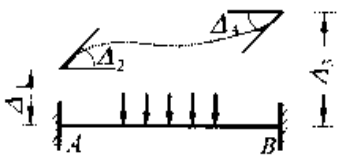


图 4-26 单跨梁杆段位移和荷载作用

根据形、载常数和叠加原理，也可建立一端固定一端铰支、一端固定一端定向单跨梁的转角位移方程。请读者考虑，能否不用叠加法，而从两端固定梁的转角位移方程来得到。

4-4-2 位移法思路

力法思路强调的是“转换”，当然位移法本质上仍然是将未知问题化为已知问题来解决，也存在转换的思想。但位移法的转换与力法不同，是“先化整为零，再集零为整”，或者称为“离散和归整”。具体处理有两种方法：平衡方程法和典型方程方法。

1. 平衡方程法

图 4－27a 所示为二次超静定结构。在不考虑轴向变形的情况下，只有 B 结点能产生转角位移，广义位移记为 Z。

从表 4－1(或转角位移方程)可以想到，如果以结点位移 Z 作基本未知量，先求出位移 Z，由于结点位移协调，也即得到了杆件 AB 和 CB(以后称为**单元** element)的杆端位移。然后，根据形常数和载常数，用叠加原理就可以得到结构的内力。

对一般结构，为实现这个想法，首先需要将待解的结构拆成图 4－25 所示三种单跨梁的集合。这一“离散”工作，可采用增加约束使结构不产生结点独立位移来实现。在图 4－27a 所示结构 B 结点加一个限制转动的约束，如图 4－27b 所示，使 AB 杆成为两端固定单元，CB 成为一端铰支一端固定单元。这个增加约束，除静定部分外，其每一根杆都可看成是表 4－1 中单跨梁的结构，称为位移法基本结构。独立的结点位移，称为位移法的基本未知量，广义位移记作 Z_i。

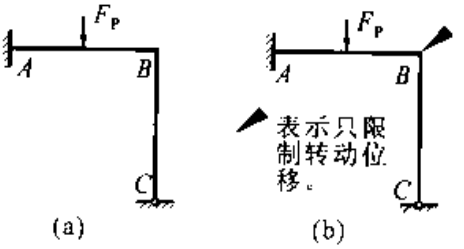


图 4－27　位移法思路

完成了“离散”(也称为“拆”)的过程，在保证结点产生协调的位移 Z_i 和单元荷载作用下，根据形常数和载常数可以得到各单元的受力，并求得杆端内力。对图 4－27b 所示结构 AB 单元 B 端杆端弯矩为 M_{BA}，BC 单元 B 端杆端弯矩为 M_{BC}。它们分别可表示为

$$M_{BA}=M_{BA}^{\Delta}+M_{BA}^{F},\quad M_{BC}=M_{BC}^{\Delta}+M_{BC}^{F}$$

其中，M^{Δ}、M^{F} 分别代表由结点位移、荷载所引起的杆端弯矩。

现在以结点或结构部分为对象，对图 4－27 所示结构取 B 结点，可以建立和各结点独立位移相应的广义力平衡条件。对图 4－27 所示结构也即令

$$M_{BA}+M_{BC}=M_{BA}^{\Delta}+M_{BC}^{\Delta}+M_{BA}^{F}+M_{BC}^{F}=0$$

由形常数(杆端弯矩正向规定是与广义位移正向相同为正)可得 $M_{BA}^{\Delta}+M_{BC}^{\Delta}=\left(\frac{4EI}{l}+\frac{3EI}{l}\right)Z$，从上式就可以求得位移 Z。同样，对一般结构，有多少独

立结点位移，就可以建立多少广义力平衡条件，这些方程称为位移法方程，由此就可以解决位移的计算。然后，就可以用转角位移方程求得各杆端内力，进而作出内力图。这就是位移法中平衡方程法解题的思路。

2. 典型方程法

平衡方程法力学概念非常清楚，但不能象力法那样以统一的形式给出位移法方程。为此讨论位移法第二种思路——典型方程法。

与力法一样，首先确定待分析问题位移法的结点独立位移未知量个数，对图 4-27 所示结构基本未知量只一个，即结点 B 的转角位移。然后加限制结点位移的相应约束，线位移加链杆，角位移加限制转动的刚臂，建立位移法基本结构。图 4-27a 的基本结构如图 4-27b。和平衡方程法一样，基本结构是一个可以拆成图 4-25 所示三类单跨梁的超静定结构。和力法一样受基本未知量和外因共同作用的基本结构，称为基本体系。

与力法一样，令基本结构分别产生单一的单位基本位移 $Z_i=1$，根据形常数可作出基本结构单位内力图（对刚架为单位弯矩图 $\overline{M}_i$）。根据载常数可作出基本结构荷载内力图（对刚架为荷载弯矩图 M_P）。对于图 4-27a 所示结构其两个弯矩图如图 4-28 所示。图中 i_{AB} 和 i_{BC} 分别为 $\frac{EI_{AB}}{l_{AB}}$ 和 $\frac{EI_{BC}}{l_{BC}}$，称为 AB 和 BC 杆的**线刚度**（line stiffness）。单位长度的抗弯刚度记作 $i=EI/l$。根据单位和荷载内力图，从单位内力图取结点或部分隔离体可计算 $Z_i=1$ 所引起的 Z_j 位移对应的附加约束上的反力系数 k_{ij}，从荷载内力图取结点或部分隔离体可计算 Z_i 位移对应的附加约束上的反力 R_{iP}。对于图 4-27a 所示结构，$k_{11}=4i_{AB}+3i_{BC}$，$R_{1P}=-M_{BA}^{F}$。

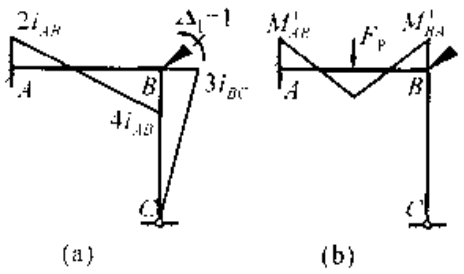


图 4-28 单位和荷载弯矩图

基本结构与原结构有两点区别：原结构在外因下是有结点位移的，而基本结构是无结点位移的；基本结构有附加的约束，而原结构是无附加约束的。基本体系是令基本结构发生原结构待求的位移 $Z_i(i=1,2,\cdots,n)$，同时受有外因作用，从结点位移方面看基本体系和原结构没有差别，但是由于待求位移 $Z_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和外因作用，第 i 个附加约束上将产生 $R_i=\sum_j k_{ij}Z_j+R_{iP}$ 的约束总反力，显然这是与原结构仍然不同的。为了消除这一差别，由于原结构没有附加约束，所以第 i 个附加约束上的总反力应该等于零，也即 $R_i=0$ 或

$$\sum_j k_{ij}Z_j + R_{i\mathrm{P}} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

对于图 4－27a 所示结构为$(4i_{AB} + 3i_{BC})Z - M_{AB}^{F} = 0$。式(4－2)称为**位移法典型方程**，与力法一样对线弹性结构是线性代数方程组。求解后即可得到基本未知量 $Z_i(i = 1,2,\cdots,n)$，求得位移基本未知量以后，与力法相仿，由 $M = \sum_j M_j Z_j + M_{\mathrm{P}}$ 进行叠加，可以得到基本体系也即原结构的弯矩(内力)，进而可求超静定结构的任意位移，等等。

综上所述，典型方程位移法与力法的思路是十分相象的，对照力法，位移法典型方程也可用矩阵方程表示

$$\boldsymbol{K\Delta} + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0} \tag{4-2}$$

式中，$\boldsymbol{K}$ 是由反力系数 k_{ij} 组成的方阵，称为**结构刚度矩阵**。**反力系数** k_{ij} 的物理意义是：由单位位移 $Z_j = 1$ 引起的，在与 Z_i 对应的约束上沿 Z_i 方向所产生的反力。或者理解为：仅产生单位位移 $Z_j = 1$ 时，在 Z_i 处沿 Z_i 方向所需施加的力。k_{ij} 也称为刚度系数，k_{ii} 称为主系数，k_{ij} 称为副系数。由形常数可知，要产生位移必须要加力，因此主系数一定恒正。由反力互等定理可知，$k_{ij} = k_{ji}$，因此 $\boldsymbol{K}$ 为对称矩阵。$\boldsymbol{\Delta}$ 为由 Z_i 组成的**未知位移矩阵**，$\boldsymbol{R}$ 为由 $R_{i\mathrm{P}}$ 组成的**广义荷载反力矩阵**，$R_{i\mathrm{P}}$ 称为**广义荷载反力**。

本书下面主要讨论典型方程法。

4－4－1　位移法基本未知量及基本结构

结构的结点位移分两类：线位移和角位移，位移法基本未知量是结点的独立位移，未知量总数应该是独立线位移和独立角位移的和，记作 n。确定未知量总的原则是：**在原结构的结点上逐渐加约束，直到能将结构拆成具有已知形常数和载常数的单跨梁为止**。因为单跨梁有多种，如果考虑由力法计算结果来增加表 4－1 单跨梁类型，则可知位移法基本未知量数量是很灵活的。从人工手算角度，当然是未知量个数最少的方案最好。

对于手算，独立角位移个数 n_{a} 等于位移未知的刚结点个数，独立线位移数 n_{l} 等于变刚结点为铰后，使铰结体系几何不变所要加的最少链杆数(铰结体系几何不变，线位移数为零)。需要指出的是，如果待求结构中有静定部分，由于静定部分内力可用平衡方程直接获得，不需要用位移法求解，因此其位移不必作为位移法基本未知量。

确定了独立位移未知量，在结点上加约束消除独立位移，即得基本结构。对应线位移加支座链杆，对应角位移加限制转动的刚臂，确定位移法基本未知量的例子如图 4－29 所示。图 4－29a 有静定部分；确定位移法基本

未知量时可不考虑，因此 $n=2$。图 4-29b 用计算自由度分析铰结体系可变性，从而确定线位移个数，因此 $n=8$。图 4 29c 中 DE 杆部分弯矩和剪力是静定的，因此确定位移未知量时可等效变换成第二个图所示结构后再分析，所以 $n=2$。图 4-29d 中有弹性支座，由于没有带弹性支座的单跨梁形、

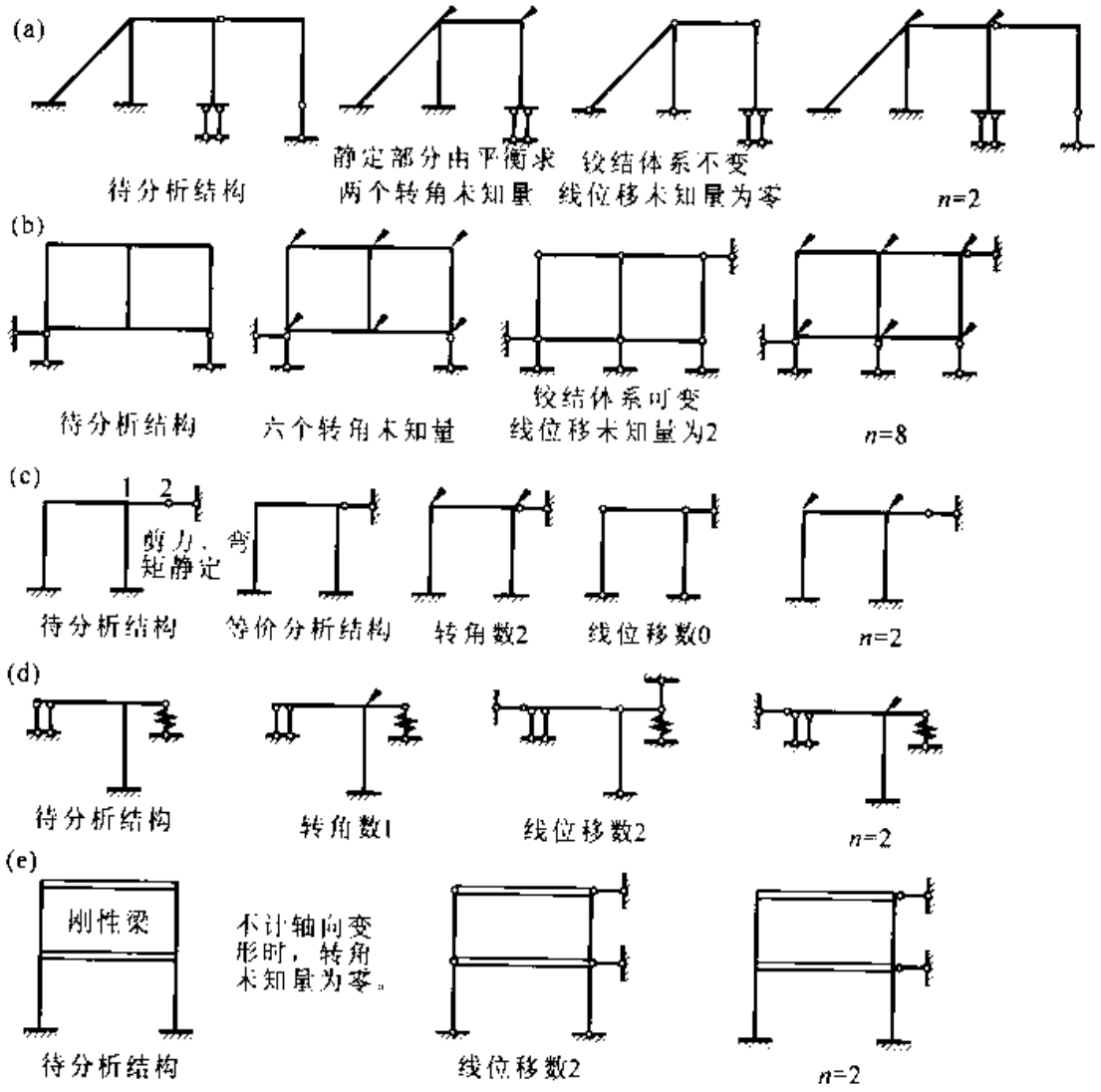


图 4-29 位移法基本未知量确定和对应基本结构

载常数，或者说弹性支座处线位移是未知的，所以 $n=3$。图 4-29e 中有无限刚性的梁，在不考虑轴向变形的条件下刚性梁不可能转动，所以 $n=2$。

4-4-4 典型方程位移法解题步骤

从典型方程法思路介绍可知，典型方程位移法的求解步骤和力法一一对应。

(1) 确定位移法基本未知量及基本结构

需要指出的是，待分析结构有静定部分或弯矩、剪力静定时，确定位移

法基本未知量不考虑它；弹性支座处的位移要作为未知量考虑；竖柱刚架有无限刚性梁时，刚性梁处刚结点无转角未知位移。

(2) 作基本结构单位未知位移和荷载内力图

由于基本结构可拆成已知受力特性的单元，因此由形常数、载常数即可作出这些图形。由此可见，熟记形常数和一些常见荷载的载常数，对位移法求解来说是十分重要的。

(3) 求基本结构由各单位位移所引起的沿单位位移方向的反力 k_{ij}

如果 Z_i 对应的约束是刚臂，则 k_{ij} 由 $\overline{M}_j$ 图取刚臂结点用结点力矩平衡计算。如果 Z_i 和 Z_j 对应的约束中有一个是刚臂，根据反力互等定理 $k_{ij}=k_{ji}$，仍可以结点为对象考虑力矩平衡来计算。如果 Z_i 和 Z_j 对应的约束都是链杆，则 k_{ij} 由 $\overline{M}_j$ 图取部分隔离体考虑平衡来计算(具体计算见下面的例题)。

(4) 求基本结构外因引起的沿单位位移($Z_i=1$)方向的约束反力 R_{ip}

这可由外因内力图来求，计算原则与求 k_{ij} 相同。

(5) 建立位移法典型方程并求解

基本结构在未知位移和外因共同作用下，应该和无附加约束的原结构一样处于平衡状态。因此，根据平衡条件基本体系所产生的未知位移方向约束总反力等于零，由此即可列出线性代数方程组。也即

$$\sum_j k_{ij}Z_j+R_{ip}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \quad \text{或} \quad \boldsymbol{K\Delta}+\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0} \qquad (4\text{-}3)$$

用消去法解线性代数方程组，即可获得基本未知位移。当然，未知位移个数超过三个时手算是很繁的，需要用计算机来求解。

(6) 作超静定结构内力图和求超静定结构位移等

根据叠加原理，在求得未知位移后，由单位内力和荷载内力叠加即可得到超静定结构内力，依此可作内力图(受弯结构和静定结构一样，按弯矩、剪力、轴力的顺序来作)。求非结点位移等其他计算内容，与力法一样，这里从略了。

(7) 校核分析结果

由于单位内力是在位移协调前提下作出的，而求荷载内力时根本没有独立结点位移，因此位移协调条件自动满足。所以，位移法的校核主要是看平衡条件是否满足。

上述位移法求解步骤也适用于一切结构、一切外因作用。下面举一些典型例子说明如何用位移法作结构分析。

4-4-5 位移法解超静定结构举例

需要再次说明的是，单位基本未知位移方向可任意设，本书为了与矩阵位移法和结构计算机分析篇一致，设结点和杆端水平位移向右为正，竖向位移向上为正，转角逆时针为正。不管位移正向如何规定，刚度系数和广义荷载反力的正向设定必须与位移正向规定的一致。

[例题 4-12] 试求作图 4-30a 所示无侧移刚架的弯矩图。

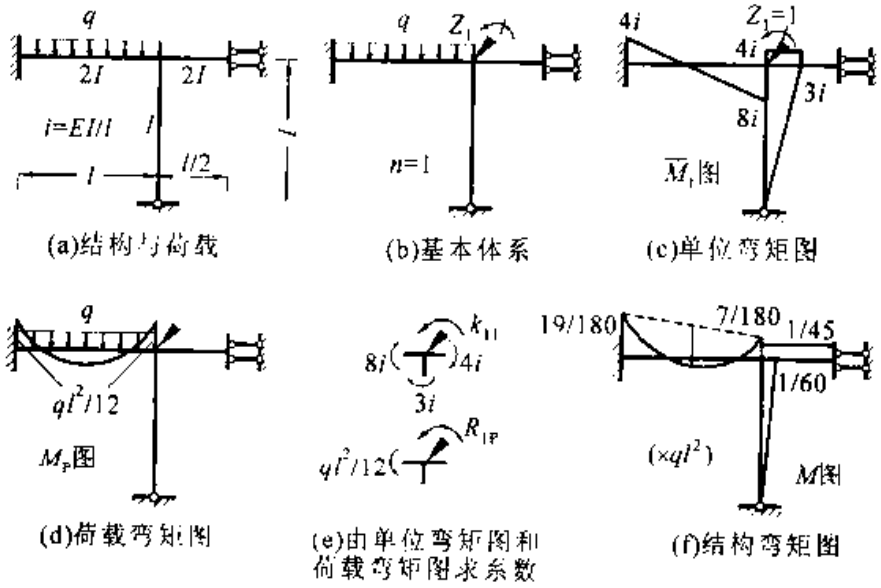


图 4-30 例题 4-12 图(结构和求解过程)

解：(1) 按位移法基本未知量确定方法，$n = n_\varphi + n_\Delta = 1 + 0 = 1$，因此基本结构如图 4-30b。

(2) 设刚结点角位移为 Z_1，令其产生单位位移，则由形常数可作出单位弯矩图 $\overline{M}_1$ 如图 4-30c。

(3) 根据载常数可作出基本结构荷载弯矩图 M_P 如图 4-30d。

(4) 由刚结点的力矩平衡，从 $\overline{M}_1$ 可求得刚度系数 $k_{11} = 15i$。从 M_P 可求得广义荷载反力系数 $R_{1P} = -ql^2/12$。其计算过程如图 4-30e 所示。

(5) 根据约束总反力为零，即位移法典型方程 $k_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$。代入系数并求解，可得 $Z_1 = ql^2/180i$。

(6) 由 $M = \overline{M}_1 Z_1 + M_P$ 进行叠加，可得图 4-30f 所示的结构最终弯矩图。

(7) 取刚结点显然 $\Sigma M = 0$，也即满足平衡条件，说明结果是正确的。

[例题 4-13] 试求作图 4-31a 所示有侧移刚架的弯矩图。

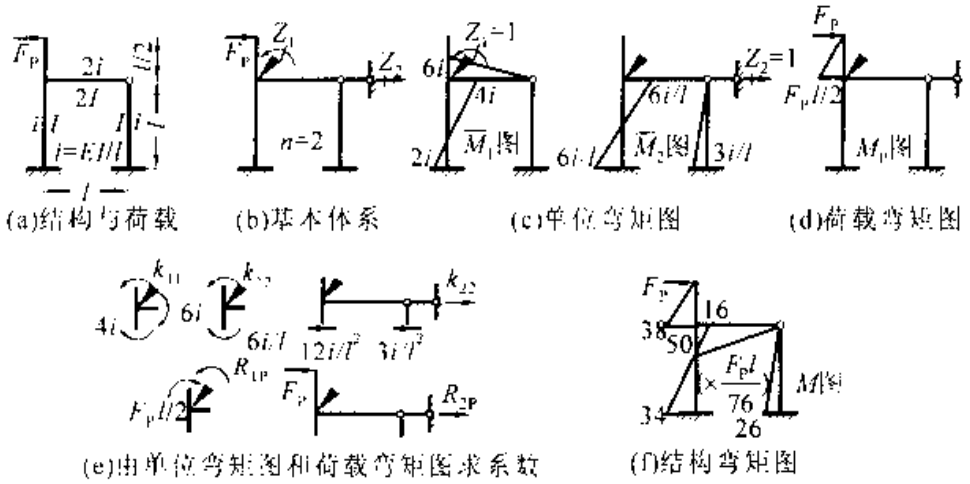


图 4－31　例题 4－13 图(结构及求解过程)

解：(1) 按位移法基本未知量确定方法，$n = n_s + n_l = 1 + 1 = 2$，因此基本结构如图 4－31b。

(2) 设刚结点角位移为 Z_1，独立线位移为 Z_2。令其分别产生单位位移，则由形常数可作出单位弯矩图 $\bar{M}_1$ 和 $\bar{M}_2$ 如图 4－31c。

(3) 荷载作用下悬臂部分弯矩图按静定结构作出，因此基本结构荷载弯矩图 M_P 如图 4－31d。

(4) 由刚结点的力矩平衡，从 $\bar{M}_1$ 可求得刚度系数 $k_{11} = 10i$，从 $\bar{M}_2$ 可求得刚度系数 $k_{12} = k_{21} = 6i/l$。

从 $\bar{M}_2$ 图取柱子为隔离体，由弯矩求出剪力。然后再如图 e 取隔离体列 $\Sigma F_x = 0$，可求得刚度系数 $k_{22} = 15i/l^2$。

同理，从 M_P 可求得广义荷载反力系数 $R_{1P} = F_P l/2$，$R_{2P} = -F_P$。其计算过程如图 4－31e。

(5) 根据约束总反力为零，可得位移法方程：

$$k_{11}Z_1 + k_{12}Z_2 + R_{1P} = 0, \quad k_{21}Z_1 + k_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

代入系数并求解，可得

$$Z_1 = -9F_P l/76i, \quad Z_2 = 13F_P l^2/114i$$

(6) 由 $M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_P$ 进行叠加，即可作出图 4－31f 所示的结构最终弯矩图。

(7) 取刚结点显然 $\Sigma M = 0$，也即满足平衡条件。从最终弯矩图求柱子杆端剪力，与求 k_{22} 或 R_{2P} 一样取隔离体，可验证 $\Sigma F_x = 0$。因此，本例结果是正确的。

说明：

根据反力互等，刚度系数 $k_{12}=k_{21}$。因此，可从 $\overline{M}_2$ 求 k_{12}，也可从 M_1 求 k_{21}。显然，取隔离体求支杆反力 k_{21} 的工作量，比取刚结点求限制转动的约束（刚臂）反力的工作量大。因此，对有侧移刚架来说，除侧移引起的限制侧移的链杆反力外，都应该设法由结点的力矩平衡来求。此外，静定部分的弯矩应由静定结构分析所求得。

[**例题 4-14**] 试求图 4-32a 所示排架的杆端剪力。

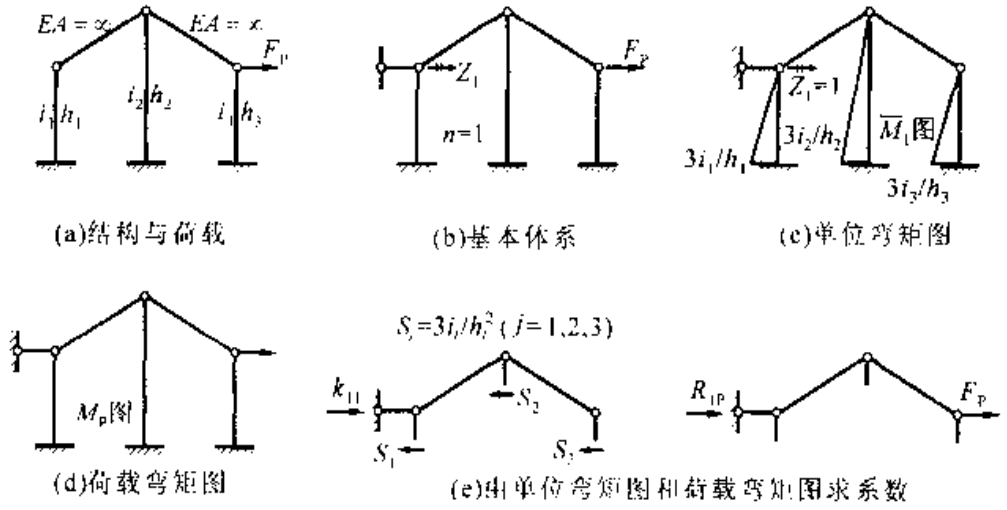


图 4-32 例题 4-14 图（结构及求解过程）

解：（1）此排架无刚结点，三柱平行，柱顶各结点水平位移相同，故位移法基本未知量 $n=n_a+n_l=0+1=1$，取基本结构如图 4-32b 所示。

（2）设结点线位移为 Z_1，令其产生单位位移，则由形常数可作出单位弯矩图 $\overline{M}_1$ 如图 4-32c。由于荷载作用在铰结点，因此基本结构荷载作用无弯矩，故 M_P 如图 4-32c。

（3）如图 $\overline{M}_1$ 所示，由各柱子弯矩可求得剪力，记柱顶剪力为 $S_j=\dfrac{3i_j}{h_j^2}(j=1,2,3)$，也即柱端单位位移所需施加的力，称为柱子的**侧移刚度**，由隔离体列方程 $\Sigma F_x=0$，可求得刚度系数 $k_{11}=\sum_j S_j=\sum_j \dfrac{3i_j}{h_j^2}$。由 M_P 取隔离体列方程 $\Sigma F_x=0$，可得 $R_{1P}=-F_P$。

（4）根据约束总反力为零，可得位移法典型方程 $k_{11}Z_1+R_{1P}=0$。代入系数并求解，可得 $Z_1=\dfrac{F_P}{\sum_j S_j}$。

(6) 由 $M=\overline{M}_1 Z_1$，可得排架最终弯矩图，并可求出柱顶剪力为 $S_j Z_1=\dfrac{S_j}{\sum_j S_j}F_p$。若记 $\mu_j=\dfrac{S_j}{\sum_j S_j}$，称为**剪力分配系数**，则各柱顶剪力为 $\mu_j F_p$。这表明，当仅在柱顶承受水平荷载时，柱顶剪力是按各柱子的侧移刚度来分配的。剪力分配系数的分母等于各柱侧移刚度总和，分子为各柱侧移刚度。有了这结论，今后类似的排架计算就可不必按位移法逐步进行计算，只要首先确定各柱的侧移刚度，进而计算剪力分配系数，然后分配得到各柱柱顶剪力，分别乘以柱高即可获得柱底弯矩，从而作出弯矩图。

说明：

上例第 6. 点所述的方法称为**剪力分配法**。但请注意，上例推导是有条件的：即两端铰结梁的抗拉刚度无限大、仅在柱顶作用水平荷载和仅有一个线位移未知量。当这些条件不满足时，剪力分配法不适用，仍需按一般位移法求解。

[**例题 4－15**]　试分析图 4－33a 所示结构，给出计算工作量最少的解法。

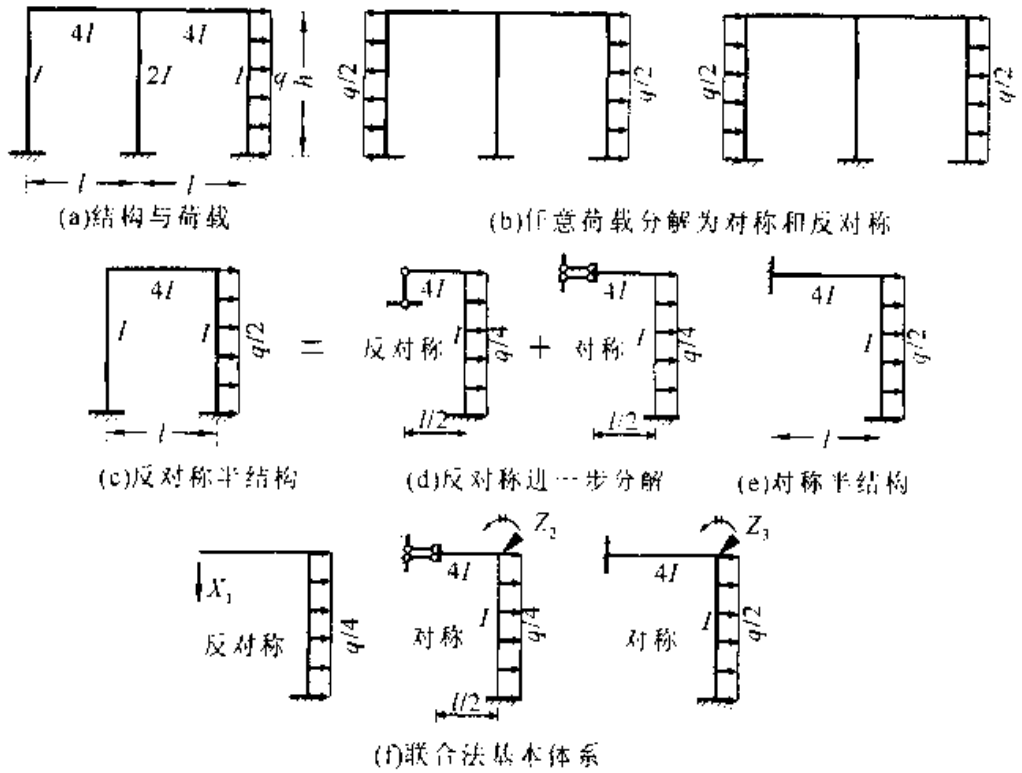


图 4－33　联合法求解示意

解：图 4－33a 为一对称结构受任意荷载作用，如图 4－33b 将荷载进行对称、反对称分解，根据 4－3－2 小节所介绍的取半结构分析方法，可得图 4－33c、e 所示反对称和对称荷载作用时的半结构。由于图 4－33c 仍然是对

称结构任意荷载，因此可作进一步荷载分解并利用对称性。最终可得图 4－33d 所示的两个四分之一结构计算。

从图 4－33d 和图 4－33e 所示力法、位移法基本未知量个数可知，单纯用力法或位移法求解的总未知量个数分别为 6 和 4。如果采取不同计算简图用不同方法求解，也即用图 4－33f 所示基本体系来求解，则只要求解 3 次单个未知量问题即可，显然这时工作量是最少的。

上述这种在求解同一个问题时，联合应用力法、位移法来求解的方法，称为**联合法**。

说明：用联合法求解对称结构时，每个半结构计算简图的求解是很方便的，但从半结构的结果，利用对称性和进行叠加时必须细心，否则将前功尽弃。建议读者作为练习自行完成此例的计算并作出最终弯矩图。

［**例题 4－16**］ 试求作图 4－34a 所示连续梁由于支座位移引起的弯矩图。

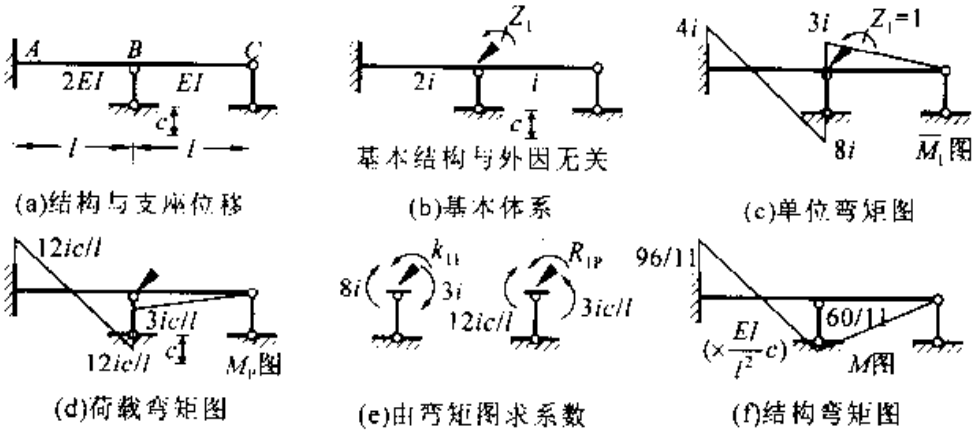


图 4－34 用位移法计算支座位移问题

解：支座位移是一种广义荷载，位移法基本结构和荷载没有关系，因此只有一个角位移基本未知量，基本结构如图 4－34b 所示。

明确了基本结构，则基本结构由于单位位移和广义荷载（支座位移）引起的弯矩图，可利用形常数作出。结果如图 4－34c 所示。

有了单位和荷载弯矩图，则由刚结点的平衡条件可得

$$k_{11}=11i,\quad R_{1\Delta}=\frac{9i}{l}c$$

代入位移法典型方程，并求解后可得

$$Z_1=-\frac{9c}{11l}$$

经叠加可得图 4－34d 所示的最终弯矩图。

说明：

请读者考虑，取左端固定，$2l$ 长、顶端受单位力作用的悬臂梁为单位力状态，将单位弯矩图和图 4－34d 所示的最终弯矩图相乘结果为什么不等于零？是求解过程中出错了吗？对于广义荷载引起的超静定结构位移计算，应该注意什么问题？

[**例题 4－17**]　试分析图 4－35a 所示刚架由于温度改变引起的弯矩图。

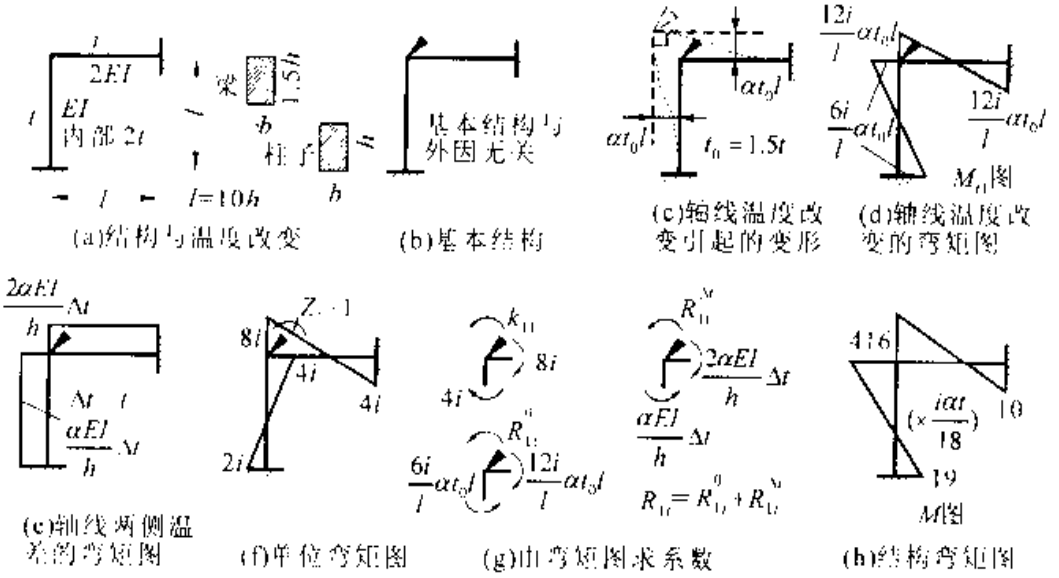


图 4－35　用位移法计算温度改变问题

解：同支座位移情况相同，基本结构与外因无关，如图 4－35b 所示，这里注意所加刚臂只限制转动不限制线位移。

众所周知，温度改变将产生热胀冷缩。对于本例由于杆轴线温度改变 $t_0=1.5t$，因此基本结构将产生图 4－35c 所示的结点线位移。从而根据形常数可作出图 4－35d 所示的轴线温度改变弯矩图，记作 M_{t_0}。由于本例还有两侧温差 $\Delta t=t$，查表 4－1 载常数可作出图 4－35e 所示的温差弯矩图，记作 $M_{\Delta t}$。

按常规由形常数可作出单位弯矩图如图 4－35f，有了它们，如图 4－35g 由刚结点力矩平衡可得

$$k_{11}=12i,\quad R_{1t}=R_{1t_0}+R_{1\Delta t}=37\alpha ti/3$$

代入位移法典型方程并求解，可得

$$Z_1=-37\alpha t/36$$

据此，由 $M=\bar{M}_1Z_1+M_{t_0}+M_{\Delta t}$ 进行叠加，可得图 4－35h 所示最终弯

矩图。

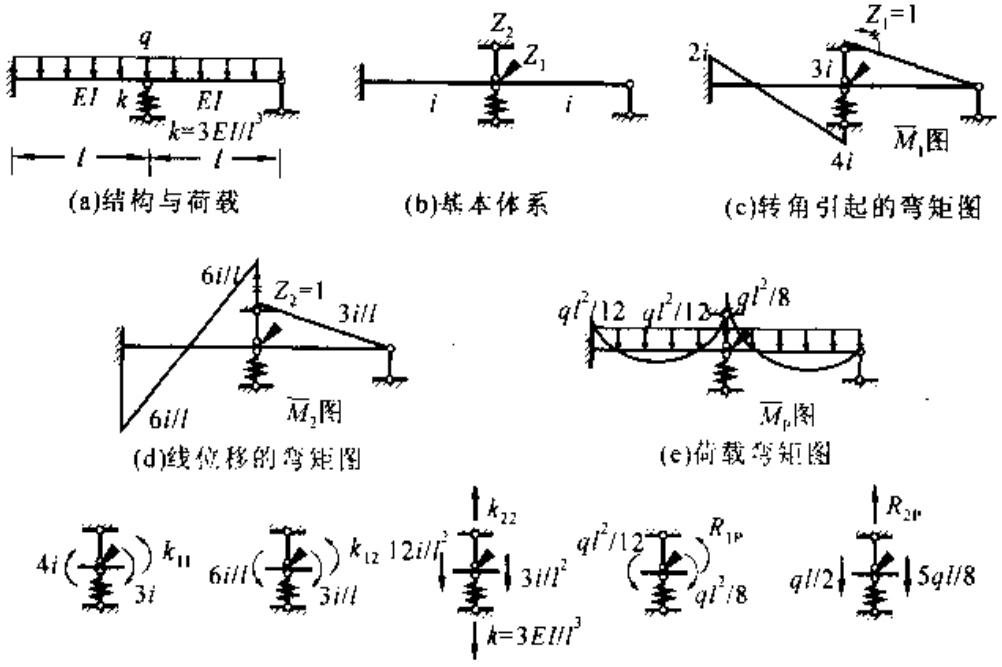
几点说明：

● 一般情况下温度引起的基本结构弯矩图(荷载弯矩图)由两部分构成：轴线温度改变产生杆件自由伸缩所引起；轴线两侧温差所引起。因此，首先要分析基本结构杆件自由伸缩所引起的结点位移。

● 位移法手算求解温度改变问题时，仍然遵循本节开始时的假定：不计轴向变形。但当有杆件轴线温度改变时，杆件的温度伸缩必须考虑。作计算机分析时，杆件的轴向变形是考虑的，将手算和计算机分析结果对比，二者的差别很小，手算结果完全满足工程需要。有条件的读者可用本书所附光盘上的程序作对比计算。

● 当计算广义荷载(温度、支座移动等)作用下超静定结构某指定位移时，与力法一样可化为静定结构位移计算问题来处理。但是，这时必须既考虑超静定内力引起的位移，还要考虑广义荷载引起的位移，应该用多因素位移计算公式(3-9)计算。

[**例题 4-18**] 试求图 4-36a 所示有弹性支座超静定梁的位移法刚度系数和荷载引起的反力。k 为弹性支座刚度系数，$k=3EI/l^3$。



(a)结构与荷载 (b)基本体系 (c)转角引起的弯矩图

(d)线位移的弯矩图 (e)荷载弯矩图

(f)由弯矩图求系数

图 4-36 具有弹性支座结构位移法计算

解：因为有一个刚结点，因此 $n_a=1$ 这是显然的。但本题跨中是弹性支座，在荷载作用下弹性支座要变形，因为是超静定结构，支座反力现在未知，

所以这个支座的位移也是未知的。由此可知 $n_1=1$。据此分析可得图 4－36b 所示基本体系。上述未知数确定也可按图示简要说明来理解。

得出基本结构后，其余的工作完全与前面的例子相仿，由图 4－36c 所示，即可求得全部系数如下：

$$k_{11}=7i,\quad k_{12}=k_{21}=-3i/l,\quad k_{22}=18i/l^2,\quad R_{1P}=ql^2/24$$

$$R_{2P}=9ql/8$$

两点说明：

● 任何具有弹性支座的问题都应该按此思路求解，也即在弹性支座处必须加限制位移的约束。

● 建议读者作为练习，自行完成本题余下的计算。

下面的例题在结构动力分析篇中常用，希望能熟练掌握求刚度系数的思想和方法。

［**例题 4－19**］ 试求图 4－37a 带刚性横梁刚架（称**剪切型刚架**）的刚度系数和荷载引起的反力。

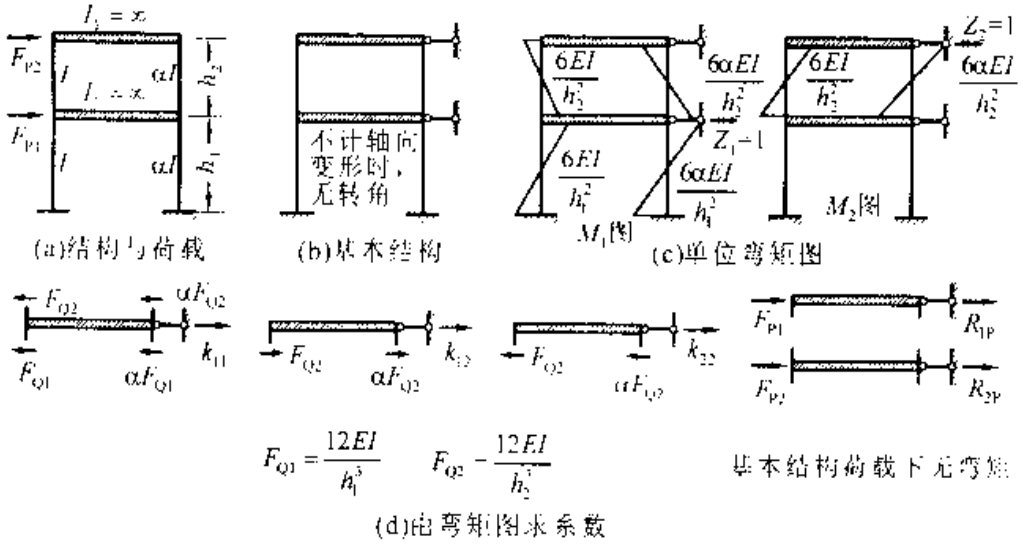


图 4－37　有刚性横梁的多层刚架刚度系数、荷载反力计算

解： 如图 4－37b 的简要说明，在不考虑轴向变形时横梁不可能转动，只有水平位移（称为侧移）。因此，这类结构 $n_a=0$，也即结构有多少层就有多少水平位移未知量，由此立即可得图 4－37b 所示的基本结构。

根据形常数即可得到图 4－37c 所示的单位弯矩图。因为本例所受的荷载作用在横梁上，所以没有荷载引起的弯矩图。

因为只有水平位移未知量，全部系数都是链杆反力，只能都取隔离体来求。为此，首先从弯矩图求杆端剪力，因为求系数时所列的是 $\Sigma F_x=0$，因此图 4－37d 没有画出杆端弯矩。根据这些图形即可得

$$k_{11}=(1+\alpha)\left(\frac{12EI}{h_1^3}+\frac{12EI}{h_2^3}\right),\quad k_{12}=k_{21}=-(1+\alpha)\frac{12EI}{h_2^3}$$

$$k_{22}=(1+\alpha)\frac{12EI}{h_2^3}$$

$$R_{1P}=-F_{P1},\quad R_{2P}=-F_{P2}$$

几点说明：

● 从刚度系数的求解可知，由于楼层单位位移只影响其相邻层产生链杆反力，因此 n 层结构，由刚度系数组成的结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 如下式所示，是"三对角"的。

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & \boldsymbol{0} & \\ & k_{32} & k_{33} & k_{34} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \boldsymbol{0} & & k_{n-1,n-2} & k_{n-1,n-1} & k_{n-1,n} \\ & & & & k_{n,n-1} & k_{nn} \end{bmatrix}$$

● 根据反力互等定理，结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 一定是对称的。

● 若把第 i 层柱顶产生单位层间相对侧移所需施加的力称为该**柱子的侧移刚度**，显然它等于单位层间相对侧移时柱内剪力。将同层柱子的侧移刚度之和称为**楼层的剪切刚度**，记作 k_i。则不难验证 $k_{ii}=k_i+k_{i+1}$，$k_{i,i+1}=-k_{i+1}=k_{i+1,i}$，$k_{nn}=k_n(i=1,2,\cdots,n)$。显然，根据这一规则建立刚度矩阵将更方便。

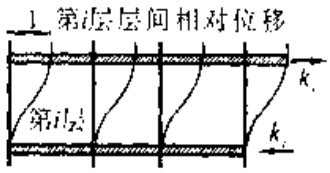


图 4-38 楼层侧移刚度

● 刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的逆矩阵即为柔度矩阵 $\boldsymbol{\Delta}$。对本例题，其元素 δ_{ij} 的物理意义是：在第 j 层单位水平力作用下，第 i 层所产生的位移。建议读者自行考虑 δ_{ij} 和楼层剪切刚度间的关系。

[**例题 4-20**] 试求图 4-39a 所示带斜杆刚架的位移法刚度系数和荷载引起的反力。

解： 图 4-39a 所示结构虽然横梁刚度无限大，但柱子不平行，横梁不仅能产生线位移，也可以产生转动，也即横梁作平面运动（绕图 4-39f 的 A 点瞬时转动）。在小变形情况下结点位移如图 4-39b、c 所示，独立的位移只有一个，因此可取图 4-39d 作为基本结构。

根据图 4-39c 所示位移，由形常数和载常数可作出单位弯矩图和荷载弯矩图如图 4-39e。由弯矩图对杆端取矩可求得杆端剪力，由此可取隔离

体如图 4－39f 所示。需要注意，作 M_1 图时，虽令 $Z_1=1$，但斜杆两端的相对位移为$\sqrt{2}$。同时由于横梁转动，两柱上端均由转角 $1/l$（图 4－39c）。

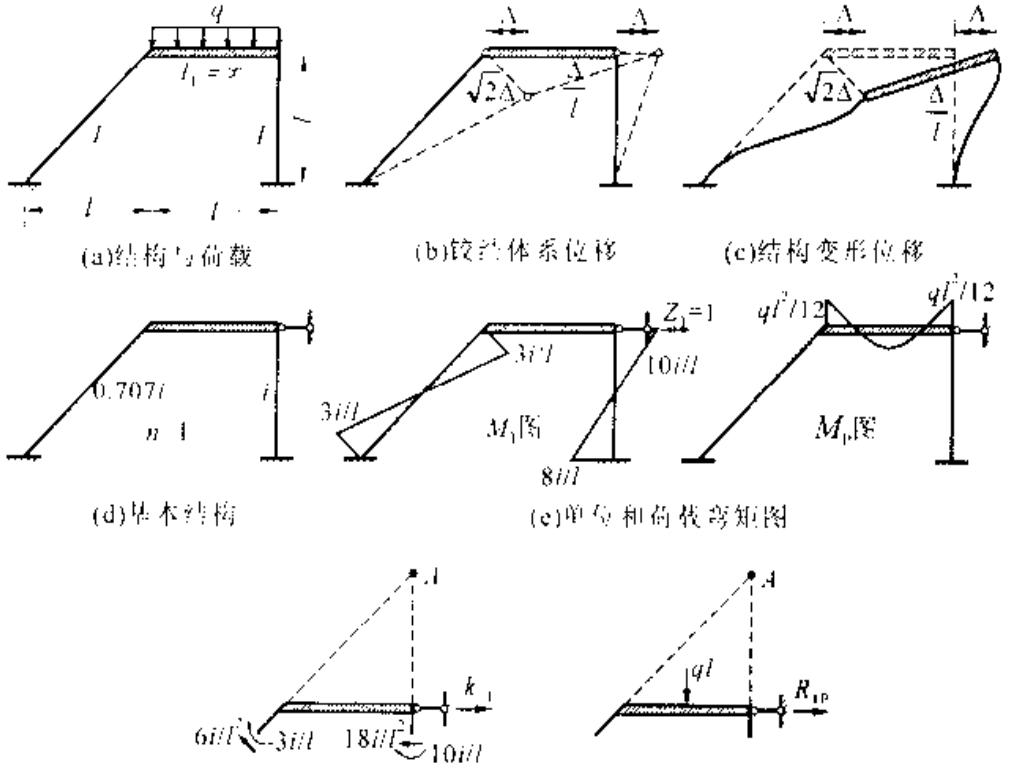


图 4－39　有斜杆的刚架系数计算

由于柱子还存在轴力，它是未知的，因此由 $\Sigma F_x=0$ 不可能求得附加支杆反力。为此，延长柱子轴线交于 A，对轴线交点取矩轴力不在方程里出现，也即利用 $\Sigma M_A=0$ 可求得刚度系数和荷载引起的反力为

$$k_{11}=\frac{(31+6\sqrt{2})i}{l^2},\quad R_{1P}=-\frac{ql}{2}$$

然后，列位移法典型方程可得未知位移，再利用单位弯矩乘未知位移和荷载弯矩叠加，可作出弯矩图，这些工作请读者自行完成。

两点说明：

● 例题 4－20 带斜杆且横梁无限刚性，因此只有一个未知量，但其求解的基本思想和方法也适用于无刚性梁的带斜杆刚架情形。由此例可见，带斜杆的刚架手算是比较繁的，利用结构计算机分析篇介绍的有限单元法用计算机求解，就与普通刚架一样方便。

● 无限刚杆没有变形但不等有没有内力。由于荷载作用下等截面杆件的固端内力与绝对刚度无关，因此作荷载弯矩图时刚梁的弯矩图与普通

梁一样(对本例没有用到)。

*§4-5 混 合 法

前面介绍的超静定结构解法,即使是联合法,对某一计算简图选用的基本未知量都是相同性质的。但图 4-40 所示的结构,不能应用对称性。力法和位移法未知量个数都为 7,手算求解将都很困难。分析结构的组成情况可见,左边"主厂房"部分一次超静定,但独立位移有 5 个。右边"附属厂房"部分独立位移只 2 个,而超静定次数为六次。

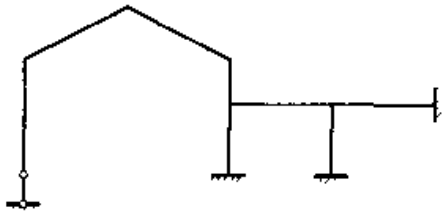


图 4-40 厂房简图

如果左边部分以力作未知量,右边以位移作未知量,混合用两类未知量的总未知量只有 3 个,显然这时用手算求解就成为可能的。下面以图 4-41a 所示结构、荷载为例说明混合法求解的思路。

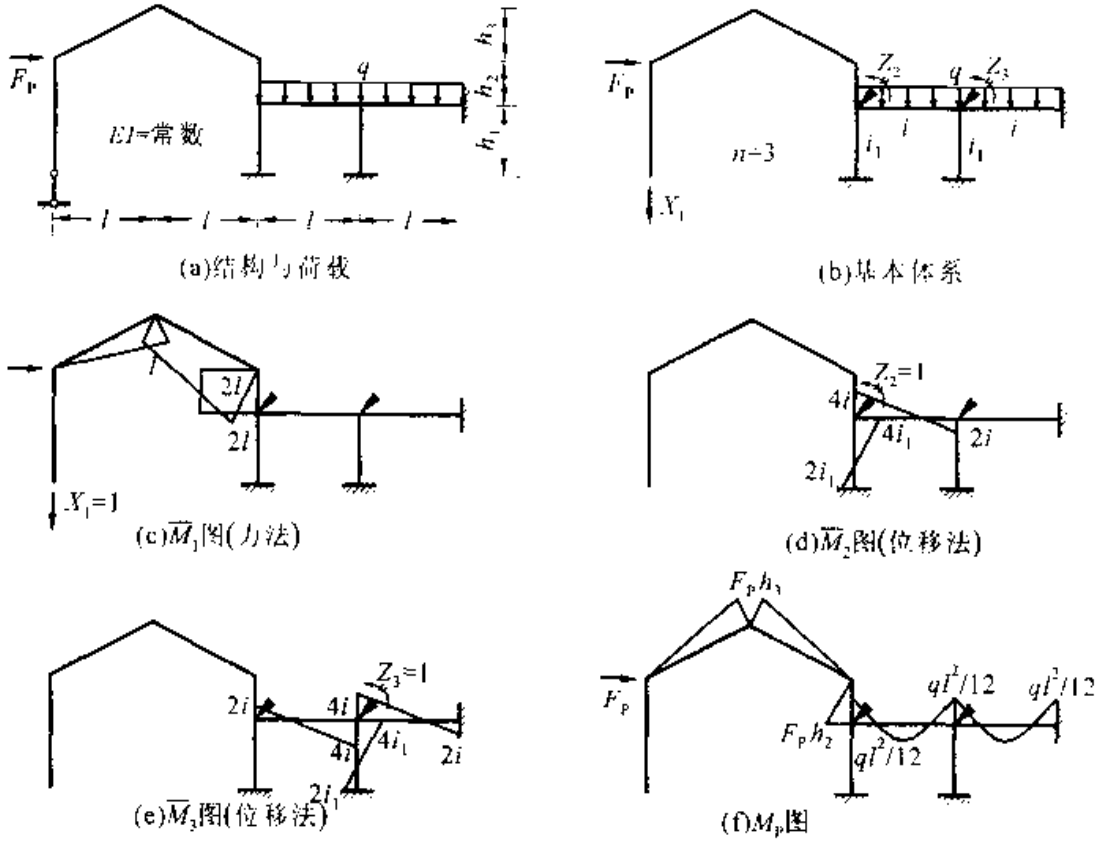


图 4-41 混合法求解示意图

本例用混合法求解时的基本体系如图4-41b所示。

在$X_1=1$作用下基本结构弯矩图如图4-41c所示，位移法部分由于没有结点位移，因此没有弯矩。

在$Z_1=1$和$Z_2=1$作用下的单位弯矩图可由形常数作出，如图4-41d所示。显然，力法部分没荷载因而没内力。

荷载弯矩图力法部分由平衡条件来作，位移法部分利用载常数作出，如图4-41e所示。有了这些图形就可以求系数。

δ_{11}是单位力$X_1=1$引起的自身方向位移系数，由$\overline{M}_1$图自乘来求。根据位移反力互等定理可知：$\delta_{12}=-k_{21}$、$\delta_{13}=-k_{31}$，而位移系数要由图乘法来求，显然不如求刚度系数k_{21}、k_{31}方便。从$\overline{M}_1$图取结点考虑平衡即可求得刚度系数k_{21}、k_{31}。

刚度系数k_{22}、$k_{23}=k_{32}$、k_{33}按位移法取结点即可求得。

荷载位移Δ_{1P}由$\overline{M}_1$图和M_P图互乘求取，R_{2P}和R_{3P}按位移法取结点平衡求。

求得全部系数、荷载引起的位移与荷载引起的反力后，就可列方程。第一个方程是力法的位移协调条件：

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}Z_2+\delta_{13}Z_3+\Delta_{1P}=0$$

另两个方程是位移法的平衡条件，也即附加约束上的总反力等于零。具体形式为

$$k_{21}X_1+k_{22}Z_2+k_{23}Z_3+R_{2P}=0$$

$$k_{31}X_1+k_{32}Z_2+k_{33}Z_3+R_{3P}=0$$

由上述混合法方程即可求得基本未知量，此后与力法、位移法一样，由叠加公式：

$$M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2Z_2+\overline{M}_3Z_3+M_P$$

即可作出结构最终弯矩图。其他问题（如位移计算等）完全与力法、位移法一样。

此例说明，解决问题不能墨守成规，要深刻理解和掌握力学概念、原理和方法，在此基础上灵活运用知识，才能既好又省地解决问题。

§4-6 超静定结构特性

为了便于说明和理解，现对超静定结构和静定结构的受力特性列表对比如下。

静定结构	超静定结构
仅利用平衡条件即可求得全部反力和内力，解答是唯一的。	仅满足平衡条件的解答有无限种，同时考虑平衡、变形、应力应变关系的解答才是唯一的。
支座位移、温度改变、制造误差等不产生反力、内力	由于存在多余约束，因此支座位移、温度改变、制造误差等都可能产生反力和内力。因为超静定力要通过变形才能求得，所以内力和绝对刚度有关。
几何不变部分上的外荷载作等效变换时，仅影响荷载变换部分的内力，也即荷载作用的影响是局部的。	由于存在多余约束，结构任何部分受力有所变化（除静定部分外）都将影响其他部分，也即荷载的作用是全局的。也正因为全局承担荷载，所以超静定结构受力比静定结构均匀。
几何不变部分在保持连接方式及荷载作用不变的情况下，用任何其他的几何不变部分代替，结构其他部分受力不变。	由于超静定结构仅利用静力平衡方程不可能获得唯一解，必须同时考虑变形，因此超静定结构的受力和结构的刚度分布有关。正因如此，改换几何不变部分将使结构受力产生变化。
某一部分能平衡外荷载时，其他部分不受力。	作用在结构上的平衡外荷载将使结构产生变形，而由于多余约束的限制，整个结构将产生内力。
仅基本部分受荷载时，附属部分不受力。	如果存在基本、附属部分的话，基本部分受荷载作用将引起变形，对附属部分（除静定附属部分外）来说是支座移动，也将引起内力。

为加深对上述超静定结构特性的理解，建议读者像了解静定结构性质一样，自行考虑用图形来示意地说明。

§4-7 结论与讨论

4-7-1 本章结论

● 仅满足平衡条件，超静定问题解答不唯一。但同时满足变形协调、本构关系和平衡条件的解答只有一个。

● 超静定结构有两种基本解法：力法和位移法。但是，要灵活运用。对称结构可能用联合法简单，一些情况下可能要用混合法来求解。

● 力法的基本思想是把不会求解的超静定问题，化成会求解的静定问题（内力、变形），然后通过消除基本结构和原结构的差别，建立力法方程

使问题获得解决。只要这一思路确实掌握，则不管什么结构、什么外因都没有困难。

● 一个结构的力法基本结构有无限多种，正确的计算最终结果是唯一的。不同基本结构，计算的工作量可能不同。合理选取基本结构就能既快又准地获得解答，这主要靠练习过程及时总结经验来积累。

● 力法的解题步骤不是固定的，顺序可略有变动。但是超静定次数、取基本结构如果错了，则整个求解就有问题。这说明切不可忽视结构组成分析的作用。

● 应该养成对计算结果的正确性进行检查的良好习惯。对力法来说，除每一步应认真细致检查外，最后的总体检查也是必要的。总体检查主要是检查变形协调条件是否满足，这实际上是位移计算问题。超静定结构的位移计算可以看成基本结构的位移计算，当外因是支座移动或温度改变等时，千万别忘了基本结构上有这些外因作用，位移计算必须用多因素位移公式。

● 在力法和位移法举例的每一典型例子后，以“说明”的形式给出了由该题总结得到的结论。希望读者能很好地理解这些结论，更希望读者在自行练习时也能仿此及时总结。

● 对称结构往往利用对称性可使计算得到极大的简化，为此应该深刻理解和熟记对称结构取半计算的四种计算简图。应了解不考虑轴向变形时，受结点荷载作用刚架的无弯矩状态判别方法。力法简化方案很多（如弹性中心法等），有兴趣的读者可参考龙驭球、包世华主编，《结构力学》，上册，高等教育出版社出版，1994 年。

● 位移法的思路本质上也是化未知问题为已知问题，但它的已知问题是基于力法求解结果的单跨梁形常数和载常数。它的做法是设法将结构变成会计算（有形、载常数）的单跨梁集合，在自动满足位移协调条件的前提下，使荷载、结点位移共同作用时，结构应该处于平衡状态（结点和部分隔离体都平衡）来建立位移法方程。与力法一样，深刻理解这一基本思路，就能解决一切结构在任意外因下的计算问题。

● 由于计算工具的发展，计算机方法（computer method）必将取代原有的人工手算方法。但是，力学基本概念任何时候都是不可缺少的。因此，必须切实学好本章知识，为后面的学习和结构设计打下坚实的基础。



● 力法解超静定结构时，一般取对应的静定结构作基本结构，但从力法基本思想：化未知问题为已知问题来解决的考虑出发，基本结构不一定是

静定的，也可以采用超静定次数较低的结构。关键在于基本结构在基本未知力和荷载作用下要能够求内力和位移。

● 高层结构为了减小侧移一般都设置有剪力墙，其简化计算方案之一是将剪力墙也当作杆件处理，整个结构变成框架。但是，代表剪力墙的杆件必须考虑剪切变形的影响。为建立此类杆件的形、载常数，用力法求解单跨梁时，位移系数的计算既要考虑弯曲变形，也要考虑剪切变形。也即

$$\delta_{ij}=\int_0^l\left(\frac{\bar{M}_i\bar{M}_j}{EI}+\frac{k\bar{F}_{Qi}\bar{F}_{Qj}}{GA}\right)\mathrm{d}x,\quad \Delta_{iP}=\int_0^l\left(\frac{\bar{M}_iM_P}{EI}+\frac{k\bar{F}_{Qi}F_{QP}}{GA}\right)\mathrm{d}x$$

建议读者按此思路建立考虑剪切变形影响的两端固定梁的形、载常数。

● 单层工业厂房的计算简图为排架，由于有吊车一般厂房柱子是阶状变截面的，上柱惯性矩小、下柱惯性矩大。为对等高厂房用剪力分配法求解，请读者考虑并导出阶状变截面柱的侧移刚度公式。

● 位移法的基本结构消除了所有独立结点位移，建立位移法方程相当于同时释放附加约束。数学中线性代数方程组有直接解法，也有迭代解法。迭代法中有一种异步迭代法。其基本思想是：由第 i 步迭代第 $i+1$ 步未知量时，不是全部用第 i 步的结果来迭代，凡是已获得第 $i+1$ 步结果的未知量都用新值（第 $i+1$ 步值）。这样做显然比全部用第 i 步的结果的同步迭代收敛的快。基于这一点，请读者考虑：能否借助异步迭代法和剪力分配法的思想，从位移法解单结点转角的无侧移结构出发，导出对手算来说很有用的“弯矩分配法”。建议读者自己探索。

● 在计算机被工程领域广泛应用之前，在我国特别是 20 世纪 50、60 年代提出和改进了许多适合于手算解复杂结构的渐进法和近似法。由于计算机和计算技术的飞速发展，加上篇幅所限，本书不介绍它们，有兴趣的读者可查阅有关教材和资料。

习　题

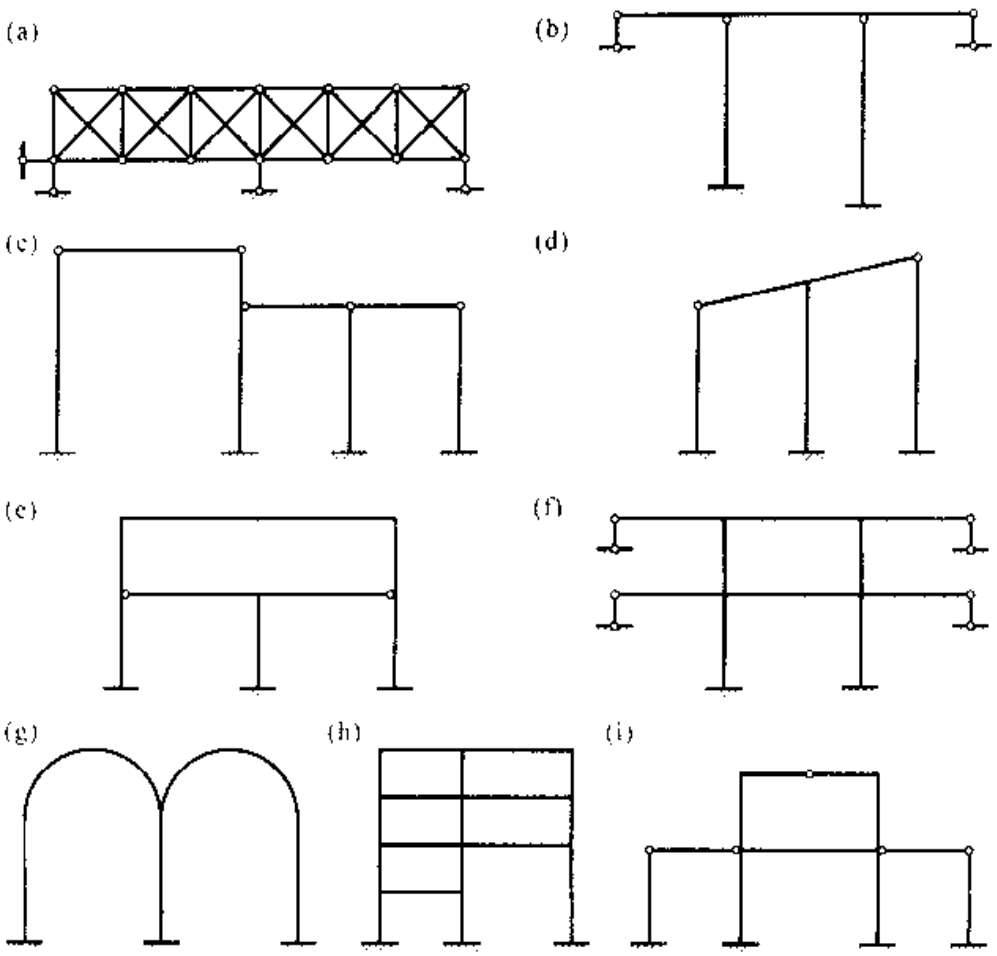
4-1　试确定下列结构的超静定次数。

4-2　试用力法计算下列超静定梁，并作 M 和 F_Q 图。EI 为常数。

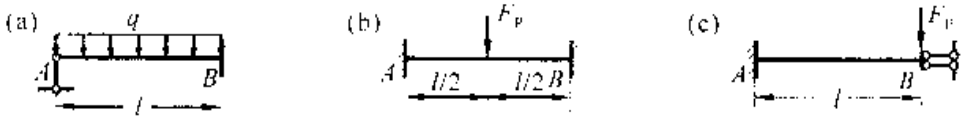
4-3　试用力法计算下列超静定刚架，并作内力图。EI 为常数。

4-4　试用力法计算下列超静定刚架，并作 M 图。

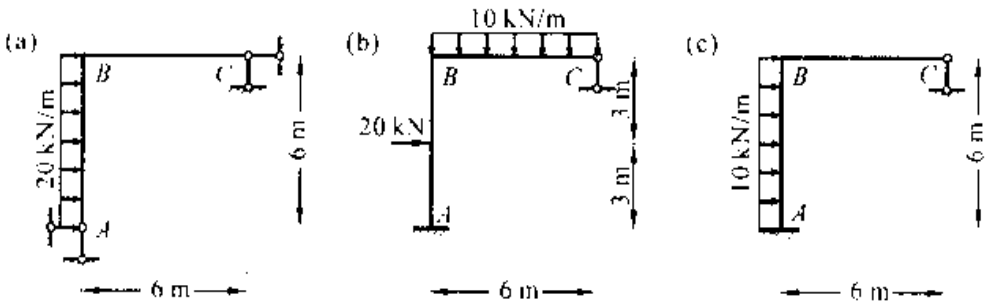
4-5　试用力法计算超静定桁架各杆内力。各杆 EA 相同。



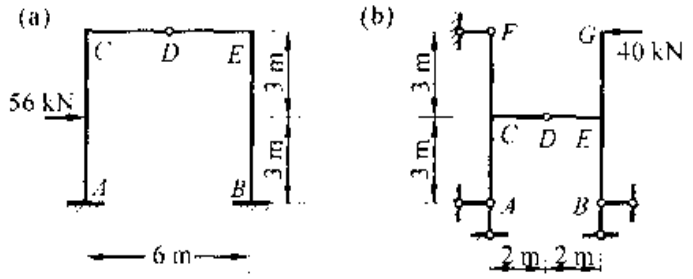
习题 4 - 1 图



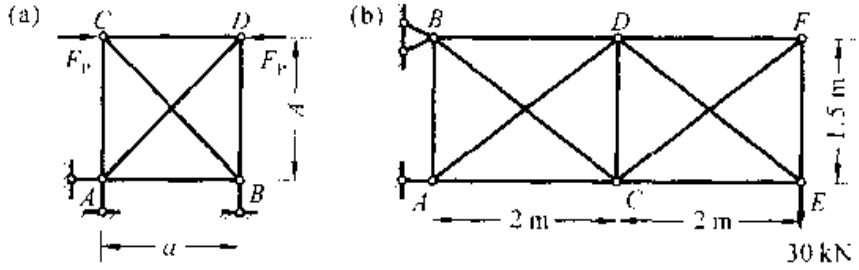
习题 4 - 2 图



习题 4 - 3 图

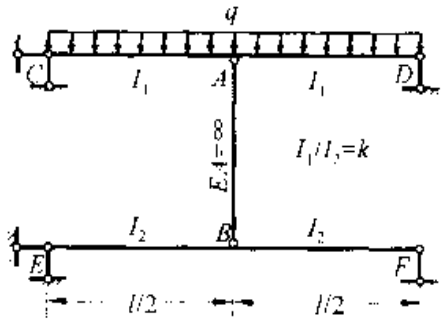


习题 4－4 图



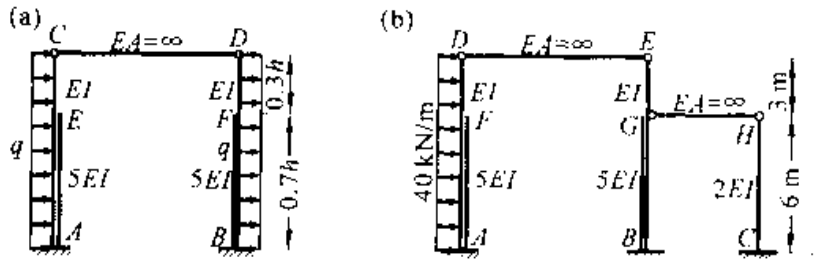
习题 4－5 图

4－6　试用力法计算图示结构，作 M 图。



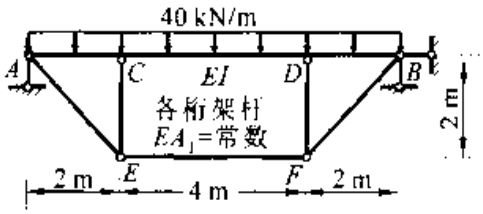
习题 4－6 图

4－7　试用力法计算图示铰接排架，并作 M 图。



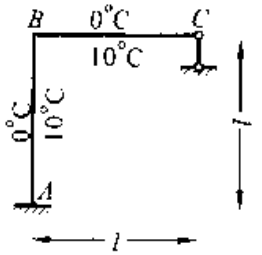
习题 4－7 图

4－8　试用力法计算图示组合结构，并作 M 图。

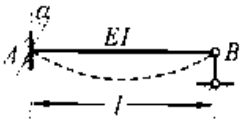


习题 4-8 图

4-9　试用力法计算图示结构在温度改变作用下的内力，并作 M 图。已知 $h=l/10$，EI 为常数。



习题 4-9 图

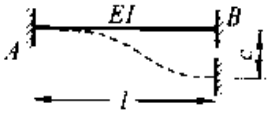


习题 4-10 图

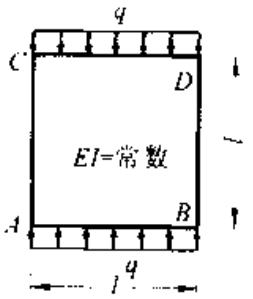
4-10　设图示梁 A 端转角，试作梁的 M 和 F_Q 图。

4-11　设图示梁 B 端下沉 c，试作梁的 M 和 F_Q 图。

4-12　试利用对称性计算图示结构，并绘 M 图。



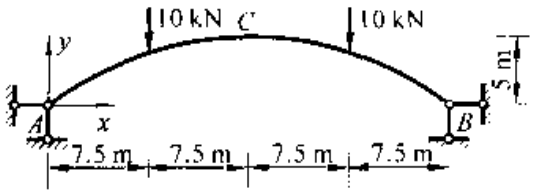
习题 4-11 图



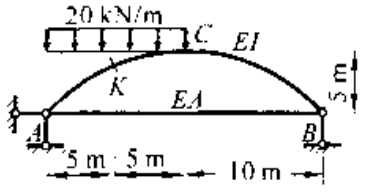
习题 4-12 图

4-13　图示抛物线二铰拱，$y=\dfrac{4f}{l^2}x(l-x)$，$l=30$ m，$f=5$ m，截面高度 $h=0.5$ m，EI 和 EA 为常数，近似取 $\cos\varphi=1$，$ds=dx$。试计算水平推力和拱顶 C 截面的内力。

4-14　试求图示抛物线拉杆拱作用半跨均荷载 $q=20$ kN/m 时拉杆 AB 的轴力和 K 截面的内力。计算时可采用 $I=I_c/\cos\varphi$，不计轴力和剪力对位移的影响。已知拱顶 $EI_C=5\times10^3$ kN·m^2，拉杆 $(EA)_t=2\times10^5$ kN。若荷载为满跨均布，则拉杆 AB 和 K 截面内力等于多少？

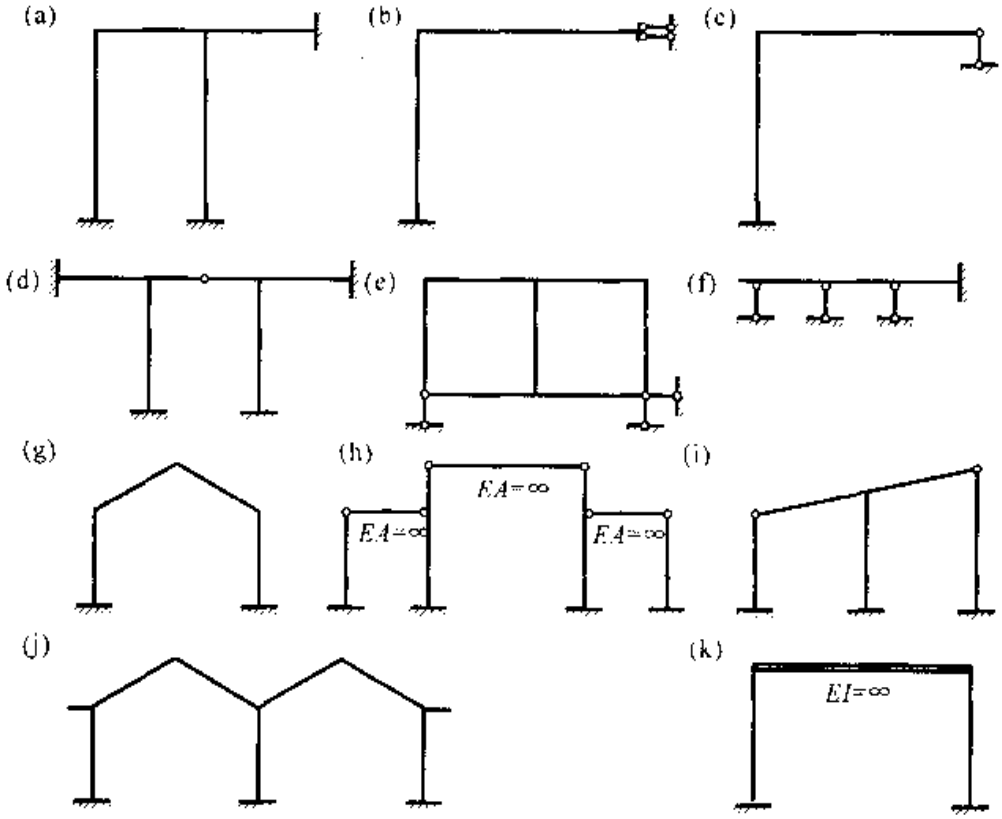


习题 4－13 图



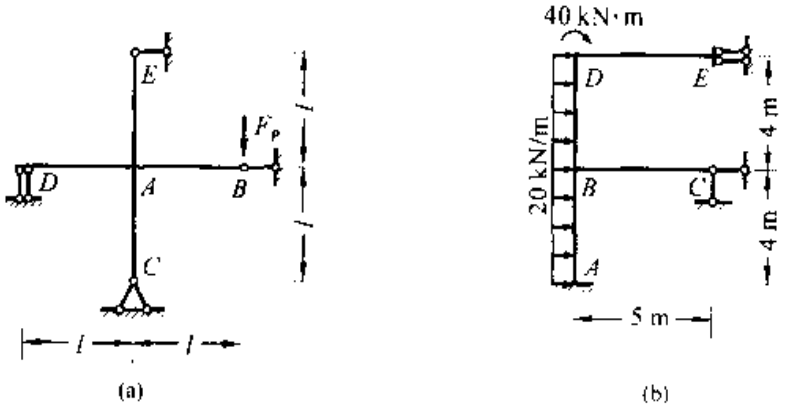
习题 4－14 图

4－15　试确定图示结构位移法的基本未知量数。



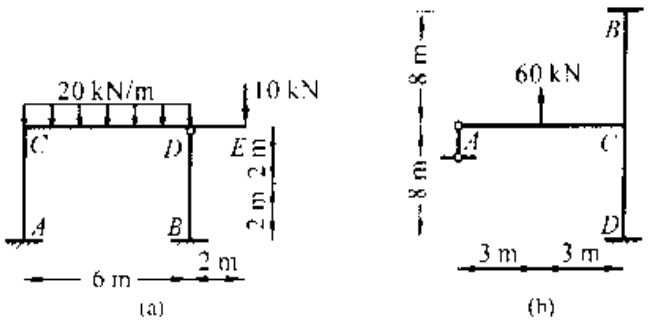
习题 4－15 图

4－16　试用位移法计算图示结构，并作内力图。*EI* 为常数。



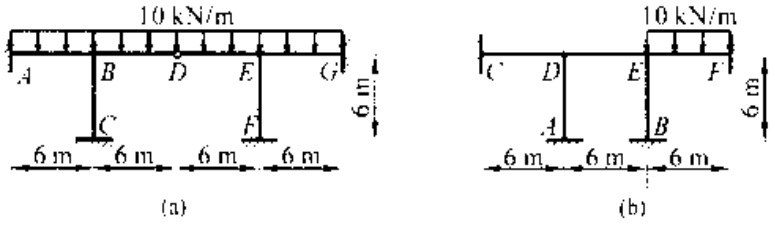
习题 4－16 图

4－17　试用位移法计算图示结构，并作内力图。*EI* 为常数。



习题 4－17 图

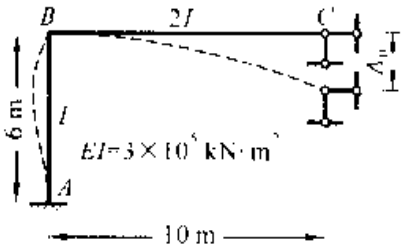
4－18　试用位移法计算图示结构，并作内力图。EI 为常数。



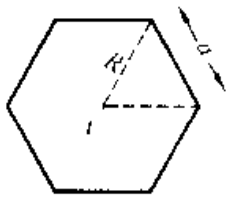
习题 4－18 图

4－19　设支座 B 下沉 $\Delta_B = 0.5$ cm，试求作图示刚架的 M 图。

4－20　图示刚架内部温度升高 t 度，杆件截面高度为 h，温度膨胀系数为 α。试求作 M 图。



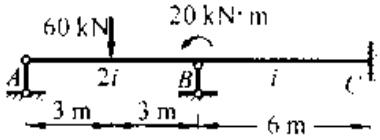
习题 4－19 图



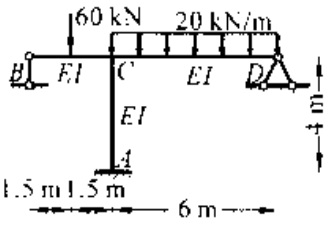
习题 4－20 图

4－21　试用弯矩分配法计算图示连续梁，并作 M 图。

4－22　试用弯矩分配法计算图示刚架，并作 M 图。



习题 4－21 图



习题 4－22 图

第5章

移动荷载作用下的结构分析

工程中有些结构在承受位置不变的**固定荷载**(也称恒载)(dead load)的同时,还可能承受**活荷载**(live load)作用。结构在活荷载作用下,内力与位移的大小将随荷载位置的变化或分布区域不同而变化。结构设计中最关键的是,活荷载处于什么位置时内力和位移为最大值以及二者的大小。

对于线弹性结构,设计所关心的这些问题可通过影响线给予回答。本章首先介绍影响线的概念及作法,然后讨论其在结构设计中的应用。

§5-1 移动荷载及影响线概念

5-1-1 活荷载

方向、大小不变,仅作用位置变化的荷载称为**移动荷载**(moving load),如桥梁上行驶的车辆,工业厂房中吊车梁上开动的行车等。

时有时无,可以任意分布的荷载称为**定位荷载**(或称**短期荷载**)(short load),如楼板上的人群、仓库中的货物、不固定的设备等。

上述两种荷载统称为活荷载。

5-1-2 影响线

结构承受移动荷载作用时,其反力、内力以及位移等均随荷载作用位置的变化而改变。为解决千变万化的移动荷载作用下结构的设计问题,基于

线弹性结构的叠加原理，如果掌握了单位移动荷载作用下结构的反力、内力与位移变化规律，则其反力、内力与位移可用叠加方法获得。

定义：

单位移动荷载作用下，结构反力、内力或位移等随荷载位置变化的函数关系，分别称为反力、内力、位移的影响系数方程，对应的函数图形分别称为反力、内力、位移的影响线（Influence Line 缩写为 I.L.）。为了方便，以下把反力、内力和位移均称为物理量。

必须注意：定义中单位移动荷载作用下的影响系数应该理解为在单个移动荷载 F_P 作用下某指定物理量与荷载 F_P 的比值。习惯上以在结构上移动的 $F_P=1$（即量纲一）表示“单位移动荷载”。因此，**物理量影响系数的量纲是，物理量的量纲和移动荷载量纲之比**。例如，单位移动荷载 F_P 是集中力，则弯矩影响线的量纲为 L，剪力影响线的量纲为量纲一，等等。

对于线弹性结构，影响线是移动荷载作用下结构设计的重要工具。

作影响线有两种基本方法：**静力法**（statics method），虚功法或者称**机动法**（kinematic method）。

§5-2　静力法作影响线

利用结构在 $F_P=1$ 移动荷载作用下的静力求解方法（对静定结构用平衡条件，对于超静定结构用力法、位移法，等等），建立所求某物理量与荷载 $F_P=1$ 的位置间的函数关系式，即影响系数方程，然后由方程作出影响线。这一方法称为静力法。具体步骤为：

1. 确定坐标系，以坐标 x 表示荷载 $F_P=1$ 的位置；

2. 将 x 看成是不变的，$F_P=1$ 看成是固定的荷载，确定所求量的值即可得影响系数方程；

3. 按方程作出影响线并标明符号和控制点的纵坐标值。

下面用静力法作一些常见结构的反力及内力的影响线。需要指出的是，正确的影响线应该具有**正确的外形、必要的控制点纵坐标值和正负号**。内力正负号规定与第2章相同。习惯上将纵标为正的影响线画于基线上方，但因为要标正负号，所以这并不是规定。

5-2-1 简支梁影响线

对于图 5-1a 所示简支梁，其支座反力、C 截面弯矩和剪力的影响线的

静力法求作过程如图 5-1 所示。

(1) 支座 A、B 竖向反力影响线(I.L.)

F_{Ay} 和 F_{By} 影响线分别如图 5-1b 和 5-1c 所示。

(2) C 截面弯矩影响线

M_C 影响线如图 5-1d 所示。

(3) C 截面剪力影响线

F_{QC} 影响线如图 5-1e 所示。

需要指出的是,对弯矩和剪力影响线,荷载 F_P 作用在截面两边时,影响系数方程将有变化,因此必须分段建立方程。

图号	结构与影响线(I.L.)[①]	隔离体与列影响系数方程
(a)	x $F_P=1$ A C B a b l	$x=l\xi$
(b)	1 F_{Ay} I.L.	隔离体 x $F_P=1$ F_{Ax} F_{Ay} F_{By} 平衡方程 $\Sigma M_B=0$ 影响系数方程 $F_{Ay}=1-\xi$
(c)	1 F_{By} I.L.	隔离体 x $F_P=1$ F_{Ax} F_{Ay} F_{By} 平衡方程 $\Sigma M_A=0$ 影响系数方程 $F_{By}=\xi$
(d)	ab/l bx/l $(1-x/l)a$ M_C I.L.	M_C F_{QC} F_{By} $x\leqslant a$ 平衡方程 $\Sigma M_C=0$ 影响系数方程 $M_C=b\xi$ M_C F_{Ay} F_{QC} $x\geqslant a$ 平衡方程 $\Sigma M_C=0$ 影响系数方程 $M_C=a(1-\xi)$
(e)	$1-x/l$ b/l a/l x/l F_{QC} I.L.	M_C F_{QC} F_{By} $x<a$ 平衡方程 $\Sigma F_y=0$ 影响系数方程 $F_{QC}=-\xi$ M_C F_{Ay} F_{QC} $x>a$ 平衡方程 $\Sigma F_y=0$ 影响系数方程 $F_{QC}=(1-\xi)$

图 5-1 简支梁影响线

① 本书图中缩写的 I.L. 即为影响线。

简支梁影响线应用较广，为此建议读者在图 5－1 基础上自行用文字总结图中各影响线的规律；自行总结影响线与恒载作用下的内力图的区别。

5－2－2　结点传荷的主梁影响线

荷载有时不是直接而是通过纵横梁系间接地作用于结构，如图 5－2 所示主、次梁结构的楼盖系统或桥面系统（括号中为桥梁时名称）等。图 5－3a 所示为一桥梁结构的计算简图，无论荷载作用于纵梁何处，主梁承受的是经横梁传递的（位置不变的）结点力，这种荷载传递方式称为**结点传荷**。

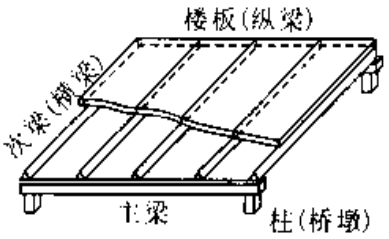


图 5－2　主、次梁楼盖

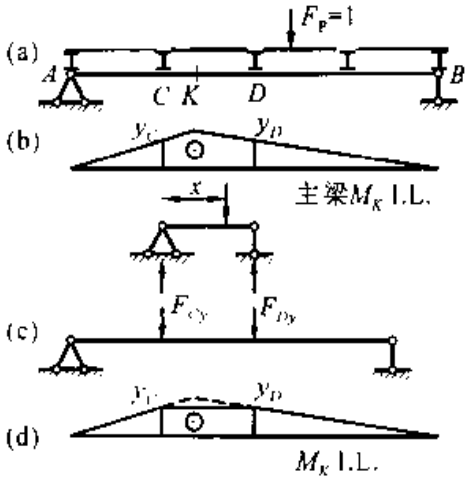


图 5－3　结点传荷时主梁的影响线

作结点传荷主梁上某指定量影响线时，可采取下述作法：

（1）先按荷载直接作用于主梁作影响线；

（2）将所有结点投影到荷载直接作用时的主梁影响线或其基线上，然后将相邻投影点连以直线，即得荷载作用于纵梁时主梁的影响线。

以上作法基于两点：

● 由影响线定义可知，无论荷载是直接还是间接作用，影响线在结点处的竖标值相同。

● 相邻结点间影响线是直线。

其中第二点可以图 5－3a 中 K 截面弯矩影响线为例加以说明。设 y_C 和 y_D 为直接荷载作用时影响线在 C、D 两点的纵标值（图 5－3b），利用叠加原理可得结点荷载作用时主梁上 K 截面的弯矩

$$M_K = F_{Cy} \cdot y_C + F_{Dy} \cdot y_D = \left(1 - \frac{x}{d}\right) y_C + \frac{x}{d} y_D$$

由此可见，M_K 在 CD 段是线性变化的。

如果主梁是超静定的，当荷载直接作用于主梁时的影响线是曲线，但上述结论仍然成立。利用上述作法，M_K 的影响线如图 5－3d 所示。

[**例题 5-1**] 试作图 5-4 所示结点传荷主梁的 F_{Ay}、M_K 和 F_{QK} 影响线。

解：通过建立影响系数方程不难证明，直接承受荷载的主梁(外伸梁)反力和跨内截面内力影响线可通过延长简支梁相应影响线得到。参照图 5-3 作法可得所求影响线，如图 5-4 所示。

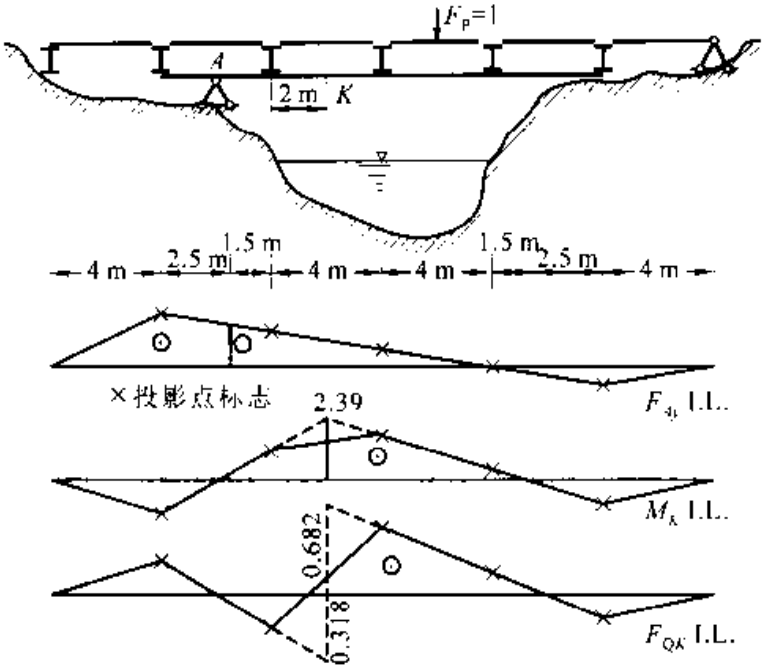


图 5-4 例题 5-1 图

5-2-3 静定桁架影响线

由静定结构性质可知，对作用于结构中几何不变部分的荷载作静力等效变换时，除变换所涉及的部分外，其他部分受力没有任何变化。因此，对于静定桁架，当移动荷载在上弦或下弦移动时，可按静力等效变成经结点传荷来解决。

由于静力法是建立移动荷载位于某 x 处时，某指定反力或内力的影响系数方程，然后再作影响线。因此，求影响系数方程和求恒载作用时指定杆内力的方法完全相同。也就是根据具体桁架结构构造情况和所求影响线杆件位置选用结点法、截面法、联合法等建立影响系数方程。

[**例题 5-2**] 试作图 5-5a 所示桁架中 1、2、3 和 4 杆的轴力影响线。$F_P=1$ 在下弦移动。

解：首先作出支座反力 F_{Ay} 与 F_{By} 的影响线，其影响系数方程及影响线与简支梁相同，如图 5-5b 所示。然后，适当选用求内力方法列出各指定杆的轴力影响系数方程，从而作出影响线，如图 5-5c、d、e 所示。

由图 5－5f 和图 5－5g 可见，有些杆的轴力影响线在上弦承载和下弦承载时是不同的。

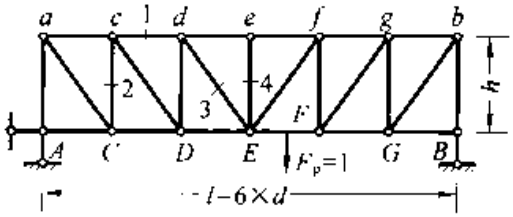
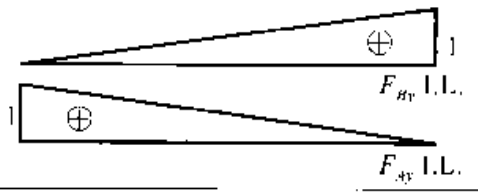
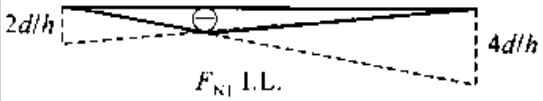
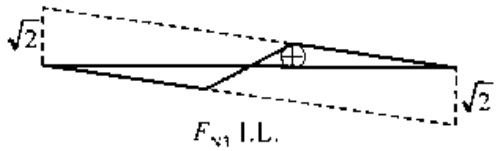
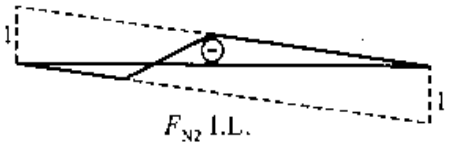
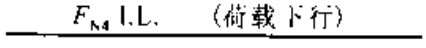
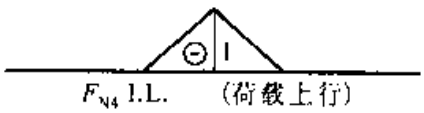
图号	结构与影响线(I.L.)	求解过程示意
(a)		$x=l\xi$
(b)		取整体为隔离体 $\Sigma M_B=0$ 影响系数方程 $F_{Ay}=1-\xi$ $\Sigma M_A=0$ 影响系数方程 $F_{By}=\xi$
(c)		单位荷载在CD之左，取右部列 $\Sigma M_D=0$得 $F_{N1}=4dF_{By}/h$ 单位荷载在CD之右，取左部列 $\Sigma M_D=0$得 $F_{N1}=-2dF_{Ay}/h$ 荷载在CD之间，连直线
(d)		单位荷载在DE之左，取右部列 $\Sigma F_y=0$得 $F_{N3}=-1.4142F_{By}$ 单位荷载在DE之右，取左部列 $\Sigma F_y=0$得 $F_{N3}=1.4142F_{Ay}$ 荷载在DE之间，连直线
(e)		单位荷载在CD之左，取右部列 $\Sigma F_y=0$得 $F_{N2}=F_{By}$ 单位荷载在CD之右，取左部列 $\Sigma F_y=0$得 $F_{N2}=-F_{Ay}$ 荷载在CD之间，连直线
(f)		取e结点，因为荷载下行，4杆为零杆
(g)		荷载在def之外时，$F_{N4}=0$ 荷载在e，$F_{N4}=-1$ 荷载在de、ef之间，连直线

图 5－5　桁架影响线及求解

5－3－4　三铰拱的内力

由于三铰拱的内力和支反力可通过代梁按下式计算(上角标“0”的量表

示代梁的量)：

$$F_{Ay}=F_{Ay}^{0},\quad F_{By}=F_{By}^{0},\quad F_{H}=\frac{M_{C}^{0}}{f}$$

$$M=M^{0}-F_{Hy},\quad F_{Q}=F_{Q}^{0}\cos\varphi_{K}-F_{H}\sin\varphi_{K},\quad F_{N}=-F_{Q}^{0}\sin\varphi_{K}-F_{H}\cos\varphi_{K}$$

根据上述这些公式、三铰拱的影响线由代梁影响线和水平反力影响线组合得到。

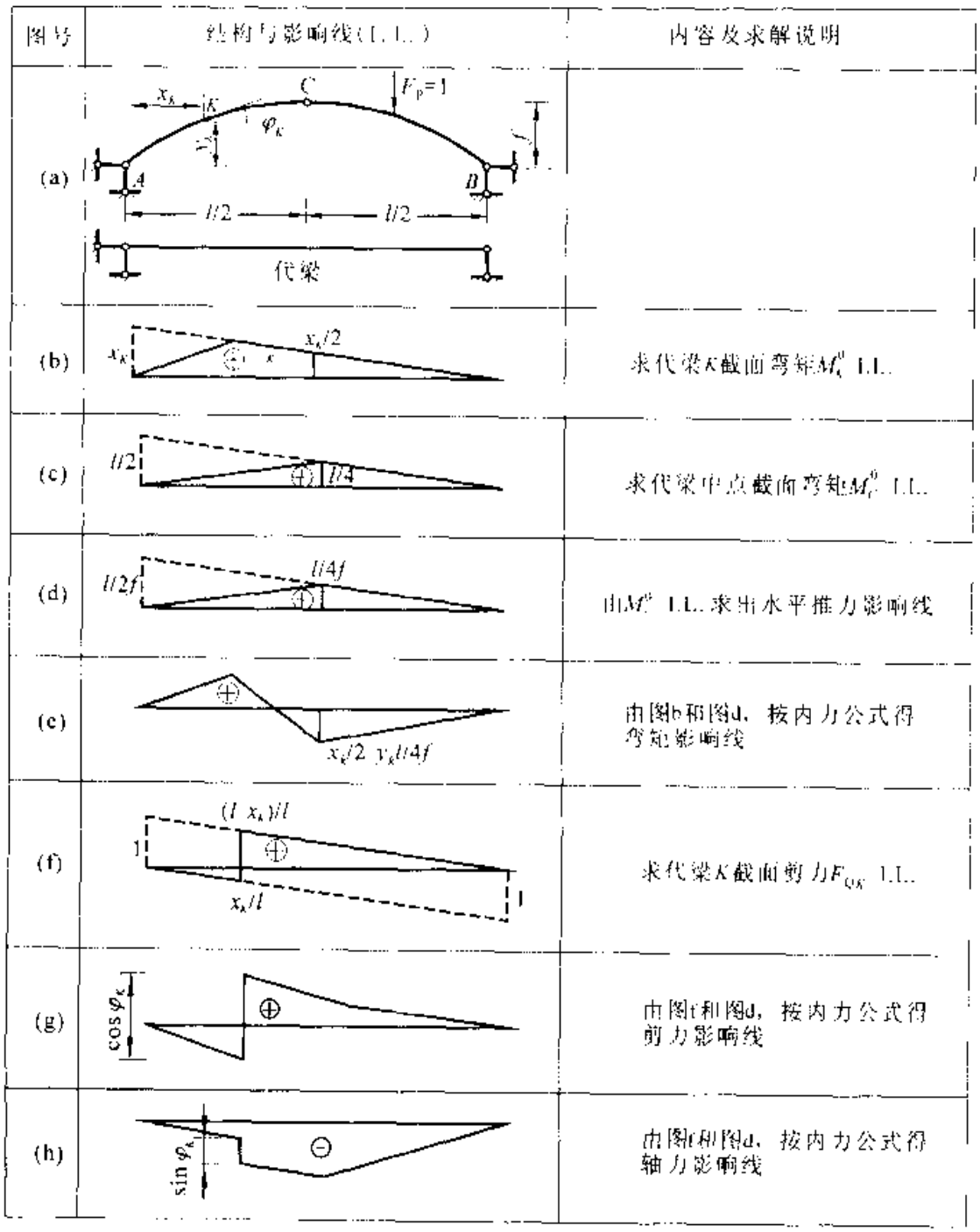


图 5-6 三铰拱影响线示意图

图 5-6 所示为三铰拱 K 截面的弯矩、剪力、轴力影响线的作法。

5-2-3　超静定结构影响线

静力法作超静定结构影响线时，为建立影响系数方程，需用力法、位移法等解超静定结构。下面用一简单例子加以说明。

［**例题 5-3**］　试作图 5-7a 所示超静定梁固定端 A 的反力矩影响线。

解：采用力法建立影响系数方程。以 A 端反力矩为基本未知量 X_1，取简支梁作为力法基本结构。力法典型方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

其中位移系数和荷载位移为

$$\delta_{11}=\frac{l}{3EI},\quad \Delta_{1P}=\frac{1}{6EI}\frac{(2l-x)(l-x)x}{l}$$

代入力法方程，得

$$M_A=X_1=-\frac{(2l-x)(l-x)x}{2l^2}$$

作出影响线如图 5-7d 所示。在此基础上，若还要求其他量的影响线，则可利用 M_A 影响线，由平衡方程建立相应量影响系数方程而作出。

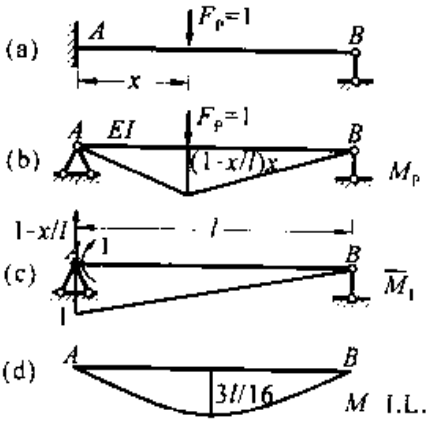


图 5-7　超静定结构静力法作影响线

由于已经掌握了力法、位移法等超静定结构解法，因此任一 n 次超静定结构，可以用 $n-1$ 次超静定结构作为基本结构。从这一点出发，用静力法作 n 次超静定结构某量影响线时，可用此量作为力法基本未知量，以 $n-1$ 次超静定结构作基本结构，利用力法概念（变形协调条件）建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0,\quad 或\quad X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}\tag{5-1}$$

得到影响系数方程，从而作出影响线。

式(5-1)中，δ_{11}是基本结构在单位广义力 $X_1=1$ 作用下 X_1 方向的位移，Δ_{1P}是 F_P-1 位于选定坐标 x 处时引起的 X_1 方向的位移，都是超静定结构的位移。原则上，应用现有知识是能够解算的（工作量很大）。

对于变截面无铰拱这样一些结构，建立影响系数方程比较困难。这时可将荷载移动区段分成若干段，将 $F_P=1$ 分别作用于各分段点，利用固定荷载作用的结构分析程序求出需作影响线的量在这些点处的值，即为影响系数，然后用光滑曲线将这些值连接后即可得影响线。

应该指出，上述逐点求解的方法并非经济、有效的方法，本书第(Ⅱ)册结构计算机分析中将指出一种更有效的方法。

对于超静定桁架和经结点传荷作用的连续梁，可将 $F_P=1$ 作用于各结点上求影响系数在结点处的影响系数值，用直线连接相邻各点值即可得所求影响线。

§5－3　虚功法作影响线

5－3－1　虚功法(机动法)基本原理

影响线除可用静力法建立影响系数方程作图外，还可用虚功法，其原理是功的互等定理或虚功原理。下面以作图 5－8a 所示多跨静定梁和连续梁的弯矩影响线为例加以说明。

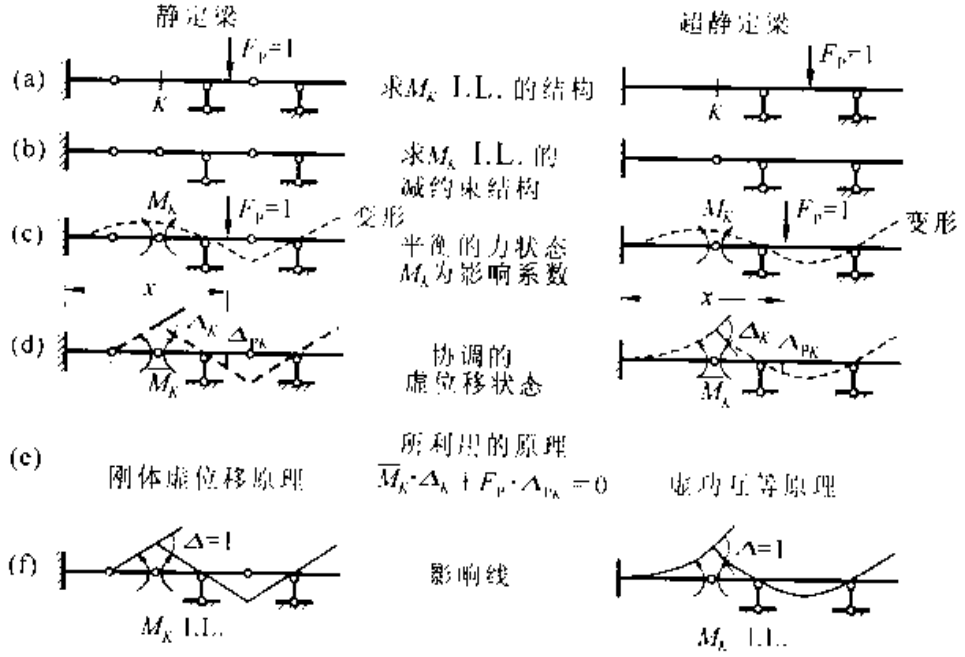


图 5－8　虚功法原理图形说明

为用虚功法作 M_K 影响线，在 K 截面处加铰，解除限制截面相对转动的约束，如图 5－8b 所示。此时多跨静定梁变成单自由度系统，连续梁变成一次(比原来少一次)超静定的梁。

为用虚功原理推导虚功法的作图规则，需建立平衡的力状态和协调的虚位移状态。其中平衡的力状态取 $F_P=1$ 作用下图 5－8a 结构真实受力、变形状态，M_K 是单位移动荷载下结构的真实弯矩，也就是弯矩影响系数。

因此，这时结构的变形曲线在 K 截面处是光滑连续的，如图 5－8c 所示。

取解除 M_K 对应的约束后的体系发生相对虚位移 Δ_K，以它作为协调的虚位移状态，如图 5－8d 所示。这时对多跨静定梁是刚体虚位移，对连续梁是变形虚位移。

由虚功原理（对多跨静定梁是刚体虚位移原理，对连续梁是变形体虚功原理或功的互等定理）可得图 5－8e 所示的虚功方程。其中 Δ_{PK} 为虚位移状态中对应于单位移动荷载 $F_P=1$ 的虚位移。

由图 5－8e 所示的虚功方程可得如下结论：

1．因为 $M_K=-\Delta_{PK}(x)/\Delta_K=-\delta_{PK}(x)$，所以单位虚位移图 $\delta_{PK}(x)$ 即 M_K 影响线。**对静定结构为刚体虚位移图，对超静定结构为变形虚位移图。前者由直线段组成，后者超静定部分一般为曲线图形**，如图 5－8f 所示。

2．从 $M_K=-\delta_{PK}$ 可见，$F_P=1$ 向下作用时，基线以下虚位移为正，故 M_K 影响线纵标为负，相反，基线以上 M_K 影响线纵标为正。

3．虚功法作反力、内力影响线步骤为：

- 根据需作影响线的量 S，解除与其对应的约束，代以所要求的量。
- 沿所要求的量的正向产生约束所允许的单位虚位移，作位移图。
- 在虚位移图上标注符号和控制值（单位广义位移），即得所要求量的影响线。

5－3－2　虚功法作影响线举例

根据虚功法作影响线的步骤，下面举例说明各种结构影响线的作法。

［**例题 5－4**］　试用虚功法作图 5－9 所示梁的 F_{By}、M_2、F_{Q2}、F_{Q3}、M_1、F_{QB}^{L}、F_{QB}^{R} 影响线。

解：为用虚功法作影响线，首先解除与需求影响线对应的约束：求反力解除链杆，求弯矩加铰，求剪力加错动机构，如各图所示。

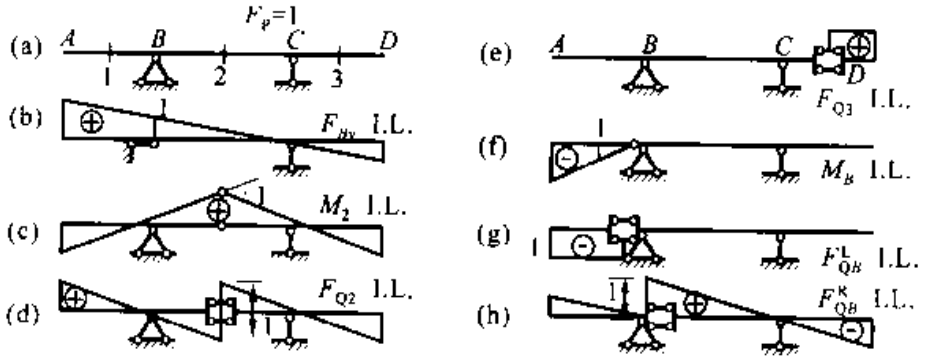


图 5－9　虚功法作外伸单跨梁影响线

本例为作静定梁影响线，因此解除约束后是单自由度体系，令此体系沿所求影响线广义力的正向发生单位位移，所得刚体位移图即为此广义力对应的影响线，如图 5－9b、c、d、e、f、g、h 所示。从图 5－9g、h 可见，支座左、右两侧截面的剪力影响线是不同的，图 5－9h 可按图 5－9d 考虑，然后把截面位置向支座移动即可得到正确的影响线。

需要再次强调的是，影响线应具有正确的外形、必要的控制纵标和正负号。

[例题 5－5]　试用虚功法作图 5－10a 所示多跨静定梁的 M_A、F_{Qv}、F_{Dv}、M_D^L、M_D^R、F_{QE}^L、F_{QE}^R影响线。

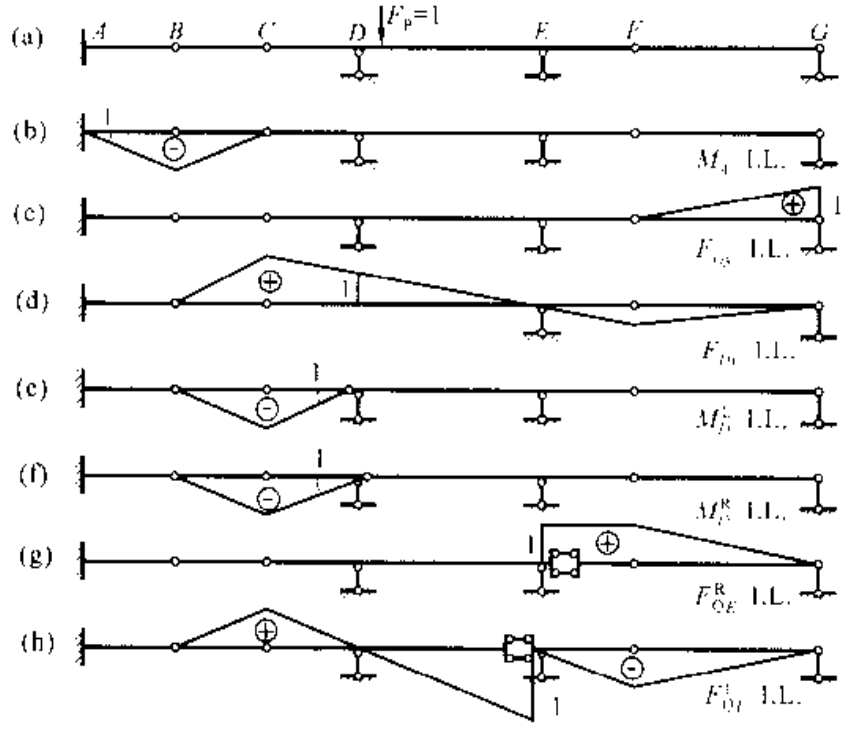


图 5－10　虚功法作多跨静定梁影响线

解：根据虚功法的步骤，解除对应约束，并沿约束力的正方向令其发生单位虚位移，由此产生的体系刚体虚位移图就是要作的影响线。本例需求的影响线如图 5－10b、c、d、e、f、g、h 所示。请读者结合例题 5－4 的简单说明和虚功法步骤总结虚功法作影响线的经验。

[例题 5－6]　试作图 5－11a 所示单体刚架的 F_{QI}、M_I、F_{NI}、F_{QK}、M_K 影响线。

解：对所要求作的影响线，解除其对应的约束，体系和单位虚位移如图 5－11b 所示。由此，以单位移动荷载移动范围作基线，画出单位虚位移图中

基线各截面在单位移动荷载方向的位移图，这就是所求量的影响线，如图 5－11c 所示。

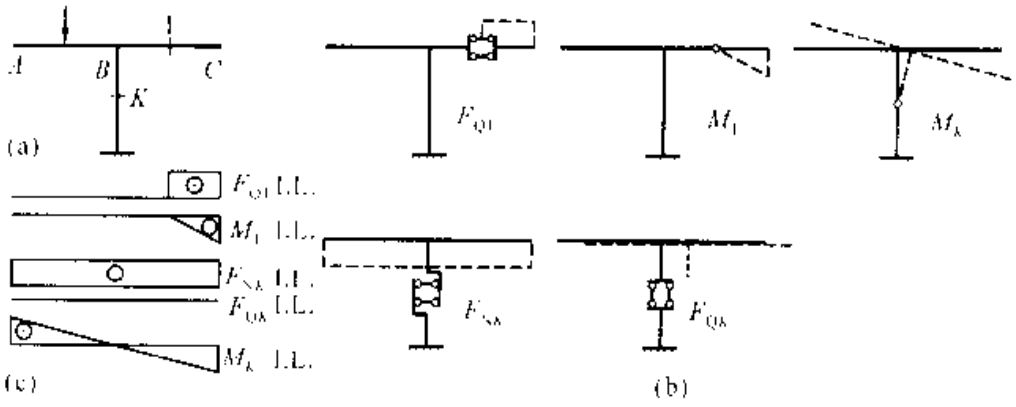


图 5－11　虚功法作静定刚架影响线

[例题 5－7]　试作图 5－12a 所示经结点传荷多跨静定梁的 M_1、M_B、F_{Dr}、F_{QB}^{L}影响线。

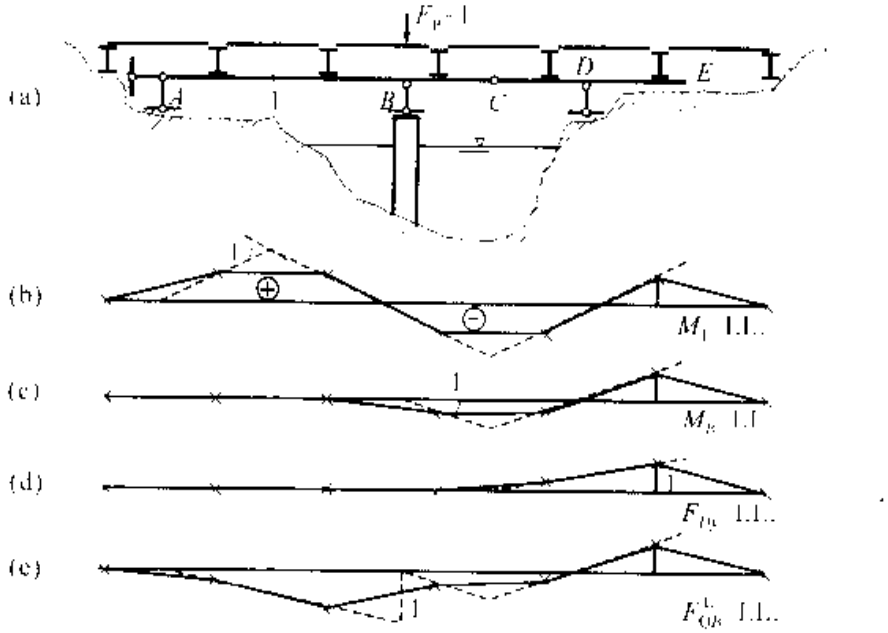


图 5－12　虚功法作结点传荷多跨静定梁影响线

解：与静力法一样，先用虚功法作荷载直接作用于主梁时的对应量影响线，如图 5－12b、c、d、e 中虚线所示。然后像经结点转荷的梁一样，将结点投影到基线或主梁影响线上，最后用直线连接相邻投影点如实线所示，所得折线图形即为所求梁相应物理量的影响线，如图 5－12b、c、d、e 所示。

需要指出的是，对静定结构，只要标注上解除约束处的单位虚位移，则

根据结构的尺寸由刚体虚位移图，通过几何分析即可得到其他控制点的控制纵标值。因此，在上述例题中没有标注其他控制点的值。

[**例题 5－8**]　试勾画图 5－13a 所示连续梁的 M_A、F_{By}、M_F、F_{QC}^L、M_1、F_{Q1}影响线的外形。

解：与静定结构一样，首先解除和需求量影响线对应的约束。但因为是超静定结构，只解除一个约束，所得体系是静定或仍然是超静定的，因此这解除约束的体系不可能发生刚体位移，所谓单位虚位移图，是指体系的变形图。要准确画出这个变形图需要大量的计算，因此虚功法作超静定结构影响线，只要勾画出正确的外形、必要的控制纵标和正负号即可。

根据上述说明，如图 5－13b～g 所示，根据需求影响线分别解除一个约束，把梁看成很柔软的杆件，并勾画出满足未解除约束处位移限制条件的变形虚位移图，由此即可得图 5－13b～g 所示连续梁的各个需求的影响线。

需要指出的是，如图 5－13f，g 所示，因为悬臂部分是静定的，因此悬臂部分内力影响线仍然与静定结构一样是直线。非静定部分的内力、反力影响线均为曲线。

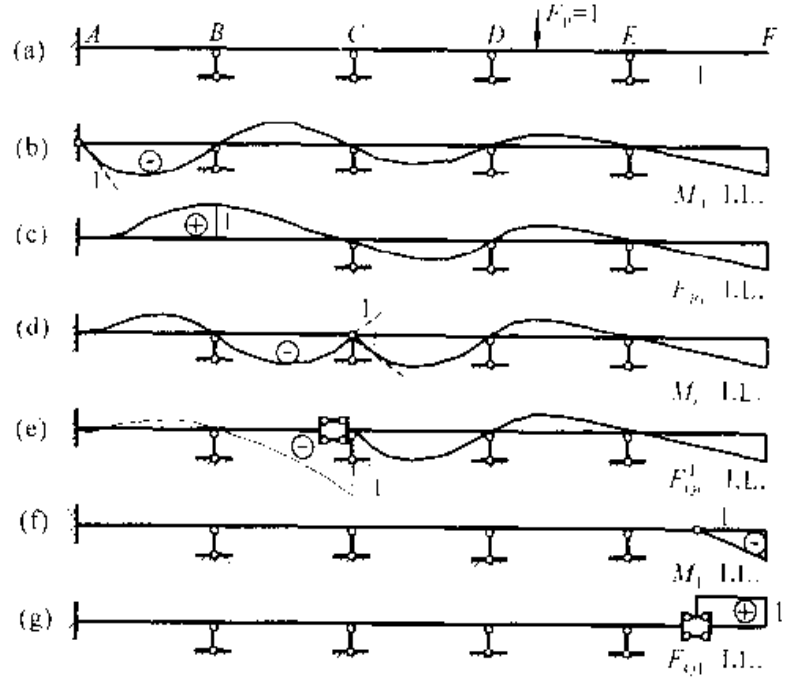


图 5－13　虚功法作连续梁影响线外形

[**例题 5－9**]　试勾画图 5－14a 所示经结点传荷连续梁 M_A、F_{By}、M_1 影响线的外形。

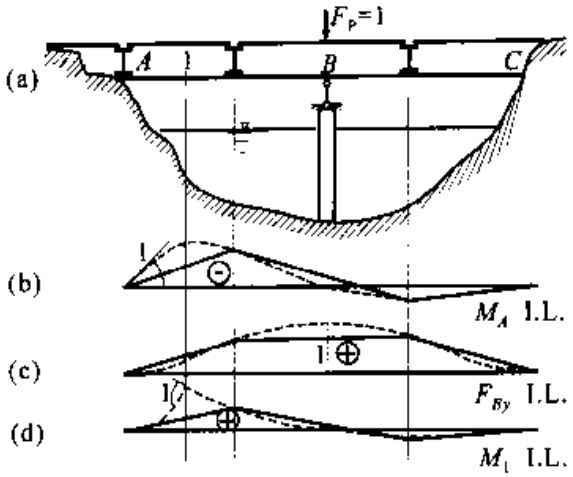


图 5-14　虚功法作结点传荷连续梁影响线外形

解：与静定结构一样，首先作超静定的主梁承受直接荷载影响线，如图中虚线所示。然后，将结点投影到主梁影响线或基线上，连接相邻投影点即可得到所要作的影响线如图 5-14b～d 所示。

对于超静定结构，除静定部分内力、反力影响线外，一般都是曲线图形。但是，经结点转荷的连续梁等超静定结构，影响线仍然是直线。再次强调指出，要确定超静定结构影响线的纵坐标数值，手算工作量很大，为此可借助于计算机由应用程序计算确定或绘制。

§5-4　影响线的应用

作影响线的主要目的是，解决结构在各种活荷载作用下设计所需反力、内力最大值的计算。因此，在掌握了影响线绘制方法后，应进一步讨论影响线的应用。

5-4-1　利用影响线求固定荷载作用的量值

若结构中某指定量 S（可以是支反力、弯矩、剪力、轴力等）的影响线已作出，则根据叠加原理，利用影响线可方便地求出结构在各种固定荷载作用下的 S 值。

1. 集中力作用情形

若结构上作用有若干集中力，量 S 的影响线已作出（图 5-15a），因为影响线纵标物理意义是 $F_P=1$ 作用在纵标处时 S 的大小，因此由叠加原理可得

$$S = F_{P1} \cdot y_1 + F_{P2} \cdot y_2 + \cdots + F_{Pn} \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} F_{Pi} \cdot y_i \qquad (5-2)$$

当这些集中力 F_{Pi} 作用于影响线的同一直线段时(图 5-15b),可用其合力 F_R 代替,即

$$S = F_R \cdot y_0 = F_R \cdot x_0 \tan \alpha \qquad (5-3)$$

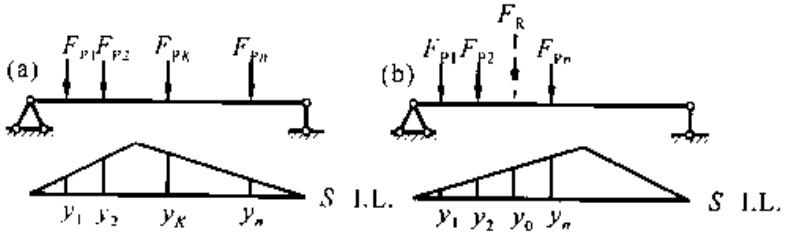


图 5-15 集中力引起的量值

式中,y_0 为合力 F_R 位置 x_0 处影响线的纵标,$\tan \alpha$ 为直线段斜率。有兴趣的读者可仿图乘法的推导思路证明上述结论。

2. 分布力作用情形

图 5-16a 所示结构上作用有分布荷载 $q(x)$,图 5-16b 为某量 S 的影响线。将 $q(x)\mathrm{d}x$ 作为集中力,利用式(5-2)可得

$$S = \int_l^m q(x) \cdot y(x)\mathrm{d}x \qquad (5-4)$$

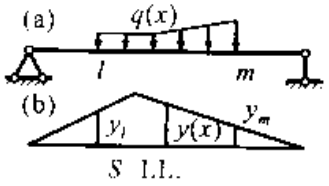


图 5-16 分布荷载情况

对于均布荷载,即 q 为常数,则上式变为

$$S = q\int_l^m y(x)\mathrm{d}x = q \cdot A \qquad (5-5)$$

式中,A 为由基线与影响线在荷载始、终点间的影响线面积。当荷载作用区域对应的影响线是同一直线段时,有与集中力作用情况相同的结论,即式(5-3)成立。

5-4-2 利用影响线确定定位荷载最不利荷载分布

结构上作用的定位荷载是一种时有时无、可以任意分布的荷载,如雪载、人群、货物荷载等。对应不同的荷载分布有不同的内力分布,使指定量达到最大或最小的荷载分布称为该量的**最不利荷载分布**(the most unfavorable load distribution)。利用影响线可方便地确定最不利荷载分布。

图 5-17a 所示伸臂梁在定位荷载作用下,跨中截面 K 的弯矩 M_K 的最不利荷载分布如图 5-17b、c 所示,其中图 5-17b 为 M_K 发生最大正弯矩的荷载分布,图 5-17c 为 M_K 发生最大负弯矩(最小弯矩)的荷载分布。其最

大和最小弯矩值可由式(5－5)计算。

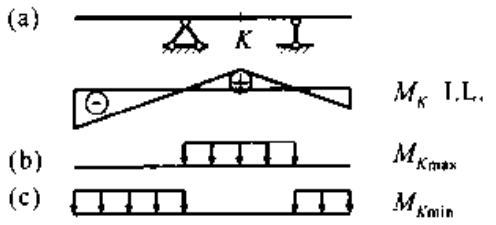


图 5－17　定位荷载作用下伸臂梁的最不利荷载分布

同理，当比较或确定不同的荷载组合对结构的影响时，也可这样进行。

5－4－3　利用影响线确定移动荷载最不利位置

当结构上作用有移动荷载时，结构上指定量随荷载位置不同而取不同值，使该量达到最大或最小值(最大负值)时的荷载位置称该量的**最不利荷载位置**(the most unfavorable load position)。

1．确定最不利荷载位置和最大值的基本思路

设由集中力所组成的移动荷载，当 F_{PK} 位于坐标 x 时的物理量值为 S，则由式(5－2)可得

$$S=\sum_i F_{Pi}\cdot y_i$$

如果 S 取极大值，则在移动荷载沿坐标方向前进或倒退一微小距离 Δx 时，S 的增量必须小于或等于零，也即

$$\Delta S=\sum_i F_{Pi}\cdot \Delta y_i\leqslant 0$$

其中，Δy_i 是荷载前进或倒退 Δx 时第 i 个集中力下影响线的竖标增量。同理，如果 S 取极小值，则增量应该大于或等于零。

据此，最不利荷载位置和对应的最大值，应该是所有可能产生极大值的位置中最大一个的位置和数值。

2．临界力及判别准则

设某量 S 的影响线为一多边形如图 5－18a 所示，某组集中移动荷载如图 5－18b 所示。由于 $S=\sum_i F_{Pi}\cdot y_i$，S 的极值应发生在某力 F_{PK} 位于影响线纵标顶点处，如图 5－18c 所示。荷载向右、向左移动 Δx 后影响线的直线段上合力作用情形如图 5－18d、e 所示。

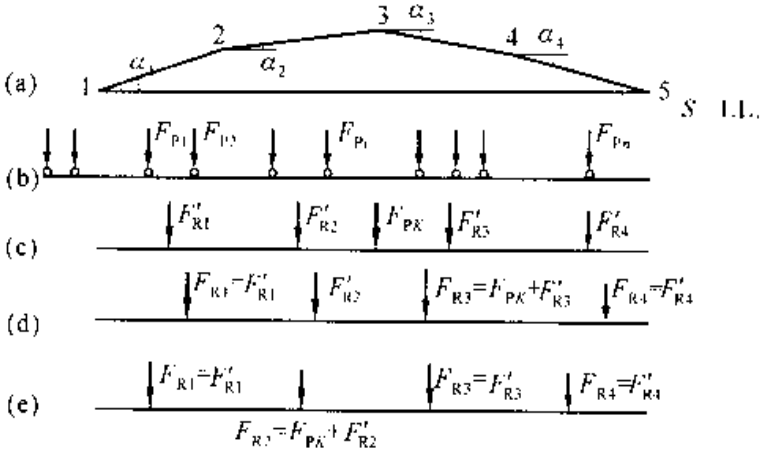


图 5－18　多边形影响线判别准则推导示意

由图 5－18 可见，要使 S 为极大值，必须满足

$$\Delta x>0\ (\text{向右}),\Delta S=\Delta x\sum_{i=1}^{4}F_{Ri}\cdot\tan\alpha_i\leqslant 0\ \Rightarrow\sum_{i=1}^{4}F_{Ri}\cdot\tan\alpha_i\leqslant 0 \tag{5-6a}$$

$$\Delta x<0\ (\text{向左}),\Delta S=\Delta x\sum_{i=1}^{4}F_{Ri}\cdot\tan\alpha_i\leqslant 0\ \Rightarrow\sum_{i=1}^{4}F_{Ri}\cdot\tan\alpha_i\geqslant 0 \tag{5-6b}$$

式中⇒表示这将必须的意思。式(5－6)表明，在移动荷载向左、右移动时，$\sum_{i=1}^{4}F_{Ri}\cdot\tan\alpha_i$ 应该变号。这就是判别最不利位置的准则。需要指出的是，α_i 逆时针为正；式(5－6)仅是极值条件，为求最大值需要试算。

若 F_{PK} 位于影响线顶点能满足判别准则时，此时称为**临界力** F_{Pcr}，对应的移动荷载位置称为**临界荷载位置**。

基于上述分析过程，可得到如下推论：

● 最小值对应的判别条件是：$\Delta x>0$ 时，$\sum_{i}F_{Ri}\cdot\tan\alpha_i\geqslant 0$，$\Delta x<0$ 时，$\sum_{i}F_{Ri}\cdot\tan\alpha_i\leqslant 0$。

● 当影响线为三角形时，若称顶点一侧合力除顶点该侧基线长度为等效均布荷载集度，则作为上述准则的特例，三角形影响线判别准则为“F_{PK} 归于顶点哪一侧，那一侧的等效均布荷载集度就大于(或等于)另一侧”。

3．最不利位置确定及最大值计算举例

[**例题 5－10**]　图 5－19a 所示为中—活荷[1]，图 5－19b 所示为某量 S 的影响线。试求荷载最不利位置和 S 的最大值。

解：(1) 首先考虑列车由左向右开行($\Delta x>0$)的情形。

将 F_{P4} 放在影响线最高顶点，荷载布置如图 5－19c 所示。

计算 $\Sigma F_{Ri}\tan\alpha_i$，由图 5－19b 可知

$$\tan\alpha_1=\frac{1}{8},\quad \tan\alpha_2=\frac{0.25}{4},\quad \tan\alpha_3=\frac{0.75}{6}$$　　荷载右移

$$\Sigma F_{Ri}\tan\alpha_i=(F_{P5}+q\times 5\text{ m})\tan\alpha_1+(F_{P4}+F_{P3}+F_{P2})\tan\alpha_2+F_{P1}\tan\alpha_1=15.875\text{ kN}>0$$

F_{P4} 不是临界荷载，此时 $\Delta S>0$，欲使 S 增加荷载还需右移。

将 F_{P5} 放在影响线最高顶点，荷载布置如图 5－19d 所示。

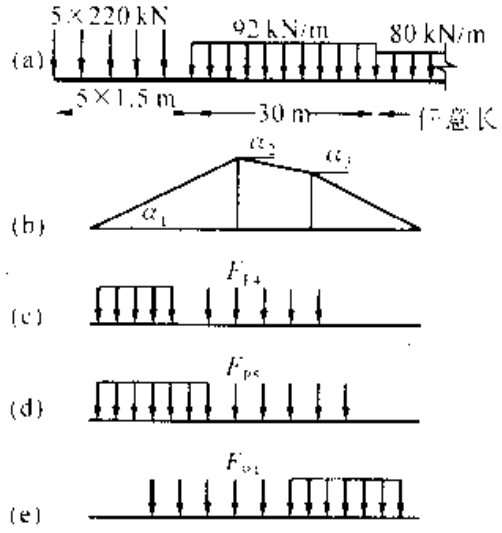


图 5－19　例题 5－10 图

荷载右移 ($\Delta x>0$)：

$$\Sigma F_{Ri}\tan\alpha_i=q\times 6.5\text{ m}\cdot\tan\alpha_1+(F_{P5}+F_{P4}+F_{P3})\tan\alpha_2+(F_{P2}+F_{P1})\tan\alpha_1=21.5\text{ kN}<0$$

荷载左移($\Delta x<0$)：

$$\Sigma F_{Ri}\tan\alpha_i=(q\times 6.5\text{m}+F_{P5})\tan\alpha_1+(F_{P4}+F_{P3})\tan\alpha_2+(F_{P2}+F_{P1})\tan\alpha_1=19.75\text{ kN}>0$$

所以 F_{P5} 是临界力。

经判别验证其他力均不是临界力。由此，对应图 5－19d 所示临界位置

[1] 中—活荷是中华人民共和国铁路标准活荷的简称，是我国铁路桥涵设计使用的标准荷载。此外，还有公路桥涵设计使用的标准荷载。

算得 S 的最大值

$$S=1\ 102\ \text{kN}$$

(2) 考虑列车由右向左开行的情形($\Delta x<0$)。

将 F_{P4} 放在影响线最高顶点,荷载布置如图 5-19e 所示。

荷载右移($\Delta x>0$):

$$\Sigma F_{Ri}\tan\alpha_i=(F_{P1}+F_{P2}+F_{P3})\tan\alpha_1+(F_{P4}+F_{P5}+q\times 1\ \text{m})\tan\alpha_2+q\times 6\ \text{m}\cdot\tan\alpha_1=-19.75\ \text{kN}<0$$

荷载左移($\Delta x<0$):

$$\Sigma F_{Ri}\tan\alpha_i=(F_{P1}+F_{P2}+F_{P3}+F_{P4})\tan\alpha_1+(F_{P5}+q\times 1\ \text{m})\tan\alpha_2+q\times 6\ \text{m}\cdot\tan\alpha_1-21.5\ \text{kN}>0$$

F_{P4} 是临界力。

经判别验证其他力均不是临界力。由此,对应图 5-19e 所示临界位置算得 S 的最大值

$$S=1\ 110\ \text{kN}$$

比较左行与右行产生的 S 值,可见

$$S_{max}=1\ 110\ \text{kN}$$

[**例题 5-11**] 试求图 5-20a 所示简支梁 K 截面弯矩的最不利荷载位置。

解:首先作出 M_K 的影响线,如图 5-20b 所示,然后作临界力判别如下:

F_{P1}:
$$\begin{cases}\dfrac{2\ \text{kN}}{6\ \text{m}}<\dfrac{4.5\ \text{kN}}{10\ \text{m}}\\[2ex]\dfrac{2\ \text{kN}+4.5\ \text{kN}}{6\ \text{m}}>\dfrac{0}{10\ \text{m}}\end{cases}$$ (是临界力)

F_{P2}:
$$\begin{cases}\dfrac{7\ \text{kN}}{6\ \text{m}}>\dfrac{6.5\ \text{kN}}{10\ \text{m}}\\[2ex]\dfrac{(7+2)\ \text{kN}}{6\ \text{m}}>\dfrac{4.5\ \text{kN}}{10\ \text{m}}\end{cases}$$ (不是临界力)

F_{P3}:
$$\begin{cases}\dfrac{3\ \text{kN}}{6\ \text{m}}<\dfrac{(7+2+4.5)\text{kN}}{10\ \text{m}}\\[2ex]\dfrac{(3+7)\ \text{kN}}{6\ \text{m}}>\dfrac{(2+4.5)\text{kN}}{10\ \text{m}}\end{cases}$$ (是临界力)

F_{P4}:
$$\begin{cases}\dfrac{0}{6\ \text{m}}<\dfrac{(3+7+2)\text{kN}}{10\ \text{m}}\\[2ex]\dfrac{3\ \text{kN}}{6\ \text{m}}<\dfrac{(7+2)\text{kN}}{10\ \text{m}}\end{cases}$$ (不是临界力)

根据临界荷载位置(图 5－20c、d)，计算荷载位置对应的影响线纵标(图 5－20b)。计算与临界力 F_{P1} 和 F_{P3} 相对应的 M_K 值为

$$M_K^1 = F_{P1} \times 3.75\ \text{m} + F_{P2} \times 1.25\ \text{m} = 19.375\ \text{kN·m}$$

$$M_K^3 = F_{P1} \times 0.38\ \text{m} + F_{P2} \times 1.88\ \text{m} + F_{P3} \times 3.75\ \text{m} + F_{P4} \times 1.25\ \text{m}$$
$$= 35.47\ \text{kN·m}$$

由此试算结果可得 M_K 的最大值为

$$M_{K\max} = 35.47\ \text{kN·m}$$

M_K 的最不利荷载位置如图 5－20d 所示。

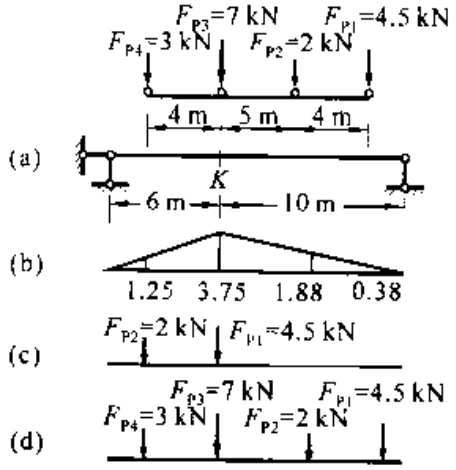


图 5－20　例题 5－11 图

5－4－4　简支梁的绝对最大弯矩

在移动荷载作用下，可求出简支梁任意截面的最大弯矩。所有截面最大弯矩中的最大者称为简支梁的**绝对最大弯矩**(absolute maximum bending moment)。对于等截面梁，发生绝对最大弯矩的截面为最危险截面，因此绝对最大弯矩是简支梁(如吊车梁等)设计的依据。

求某量的最不利荷载位置时，该量的位置已知。但是，确定绝对最大弯矩时，绝对最大弯矩发生在哪一截面是未知的，哪一个荷载位于该截面处也是未知的。

当移动荷载由集中力构成时，简支梁的弯矩图是凸多边形。从这点出发，可按如下思路确定绝对最大弯矩：

- 绝对最大弯矩必在某力 F_{PK} 作用的截面 x 处。
- 当 F_{PK} 作用点弯矩为绝对最大时，该截面弯矩 $M_K(x)$ 对位置 x 的一阶导数等于零。由此可确定截面位置 x。
- 将所求得的截面位置 x 代回 $M_K(x)$ 的表达式中，即可得到 F_{PK} 对

应的极值弯矩。

● 对一些可能的临界力，计算极值弯矩，所有极值弯矩中最大者便是绝对最大弯矩。

对于图 5－21 所示简支梁，按上述思路可写出力 F_{PK} 作用点位置坐标为 x 时，作用点截面的弯矩为

$$M_K(x)=F_{Ay}\cdot x-M_K^{L}=\frac{F_R}{l}(l-x-a)x-M_K^{L}$$

其中，M_K^{L} 表示 F_{PK} 左侧梁上各力对 F_{PK} 作用点的力矩之和；$F_{Ay}=\dfrac{F_R}{l}(l-x-a)$，$F_R$ 为位于梁上所有力的合力，a 为合力 F_R 到 F_{PK} 的距离，F_{PK} 在 F_R 左边时 a 为正，反之为负。由此，根据极值条件：

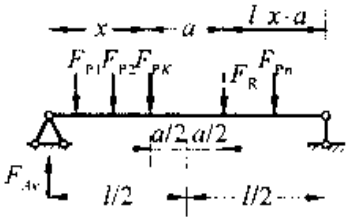


图 5－21　简支梁绝对最大弯矩

$$\frac{\mathrm{d}M_K}{\mathrm{d}x}=\frac{F_R}{l}(l-2x-a)=0$$

可得

$$x=\frac{l}{2}-\frac{a}{2} \tag{5-7}$$

这表明，当 F_{PK} 作用点处截面弯矩达到最大值时，F_{PK} 与 F_R 对称作用于梁中点的两侧，其值为

$$M_{K\max}=\frac{F_R}{l}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-M_K^{L} \tag{5-8}$$

依次将每个力作为临界力按式(5－8)计算极值，再在这些极值中选出最大值，它就是绝对最大弯矩。

需要指出的是，在将临界力 F_{Pcr} 和合力 F_R 置于跨中等距离两侧时，如果有力移入或移出作用范围，则合力 F_R 及它和临界力 F_{Pcr} 间的距离 a 要重新计算。

经验表明，绝对最大弯矩总是发生在跨中截面附近，因此可用跨中截面弯矩影响线近似判断移动荷载中哪些力是临界荷载。实际计算时可按下述步骤进行：

(1) 求出能使跨中截面发生最大值的全部临界力。

(2) 对每一临界荷载确定梁上 F_R 和相应的 a，然后用式(5－8)计算可能的绝对最大弯矩。

(3) 从这些可能的最大值中找出最大的，它即为所求绝对最大弯矩。

[例题 5－12]　试求图 5－22a 所示简支梁在所示荷载作用下的绝对最大弯矩，已知 $F_{P1}=F_{P2}=F_{P3}=F_{P4}=324.5\ \mathrm{kN}$。

解：作出简支梁跨中截面 C 弯矩影响线如图 5－22b，并确定出使 C 截面弯矩发生最大值的临界力。对本题移动荷载，其临界力有两个：F_{P2} 和 F_{P3}。

将 F_{P2} 放在梁中点（图 5－22c），计算梁上合力 F_R 和 F_R 到 F_{P2} 的距离 a

$$F_R = F_{P2} + F_{P3} = 649\ \text{kN}$$

$$a = 0.725\ \text{m}$$

将 F_R 和 F_{P2} 对称放在中点 C 两侧（图 5－22d），F_{P2} 作用点即是发生绝对最大弯矩的截面，其值为

$$M_{\max}^{2} = \frac{649\ \text{kN} \times [(6-0.725)\text{m}]^2}{4 \times 6\ \text{m}} - 0 = 752.5\ \text{kN·m}$$

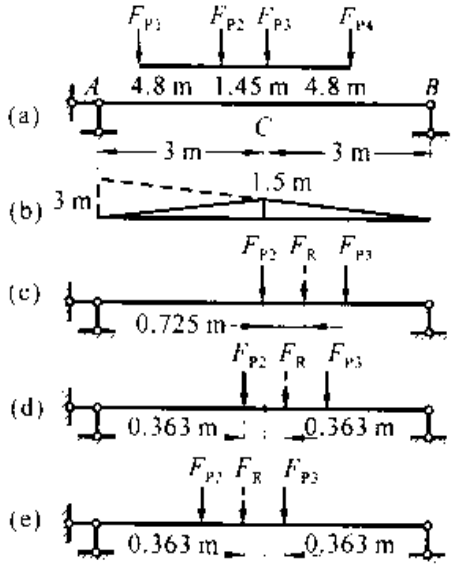


图 5－22　例题 5－12 图

把 F_{P3} 放在 C 点，重复上面过程可得

$$F_R = 649\ \text{kN}$$

$$a = 0.725\ \text{m}\quad (F_R \text{ 在 } F_{P3} \text{右侧})$$

$$M_{\max}^{3} = \frac{649\ \text{kN} \times [6\ \text{m} - (-0.725)\text{m}]^2}{4 \times 6\ \text{m}} - 470.5\ \text{kN·m}$$

$$= 752.5\ \text{kN·m}$$

即另一发生绝对最大弯矩的截面在 C 点右侧 $\frac{a}{2}$ 处。对比两结果此移动荷载下两个位置都是绝对最大的。

5－4－5　内力包络图

由在恒载和活荷载共同作用下各截面内力的最大值连接而成的曲线称

为内力包络图(envelope for internal force)。包络图由两条曲线构成,一条由各截面内力最大值构成,一条由最小值构成,它是钢筋混凝土梁设计计算的依据。包络图分为**弯矩包络图**(envelope for bending moment)和**剪力包络图**(envelope for shearing force)。

作梁的弯矩(剪力)包络图时,可将梁沿跨度分成若干等份,利用影响线求出各等分点的最大弯矩(剪力)和最小弯矩(剪力),以截面位置作横坐标,求得的值作为纵坐标,用光滑曲线连接各点即可获得包络图。

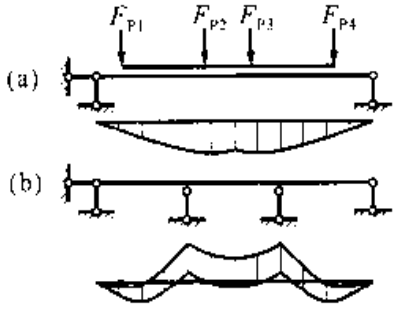


图 5 23 弯矩包络图

图 5-23a、b 所示分别为受某集中移动荷载的简支梁和受恒载和分段活载连续梁的弯矩包络图示意图。不难想象,要想较光滑地画出连续梁的内力包络图,手算工作量是很大的,一般需要用计算机进行分析和绘制。对此有兴趣的读者,可参考龙驭球、包世华主编,《结构力学》,上册,高等教育出版社,1994 年,或者六校研制组,《结构力学计算机辅助教学系统 SMCAI》,高等教育出版社,1996 年。

§5-5 结论与讨论

5-5-1 本章小结

● 在单位移动荷载下物理量随荷载位置变化规律的图形,称为该物理量的影响线。所作影响线应具有"正确的外形、符号和控制值"三要素。其横坐标为单位移动荷载的作用位置,纵坐标为荷载作用在此处时的影响系数值。

● 作影响线有两种方法:静力法和虚功法。当只需影响线外形时,用虚功法非常方便。由于影响线实质上是影响系数的函数曲线,因此其量纲为物理量量纲和荷载量纲的比值。

● 静力法作静定结构影响线,只要注意移动荷载位于不同区段时,是否影响所要求的量的求解,也即影响系数方程是否要分段列式。其他的求解思路和方法与固定荷载时相同。

● 静力法作超静定结构影响线时,为了建立影响系数方程,可取需求影响线的量作基本未知力,以超静定次数减一的结构作基本结构,按一次超

静定用力法求解。由于基本结构可能是超静定的，因此为了求 δ_{11} 和 $\delta_{1P}(x)$，要先求解超静定次数减一的结构，然后才能按计算超静定结构位移获得 δ_{11} 和 $\delta_{1P}(x)$。与静定结构一样，如果单位移动荷载位置 x 将影响 $\delta_{1P}(x)$的计算，则影响系数方程也要分段建立。

● 作经结点传荷的主梁的影响线时，可先按主梁直接承受荷载作影响线，然后把结点投影到影响线和基线延长线上，以直线连接相邻结点投影值，即可获得这种间接荷载作用下的影响线。

● 非结点传荷超静定结构超静定部分的影响线一定是曲线，但如果超静定结构包含静定部分，静定部分的反力、内力影响线仍为直线图形。

● 由于影响线的应用基于叠加原理，因此只对线性弹性结构适用。

● 所谓最不利荷载位置，是对指定所要求的量和给定移动荷载，确定产生最大影响量所对应的荷载位置。利用影响线确定最不利位置实质上是极值判别的试算方法。为减少判别计算工作量，应记住：一般取荷载密集、数值大的力放在顶点处试算。经判别条件识别出的非临界力，不需要参加试算。对于汽车等队列移动荷载，应该考虑左行和右行两种情形。

● 在不同时考虑多种荷载组合的条件下，包络图是指对某一组移动荷载，将各截面的物理量最大(或者最小)值以折线连起来的图形，也即其纵坐标为该截面在此移动荷载下的最大(或最小)值。

● 指定移动荷载下简支梁绝对最大弯矩和结构内力包络图，是承受移动荷载作用时结构设计的重要依据。

5-5-3 几点讨论

● 当影响线为三角形、移动荷载为均布荷载时，最不利位置是“顶点两侧荷载长度与对应的顶点两侧基线长度之比相等”，或者“使荷载起点、终点处的影响线竖标相等”。请读者证明上述结论。

● **位移影响线**

除可借助影响线研究活荷载对结构反力、内力的作用外，也可通过作位移影响线研究活荷载对指定位移的作用。静力法作位移影响线的过程与反力、内力影响线类似。

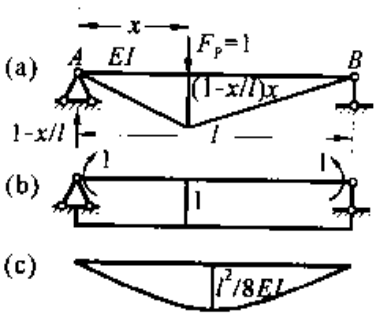


图 5-24　位移影响线

下面以图 5-24a 所示梁，作 A、B 两支座截面的相对转角的影响线为例加以说明。

作出单位弯矩图和荷载弯矩图如图 5-24a、b 所示，利用图乘法可求出

A、B 两支座截面的相对转角 δ 的影响系数方程为

$$\delta=\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\cdot l\left(1-\frac{x}{l}\right)x\times 1=\frac{x(l-x)}{2EI}$$

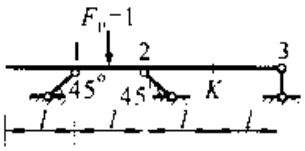
由此作出位移影响线如图 5－24c 所示。

利用位移互等定理可避免建立影响系数方程。由位移互等定理可知，与要求广义位移影响线对应的单位广义力所产生的变形曲线就是所求位移的影响线。

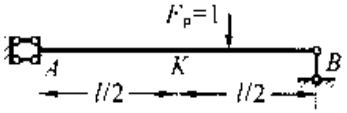
习　题

5－1　用静力法作图示梁的支杆反力 F_{R1}、F_{R2}、F_{R3} 及内力 M_K、F_{QK}、F_{NK} 的影响线。

5－2　用静力法作图示梁的 F_{By}、M_A、M_B 和 F_{QK} 的影响线。

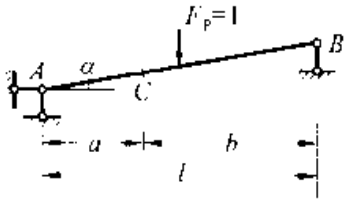


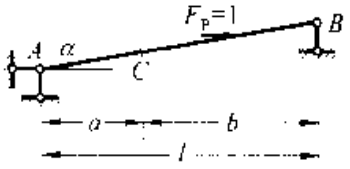
习题 5－1 图



习题 5－2 图

5－3　用静力法作图示斜梁的 F_{Ay}、F_{Ax}、F_{By}、M_C、F_{QC} 和 F_{NC} 的影响线。

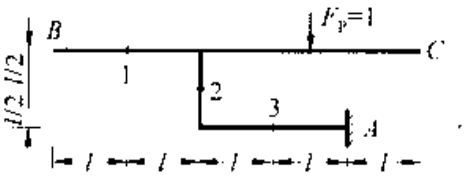




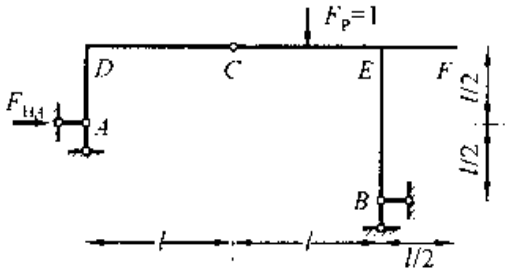
习题 5－3 图

5－4　用静力法作图示刚架 F_{Q1}、M_2（设以左侧受拉为正）、F_{N2}、M_3 和 F_{Q3} 的影响线。$F_P=1$ 在 BC 上移动。

5－5　用静力法作图示刚架的 F_{Ax}、F_{By}、F_{QF}^{R} 和 F_{QE}^{L} 的影响线。$F_P=1$ 在 DF 上移动。

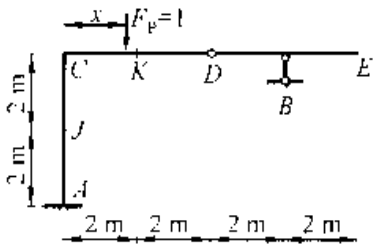


习题 5－4 图

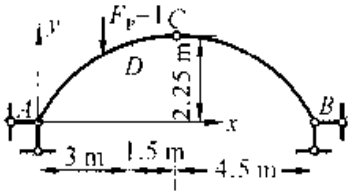


习题 5－5 图

5－6　作图示刚架 M_J、F_{QJ}、M_K、F_{QK}影响线、$F_P=1$ 在 CE 上移动。



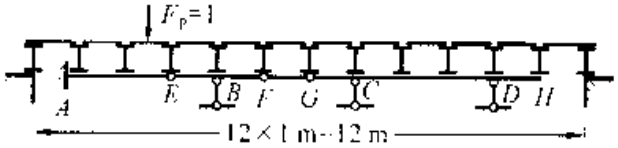
习题 5－6 图



习题 5－7 图

5－7　作三铰拱截面 D 的 M_D、F_{QD}、F_{ND}的影响线。拱轴方程 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$

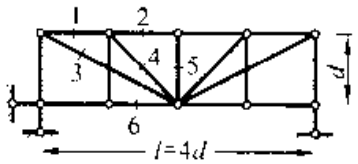
5－8　作静定多跨梁 F_{Ay}、F_{Bv}、M_1 的影响线。



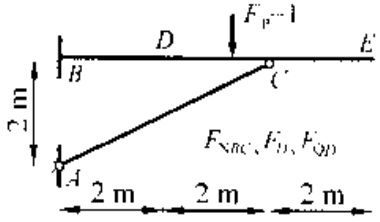
习题 5－8 图

5－9　分别就 $F_P=1$ 在上弦和下弦移动作图示桁架指定杆件的内力影响线。

5－10　用静力法作图示组合结构的指定量值的影响线。

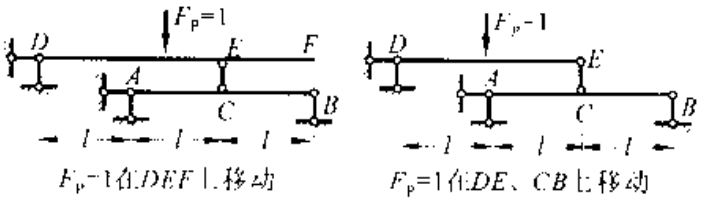


习题 5－9 图



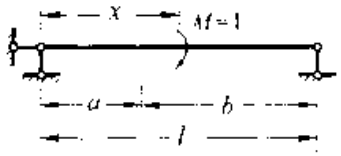
习题 5－10 图

5－11　作图示结构 F_{By}、M_C、F_{QC}^R 和 F_{QC}^L影响线。



习题 5－11 图

5－12　图示简支梁上有单位力偶移动荷载 $m=1$，试作 F_{Ay}、F_{By}、F_{QC}、M_C 影响线。

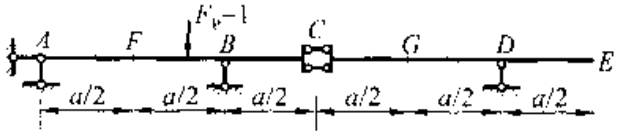


习题 5-12 图

5-13　试用机动法重作习题 5-1 和习题 5-2 的各项影响线。

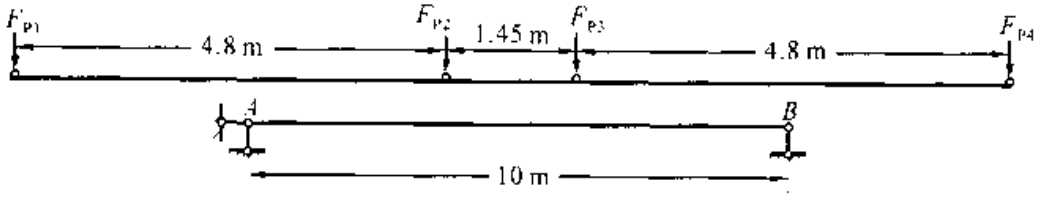
5-14　试用机动法重作习题 5-8 的各项影响线。

5-15　试用机动法作图示多跨静定梁 M_F 和 F_{QG} 的影响线。



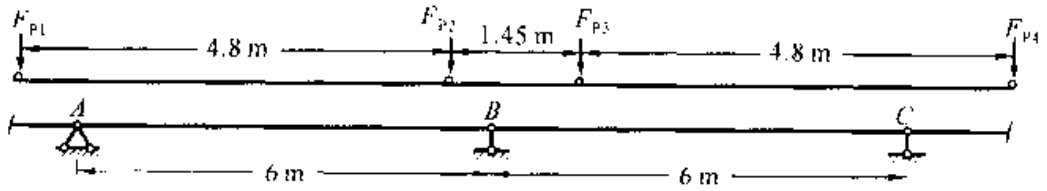
习题 5-15 图

5-16　试求图示吊车梁在两台吊车移动过程中，跨中央截面的最大弯矩。$F_{P1}=F_{P2}=F_{P3}=F_{P4}=324.5\ \text{kN}$。



习题 5-16 图

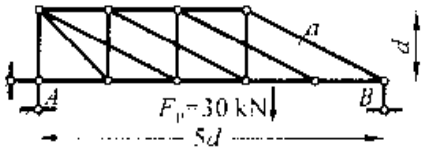
5-17　两台吊车的轮压和轮距如图所示，试求 B 柱的最大压力。$F_{P1}=F_{P2}=478.5\ \text{kN}$，$F_{P3}=F_{P4}=324.5\ \text{kN}$。



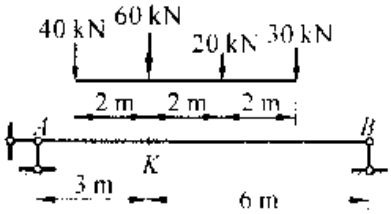
习题 5-17 图

5-18　试求在图示移动荷载作用下，桁架杆件 a 的内力最小值。

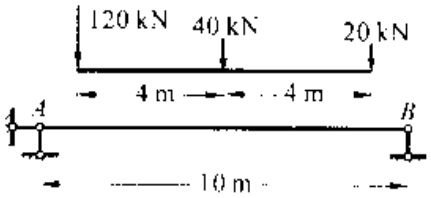
5-19　试求图示简支梁在移动荷载作用下截面 K 的最大正剪力和最小剪力。



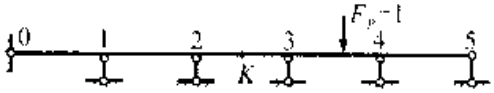
习题 5－18 图



习题 5－19 图



习题 5－20 图

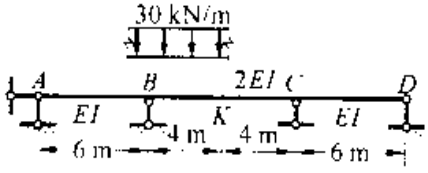


习题 5－21 图

5－20　移动荷载如图所示，试求简支梁绝对最大弯矩。

5－21　试绘出图示连续梁的 F_{By}、M_0、F_{Ly}、M_K、F_{QK}、F_{Q2}^L 和 F_{Q2}^R 影响线的形状。

5－22　试求图示连续梁在可动均布荷载 q = 30 kN/m 作用下，截面 K 的最大弯矩和最小弯矩。（提示：利用对称性。）



习题 5－22 图

第6章

矩阵位移法

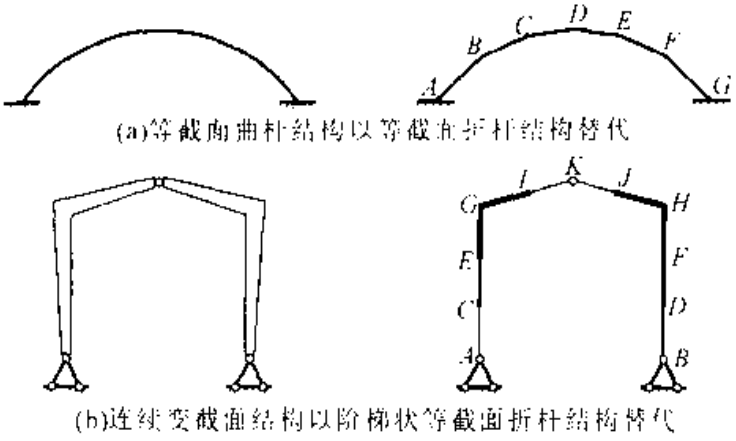
矩阵位移法是以结构位移为基本未知量，借助矩阵进行分析，并用计算机解决各种杆系结构受力、变形计算的统一方法。本方法是第4章位移法的直接拓展。

§6-1 概　　述

第4章中所介绍的位移法，用列平衡方程建立位移法方程，或用典型方程方法建立方程，其基本思路都是：取结构结点位移作基本未知量，将待分析结构拆成已知结点力－结点位移关系的单跨梁集合，通过令结构发生待定的基本未知位移，在分析各单跨梁受力结果的基础上，由保证结构平衡建立位移法线性代数方程组，从而求得基本未知量。当位移未知量数目很大时，方程的建立和手工求解是十分困难的。由于计算技术的发展，将位移法的上述思想加以推广，以矩阵这一数学工具进行推演，用计算机程序作数值解算，这就是本章要介绍的矩阵位移法。实质上，作为力法的拓展，还有矩阵力法，但由于其处理不如矩阵位移法程序实现简单，因此应用不广，故本书不予介绍。

矩阵位移法解算杆系结构时，首先要用**结点**(node)将结构划分成单元。对杆系结构，一般取杆件的交汇点、截面的变化点、支承点、有时也以集中荷载的作用点作为结点，从而把结构分解成等截面直杆(单元)的集合。对于曲杆、连续变截面的结构，为了实现将其拆成等直单元的目的，如图6-1所示需要首先作以直代曲、以阶状变截面代替连续变截面的处理，然后再确定结点将其拆成单元。不难想到，这样处理的结果是近似的，计算精度取决于划分单元的多少。

用矩阵位移法解算杆系结构，主要应解决以下问题：



(a)等截面曲杆结构以等截面折杆结构替代

(b)连续变截面结构以阶梯状等截面折杆结构替代

图 6-1 曲杆结构、连续变截面结构的处理方法

● **单元分析**(element analysis)——研究单元的力学特性,建立单元杆端力和杆端位移之间的关系。

● **整体分析**(global analysis)——研究整体的平衡条件,解决平衡方程组的组成方法等问题。

● **编制程序**(programming)——确定编程语言,根据矩阵位移法原理设计计算程序以供应用。在随本书光盘上给出了用 FORTRAN77 和 FORTRAN90 语言编写的源程序和执行程序,读者可以参阅和应用。

在解决单元分析和整体分析以前,除上述确定结点以便将结构拆成单元的工作外,还应该做以下所谓结构的离散化工作,它包括两方面含义:

● **离散化**。对用结点将结构进行划分所得到的单元集合体,按一定顺序对结点、单元分别加以编号,为数据化作准备。

● **数据化**。用数字描述结点坐标、单元材料与截面特性以及支承信息和荷载信息,等等,为矩阵位移法的分析、计算程序提供信息,称为计算简图的数据化。

具体来说,结构的离散化要在计算简图上做以下几项工作:

● **整体坐标**。对整个结构确定一个统一的坐标系,称为**整体坐标系**(global coordinate),以便确定结点位置和由单元特性组成平衡方程组时有统一的标准。

● **结点编码**。在确定结点后,对结点以数字顺序编号,此号码称为结点整体码(或称整体编码)。属于同一单元的结点,称为**相关**(或相邻)**结点**。相关结点编号的最大差值应该尽可能小。

● **单元编号**。对单元也应按一定顺序以数字编号,称为单元码,习惯上用①、②等来标记。为了便于分析,一般可按杆件类型依次编排。例如,刚架可以先编梁后编柱或反之,当然这不是必须的。

● **单元坐标系**。结构离散化的结果，单元在整体坐标中的方位一般不会全相同，为能对各单元用统一方法进行分析，需要为每一单元确定一个固接于单元的局部坐标系 $\overline{Oxy}$（或 $\overline{Oxyz}$），一般以杆轴线的某方向作为 x 轴正向，在轴线上以箭头作正方向标记，另外的坐标轴与截面形心主轴一致。本书一律采用右手坐标系。

● **位移编码**。不同的计算问题，结点位移个数不同。例如，连续梁每结点一个转角，平面桁架每结点二个线位移，空间刚架每结点六个位移（三个线位移 u，v，w 和三个角位移 θ_x，θ_y，θ_z）等。根据具体问题，按结点编码自小到大的顺序，对每结点的位移进行顺序编码，这一位移顺序号称作结点**整体位移码**(global displacement code)。某些分析中将已知位移为零的号码都编为零，其他位移再按结点顺序编排。

除上述工作外，在建立单元坐标后，单元有二个结点，以 $\overline{1}$ 记单元起点，$\overline{2}$ 记单元终点，为单元局部结点码。根据具体问题，按 $\overline{1}$、$\overline{2}$ 的顺序将结点位移进行排序，这一位移编号称作**单元局部位移码**(element local displacement code)。

此外，关于结点坐标、单元信息、荷载信息，等等，因程序编制考虑的不同，数据准备也将是不同的。为此读者在应用程序前，应该根据具体程序准备相应的数据。

平面和空间刚架上述离散化过程可用图 6-2 加以说明。

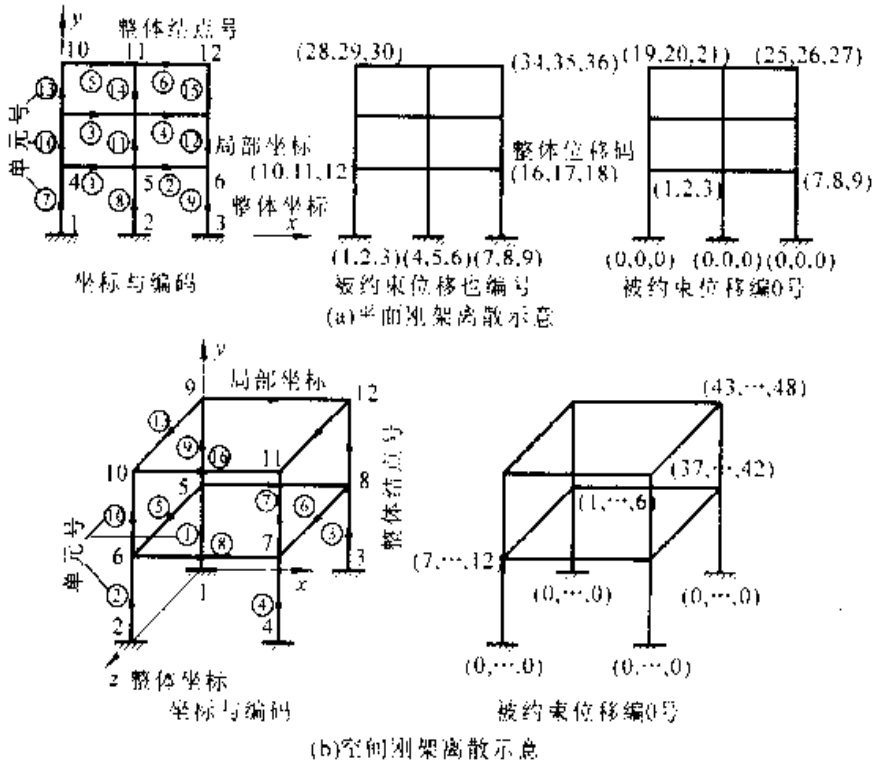


图 6-2　结构离散化过程

§6-2　单元刚度方程

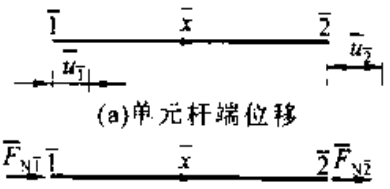
本节将在位移法的基础上，解决单元分析问题——建立单元杆端位移-单元杆端力间的关系，为整体分析做准备。

6-2-1　平面桁架单元刚度方程

对于桁架杆件单元，杆件只产生拉、压变形，如图6-3所示，在局部坐标系下根据材料力学可得

$$\bar{F}_{N\bar{1}}=\frac{EA}{l}(\bar{u}_{\bar{1}}-\bar{u}_{\bar{2}}),\quad \bar{F}_{N\bar{2}}=-\frac{EA}{l}(\bar{u}_{\bar{2}}-\bar{u}_{\bar{1}}) \tag{a}$$

式中，E 为单元材料弹性模量，A 为单元截面面积，l 为单元的长度。



(a)单元杆端位移

(b)单元杆端力

图6-3　桁架单元

引入**单元杆端位移矩阵**(element end displacement matrix) $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e=\begin{bmatrix}\bar{u}_{\bar{1}}\\ \bar{u}_{\bar{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\delta}_1\\ \bar{\delta}_2\end{bmatrix}$ 和**单元杆端力矩阵**(element end force matrix) $\bar{\boldsymbol{F}}^e=\begin{bmatrix}\bar{F}_{N\bar{1}}\\ \bar{F}_{N\bar{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{F}_1\\ \bar{F}_2\end{bmatrix}$，则式(a)可写为如下矩阵方程：

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e=\frac{EA}{l}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{b}$$

再将杆端位移和杆端力联系起来的矩阵称为**单元刚度矩阵**(element stiffness matrix)，记为 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$。也即

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e=\frac{EA}{l}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \tag{6-1}$$

则式(b)写为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e=\bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{6-2}$$

矩阵方程式(6-2)即为桁架单元的**单元刚度方程**(element stiffness equation)。

需要指出的是，上述讨论都是对单元局部坐标进行的，为了区分，以字母上面加一横，如 $\bar{\boldsymbol{F}}^e$、$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 等表示局部坐标下的量。为了便于统一表示，将带有物理含义的符号(例如轴力 $\bar{F}_{N\bar{1}}$、轴向位移 $\bar{u}_{\bar{1}}$ 等)用表示广义力、广义位移(例如 $\bar{F}_1$ 和 $\bar{\delta}_1$)的一般符号代替，并按单元局部位移码对其进行标识。上述

说明适用以下全部单元，将不再赘述。

6-2-2 连续梁单元刚度方程

对细长杆，由于轴向刚度一般远大于弯曲刚度，当不计轴向变形时，连续梁单元杆端只有如图 6-4 所示的一个广义位移和一个广义力。根据两端固定梁的形、载常数和叠加原理，可得

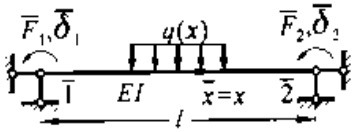


图 6-4 连续梁单元

$$\left.\begin{aligned}\bar{F}_1 &= 4i\bar{\delta}_1 + 2i\bar{\delta}_2 - \bar{F}_1^{\mathrm{F}}\\ \bar{F}_2 &= 2i\bar{\delta}_1 + 4i\bar{\delta}_2 - \bar{F}_2^{\mathrm{F}}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

式中，i 为单元的线刚度，$\bar{F}_i^{\mathrm{F}}(i=1,2)$为由单元上的荷载所引起的固端弯矩（顺时针为正）。

单元杆端位移、杆端力和固端力矩阵分别记为

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = (\bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2)^{\mathrm{T}},\quad \bar{\boldsymbol{F}}^e = (\bar{F}_1 \quad F_2)^{\mathrm{T}},\quad \bar{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{F}e} = (\bar{F}_1^{\mathrm{F}} \quad \bar{F}_2^{\mathrm{F}})^{\mathrm{T}} \qquad \text{(d)}$$

则连续梁单元的单元刚度方程为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e + \bar{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{F}e} = \bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \qquad (6-3a)$$

式中，单元刚度矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e = \frac{EI}{l}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} \qquad (6-4)$$

需要指出的是，如图 6-4 所示杆端位移、杆端力都是规定逆时针为正，而结构静力分析篇中固端弯矩规定是顺时针为正的，这时单元刚度方程为式(6-3a)。如果定义单元固端弯矩和杆端力一样逆时针为正（以下均假设固端力和杆端力正向相同），则单元刚度方程改为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e - \bar{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{F}e} = \bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \qquad (6-3b)$$

将由于单元上所受荷载而产生的杆端力组成的矩阵称为**单元等效结点荷载矩阵**，记为 $\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e$。则单元刚度方程改为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e + \bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e = \bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \qquad (6-5)$$

等效结点荷载矩阵与固端力矩阵之间存在 $\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e = -\bar{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{F}e}$，这一结论同样适用于以下单元。

6-2-3 不考虑轴向变形的平面弯曲单元刚度方程

不考虑轴向变形平面弯曲单元杆端位移、杆端力如图 6-5 所示。请读者仿照连续梁单元，利用叠加原理、形常数（有单元上荷载时还用载常数）自行建立此单元的单元刚度方程（亦称为转角位移方程）。可以证明，其结果为

单元上无荷载时，　$\bar{\boldsymbol{F}}^e = \bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$　(6－6a)

单元上有荷载时，　$\bar{\boldsymbol{F}}^e + \bar{\boldsymbol{F}}_E^e = \bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$　(6－6b)

单元杆端位移矩阵　$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = (\bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2 \quad \bar{\delta}_3 \quad \bar{\delta}_4)^T$　(6－7a)

单元杆端力矩阵　$\bar{\boldsymbol{F}}^e = (\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3 \quad \bar{F}_4)^T$　(6－7b)

单元等效结点荷载矩阵　$\bar{\boldsymbol{F}}_E^e = -(\bar{F}_1^F \quad \bar{F}_2^F \quad \bar{F}_3^F \quad \bar{F}_4^F)^T = -\bar{\boldsymbol{F}}^{Fe}$　(6－7c)

单元刚度矩阵　$\bar{\boldsymbol{k}}^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$　(6－7d)

需要强调指出的是，这里假定单元固端力（固端剪力和固端弯矩）正向规定与图 6－5 所示杆端力正向相同，必须注意，这与第 4 章中的规定是不同的。

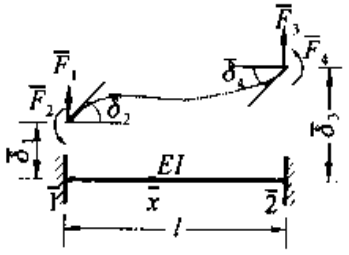


图 6－5　平面弯曲单元杆端位移、杆端力

6－3－4　平面弯曲自由式单元刚度方程

在上述基础上，在图 6－6 所示杆端位移、杆端力规定的情形下，平面自

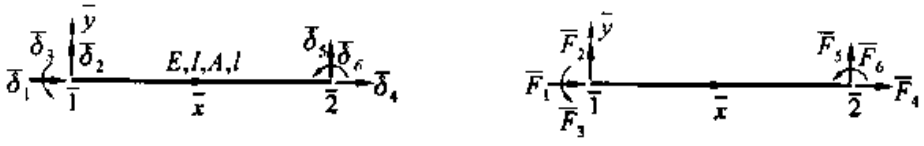


图 6－6　自由式单元杆端位移和杆端力

由式单元的单元刚度方程、单元刚度矩阵和单元等效结点荷载等，留给读者

根据形常数、载常数和叠加原理自行写出，以便进一步掌握基本概念。

6-2-3 单元刚度矩阵的性质

1. 奇异性

由于连续梁单元是无刚体位移的，它的单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 是可逆的。而对其他单元(桁架单元及所谓自由式单元)，由于单元位移是自由的，在给定平衡外力作用下可以产生惯性运动，单元的位置是不确定的，也就是说在已知平衡外力作用下，由单元刚度方程不可能求得唯一确定的位移。因此，作为位移－力间的联系矩阵 $\bar{k}^e$ 一定是奇异的。由此可见，要使自由式单元变成刚度矩阵非奇异的单元，必须引入足以限制单元产生刚体位移的约束条件。

从数学上，由式(6－1)和式(6－7d)可见，矩阵存在线性相关的行、列(不独立)，其对应的行列式一定为零，因此单元刚度矩阵是奇异的。

2. 对称性

从单元刚度矩阵的建立可见，单元刚度矩阵元素 $\bar{k}^e_{ij}$ 实际上都是反力系数，$\bar{k}^e_{ij}$ 的物理意义是：单元仅发生第 j 个杆端单位位移时，在第 i 个杆端位移对应的约束上所需施加的杆端力。因此，根据反力互等定理，单元刚度矩阵一定是对称的，也即 $\bar{k}^e_{ij}=\bar{k}^e_{ji}$。

6-2-4 单元分析举例

[例题 6－1] 图 6－7 所示桁架 $l=2$ m，各杆 $EA=1.2\times10^6$ kN，局部坐标 $\bar{x}$ 如图箭头所示。试求图示①(1－2 杆)、②(1－4 杆)单元的局部坐标单元刚度矩阵。

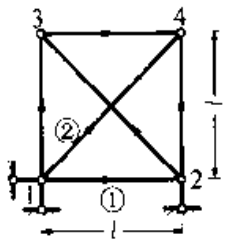


图 6－7 桁架单元例题

解：①号单元：抗拉刚度 $EA/l=6\times10^5$ kN/m，由式(6－1)可得

$$\bar{k}^{①}=\frac{EA}{l}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=6\times10^5\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\text{kN/m}$$

②号单元：抗拉刚度为 $EA/\sqrt{2}\,l=2.121\,3\times10^5$ kN/m，由式(6－1)可得

$$\bar{k}^{②}=\frac{EA}{\sqrt{2}\,l}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=2.121\,3\times10^5\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\text{kN/m}。$$

请考虑 1－3 和 3－2 单元 $\bar{k}^e$ 等于多少？

[例题 6－2] 图 6－8 所示不考虑轴向变形平面刚架各杆 $EI=2.16\times10^5$ kN·m^2，局部坐标如图所示。试求图示各单元的局部坐标单元刚度矩

阵。

解：①号单元：单元长度 $l=5$ m，

$$\frac{12EI}{l^3}=20\ 736\ \text{kN/m}$$

$$\frac{6EI}{l^2}=51\ 840\ \text{kN}$$

$$\frac{2EI}{l}=86\ 400\ \text{kN·m}$$

$$\frac{4EI}{l}=172\ 800\ \text{kN·m}$$

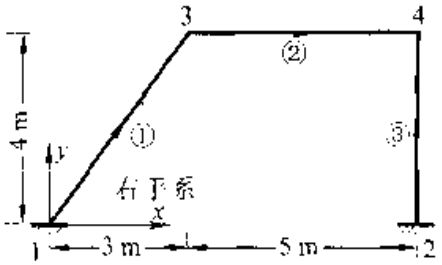


图 6-8　不考虑轴向变形的刚架

将上述数值结果代入式(6-7d)，可得①号单元的单元刚度矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{k}}^{①}=\begin{bmatrix} 20\ 736\ \text{kN/m} & 51\ 840\ \text{kN} & -20\ 736\ \text{kN/m} & 51\ 840\ \text{kN} \\ 51\ 840\ \text{kN} & 172\ 800\ \text{kN·m} & -51\ 840\ \text{kN} & 86\ 400\ \text{kN·m} \\ -20\ 736\ \text{kN/m} & 51\ 840\ \text{kN} & 207\ 36\ \text{kN/m} & -51\ 840\ \text{kN} \\ 51\ 840\ \text{kN} & 86\ 400\ \text{kN·m} & -51\ 840\ \text{kN} & 172\ 800\ \text{kN·m} \end{bmatrix}$$

②号单元抗弯刚度和单元长度与①号单元一样，因此局部坐标下单元刚度矩阵也完全一样。

$$\overline{\boldsymbol{k}}^{②}=\begin{bmatrix} 20\ 736\ \text{kN/m} & 51\ 840\ \text{kN} & -20\ 736\ \text{kN/m} & 51\ 840\ \text{kN} \\ 51\ 840\ \text{kN} & 172\ 800\ \text{kN·m} & -51\ 840\ \text{kN} & 86\ 400\ \text{kN·m} \\ 20\ 736\ \text{kN/m} & 51\ 840\ \text{kN} & 20\ 736\ \text{kN/m} & -51\ 840\ \text{kN} \\ 51\ 840\ \text{kN} & 86\ 400\ \text{kN·m} & -51\ 840\ \text{kN} & 172\ 800\ \text{kN·m} \end{bmatrix}$$

③号单元：单元长度 $l=4$ m，

$$\frac{12EI}{l^3}=40\ 500\ \text{kN/m},\quad \frac{6EI}{l^2}=81\ 000\ \text{kN}$$

$$\frac{2EI}{l}=108\ 000\ \text{kN·m},\quad \frac{4EI}{l}=216\ 000\ \text{kN·m}$$

将上述数值结果代入式(6-7d)，可得③号单元的局部坐标下单元刚度矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{k}}^{③}=\begin{bmatrix} 40\ 500\ \text{kN/m} & 81\ 000\ \text{kN} & -40\ 500\ \text{kN/m} & 81\ 000\ \text{kN} \\ 81\ 000\ \text{kN} & 216\ 000\ \text{kN·m} & -81\ 000\ \text{kN} & 108\ 000\ \text{kN·m} \\ -40\ 500\ \text{kN/m} & -81\ 000\ \text{kN} & 40\ 500\ \text{kN/m} & -81\ 000\ \text{kN} \\ 81\ 000\ \text{kN} & 108\ 000\ \text{kN·m} & -81\ 000\ \text{kN} & 216\ 000\ \text{kN·m} \end{bmatrix}$$

[**例题 6-3**]　如果图 6-8 所示②号单元上受有向下满跨均布荷载，如图 6-9 所示，其集度 q 为 18 kN/m。试写出②号单元的单元等效结点荷载矩阵 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^{②}$。

解:由表 4-1 中的载常数可得②号单元固端内力,如图 6-9 所示。当固端内力正向规定和杆端力正向规定一致,也即沿右手坐标系局部坐标正向为正时,固端力矩阵 $\bar{\boldsymbol{F}}^{F②}$ 为

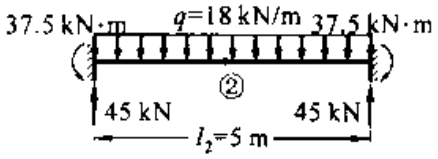


图 6-9 (2)号单元固端内力

$$\bar{\boldsymbol{F}}^{F②} = (45\ \text{kN} \quad 37.5\ \text{kN·m} \quad 45\ \text{kN} \quad -37.5\ \text{kN·m})^{\mathrm{T}}$$

根据等效结点荷载矩阵和固端力矩阵之间的关系式(6-7c),则可得②号单元

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^{②} = (-45\ \text{kN} \quad -37.5\ \text{kN·m} \quad -45\ \text{kN} \quad 37.5\ \text{kN·m})^{\mathrm{T}}$$

显然,这一结果也可按如下步骤得到:

- 根据载常数计算并按实际固端反力方向反向标在单元杆端上。
- 根据杆端位移编号顺序、杆端力正向规定,由固端反力组成等效结点荷载矩阵。

§6-3 坐标转换问题

结构离散化时,建立了两种坐标系——结构整体坐标系和单元局部坐标系。单元分析中,位移、力都是对单元局部坐标系定义的。实际结构中的每个杆件(亦即单元)方位除连续梁之外各不相同,要考虑结点位移协调、受力平衡,很自然应该有一个统一的标准,因而必须引入结构整体坐标系。显然,两种坐标系下的量存在着相互转换关系,将局部的量转换成整体的量,或者将整体的量转换成局部的量,这种转换称为**坐标转换**(transformation of coordinates)。

6-3-1 平面梁单元杆端位移、力的坐标转换

平面弯曲自由式单元在两个坐标系下的杆端位移和杆端力如图 6-10 所示。需要指出的是,字母上加横线的量表示相对局部坐标的,无横线的量是相对整体坐标的。根据图示几何关系,杆端 I 局部坐标的位移量可以用杆端整体坐标下的位移量表示如下:

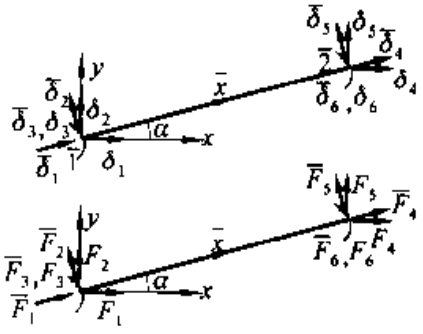


图 6-10 单元杆端位移、杆端力坐标转换

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}_{\bar{1}}=\begin{Bmatrix}\overline{\delta}_1\\ \overline{\delta}_2\\ \overline{\delta}_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\delta}_{\bar{1}}$$

其中，α 为两坐标系之间的夹角（图示逆时针转角为正），结点（位移）坐标转换矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 为

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6-8}$$

同理，杆端 $\bar{1}$ 整体坐标下的杆端力可以用局部坐标下的杆端力表示如下：

$$\boldsymbol{F}_{\bar{1}}=\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{F}_1\\ \overline{F}_2\\ \overline{F}_3\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\bar{1}}$$

读者不难写出杆端 $\bar{2}$ 位移和力之间的转换关系。基于这些关系，单元杆端位移、杆端力之间的关系为

$$\boldsymbol{\delta}^e=\begin{Bmatrix}\overline{\boldsymbol{\delta}}_{\bar{1}}\\ \overline{\boldsymbol{\delta}}_{\bar{2}}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{\bar{1}}\\ \boldsymbol{\delta}_{\bar{2}}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{T}\overline{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{6-9a}$$

$$\boldsymbol{F}^e=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_{\bar{1}}\\ \boldsymbol{F}_{\bar{2}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{\boldsymbol{F}}_{\bar{1}}\\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\bar{2}}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}}^e \tag{6-9b}$$

式中，$\boldsymbol{T}$ 如式(6-9)所示由结点坐标转换矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 块对角组成，称为**单元坐标转换矩阵**。对正交坐标系，由于 $\boldsymbol{\lambda}^{-1}=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}$，因此 $\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$。这说明对正交坐标系 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是**正交矩阵**。

6-3-2 平面组合式单元刚度方程的坐标转换

当单元上有荷载作用时，不难理解单元等效结点荷载矩阵 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}^e$ 与单元杆端力矩阵 $\boldsymbol{F}^e$ 一样，存在式(6-9b)的转换关系。因此，

$$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}})^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{F}}+\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e)^e$$

将单元局部坐标下的单元刚度方程代入，可得

$$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}})^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{F}}+\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e)^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{k}}^e\overline{\boldsymbol{\delta}}^e$$

再将式(6-9a)位移转换关系代入，可得

$$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}})^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{F}}+\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e)^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{k}}^e\overline{\boldsymbol{\delta}}^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e \tag{a}$$

这是联系整体坐标下单元杆端位移和单元杆端力的方程，称为**整体坐标下的单元刚度方程**，简称为**单元刚度方程**。如果引入整体坐标单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 为

$$\boldsymbol{k}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T} \tag{6-10}$$

则式(a)(单元刚度方程)改写为

$$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}})^e = \boldsymbol{k}^e\boldsymbol{\delta}^e \tag{6-11}$$

可见式(6-11)与式(6-5)类似。但必须清楚,上式中的量都是对整体坐标的。

6-3-3 平面桁架单元的坐标转换

平面桁架单元的坐标转换可有两种做法,其一是

$$\begin{Bmatrix}\bar{\delta}_1\\ \bar{\delta}_2\end{Bmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}(\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4)^{\mathrm{T}}$$

$$(F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}\bar{F}_1\\ \bar{F}_2\end{Bmatrix}$$

其中,$\delta_i(i=1,2)$、$\bar{F}_i(i=1,2)$分别是局部坐标杆端轴向位移和轴向力;

$\delta_{2i+1}(i=0,1)$、$F_{2i+1}(i=0,1)$分别是整体坐标 x 方向杆端位移和力;

$\delta_{2i}(i=1,2)$、$F_{2i}(i=1,2)$分别是整体坐标 y 方向杆端位移和力。

这时坐标转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix} \tag{6-12}$$

整体坐标单元刚度矩阵为 $\boldsymbol{k}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}$,其中 $\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 由式(6-1)计算。

另一种做法是,将单元局部坐标杆端位移扩展成 4 个,分别表示轴向和横向位移,也即 $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = (\bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2 \quad \bar{\delta}_3 \quad \bar{\delta}_4)^{\mathrm{T}}$,这时局部坐标单元刚度矩阵也应扩展成:

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e = \frac{EA}{l}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{6-13}$$

相应的单元坐标转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{6-14}$$

整体坐标单元刚度矩阵为 $\boldsymbol{k}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}$。不难验证两种做法结果是一样的。

6-3-4 坐标转换举例

[例题 6-4]试求例题 6-1 桁架中①、②两单元的整体坐标单元刚度矩阵。

解： ①单元 $\alpha=0$，$\boldsymbol{T}$ 为单位矩阵，因此整体单元刚度矩阵和局部单元刚度矩阵相同(只是变成 4×4 的，如式(6-13)那样)。

$$\boldsymbol{k}^{①}=\frac{EA}{l}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=6\times10^{5}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \text{kN/m}$$

②单元 $\alpha=45°$，若引入记号 $c=\cos\alpha$、$s=\sin\alpha$，则根据矩阵乘法可得

$$\boldsymbol{k}^{②}=\frac{EA}{l}\begin{pmatrix}c^2&cs&-c^2&-cs\\cs&s^2&-cs&-s^2\\-c^2&-cs&c^2&cs\\-cs&-s^2&cs&s^2\end{pmatrix}=3\times10^{5}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}\ \text{kN/m}$$

由计算过程可知，任意倾角 α 时的桁架单元整体坐标单元刚度矩阵为

$$\boldsymbol{k}^{e}=\frac{EA}{l}\begin{pmatrix}t&-t\\-t&t\end{pmatrix},\quad t=\begin{pmatrix}c^2&cs\\cs&s^2\end{pmatrix}\tag{6-15}$$

[例题 6-5] 试求图 6-8 所示且考虑轴向变形的刚架中①、③两单元的整体坐标单元刚度矩阵。$EA=7.2\times10^{6}$ kN。

解： 对等直杆单元，轴向变形不产生弯曲变形和剪切变形，同样弯曲和剪切变形也不产生轴向变形，因此根据叠加原理考虑轴向变形的局部坐标自由式单元的单元刚度矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{k}}^{e}=\begin{pmatrix}\frac{EA}{l}&0&0&-\frac{EA}{l}&0&0\\0&\frac{12EI}{l^3}&\frac{6EI}{l^2}&0&-\frac{12EI}{l^3}&\frac{6EI}{l^2}\\0&\frac{6EI}{l^2}&\frac{4EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^2}&\frac{2EI}{l}\\-\frac{EA}{l}&0&0&\frac{EA}{l}&0&0\\0&-\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}&0&\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}\\0&\frac{6EI}{l^2}&\frac{2EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^2}&\frac{4EI}{l}\end{pmatrix}\begin{matrix}\bar{u}_{\bar{1}}=\bar{\delta}_1\\\bar{v}_{\bar{1}}=\bar{\delta}_2\\\bar{\theta}_{\bar{1}}=\bar{\delta}_3\\\bar{u}_{\bar{2}}=\bar{\delta}_4\\\bar{v}_{\bar{2}}=\bar{\delta}_5\\\bar{\theta}_{\bar{2}}=\bar{\delta}_6\end{matrix}\tag{6-16}$$

式中，$\bar{u}_{\bar{1}}$、$\bar{v}_{\bar{1}}$、$\bar{\theta}_{\bar{1}}$ 等为常用的位移符号。同样，单元等效结点荷载矩阵也可按位移排列顺序由对应的固端内力组成。因此，①、③单元局部坐标下的单元

刚度矩阵分别为

$$\overline{\boldsymbol{k}}^{②}=\begin{bmatrix}144\ \text{kN/m} & 0 & 0 & -144\ \text{kN/m} & 0 & 0\\ 0 & 2.073\,6\ \text{kN/m} & 5.184\ \text{kN} & 0 & -2.073\,6\ \text{kN/m} & -5.184\ \text{kN}\\ 0 & 5.184\ \text{kN} & 17.28\ \text{kN·m} & 0 & -5.184\ \text{kN} & 8.64\ \text{kN·m}\\ -144\ \text{kN/m} & 0 & 0 & 144\ \text{kN/m} & 0 & 0\\ 0 & -2.073\,6\ \text{kN/m} & -5.184\ \text{kN} & 0 & 2.073\,6\ \text{kN/m} & -5.184\ \text{kN}\\ 0 & -5.184\ \text{kN} & 8.64\ \text{kN·m} & 0 & -5.184\ \text{kN} & 17.28\ \text{kN·m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

$$\overline{\boldsymbol{k}}^{③}=\begin{bmatrix}180\ \text{kN/m} & 0 & 0 & -180\ \text{kN/m} & 0 & 0\\ 0 & 4.05\ \text{kN/m} & 8.1\ \text{kN} & 0 & -4.05\ \text{kN/m} & -8.1\ \text{kN}\\ 0 & 8.1\ \text{kN} & 21.6\ \text{kN·m} & 0 & -8.1\ \text{kN} & 10.8\ \text{kN·m}\\ -180\ \text{kN/m} & 0 & 0 & 180\ \text{kN/m} & 0 & 0\\ 0 & -4.05\ \text{kN/m} & -8.1\ \text{kN} & 0 & 4.05\ \text{kN/m} & -8.1\ \text{kN}\\ 0 & 8.1\ \text{kN} & 10.8\ \text{kN·m} & 0 & -8.1\ \text{kN} & 21.6\ \text{kN·m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

① 单元 $\cos\alpha=0.6,\sin\alpha=0.8(\alpha=53.13°)$，③单元 $\cos\alpha=0,\sin\alpha=1(\alpha=90°)$。由此可得坐标转换矩阵分别为

$$\boldsymbol{T}^{e}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}^{e},\quad \boldsymbol{\lambda}^{①}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.8 & 0\\ -0.8 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}^{③}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{k}^{e}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{k}}^{e}\boldsymbol{T}$ 即可求得其元素数值为

$$k^{(1)}=\begin{bmatrix} 53.17\ \text{kN/m} & 68.12\ \text{kN/m} & -4.15\ \text{kN} \\ 68.12\ \text{kN/m} & 92.91\ \text{kN/m} & 3.11\ \text{kN} \\ -4.15\ \text{kN} & 3.11\ \text{kN} & 17.28\ \text{kN·m} \\ -53.17\ \text{kN/m} & -68.12\ \text{kN/m} & 4.15\ \text{kN} \\ -68.12\ \text{kN/m} & -92.91\ \text{kN/m} & -3.11\ \text{kN} \\ 4.15\ \text{kN} & 3.11\ \text{kN} & 8.64\ \text{kN·m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -53.17\ \text{kN/m} & -68.12\ \text{kN/m} & -4.15\ \text{kN} \\ -68.12\ \text{kN/m} & -92.91\ \text{kN/m} & 3.11\ \text{kN} \\ 4.15\ \text{kN} & -3.11\ \text{kN} & 8.64\ \text{kN·m} \\ 53.17\ \text{kN/m} & 68.12\ \text{kN/m} & 4.15\ \text{kN} \\ 68.12\ \text{kN/m} & 92.91\ \text{kN/m} & -3.11\ \text{kN} \\ 4.15\ \text{kN} & -3.11\ \text{kN} & 17.28\ \text{kN·m} \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$k^{(3)}=\begin{bmatrix} 4.05\ \text{kN/m} & 0 & -8.1\ \text{kN} \\ 0 & 180\ \text{kN/m} & 0 \\ -8.1\ \text{kN} & 0 & 21.6\ \text{kN·m} \\ -4.05\ \text{kN/m} & 0 & 8.1\ \text{kN} \\ 0 & -180\ \text{kN/m} & 0 \\ 8.1\ \text{kN} & 0 & 10.8\ \text{kN·m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4.05\ \text{kN/m} & 0 & -8.1\ \text{kN} \\ 0 & -180\ \text{kN/m} & 0 \\ 8.1\ \text{kN} & 0 & 10.8\ \text{kN·m} \\ 4.05\ \text{kN/m} & 0 & 8.1\ \text{kN} \\ 0 & 180\ \text{kN/m} & 0 \\ 8.1\ \text{kN} & 0 & 21.6\ \text{kN·m} \end{bmatrix} \times 10^4$$

对照 $k^{(1)}$ 和 $k^{(3)}$ 可以发现对于倾角为 90°的单元，整体坐标单元刚度矩阵可以按一定规则对局部坐标单元刚度矩阵作变换得到，不需要作坐标变换的矩阵乘。这一变换规则，请读者自行总结。

§6-4 整体分析

在建立了整体坐标单元刚度方程(单元刚度矩阵、单元等效结点荷载矩阵)以后，和位移法一样，要通过建立结点平衡方程得到结构的整体平衡方程，这就是所谓整体分析。

6-4-1 连续梁的结构刚度方程

为了便于说明，以图 6-11 为例，先对最简单的连续梁结构讨论整体分析问题。设图示连续梁分为三个单元，自左到右分别为①、②、③单元，截面 $EI=2.16\times10^5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$，单元上所受荷载如图所示。整体坐标为右手坐标系。

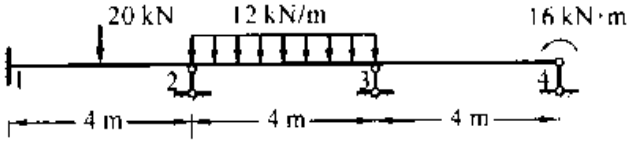


图 6-11 连续梁结构

三单元的单元刚度矩阵相同，均为

$$\boldsymbol{k}^e=2.16\times10^5\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{pmatrix}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

①、②单元的等效结点荷载矩阵分别为

$$\boldsymbol{F}_E^{①}=(-10\ \text{kN}\cdot\text{m}\quad 10\ \text{kN}\cdot\text{m})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{F}_E^{②}=(-16\ \text{kN}\cdot\text{m}\quad 16\ \text{kN}\cdot\text{m})^{\mathrm{T}}$$

各单元的单元刚度方程分别为

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}F_{\bar1}\\F_{\bar2}\end{pmatrix}^{①}+\begin{pmatrix}F_{E\bar1}\\F_{E\bar2}\end{pmatrix}^{①}=\begin{pmatrix}F_{\bar1}\\F_{\bar2}\end{pmatrix}^{①}+\begin{pmatrix}-10\ \text{kN}\cdot\text{m}\\10\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{pmatrix}^{①}\begin{pmatrix}\delta_{\bar1}\\\delta_{\bar2}\end{pmatrix}^{①}\\
&\begin{pmatrix}F_{\bar1}\\F_{\bar2}\end{pmatrix}^{②}+\begin{pmatrix}F_{E\bar1}\\F_{E\bar2}\end{pmatrix}^{②}=\begin{pmatrix}F_{\bar1}\\F_{\bar2}\end{pmatrix}^{②}+\begin{pmatrix}-16\ \text{kN}\cdot\text{m}\\16\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{pmatrix}^{②}\begin{pmatrix}\delta_{\bar1}\\\delta_{\bar2}\end{pmatrix}^{②}\\
&\begin{pmatrix}F_{\bar1}\\F_{\bar2}\end{pmatrix}^{③}=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{pmatrix}^{③}\begin{pmatrix}\delta_{\bar1}\\\delta_{\bar2}\end{pmatrix}^{③}
\end{aligned}\right\}\quad\text{(a)}$$

为满足由单元组装成结构时满足位移协调条件，单元局部位移和整体位移之间应满足如下关系：

$$\delta_{\bar1}^{①}=\delta_1,\quad \delta_{\bar2}^{①}=\delta_2=\delta_{\bar1}^{②},\quad \delta_{\bar2}^{②}=\delta_3=\delta_{\bar1}^{③},\quad \delta_{\bar2}^{③}=\delta_4\qquad\text{(b)}$$

将结点位移按结点顺序排列，这样组成的矩阵称为**结构结点位移矩阵**，记为 $\boldsymbol{\Delta}$，则

$$\boldsymbol{\Delta}=(\delta_1\quad\delta_2\quad\delta_3\quad\delta_4)^{\mathrm{T}}\qquad(6-17)$$

如图 6-11 所示，**直接作用于结构结点的结点荷载矩阵**为

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}=(F_{\mathrm{R}1}\quad 0\quad 0\quad 16\ \text{kN}\cdot\text{m})^{\mathrm{T}}\qquad(6-18)$$

式中，$F_{\mathrm{R}1}$ 为 1 结点的支座反力矩，是未知的。

取 4 个结点如图 6-12 所示，考虑其平衡，注意到作用于结点的杆端力

和作用于杆端的杆端力互为作用、反作用关系，因此有

$$F_{R1}=F_1^{①},\quad (F_2^{①}+F_1^{②})=0,\quad (F_2^{②}+F_1^{③})=0,\quad 16\ \text{kN·m}=F_2^{③}$$

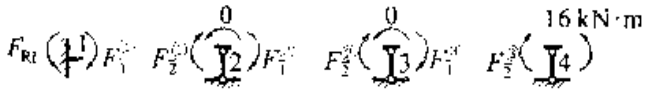


图 6-12　结点受力图

以矩阵方程表示则上述平衡方程可表为

$$\boldsymbol{P}_D=\begin{Bmatrix}F_{R1}\\0\\0\\16\ \text{kN·m}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1^{①}\\F_2^{①}\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\F_1^{②}\\F_2^{②}\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\\F_1^{③}\\F_2^{③}\end{Bmatrix}\tag{c}$$

考虑到式(a)、(b)和(6-17)，不难看出：

$$\begin{Bmatrix}F_1^{①}\\F_2^{①}\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}^{①}&k_{12}^{①}&0&0\\k_{21}^{①}&k_{22}^{①}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\\delta_4\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}-10\ \text{kN·m}\\10\ \text{kN·m}\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}0\\F_1^{②}\\F_2^{②}\\0\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&k_{11}^{②}&k_{12}^{②}&0\\0&k_{21}^{②}&k_{22}^{②}&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\\delta_4\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\-16\ \text{kN·m}\\16\ \text{kN·m}\\0\end{Bmatrix}\tag{d}$$

$$\begin{Bmatrix}0\\0\\F_1^{③}\\F_2^{③}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&k_{11}^{③}&k_{12}^{③}\\0&0&k_{21}^{③}&k_{22}^{③}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\\delta_4\end{Bmatrix}$$

将式(d)代入平衡方程式(c)，则可得

$$\boldsymbol{P}_D=\begin{Bmatrix}F_{R1}\\0\\0\\16\ \text{kN·m}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}^{①}&k_{12}^{①}&0&0\\k_{21}^{①}&k_{22}^{①}+k_{11}^{②}&k_{12}^{②}&0\\0&k_{21}^{②}&k_{22}^{②}+k_{11}^{③}&k_{12}^{③}\\0&0&k_{21}^{③}&k_{22}^{③}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\\delta_4\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}F_{E1}^{①}\\F_{E2}^{①}+F_{E1}^{②}\\F_{E2}^{②}+F_{E1}^{③}\\F_{E2}^{③}\end{Bmatrix}\tag{e}$$

如果引入记号：

$$\boldsymbol{P}_E=(F_{E1}^{①}\quad F_{E2}^{①}+F_{E1}^{②}\quad F_{E2}^{②}+F_{E1}^{③}\quad F_{E2}^{③})^{\mathrm{T}}=(-10\quad -6\quad 16\quad 0)^{\mathrm{T}}\ \text{kN·m}\tag{6-19}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}k_{11}^{①}&k_{12}^{①}&0&0\\k_{21}^{①}&k_{22}^{①}+k_{11}^{②}&k_{12}^{②}&0\\0&k_{21}^{②}&k_{22}^{②}+k_{11}^{③}&k_{12}^{③}\\0&0&k_{21}^{③}&k_{22}^{③}\end{bmatrix}\tag{6-20}$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}} \tag{6-21}$$

式中，$\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}$ 称为**结构原始等效结点荷载矩阵**，$\boldsymbol{K}$ 称为**结构原始刚度矩阵**，$\boldsymbol{P}$ 称为**结构原始综合结点荷载矩阵**。则式(e)可改写为

$$\boldsymbol{K\Delta}=\boldsymbol{P} \tag{6-22}$$

式(6-22)即为**结构的原始刚度方程**，它是结构结点平衡的矩阵表示。

这里需要指出以下几点：

● 对于连续梁结构原始刚度矩阵是一个对称、三对角的矩阵。其元素可以用单元刚度矩阵元素累加组成，其累加规则请读者参照式(6-20)自行总结。

● 结构原始等效结点荷载矩阵可以由单元等效结点荷载矩阵元素累加组成，其累加规则请读者参照式(6-19)自行总结。

● 结构结点位移矩阵中包含边界处的已知位移(上述分析中 $\delta_1=0$)。结构原始综合结点荷载矩阵中包含边界的支座反力(上述分析中 F_{R1})，他们目前是未知的。因此，刚度方程还需要作边界条件处理后才能求解，上面所建立的各矩阵均冠有"原始"两字。这种建立结构刚度方程的方法，称为**后处理法**。

● 如果把零位移的结点号变为0，对图6-11所示连续梁，结点号成为0、1、2、3。当由单元刚度矩阵元素累加组成结构刚度矩阵和等效结点荷载矩阵时，相应于零位移的元素不累加，则最终得到的结构刚度方程成为

$$\boldsymbol{K\Delta}=\begin{bmatrix} k_{22}^{①}+k_{11}^{②} & k_{12}^{②} & 0 \\ k_{21}^{②} & k_{22}^{②}+k_{11}^{③} & k_{12}^{③} \\ 0 & k_{21}^{③} & k_{22}^{③} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16\ \mathrm{kN\cdot m} \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} -6\ \mathrm{kN\cdot m} \\ 16\ \mathrm{kN\cdot m} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

这种在组成结构刚度方程过程中已经考虑零位移条件的方法，称为**先处理法**。

● 对先处理法得到的刚度方程进行求解，可求得全部未知位移 $\boldsymbol{\Delta}$。进一步和已知边界位移一起可得到各单元的结点位移，利用单元刚度方程可求得单元杆端力。由所得到的单元杆端力和单元荷载，可求得任意截面内力以及支座反力。

6-4-2 平面刚架的结构刚度方程

为便于讨论，以例题6-2刚架在图6-13所示荷载下为例进行说明。从例题6-5可见，如果将单元杆端位移矩阵分成单元 $\overline{1}$、$\overline{2}$ 两个结点位移矩阵，也即 $\boldsymbol{\delta}^{e}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\overline{1}} \\ \boldsymbol{\delta}_{\overline{2}} \end{Bmatrix}^{e}$ (6-23)

则整体坐标单元刚度方程也应作如下相应的修改：

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{\bar{1}} \\ \boldsymbol{F}_{\bar{2}} \end{Bmatrix}^e + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{E\bar{1}} \\ \boldsymbol{F}_{E\bar{2}} \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\bar{1}} \\ \boldsymbol{\delta}_{\bar{2}} \end{Bmatrix}^e \tag{6-24}$$

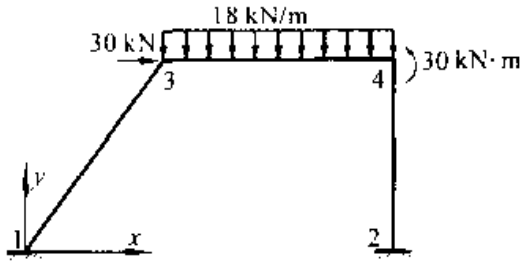


图 6-13　例题 6-2 图刚架所受荷载

式(6　24)与连续梁单元刚度方程相比，前者元素为子矩阵(见例题 6-5)，后者元素为数值。注意到这一点，则像连续梁一样取图 6-13 的 4 个结点考虑平衡，并作类似的分析，即可建立平面刚架的结构刚度方程(建议读者自行画出结点受力图并进行分析，以便加深理解)：

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_D + \boldsymbol{P}_E \tag{6-25}$$

式中，$\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\delta}_1^T \quad \boldsymbol{\delta}_2^T \quad \boldsymbol{\delta}_3^T \quad \boldsymbol{\delta}_4^T)^T$，$\boldsymbol{\delta}_i = (u \quad v \quad \theta)_i^T \quad (i=1,2,3,4)$ (6-26)

$$\boldsymbol{P}_D = (\boldsymbol{P}_{D1}^T \ \boldsymbol{P}_{D2}^T \ \boldsymbol{P}_{D3}^T \ \boldsymbol{P}_{D4}^T)^T,\ \boldsymbol{P}_{Di} = (F_{Px} \ F_{Py} \ M)_i^T \quad (i=1,2,3,4) \tag{6-27}$$

$$\boldsymbol{P}_E = (\boldsymbol{P}_{E1}^T \ \boldsymbol{P}_{E2}^T \ \boldsymbol{P}_{E3}^T \ \boldsymbol{P}_{E4}^T)^T,\ \boldsymbol{P}_{Ei} = (F_{Ex} \ F_{Ey} \ M_E)_i^T \quad (i=1,2,3,4) \tag{6-28}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11}^{①} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_{12}^{①} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_{11}^{②} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_{12}^{②} \\ \boldsymbol{k}_{21}^{①} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_{22}^{①} + \boldsymbol{k}_{11}^{③} & \boldsymbol{k}_{12}^{③} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_{21}^{②} & \boldsymbol{k}_{21}^{③} & \boldsymbol{k}_{22}^{②} + \boldsymbol{k}_{22}^{③} \end{bmatrix} \tag{6-29}$$

单元杆端位移矩阵和结点位移矩阵间存在一下对应关系：

$$\boldsymbol{\delta}^{①} = (\boldsymbol{\delta}_1^T \quad \boldsymbol{\delta}_3^T)^T, \quad \boldsymbol{\delta}^{②} = (\boldsymbol{\delta}_3^T \quad \boldsymbol{\delta}_4^T)^T, \quad \boldsymbol{\delta}^{③} = (\boldsymbol{\delta}_2^T \quad \boldsymbol{\delta}_4^T)^T \tag{f}$$

上述符号的含义与连续梁完全相同。

1. 后处理法集成整体原始刚度方程

从式(6-29)进行归纳，可得后处理法集成整体原始刚度方程的规则如下：

● 设单元局部结点码 $\bar{1}$、$\bar{2}$ 所对应的结构整体结点码分别为 i 和 j，则单元刚度子矩阵(以下简称为子矩阵)$\boldsymbol{K}_{11}^e$ 送 $\boldsymbol{K}$ 的 i 行 i 列子矩阵位置累加，子矩阵 $\boldsymbol{K}_{12}^e$ 送 $\boldsymbol{K}$ 的 i 行 j 列子矩阵位置累加，子矩阵 $\boldsymbol{K}_{21}^e$ 送 $\boldsymbol{K}$ 的 j 行 i 列子矩阵位置累加，子矩阵 $\boldsymbol{K}_{22}^e$ 送 $\boldsymbol{K}$ 的 j 行 j 列子矩阵位置累加。

● $\boldsymbol{P}_D$ 根据结点编码顺序，按式(6-27)直接组成(请读者自行写出图

6－13所示荷载的 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}$)。

● $\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}$ 由单元等效结点荷载矩阵 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^{e}$ 按如下规则集成。子矩阵 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}1}^{e}$ 送 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}$ 的 i 子矩阵位置累加，子矩阵 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}2}^{e}$ 送 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}$ 的 j 子矩阵位置累加(请读者自行写出图6－13所示荷载的 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}$)。

● 将 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}$ 相加即可得到综合结点荷载矩阵 $\boldsymbol{P}$。

利用上述规则，根据结构离散化时的单元结点信息——单元局部码对应的结构整体结点码，即可集成得到结构原始刚度方程。上述形成刚度方程的方法称为**直接刚度法**。

2．结构原始刚度矩阵的性质

由结构原始刚度方程可得结构原始刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 元素 K_{ij} **的物理意义为，当仅发生广义位移** $\Delta_j=1$ **时，在第** i **个广义位移对应处所需施加的广义力**。

对于由自由式单元刚度矩阵集成的结构原始刚度矩阵，具有以下性质：

● 对称性。由反力互等定理可得 $K_{ij}=K_{ji}$，因此 $\boldsymbol{K}$ 是对称矩阵。

● 奇异性。因为所有单元都是自由式的，结构存在刚性位移，在给定平衡的外荷载作用下不可能确定其惯性运动，也即不可能确定结构的位移，因此 $\boldsymbol{K}$ 是奇异的。

● 稀疏性。根据集成规则，有单元相连接的杆端结点称为相关结点，无单元连接的结点为不相关结点。显然如果 i 和 j 为不相关结点时，则 $\boldsymbol{K}$ 的子矩阵 $\boldsymbol{k}_{ij}=\boldsymbol{k}_{ji}=\boldsymbol{0}$。因此，如果作结构离散化时注意了使相关结点编码的最大差值尽可能小(即所谓合理编码)，则结构原始刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 只在对角线附近一带状区域内有非零的子矩阵，也即 $\boldsymbol{K}$ 具有稀疏性。由于对称性，从主对角线元素到离得最远的非零元素间的距离称为**半带宽**(可以是行，也可以是列)，对于图6－13所示的全部刚结的结构，其最大半带宽等于3×(相关结点编码最大差值＋1)。

3．边界条件处理

因为用自由式单元集成的原始刚度矩阵具有奇异性，因此必须引入足以阻止刚体位移的约束条件(也称为边界条件)。常用的边界条件处理方法有两种：

● 乘大数法。设其中一个位移约束条件为 $\Delta_i=C_i$，N 为一很大的数。所谓乘大数法是将 K_{ii} 用 NK_{ii} 替换，综合结点荷载元素 P_i 用 $NK_{ii}C_i$ 替换。为什么这样做能满足约束条件，这个问题留给读者自行研究(提示：考虑刚度方程第 i 个展开式)。

● 置换法。仍然设其中一个位移约束条件为 $\Delta_i=C_i$，所谓置换法需要作以下处理：

(1) 将综合结点荷载矩阵的元素 $P_i(j \neq i)$用 $P_j - K_{ji}C_i$ 置换；

(2) 将 $K_{ji}(i \neq j)$和 $K_{ij}(i \neq j)$也即 i 行、i 列非对角线元素全部置换成 0；

(3) 将 K_{ii}置换成 1，P_i 置换成 C_i。

为什么这样做能使约束条件满足而且刚度方程等价，这个问题也请读者自行研究。若有 n 个已知位移边界条件，则作 n 次上述处理即可。

4. 定位向量及先处理法集成结构刚度矩阵

事实上，结构刚度矩阵的元素是由单元刚度矩阵的元素组成的，只要确定了单元刚度矩阵各元素在结构刚度矩阵中的位置，就可以由单元刚度矩阵直接集成结构刚度矩阵，下面就来解决这一问题。

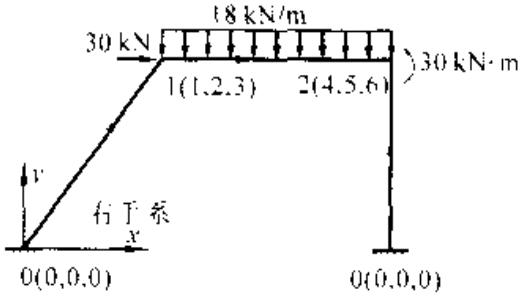


图 6-14　位移编码

● 定位向量定义。由单元杆端位移分量(亦称局部位移码)对应的结构结点位移分量(亦称整体位移码)序号所组成的向量，称为**单元的定位向量**。例如图 6-14 所示结构的结点位移是按先处理法编码的，其各单元的定位向量为(被约束无位移的位移编码记为 0)

单元①(0,0,0,1,2,3)

单元②(1,2,3,4,5,6)

单元③(0,0,0,4,5,6)

● 定位向量集成规则。用单元定位向量确定单元刚度矩阵每个元素在结构刚度矩阵中位置的方法是：

(1) 先求出单元 e 在整体坐标系中的刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$。

(2) 将单元 e 的定位向量分别写在单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 的上方和右侧(或左侧)。这样，$\boldsymbol{k}^e$ 的元素 k^e_{ij} 的行、列号就分别与单元定位向量对应的一个分量相匹配。

(3) 若单元定位向量的某个分量为零，则 $\boldsymbol{k}^e$ 中相应的行和列可以删去，亦即不必向刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中叠加。

(4) 单元定位向量中不为零的行、列分量，它就是 $\boldsymbol{k}^e$ 中元素 k^e_{ij} 在结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中的行码和列码。按照单元定位向量中非零分量给出的行码和列

码,就能够将单元刚度矩阵 k^e 的元素正确地累加到结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中去。

例如,图 6-14 所示结构各单元的单元刚度矩阵为

$$\boldsymbol{k}^{(1)}=\begin{array}{c}\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46}\\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56}\\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}0\\0\\0\\1\\2\\3\end{matrix},\quad \boldsymbol{k}^{(2)}=\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46}\\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56}\\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(3)}=\begin{array}{c}\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46}\\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56}\\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}0\\0\\0\\4\\5\\6\end{matrix}$$

利用单元定位向量累加后的结构刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}k_{44}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{45}^{(1)}+k_{12}^{(2)} & k_{46}^{(1)}+k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)}\\ k_{54}^{(1)}+k_{21}^{(2)} & k_{55}^{(1)}+k_{22}^{(2)} & k_{56}^{(1)}+k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)}\\ k_{61}^{(1)}+k_{31}^{(2)} & k_{65}^{(1)}+k_{32}^{(2)} & k_{66}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)}\\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)}+k_{44}^{(3)} & k_{45}^{(2)}+k_{45}^{(3)} & k_{46}^{(2)}+k_{46}^{(3)}\\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)}+k_{54}^{(3)} & k_{55}^{(2)}+k_{55}^{(3)} & k_{56}^{(2)}+k_{56}^{(3)}\\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)}+k_{64}^{(3)} & k_{65}^{(2)}+k_{65}^{(3)} & k_{66}^{(2)}+k_{66}^{(3)}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix}\tag{6-30}$$

上述集成过程表明:主对角线元素是由同一结点相关单元的刚度矩阵主对角线元素叠加而成,因此一定是正值。副对角线元素是由定位向量所对应的单元刚度矩阵副对角线元素累加而成,可为正,可为负,亦可为零值。

结构等效荷载矩阵也可由单元等效结点荷载矩阵累加得到。如何累加请读者自行考虑。

与后处理法对应,因定位向量中考虑了支座对位移的限制,而且集成时没有考虑这些元素,相当于集成时已经对支座限制住的位移进行了处理,因此这种集成方法称为**先处理法**。先处理法的最大半带宽等于相关结点最大

位移码差值加 1。

6-4-3　结构刚度方程集成举例

[例题 6-6]　试用后处理法建立图 6-13 所示编码和先处理法建立图 6-14 所示编码刚架的结构刚度方程。

解：　后处理法集成

设 1 结点的支座反力分别为 F_{1x}，F_{1y}，M_1，2 结点支座反力为 F_{2x} F_{2y} M_2，则直接作用结点荷载矩阵根据结点号集成结果为

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}=(F_{1x}\quad F_{1y}\quad M_1\quad F_{2x}\quad F_{2y}\quad M_2\quad 30\ \mathrm{kN}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 30\ \mathrm{kN\cdot m})^{\mathrm{T}}$$

单元②的 $\alpha=0$，所以等效结点荷载整体坐标下的和局部坐标下的相同，也即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^{②}=(0\quad -45\ \mathrm{kN}\quad -37.5\ \mathrm{kN\cdot m}\quad 0\quad -45\ \mathrm{kN}\quad 37.5\ \mathrm{kN\cdot m})^{\mathrm{T}}$$

①、③单元上无荷载，因此 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^{①}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^{③}=0$。基于此，式(6-28)所示结构等效结点荷载矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}=(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad -45\ \mathrm{kN}\quad -37.5\ \mathrm{kN\cdot m}\quad 0\quad -45\ \mathrm{kN}\quad 37.5\ \mathrm{kN\cdot m})^{\mathrm{T}}$$

由此可得综合结点荷载矩阵为

$$\boldsymbol{P}=(F_{1x}\quad F_{1y}\quad M_1\quad F_{1x}\quad F_{1y}\quad M_2\quad 30\ \mathrm{kN}\quad -45\ \mathrm{kN}\quad -37.5\ \mathrm{kN\cdot m}\quad 0\quad 45\ \mathrm{kN}\quad 67.5\ \mathrm{kN\cdot m})^{\mathrm{T}}$$

利用例题 6-5 的单元整体刚度矩阵结果($\boldsymbol{k}^{②}=\overline{\boldsymbol{k}}^{①}$)，按直接刚度法集成，结构刚度矩阵如式(6-29)，其 3×3 的子矩阵如下：

$$\boldsymbol{K}_{11}=\begin{bmatrix}53.17\ \mathrm{kN/m} & 68.12\ \mathrm{kN/m} & -4.15\ \mathrm{kN}\\ 68.12\ \mathrm{kN/m} & 92.91\ \mathrm{kN/m} & 3.11\ \mathrm{kN}\\ -4.15\ \mathrm{kN} & 3.11\ \mathrm{kN} & 17.28\ \mathrm{kN\cdot m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

$$\boldsymbol{K}_{12}=\boldsymbol{K}_{23}=\boldsymbol{K}_{14}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{K}_{13}=\begin{bmatrix}-53.17\ \mathrm{kN/m} & -68.12\ \mathrm{kN/m} & -4.15\ \mathrm{kN}\\ -68.12\ \mathrm{kN/m} & -92.91\ \mathrm{kN/m} & 3.11\ \mathrm{kN}\\ 4.15\ \mathrm{kN} & 3.11\ \mathrm{kN} & 8.64\ \mathrm{kN\cdot m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

$$\boldsymbol{K}_{22}=\begin{bmatrix}4.05\ \mathrm{kN/m} & 0 & -8.1\ \mathrm{kN}\\ 0 & 180\ \mathrm{kN/m} & 0\\ -8.1\ \mathrm{kN} & 0 & 21.6\ \mathrm{kN\cdot m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

$$\boldsymbol{K}_{24}=\begin{bmatrix}-4.05\ \mathrm{kN/m} & 0 & -8.1\ \mathrm{kN}\\ 0 & -180\ \mathrm{kN/m} & 0\\ 8.1\ \mathrm{kN} & 0 & 10.8\ \mathrm{kN\cdot m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

$$\boldsymbol{K}_{33}=\begin{bmatrix}197.17\ \text{kN/m} & 68.12\ \text{kN/m} & 4.15\ \text{kN}\\ 68.12\ \text{kN/m} & 94.98\ \text{kN/m} & 2.074\ \text{kN}\\ 4.15\ \text{kN} & 2.074\ \text{kN} & 34.56\ \text{kN·m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

$$\boldsymbol{K}_{34}=\begin{bmatrix}-144\ \text{kN/m} & 0 & 0\\ 0 & -2.07\ \text{kN/m} & 5.184\ \text{kN}\\ 0 & -5.184\ \text{kN} & 8.64\ \text{kN·m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

$$\boldsymbol{K}_{44}=\begin{bmatrix}148.1\ \text{kN/m} & 0 & 8.1\ \text{kN}\\ 0 & 182.07\ \text{kN/m} & -5.184\ \text{kN}\\ 8.1\ \text{kN} & -5.184\ \text{kN} & 38.88\ \text{kN·m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

由于对称性，$\boldsymbol{K}_{ij}=\boldsymbol{K}_{ji}^{\mathrm{T}}(i,j=1,2,3,4)$。有了上述结果，即可得到后处理法的结构刚度方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{P}$$

先处理法集成

此结构各单元的定位向量和符号表达的结构刚度矩阵已在 6-4-2 中给出如式(6-3)，将各单元的刚度矩阵具体元素数值代入后可得

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}197.17\ \text{kN/m} & 68.12\ \text{kN/m} & 4.15\ \text{kN}\\ 68.12\ \text{kN/m} & 94.98\ \text{kN/m} & 2.074\ \text{kN}\\ 4.15\ \text{kN} & 2.074\ \text{kN} & 34.56\ \text{kN·m}\\ -144\ \text{kN/m} & 0 & 0\\ 0 & -2.07\ \text{kN/m} & -5.18\ \text{kN}\\ 0 & 5.18\ \text{kN} & 8.64\ \text{kN·m}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-144\ \text{kN/m} & 0 & 0 & 148.1\ \text{kN/m} & 0 & 8.1\ \text{kN}\\ 0 & -2.07\ \text{kN/m} & 5.18\ \text{kN} & 0 & 182.07\ \text{kN/m} & -5.184\ \text{kN}\\ 0 & -5.18\ \text{kN} & 8.64\ \text{kN·m} & 8.1\ \text{kN} & -5.184\ \text{kN} & 38.88\ \text{kN·m}\end{bmatrix}\times 10^4$$

显然，这一结果和后处理法中划去 1、2 结点对应的子矩阵后所得的结果相同。后处理法必须对刚度矩阵引入边界条件后才能求解，而且是解 12 阶的方程。先处理法不需要再处理零位移约束条件，只需求解 6 阶的方程。因此当前的程序都是按先处理法设计的。

根据结点位移码，由图 6-14 直接可得

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}=(30\ \text{kN}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 30\ \text{kN·m})^{\mathrm{T}}$$

由单元②的等效结点荷载可得

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}=(0\quad -45\ \text{kN}\quad -37.5\ \text{kN·m}\quad 0\quad -45\ \text{kN}\quad 37.5\ \text{kN·m})^{\mathrm{T}}$$

从而可得综合结点荷载矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}=(30\ \mathrm{kN}\quad -45\ \mathrm{kN}\quad -37.5\ \mathrm{kN\cdot m}\quad 0\quad -45\ \mathrm{kN}\quad 67.5\ \mathrm{kN\cdot m})^{\mathrm{T}}$$

结构刚度方程为

$$\boldsymbol{K\Delta}=\boldsymbol{P}$$

§6-5 结构刚度和综合荷载元素速算法及单元内力计算

矩阵位移法一般均需用计算机进行数值计算，这时要求解结构刚度方程

$$\boldsymbol{K\Delta}=\boldsymbol{P}$$

结构刚度矩阵和综合等效荷载矩阵的正确与否，直接影响结构受力、变形分析的正确性。为此，在编调计算程序时通常要对结构刚度矩阵和综合结点荷载矩阵的元素进行校核，其中一种方法是通过基本概念快速计算出结构刚度矩阵或综合结点荷载矩阵中的某 n 个元素，将其与计算机计算的相应结果对比，从而判别程序的可靠性。此外，从刚度方程求得结点位移并非最终目的，进行结构设计还必须解决内力的计算。因此，本节首先介绍元素确定的速算方法，使有关力学概念更加清晰。然后再介绍在求得位移后内力的计算方法。

6-5-1 结构刚度矩阵元素速算确定方法

结构刚度矩阵元素 K_{ij} 的物理意义是：仅结构第 j 个位移分量产生单位位移时，与第 i 个位移相应的“附加约束”上的反力（或称所需施加的力）。速算方法就是利用这一概念和等直杆的形常数，不经单元分析和集成而得到结构刚度矩阵中任何指定的元素。

结构刚度矩阵元素 K_{ij} 的速算步骤为：

（1）如第 i 个位移和第 j 个位移分量间没有直接的单元连接，$K_{ij}=0$。否则继续以下步骤。

（2）从结构中取出和 Δ_j 相关联的（存在单元连接的）单元部分，所取出部分的结点认为均有限制位移的约束，不能产生任何位移。

（3）令取出部分的结构仅产生 $\Delta_j=1$ 的位移，作单位弯矩图（或单位内力图）。

（4）与位移法一样，根据形常数和结点或隔离体平衡条件求与 $\Delta_i=1$ 相应的“附加约束”上的总反力，其值即为 K_{ij}。

下面举例加以说明：

[**例题 6－7**]　结构及其相关编码如图 6－15a 所示，各杆 EI，EA 和长度 l 均为常数。试求结构刚度矩阵元素 K_{44}、K_{66}、$K_{4,13}$、$K_{6,15}$。

解：(1) 求 K_{44}

取出与位移码 4(结点码 5)相关的部分并作出求 K_{44} 时单位位移状态和 M 图如图 6－15b 所示。

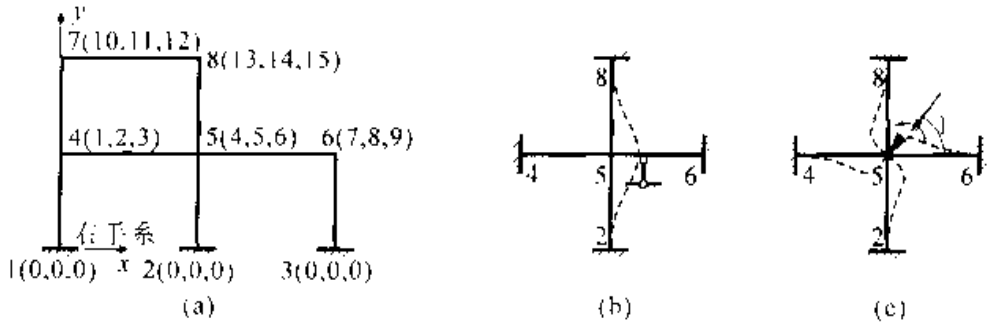


图 6－15　例题 6－7 图

由形常数和 5 结点 $\sum F_x=0$ 可得

$$K_{44}=\frac{2EA}{l}+\frac{24EI}{l^3}$$

(2) 求 K_{66}

取出的部分、单位位移状态和 M 图如图 6－15c 所示，由形常数和 5 结点 $\sum M=0$ 立即可得

$$K_{66}=\frac{16EI}{l}$$

(3) 求 $K_{4,13}$

由对称性可知 $K_{4,13}=K_{13,4}$ 因此仍可以图 6－15b 计算。从图 6－15b 中取 8 结点，由 5－8 杆的剪力和 8 结点 $\sum F_x=0$，可得

$$K_{13,4}=K_{4,13}=-\frac{12EI}{l^3}$$

(4) 求 $K_{6,15}$

同样，因对称性仍可取图 6－15c 进行计算。从图 6－15c 中取 8 结点，由 $\sum M=0$ 可得

$$K_{15,6}=K_{6,15}=\frac{2EI}{l}$$

根据上述手算结果，与编调程序时输出的这些元素值相比即可检查程序的正确性：

(1) 输入数据经检查完全正确时，看结构刚度矩阵是否正确。

(2) 当已验证结构刚度矩阵正确实现集成规则时，可检验输入的信息(或生成的定位向量)是否有问题。

本例分析过程表明，只要概念很清楚，形常数很熟，速算求结构刚度矩阵元素是十分容易的。

[**例题 6－8**]　结构和刚度情况同例题 6－7，但不考虑轴向变形，位移编码如图 6－16(a)所示。试求结构刚度矩阵元素 K_{11}、K_{27}、K_{15}、K_{55}。

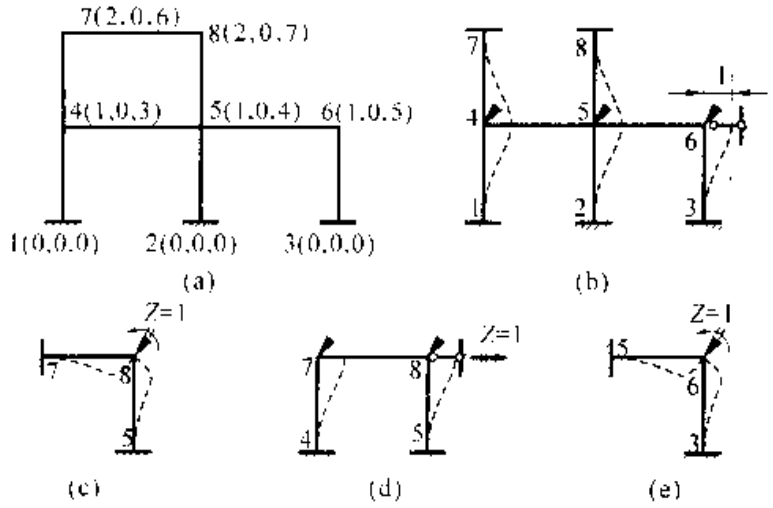


图 6－16　例题 6－8 图

解：(1) 求 K_{11}

当仅发生 $\Delta_1=1$ 时，取出部分、单位位移图和 M 图如图 6－16b 所示，由形常数和横梁隔离体 $\sum F_x=0$ 可得

$$K_{11}=\frac{60EI}{l^3}$$

(2) 求 K_{27}

当仅 $\Delta_7=1$ 时，取出部分、单位位移图和 M 图如图 6－16c，由此求得 5－8杆的剪力，再由结点 8 的 $\sum F_x=0$，可得

$$K_{27}=\frac{6EI}{l^2}$$

根据对称性 $K_{ij}=K_{ji}$ 及元素物理意义，也可由图 6－16d 所示单位位移图从 8 结点的力矩平衡方程求得：

$$K_{72}=\frac{6EI}{l^2}=K_{27}$$

显然后一方法比较简单些。

(3) 求 K_{15}

为求 K_{15}，可从图 6－16b 取 6 结点力矩平衡方程求得

$$K_{51}=\frac{6EI}{l^2}=K_{15}$$

(4) 求 K_{55}

为求 K_{55}，取出部分、单位位移图如图 6－16e 所示，从 6 结点 $\Sigma M=0$，可得

$$K_{55}=\frac{8EI}{l}$$

6－5－2　综合结点荷载元素的速算确定方法

单元局部等效结点荷载和单元固端力之间的关系为

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^{e}=-\bar{\boldsymbol{F}}^{Fr}$$

速算法就是用这个关系(概念)和等直杆载常数来获得单元的等效结点荷载。将等效结点荷载按其局部坐标方向作用于结构结点上，再与结构直接作用结点荷载一起在整体坐标方向投影，便可获得综合结点荷载元素的数值。

速算综合结点荷载矩阵元素的步骤为：

(1) 根据单元上的荷载状况和两端固定梁(视位移编码情形，也可不是两端固定梁)的载常数，将单元上的荷载按单元局部坐标方向将固端力改变方向“移置”到结点上。

(2) 将局部坐标方向的等效结点荷载和直接结点荷载向整体坐标方向投影。

(3) 根据整体位移码，将相同编码上全部结点荷载分量累加即可得到与此位移码相应的综合结点荷载元素。

必须再次强调的是，$\bar{\boldsymbol{F}}^{Fr}$ 正向的规定与第 4 章中载常数表内固端弯矩、固端剪力和固端轴力正向规定间有些微小差别，这可由图 6－17 两者正向规定看出，图 6－17a 所示为 $\bar{\boldsymbol{F}}^{Fe}$ 元素的正向规定，图 6－17b 为固端内力的正向规定。

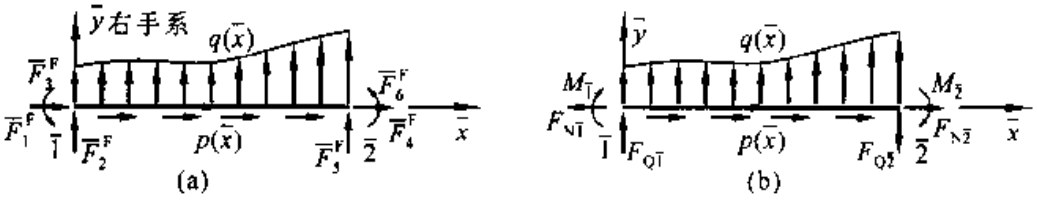


图 6－17　固端力矩阵元素和固端力内力正号规定

从图 6－17 可见，

$$\boldsymbol{F}_E^e = \boldsymbol{F}^{F_e} = (F_{NAB} \quad F_{QAB} \quad M_{AB} \quad F_{NBA} \quad F_{QBA} \quad M_{BA})^T \tag{6-31}$$

[例题 6－9] 试求图 6－18a 所示结构的原始综合结点荷载矩阵 $\boldsymbol{P}$。

解：由所示荷载，根据载常数表和式(6－31)将单元等效结点荷载和直接作用结点荷载按单元局部坐标作用于结构图上，结果如图 6－18b 所示。

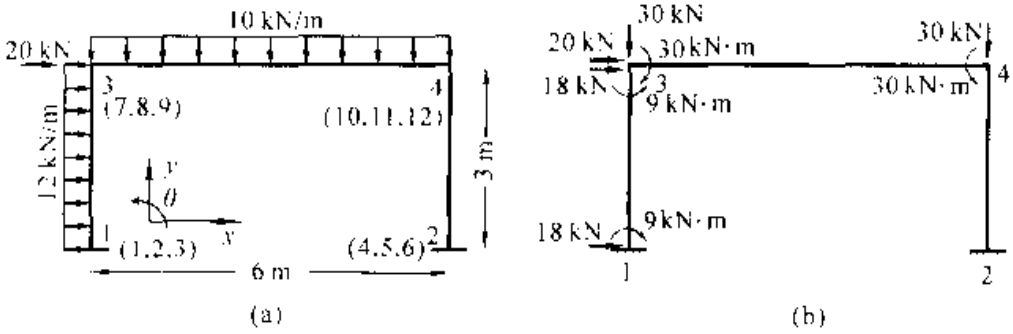


图 6－18　例题 6－9 图

由图 6－18b 求相对整体坐标的 $\sum F_x$、$\sum F_y$ 和 $\sum M$ 可得各结点的原始综合结点荷载为：

$$\boldsymbol{P}_1 = (18\ \text{kN} + F_{1x} \quad F_{1y} \quad -9\ \text{kN·m} + M_1)^T, \quad \boldsymbol{P}_2 = (F_{2x} \quad F_{2y} \quad M_2)^T$$

$$\boldsymbol{P}_3 = (38\ \text{kN} \quad -30\ \text{kN} \quad -21\ \text{kN·m})^T, \quad \boldsymbol{P}_4 = (0 \quad -30\ \text{kN} \quad 30\ \text{kN·m})^T$$

由上述结果按结点位移码顺序，即得结构的原始综合结点荷载列阵 $\boldsymbol{P}$。

[例题 6－10] 试用定位向量先处理法集成图 6－19a 所示不计轴向变形结构的综合结点荷载列阵 $\boldsymbol{P}$。

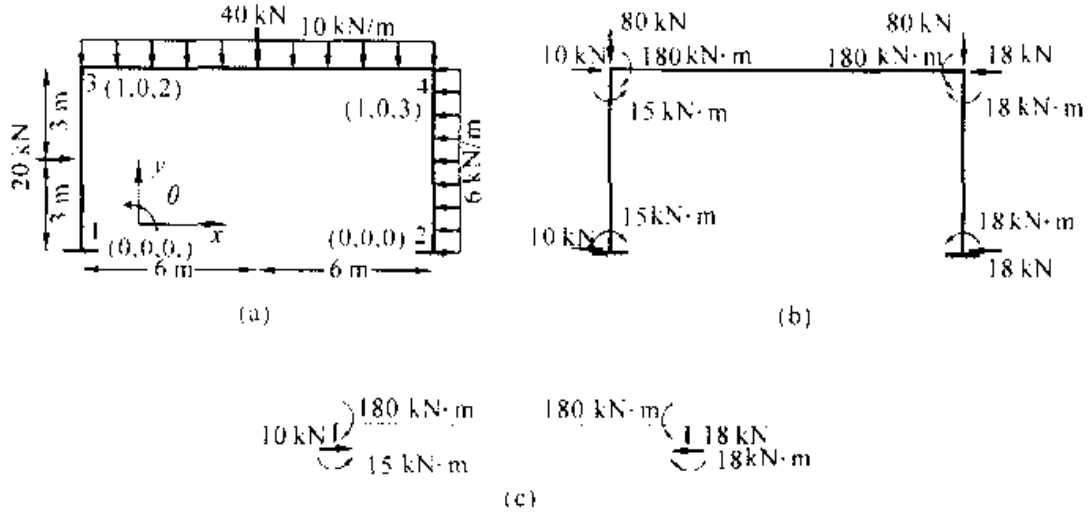


图 6－19　题 6－10 图

解：不考虑杆件轴向变形，结点位移编码如图 6－19a 所示。由载常数和式

(6-31),与例题6-9相似可获得各单元等效结点荷载如图6-19b所示。由于本题要求用定位向量先处理法,根据集成规律位移码为零可不必集成,因此也可不画图6-19b,而改为只画图6-19c部分。由$\sum F_x$可得$P_1=-8$ kN,由$\sum M_3$可得$P_2=-165$ kN·m,由$\sum M_2$可得$P_3=162$ kN·m。由此可得

$$\boldsymbol{P}=(-8\ \text{kN}\quad 165\ \text{kN·m}\quad 162\ \text{kN·m})^{\mathrm{T}}$$

[**例题6-11**] 对于图6-20a所示结构,试用先处理法集成综合结点荷载矩阵$\boldsymbol{P}$。

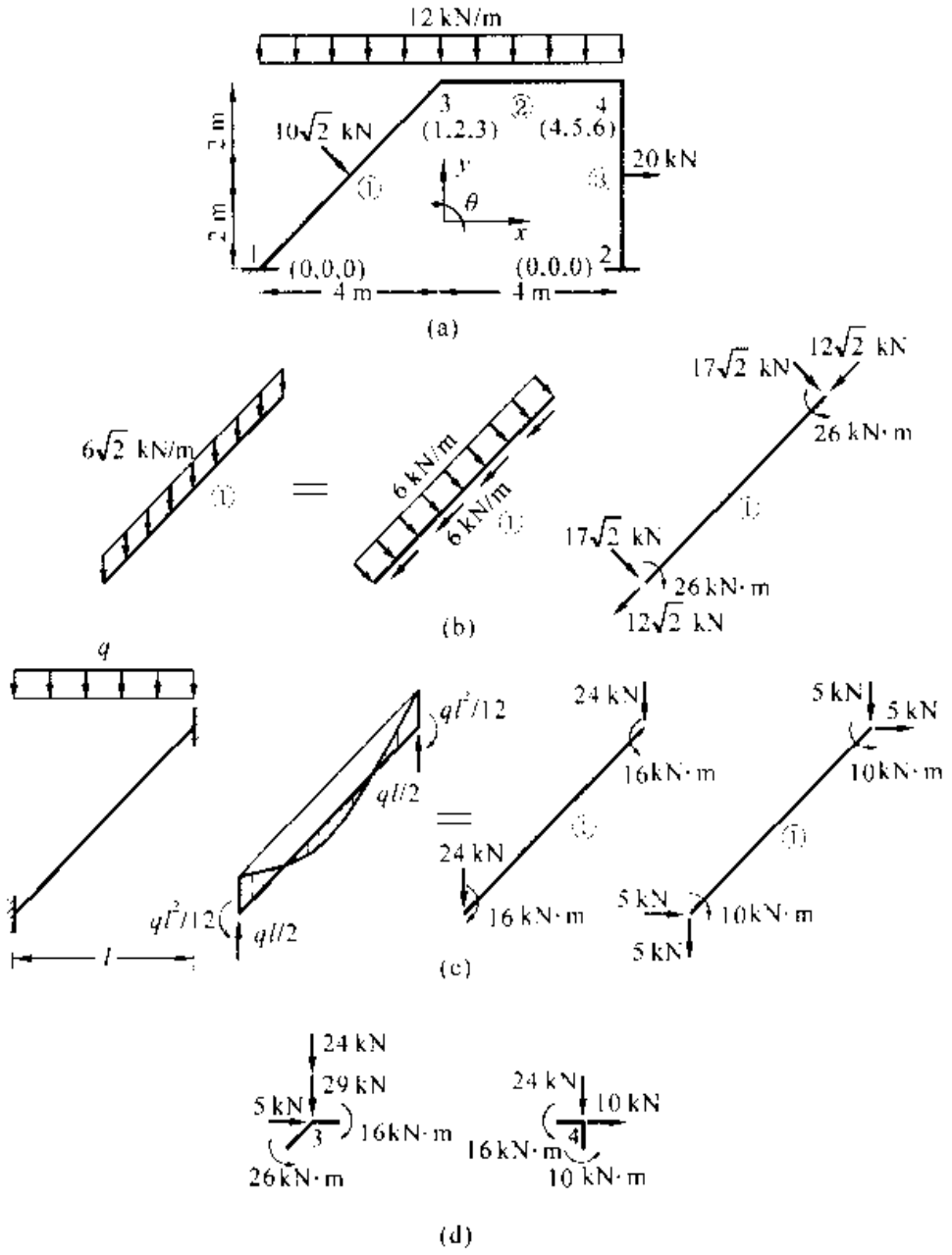


图6-20 例题6-11计算简图及计算方案

解:求解②、③单元等效荷载的方法显然与前两例相同,而①单元是斜

杆，需要另行处理。这有两种方法：

第一种方法是：首先如图 6－20b 所示将沿水平长度的均布荷载转换成垂直和沿杆轴的均布荷载，然后考虑杆上三种（两分布荷载、一集中荷载）相对局部坐标荷载由各自载常数与式（6－31），叠加后可得图 6－20b 所示单元局部坐标的等效结点荷载。

另一种方法是：沿水平长度的均布荷载直接利用其“载常数”如图 6－20c，再利用式（6－31）并考虑垂直杆轴的作用荷载，可得单元等效结点荷载。不难验证，二者计算结果相同。

根据①、②、③单元的计算结果，3、4 结点受力图如图 6－20d（已投影到整体坐标方向）。由此不难看出：

$$\boldsymbol{P} = (5\ \text{kN} \quad -53\ \text{kN} \quad 10\ \text{kN·m} \quad 10\ \text{kN} \quad -24\ \text{kN} \quad 26\ \text{kN·m})^{\mathrm{T}}$$

6－3－3　单元内力的计算

经过整体分析并且引入了边界已知位移条件后，只要杆件体系是几何不变的，结构刚度方程就一定是非奇异的，因此可求得结构全部结点位移。有了位移可以解决结构的刚度问题。但实际工程设计中，更重要的是结构内力（物体应力）。下面假设在求得了结构结点位移矩阵 $\boldsymbol{\Delta}$ 的情形下，说明单元杆端力和单元上任一截面内力的计算问题。

● 单元杆端力的计算

根据单元结点信息（即单元两端结点整体码）或单元定位向量（单元整体位移码向量），即可从结构位移矩阵 $\boldsymbol{\Delta}$ 中取出该单元的整体坐标位移矩阵 $\boldsymbol{\delta}^e$。根据单元的结点坐标信息，可以求出倾角的 $\cos\alpha$、$\sin\alpha$，从而形成单元坐标转换矩阵 $\boldsymbol{T}$。又根据单元分析和位移坐标转换可知，

$$\overline{\boldsymbol{F}}^e + \overline{\boldsymbol{F}}^e_{\mathrm{E}} = \overline{\boldsymbol{k}}^e\overline{\boldsymbol{\delta}}^e, \quad \boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e$$

由此可得

$$\overline{\boldsymbol{F}}^e = \overline{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e - \overline{\boldsymbol{F}}^e_{\mathrm{E}} = \overline{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e + \overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{Fe}} \tag{6－32}$$

上式即为单元杆端力的计算公式。由此可见 $\overline{\boldsymbol{F}}^e$ 包含两部分：其一为位移引起的杆端力，亦即 $\overline{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e$；另一为等效结点荷载或固端力引起的杆端力，显然只有单元上有荷载作用时才有此项。对于平面刚架，要注意习惯上的内力符号规定和杆端力符号规定间的差异。

● 单元内任一截面的内力

对于杆系结构来说，有了杆端力即可将单元视力静定梁（简支梁、悬臂梁均可）。利用第 2 章已掌握的方法，由截面法即可求得单元内任意截面的内力。下面以图 6－21 所示悬臂梁为例，建立内力计算公式如下：

$$F_{NK} = F_{N\bar{2}} + \int_{x_k}^{l} p(x)\mathrm{d}x$$

$$F_{QK} = F_{Q\bar{2}} + \int_{x_k}^{l} q(x)\mathrm{d}x$$

$$M_K = M_2 + \int_{x_k}^{l} q(x)(x - x_k)\mathrm{d}x$$

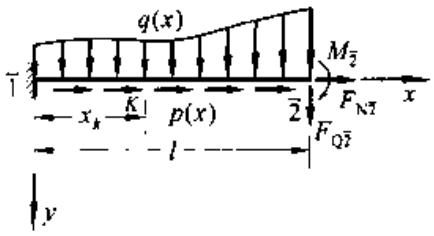


图 6－21　截面内力计算

有了具体的分布荷载 $p(x)$，$q(x)$ 变化规律，由上式即可得具体荷载作用下的任一截面内力。

§6－6　计算程序的主程序框图及算例

限于篇幅，本节只介绍计算程序的主程序框图及其所调用子程序间的关系。此外，对图 6－14 所示结构、例题 6－9、例题 6－10 和例题 6－11 的结构，给出了利用随书光盘程序计算的结果。

6－6－1　主程序框图

随本书发行的光盘上给出了按上述原理用 FORTRAN 77 和 FORTRAN 90 语言编写的(先处理法)源程序(PMGJ.FOR、PMGJ.F90)，以供读者学习时参考。必须说明的是，随本书发行光盘上的源程序除了可做线弹性杆系结构静力分析外，还可以作结构计算机分析篇中介绍的增量变刚度法计算极限荷载。因此，其对应的框图比较复杂。图 6－22 所给出的是线弹性杆系结构静力分析部分的主程序框图及子程序间的调用关系，读者对照源程序阅读时要注意。限于篇幅，对每一框的进一步说明不再赘述。有了图 6－22，结合源程序中的大量中文注释，读者应该可以读懂并应用此程序(执行程序名和源程序名相同)。

6－6－2　程序计算算例

经过程序界面的对话，可生成计算程序所需的数据文件。下例中将只给出计算程序的所需数据文件内容和计算结果的内力结果。有关输出文件中的更多的内容，因限于篇幅不再赘述。在例题 6－12 中给出了输入数据分组的含义，其他例题不再标注。

［**例题 6－12**］　试用程序计算图 6－14 所示结构，相关的已知数据见例题 6－5 和图 6－14。

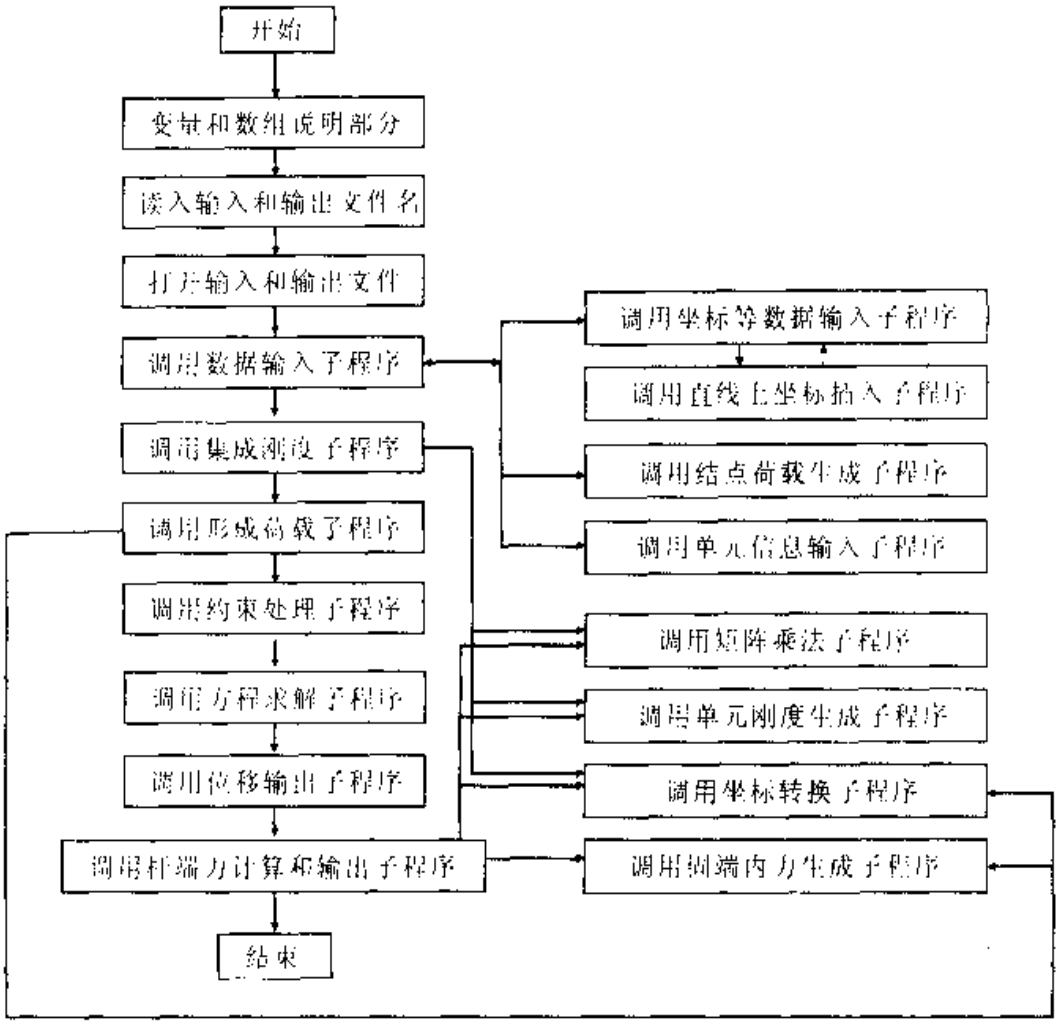


图 6-22 计算程序的主程序框图及子程序调用关系

解：本题程序计算所需数据文件内容如下：

3,4,1,2,1,4,0,0,0,0,1,0	控制数据	4,0,0,30,4,0	
1,0,0	控制结点坐标	30 000 000,0.24,0.007 2,1	单元材料信息
2,8,0		1,1,3,0,1	单元-结点信息
3,3,4		2,3,4,0,1	
4,8,4		3,2,4,0,1	
1,1,1,1,2,1	无位移支座信息	-18,5,2,1	单元荷载信息
3,30,0,0,3,0	结点荷载信息		

用随本书发行光盘程序 PMGJ.EXE 执行的杆端力[①] 输出结果为

① 由程序计算出的杆端力，其中轴力 F_N 单位为 kN，剪力 F_Q 单位为 kN，弯矩 M 单位为 kN·m。以下类同。

……杆 端 力……

单元	杆端	轴力	剪力	弯矩
1	始端	30.72	9.335	32.15
1	终端	-30.72	-9.335	14.52
2	始端	40.96	30.18	-14.52
2	终端	-40.96	59.82	-59.60
3	始端	59.82	40.96	74.25
3	终端	59.82	-40.96	89.60

[**例题 6-13**] 试用程序计算例题 6-9 所示结构，单元材料信息假定与上题相同。

解：本题计算数据和计算结果如下：

```
3,4,1,1,2,4,0,0,0,0,1,0
1,0,0
4,6,3
1,1,1,1,2,1
3,20,0,0,3,0
30 000 000,0.24,0.007 2,1
1,1,3,0,1
2,6,0
3,0,3
2,3,4,0,1
3,2,4,0,1
12,3,1,1
-10,6,2,1
```

……杆 端 力……

单元	杆端	轴力	剪力	弯矩
1	始端	24.01	27.26	34.38
1	终端	-24.01	8.740	-6.600
2	始端	28.74	24.01	6.600
2	终端	-28.74	35.99	-42.51
3	始端	35.99	28.74	43.71
3	终端	-35.99	-28.74	42.51

[**例题 6-14**] 试用程序计算例题 6-10 所示结构，单元材料信息假定和例题 6-12 相同。

解：本题计算数据和计算结果如下所示，所不同的是，输入数据多了一组。

```
3,4,1,0,4,4,0,3,0,0,1,0,
1,0,0
2,12.,0
3,0,6
4,12,6
1,1,1,1,2,1
2,2,1,3
2,2,2,4        相等位移信息
1,2,3,4
30 000 000,0.24,0.007 2,1
1,1,3,0,1
2,3,4,0,1
3,2,4,0,1
-20,3,1,2
-10,12,2,1
-40,6,2,1
6,6,3,1
```

……杆　端　力……

单元	杆端	剪力	弯矩
1	始端	-62.70	-114.5
1	终端	82.70	-321.7
2	始端	245.1	321.7
2	终端	114.9	-260.9
3	始端	46.70	127.3
3	终端	-82.70	260.9

［**例题 6-15**］ 试用程序计算例题 6-11 所示结构，单元材料信息假定与例题 6-12 相同。

解：本题计算数据和计算结果如下：

```
3,4,1,0,5,4,0,0,0,0,1,0
1,0,0
2,8,0
3,4,4
4,8,4
1,1,1,1,2,1
30 000 000,0.24,0.007 2,1
1,1,3,0,1
2,3,4,0,1
3,2,4,0,1
-14.142,2.828 2,1,2
-6,5.656 4,1,1
-6,5.656 4,1,4
-12,6,2,1
-20,2,3,2
```

……杆　端　力……

单元	杆端	轴力	剪力	弯矩
1	始端	46.17	40.75	71.20
1	终端	-12.23	7.328	23.32

2	始端	13.83	3.463	-23.32
2	终端	-13.83	68.54	-34.82
3	始端	68.54	33.83	60.49
3	终端	-68.54	-13.83	34.82

例题 6-12、6-13、和 6-15 都是考虑杆件轴向变形的，为了与手算位移法比较，建议读者仿照例题 6-14，自行用光盘上的程序按不计轴向变形重新计算这三个例题(截面均为 40 cm×60 cm 矩形)，并作出结构内力图和总结由此得到什么结论。

§6-7 结论与讨论

6-7-1 本章结论

● 矩阵位移法是求解静定、超静定杆系结构的计算机统一方法。与普通位移法最主要的不同处是，它借助矩阵将位移法分析公式化，从而实现“把繁琐交给计算机”，使大型结构分析计算可以容易、精确地实现。

● 结构的离散化也称为结构计算简图的数据化，它是用计算程序分析结构的基础。由集成规则可知，结点整体编码或整体位移码将直接影响结构刚度矩阵的半带宽，因此影响求解规模和效率。在离散化时应该根据半带宽计算方法，尽可能使其减小。

● 由于只建立了等截面直杆的单元刚度方程，因此对于拱、曲杆结构和连续变截面等结构，必须首先做用等截面直杆逼近待分析结构的近似处理。

● 单元分析也称建立单元杆端位移和单元杆端力之间的关系，它是矩阵位移法的基础。对单元局部坐标系，单元刚度方程实质上就是位移法的转角位移方程，所不同的仅在正向规定。因此，只要熟记形、载常数，利用叠加原理即可得到单元刚度方程。

● 坐标转换实质是寻找同一量在两个坐标系下对应量之间的关系。明确这一点，任何单元的转换矩阵 T 就不难获得。

● 自由式单元刚度矩阵都具有对称性和奇异性，具有位移约束的单元，如果位移约束能限制单元发生刚体位移，则单元刚度矩阵是非奇异的。

● 从计算机分析考虑，分析工作规范、统一，程序设计就简单、方便。计算机分析原则上不怕[illegible]时一般都考虑[illegible]未知量多，而是相反有规则。因此，矩阵位移法分析[illegible]轴向变形，也即对平面刚架每结点有 3 个位移。这时整体分析

的物理实质是保证全部结点平衡。

● 后处理法比先处理法易懂，程序也简单。但方程阶次高、无位移的约束也要作边界条件处理、求解效率低，对求解大型复杂结构可能受计算机硬件限制不能求解。因此，目前已很少应用。但是由此引出的边界条件处理方法，对于已知非零支座位移问题，仍然是需要的。

● 定位向量是单元结点位移码排成的列阵，它是先处理法的基础。深刻理解定位向量先处理法集成规则，是实现各种结构刚度矩阵存储方法（等半带存储、变带宽一维存储等）和相应求解算法的基础。集成的基本规则是，当单元局部行、列号(i,j)对应的定位向量非零行、列号为(r,s)时，整体单元刚度矩阵元素k_{ij}送入K_{rs}位置累加。整体单元等效结点荷载矩阵元素F_{Ei}送入P_r位置累加。

● 深刻理解结构刚度矩阵元素的物理意义，便可根据形常数，从结构中取相关联的一部分，列平衡方程得到结构刚度矩阵指定的元素。

● 综合结点荷载由直接作用在结点上的荷载以及等效结点荷载组成，它可根据相关单元由载常数快速确定。

● 对于单元上有荷载作用的情形，单元的杆端力由单元杆端位移及荷载引起的固端内力确定，公式为$\bar{\boldsymbol{F}}^e=\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e-\bar{\boldsymbol{F}}_E^e=\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e+\bar{\boldsymbol{F}}^{Fe}$。

● 单元上任意截面的内力，在求得杆端力后，可用截面法确定。

6-7-2 [illegible]

● 对只受扭矩作用的单元，设剪切弹性模量为G，极惯性矩为I_p，单元长度为l，请读者自行写出扭转单元的局部坐标单元刚度矩阵。

● 图6-23所示为交叉梁结构（或称格栅结构）它与刚架结构的主要区别在于荷载作用垂直杆轴所在平面（xy平面），在忽略轴向变形的情形下，交叉梁单元的局部坐标杆端位移为：z方向的挠度w、绕$\bar{x}$轴的转角$\theta_{\bar{x}}$和绕$\bar{y}$轴的转角$\theta_{\bar{y}}$，与其对应的杆端力为z方向的剪力、绕$\bar{x}$轴的扭矩和在$\bar{y}z$平面内的弯矩，正向规定均为沿右手坐标系的正方向为正。在上述说明情形下，利用形、载常数和叠加原理，即可得到交叉梁单元的局部坐标单元刚度方程。这一问题留待读者自行解决。

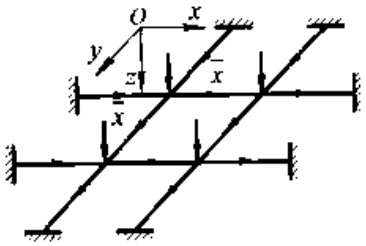


图6-23　交叉梁结构示意

● 对于一端[illegible]个位移，另一端只有两个线位移的一端固定一端铰支平面刚架单元，“铰”端弯矩等于零，转角不作为独立未[illegible]。利用弯矩为零的条

件，可以把非独立的转角位移用其他位移表示，从而将自由式单元刚度矩阵改造成此类单元的单元刚度矩阵。有兴趣的读者可按这一思路自行推导。

● 在线弹性小变形情形下，由叠加原理还可建立图 6－2 所示空间刚架分析所用的空间刚架单元，其具体形式在第(Ⅱ)册结构计算机分析篇中给出。有兴趣的读者也可自行研究。

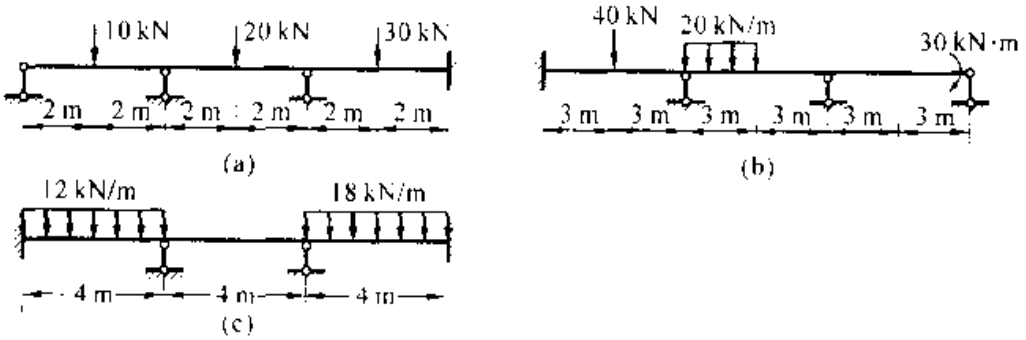
● 当约束方向和整体坐标方向不一致时，称此约束为斜支座(或斜支撑)，应该如何处理这种位移约束条件呢？本书第(Ⅱ)册结构计算机分析篇中将加以说明。有兴趣的读者也可自行研究。

● 利用矩阵位移法作影响线时，最容易想到的是将移动荷载作用范围分成若干等分，令每次只有一个单元荷载作用在等分点处，依次计算要作影响线的物理量，然后连接它们，即可作出该物理量的影响线。这种方法是可行的，但不是经济、高效的。建议读者从能量法作影响线的结论：影响线为变形(或位移)图出发，研究如何建立一种特殊单元(一种解除与所求影响线相应约束的单元，例如求弯矩影响线，跨中带有铰的单元等)，以便经济、高效地解决矩阵位移法作影响线问题。

● 从原始结构刚度矩阵的性质(奇异性)，能否考虑用矩阵位移法如何解决体系的可变性分析？这个问题也留给有兴趣的读者自行研究。

习　题

6－1　试用矩阵位移法计算图示连续梁。*EI* 为常数

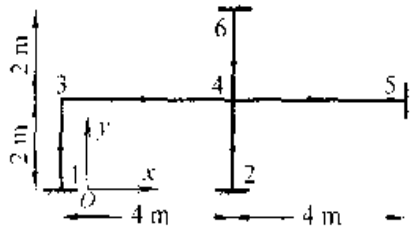


习题 6－1 图

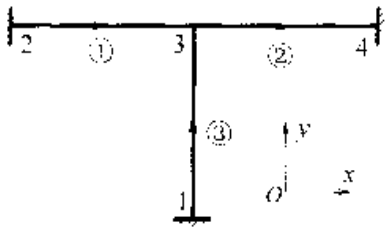
6－2　试求图示刚架的结构刚度矩阵(不计杆件的轴向变形)。设 $E=21\times10^4$ MPa，$I=6.4\times10^{-3}$ m^4。

6－3　试求图示刚架的结构刚度矩阵(计杆件的轴向变形)。设各杆几何尺寸相同，$l=5$ m，$A=0.5$ m^2，$I=1/24$ m^4，$E=3\times10^7$ kN/m^2。

6－4 试用先处理法建立图示结构的刚度矩阵。设 $E=21\times10^4$ MPa，$I=6.4\times10^{-5}$ m^4，$A=2\times10^{-3}$ m^2。

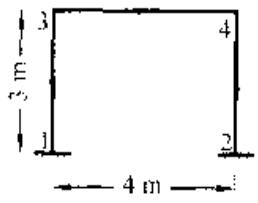


习题6－2图

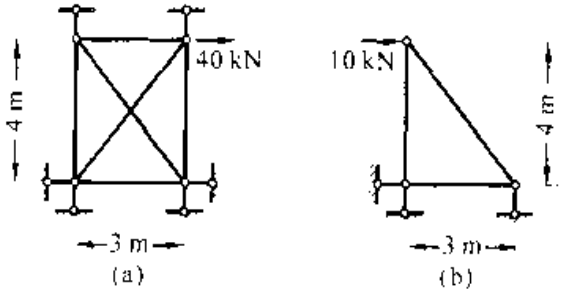


习题6－3图

6－5 试用矩阵位移法(先处理法)求图示桁架各杆内力。各杆 EA 相同。



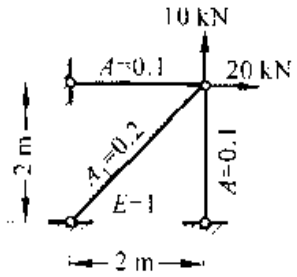
习题6－4图



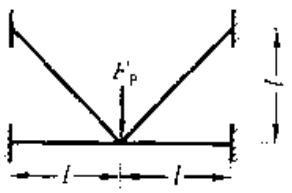
习题6－5图

6－6 试用矩阵位移法求图示桁架各杆轴力。各杆 EA 相同。

6－7 试用随本书光盘上的计算程序求解图示刚架并作内力图。各杆 E、I、A 相同，且 $A=12\sqrt{2}I/l^2$。

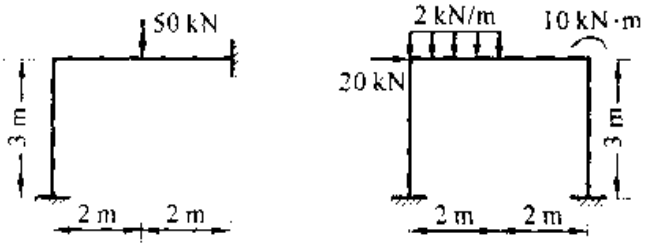


习题6－6图



习题6－7图

6－8 试用随本书光盘上的计算程序求解图示刚架并作内力图。各杆 $E=1.0$，$I=1.0$。



习题 6－8 图

第7章

结构稳定及极限荷载计算的基本知识

结构稳定性是结构设计中必须考虑的重要问题之一。极限荷载计算是允许存在塑性变形的条件下，充分发挥结构承载潜力的设计思想和设计方法。若从精确理论出发，前者需要考虑大变形，后者需要考虑非线性的应力－应变关系，二者均属于非线性问题。本书作为在结构稳定计算和结构极限荷载计算方面继续深入学习、研究的基础，仅基于线性理论和理想弹塑性应力－应变关系介绍一些最基本的知识。

§7－1　两类稳定问题概述

本节在材料力学关于压杆稳定性的基础上，进一步讨论杆件结构的一些稳定性问题。

7－1－1　工程结构稳定计算问题

工程中由于结构失稳而导致的事故时有发生，如加拿大魁北克大桥、美国华盛顿剧院的倒塌事故，1983 年北京某科研楼兴建中的脚手架的整体失稳等，都是工程结构失稳的典型例子。随着工程结构向高层、大跨方向发展，所用材料向高强度方向发展，结构中的部件或整体的平衡状态丧失稳定性的可能性增大。因此，结构设计除须保证足够的强度和刚度外，保证结构具有足够的稳定性也就日显重要。

各种实际工程结构都可能产生失稳，图 7－1a、b、c 所示分别为刚架、拱、窄长截面梁整体失稳示意图。

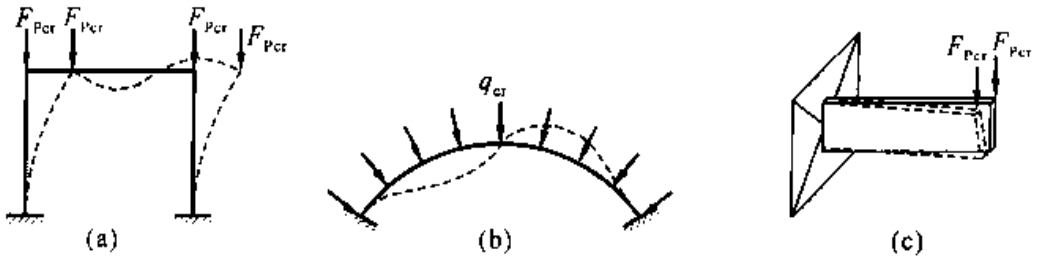


图 7－1　部分结构失稳

7－1－2　稳定问题分类

1．定义

● 结构中凡受压杆件均为理想中心受压杆时，这类结构体系称为**完善体系**。图 7－2 示意的结构，在不考虑轴向变形时，均为完善体系。

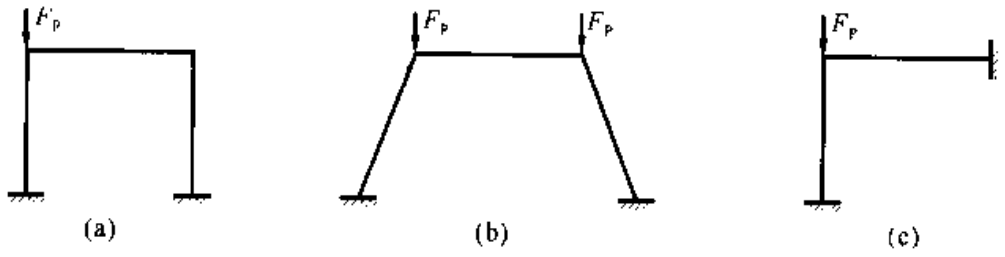


图 7－2　完善体系

● 结构中受压杆件或有初曲率或有偏心荷载(例如为压弯联合受力状态)，这类结构体系称为**非完善体系**。图 7－3 所示的结构均为非完善体系。

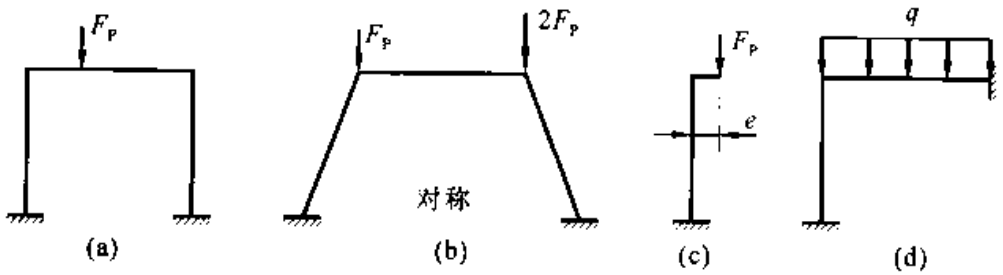


图 7－3　非完善体系

2．结构平衡状态的分类

根据结构经受任意微小外界干扰后，能否恢复初始平衡状态，可对平衡状态作如下分类：

● **稳定的平衡状态**。外界干扰消除后结构能完全恢复初始平衡位

置，则初始平衡状态是稳定的。

● 不稳定平衡状态。外界干扰消除后结构不能恢复初始平衡位置，则初始平衡状态是不稳定的。

● 经简化抽象，可能出现受干扰后可在任何位置保持平衡的现象，称此现象为随遇平衡状态。

3. 稳定问题分类

与材料力学中压杆类似，根据失稳前后变形性质（即平衡构形和平衡路径的性质）是否改变等，结构失稳可分为如下三类：

● 分支点失稳。失稳前后平衡状态所对应的变形性质发生改变，如图7－4所示（图 F_P 为所受荷载，F_{Pcr} 为临界荷载，图 7－4a、b、c、d 分别为各种荷载大小作用下的变形情形）。在图 7－4e 所示分支点处平衡具有二重性，即既可在原始位置平衡，也可在偏离后的新位置平衡。分支点处的荷载，即为临界荷载 F_{Pcr}。

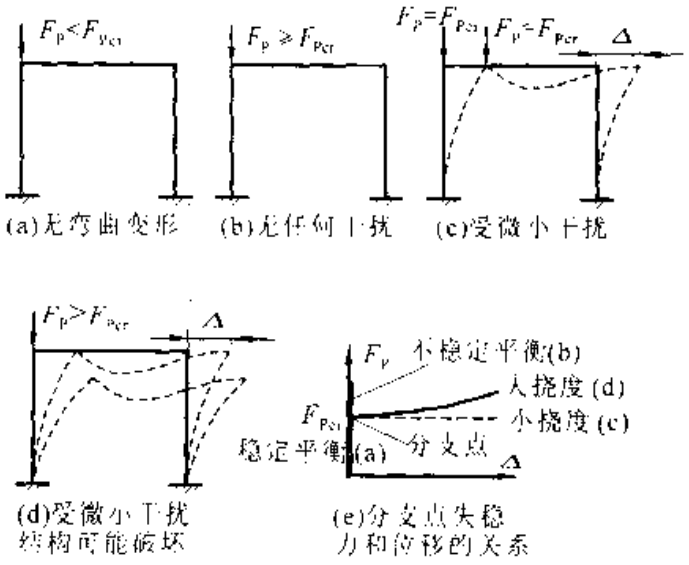


图 7－4　分支点失稳示意图

● 极值点失稳。失稳前后变形性质没有变化，力－位移（F_P－Δ）关系曲线存在极值点，其对应的荷载即为临界荷载 F_{Pcr}，F_P 达到 F_{Pcr} 时变形将迅速增长，很快结构即告破坏，如图 7－5 所示。图 7－5c 所示，当 $F_P=F_{Pcr}$（也即达到极值点）时，结构受干扰的失稳破坏也称为压溃。

● 跳跃现象。图 7－6 所示扁平二杆桁架或扁平拱，当荷载、变形达到一定程度时，可能从凸形受压的结构翻转成凹形的受拉结构，这就是急跳或跳跃（snap-through）现象。

在稳定分析中，有基于小变形的线性理论和基于大变形的非线性理论：

● 线性理论中变形是一阶微量，计算中将略去高阶微量使计算得以

简化,其结果与大变形时的实验结果有较大偏差。

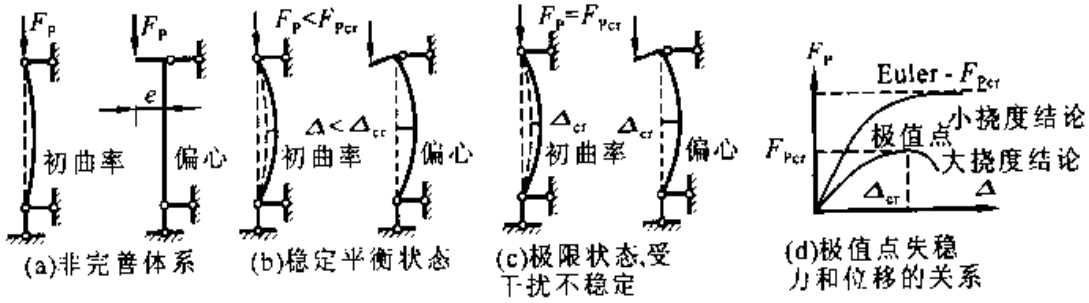
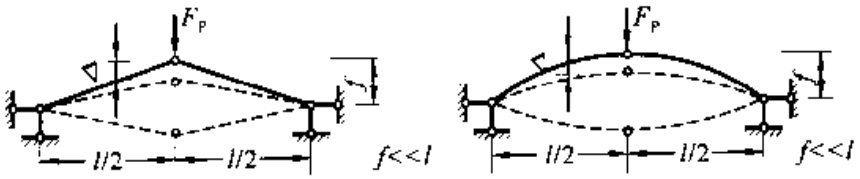
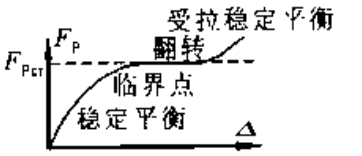


图 7·5 极值点失稳示意



(a)扁平桁架和扁平拱



(b)急跳现象力和位移关系

图 7-6 扁平结构急跳现象示意

● 非线性理论中考虑有限变形对平衡的影响,其结果与实验结果吻合的很好,但分析过程复杂。

下一节中将简单介绍同一简单问题两种解法,以便读者较全面地掌握结构稳定性分析的基本理论。对于较复杂问题的非线性理论超出了本书的范围,将不再涉及。对于线性理论的稳定计算,除本章外还将在第(Ⅱ)册结构计算机分析篇中介绍其计算机分析方法。

§7-2 两类稳定问题分析简例

7-2-1 完善体系分支点失稳分析简例

完善体系分支点失稳有静力法和能量法两种,下面分别用例题加以说明。

[例题 7－1]　试求图 7－7 所示单自由度(确定结构平衡位置所需的独立坐标数)结构体系的临界荷载 $F_{P_{cr}}$，其中 AB 为刚性杆，CAD 为弹性杆。

解：　本例用静力法求解，与材料力学一样，所谓静力法是利用分支点的平衡两重性，通过建立平衡方程来分析的方法。

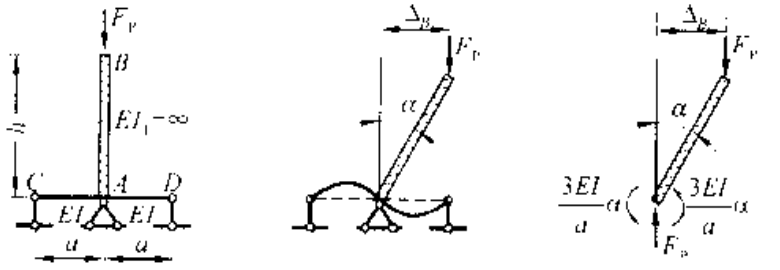
(1) 按非线性理论分析

考察图 7－7b 所示失稳后的任意平衡位置，其中 α 为有限值(非小量)。则

$$\Delta_P = h\sin\alpha$$

考察 AB 杆的受力如图 7－7c，由 $\sum M_A = 0$，可得

$$F_P \cdot h\sin\alpha - \frac{6EI}{a}\alpha = 0$$



(a)结构与荷载　　(b)偏离原位的平衡状态　　(c)脱离体受力图

图 7－7　例题 7－1 图分支点失稳

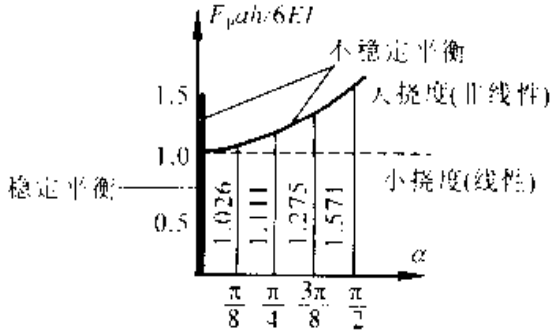


图 7－8　力－位移关系分析结

其解为　$\alpha \neq 0$，$F_P = \frac{6EI}{ah} \cdot \frac{\alpha}{\sin\alpha}$

据此可作出力－位移关系如图 7－8 所示。在分支点处 $\alpha \to 0$，$(\alpha/\sin\alpha) \to 1$，因此分支点荷载为

$$F_{P_{cr}} = \frac{6EI}{ah}$$

(2) 按线性理论分析

图 7 7c 中 α 为微量，于是有 $\Delta_H \approx h \cdot \alpha$。根据图 7-7c，由 $\sum M_A = 0$，可得

$$F_P \cdot h \cdot \alpha - \frac{6EI}{a} \cdot \alpha = 0$$

其解为

$$\alpha \neq 0, \quad F_P = \frac{6EI}{ah}$$

分支点处临界荷载为

$$F_{Pcr} = \frac{6EI}{ah}$$

(3) 总结与推广

● 按静力法，线性与非线性理论所得分支点荷载 F_{Pcr} 完全相同，但线性理论分析过程简单。

● 非线性理论结果表明，$F_P = F_{Pcr}$ 后，要使 AB 杆继续偏转（α 角增大），必须施加更大的荷载（F_P 增加）。而线性理论结果表明，不管 α 角多大，荷载均保持为 F_{Pcr}，也即随遇平衡。前者与实验吻合，后者实际是一种虚假的现象。

● 线性与非线性理论分析的步骤均为：

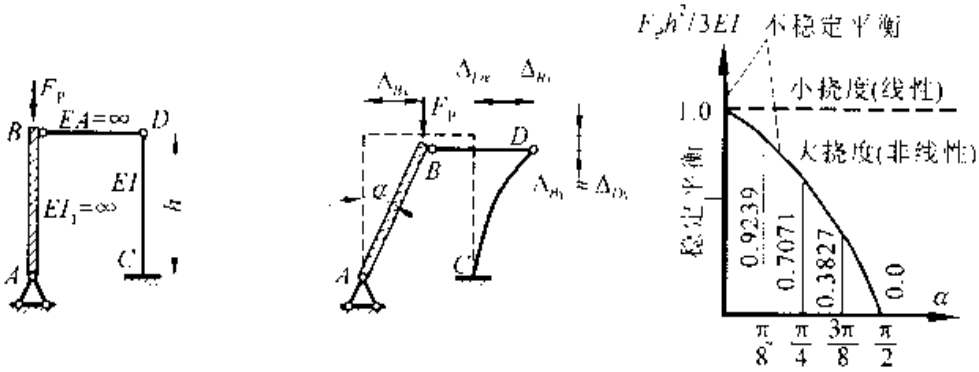
(1) 令结构偏离初始平衡位置，产生一可能变形状态。

(2) 分析结构在可能变形状态下的受力，作隔离体受力图。

(3) 由平衡条件建立稳定分析的特征方程。

(4) 由特征方程求解临界荷载 F_{Pcr}。

[**例题 7-2**] 试求图 7-9 所示单自由度结构体系的临界荷载 F_{Pcr}。



(a)结构与荷载　(b)偏离原位的平衡状态　(c)力和位移关系

图 7-9 例题 7-2 图分支点失稳

解：与材料力学压杆稳定问题一样，在分支点失稳问题中，临界状态的能量特征为体系总势能取驻值。下面讨论由此特征确定临界荷载 F_{Pcr} 的方法。

(1) 按非线性理论计算

考察图 7-9b 所示失稳后平衡位置，其中 α 为有限值。因此

$$\Delta_{Bx}=h\cdot\sin\alpha,\quad \Delta_{By}=h\cdot(1-\cos\alpha)$$

对应这一可能位置弹性杆应变能 V_ε（根据能量守恒定理，可由应变能等于外力功计算）为

$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{3EI}{h^3}\cdot\Delta_{Bx}^2=\frac{3EI}{2h}\cdot\sin^2\alpha$$

定义：从变形位置退回无变形位置过程中荷载所做的功，称为外力势能，记为 E_P^*。则

$$E_P^*=-F_P\cdot\Delta_{By}=-F_P\cdot h(1-\cos\alpha)$$

定义：应变能加外力（荷载）势能为体系的总势能，记作 E_P。则

$$E_P=V_\varepsilon+E_P^*=\frac{3EI}{2h}\sin^2\alpha-F_P\cdot h(1-\cos\alpha)=E_P(\alpha)$$

由稳定的能量特征可得

$$\delta E_P\left(=\frac{\mathrm{d}E_P(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\delta\alpha\right)=\left(\frac{3EI}{h}\sin\alpha\cos\alpha-F_Ph\sin\alpha\right)\delta\alpha=0$$

由此可得

$$F_P=\frac{3EI}{h^2}\cos\alpha$$

分支点处荷载为（图 7-9c）

$$F_{Pcr}=\frac{3EI}{h^2}$$

（2）按线性理论计算

图 7-9b 所示 α 为微量，此时

$$\Delta_{Bx}\approx h\cdot\alpha,\quad \Delta_{By}\approx\frac{h\cdot\alpha^2}{2}$$

$$V_\varepsilon=\frac{3EI}{2h}\cdot\alpha^2,\quad E_P^*=-F_P\cdot\frac{h\alpha^2}{2}$$

因此，体系总势能 E_P 为

$$E_P=\frac{3EI}{2h}\cdot\alpha^2-F_P\cdot\frac{h\alpha^2}{2}=E_P(\alpha)$$

同样，由总势能驻值可得

$$\delta E_P\left(=\frac{\mathrm{d}E_P(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\delta\alpha\right)=\left(\frac{3EI}{h}-F_P\cdot h\right)\alpha\delta\alpha=0$$

由此可得临界荷载

$$F_{Pcr}=\frac{3EI}{h^2}$$

（3）总结与推广

● 体系的总势能等于体系的应变能 V_ε 与体系的外力（荷载）势能 E_P^* 之和。

● 确定体系临界荷载的能量准则是体系总势能 E_P 取驻值，对单自由度体系驻值条件为

$$\frac{dE_P(x)}{dx}=0$$

式中，x 是体系位移参数。

对多自由度体系总势能是各自由度位移参数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的函数，体系驻值条件为

$$\frac{\partial E_P}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2\cdots,n)$$

● 非线性理论分析结果表明，荷载达到分支点 $F_{P\sigma}=\frac{3EI}{h^2}$ 后，结构受干扰将压溃。由图 7-9c 可见本例的分支点也是极值点。因此，设计验算此类结构时要注意，应该按非完善体系极值点失稳来验算。

● 线性理论分析虽能得出分支点临界荷载正确结果，但不能解释干扰后 F_P 反而减小的压溃现象，反而给出虚假的随遇平衡结论；

● 利用体系总势能的能量准则计算临界荷载的方法，称为**能量法**。它的一般分析步骤为(线性和非线性均适用)：

(1) 设定一种满足位移约束条件的可能失稳变形状态(也称失稳构形)。

(2) 计算体系的应变能 V_ε、外力势能 E_P^*，从而获得总势能 $E_P=V_\varepsilon+E_P^*$。

(3) 从总势能的驻值条件建立稳定性分析的特征方程。

(4) 由特征方程解得临界荷载 $F_{P\sigma}$。

7-2-2 [illegible]

[**例题 7-3**] 试求图 7-10a 所示有初偏离 β 的单自由度结构体系的临界荷载。图中偏角 β 很微小($\beta\ll1$)。

解：本例仍用静力法求解，读者也可按例题 7-2 所给出的步骤用能量法求解。

(1) 按非线性理论计算

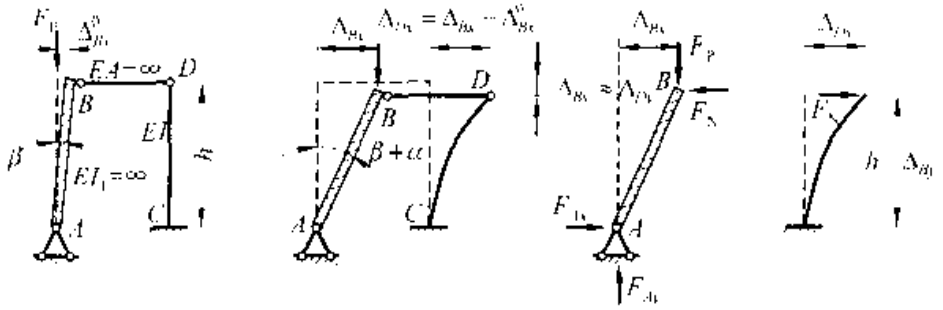
设体系发生图 7-10b 所示失稳变形状态，此时 α 为有限值，刚性杆长 $l=h/\cos\beta\approx h$。因为 BD 杆刚度无限大，因此不存在轴向变形，由图 7-10a、b 可得

$$\Delta_{Bx}^0=l\cdot\sin\beta,\quad \Delta_{Bx}=l\cdot\sin(\alpha+\beta),\quad \Delta_{Dx}=l\cdot[\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta] \tag{a}$$

$$\Delta_{Dy}\approx\Delta_{By}=h-l\cdot\cos(\alpha+\beta) \tag{b}$$

由图 7-10c 可见

$$F_N = \frac{3EI}{h^3} \cdot \Delta_{D1} = \frac{3EI}{h^3} \cdot l \cdot [\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta] \tag{c}$$



(a)结构与荷载　　(b)偏离原位的平衡状态　　(c)隔离体受力图

图 7-10　例题 7-3 极值点失稳

根据刚性杆的平衡条件，由 $\sum M_A = 0$ 可得

$$F_P \cdot \Delta_{Br} - F_N \cdot (h - \Delta_{Bx}) = 0$$

将式(a)、(b)、(c)中有关结果代入整理后，得

$$F_P = \frac{3EI}{h^3} \cdot l \cdot \cos(\alpha + \beta)\left[1 - \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right] \tag{d}$$

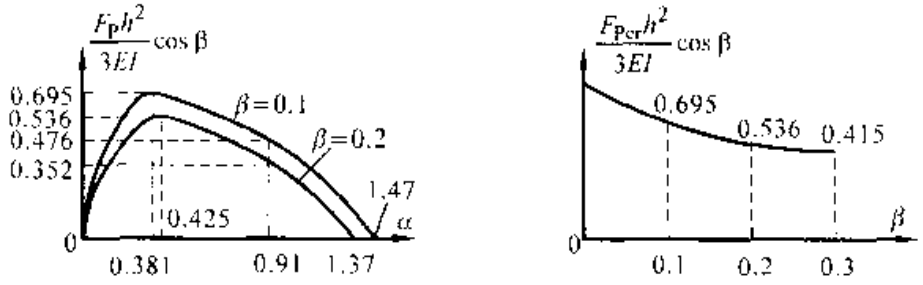
为求 $F_P - \alpha$ 关系的极值点，可由 $\frac{dF_P}{d\alpha} = 0$ 得极值点位置：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin^{\frac{1}{3}}\beta \tag{e}$$

极值点临界荷载为

$$F_{Per} = \frac{3EI}{h^3} \cdot l \cdot (1 - \sin^{\frac{2}{3}}\beta)^{\frac{3}{2}} \tag{f}$$

由式(d)和式(f)可作出图 7-11a、b 所示的 $F_P h^2 \cos\beta / 3EI - \alpha$ 及 $F_{Per} h^2 \cos\beta / 3EI - \beta$ 的关系曲线。



(a)　$F_P h^2 \cos\beta / 3EI$ 与 α 的关系　　(b)　$F_{Per} h^2 \cos\beta / 3EI$ 与 β 的关系

图 7-11　非线性理论计算结果

(2) 按线性理论计算

此时 α 是微量，$l=\dfrac{h}{\cos\beta}\approx h$。

在线性理论条件下，有

$$\Delta_{BH}^{II}\approx l\cdot\beta,\Delta_{Br}\approx l\cdot(\alpha+\beta),\ \Delta_{DH}\approx l\cdot\alpha,\Delta_{Bv}\approx 0$$

$$F_N=\frac{3EI}{h^3}\cdot l\cdot\alpha$$

$$F_P\cdot l\cdot(\alpha+\beta)-F_N\cdot h=0$$

$$F_P=\frac{3EI}{h^2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

不同初偏角 β 情况下，$F_Ph^2/3EI-\alpha$ 关系曲线如图 7－12 所示。

(3) 总结与推广

● 不同的初偏角将影响临界荷载 F_{Pcr}，初偏离 β 增大时 F_{Pcr} 减小。这表明制造或安装误差对稳定性都是不利的。

● 非线性理论计算结果存在极值点失稳，这一结果与实际吻合。

● 线性理论计算结果 F_P 比非线性理论计算结果大，因而是偏于危险的。(对比图 7－11 和图 7　12)。

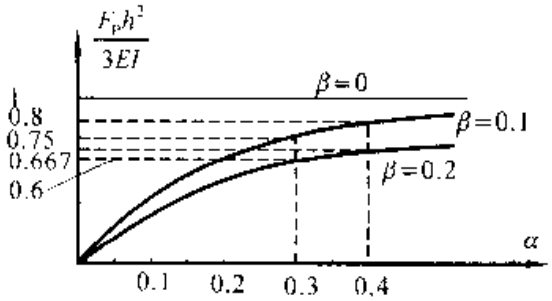


图 7－12　线性理论计算结果

● 在线性理论(α 微小)前提下，$F_P(\alpha)$是单调增加的，不存在极值点。

● 非完善体系的临界荷载只能由非线性理论确定。

§7－3　结构的极限荷载

大多数工程材料，特别是钢材，受力后发生变形，一般都存在线弹性阶段、屈服阶段和强化阶段。因此，随着荷载的增加，结构上应力大的点首先达到屈服强度，发生屈服，结构将进入弹塑性状态。这时，虽然部分已进入塑性状态，但尚有相当大的部分材料仍处于弹性范围，因而结构仍可继续承

载。当荷载增加到一定程度，结构中进入塑性的部分不断扩展直至完全丧失承载能力，发生崩溃（或倒塌）。

工程设计中，根据工程的重要性和失效后危险性的不同程度，采用不同的设计准则。对核电站结构等特重要的建筑，设计时需将结构的变形全部限定在弹性范围内，这对于一般工程，这种设计要求显然过于保守。允许材料进入塑性的结构分析称为材料非线性分析，这是目前结构分析中十分重要的研究领域之一。其内容已超出本书的范围。极限状态设计所关心的不是荷载作用下结构弹塑性的演变历程（也即每一时刻荷载对应的响应），而是结构出现塑性变形直到崩溃时所能承受的最大荷载，然后考虑结构应有足够的安全储备，以此作为设计依据。对应的极限承载能力称为**极限荷载**（ultimate load）。显然按极限状态设计结构比弹性设计将更经济。

7-3-1 基本假定

本节分析基于以下基本假定：

● 假定材料具有相同的拉、压力学性能以及理想弹塑性的应力－应变关系，如图 7－13 所示。实际工程中的建筑钢材，变形不大时的性能与这一假定比较接近。

● 假定结构上所受荷载是按荷载参数 P 以同一比例由小变大逐步加载的，同时荷载参数 P 单调增加，不出现卸载情形，这种加载方式称为比例加载。

● 假定在弹塑性阶段横截面应变仍符合平截面假定。

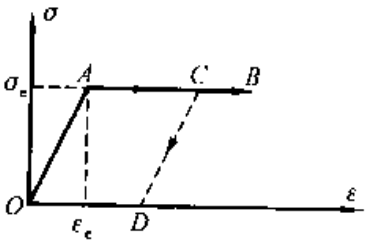


图 7－13　理想弹塑性应力

7-3-2 基本概念

在讨论具体结构极限荷载计算之前，首先通过图 7－14a 所示纯弯矩形等截面梁的弹塑性过程分析建立一些基本概念。

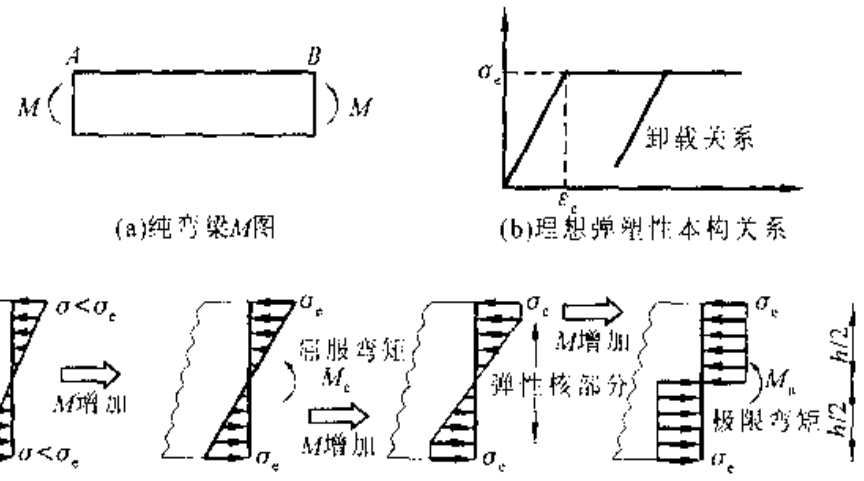
● 在基本假定条件下，加载过程中，梁将从弹性阶段（图 7－14c）经过弹塑性阶段（图 7－14e），最后进入塑性阶段（图 7－14f）。

● 弹性阶段（图 7－14c）以梁边缘应力达到屈服应力 σ_s 为终止（图 7－14d），对应的截面弯矩称为屈服弯矩，是弹性阶段所能承受的最大弯矩，用 M_e 表示。

● 进入弹塑性阶段后，随荷载增大，弹性区（或称弹性核）逐渐减小塑性区逐渐增大，如图 7－14e 所示。

● 荷载增加到截面上各点的应力均达屈服应力时（图 7－14f），根据

基本假定，变形将不断增大，梁最终将破坏，对应截面上的弯矩称为**极限弯矩**，用 M_u 表示。此时的荷载即为**极限荷载**，用 F_{Pu} 表示。



(a)纯弯梁M图　(b)理想弹塑性本构关系

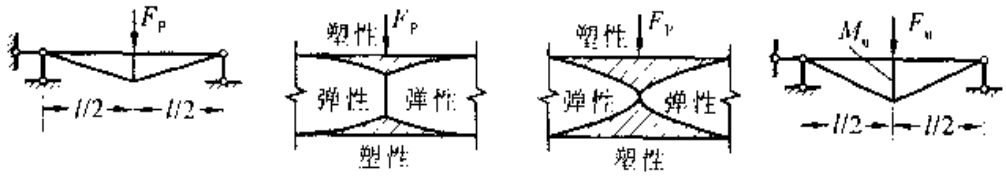
(c)荷载较小,弹性　(d)弹性阶段结束　(e)弹塑性阶段　(f)极限状态

图 7-14　纯弯矩形等截面梁的弹塑性过程分析

● 对矩形截面梁，$M_s = W\sigma_s = bh^2\sigma_s/6$，式中 $W = bh^2/6$ 为截面弯曲截面模量。

● 对矩形截面梁，$M_u = W_u\sigma_s = bh^2\sigma_s/4$，式中 $W_u = bh^2/4$ 为塑性弯曲截面模量。可见 $M_u = 1.5M_s$。

当梁处于非纯弯曲状态时，如跨中受集中荷载 F_P 的简支梁，由于截面既有正应力又有切应力，因此应按复杂应力状态的屈服准则确定极限荷载。但是，实验和理论分析结果都表明，对于细长梁，切应力对极限承载力影响很小，可不予考虑。因此，其分析过程和纯弯梁类似。如图 7-15a 所示简支梁，跨中截面达极限弯矩时，将出现允许单向转动的塑性铰使结构破坏。



(a)结构与M图　(b)弹塑性状态　(c)塑性铰状态　(d)极限状态

图 7-15　横向荷载下极限荷载分析过程

● 沿梁长度方向塑性区范围是不同的(或称弹性核大小沿杆长度方向是变化的)，如图 7-15c 所示。

● 当 $F_P l/4 = M_u$ 时，对应的荷载为 $F_{Pu} = 4M_u/l$ 即为极限荷载。

● 当 $F_P = F_{Pu}$ 时，跨中截面两侧由于变形自由，可产生有限的相对转动，其作用与铰相似。因此，称此截面为**塑性铰**(plastic hinge)。

● 在一些简化的非线性分析和极限荷载分析中，认为塑性区仅集中在塑性铰截面，杆件的其他区段都是弹性的。

● 从图 7－13 卸载时的应力－应变关系可见，当截面因卸载应力减小时，截面又将回到弹塑性或弹性(有残余应变)状态，塑性流动引起的铰链作用消失。因此，塑性铰是单向的(单方向可允许转动，反方向铰链将闭合)。

● 实际的铰结点允许相连杆件间相对转动，不能传递弯矩。但是，塑性铰截面能承受该截面对应的极限弯矩 M_u。

上述最后两点是塑性铰和实际铰的差别之处。

如果杆件平面弯曲的中性轴并非对称轴，材料仍为拉、压性能相同且具有理想弹塑性的应力－应变关系，同时还不考虑剪力、轴力的影响时，与上述分析过程相似，可以得到以下结论：(平截面假设成立，建议读者自行画出相关的各阶段图形，以加深理解)

● 中性轴位置将随弹塑性区的变化而改变。

● 出现塑性铰(截面弯矩达 M_u)时中性轴为截面拉、压区面积相等的“等面积轴”。

● 极限弯矩 $M_u = (S_T + S_C)\sigma_s$。式中 S_T 和 S_C 分别为拉、压区面积对中性轴的静矩。

§7－4　极限平衡法及比例加载时极限荷载的一些定理

应用上述基本概念，本节首先讨论超静定梁在比例加载条件下极限荷载的确定方法，然后介绍若干判断极限荷载的定理。

7－4－1　极限平衡法

根据上述基本概念，结构达极限状态时应该满足以下条件：

● **平衡条件**。结构整体或任何部分均应是平衡的。

● **内力局限条件**。极限状态时结构中任一截面弯矩绝对值不可能超过其极限弯矩 M_u，亦即 $|M| \leqslant M_u$。

● **单向机构条件**。结构达极限状态时，对梁和刚架必定有若干(取决于具体问题)截面出现塑性铰，使结构变成沿荷载方向能作单向运动的机构(也称破坏机构)。根据上述这些条件，经过分析可以确定结构的极限荷载。

现举例说明如下。

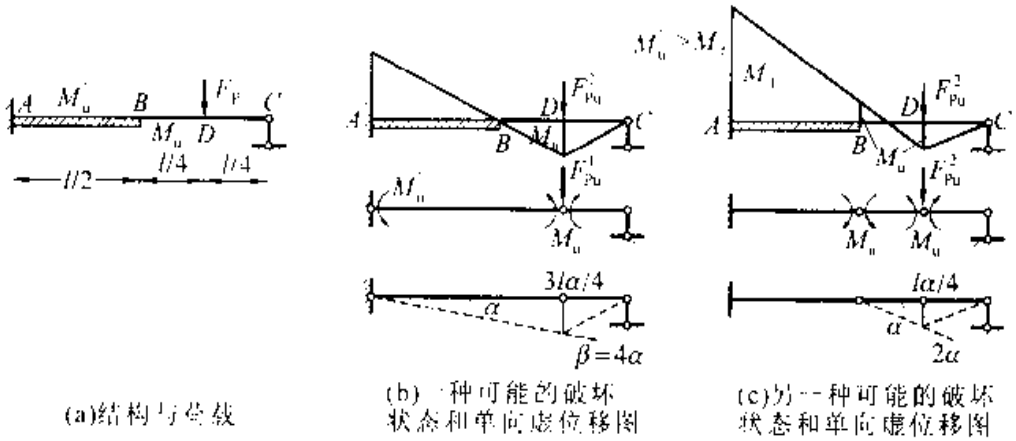
[**例题 7－4**]　试求图 7－16a 所示单跨超静定梁的极限荷载。已知 $M_u' \geqslant M_u$。

解：　图 7－16a 所示梁的弯矩图形状为图 7－16b、c 所示的折线，因此可能的破坏情形（即极限状态）如图 7－16b（A、D 出现塑性铰）和 c（B、D 出现塑性铰），因为 $M_u' \geqslant M_u$，所以 B 处塑性铰出现在 B 右截面）两种（A、B、D 三截面同时出现塑性铰而破坏可从这两种情形中导出，故不单独讨论）。要出现图 7－16b 所示破坏时，从几何分析 B 截面弯矩必须满足如下条件：

$$M_B = \frac{1}{3}(M_u' - 2M_u) \leqslant M_u$$

当 $M_u' \leqslant 5M_u$ 时，上述条件成立，根据刚体虚位移原理，由图 7－16b 可见，

$$F_{Pu}^{(1)} \times \frac{3l}{4}\alpha = M_u' \cdot \alpha + M_u \times 4\alpha, \quad F_{Pu}^{(1)} = \frac{4}{3l}(M_u' + 4M_u)$$



(a)结构与荷载　(b)一种可能的破坏状态和单向虚位移图　(c)另一种可能的破坏状态和单向虚位移图

图 7－16　变截面单跨梁极限分析

当 $M_u' = 5M_u$ 时，

$$F_{Pu}^{(1)} = \frac{12M_u}{l}$$

当出现图 7－16c 所示破坏情形时，从几何分析 A 截面弯矩必须满足如下条件：

$$M_A = 5M_u \leqslant M_u'$$

同时，根据图 7－16c 可列虚功方程：

$$F_{Pu}^{(2)} \times \frac{l}{4}\alpha = 3M_u \cdot \alpha, \quad F_{Pu}^{(2)} = \frac{12M_u}{l}$$

讨论：

● $M_u' = 5M_u$ 时，两种情况都能产生，A、B、D 三处都出现塑性铰。

极限荷载为

$$F_{Pu}=12M_u/l$$

● 任何结构(静定、超静定)的极限荷载只需分析**破坏机构**(collapse mechanism),由平衡条件(静力平衡方程或虚功方程)即可求出。这种方法称为**极限平衡法**。

● 超静定结构的温度改变、支座移动等外因只影响结构弹塑性变形的过程(或称历程),并不影响极限荷载值。亦即仅计算极限荷载时,可不考虑温度改变、支座移动等外因的作用。

7-4-3　比例加载时判定极限荷载的基本定理

1. 定义

● 满足单向破坏机构和平衡条件的荷载称为**可破坏荷载**,记作 F_P^+。

● 满足内力局限条件和平衡条件的荷载称为**可接受荷载**,记作 F_P^-。

显而易见,**极限荷载应该既是可破坏荷载,又是可接受荷载**。

2. 一些定理

● **基本定理**。可破坏荷载 F_P^+ 恒不小于可接受荷载 F_P^-,亦即 $F_P^+ \geqslant F_P$。

● **唯一性定理**。结构的极限荷载是唯一的。

● **极小定理**。可破坏荷载是极限荷载的上限,亦即 $F_{Pu}=\min\{F_P^+\}$。

● **极大定理**。可接受荷载是极限荷载的下限,亦即 $F_{Pu}=\max\{F_P^-\}$。

下面给出上述定理的简单证明:

对任一可破坏荷载 F_P^+,可列出与其对应的破坏机构单位虚位移时的虚功方程:

$$F_P^+\Delta=\sum_{i=1}^{n}|M_{ui}|\cdot|\theta_i|=\sum_{i=1}^{n}M_{ui}\cdot\theta_i \tag{a}$$

式中,n 是出现的塑性铰数,M_{ui}、θ_i 分别为第 i 个塑性铰的极限弯矩和弯矩方向相对转角(单向的)。

另取一可接受荷载 F_P^-,对应的弯矩表为 M^-。由 F_P^- 及其内力在上述单位虚位移上所作虚功,可得如下虚功方程:

$$F_P^-\Delta=\sum_{i=1}^{n}M_i^-\cdot\theta_i \tag{b}$$

式中,M_i^- 为第 i 个塑性铰处的弯矩值。

又因为内力局限条件:$|M_i^-|\leqslant|M_{ui}|$,因此

$$\sum_{i=1}^{n}|M_{ui}|\cdot|\theta_i|\geqslant\sum_{i=1}^{n}M_i^-\theta_i$$

将式(a)、(b)代入上式，得 $F_P^+ \geqslant F_P$，即可证明基本定理。

设结构存在两种极限状态，其极限荷载分别为 F_{Pu1} 和 F_{Pu2}。因为极限荷载既是可破坏荷载，也是可接受荷载，所以可先将 F_{Pu1} 看成可破坏荷载，F_{Pu2} 作为可接受荷载。这时，基于基本定理有 $F_{Pu1} \geqslant F_{Pu2}$。反之，将 F_{Pu2} 看成可破坏荷载，F_{Pu1} 作为可接受荷载，则又可得 $F_{Pu1} \leqslant F_{Pu2}$。如要求两个都是极限荷载，则必须 $F_{Pu1} = F_{Pu2}$。唯一性定理证毕。

极小和极大定理的证明，留给读者自行研究。

3. 定理应用举例

[**例题 7-4**] 图 7-17a 所示等截面梁 M_u = 常数。试求在均布荷载作用下的极限荷载 q_u。

解： 由此梁的弯矩分布(参见载常数表)可知，当梁处于极限状态时，有一个塑性铰在固定端 A 形成，另一个塑性铰 C 的位置是待定的，可应用极小定理确定。

图 7-17b 所示为一破坏机构，其中塑性铰 C 的坐标设为 x。

为了求出此破坏机构相应的可破坏荷载 q^+，可对图 7-17b 所示的可能位移列出虚功方程

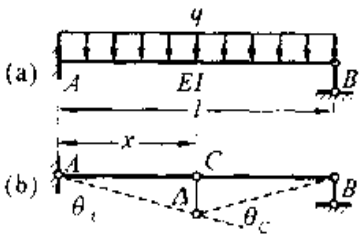


图 7-17 例题 7-4 图

$$q^+ \frac{l\Delta}{2} = M_u(\theta_A + \theta_C)$$

由图 7-17b 几何关系可得

$$\theta_A = \frac{\Delta}{x}, \quad \theta_C = \frac{l\Delta}{x(l-x)}$$

故得

$$q^+ = \frac{2l-x}{x(l-x)} \frac{2M_u}{l}$$

为了求 q^+ 的极小值，令 $\frac{\mathrm{d}q^+}{\mathrm{d}x} = 0$，得

$$x^2 - 4lx + 2l^2 = 0$$

其两个根为

$$x_1 = (2+\sqrt{2})l \quad (\text{不合理}), \quad x_2 = (2-\sqrt{2})l$$

弃去 x_1，由 x_2 求得极限荷载为

$$q_u=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}\frac{M_u}{l^2}=11.659\frac{M_u}{l^2}$$

[**例题 7－5**]　设有一 n 跨连续梁，每跨等截面，但各跨截面可不相同（也即极限弯矩可不同）。各跨荷载方向均向下。试证明此连续梁的极限荷载是每个单跨破坏机构相应的可破坏荷载中间的最小者。

证：　分别考虑 n 个单跨破坏机构，求出相应的 n 个可破坏荷载 q_1^+、q_2^+、…、q_n^+，设其中以 q_k^+ 为最小。

为了证明 q_k^+ 是极限荷载，应用唯一性定理。显然 q_k^+ 是一种可破坏荷载，因此还需证明 q_k^+ 同时又是可接受荷载，即需证明在 q_k^+ 作用下有可能存在一个可接受的 M 图，在任一截面上，M 的绝对值均不超过 M_u。事实上，这样的 M 图确实是存在的。例如，我们可设各支座弯矩等于 $-M_u$（如果相邻两跨的 M_u 值不相等，则取其中的较小者），然后根据平衡条件即可画出在 q_k^+ 作用下各跨的 M 图。由于 q_k^+ 是所有单跨破坏荷载中的最小者，因此在这样画出的各跨 M 图中，任一截面的 M 都不会超过 $+M_u$ 值。这就是说，这个 M 图确是一个可接受的 M 图，因而 q_k^+ 确是一个可接受荷载。根据唯一性定理，q_k^+ 就是极限荷载。

§7－5　结论与讨论

7－5－1　本章结论

● 稳定性分析中，结构可区分为完善和非完善两类。压杆都是理想中心受压情形为完善体系，否则为非完善体系。

● 稳定问题主要有两类：分支点和极值点失稳。分支点稳定问题的静力准则为分支点处平衡具有两重性，或称为平衡路径发生分叉。分支点稳定问题的能量准则为总势能取驻值。完善体系一般属分支点稳定问题，非完善体系一般为极值点稳定问题。此时的临界荷载如果小于极限荷载，表明问题由稳定性控制，临界荷载就是极限荷载。反之，表明失稳之前结构便已经破坏，结构失效由弹塑性控制。

● 分支点稳定线性和非线性理论关于临界荷载的结果是相同的，线性分析要方便得多。但是，线性理论得出随遇平衡的概念却是不正确的。

● 极值点失稳必须应用非线性理论来分析，用线性理论在变形微小条件下得到的临界荷载，远大于实际的极值点荷载，因此是很不安全的。

● 稳定性分析可以用静力法，也可以用能量法。对难以用静力法求精确解的复杂系统，往往可用能量法来求近似解。这时，所设的失稳形态必须满足位移边界条件，如果所设失稳形态就是真实的变形情形，则能量法所得的结果是精确的。

● 在理想弹塑性假定下，全截面应力达到 σ_s 时，截面不能承担更大的荷载，可以产生单向相对转动，称此截面出现塑性铰，它是一种单向铰。当结构出现的塑性铰使结构变成单向机构时，对应的状态为极限状态，此时的荷载为极限荷载。

● 结构全弹性设计除特重要结构外，是极不经济的。当设计理想弹塑性、比例加载、只关心到破坏为止所能承受的荷载大小时，可用极限平衡法计算结构的极限荷载。**对简单结构实际上这时一种试算法，首先分析确定可能的破坏形式，根据极限状态的平衡、局限和单向机构条件进行试算，同时满足三条件的就是极限状态，对应的荷载就是极限荷载。**

● 比例加载下的一些定理在简单结构分析中十分有用，也是计算机方法的基础。

7-5-2 几点讨论

● 材料力学中分析研究了压杆稳定的欧拉(L·Euler)临界荷载、非线性对临界荷载的影响，等等。结构的稳定问题自然也存在非弹性问题，思路是相通的但更复杂。如果对一些只有一根杆受压的简单结构，能将非受压弹性杆对受压杆的约束作用化为受压杆的弹性支承，那么此简单结构的稳定分析就完全可用材料力学介绍的方法来讨论。

● 与材料力学建立微分方程、利用边界条件解超越方程从而确定临界荷载的方法相类似，对图 7-18 中所示压杆，杆的 1 端位移为 Δ_1，θ_1、2 端位移为 Δ_2，θ_2，考虑轴向荷载 F_P 对弯矩的影响，列挠曲线微分方程，利用上述位移"边界条件"和平衡条件，可建立压杆的力-位移关系，也称**压杆刚度方程**。利用压杆刚度方程，结合位移法思想可求解刚架稳定问题。刚度方程中一些超越函数的表格，可参阅龙驭球、包世华主编，《结构力学》，(下册)，高等教育出版社，1996 年。

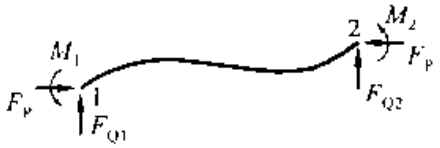
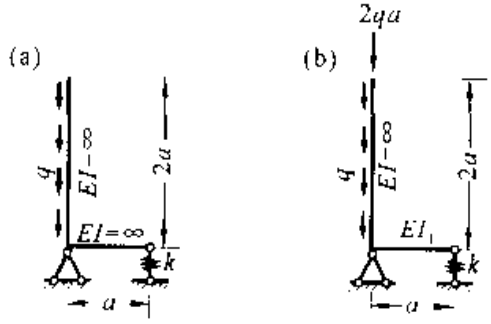


图 7-18 压杆受力图

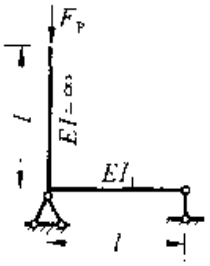
● 类似于杆产生塑性铰，对于板有所谓塑性铰线，与利用塑性铰确定极限荷载一样，利用塑性铰线可以计算板的极限承载力。对此有兴趣的读者，可自行查阅有关书籍、资料。

习　题

7－1　假定弹性支座的刚度系数为 k。试用线性和非线性两种方法求临界荷载 F_{Pcr}。



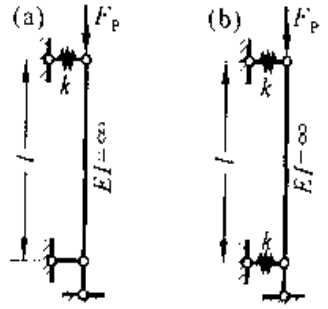
习题 7－1 图



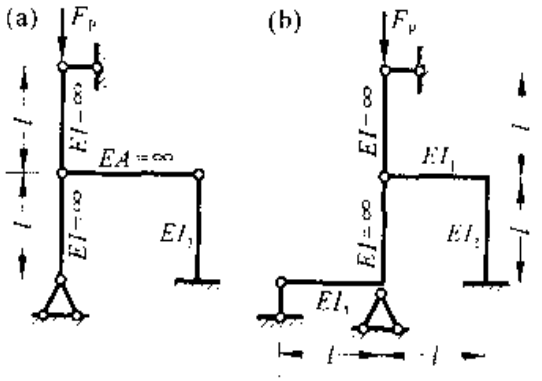
习题 7－2 图

7－2　试用静力法和能量法计算求临界荷载 F_{Pcr}。

7－3　试求图示压杆临界荷载 F_{Pcr}。



习题 7－3 图



习题 7－4 图

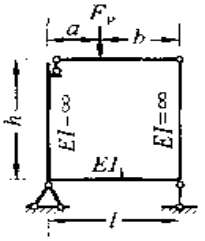
7－4　试将图示压杆体系化为弹性支座单个压杆，并用静力法求临界荷载 F_{Pcr}。

7－5　试讨论图示结构的可能失稳形式，并求 a、b 为何值时临界荷载为最小。

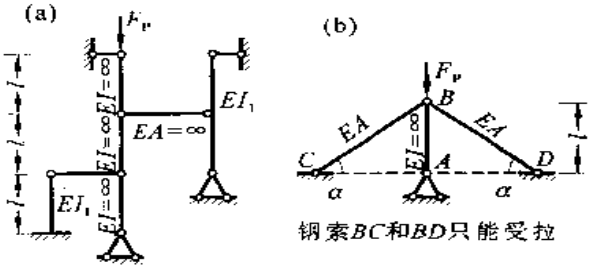
7－6　试用静力法和能量法计算临界荷载 F_{Pcr}。

7－7　试求图示等截面连续梁的极限荷载。梁的截面为矩形 $bh = 5\ \text{cm} \times 20\ \text{cm}$，$\sigma_S = 235\ \text{Mpa}$。

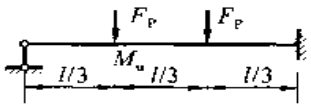
7－8　试求图示连续梁所需的截面极限弯矩。



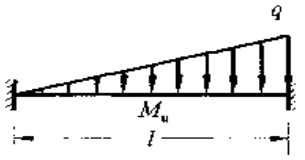
习题 7－5 图



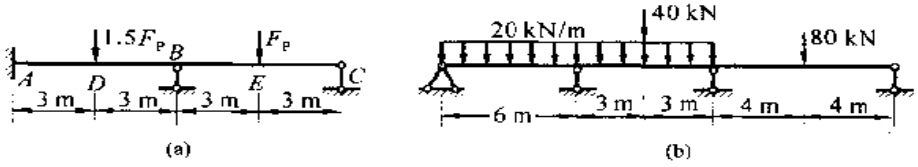
习题 7－6 图



习题 7－7 图



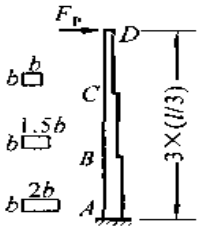
习题 7－8 图



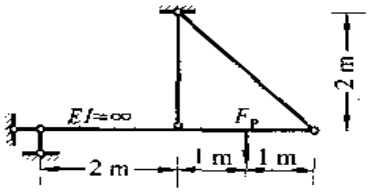
习题 7－9 图

7－9　试求等截面超静定梁的极限荷载。

7－10　试求图示阶形柱的极限荷载。



习题 7－10 图



习题 7－11 图

7－11　各二力杆截面均为 40cm^2，其屈服应力为 25kN/cm^2。试求极限荷载。

附录A 习题答案

第1章

1-1 (a) $W=-10$，能

(b) $W=-1$，能

(c) $W=1$，不能

1-2 (a)不变，无

(b)不变，有一个多余约束

(c)不变，无

(d)常变

(e)常变

(f)不变，有3个多余约束

(g)常变

(h)瞬变

(i)不变，无

(j)瞬变

(k)不变，有1个多余约束

(l)不变，无

1-3 (略)

1-4 (略)

1-5 (略)

1-6 (略)

第2章

2-2 (a) $N_1=-55.34$ kN，$N_2=N_3=35.03$ kN，$N_4=-15.8$ kN，

$N_5=-39.5$ kN，$N_6=-39.5$ kN，$N_7=25$ kN，

$N_8=-63.2$ kN，$N_9=-102.7$ kN，$N_{10}=65$ kN

(b) $N_1=1.12F_P$，$N_2=-1.81F_P$，$N_3=-2.5F_P$，

$N_4=1.35F_P$，$N_5=-1.96F_P$，$N_6=0.5F_P$

2-3　$N_1=4F_P$，$N_2=-0.5F_P$，$N_3=0.5\sqrt{2}F_P$，$N_4=-4.5F_P$

2-4　$N_1=8\sqrt{2}$ kN，$N_2=\frac{38}{3}\sqrt{5}$ kN

2-5　（略）

2-6　(a) $N_1=80\sqrt{2}$ kN，$N_2=80$ kN

(b) $N_1=-F_P$，$N_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}F_P$，$N_3=\sqrt{2}F_P$，$N_4=4F_P$

(c) $N_1=30$ kN，$N_2=-30\sqrt{2}$ kN，$N_3=-15\sqrt{2}$ kN

(d) $N_1=F_P$，$N_2=0$

(e) $N_1=N_2=0$

(f) $N_1=-\frac{\sqrt{2}}{3}F_P$，$N_2=\frac{\sqrt{5}}{3}F_P$

2-7　（略）

2-8　（略）

2-9　(a) $M_B=1.67$ kN·m，$M_D=17.5$ kN·m，

$Q_A=16.42$ kN，$Q_E=5.0$ kN

(b) $M_A=40$ kN·m

2-10　(a) 右柱有剪力，弯矩非常数

(b) 右柱无剪力，弯矩为常数

(c) 结点弯矩不平衡

(d) 中间铰处弯矩为零

(e) 反对向

(f) 支座处弯矩应为零

2-11　$x=0.146\,4l$

2-12　（略）

2-13　（略）

2-14　（略）

2-15　$M_A=\frac{1}{2}qa^2+qba$，$M_{AC}=\frac{5}{6}qb^2$

2-16　（略）

2-17　（略）

2-18　（略）

2-19　（略）

2-20　（略）

第 3 章

3-1　(a) $\frac{1}{2}\frac{F_PR^3}{EI}(\rightarrow)$

(b) $\frac{1}{2}\frac{qR^2}{EI}(\rightarrow)$

3-2 (略)

3-3 $\Delta_y=8.485\times10^{-4}$ m(↓)，$\varphi=1.4\times10^{-4}$(弧度)(↻)

3-4 (a) $\frac{17}{384}\frac{ql^4}{EI}(\downarrow)$

(b) $\frac{23}{3}\frac{F_P l^3}{EI}(\downarrow)$

(c) $866.94/EI$(↻)

(d) $\Delta_H=\frac{2}{3}\frac{ql^4}{EI}(\leftarrow\rightarrow)$，$\Delta_V=0$，$\Delta_y=\frac{5}{3}\frac{ql^4}{EI}$(↻)

(e) $\Delta_K=\frac{11}{48}\frac{ql^2}{EI}(\downarrow)$

(f) $\Delta_l=1985/EI(\downarrow)$

3-5 $\Delta=-\frac{35}{8}\alpha tl(\uparrow)$

3-6 (略)

3-7 $\Delta=-\alpha td(\uparrow)$

3-8 $\Delta_K=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ mm(↑)

3-9 $\Delta_K=a+l\varphi(\rightarrow)$

3-10 (略)

3-11 $\Delta=\frac{17}{24}\frac{ql^4}{EI}+\frac{9}{5}\frac{ql^2}{GA}(\downarrow)$

3-12 (略)

3-13 (略)

3-14 $Q_A=\frac{1}{4}\frac{M_1}{EI}$

3-15 (略)

3-16 $\varphi=0.006\,5$ 弧度(↻)

3-17 $\Delta=1.053\,3$ cm(↓)

3-18 $\Delta=0.090\,67$ m(↓)

3-19 $\Delta=\frac{F_P}{6EI}(a^3+4b^3)+\frac{F_P}{2GI_p}(6a^2+2ab^2)(\downarrow\uparrow)$

第4章

4-1 (a)7次，(b)5次，(c)3次，(d)4次，(e)7次
(f)10次，(g)6次，(h)21次，(i)7次

4-2 (a) $M_{DA}=\frac{ql^2}{8}$(上边受拉)

(b) $M_{AB}=-\frac{F_P l}{8}$(上边受拉)

(c) $M_{BA}=-\frac{F_P l}{2}$(下边受拉)

4-3　(a) $M_{BA}=-270$ kN·m(左边受拉)

(b) $M_{BC}=0$

(c) $M_{AB}=-135$ kN·m(左边受拉)

4-4　(a) $M_{AC}=97.5$ kN·m(左边受拉)

(b) $M_{CF}=4.80$ kN·m(左边受拉)

4-5　(a) $N_{AB}=0.104F_P$, (b) $N_{AD}=-22.9$ kN

4-6　$M_B=\frac{0.156}{(1+k)}ql^2$(下边受拉)

4-7　(a) $M_{AC}=-0.501ql^2$(左边受拉), (b) $M_{CA}=-52.44$ kN·m(左边受拉)

4-8　$M_{CA}=29.2$ kN·m(上边受拉)

4-9　$M_{BA}=84.0$ kN·m

4-10　$M_{AB}=\frac{3EI}{l^2}a$(下边受拉)

4-11　$M_{AB}=\frac{6EI}{l^2}c$(上边受拉)

4-12　$M_{CA}=\frac{1}{24}ql^2$(左边受拉)

4-13　$F_H=16.67$ kN, $M_C=-8.40$ kN·m, $Q_C=0$

4-14　$N_{AB}=99.81$ kN, $M_K=125.70$ kN

4-15　(a)2,(b)1,(c)2,(d)3,(e)6,(f)3,(g)4

(h)5,(i)2,(j)6,(k)1

4-16　(a) $M_{AD}=0.4F_P l$, $N_{AC}=-1.6F_P$

(b) $M_{DF}=2.45$ kN·m, $M_{AB}=28.07$ kN·m, $N_{DF}=-75.39$ kN

4-17　(a) $M_{AC}=-26.79$ kN·m

4-18　(a) $M_{BA}=105$ kN·m, (b) $M_{DC}=-1.72$ kN·m

4-19　$M_{BC}=-47.37$ kN·m

4-20　$M=\frac{EI}{h}\alpha t$(外面受拉)

4-21　$M_{BC}=35$ kN·m

4-22　$M_{CB}=56.25$ kN·m

第 5 章

5-1　(略)

5-2　(略)

5-3　(略)

5-4　(略)

5-5 （略）

5-6 （略）

5-7 （略）

5-8 （略）

5-9 （略）

5-10 （略）

5-11 （略）

5-12 （略）

5-13 （略）

5-14 （略）

5-15 （略）

5-16 738.2 kN·m

5-17 784.3 kN·m

5-18 $N_{min}=-24\sqrt{5}$ kN

5-19 $F_{Q1max}^{K}=57.78$ kN，$F_{Q1min}^{K}=8.89$ kN

5-20 324 kN·m

5-21 （略）

5-22 $M_{K max}=160$ kN·m，$M_{K min}=-67.5$ kN

第 6 章

6-1 (a) $Q_{21}=7.307\ 7$ kN，$Q_{23}=10.288$ kN，$M_{21}=-9.230\ 8$ kN·m，$M_{23}=9.230\ 8$ kN·m

(b) $Q_{21}=22.813$ kN，$Q_{23}=51.563$ kN，$M_{21}=-41.250$ kN·m，$M_{23}=-41.250$ kN·m

(c) $Q_{21}=19.600$ kN，$Q_{23}=-1.200$ kN，$M_{21}=-4.266\ 7$ kN·m，$M_{23}=4.266\ 7$ kN·m

6-2 （略）

6-3
$$\begin{Bmatrix} 612 & 0 & -30 \\ 0 & 324 & 0 \\ -30 & 0 & 300 \end{Bmatrix} \times 10^4$$

6-4
$$\begin{Bmatrix} 75\ 932\ \text{kN/m} & 0 & 8\ 960\ \text{kN} \\ 0 & 140\ 747\ \text{kN/m} & 2\ 240\ \text{kN} \\ 8\ 960\ \text{kN} & 2\ 240\ \text{kN} & 26\ 880\ \text{kN·m} \\ -70\ 000\ \text{kN/m} & 0 & 0 \\ 0 & 747\ \text{kN/m} & -2\ 240\ \text{kN} \\ 0 & 2\ 240\ \text{kN} & 4\ 480\ \text{kN·m} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7\,000\ \text{kN/m} & 0 & 0 \\ 0 & -747\ \text{kN/m} & 2\,240\text{kN} \\ 0 & -2\,240\ \text{kN} & 4\,480\ \text{kN·m} \\ 75\,973\ \text{kN/m} & 0 & 8\,960\ \text{kN} \\ 0 & 140\,747\ \text{kN/m} & -2\,240\text{kN} \\ 8\,960\ \text{kN} & -2\,240\ \text{kN} & 26\,880\ \text{kN·m} \end{bmatrix}$$

6-5　(a) $N_1 = 18.051$ kN, $N_2 = 0$, $N_3 = -30.084$ kN

$N_4 = 36.582$ kN, $N_5 = 0$, $N_6 = 0$

(b) $N_1 = 10.00$ kN, $N_2 = 13.33$ kN, $N_3 = -16.67$ kN

6-6　$N_1 = 1.213$ kN, $N_2 = 12.427$ kN, $N_3 = 1.213$ kN

6-7　(略)

6-8　(略)

第 7 章

7-1　(a) $q_{cr} = \frac{k}{2}\cos\alpha$, $q_{cr} = \frac{k}{2}$, (b) (略)

7-2　$F_{Pcr} = \frac{3EI}{l^2}\frac{\alpha}{\sin\alpha}$, $F_{Pcr} = \frac{3EI_1}{l^2}$

7-3　(a) $F_{Pcr} = k \cdot l$, (b) $F_{Pcr} = \frac{kl}{2}$

7-4　(a) $F_{Pcr} = \frac{3EI_1}{2l^2}$, (b) (略)

7-5　在任何位置 $F_{Pcr} = \frac{12EI_1}{lh}$

7-6　(a) (略), (b) $F_{Pcr} = EA\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$

7-7　(略)

7-8　$F_{Pu} = \frac{3M_u}{l} = \frac{352.5}{l}$ kN

7-9　$M_u = \frac{5}{156}ql^2$

7-10　(a) $F_{Pu} = \frac{3M_u}{l} = M_u$ kN

(b) (略)

7-11　$F_{Pu} = 4828.46$ kN

7-12　$F_{Pu} = \frac{2\,000}{3}(1+\sqrt{2})$ kN

附录B 《结构力学教学实践和工程计算分析软件》使用说明

在随书发行光盘上所包含的程序，主要是王焕定教授在多年教学、科研过程中开发和积累的程序（这里给出的主要是教学程序）。它们可以供读者结合教学过程逐步掌握如何用计算机解决结构计算分析问题，可以通过程序计算分析从中获取结构受力变形的一些定性结论，以便增强今后工作中分析各种辅助设计软件计算结果是否正确的能力。这些软件也可用来进行实际工程结构的分析计算。

全部程序都已用比较先进的 FORTRAN 90 语言移植并经过初步调试，限于时间，移植后的程序还不敢保证 100% 的程序功能都正确，读者如果发现程序计算有误，恳请将测试题目和存在的问题告诉作者，以便纠正。

B－1 程序的安装

在光盘的 program 目录下有 setup.exe 程序，读者可以与安装任何基于 Windows 程序一样按提示进行安装。

B－2 程序的运行

本程序可有两种方式运行：DOS 方式和 Windows 方式。在 DOS 方式下，需要借用某种编辑程序按程序所要求的数据格式形成计算的数据文件，

然后在 DOS 状态下打入程序名即可。不言而喻，这对用户是很不方便的。为方便读者使用，作为 1.0 版，作者初步开发了以对话方式生成计算数据文件的用户界面。用户在所安装的目录下，用鼠标双击“结构力学”应用程序即可开始使用本软件。鼠标双击后，首先显示首页，单击后将显示三篇内容的选择界面“静力计算篇、计算机分析篇和动力分析篇”。读者根据需计算的问题单击该篇图形区任何处，即可进入该内容计算的主界面，用菜单（或按钮）选择即可进行该问题的计算。本软件也可结合教学过程直接运行当前所学内容的软件，它们是：静力计算篇运行（鼠标双击）“jlifx”，计算机分析篇运行“jsjfx”，动力分析篇运行“dlfx”。

限于时间，作者目前无法提供较完整的用户使用说明联机手册。因此，使用本软件组织教学的教师需注意，如果需要学生在学习本书第（Ⅰ）册的矩阵位移法以前用本程序进行静定和超静定结构的静力计算，应该结合软件先给学生介绍一点使用本软件所必需的知识。否则，读者只能在学习矩阵位移法以后开始使用本软件。

B－3 本软件功能

本软件中，“jlifx”软件可以用来分析静定三铰拱（包括等高和不等高），多跨静定梁和连续梁（包括两端间存在铰支座的情况），平面和空间桁架（包括网架），平面和空间刚架的受力、变形和影响线计算分析（限于时间交叉梁程序的移植工作尚未完成），超静定拱可以作为折线型刚架进行计算分析。平面结构还可画出结构、变形曲线和内力图，其结果可以用 WMF（图元文件）格式输出，可以将其在 Word 下插入和编辑。

“jsjfx”软件可以用三角形、矩形和八结点等参元进行平面问题（例如建筑结构中的有、无孔剪力墙和墙梁等）的分析计算，可以进行平面刚架的分支点稳定分析，还可以进行平面刚架的增量变刚度法极限荷载分析。

“dlfx”软件可以用来进行平面刚架结构的自振特性（包含幂法和子空间迭代法）分析，结构动力响应的数值积分计算。后者包括单自由度非线性分析（光滑恢复力模型和双线性恢复力模型），多自由度 Newmark 法、Wilson－θ 法、高阶单步法（作者所提出的一种高精度自动起步算法）和线加速度法时程分析。多自由度时程分析时的荷载可以是地震响应（给了三条地震记录：Elcentro、Tafta 和唐山地震天津医院的记录），也可以是数值化荷载下的动力响应

软件运行基本上均分三步：首先通过界面对话形成计算所需的数据文件，用 Windows 的记事本进行显示，以便读者检查和修改。接着进行计算。

最后用记事本或写字板给出计算结果(包括结构计算所必需的原始数据),以供读者分析使用。所有工作均在界面中输入或选择。为使读者使用更方便,作者正组织开发具有良好前后处理图形界面的软件。但是限于作者的水平和精力,当前只能达到目前水平,希望读者通过使用本软件后,能提出改进建议和意见,对此作者将不胜感激!

B-4　一些其他内容

为适应不同学校、不同学生层次的因材施教需要,在DOC目录下还包含有以下内容:

- 静定结构的计算机分析方法简介
- 板壳分析简介
- 结构随机振动分析入门
- 部分程序的源程序(FORTRAN 77和FORTRAN 90)

使用本书的教师可根据需要选用部分内容,有余力的读者也可结合三篇内容的学习进行自学,以扩展自己的知识储备。

B-5　应用程序清单

pmgj.exe	平面刚架静力计算和极限荷载计算程序
poi.exe	杆系结构静力计算和极限荷载计算程序
pste.exe	用三角形和矩形单元做平面问题分析程序
stress.exe	八结点等参元分析程序
stab.exe	平面刚架分支点稳定分析程序
sbstep.exe	单自由度非线性逐步积分程序
nhwl.exe	多自由度线性响应分析程序
vibra.exe	平面刚架自振特性幂法分析(包括形成子空间迭代的数据)程序
subspace.exe	平面刚架自振特性子空间迭代分析程序
jlifx.exe	静力计算篇界面程序
jsjfx.exe	计算机分析篇界面程序
dlfx.exe	动力分析篇界面程序
结构力学.exe	本软件总界面程序

附录C 索 引

B

编制程序(programming) 180

C

次内力(secondary internal stress) 32

D

单刚结点(simple rigid joint) 14
单铰(simple hinge) 14
单位荷载法(dummy-load method) 71
单元(element) 126
单元分析(element analysis) 180
单元杆端力矩阵(element end force matrix) 182
单元杆端位移矩阵(element end displacement matrix) 182
单元刚度方程(element stiffness equation) 182
单元刚度矩阵(element stiffness matrix) 182
单元局部位移码(element local displacement code) 181
等代梁(equivalent beam) 40
定位荷载或短期荷载(short load) 151
对称结构(symmetrical structure) 35
对称性(symmetry) 35
多跨静定梁(multi-span statically determinate beam) 44
达朗伯尔原理(d'Alembert principle) 90

F

反力互等定理(reciprocal theorem of reaction force) 88
反力系数(reaction force coefficient) 88
附属部分(accessory part) 45
复刚结点(multiple rigid joint) 14
复铰(multiple hinge) 14
复联杆(multiple connection link) 14
复杂桁架(complicated truss) 34

G

刚度方程(stiffness equation) 125
刚度系数(stiffness coefficient) 88
刚架或框架(frame) 11
功的互等定理(reciprocal theorem of work) 86
拱(arch) 11
拱式桁架(arch-truss) 34
固定荷载或恒载(dead load) 151
广义力(generalized force) 67
广义位移(generalized displacement) 67
隔离体(insulator) 29

H

合理拱轴线(reasonable axis of arch) 43

荷载识别(load identification) 2
桁架(truss) 11
桁架结构(truss structure) 32
混合法(mixture method) 98
活荷载(live load) 151

J

基本部分(fundamental part) 45
基本结构(fundamental structure) 99
基本体系(fundamental system) 100
基本未知量(fundamental unknown) 100
极限荷载(ultimate load) 228
急跳或跳跃(snap-through) 220
计算机方法(computer method) 144
剪力包络图(envelope for shearing force) 173
简单桁架(simple truss) 34
结点(joint, node) 7
结点法(method of joint) 34
结点整体位移码(global displacement code) 181
结构(structure) 1
静定刚架(statically determinate frame) 46
静力法(static method) 152
绝对最大弯矩(absolute maximum bending moment) 170
机动法(kinematic method) 152

K

空间桁架(space truss) 33

L

力法(force method) 98
力法方程(equation of force method) 100
联杆(connection link) 14
联合法(combined method) 38
联合桁架(combined truss) 34
梁(beam) 11
零杆(zero bar) 35
零载法(zero load method) 57

N

内力包络图(envelope for internal force) 173
挠度(flexibility) 45

P

平面桁架(plane truss) 33
破坏机构(collapse mechanism) 232

Q

区段叠加法(section superposition method) 28

R

柔度系数(flexibility coefficient) 87

S

三铰刚架(frame with three hinges) 49
塑性铰(plastic hinge) 230

T

推力(push force) 40

W

弯矩包络图(envelope for bending moment) 173
位移法(displacement method) 98
位移互等定理(reciprocal theorem of displacement) 87
位移系数(displacement coefficient) 87
位移与反力互等定理(reciprocal theorem of displacement and reaction forc) 89

X

系统识别(system identification) 2
形常数(shape constant) 120
虚功法(virtual work method) 57
线刚度(line stittness) 127

Y

移动荷载(moving load) 151
影响线(influence line) 152
有基本－附属关系的刚架(frame with fundamental and accessory part) 50
约束(constraint) 14

Z

载常数(load constant) 120
整体分析(global analysis) 180
整体坐标系(global coordinate) 180
支座反力(reaction at support) 3
主内力(primary internal stress) 32
转角位移方程(slope-deflection equation) 125
自由度(degree of freedom) 13
组合结构(composite structure) 11
最不利荷载位置(the most unfavorable load position) 166
坐标转换(transformation of coordinate) 187
最不利荷载分布(the most unfavorable load distribution) 165