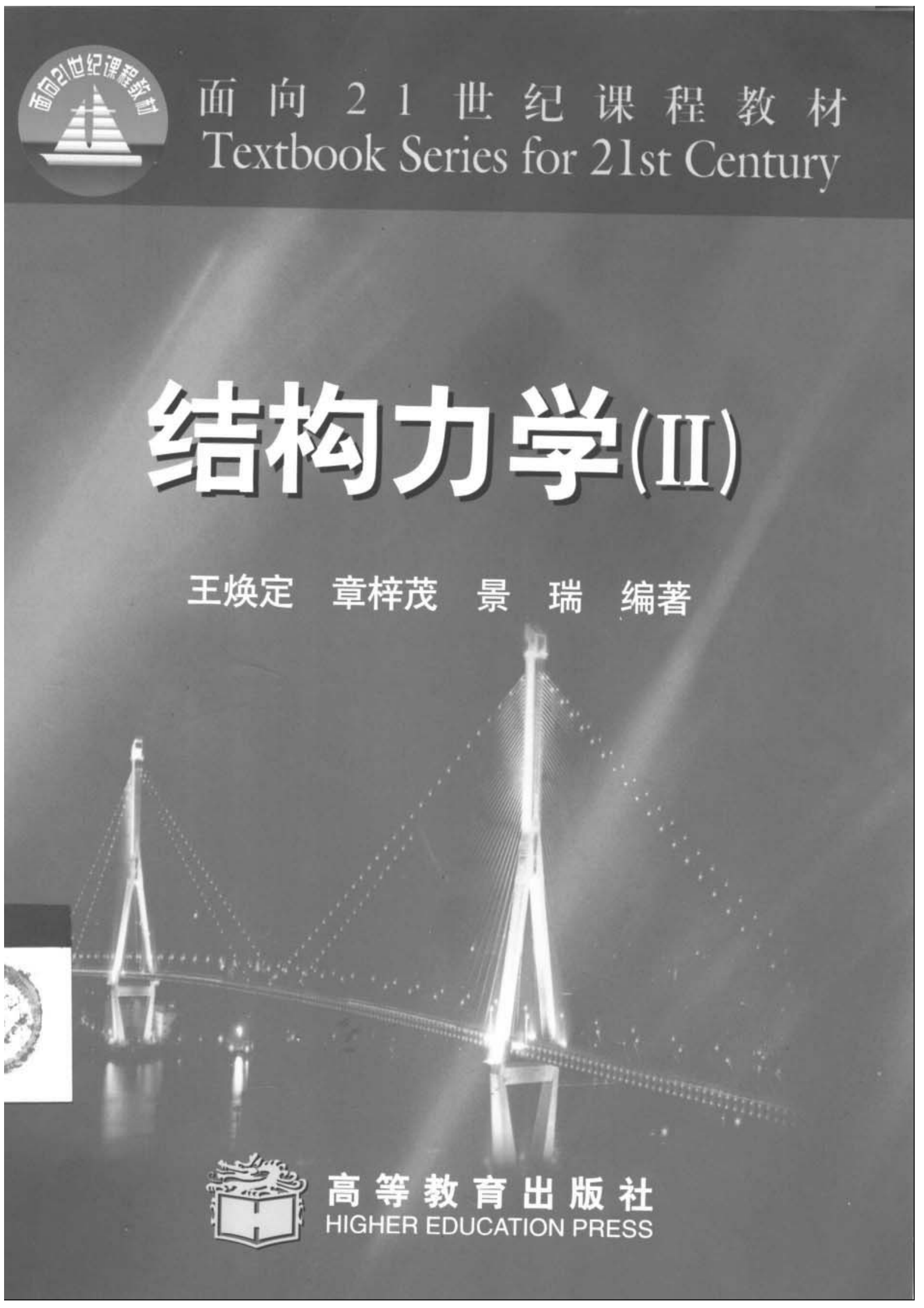
面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

结构力学(II)

王焕定　章梓茂　景　瑞　编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

结构力学(II)

王焕定　章梓茂　景　瑞　编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

结构力学(Ⅱ)/王焕定等编著 .—北京:高等教育出版社,2000.2
面向 21 世纪课程教材
ISBN 7-04-007995-X

Ⅰ.结… Ⅱ.王… Ⅲ.结构力学-高等学校-教材 Ⅳ.O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 64391 号

结构力学(Ⅱ)
王焕定 章梓茂 景 瑞 编著

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009
电 话 010-64054588 传 真 010-64014048
网 址 http://www.hep.edu.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 中国科学院印刷厂
纸张供应 山东高唐纸业集团总公司

开 本 787×960 1/16 版 次 2000年2月第1版
印 张 17.5 印 次 2000年2月第1次印刷
字 数 300 000 定 价 18.60 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是教育部面向21世纪课程教材和教育部工科力学“九五”规划教材。本书与同类教材相比，具有以下特色：注意与相关课程的贯通、融合与渗透，减少了不必要的相互重叠内容；对经典内容加以精选，使之更加简练，并富有新意；在保证基础的前提下，引进了一些反映近代科技成果的新内容，将经典的手算与计算机分析有机地结合起来；广泛涉及诸多工程概念，重组课程体系；注意启发式教学，为学生独立思维留出较大的空间。本书第(Ⅰ)册附有《结构力学教学实践和工程计算分析》软件光盘一张。

全书共(Ⅰ)、(Ⅱ)两册，第(Ⅰ)册为结构静力分析篇，共7章，含现有各结构力学中的经典内容，第(Ⅱ)册为结构计算机分析篇和结构动力分析篇，共10章。本书为第(Ⅱ)册。

本书可作为高等学校土木、交通、水利和力学等各专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书。本书第(Ⅰ)册还可作为非结构类等专业和各层次有关土木类等专业的教材。

主要符号表

A 振幅、面积

$\boldsymbol{B}$ 应变矩阵、形变矩阵

c 支座广义位移、粘阻系数

c_{cr} 临界粘阻系数

$\boldsymbol{d}$ 位移向量、位移矩阵

$\boldsymbol{D}$ 弹性矩阵

E 弹性模量

E_P 结构总势能

E_P^* 荷载势能

f 工程频率

$\boldsymbol{F}_b$ 体积力矩阵

F_P 荷载

F_N 轴力

F_Q 剪力

F_{cr} 临界荷载

F_{Pu} 极限荷载

F_I 惯性力

F_D 阻尼力

F_S 恢复力

$\boldsymbol{F}^e$ 整体坐标系下的单元杆端力矩阵

$\boldsymbol{F}^{Fe}$ 整体坐标系下的单元固端力矩阵

$\boldsymbol{F}_E^e$ 整体坐标单元等效结点荷载矩阵

$\boldsymbol{F}_S$ 表面力矩阵

G 切变模量

$\boldsymbol{I}$ 单位矩阵

I_ρ 截面抗扭极惯性矩

k 刚度系数

$\boldsymbol{k}^e$ 整体坐标系下的单元刚度矩阵

$\boldsymbol{K}$ 结构刚度矩阵

K_i^* 广义刚度、折算刚度

m 质量

M 力矩、力偶矩、弯矩

$\boldsymbol{M}$ 质量矩阵

M^F 固端弯矩

M_u 极限弯矩

M_e 弹性极限弯矩

M_i^* 广义质量、折算质量

$\boldsymbol{N}$ 形函数矩阵

$\boldsymbol{P}_E$ 等效结点荷载向量

$\boldsymbol{P}_d$ 结构直接结点荷载矩阵

$\boldsymbol{P}$ 综合结点荷载向量

q 均布荷载集度

R 广义反力、半径

r 单位位移引起的广义反力、半径

$\boldsymbol{S}$ 应力矩阵

t 时间

T 周期、动能

$\boldsymbol{T}$ 坐标转换矩阵

u 水平位移

v 竖向位移、挠度

V_ε 应变能

W 功、平面体系计算自由度、重量

X 广义多余未知力

y 位移

α 线膨胀系数、相位角

α_{max} 地震影响系数最大值

Δ 结构广义位移

$\boldsymbol{\Delta}$ 结构位移向量

δ 虚位移、广义位移、厚度

$\boldsymbol{\delta}$ 柔度矩阵

$\boldsymbol{\delta}^e$ 整体坐标下单元杆端位移矩阵

ε 线应变

μ 动力放大系数

ξ 阻尼比、自然坐标

θ 干扰力频率

φ 初相角

$\boldsymbol{\Phi}$ 振型矩阵

σ 正应力

τ 切应力

ω 圆频率

本书符号表说明

为了深入贯彻国家技术监督局发布的国家标准(GB 3100～3102—93)《量和单位》,本书对结构力学符号和单位的传统用法作了调整,既保证了对国家标准的认真实施,又考虑了教师和学生使用上的习惯与方便。

在实施国家标准的过程中,为保证国家标准和现有惯例的衔接,本书作了认真的考虑,现作如下说明,请读者注意。

1. 国家标准规范的物理量的名称和符号,按国家标准使用,注重量的物理属性。如,旧称剪应变(剪切角)γ,现改称切应变;又如,各种力(包括荷载、反力和内力)都用 F 作为主符号,而将其特性以下标(上标)表示;等等。

2. 对于在结构力学中广泛使用的广义力(包括力与力偶矩、力矩)和广义位移(包括线位移与角位移),为了体现其广义性(有时还有未知性),考虑到全书叙述的统一和表达的简洁、完整,本书仍沿用 X(多余力)、R 和 r(约束反力),Δ 和 δ(位移)、c(支座位移)等广义物理量。至于它们在具体问题中对应的量和相应单位,则视具体问题而定。

3. 在结构力学力法和位移法、位移和影响线计算中普遍应用的单位力 $\overline{X}=1$ 和 $F_P=1$ 等,以及单位位移 $\overline{Z}=1$ 和 $\Delta=1$ 等,均应理解为"广义量的系数",是广义量自身相比的比值。为了书写方便且考虑到习惯用法,均简记为 $\overline{X}=1$ 和 $F_P=1$ 等,以及 $\overline{Z}=1$ 和 $\Delta=1$ 等,其余的单位量与此类同。



作者简介

王焕定 1964年毕业于西安冶金建筑学院应用力学专业，现为哈尔滨建筑大学建筑工程系教授、博士生导师，国家教育部工科力学结构力学课程教学指导小组委员，工程抗震理论与计算机软件专业委员会主任。

自工作至今主要从事理论力学、材料力学、结构力学和有限单元法的教学工作，已出版本科和研究生教材三本。所从事的主要研究方向为：结构力学与工程振动、计算力学和计算机辅助教学，已发表科研论文约60篇。

曾获建设部和国家科技进步奖两项，省和国家优秀教学成果奖、优秀教材奖、优秀软件奖等共七次。还曾荣获省教育系统劳动模范、全国优秀教师光荣称号。享受国务院政府津贴。

目　录

结构计算机分析篇

第1章　虚位移原理、势能原理及其应用 …… 5

§1-1　弹性力学的基本方程及其矩阵表示 …… 5

1-1-1　平衡(运动)微分方程 …… 6

1-1-2　小变形的几何方程(位移-应变关系) …… 7

1-1-3　边界条件(边界处平衡和协调条件) …… 8

1-1-4　线弹性体的物理方程(本构关系) …… 9

1-1-5　物理量的矩阵表示 …… 10

1-1-6　弹性力学基本方程的矩阵表示 …… 11

§1-2　外力总虚功的计算 …… 11

1-2-1　内部微元体上外力总虚功 …… 11

1-2-2　边界微元体上外力总虚功 …… 13

1-2-3　虚位移时变形体的外力总虚功 …… 13

§1-3　变形体虚位移原理表述和证明 …… 14

1-3-1　变形体虚功原理回顾 …… 14

1-3-2　变形体虚位移原理的表述 …… 14

1-3-3　变形体虚位移原理必要性证明 …… 14

1-3-4　变形体虚位移原理充分性证明 …… 15

1-3-5　几点说明 …… 16

§1-4　势能原理 …… 17

1-4-1　预备知识 …… 17

1-4-2　最小势能原理 …… 17

1-4-3　几点说明 …… 18

§1-5　势能原理与位移法 …… 18

1-5-1　由势能原理导出位移法方程 …… 18

1-5-2　能量法求解举例 …… 20

§1-6　里兹法 …… 20

1-6-1 用虚位移原理求解 …… 21
1-6-2 用势能原理求解 …… 23
§1-7 结论与讨论 …… 24
1-7-1 本章结论 …… 24
1-7-2 几点讨论 …… 25
习题 …… 25

第2章 杆系结构单元分析 …… 27
§2-1 引言 …… 27
2-1-1 杆系结构虚位移原理虚功方程 …… 27
2-1-2 杆系结构总势能表达式 …… 29
2-1-3 几点说明 …… 30
§2-2 平面杆系结构单元分析 …… 31
2-2-1 拉(压)杆单元 …… 31
2-2-2 扭转杆单元 …… 34
2-2-3 弯曲杆单元 …… 35
2-2-4 考虑轴向变形的弯曲单元——平面自由式单元 …… 38
2-2-5 有约束的单元 …… 40
2-2-6 考虑剪切时的自由式单元 …… 41
2-2-7 有刚域单元 …… 42
§2-3 空间杆系结构单元分析 …… 45
2-3-1 交叉梁单元 …… 45
2-3-2 空间桁架单元 …… 46
2-3-3 空间刚架单元 …… 47
§2-4 杆系结构单元刚度矩阵子程序 …… 48
2-4-1 一些公共的自定义部分 …… 48
2-4-2 单元刚度矩阵(局部坐标系)子程序的源程序 …… 49
§2-5 结论与讨论 …… 52
2-5-1 本章结论 …… 52
2-5-2 几点讨论 …… 53
习题 …… 54

第3章 杆系结构的整体分析 …… 56
§3-1 结构整体刚度方程 …… 57
3-1-1 用势能原理进行结构整体分析 …… 57
*3-1-2 直接刚度法集装规则的推证 …… 59
§3-2 整体分析的物理实质 …… 61
§3-3 边界条件处理的补充——斜支座问题 …… 62

3-3-1 对单元进行处理,用先处理法集成整体刚度矩阵 …… 63
3-3-2 对整体刚度矩阵进行处理 …… 64
§3-4 杆系结构静力分析程序简要说明 …… 65
§3-5 结论与讨论 …… 66
3-5-1 本章结论 …… 66
3-5-2 几点讨论 …… 66
习题 …… 67

第4章 分支点稳定及极限荷载有限元分析简介 …… 69
§4-1 平面刚架分支点稳定有限元分析 …… 69
4-1-1 压杆单元的刚度方程 …… 69
4-1-2 刚架分支点稳定计算 …… 71
4-1-3 一种特征值问题解法——幂法 …… 72
4-1-4 分支点稳定算例 …… 73
§4-2 刚架极限荷载分析 …… 74
4-2-1 增量变刚度法 …… 74
4-2-2 单元刚度矩阵的修正 …… 74
4-2-3 增量变刚度法确定刚架极限荷载的计算过程及算例 …… 76
§4-3 结论与讨论 …… 81
习题 …… 81

第5章 平面问题有限元分析 …… 83
§5-1 引言 …… 83
5-1-1 结构离散化 …… 83
5-1-2 平面问题的总势能表达式 …… 84
§5-2 常应变三角形单元 …… 85
5-2-1 单元结点位移和结点力 …… 85
5-2-2 用面积坐标建立单元位移场 …… 86
5-2-3 基于势能原理的单元分析 …… 89
5-2-4 计算实例 …… 93
5-2-5 收敛准则 …… 93
§5-3 矩形双线性单元 …… 94
5-3-1 用正则坐标建立单元位移场 …… 95
5-3-2 应变和应力矩阵; …… 96
5-3-3 单元刚度矩阵和单元等效荷载列阵 …… 97
5-3-4 计算结果整理 …… 97
5-3-5 计算实例 …… 98
§5-4 平面问题计算程序 PSTE 的简要说明 …… 99

§5-5 平面等参数单元 …… 100
5-5-1 基本概念 …… 100
5-5-2 几种常用单元描述和位移模式 …… 104
5-5-3 等参元单元特性分析 …… 107
5-5-4 数值积分 …… 110
5-5-5 作等参元分析时的注意事项 …… 112
5-5-6 计算实例 …… 113
5-5-7 二维(和三维)弹性分析计算程序简要说明 …… 114
§5-6 结论与讨论 …… 114
5-6-1 本章结论 …… 114
5-6-2 几点讨论 …… 115
习题 …… 115

结构动力分析篇

第6章 结构动力学概述 …… 122
§6-1 动荷载及其分类 …… 122
6-1-1 动荷载的定义 …… 122
6-1-2 动荷载的分类 …… 123
§6-2 结构动力学的任务和研究内容 …… 124
6-2-1 结构动力学与结构静力学的对比 …… 124
6-2-2 结构动力学的任务 …… 125
6-2-3 结构动力学的研究内容 …… 125
§6-3 结构动力分析中体系的自由度 …… 125
6-3-1 动力分析中体系的自由度 …… 126
6-3-2 体系自由度的简化 …… 126
6-3-3 体系自由度的确定 …… 128
§6-4 结构的动力特性 …… 128
6-4-1 结构的自振频率 …… 128
6-4-2 结构的振型 …… 129
6-4-3 结构的阻尼 …… 129
§6-5 建立结构体系运动方程的一般方法 …… 130
§6-6 体系运动方程的建立 …… 131
6-6-1 单自由度体系运动方程举例 …… 131
6-6-2 两个自由度体系运动方程举例 …… 135
§6-7 多自由度体系运动方程的一般形式 …… 139

6-7-1 运动方程一般形式 …… 139
6-7-2 用刚度法和柔度法建立体系运动方程的具体步骤 …… 140
§6-8 结论与讨论 …… 141
6-8-1 本章结论 …… 141
6-8-2 几点讨论 …… 142
习题 …… 143

第7章 单自由度体系的振动分析 …… 147
§7-1 单自由度体系自由振动分析的回顾和扩展 …… 147
7-1-1 自由振动的主要内容回顾 …… 147
7-1-2 确定体系阻尼比的一种方法 …… 149
§7-2 单自由度体系的受迫振动 …… 150
7-2-1 单自由度体系受迫振动的一般解 …… 150
7-2-2 几种常见荷载作用下的动力响应分析 …… 152
§7-3 单自由度非线性体系的响应分析 …… 160
7-3-1 非线性运动的增量方程 …… 160
7-3-2 线加速度法解非线性问题 …… 161
7-3-3 程序计算结果举例 …… 162
§7-4 结论与讨论 …… 163
7-4-1 本章结论 …… 163
7-4-2 几点讨论 …… 164
习题 …… 165

第8章 多自由度体系的振动分析 …… 167
§8-1 无阻尼多自由度体系的自由振动 …… 167
8-1-1 多自由度体系的振型和频率方程 …… 168
8-1-2 多自由度体系的频率和振型 …… 169
8-1-3 多自由度体系自由振动的通解 …… 172
8-1-4 多自由度体系频率和振型计算举例 …… 173
§8-2 多自由度体系振型的正交性 …… 175
8-2-1 正交的概念 …… 175
8-2-2 振型向量的正交性 …… 176
8-2-3 关于振型正交性的物理解释 …… 176
8-2-4 正交性的利用 …… 177
8-2-5 多自由度体系振型正交性应用举例 …… 179
§8-3 多自由度体系的受迫振动 …… 180
8-3-1 简谐荷载作用下的无阻尼受迫振动分析 …… 181
8-3-2 无阻尼体系在任意荷载作用下的受迫振动分析 …… 183

8-3-3 无阻尼结构的动内力计算 …… 185
8-3-4 有阻尼受迫振动分析 …… 187
8-3-5 有关阻尼矩阵的补充说明 …… 188
*§8-4 杆系结构有限元动力分析 …… 189
8-4-1 基本原理 …… 189
8-4-2 杆件单元运动方程及结构运动方程的建立 …… 190
*§8-5 多自由度体系的逐步积分方法 …… 193
8-5-1 线加速度法 …… 194
8-5-2 Wilson-θ 法 …… 194
8-5-3 Newmark-β 法 …… 196
§8-6 结论与讨论 …… 197
8-6-1 本章结论 …… 197
8-6-2 几点讨论 …… 198
习题 …… 200

第9章 频率和振型的实用计算方法 …… 202
§9-1 能量法 …… 202
9-1-1 单自由度体系 …… 202
9-1-2 多自由度体系 …… 203
*9-1-3 无限自由度体系 …… 206
*9-1-4 瑞利比 …… 208
§9-2 迭代法求振型和频率 …… 209
9-2-1 计算第一振型和频率 …… 209
9-2-2 迭代法求高阶振型和频率 …… 211
9-2-3 迭代法算例 …… 212
*§9-3 瑞利-里兹法 …… 213
9-3-1 瑞利比的特性 …… 213
9-3-2 瑞利-里兹法 …… 214
9-3-3 瑞利-里兹法的步骤 …… 215
*§9-4 子空间迭代法 …… 216
9-4-1 子空间迭代法基本思路 …… 216
9-4-2 多自由度瑞利-里兹法的矩阵表达式 …… 216
9-4-3 子空间迭代法 …… 218
9-4-4 子空间迭代法算例 …… 220
§9-5 本章结论 …… 222
习题 …… 223

第10章 结构地震响应分析及振动控制概述 …… 224
§10-1 地震作用与地震作用理论概述 …… 224
10-1-1 地震作用 …… 224
10-1-2 地震作用理论 …… 225
§10-2 单自由度体系的地震作用分析 …… 226
10-2-1 地震作用下结构的运动方程 …… 227
10-2-2 地震作用反应谱理论的基本假定 …… 227
10-2-3 单自由度体系的地震作用分析 …… 228
§10-3 地震反应谱 …… 229
10-3-1 相对位移、相对速度和绝对加速度反应谱 …… 230
10-3-2 三种反应谱的关系 …… 231
10-3-3 地震反应谱的标准化 …… 232
10-3-4 抗震设计反应谱 …… 234
§10-4 多自由度线性体系地震响应分析 …… 235
10-4-1 振型分解法解多自由度体系地震响应 …… 235
10-4-2 线性多自由度体系的地震作用——振型分解反应谱法 …… 237
10-4-3 关于振型组合问题 …… 238
§10-5 结构对策的发展和结构振动控制的概念 …… 240
10-5-1 结构对策的发展 …… 240
10-5-2 结构振动控制的概念 …… 241
§10-6 结构被动控制概述 …… 242
10-6-1 基底隔震 …… 242
10-6-2 耗能装置 …… 244
10-6-3 利用吸振原理设计的减震装置 …… 246
§10-7 结构主动控制概述 …… 249
10-7-1 主动控制系统的构成和分类 …… 249
10-7-2 AMD受控系统运动方程与状态方程 …… 249
10-7-3 主动控制常用控制算法简要说明 …… 250
10-7-4 主动控制试验 …… 251
§10-8 几点结论 …… 252
附录A 习题答案 …… 254
附录B 索引 …… 261
主要参考书目 …… 264
作者简介 …… 265

结构计算机分析篇

第 1 章　虚位移原理、势能原理及其应用
第 2 章　杆系结构单元分析
第 3 章　杆系结构的整体分析
第 4 章　分支点稳定及极限荷载有限元分析简介
第 5 章　平面问题有限元分析

第1章
虚位移原理、势能原理及其应用

第(I)册第3章中曾经介绍过变形体的虚功原理，并利用它推导了位移计算公式、线弹性体的互等定理等。

当变形体虚功原理的前提条件改为力系给定、虚位移完全任意时，其结论将改变为虚功方程恒成立是给定力系平衡的充分必要条件。由于前提、结论都改变，因此称为变形体虚位移原理。由变形体虚位移原理作一定的变换(或直接从定义出发)，可导出以能量形式表示的平衡条件，这就是变形体势能原理。用它们可推得位移法方程、求得受力和变形的近似解(里兹法)。它们也是有限元分析的理论依据。

由于本篇除增量变刚度法计算杆系结构极限荷载以外，只讨论线性弹性的结构(杆系、平面问题)计算问题，因此本章只讨论线弹性体的虚位移原理、势能原理及其应用。

§1-1 弹性力学的基本方程及其矩阵表示

弹性力学是研究弹性体受力变形的学科，与材料力学有关内容的区别是放松了某些人为假定(假设)。因此，结果更符合实际。但是，数学工具和解算也更复杂。

为了研究线弹性体的解答，首先需要建立微元体的平衡条件、几何关系、边界应满足的条件、应力-应变关系等，它们统称为**弹性力学的基本方程**。为了便于理解，下面仅以直角坐标二维问题为例加以说明。有关三维问题只作为其推广直接给出结果，建议读者自行验证。

4. 在**单元分析**(element analysis)基础上,以满足位移协调为前提,对单元集合体进行**整体分析**(integral analysis),建立以位移为基本未知量的线性代数方程组,也即**整体刚度方程**。

5. 利用解线性代数方程组的数学方法,求解方程组得到全部结点位移。

6. 利用已求得的位移,进一步求内力、应力,或者结合规范和结构设计知识进行**结构设计**(structural design)。

不难看出,除单元分析(第2、3两步)外,其他步骤与矩阵位移法完全一样。本篇在第2章里,将按有限元的原理和方法对杆系结构有限元分析作全面介绍,以便通过和矩阵位移法的对照,加深对有限元的理解。对弹性力学平面问题,将仅介绍与杆系结构不同的有关内容。在此基础上,有兴趣的读者可以自行研究三维块体单元,以便用以解决三维物体的受力、变形分析。

为了配合有限元原理的教学,随本书发行的光盘上有根据基本原理编制的应用程序,有的还给出了FORTRAN 90语言的源程序,所有的可执行程序,除供教学应用外,均可用于实际工程计算。有兴趣的读者在掌握程序应用的基础上,最好结合一个工程实际问题,作多种参数变动下的计算,再从分析计算结果中总结各种参数变化对结构受力、变形等的影响规律。这些定性的结论,要化一定的时间才能得到,但从它对今后工作所起的作用考虑,是非常值得的。

结构计算机分析篇

自20世纪50年代初，Ray W. Clough等人将矩阵位移法的思想扩展到平面连续体问题，并且命名为**有限单元法**(finite element method)以来，这一方法发展迅速，现已成为结构力学的一个新的分支——**计算结构力学**(computational structural mechanics)。同时，也促使计算机和计算技术得到了飞速发展。目前国内外大型工程辅助设计软件的核心部分，都是有限元的分析程序。

有限单元法既可用于解各种杆系结构的受力和变形，也可用于求解平面问题、空间三维问题、薄板和薄壳，等等。既可用于解决静力荷载作用下的计算问题，也可用于解决动荷载作用下的响应分析问题。既能用于求解线性问题，还可用于求解非线性问题。本篇作为有限单元法(简称为有限元)的基础，将仅仅介绍线弹性静力问题、以位移作基本未知量的有限元最基本的一些知识，包括作为有限元理论基础的能量原理，杆系结构有限元分析，平面问题有限元分析。

有限元的分析步骤与矩阵位移法基本相同，也分为：

1. 对所要分析的物体进行**离散化**，使连续体变成仅在一些选定点(以后称为**结点** node)处相连的单元集合，同时为进一步分析做好数据准备。

2. 合理地假设各单元的**位移场**(displacement field)，亦即选择合适的函数将单元内任一点的位移用结点位移表示。

3. 用势能原理(或虚位移原理)对单元进行分析，建立单元的结点力－结点位移关系，与矩阵位移法一样，也称为**单元刚度方程**。

本节只对弹性力学的基本方程作一概要介绍，想了解和掌握更详尽、全面、深入的内容，读者可选学《弹性力学》课程或自学各种弹性力学参考教材。

需要强调指出的是，弹性力学与材料力学一样，都假设所研究的物体是**连续、均匀和各向同性的**。

1-1-1　平衡(运动)微分方程

图 1-1 为从二维弹性体中取出的一个面积为 $dA = dxdy$ 的内部微元体，图 1-1a 为外力、应力连续变化条件下 A、B 两点 σ_x 随位置变化的受力示意图，图 1-1b 是略去高阶小量以合力代替后的微元体受力图。图中 $\sigma_{x,x}$，$\tau_{xy,y}$ 等是一种导数简记法，也即

$$\sigma_{x,x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy,y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

本篇以后均采用此种表示法，将不再一一说明。从数学上不难证明 AB 边上 x 方向的合力为

$$\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_x + \sigma_{x,x})dy = \sigma_x dy + 0(1)$$

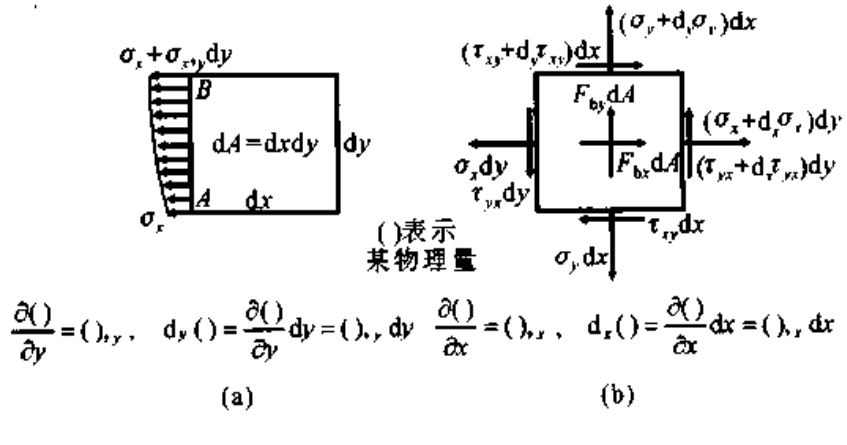


图 1-1　平面微元体受力

略去高阶小量 0(1)，因此图 1-1b 从数学上讲是精确的。

同理，微元体所受坐标方向体积力分量的合力为 $F_{bx}dA$、$F_{by}dA$。

根据微元体受力图 1-1b，可列 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 方程，即可得二维问题的**平衡微分方程**(equilibrium differential equation)为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_{bx} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_{by} = 0 \end{aligned} \tag{1-1}$$

再由$\sum M=0$,可得切应力互等的结论,也即$\tau_{xy}=\tau_{yx}$。在此基础上,可得到以下结论:

● 如果微元体不平衡,根据达朗伯尔原理,加上惯性力(例如x方向为$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}A$)后再列(瞬时)动平衡方程,则可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+F_{bx}&=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+F_{by}&=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{1-2}$$

式中,ρ为材料的(质量)密度,u和v分别为坐标x、y方向的位移。这就是二维问题的运动微分方程。

● 对于三维问题,运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+F_{bx}&=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+F_{by}&=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_{bz}&=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{1-3}$$

1-1-2 小变形的几何方程(位移-应变关系)

图1-2为二维弹性体中沿坐标方向所取两正交微段及位移示意。

定义:某坐标方向线应变等于微段变形后长减去微段原长后除以微段原长。

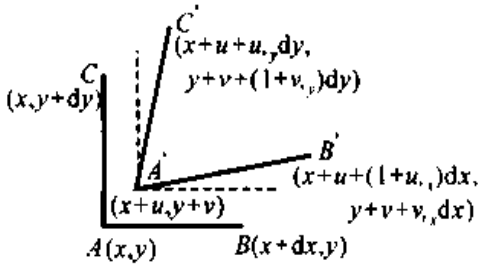


图1-2 微段变形示意图

由此,在小应变条件下从图1-2略去高阶小量后可得x,y方向线应变为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\tag{1-4a}$$

定义:正交微段角度的改变量等于角应变或切应变。

则在小应变下(小角度正切近似等于角度)可得

$$\gamma = \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1-4b}$$

上述所定义的应变称为**工程应变**(engineering strain)。方程(1-2)称为**几何方程**(geometrical equation)。对三维问题,对应工程应变的几何方程为

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \tag{1-5}$$

1-1-3　边界条件(边界处平衡和协调条件)

物体的边界可能有如下情况:

- 仅给定应力的边界表面 S_σ。
- 仅给定位移的边界表面 S_u。
- 某些方向给定应力、另一些方向给定位移的混合边界 S_{mix}。

对于以位移进行求解的问题,可将 S_{mix} 也视作 S_u。物理量给定的条件称为**边界条件**(boundary condition)。

1. 应力边界条件

从边界部分取得微元体如图 1-3 所示,微元体边界上应力、表面力均已用合力表示。像建立平衡方程一样,只要注意:ds、dx、dy 间的关系和体力合力为高阶小量,即可建立如下**应力边界条件**(stress boundary condition)

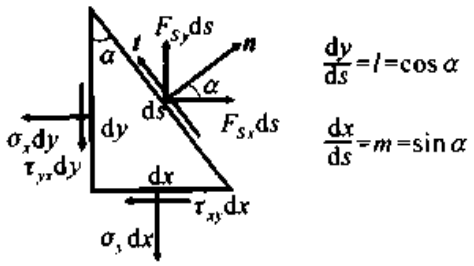


图 1-3　边界微元体受力示意图

S_σ 表面上:

$$\begin{aligned} F_{Sx} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ F_{Sy} &= \sigma_y m + \tau_{xy} l \end{aligned} \tag{1-6}$$

式中,l、m 为边界外法线的方向余弦。

- 对三维问题应力边界条件为

$$\begin{aligned} F_{Sx} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ F_{Sy} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ F_{Sz} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned} \tag{1-7}$$

式中，l、m、n 为边界面外法线的方向余弦。

● 不管微元体是否平衡，在小变形下，可证明应力边界条件是相同的（因为体积力和惯性力的合力相对表面力的合力是高一阶的小量）。

2. 位移边界条件

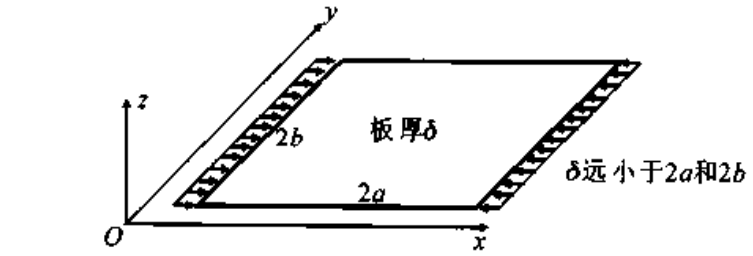
当边界 S_u 上位移为给定值 $\bar{u}$、$\bar{v}$ 时，由位移协调，位移边界条件可表示为

S_u 表面上：
$$u=\bar{u},\quad v=\bar{v} \tag{1-8}$$

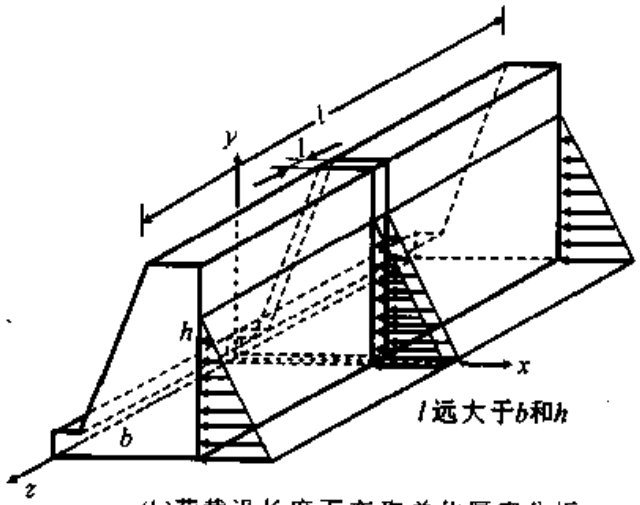
1-1-4 线弹性体的物理方程（本构关系）

对各向同性二维弹性体有图 1-4 所示两种情况。图 1-4a 表示荷载作用于平板中面，板厚远小于平面内两方向的尺寸，这类问题称为平面应力问题。这时

$$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$$



(a)荷载作用于板的中面



(b)荷载沿长度不变，取单位厚度分析

图 1-4 两类平面问题

图 1-4b 是一水坝示意图，其特点是长度远远大于平面内两方向的尺寸，这类问题称为平面应变问题。此时，

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

两类问题的共同特点是：物理量(位移、应变、应力)只是坐标 x，y 的函数。

线弹性材料应力－应变关系称**线弹性本构方程**(linear elastic constitutive equation)，由材料力学中的广义胡克(Hooke)定律可得

对**平面应力**(plane stress)问题为

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\
&\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{1-9}$$

式中，E、ν 分别为弹性模量和泊松比。从式(1－9)解出应力，则可得

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{1-10}$$

对**平面应变**(plane strain)问题为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\
\varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{1-11}$$

可证明式(1－10)中 E、ν 作如下变换：

$$E = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{1-12}$$

与从式(1－11)求解应力用应变表达的结果相同。

对于各向异性的复合材料，在材料力学的“材料力学行为”中已经介绍，这里从略。

1－1－5　物理量的矩阵表示

为了以后推导方便、书写简洁，对二维问题一些物理量和符号用矩阵表示如下：

- 应力矩阵：　$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy})^{\mathrm{T}}$
- 应变矩阵：　$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy})^{\mathrm{T}}$
- 位移矩阵：　$\boldsymbol{d} = (u \quad v)^{\mathrm{T}}$，已知位移矩阵：$\bar{\boldsymbol{d}} = (\bar{u} \quad \bar{v})^{\mathrm{T}}$
- 体积力矩阵：　$\boldsymbol{F}_b = (F_{bx} \quad F_{by})^{\mathrm{T}}$。

● 表面力矩阵： $\boldsymbol{F}_S=(F_{Sx}\quad F_{Sy})^{\mathrm{T}}$

● 弹性矩阵： $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}D_1 & D_{12} & 0\\ D_{21} & D_2 & 0\\ 0 & 0 & D_3\end{pmatrix}$

矩阵元素取决于问题类型和材料特性。

● 方向余弦矩阵： $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ 0 & m & l\end{pmatrix}$

● 微分算子矩阵： $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}$

1-1-6 弹性力学基本方程的矩阵表示

利用所引入的矩阵符号，由矩阵运算可以证明弹性力学基本方程可写成：

平衡方程	$\boldsymbol{A\sigma}+\boldsymbol{F}_b=\boldsymbol{0}$	(1-13)
几何方程	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}$	(1-14)
本构方程	$\boldsymbol{D\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{0}$	(1-15)
应力边界条件	$\boldsymbol{L\sigma}-\boldsymbol{F}_S=\boldsymbol{0}$	(1-16)
位移边界条件	$\boldsymbol{d}-\bar{\boldsymbol{d}}=\boldsymbol{0}$	(1-17)

*§1-2 外力总虚功的计算

为了深刻理解虚位移原理和势能原理，先介绍变形体外力总虚功的计算。

1-2-1 内部微元体上外力总虚功

1. 微元体受力分析

与上一节平衡分析一样略去高阶小量，微元体受力图如1-5所示。

2. 微元体受力点的虚位移

与几何分析相仿，在设 A 点(称为基点)坐标为(x,y)，其虚位移为 $\delta\boldsymbol{d}=(\delta u\quad \delta v)^{\mathrm{T}}$，由连续函数的泰勒(P. G. Taylor)级数展开可知，对应图1-5合力作用点的虚位移分别为

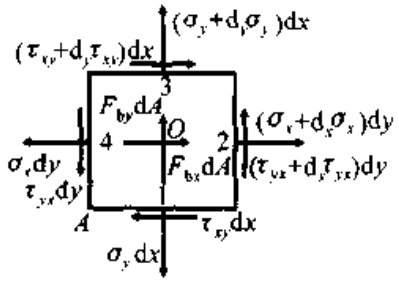


图 1-5　内部微元体受力图

$$O\text{ 点：}\quad \left(\delta u+\delta u,_x\frac{dx}{2}+\delta u,_y\frac{dy}{2}\quad \delta v+\delta v,_x\frac{dx}{2}+\delta v,_y\frac{dy}{2}\right)^T$$

$$1\text{ 点：}\quad \left(\delta u+\delta u,_x\frac{dx}{2}\quad \delta v+\delta v,_x\frac{dx}{2}\right)^T$$

$$2\text{ 点：}\quad \left(\delta u+\delta u,_x dx+\delta u,_y\frac{dy}{2}\quad \delta v+\delta v,_x dx+\delta v,_y\frac{dy}{2}\right)^T$$

$$3\text{ 点：}\quad \left(\delta u+\delta u,_x\frac{dx}{2}+\delta u,_y dy\quad \delta v+\delta v,_x\frac{dx}{2}+\delta v,_y dy\right)^T$$

$$4\text{ 点：}\quad \left(\delta u+\delta u,_x\frac{dy}{2}\quad \delta v+\delta v,_y\frac{dy}{2}\right)^T$$

其中，$\delta u,_x$、$\delta v,_y$ 等仍然是导数简记法，也即 $\delta u,_x=\dfrac{\partial\delta u}{\partial x}$，$\delta v,_y=\dfrac{\partial\delta v}{\partial y}$。

3. 微元体上外力的总虚功

有了上述准备，力乘对应虚位移求代数和，即可得到总虚功为

$$\begin{aligned}
d\delta W_e=&-\tau_{xy}dx\left(\delta u+\delta u,_x\frac{dx}{2}\right)-\sigma_y dx\left(\delta v+\delta v,_x\frac{dx}{2}\right)+(\tau_{xy}+\tau_{xy},_y dx)dy\cdot\\
&\left(\delta v+\delta v,_x dx+\delta v,_y\frac{dy}{2}\right)+(\sigma_x+\sigma_x,_x dx)dy\left(\delta u+\delta u,_x dx+\delta u,_y\frac{dy}{2}\right)+\\
&(\sigma_y+\sigma_y,_y dy)dx\left(\delta v+\delta v,_y dy+\delta v,_x\frac{dx}{2}\right)+(\tau_{xy}+\tau_{xy},_y dy)dx\cdot\\
&\left(\delta u+\delta u,_y dy+\delta u,_x\frac{dx}{2}\right)-\tau_{xy}dy\left(\delta v+\delta v,_y\frac{dy}{2}\right)-\sigma_x dy\left(\delta u+\delta u,_y\frac{dy}{2}\right)+\\
&F_{bx}dxdy\left(\delta u+\delta u,_y\frac{dy}{2}+\delta u,_x\frac{dx}{2}\right)+F_{by}dxdy\left(\delta v+\delta v,_y\frac{dy}{2}+\delta v,_x\frac{dx}{2}\right)
\end{aligned}\tag{a}$$

对上式进行整理并舍去高阶小量，可得

$$\begin{aligned}
d\delta W_e=&[(\sigma_x,_x+\tau_{xy},_y+F_{bx})\delta u+(\tau_{xy},_x+\sigma_y,_y+F_{by})\delta v]dxdy+\\
&[\sigma_x\delta u,_x+\sigma_y\delta v,_y+\tau_{xy}(\delta u,_y+\delta u,_x)]dxdy
\end{aligned}\tag{1-18}$$

不难看出，式中第一项是微元体上外力在随基点平动(δu，δv，)时的总虚功，第二项则为外力在微元体变形虚位移上所作的总虚功。如果分别记为 $\mathrm{d}\delta W_r$ 和 $\mathrm{d}\delta W_i$，则

$$\mathrm{d}\delta W_e = \mathrm{d}\delta W_r + \mathrm{d}\delta W_i \tag{1-19a}$$

$$\mathrm{d}\delta W_r = [(\sigma_x{}_{,x} + \tau_{xy}{}_{,y} + F_{bx})\delta u + (\tau_{xy}{}_{,x} + \sigma_y{}_{,y} + F_{by})\delta v]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-19b}$$

$$\mathrm{d}\delta W_i = [\sigma_x \delta u_{,x} + \sigma_y \delta v_{,y} + \tau_{xy}(\delta u_{,y} + \delta u_{,x})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-19c}$$

1-2-2 边界微元体上外力总虚功

边界微元体的受力图如 1-6 所示，以 A 为基点，按泰勒级数展开的概念，可写出图中 O、1、2、3 点的虚位移。由此，可写出微元体上外力的总虚功为

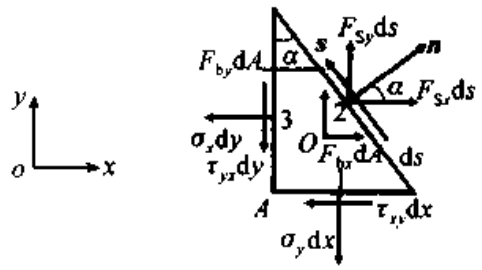


图 1-6 边界微元体受力

$$\mathrm{d}\delta W_e = -\tau_{xy}\mathrm{d}x\left(\delta u + \delta u_{,x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right) - \sigma_y \mathrm{d}x\left(\delta v + \delta v_{,x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right) -$$

$$\tau_{xy}\mathrm{d}y\left(\delta v + \delta v_{,y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right) - \sigma_x \mathrm{d}y\left(\delta u + \delta u_{,y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right) + F_{bx}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2}\left(\delta u + \delta u_{,y}\frac{\mathrm{d}y}{3} + \right.$$

$$\left.\delta u_{,x}\frac{\mathrm{d}x}{3}\right) + F_{by}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2}\left(\delta v + \delta v_{,y}\frac{\mathrm{d}y}{3} + \delta v_{,x}\frac{\mathrm{d}x}{3}\right) + F_{Sx}\mathrm{d}s\left(\delta u + \right.$$

$$\left.\delta u_{,y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \delta u_{,x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right) + F_{Sy}\mathrm{d}s\left(\delta v + \delta v_{,y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \delta v_{,x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right) \tag{b}$$

引入边界外法线方向余弦 $l = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$、$m = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$，且略去高阶小量并整理后可得

$$\mathrm{d}\delta W_e = [F_{Sx} - (\sigma_x l + \tau_{xy} m)\delta u + F_{Sy} - (\tau_{xy} l + \sigma_y m)\delta v]\mathrm{d}s \tag{1-20}$$

1-2-3 虚位移时变形体的外力总虚功

显然，将内部和边界微元体的外力功积分就可得到变形体的外力总虚功

$$\delta W_e = \iint_A [(\sigma_x{}_{,x} + \tau_{xy}{}_{,y} + F_{bx})\delta u + (\tau_{xy}{}_{,x} + \sigma_y{}_{,y} + F_{by})\delta v]\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$\iint_A [\sigma_x \delta u_{,x} + \sigma_y \delta v_{,y} + \tau_{xy}(\delta u_{,y} + \delta u_{,x})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y +$$

$$\int_{S_\sigma} [F_{Sx} - (\sigma_x l + \tau_{xy} m)\delta u + F_{Sy} - (\tau_{xy} l + \sigma_y m)\delta v]\mathrm{d}s \qquad (1-21)$$

引用上节的矩阵表达式，式(1－21)可改写为

$$\delta W_e = \iint_A [\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{F}_b]^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{d}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_A \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{S_\sigma} [\boldsymbol{F}_S - \boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma}]^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{d}\,\mathrm{d}s \qquad (1-22)$$

§1－3　变形体虚位移原理表述和证明

1－3－1　变形体虚功原理回顾

在第(Ⅰ)册第 3 章曾讨论过变形体**虚功原理**(virtual work principle)，给出了杆系问题的虚功方程，推导了位移计算公式，证明了线性弹性体的互等定理。

变形体虚功原理适用于一切结构(一维杆系、二维平面、三维块体)、适用于任何力学行为的材料(线性和非线性)，是变形体力学的普遍原理。

变形体虚功原理要求力系平衡，要求虚位移协调，是在“平衡、协调”前提下的功恒等关系，它是一个必要性的命题。

1－3－2　变形体虚位移原理的表述

一给定外力的变形体处于平衡状态的充分、必要条件是，对一切虚位移，外力所作总虚功恒等于变形体所接受的总虚变形功。也即恒有如下虚功方程成立

$$\delta W_e = \delta W_i \qquad (1-23)$$

上述命题即为变形体**虚位移原理**(virtual displacement principle)。

对于二维问题式(1－23)的矩阵表达式为

$$\delta W_e = \iint_A \boldsymbol{F}_b^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{d}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_S^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{d}\,\mathrm{d}s = \iint_A \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \delta W_i \qquad (1-24)$$

1－3－3　变形体虚位移原理必要性证明

必要性命题是要证明：当变形体处于平衡状态时，虚功方程恒成立。

[**证明**]　因为变形体平衡，平衡方程、应力边界条件成立。也即

$$\boldsymbol{A\sigma} + \boldsymbol{F}_b = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{F}_S - \boldsymbol{L\sigma} = \boldsymbol{0}$$

考虑上述条件后，由式(1-22)可得

$$\delta W_e = \iint_A \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \delta W_i \tag{a}$$

由于虚位移满足约束条件，在给定位移的表面 S_u 上 $\delta\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$，因此式(1-22)可改写成：

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \iint_A [\boldsymbol{A\sigma} + \boldsymbol{F}_b]^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_A \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{S_\sigma} [\boldsymbol{F}_S - \boldsymbol{L\sigma}]^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s - \\ &\quad \int_{S_u} [\boldsymbol{L\sigma}]^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s \\ &= \iint_A \boldsymbol{F}_b^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_S^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s + \iint_A [(\boldsymbol{A\sigma})^T \delta\boldsymbol{d} + \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \\ &\quad \int_S (\boldsymbol{L\sigma})^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{b}$$

式(b)的后两个积分

$$\begin{aligned}&\iint_A [(\boldsymbol{A\sigma})^T \delta\boldsymbol{d} + \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_S (\boldsymbol{L\sigma})^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s \\ &= \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x \delta u + \tau_{xy}\delta v) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}\delta u + \sigma_y \delta v)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_S [\boldsymbol{L\sigma}]^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

利用高斯(Gauss)公式可证明上式等于零，这一关系式称为格林(Green)公式。利用它和平衡方程，即可得

$$\delta W_e = \iint_A \boldsymbol{F}_b^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_S^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s \tag{c}$$

由式(a)和式(c)即可证得式(1-24)虚功方程成立。

1-3-4 变形体虚位移原理充分性证明

充分性命题是要证明：当对于一切虚位移虚功方程恒成立时，变形体一定平衡。

[证明] 因为不管变形体是否平衡，外力总虚功都按式(1-21)或(1-22)计算，假设变形体不平衡，则微元体存在加速度，利用达朗伯尔原理可知瞬时惯性力集度为

$$-\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{d}}{\partial t^2} = -\rho \boldsymbol{d}_{,tt} = -\rho \ddot{\boldsymbol{d}}$$

其中，ρ 为材料的密度。因为惯性力作用于体内每一点，所以可看成体积力。对每瞬时利用必要性命题的结论(因为现在动平衡)可得

$$\iint_A (\boldsymbol{F}_b - \rho\ddot{\boldsymbol{d}})^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_S^T \delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s = \iint_A \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由命题的已知条件，又有对一切虚位移式(1－24)成立。因此，两式相减可得

$$\iint_A \rho \ddot{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{d} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

将矩阵方程展开，则

$$\iint_A \rho(\ddot{u}\,\delta u + \ddot{v}\,\delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

由于上式对一切虚位移都成立，δu、δv 具有任意性、独立性，因此必须

$$\rho \ddot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{0}$$

也就是说，当一切虚位移虚功方程都成立时，如果变形体不平衡，则其加速度必等于零。原理证毕。

1－3－5　几点说明

● 虚位移原理证明过程要求虚位移完全任意、独立(也即一切)，在此条件下原理等价于平衡条件。当这一条件不成立，或者虚位移只具有某些条件下的任意性时，显然前提条件改变了，当然结论也要发生改变。因此，认为说虚功方程等价于平衡方程(或称为是以功形式表达的平衡方程)，其正确性是有条件的。

● 虚位移原理证明过程没有涉及材料力学行为，因此可适用于一切变形体。

● 为了简便，讨论是对二维问题进行的，显然只要将矩阵表达的物理量理解为三维，面积分改为体积分、线积分改为面积分就可得到三维问题的虚功方程。

● 虚位移原理和虚功原理是有区别的。虚位移原理是充要条件，虚功原理是在“力平衡、位移协调”前题下的虚功恒等关系，是前者的必要性命题。

● 利用虚功原理时必须保证力状态是平衡的(见第一篇第 3 章)。后面应用虚位移原理作近似计算，是在设定某种位移情况下令虚功方程恒成立，这个设定位移要事先满足的只是位移边界条件，并不需要事先满足平衡条件，它是由虚功方程恒成立来保证结果有某种积分意义下的“平衡”，当然这里用的是原理充分性。这一点是要特别注意的。

● 式(b)也可理解为将微元体上的力分解成外荷载和切割面内力的结果，格林公式则代表切割面内力在切割面虚位移上做功时，由于作用反作用关系，总虚功相互抵消的结果。

● 格林公式还可理解为是虚功原理的一种变形。虚功原理说在平衡、

协调条件下虚功方程 $\iint_A \boldsymbol{F}_b^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_\sigma}\boldsymbol{F}_S^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s=\iint_A\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 成立，利用平衡方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{F}_b=\boldsymbol{0}$ 和应力边界条件 $\boldsymbol{F}_S-\boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{0}$，将体积力、表面力用应力表示，再代入虚功方程，显然这就是格林公式。

● 本节内容比较抽象，希望大家都能多想、多练着自行推证，打好这力学基础。

§1-4 势能原理

势能原理可由虚位移原理得到（也可从数学角度严密定义、证明，读者可参考有关书籍和资料）。

1-4-1 预备知识

● 用函数作自变量以积分形式定义的函数，称为**泛函**（functional），“自变量”称为自变函数。

● 泛函和自变函数的“微分”称为**变分**（variation），变分算子用符号 δ。

● 变分运算的方法与微分运算相同。

1-4-2 最小势能原理

虚位移原理虚功方程为

$$\iint_A \boldsymbol{F}_b^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_\sigma}\boldsymbol{F}_S^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s=\iint_A\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

以位移为自变函数，则用几何方程可求得应变、由本构方程可求得应力，因此应力是位移的函数。再考虑到虚应变和虚位移满足几何方程。上述虚功方程可改写成

$$\iint_A \boldsymbol{F}_b^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_\sigma}\boldsymbol{F}_S^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}s=\iint_A[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{d})]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对线弹性物体来说 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}$，因此，

$$\iint_A[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{d})]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_A[\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又由于外力是给定的，它与虚位移无关。将虚位移看成是位移的变分（再次强调，变分算法和微分相同，自变函数看成自变量），虚功方程可改写成：

$$\delta\left(\frac{1}{2}\iint_A\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\delta\left(\iint_A\boldsymbol{F}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_\sigma}\boldsymbol{F}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\mathrm{d}s\right)=0 \qquad \text{(a)}$$

可见式(a)式第一项为应变能的变分。

定义 1：外力从位移状态 $\boldsymbol{d}$ 退回到无位移的初始状态所作的功，称为**外力势能**(potential energy of load)，或简称为外力势，记作 E_P^*（或 V_P^*）。也即

$$E_P^* = -\left(\iint_A \boldsymbol{F}_b^T \boldsymbol{d}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_S^T \boldsymbol{d}\,\mathrm{d}s\right) \tag{1-25}$$

定义 2：应变能 V_ε 和外力势能 E_P^* 的和称为**总势能**(简称**势能** potential energy)，记为 E_P（或 V_P）。也即

$$E_P = V + E_P^*$$

$$E_P = \frac{1}{2}\iint_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_A \boldsymbol{F}_b^T \boldsymbol{d}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_S^T \boldsymbol{d}\,\mathrm{d}s \tag{1-26}$$

则式(a)成为

$$\delta E_P = 0 \tag{1-27}$$

由虚位移原理可知，式(1-27)表明，位移状态 $\boldsymbol{d}$ 为真实位移状态的充分、必要条件是，对应位移 $\boldsymbol{d}$ 的势能一阶变分为零。也即对应位移 $\boldsymbol{d}$ 的势能取驻值。进一步可以证明，对线弹性问题为最小值，这就是最小势能原理。

1-4-3　几点说明

● 真实位移是满足平衡条件的位移，也即是既平衡又协调的位移

● 势能原理和虚位移原理等价，一个以能的形式，另一个用功的形式表达。

● 当应变能按材料本构关系写出时，势能原理也适用于任何力学行为的材料，但此时只是一个驻值原理。只有当本构关系是线性的时候，才是最小值原理。

* §1-5　势能原理与位移法

在第(Ⅰ)册第 4 章学过位移法，当时在力法解超静定单跨梁得到"形常数"、"载常数"基础上，建立了通过"一拆——拆成单杆集合"、"一合——合回去平衡"求解结构位移的位移法。本节从能量原理角度导出位移法方程，并举例说明求解方法。

1-5-1　由势能原理导出位移法方程

以图 1-7 结构为例，说明位移法方程的建立。设结点位移如图为 Δ_1、

Δ_2、Δ_3，可将结构看成由结点分割成三个单元。适当选取函数，以 Δ_1、Δ_2、Δ_3 为线性组合参数，可建立自动满足位移协调条件（支座约束、结点连接条件）的单元位移场 v_i（$i=1,2,3$），由杆件应变能

$$V_{ei} = \frac{1}{2}\int_0^l EI(v_i'')^2 \mathrm{d}x \tag{1-28}$$

对单元求和，可得到结构的应变能 V_ε，由于单元位移是结点位移线性表达式，因此由式(1-28)可知，应变能 V_ε 一定是结点位移的二次型，

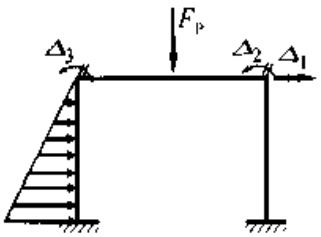


图 1-7 结构位移示意图

$$V_\varepsilon = \sum_i V_{ei} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j k_{ij}\Delta_i\Delta_j \tag{1-29}$$

对线弹性结构根据能量守恒，应变能等于外力功，因此，

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_i P_i\Delta_i \tag{a}$$

这里，P_i 是作用在结点并与 Δ_i 对应的广义力。对比式(1-29)和(a)可知，

$$P_i = \sum_j k_{ij}\Delta_j \tag{b}$$

因此，k_{ij} 的物理意义是“为仅产生 $\Delta_j=1$ 位移，在 i 点 Δ_i 方向所需施加的广义力”，称为**结构刚度系数**(structural stiffness coefficient)。今后可以直接应用这个物理概念来建立应变能表达式。

类似的分析，从外力势能定义可知，E_P^* 必然是 Δ_i 的线性表达式，可表示为

$$E_P^* = \sum_i R_i\Delta_i \tag{1-30}$$

式中，R_i 的物理意义是“荷载引起的 Δ_i 方向固端广义力总和”。今后同样可直接从这一物理意义来求 R_i，从而建立外力总势能表达式。

有了式(1-29)和(1-30)，即可得结构总势能为

$$E_P = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j k_{ij}\Delta_i\Delta_j + \sum_i R_i\Delta_i \tag{1-31}$$

令总势能对位移的变分等于零，也即偏导数$\frac{\partial E_P}{\partial \Delta_i}=0$，可得

$$\sum_j k_{ij}\Delta_j + R_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{1-32}$$

可见这一结果与第(Ⅰ)册第 4 章位移法方程完全相同(注意：此处广义位移 Δ_j，在第(Ⅰ)册第 4 章位移用 Z_j)。

1-5-2　能量法求解举例

[**例题 1-1**]　用势能原理求解图 1-8a 所示结构结点位移，各杆 EI 等于常数。

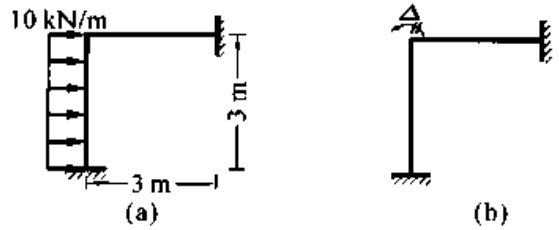


图 1-8　例题 1-1

解：　1. 结构只有图 1-8b 所示一个结点转角 Δ，以它为参数。

2. 根据刚度系数物理意义和形常数，可得

$$k_{11}=\frac{8EI}{3\ \mathrm{m}}$$

3. 计算应变能 V_ε，由式(1-25)可得 $V_\varepsilon=\frac{4EI}{3\ \mathrm{m}}\Delta^2$

4. 由 R_i 的物理意义和载常数可得 $R=\frac{10\ \mathrm{kN/m}\times(3\ \mathrm{m})^2}{12}=7.5\ \mathrm{kN\cdot m}$

5. 写总势能表达式，可得 $E_P=\frac{4EI}{3\ \mathrm{m}}\Delta^2+(7.5\ \mathrm{kN\cdot m})\Delta$

6. 由极值条件可得　　$\Delta=-\frac{45}{16EI}\ \mathrm{kN\cdot m^2}$

本例非常简单，但包含了用能量原理进行求解的步骤，请读者自行归纳。

§1-6　里　兹　法

虚位移原理和势能原理可用来解决许多力学问题，本节仅介绍解决平

衡问题的**里兹法**(Ritz method)。

此法的基本思路(也即求解步骤)是:

1. 选定满足给定位移边界条件的、独立的一些函数作为基函数(或称为试函数)。

2. 以基函数的线性组合作为待确定的近似位移场,组合系数称为**广义坐标**(generalized coordinate)。

3. 当用势能原理时,由建立的位移场将总势能表示成广义坐标的函数。

4. 由总势能取驻值(对广义坐标的偏导数为零),对线弹性问题建立求解广义坐标的线性代数方程组。

5. 将求得的广义坐标代回位移场,一般得到问题的位移近似解答,进一步可由位移求得其他物理量。

用虚位移原理求解时,前两步是一样的。

3.用广义坐标的变分作组合系数,以同样的基函数建立虚位移场,用几何方程求虚应变(杆系问题时为虚变形)。

4. 由基函数线性组合的位移场求应变、应力(对杆系问题求内力)。

5. 令虚功方程对一切广义坐标变分都成立,对线弹性问题建立求解广义坐标的线性代数方程组。

6. 将求得的广义坐标代回位移场,一般得到问题的位移近似解答,进一步可求得其他物理量。

由此再次看到两个原理的应用也是相通的,同一问题可以用两种原理求,下面用不同原理求解不同例子,以供读者练习用另一原理求解时参考。

1-6-1 用虚位移原理求解

[例题 1-2] 试用里兹法求图 1-9 所示梁的位移和固定端弯矩。(当然对本例题所示悬臂梁,也可用材料力学的挠曲线微分方程二次积分法来求解。)

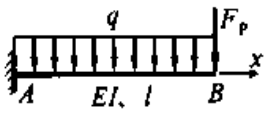


图 1-9 悬臂梁及荷载

解:对于梁,虚位移原理虚功方程为

$$\delta W_e = \int_0^l M\delta\kappa \mathrm{d}x = \int_0^l EI(v'')\delta v'' \mathrm{d}x$$

首先,选择满足位移边界条件的"基函数"。对图示梁最简单的是取 x^2、x^3、x^4,等等。由此可设梁的挠曲线为

$$v = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \cdots \tag{a}$$

式中,a_1、a_2、a_3 等即为广义坐标。显然,通过式(a)将本来是无限自由度的问题,化成了只有有限个广义坐标的有限自由度问题。

然后,设虚位移为

$$\delta v = \delta a_1 x^2 + \delta a_2 x^3 + \delta a_3 x^4 + \cdots \tag{b}$$

由式(a)和(b)可得

$$v'' = 2a_1 + 6a_2 x + 12a_3 x^2 + \cdots \tag{c}$$

$$\delta v'' = 2\delta a_1 + 6\delta a_2 x + 12\delta a_3 x^2 + \cdots \tag{d}$$

为了利用虚功方程，根据设定的挠曲线虚位移，还要计算外力总虚功

$$\delta W_e = F_P \delta v_B + \int_0^l q(\delta a_1 x^2 + \delta a_2 x^3 + \delta a_3 x^4 + \cdots)\mathrm{d}x$$

$$= F_P(\delta a_1 l^2 + \delta a_2 l^3 + \delta a_3 l^4 + \cdots) + q\left(\frac{l^3}{3}\delta a_1 + \frac{l^4}{4}\delta a_2 + \frac{l^5}{5}\delta a_3 + \cdots\right) \tag{e}$$

和总虚变形功(或称为内力功)

$$\delta W_i = \int_0^l EI(2a_1 + 6a_2 x + 12a_3 x^2 + \cdots)(2\delta a_1 + 6\delta a_2 x + 12\delta a_3 x^2 + \cdots)\mathrm{d}x$$

$$= 2EI(2a_1 l + 3a_2 l^2 + 4a_3 l^3 + \cdots)\delta a_1 + 6EI(a_1 l^2 + 2a_2 l^3 + 3a_3 l^4 + \cdots)\cdot$$

$$\delta a_2 + 12EI\left(\frac{2}{3}a_1 l^3 + \frac{3}{2}a_2 l^4 + \frac{12}{5}a_3 l^5 + \cdots\right)\delta a_3 \tag{f}$$

最后，令虚功方程恒成立，由于虚广义坐标的任意性、独立性，即可求的广义坐标。

如果只取级数一项，则式(e)、(f)中只出现 a_1 项，因此可得

$$a_1^{(1)} = \frac{1}{4EI}\left(F_P l + \frac{ql^2}{3}\right), \qquad v^{(1)} = \frac{1}{4EI}\left(F_P l + \frac{ql^2}{3}\right)x^2$$

$$v_B^{(1)} = \frac{1}{4EI}\left(F_P l + \frac{ql^2}{3}\right)l^2, \quad M^{(1)} = \frac{1}{2}\left(F_P l + \frac{ql^2}{3}\right) \tag{g}$$

如果只取级数两项，则式(e)、(f)中只出现 a_1、a_2 项，因此可得

$$2EI(2la_1 + 3l^2 a_2) = \left(F_P l^2 + \frac{ql^3}{3}\right), \quad 6EI(l^2 a_1 + 2l^3 a_2) = \left(F_P l^3 + \frac{ql^4}{4}\right)$$

$$a_1^{(2)} = \frac{1}{2EI}\left(F_P + \frac{5ql}{12}\right), \quad a_2^{(2)} = -\frac{1}{12EI}(2F_P + ql)$$

$$v^{(2)} = \frac{1}{2EI}\left(F_P + \frac{5ql}{12}\right)x^2 - \frac{1}{12EI}(2F_P + ql)x^3, \quad v_B^{(2)} = \frac{l^3}{3EI}\left(F_P + \frac{3ql}{8}\right)$$

$$M^{(2)} = \left(F_P l + \frac{5ql^2}{12}\right) - \frac{1}{2}(2F_P + ql)x \tag{h}$$

如果取级数三项，则式(e)、(f)中出现 a_1、a_2、a_3 项，读者有兴趣可自行求解。

从式(g)、(h)可看出如下结论：

● 弯矩不能满足平衡条件(可验证取三项时是精确解)。

● 位移的精度比弯矩高，用图乘法计算 B 点的挠度，可以证明式(h)结果是精确的。

● 广义坐标越多越精确，但工作量也越大。理论上说，只要选取完备的

基函数集合,里兹法的结果是精确的。

上述结论是有普遍意义的。

1-6-2 用势能原理求解

[例题 1-3] 试用势能原理求解图 1-10 所示板厚为 δ 的平面应力问题。

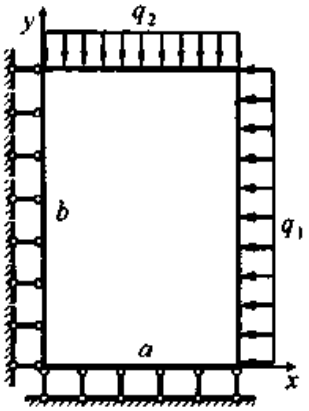


图 1-10 平面应力问题

解:首先设

$$\left.\begin{aligned} u &= (a_1 + a_2 x + a_3 y + \cdots)x \\ v &= (b_1 + b_2 x + b_3 y + \cdots)y \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

显然,此位移场自动满足位移边界条件。

当只取级数一项时由式(a)可求得应变为

$$\varepsilon_x = a_1, \quad \varepsilon_y = b_1, \quad \gamma_{xy} = 0 \tag{b}$$

应力为

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(a_1 + \nu b_1), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(b_1 + \nu a_1), \quad \tau_{xy} = 0 \tag{c}$$

因此,应变能为

$$\begin{aligned} V_\varepsilon &= \frac{E\delta}{2(1-\nu^2)}\int_0^a\int_0^b [(a_1 + \nu b_1)a_1 + (b_1 + \nu a_1)b_1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{E\delta ab}{2(1-\nu^2)}(a_1^2 + 2\nu b_1 a_1 + b_1^2) \end{aligned} \tag{d}$$

由应力边界的位移和外力势能定义可得

$$E_P^* = ab(q_1 a_1 + q_2 b_1) \tag{e}$$

由式(d)、(e)可得总势能为

$$E_P = \frac{E\delta ab}{2(1-\nu^2)}(a_1^2 + 2\nu b_1 a_1 + b_1^2) + ab(q_1 a_1 + q_2 b_1) \tag{f}$$

有了总势能，令变分等于零（偏导数为零），可得

$$\frac{\partial E_P}{\partial a_1}=\frac{E\delta ab}{2(1-\nu^2)}(2a_1+2\nu b_1)+abq_1=0$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial b_1}=\frac{E\delta ab}{2(1-\nu^2)}(2b_1+2\nu a_1)+abq_2=0$$

解此方程组，可得

$$a_1=-\frac{q_1-\nu q_2}{E},\quad b_1=-\frac{q_2-\nu q_1}{E} \tag{g}$$

代回式(a)、(b)、(c)可得位移、应变和应力的结果。由应力结果可以证明，对这个例子由于所设位移场本身就是精确的，所以由里兹法能够得到问题的精确解。

由上述两个例子可见，当所设位移场包含精确解时，取有限项也可以求得精确解。须再强调一下，对于复杂的问题，一般都是利用里兹法求近似解。

§1-7　结论与讨论

1-7-1　本章结论

● 变形体内部微元体在根据达朗伯尔原理考虑惯性力时，由动平衡可获变形体运动方程，加速度为零时的特例即为平衡方程。

● 由变形体边界微元体的平衡条件可得应力边界条件，它同样适用运动情况。

● 在微小变形时，可用工程应变作为变形体应变的度量指标。它们具有和材料力学中一样的物理意义。

● 两种形式线性弹性二维问题（平面问题）的应力应变关系可以互换，平面应力有三个应力分量为零，平面应变有三个应变分量为零。

● 不管是否平衡，变形体虚位移时的外力总虚功恒为

$$\delta W_e=\iint_A[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{F}_b]^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_A\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_\sigma}[\boldsymbol{F}_S-\boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma}]^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}s$$

● 变形体外力总虚功可分成刚体和变形总虚功（或称为内力总虚功）的和。上式中与 $\delta\boldsymbol{d}$ 相关的两项为刚体总虚功，与 $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 相关的是变形总虚功。

● 要注意变形体虚位移原理是和变形体虚功原理有区别的，如果说前者是后者的一种应用，是改变了前提条件的一种应用。正因如此，后者仅是

必要性命题，而前者确是充要命题。

● 说虚位移原理、势能原理等价于平衡条件，或者说是以虚功的形式、能量的形式表达的平衡条件，必须注意条件。只有当虚位移、位移变分完全任意、独立时结论才正确。否则只是某种意义下的近似平衡。

● 位移法方程可以用势能原理（或虚位移原理）导出，也即可以用势能原理以位移为基本未知量来求解。

● 里兹法的关键是合理选取满足位移约束条件的"基函数"，当基函数组合包含真实解时，里兹法可获得精确解，否则将是近似的。当为近似解时，位移的近似解精度高，应力或内力的近似精度低。

1-7-2　几点讨论

● 切应力无论什么情况都互等吗？只要注意切应力互等是从力矩平衡推得，当存在有旋体积力时，力矩平衡条件就得不到互等的结论。

● 当变形不是非常微小时，应变的度量不仅要考虑位移对坐标导数的线性（一次）项，还要包含位移对坐标导数的非线性（二次）项，对此有兴趣的可查阅非线性力学的书籍资料。这时应力定义也要考虑变形的影响。

● 各向同性线弹性体共有三个弹性常数 E、G、ν，其中只有两个是独立的，因为三者满足 $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$。此外，若引入记号 $\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$，证明最小势能原理时，则比较方便。

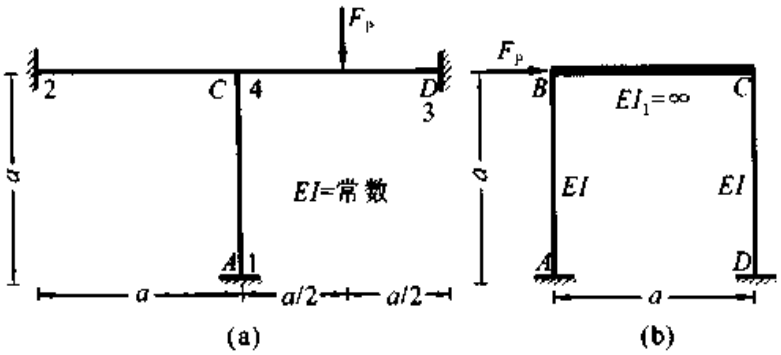
● 与虚位移原理对应，在虚力系任意、位移给定时，有位移协调充要条件的虚力原理及与其等价的余能原理。和势能原理能推得位移法方程一样，从余能原理也能推得力法方程。对此有兴趣的可参阅有关的结构力学或能量原理和弹性力学等书籍。

习　题

1-1　试按三维问题证明格林公式

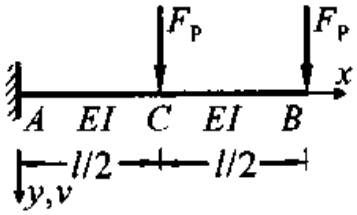
$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V=\iint_{S_\sigma}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}S-\iiint_V(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}V$$

1-2　试用势能原理求解图示结构。



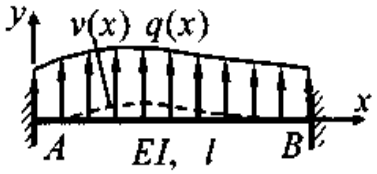
习题 1－2 图

1－3　试用里兹法求图示悬臂梁的挠度方程和弯矩方程。



习题 1－3 图

1－4　试用里兹法求图示两端固定梁的挠度方程。



习题 1－4 图

第2章
杆系结构单元分析

杆系有限元所得结果与第(Ⅰ)册结构静力分析篇中所介绍的矩阵位移法一样,为使读者能更好地掌握有限单元法的基本思想、基本原理和基本方法,为进一步学习和掌握平面问题等有限单元分析打下坚实基础。本章将完全应用有限元法的思想来建立刚度方程。

§2-1 引　　言

有限元分析可以基于虚位移原理,也可以基于势能原理。本书主要介绍后者,为此首先介绍杆系有限元分析时要用的杆系结构势能原理等内容。

2-1-1 杆系结构虚位移原理虚功方程

设平面杆系结构某单元 e 如图 2-1 所示,为用矩阵形式写出杆件及杆系结构的虚位移原理虚功方程,和矩阵位移法相仿引入以下矩阵(向量):

● **局部坐标单元杆端力矩阵**

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e=(\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3 \quad \bar{F}_4 \quad \bar{F}_5 \quad \bar{F}_6)^{\mathrm{T}}=(\bar{\boldsymbol{F}}_1^{\mathrm{T}} \quad \bar{\boldsymbol{F}}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{2-1}$$

● **局部坐标单元杆端虚位移矩阵**

$$\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}^e=(\delta\bar{\delta}_1 \quad \delta\bar{\delta}_2 \quad \delta\bar{\delta}_3 \quad \delta\bar{\delta}_4 \quad \delta\bar{\delta}_5 \quad \delta\bar{\delta}_6)^{\mathrm{T}}=(\bar{\boldsymbol{\delta}}_1^{\mathrm{T}} \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{2-2}$$

● **单元上分布荷载矩阵**

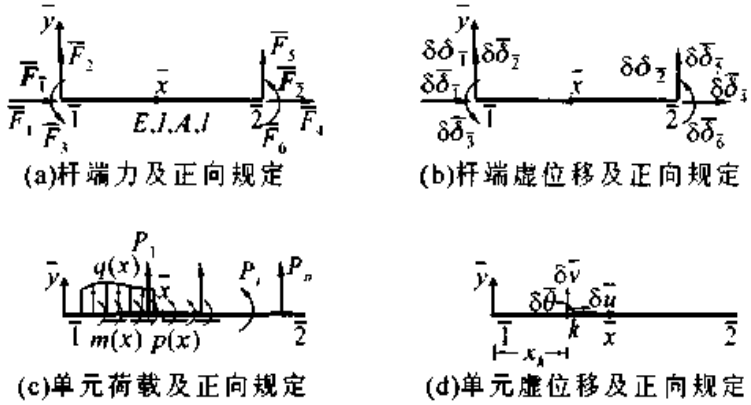
$$\boldsymbol{q}=(p(x) \quad q(x) \quad m(x))^{\mathrm{T}} \tag{2-3}$$

$p(x)$、$q(x)$、$m(x)$分别为单元上所受的轴向、横向荷载集度及分布力偶集度。

● **单元上局部坐标下任意截面的虚位移矩阵**

$$\delta\bar{\boldsymbol{d}} = (\delta\bar{u} \quad \delta\bar{v} \quad \delta\bar{\theta})^{\mathrm{T}} = \left(\delta\bar{u} \quad \delta\bar{v} \quad \frac{\mathrm{d}\delta\bar{v}}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2-4}$$

$\delta\bar{u}$、$\delta\bar{v}$、$\delta\bar{\theta}$ 的正号规定如图所示，分别为轴向、横向和转角虚位移。



(a)杆端力及正向规定　(b)杆端虚位移及正向规定

(c)单元荷载及正向规定　(d)单单元虚位移及正向规定

图 2-1　平面杆件单元

单元虚位移所产生的微段 $\mathrm{d}x$ 的虚变形为

虚线应变：
$$\delta\epsilon = \frac{\mathrm{d}\delta\bar{u}}{\mathrm{d}x} \tag{2-5}$$

虚曲率：
$$\delta\kappa = \frac{\mathrm{d}^2\delta\bar{v}}{\mathrm{d}x^2} \tag{2-6}$$

若又设单元任一截面的水平和竖向位移为 $\bar{u}(x)$，$\bar{v}(x)$，则由材料力学可得截面内力为

$$F_{\mathrm{N}} = EA\,\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x} \tag{2-7}$$

$$M = EI\,\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}}{\mathrm{d}x^2} \tag{2-8}$$

式中，EA，EI 分别为单元的抗拉(压)、抗弯曲刚度。

在图 2-1 和上述矩阵说明的情况下，将虚位移原理应用于单元，则虚功方程为

$$\delta W_{\mathrm{e}}' = \bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}' + \int_0^l \left[\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\delta\bar{\boldsymbol{d}} + \sum_{i=1}^{n} P_i\delta(x - x_i)\cdot\delta\bar{\delta}\right]\mathrm{d}x \tag{2-9a}$$

$$\delta W_{\mathrm{i}}' = \int_0^l [F_{\mathrm{N}}\delta\epsilon + M\delta\kappa]\mathrm{d}x \tag{2-9b}$$

$$\delta W_{\mathrm{e}}' = \delta W_{\mathrm{i}}' \tag{2-9c}$$

式(2-9a)中 $\delta(x - x_i)$ 为**单位脉冲函数**(unit impulse function)，如图2-2 所示。由图可见，若有函数 $f(x)$，则积分

① 式中 P_i 表示广义力，$\bar{\delta}$ 表示广义位移。当 P_i 为力时，$\bar{\delta}$ 为 $\bar{v}$；当 P_i 为力偶时，$\bar{\delta}$ 为 $\bar{\theta}$。

$$\int_0^l f(x)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x = \int_0^{x_i^-} f(x)\times 0\cdot \mathrm{d}x + \int_{x_i^-}^{x_i^+} f(x)\times \infty \cdot \mathrm{d}x + \int_{x_i^+}^{l} f(x)\times 0\cdot \mathrm{d}x = f(x_i) \tag{2-10}$$

根据式(2-10)的积分结果,则式(2-9a)中的 $\int_0^l \sum_{i=1}^{n} P_i\delta(x-x_i)\delta\bar{v}\mathrm{d}x$ 可写成:

$$\int_0^l \sum_{i=1}^{n} P_i\delta(x-x_i)\delta\bar{v}\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} P_i\delta\bar{v}(x_i)$$

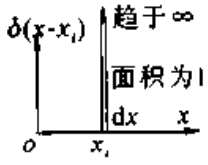


图 2-2 单位脉冲函数

对于整个结构来说,显然总虚变形功等于各单元虚变形功的和,也即

$$\delta W_i = \sum \delta W_i^e \tag{2-11}$$

而整个结构的外力功应该是各单元外力虚功与结点荷载总虚功之和,即

$$\delta W_e = \sum\left(\int_0^l \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\delta\bar{\boldsymbol{d}}\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} P_i\delta\bar{v}(x_i)\right) + \sum_j P_{jd}\delta\delta_j \tag{2-12}$$

式中,P_{jd},$\delta\delta_j$ 分别表示直接作用于结点的结点力分量和与其对应的结点虚位移分量。式(2-9a)中的 $\bar{\boldsymbol{F}}_e^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\delta}^e$ 属切割面内力的虚功。在整体虚功方程中由于切割面内力在切割面处是成对出现的(满足作用与反作用关系),而虚位移又是协调的,因此相互抵消,所以在式(2-12)中不再出现。

基于上述说明,则杆系结构虚位移原理的虚功方程为

$$\delta W_i = \sum \delta W_i^e = \sum \int_0^l [F_N\delta\varepsilon + M\delta\kappa]\mathrm{d}x$$

$$= \sum\left(\int_0^l \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\delta\bar{\boldsymbol{d}}\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} P_i\delta\bar{v}(x_i)\right) + \sum_j P_{jd}\delta\delta_j = \delta W_e \tag{2-13}$$

2-1-2 杆系结构总势能表达式

同上分析,单元 e 的应变能 V_ε^e 在只考虑轴向和弯曲变形时为

$$V_\varepsilon^e = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l EA\left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{2-14}$$

单元外力的总势能 $E_{P,e}^*$ 为

$$E_{P,e}^* = -\left(\int_0^l \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{d}}\mathrm{d}x + \sum_i P_i\bar{v}(x_i)\right) - \bar{\boldsymbol{F}}_e^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{2-15}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{d}} = (\bar{u}\quad \bar{v}\quad \bar{\theta})^{\mathrm{T}} = \left(\bar{u}\quad \bar{v}\quad \dfrac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}}$,$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = (\bar{\delta}_1\quad \bar{\delta}_2\quad \bar{\delta}_3\quad \bar{\delta}_4\quad \bar{\delta}_5\quad \bar{\delta}_6)^{\mathrm{T}}$ $= (\bar{\boldsymbol{\delta}}_1^{\mathrm{T}}\quad \bar{\boldsymbol{\delta}}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 为单元杆端位移矩阵。因此,单元的总势能表达式为

$$E_P^e = V_\varepsilon^e + E_{P,e}^*$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l EA\left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 dx -$$

$$\left\{\int_0^l \boldsymbol{q}^T\bar{\boldsymbol{d}}\,dx + \sum_i P_i\bar{v}(x_i)\right\} - \bar{\boldsymbol{F}}_e^T\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \qquad (2-16)$$

对于整个结构还要考虑结点的总外力势。为此，由图 2-3 所示任一结点的受力可见，整个结构的结点总外力势 $E_{P,n}^*$ 为

$$E_{P,n}^* = \left(P_{id} - \sum_j \boldsymbol{F}_{1,j}^e - \sum_k \boldsymbol{F}_{2,k}^e\right)^T \boldsymbol{\delta}_i \qquad (2-17)$$

式中，$\boldsymbol{F}_{1,j}^e$，$\boldsymbol{F}_{2,k}^e$ 为 e_j，e_k 单元结点 i 处的整体坐标杆端力矩阵；

$\boldsymbol{F}_{Pd}^i$ 为直接作用于结点 i 的结点荷载矩阵；

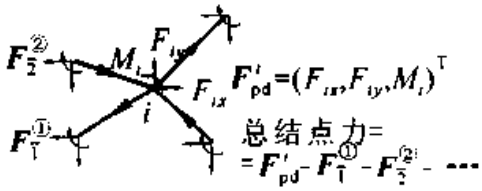


图 2-3　结点受力示意

$\boldsymbol{\delta}_i$ 为结点 i 的整体坐标结点位移矩阵。

由此可得结构的总势能为

$$E_P = \sum E_P^e + E_{P,n}^*$$

$$= \sum\left(\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l EA\left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 dx -\right.$$

$$\left.\left\{\int_0^l \boldsymbol{q}^T\bar{\boldsymbol{d}}\,dx + \sum_i P_i\bar{v}(x_i)\right\}\right) - \sum_j \boldsymbol{F}_{Pd,j}^T\boldsymbol{\delta}_j \qquad (2-18)$$

2-1-3　几点说明

● 单元的虚功方程式(2-9)和单元总势能表达式(2-16)是进行单元分析的理论依据。

● 结构的虚功方程式(2-13)和结构的总势能表达式(2-18)是进行整体分析的理论依据。

● 上述分析仅涉及刚架杆单元(考虑轴向变形的弯曲单元)，至于桁架可以作为刚架的特例(不承受弯曲)；而空间刚架则可以将平面刚架的结果加以扩展而得到。

● 考虑扭转时，虚功方程、总势能表达式与拉(压)时类似。需考虑扭转变形能和外力势能。

§2-2 平面杆系结构单元分析

在矩阵位移法中已经知道，单元分析的目的是为整体分析作准备。所谓单元分析，就是建立单元杆端力和杆端位移之间的关系，也即单元刚度方程。在矩阵位移法中，是利用线弹性小变形情形下叠加原理成立，因此可由形常数和载常数来建立单元刚度方程。在本节里，将介绍用势能原理（当然也可用虚位移原理，限于篇幅，只介绍用势能原理作单元分析）进行单元分析，建立单元刚度方程。为进一步学习打下基础。

单元分析的一般步骤：

● 用广义坐标法或试凑法建立形函数。从而建立满足变形协调的单元位移场，也即单元内任意一点的位移由单元结点位移（对杆件单元为杆端位移）表示。

● 由几何方程建立单元应变场，也即单元内任意一点的应变由结点位移表示。

● 由物理方程建立单元应力场，也即单元内任意一点的应力由结点位移表示。

● 用势能原理建立单元刚度方程，获得单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵。

● 本节按照上述单元分析步骤，根据不同单元的特点，分别介绍平面杆系结构中的八种单元。

2-2-1 拉(压)杆单元

拉(压)杆单元如图 2-4 所示，已知单元长度为 l，横截面面积为 A，材料弹性模量为 E，所受轴向分布荷载集度为 $p(x)$。杆端位移分别为 $\bar{u}_{\bar{1}}$，$\bar{u}_{\bar{2}}$，杆端力分别为 $\bar{F}_{\bar{1}}$，$\bar{F}_{\bar{2}}$。下标$\bar{1}$、$\bar{2}$分别表示单元起点和终点。

1. 建立位移场（位移模式 displacement mode）

局部坐标系下杆中 a 点的坐标为 x，因为只有两个杆端位移（边界）条件 $\bar{u}_{\bar{1}}=\bar{\delta}_1$，$\bar{u}_{\bar{2}}=\bar{\delta}_2$，为用它们表示杆中任一点位移 $\bar{u}$，可假设

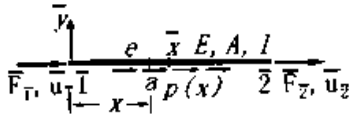


图 2-4 拉压单元

$$\bar{u} = a + bx \tag{a}$$

式中，a、b 为待定常数，也即**广义坐标**。

利用杆端位移(边界)条件，可得

$$a = \bar{\delta}_1, \quad b = \frac{\bar{\delta}_2 - \bar{\delta}_1}{l} \tag{b}$$

将式(b)代回式(a)可得杆轴任意截面处位移为

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\bar{\delta}_1 + \frac{x}{l}\bar{\delta}_2 \tag{2-19a}$$

若引入下列量纲一[①] 变量 ξ，并称为**自然坐标**，

$$\xi = \frac{x}{l} \tag{c}$$

则式(2-19a)可改写为

$$\bar{u} = N_1\bar{\delta}_1 + N_2\bar{\delta}_2 = (N_1 \quad N_2)\begin{pmatrix}\bar{\delta}_1\\ \bar{\delta}_2\end{pmatrix} = \boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{2-19b}$$

$$N_1 = 1 - \xi, \quad N_2 = \xi \tag{2-19c}$$

式中，N_1、N_2 是单位杆端位移引起的单元变形形式，因此称为**形函数**(shape function)，矩阵 $\boldsymbol{N}$ 则称为**形函数矩阵**(shape function matrix)，矩阵 $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$ 称为**单元杆端位移矩阵**。

由式(2-19c)可见，形函数具有如下性质：

● **本端为 1，它端为 0**

$$N_1(0) = 1, \quad N_2(0) = 0$$
$$N_1(1) = 0, \quad N_2(1) = 1$$

● **任意一点总和为 1**

$$N_1(\xi) + N_2(\xi) = 1 \tag{2-20}$$

式(2-19a)即为**单元位移场**。

2. 应变分析

将式(2-19)代入几何方程可得

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = \left(\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x} \quad \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}x}\right)\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = \left(-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right)\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$$
$$= (B_1 \quad B_2)\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{2-21}$$

式中，$\boldsymbol{B}$ 称为**应变矩阵**(strain matrix)。

3. 应力分析

---

① 所有量纲指数为零的量，以往称为无量纲量，但实际上其量纲为 $A^0 = 1$，这种量纲一的量表示为数。

将式(2-21)代入物理方程可得

$$\sigma = E\varepsilon = EB\bar{\delta}^e = E\left(-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right)\bar{\delta}^e \tag{2-22}$$

由此可得单元的应变能 V_ε 为

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^l \sigma\varepsilon A\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \sigma^{\mathrm{T}}\varepsilon A\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\bar{\delta}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}EAB\bar{\delta}^e l \tag{2-23}$$

4. 建立单元刚度方程(单元特性公式)

为用势能原理建立单元刚度方程,根据单元上的荷载,可得单元的外力势能为

$$E_{\mathrm{P}}^* = -(\bar{F}_e^{\mathrm{T}}\bar{\delta}^e + \int_0^l p(x)\bar{u}\mathrm{d}x) = -(\bar{F}_e^{\mathrm{T}} + \int_0^l p(x)N\mathrm{d}x)\bar{\delta}^e \tag{2-24a}$$

由此可得单元总势能为

$$E_{\mathrm{P}} = V_\varepsilon + E_{\mathrm{P}}^* = \frac{1}{2}\bar{\delta}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}EAB\bar{\delta}^e l - (\bar{F}_e^{\mathrm{T}} + \int_0^l p(x)N\mathrm{d}x)\bar{\delta}^e \tag{2-24b}$$

若记局部坐标单元刚度矩阵为 $\bar{k}^e$、单元等效结点荷载为 $\bar{F}_{\mathrm{E}}^e$,且

$$\int_0^l p(x)\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x = \bar{F}_{\mathrm{E}}^e \tag{2-25a}$$

$$\int_0^l \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}EAB\mathrm{d}x = \bar{k}^e \tag{2-25b}$$

则式(2-24b)可表示为

$$(\bar{F}^e + \bar{F}_{\mathrm{E}}^e)^{\mathrm{T}}\bar{\delta}^e = \frac{1}{2}\bar{\delta}_e^{\mathrm{T}}\bar{k}^e\bar{\delta}^e \tag{a}$$

由总势能一阶变分等于零,也即对 $\bar{\delta}^e$ 的偏导数等于零,可得单元刚度方程

$$(\bar{F} + \bar{F}_{\mathrm{E}})^e = \bar{k}^e\bar{\delta}^e \tag{2-26a}$$

式中,单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 因为 $\boldsymbol{B}$ 是常数矩阵,故可得

$$\bar{k}^e = \frac{EA}{l}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2-26b}$$

当单元上受有均布满跨轴向荷载 p 时,由式(2-25a)和式(2-19),可得

$$\bar{F}_{\mathrm{E}}^e = \left(\frac{1}{2}pl \quad \frac{1}{2}pl\right)^{\mathrm{T}} \tag{2-26c}$$

当单元上距$\bar{1}$结点 x_i 处有一集中轴向荷载 F_{P} 作用时,由 $p(x) = F_{\mathrm{P}}\cdot\delta(x - x_i)$可得

$$\bar{F}_{\mathrm{E}}^e = \int_0^l F_{\mathrm{P}}\delta(x - x_i)\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x = \left(F_{\mathrm{P}}\left(1 - \frac{x_i}{l}\right) \quad F_{\mathrm{P}}\frac{x_i}{l}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2-26d}$$

显然，式(2－26)所得结果，与矩阵位移法叠加所得结果完全一致。

2－2－2　扭转杆单元

1．位移模式

扭转杆单元(图 2－5)，与拉(压)杆类比可得任意截面的扭转角为

$$\bar{\theta} = (1-\xi)\bar{\theta}_{\bar{1}} + \xi\bar{\theta}_{\bar{2}} = (1-\xi)\bar{\delta}_1 + \xi\bar{\delta}_2 = \boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{2-27}$$

2．内力与势能

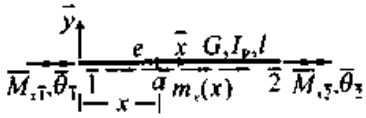


图 2－5　扭转单元

由材料力学可知截面扭矩：

$$M_x = GI_p\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}x} = GI_p\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = GI_p\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \quad \text{(a)}$$

式中，GI_p 为单元扭转刚度，G 为剪切弹性模量，I_p 为截面抗扭极惯性矩。

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x} = \left(-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right) \tag{b}$$

单元的势能为

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^l\left(M_x\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + E_p^* = \frac{1}{2}\int_0^l\left(M_x\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x - \int_0^l m_x(x)\bar{\theta}\mathrm{d}x - \bar{\boldsymbol{F}}_e^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{c}$$

式中，单元杆端力列阵为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e = (\bar{M}_{\bar{1}} \quad \bar{M}_{\bar{2}})_e^{\mathrm{T}} \tag{d}$$

将式(a)、式(b)代入式(c)，可得

$$E_p = \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\delta}}_e^{\mathrm{T}}\int_0^l\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}GI_p\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\bar{\boldsymbol{\delta}}^e - \left(\int_0^l m_x(x)\boldsymbol{N}\mathrm{d}x + \bar{\boldsymbol{F}}_e^{\mathrm{T}}\right)\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{e}$$

3．单元刚度方程

由 $\delta E_p = 0$，可得

$$\int_0^l\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}GI_p\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\bar{\boldsymbol{\delta}}^e - \int_0^l m_x(x)\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x - \bar{\boldsymbol{F}}^e = \boldsymbol{0} \tag{f}$$

或

$$\left(\int_0^l\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}GI_p\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\right)\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = \bar{\boldsymbol{F}}^e + \int_0^l m_x(x)\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x \tag{g}$$

与拉(压)杆单元一样，令局部坐标单元刚度矩阵和单元等效结点荷载为

$$\int_0^l\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}GI_p\boldsymbol{B}\mathrm{d}x = \bar{\boldsymbol{k}}^e \tag{2-28a}$$

$$\int_0^l m_x(x)\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x = \bar{\boldsymbol{F}}_E^e \tag{2-28b}$$

则所得单元刚度方程形式与拉(压)杆单元完全相同，

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{e}\bar{\boldsymbol{\delta}}^{e}=(\bar{\boldsymbol{F}}+\bar{\boldsymbol{F}}_{E})^{e} \tag{2-29a}$$

式中,单元刚度矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{e}=\frac{GI_P}{l}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \tag{2-29b}$$

仿拉压杆单元可得均布扭矩 m_x 作用时

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{E}^{e}=\frac{1}{2}(m_x l \quad m_x l)^{T} \tag{2-29c}$$

集中扭矩 M_e 作用在距$\bar{1}$结点 x_i 处时

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{E}^{e}=M_e\left(1-\frac{x_i}{l} \quad \frac{x_i}{l}\right)^{T} \tag{2-29d}$$

显然,式(2-29)所得结果,与矩阵位移法叠加所得结果完全一致。

2-2-3 弯曲杆单元

本单元如图 2-6 所示,杆端位移为 $\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2,\bar{\delta}_3,\bar{\delta}_4$,其杆端位移边界条件为

$$x=0\text{ 时},\quad \bar{v}=\bar{\delta}_1,\quad \frac{d\bar{v}}{dx}=\bar{\delta}_2$$

$$x=l\text{ 时},\quad \bar{v}=\bar{\delta}_3,\quad \frac{d\bar{v}}{dx}=\bar{\delta}_4$$



图 2-6 弯曲单元

杆端力为 $\bar{F}_1,\bar{F}_2,\bar{F}_3,\bar{F}_4$;$m(x)$为 xy 平面内分布的力偶集度。

1. 位移模式

由于位移边界条件限制,设离$\bar{1}$结点 x 处杆轴挠度为

$$\bar{v}=a+bx+cx^2+dx^3 \tag{a}$$

利用杆端位移条件可求得待定常数如下:

$$\left.\begin{aligned} a&=\bar{\delta}_1,\quad c=-\frac{1}{l^2}\bar{\delta}_1-\frac{2}{l}\bar{\delta}_2+\frac{3}{l^2}\bar{\delta}_3-\frac{1}{l}\bar{\delta}_4\\ b&=\bar{\delta}_2,\quad d=\frac{2}{l^3}\bar{\delta}_1+\frac{1}{l^2}\bar{\delta}_2-\frac{2}{l^3}\bar{\delta}_3+\frac{1}{l^2}\bar{\delta}_4\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

将式(b)代回式(a),可得

$$\bar{v}=(1 \quad x \quad x^2 \quad x^3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \end{Bmatrix}=\boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{2-30}$$

式中，

$$\boldsymbol{N}=(N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4) \tag{2-31a}$$

$$\left.\begin{aligned} N_1&=1-\frac{3x^2}{l^2}+\frac{2x^3}{l^3}, \quad N_2=x\left(1-2\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right) \\ N_3&=\frac{3x^2}{l^2}-\frac{2x^3}{l^3}, \quad\quad N_4=-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2} \end{aligned}\right\} \tag{2-31b}$$

引入量纲一自然坐标

$$\xi=\frac{x}{l} \tag{c}$$

则

$$\left.\begin{aligned} N_1&=1-3\xi^2+2\xi^3, \quad N_2=l\xi(1-\xi)^2 \\ N_3&=\xi^2(3-2\xi), \quad\quad N_4=-l\xi^2(1-\xi) \end{aligned}\right\} \tag{2-32}$$

式(2-32)即为平面弯曲单元的形函数，它们具有如下性质：

$\xi=0$ 处：

$$N_1=1, \quad \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}=0, \quad N_2=0, \quad \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}x}=1$$

$$N_3=0, \quad \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}x}=0, \quad N_4=0, \quad \frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}x}=0 \tag{2-33a}$$

$\xi=1$ 处：

$$N_1=0, \quad \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}=0, \quad N_2=0, \quad \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}x}=0$$

$$N_3=1, \quad \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}x}=0, \quad N_4=0, \quad \frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}x}=1 \tag{2-33b}$$

上述这种利用结点位移条件来确定单元位移场的方法称为**广义坐标法**(generalized coordinate method)。下面介绍另外一种方法——试凑法。所谓**试凑法**(trial and error method)就是利用形函数的性质首先确定形函数，然后利用 $\bar{v}=\boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$ 确定单元位移场。例如确定 N_1 的分析过程如下：

由形函数性质可知，$\xi=1$ 时 $N_1=0$，所以可设：

$$N_1=(1-\xi)f(\xi)$$

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{l}[-f(\xi)+(1-\xi)f'(\xi)]$$

又因为 $\xi=1$ 时应有 $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}=0$，所以必须 $f(\xi)|_{\xi=1}=0$，为此可以设 $f(\xi)=(1-\xi)g(\xi)$。因此，N_1 为

$$N_1=(1-\xi)^2 g(\xi) \tag{d}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{l}[-2(1-\xi)g(\xi)+(1-\xi)^2 g'(\xi)]$$

利用 $\xi=0$ 时 $N_1=1$，可得

$$g(0)=1 \tag{e}$$

再用 $\xi=0$ 时 $\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}=0$，可得

$$-2g(0)+g'(0)=0 \tag{f}$$

为使式(e)、式(f)成立，可取

$$g(\xi)=1+2\xi \tag{g}$$

将式(g)代回式(d)可得 $N_1=(1-\xi)^2(1+2\xi)=1-3\xi^2+2\xi^3$，此结果与广义坐标法完全一样。按此思路不难确定另三个形函数 $N_2\sim N_4$。

2. 单元刚度方程

一经用式(2-30)确定了单元位移场，则

● 曲率 κ 为

$$\kappa=\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x^2}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e=\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{2-34}$$

● 截面弯矩为

$$M=EI\kappa=EI\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e=\bar{\boldsymbol{\delta}}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}EI \tag{2-35}$$

式中，$\boldsymbol{B}$ 矩阵(应变矩阵)为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{l^2}[-6+12\xi l(-4+6\xi)6-12\xi l(-2+6\xi)] \tag{2-36}$$

由上述结果，单元总势能为

$$E_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\delta}}_e^{\mathrm{T}}\int_0^l \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}EI\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\bar{\boldsymbol{\delta}}^e-\left(\int_0^l q(x)\boldsymbol{N}\mathrm{d}x+\int_0^l m(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\bar{\boldsymbol{F}}_e^{\mathrm{T}}\right)\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$$

记局部坐标单元刚度矩阵和单元等效结点荷载为

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e=\int_0^l \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}EI\boldsymbol{B}l\mathrm{d}\xi \tag{2-37}$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e=l\left(\int_0^l q(l\xi)\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\xi+\int_0^l m(l\xi)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\xi\right) \tag{2-38}$$

由势能原理再次得到形式完全相同的单元刚度方程

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e=(\bar{\boldsymbol{F}}+\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}})^e \tag{2-39a}$$

将式(2-36)代入式(2-37)并积分，可得弯曲杆单元单元刚度矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e=\frac{EI}{l^3}\begin{pmatrix}12 & & \text{对} & \\ 6l & 4l^2 & & \text{称} \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{pmatrix} \tag{2-39b}$$

由式(2－37)在已知荷载分布规律情况下积分，可得

均布横向荷载 q 作用：$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^{e}=\left(\frac{1}{2}ql \quad \frac{1}{12}ql^2 \quad \frac{1}{2}ql \quad -\frac{1}{12}ql^2\right)^{\mathrm{T}}$　(2－39c)

均布力偶荷载 m 作用：$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^{e}=\left(\frac{ml}{2} \quad 0 \quad \frac{ml}{2} \quad 0\right)^{\mathrm{T}}$　(2－39d)

距$\bar{1}$结点 x_i 处集中力 F_{P} 作用：

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^{e}=F_{\mathrm{P}}\left[1-3\left(\frac{x_i}{l}\right)^2+2\left(\frac{x_i}{l}\right)^3 \quad x_i(1-x_i)^2 3\left(\frac{x_i}{l}\right)^2-2\left(\frac{x_i}{l}\right)^3 \quad -\frac{x_i^2}{l}\left(1-\frac{x_i}{l}\right)\right]^{\mathrm{T}} \tag{2-40a}$$

当 $x_i=\frac{l}{2}$时，$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^{e}=F_{\mathrm{P}}\left(\frac{1}{2} \quad \frac{l}{8} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{l}{8}\right)^{\mathrm{T}}$　(2－40b)

距$\bar{1}$结点 x_i 处集中力偶 M 作用：

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^{e}=M\left(-\frac{6x_i}{l^2}+\frac{6x_i^2}{l^3} \quad 1-\frac{4x_i}{l}+\frac{3x_i^2}{l^2} \quad \frac{6x_i}{l^2}+\frac{6x_i^2}{l^3} \quad -\frac{2x_i}{l}+\frac{3x_i^2}{l^2}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2-40c}$$

当 $x_i=\frac{l}{2}$时，$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^{e}=M\left(-\frac{3}{2l} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{3}{2l} \quad -\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$　(2－40d)

显然，式(2－29)和式(2－40)的结果，与矩阵位移法叠加所得结果也是完全一致的。

2－2－4　考虑轴向变形的弯曲单元——平面自由式单元

考虑轴向变形的弯曲单元如图 2－7 所示，其杆端位移矩阵和杆端力矩阵分别为

$\bar{\boldsymbol{\delta}}^{e}=(\bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2 \quad \bar{\delta}_3 \quad \bar{\delta}_4 \quad \bar{\delta}_5 \quad \bar{\delta}_6)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{F}}^{e}=(\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3 \quad \bar{F}_4 \quad \bar{F}_5 \quad \bar{F}_6)^{\mathrm{T}}$

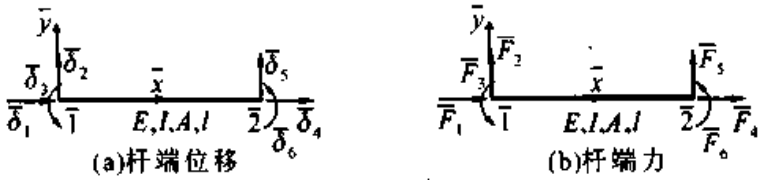


图 2－7　单元杆端位移和杆端力

1．位移模式

综合 2－2－1 小节和 2－2－3 小节位移场分析，可得单元内任一点的位移为

$$\bar{\boldsymbol{d}}=\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}N_{u1} & 0 & 0 & N_{u2} & 0 & 0\\ 0 & N_{v1} & N_{v2} & 0 & N_{v3} & N_{v4}\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\delta}}^{e}=\boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\delta}}^{e} \quad (2-41)$$

式中，N_{ui}为2-2-1小节式(2-19c)所示的形函数；N_{vi}为2-2-3小节式(2-31b)所示的形函数。

2. 单元特性

有了单元位移场，仿前几小节的分析，由式(2-16)即可建立平面自由式单元的单元刚度方程，从而获得自由式单元的单元刚度矩阵和等效结点荷载矩阵。建议读者自行练习推导。

考虑到轴向应变能和弯曲应变能相互独立，外力势能也不耦联。因此式(2 26)和式(2-39)单元特性公式仍然成立。也就是

拉(压)杆单元：
$$\bar{\boldsymbol{k}}_{u}^{e}\begin{pmatrix}\bar{\delta}_1\\ \bar{\delta}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{F}_1\\ \bar{F}_4\end{pmatrix}+\bar{\boldsymbol{F}}_{Eu}^{e} \quad (2-42)$$

不计轴向变形弯曲单元：
$$\bar{\boldsymbol{k}}_{v}^{e}\begin{pmatrix}\bar{\delta}_2\\ \bar{\delta}_3\\ \bar{\delta}_5\\ \bar{\delta}_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{F}_2\\ \bar{F}_3\\ \bar{F}_5\\ \bar{F}_6\end{pmatrix}+\bar{\boldsymbol{F}}_{Ev}^{e} \quad (2-43)$$

在此基础上，考虑到位移的排列顺序，不难得到平面自由式单元的单元刚度矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{e}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\ & & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ \text{对} & & & & & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix}\quad \text{称} \quad (2-44)$$

等效结点荷载为

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{E}^{e}=(\bar{F}_{E,1}^{u} \quad \bar{F}_{E,1}^{v} \quad \bar{F}_{E,2}^{v} \quad \bar{F}_{E,2}^{u} \quad \bar{F}_{E,3}^{v} \quad \bar{F}_{E,4}^{v})^{T} \quad (2-45)$$

式中，$\bar{F}_{E,i}^{u}$为拉(压)杆单元等效结点荷载元素，$\bar{F}_{E,i}^{v}$为不计轴向变形弯曲单元等效结点荷载元素。

单元刚度方程仍为

$$\bar{k}'\bar{\delta}' = (\bar{F} + \bar{F}_E)' \tag{2-46}$$

显然，式(2－44)～式(2－46)的结果，与矩阵位移法叠加所得结果也是完全一致的。

2－2－5　有约束的单元

在结构分析中除要用上述自由式单元外，还要用到一些特殊单元，单元的某个或某些杆端位移值是受约束或非独立的。这类单元称为**有约束单元**。这些“特殊单元”的刚度方程无须另行推导，只须对自由式单元刚度方程作一些处理便可得到。

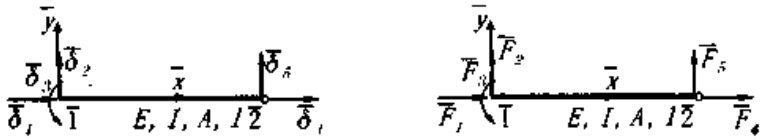
1．连续梁单元

相对自由单元，连续梁单元只有两个杆端位移分量 $\bar{\delta}_3$，$\bar{\delta}_6$，而其余四个分量均为零。将单元结点转角排成 $\bar{\delta}'$，则其单元刚度矩阵可从自由式单元刚度矩阵删去第 1、2、4、5 行和列后得出。也即

$$\bar{k}' = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{l} & \dfrac{2EI}{l} \\ \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{2-47}$$

2．一端刚结一端铰结单元

一端刚结一端铰结单元杆端力与杆端位移，如图 2－8 所示。由于铰结点处 $\bar{F}_6 = 0$，所以 $\bar{\delta}_6$ 不再是独立的位移分量，可从第六个刚度方程展开式用 $\bar{\delta}_2$，$\bar{\delta}_3$，$\bar{\delta}_5$ 表示，再将其代入其他方程，便可得到该单元的单元刚度矩阵为



(a)杆端位移　　(b)杆端力

图 2－8　一端刚结一端铰结单元

$$\bar{k}' = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & 0 & 0 & -\dfrac{EA}{l} & 0 \\ & \dfrac{3EI}{l^3} & \dfrac{3EI}{l^2} & 0 & -\dfrac{3EI}{l^3} \\ & & \dfrac{3EI}{l} & 0 & -\dfrac{3EI}{l^2} \\ & \text{对} & & \dfrac{EA}{l} & 0 \\ & & \text{称} & & \dfrac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \tag{2-48}$$

由于单元刚度矩阵和矩阵位移法所介绍的由叠加原理所得的刚度矩阵完全一致，因此也可通过一端刚结一端铰结梁的转角位移方程来得到同样结果。

此类单元等效结点荷载矩阵第 i 个元素，可按下式计算，

$$\bar{F}_{E,i} = \bar{F}^6_{E,i} - \bar{F}^6_i \times \bar{F}^6_6 / \bar{k}_{66} \tag{2-49}$$

式中，上标 6 表示自由式单元的等效结点荷载。也可利用 $\bar{F}'_E = -\bar{F}^F_i$ 的概念，由一端刚结一端铰结梁的固端力来得到。

2-2-6 考虑剪切时的自由式单元

前面所讨论的自由式单元，仅考虑了杆件的轴向变形和弯曲变形，而没有考虑剪切变形的影响。对于一般的梁式杆结构，剪切变形的影响可以忽略。但当杆件的截面高度与杆长的比值较大（例如将高层结构剪力墙简化成杆件作近似分析）时，则剪切变形的影响较大，不能忽略。

因为按有限元分析所得到的单元刚度矩阵和由单跨梁形常数叠加得到的完全一样，因此由力法求解单跨梁可知，单元两端分别产生轴向单位位移 $\bar{\delta}_1 = 1$，$\bar{\delta}_4 = 1$ 时，考虑剪切变形与否，相应的单元刚度系数并无变化，也即剪切变形不引起轴向力的变化。而当单元两端分别产生竖向单位位移 $\bar{\delta}_2 = 1$、$\bar{\delta}_5 = 1$ 时。以及单位转角 $\bar{\delta}_3 = 1$、$\bar{\delta}_6 = 1$ 时，考虑剪切变形影响后，相应的单元刚度系数将发生变化。图 2-9 给出了单元$\overline{1}$结点分别产生单位位移时的杆端力，对$\overline{2}$结点可同样处理。

图 2-9 中的 $\beta = \dfrac{12EIk}{GAl^2}$，其中 k 为横截面上切应力分布不均匀系数，对于矩形截面 $k = 1.2$，圆形截面 $k = 10/9$。

将自由式单元刚度矩阵式(2-44)中的元素进行修改，可得出考虑剪切变形影响时的单元刚度矩阵：

$$\bar{k}' = \begin{bmatrix} \dfrac{EI}{l} & 0 & 0 & -\dfrac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \dfrac{12}{1+\beta}\dfrac{EI}{l^3} & \dfrac{6}{1+\beta}\dfrac{EI}{l^2} & 0 & -\dfrac{12}{1+\beta}\dfrac{EI}{l^3} & \dfrac{6}{1+\beta}\dfrac{EI}{l^2} \\ & & \dfrac{4+\beta}{1+\beta}\dfrac{EI}{l} & 0 & -\dfrac{6}{1+\beta}\dfrac{EI}{l^2} & \dfrac{2-\beta}{1+\beta}\dfrac{EI}{l} \\ & \text{对} & & \dfrac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \dfrac{12}{1+\beta}\dfrac{EI}{l^3} & -\dfrac{6}{1+\beta}\dfrac{EI}{l^2} \\ & & \text{称} & & & \dfrac{4+\beta}{1+\beta}\dfrac{EI}{l} \end{bmatrix} \tag{2-50}$$

式(2－50)中当 $\beta=0$ 时，式(2－50)便退化为式(2－44)。如果单元上有荷载作用，其固端力也需在考虑剪切变形条件下由力法重新解得(见表 2－1)。然后根据 $\bar{F}_E^e=-\bar{F}_f^F$，获得单元等效荷载。

上述这种单元的单元特性也完全可用有限元方法建立。此时势能原理中，要包含剪切变形应变能。

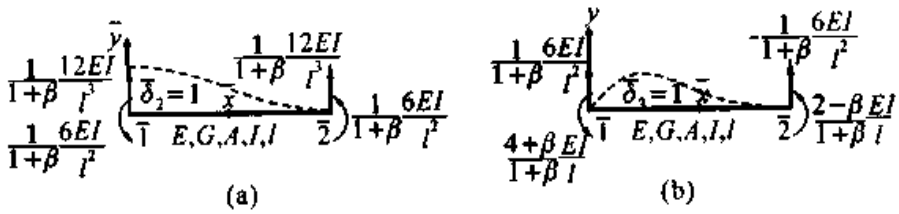
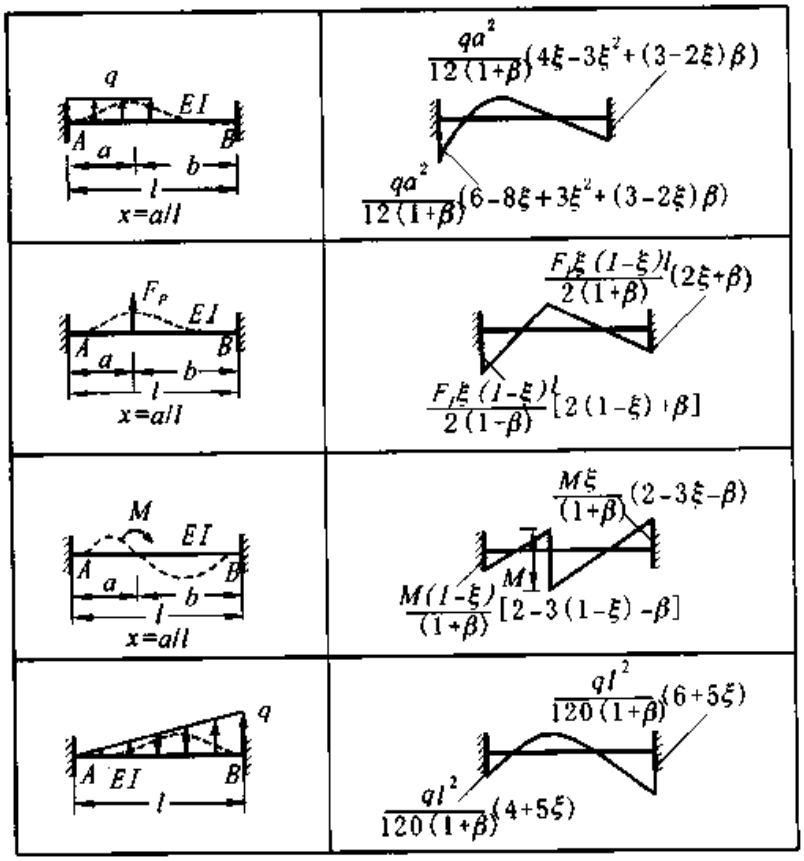


图 2－9　计剪切变形单元单位位移引起的杆端力

表 2－1　考虑剪切变形影响时的单元固端力



2－2－7　有刚域单元

工程中，当杆件的截面尺寸相对于杆件的长度较大时，杆件结合区尺寸也较大，因此，不能忽略杆件结合区刚度增大的影响。比较合理的处理方法是将各杆端进入结合区的一段杆视为刚性段，其抗弯刚度 EI 为无限大，称

为**刚域**(rigidity range),如图 2-10a、b 所示。

1. 单元分析基本思想

将具有刚域的杆件作为一个单元,首先建立单元杆端位移(杆端力)和弹性段杆端位移(杆端力)之间的转换关系,然后利用转换关系,由弹性段的刚度方程推出具有刚域单元的刚度矩阵和等效结点荷载。

2. 转换关系

图 2-10c 为具有刚域单元杆端位移示意图,图 2-10d 为该单元弹性杆段的杆端位移示意图。

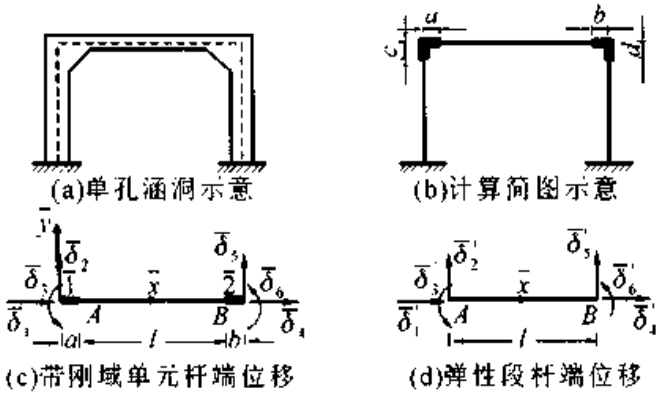


图 2-10 具有刚域的结构及单元

由几何关系可得如下位移协调关系

$$\begin{aligned}&\bar{\delta}'_1=\bar{\delta}_1,\quad \bar{\delta}'_2=\bar{\delta}_2+a\bar{\delta}_3,\quad \bar{\delta}'_3=\bar{\delta}_3\\&\bar{\delta}'_4=\bar{\delta}_4,\quad \bar{\delta}'_5=\bar{\delta}_5-b\bar{\delta}_6,\quad \bar{\delta}'_6=\bar{\delta}_6\end{aligned}\tag{2-51a}$$

写成矩阵形式为

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}''=\begin{bmatrix}1 & & & & 0 & \\ & 1 & a & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & -b\\ & 0 & & & & 1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\delta}}'\tag{2-51b}$$

或

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}''=\boldsymbol{T}_{\mathrm{d}}\bar{\boldsymbol{\delta}}'\tag{2-52}$$

式中,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{d}}$ 为**位移转换矩阵**(displacement transformation matrix)。

图 2-11a 给出了弹性杆杆端力示意图,图 2-11b 为刚域的受力图。



(a)弹性段杆端力　　(b)刚域受力图

图 2-11　带刚域单元受力示意

由平衡方程可得

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \bar{F}'_1, \quad \bar{F}_2 = \bar{F}'_2, \quad \bar{F}_3 = \bar{F}'_3 + \bar{F}'_2 a \\ \bar{F}_4 &= \bar{F}'_4, \quad \bar{F}_5 = \bar{F}'_5, \quad \bar{F}_6 = \bar{F}'_6 - \bar{F}'_5 b \end{aligned} \tag{2-53a}$$

写成矩阵的形式：

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & a & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & -b & 1 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{F}}'^e \tag{2-53b}$$

或

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e = \boldsymbol{T}_d^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{F}}'^e \tag{2-54}$$

如果弹性段上有荷载作用，则不难理解下式也是成立的，

$$(\bar{\boldsymbol{F}} + \bar{\boldsymbol{F}}_E)^e = \boldsymbol{T}_d^{\mathrm{T}} (\bar{\boldsymbol{F}}' + \bar{\boldsymbol{F}}'_E)^e \tag{2-55}$$

3. 单元刚度方程

设弹性段单元刚度方程为

$$(\bar{\boldsymbol{F}}' + \bar{\boldsymbol{F}}'_E)^e = \bar{\boldsymbol{k}}'^e \bar{\boldsymbol{\delta}}'^e \tag{2-56}$$

由式(2-55)，可得

$$(\bar{\boldsymbol{F}} + \bar{\boldsymbol{F}}_E)^e = \boldsymbol{T}_d^{\mathrm{T}} (\bar{\boldsymbol{F}}' + \bar{\boldsymbol{F}}'_E)^e = \boldsymbol{T}_d^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{k}}'^e \bar{\boldsymbol{\delta}}'^e \tag{2-57}$$

再引入位移转换关系，可得

$$(\bar{\boldsymbol{F}} + \bar{\boldsymbol{F}}_E)^e = \boldsymbol{T}_d^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{k}}'^e \bar{\boldsymbol{\delta}}'^e = \boldsymbol{T}_d^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{k}}' \boldsymbol{T}_d \bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{2-58}$$

上式即为具有刚域单元的单元刚度方程。

记 $\bar{\boldsymbol{k}}^e = \boldsymbol{T}_d^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{k}}'^e \boldsymbol{T}_d$，$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 即为具有刚域单元的刚度矩阵，其展开式为

$$\bar{k}^e=\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\left(1+\frac{2a}{l}\right) & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\left(1+\frac{2b}{l}\right)\\
 & & \frac{4EI}{l}\left(1+\frac{3a}{l}+\frac{3a^2}{l^2}\right) & 0 & -\frac{6EI}{l^2}\left(1+\frac{2a}{l}\right) & \frac{2EI}{l}\left(1+\frac{3a}{l}+\frac{3b}{l}+\frac{6ab}{l^2}\right)\\
 & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\
 & \text{对} & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\left(1+\frac{2b}{l}\right) & \\
 & & & \text{称} & & \frac{4EI}{l}\left(1+\frac{3b}{l}+\frac{3b^2}{l^2}\right)
\end{bmatrix} \tag{2-59}$$

§2-3 空间杆系结构单元分析

实际工程多为空间杆系结构，因此用有限元方法借助计算机进行空间杆系结构的受力、变形分析，当然比简化成平面杆系结构更精确。本节介绍了三种常用空间结构的单元，用叠加法给出单元特性表达式。

2-3-1 交叉梁单元

建筑结构中井式楼盖具有美观和能提供大空间的优点，因而在很多工程中采用。这种结构是由起支承作用的交叉梁系和楼面板组成，交叉梁系又称为网格梁结构或格栅结构。交叉梁系在两个方向均布置有截面相同、相互起支承作用的梁，从而发挥其最大效能，以获得较大的使用空间。

交叉梁系所有杆件都位于同一平面内，各杆之间为刚性连接，杆件主要承受弯曲和扭转变形。交叉梁系与平面刚架最主要的区别在于荷载的作用平面不同。作用在交叉梁上的外力垂直于结构平面，外力偶矢量位于结构平面。分析时一般不考虑轴向变形。

在建立单元局部坐标系时，通常选取交叉梁系的自身平面为$\overline{xy}$面，$\bar{x}$轴沿杆轴方向，$\bar{z}$轴垂直于结构平面，交叉梁单元在局部坐标系下的杆端位移与杆端力如图2-12所示。

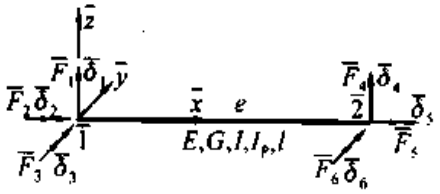


图2-12 交叉梁单元杆端位移与杆端力

与平面等直杆问题2-2-4小节一样，交叉梁单元杆端位移与杆端力关系（即单元刚度方程）可按单元分析一般方法建立。但是，也可像平面自由式单元一样，因弯曲和扭转互相独

立，故由不计轴向变形的弯曲单元和扭转单元相组合，即可获得单元刚度方程，

$$(\bar{F}+\bar{F}_E)^e=\bar{k}^e\bar{\delta}^e \tag{2-60a}$$

其中，

$$\bar{k}^e=\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \\ & \frac{GI_P}{l} & 0 & 0 & -\frac{GI_P}{l} & 0 \\ & & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} \\ & 对 & & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ & & & & \frac{GI_P}{l} & 0 \\ & & & 称 & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{2-60b}$$

单元等效结点荷载 $\bar{F}_E^e=(\bar{F}_{E1}\quad\cdots\quad\bar{F}_{E6})^T$，可由扭转和不计轴向变形的弯曲单元等效结点荷载组合得到：

由扭转单元得 $\bar{F}_{E2}$ 和 $\bar{F}_{E5}$；

由弯曲单元得 $\bar{F}_{E1}$，$\bar{F}_{E3}$，$\bar{F}_{E4}$，$\bar{F}_{E6}$。

需要注意的是：杆端位移、杆端力的排列顺序不同，式(2-60b)元素排列也将不同。

2-3-2　空间桁架单元

在实际工程中，网架、钢结构电视塔、输变电塔等结构都是空间桁架。同平面桁架一样，空间桁架单元也只考虑轴向变形，即只承受轴向力。因此局部坐标系下单元的杆端力与杆端位移的关系(单元刚度方程)与平面桁架单元完全相同。也即

$$\begin{pmatrix}\bar{F}_1\\ \bar{F}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l}\\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\delta}_1\\ \bar{\delta}_2\end{pmatrix} \tag{2-61a}$$

或

$$\bar{F}^e=\bar{k}^e\bar{\delta}^e \tag{2-61b}$$

$\bar{k}^e$ 为空间桁架单元局部坐标系下的单元刚度矩阵。因为空间桁架单元每个结点有三个方向的线位移，所以 $\bar{k}^e$ 也可写成 6×6 的形式，但只有下标为 11、44 的元素为 $\frac{EA}{l}$，下标为 14，41 的元素为 $-\frac{EA}{l}$，其他均为零。

2-3-3 空间刚架单元

图 2-13 为空间刚架自由式单元示意图，单元的局部坐标系 $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 为右手系，原点设置在单元$\bar{1}$端，形心轴为 $\bar{x}$ 轴，单元横截面的两个惯性主轴分别取为 $\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 轴。

在局部坐标系下，单元每个杆端有 6 个杆端位移和杆端力如图所示。

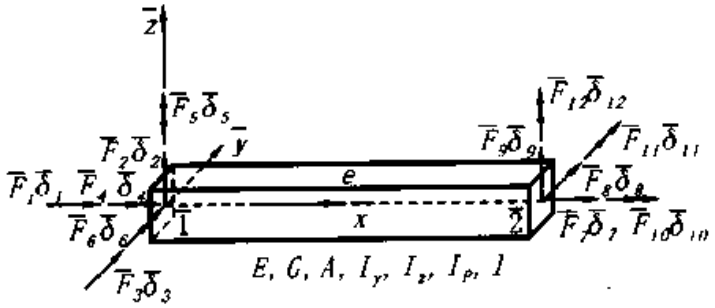


图 2-13 空间刚架单元杆端位移、杆端力

单元杆端力与杆端位移矩阵如下：

$$\left.\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{F}}^e &= (\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3 \quad \bar{F}_4 \quad \bar{F}_5 \quad \bar{F}_6 \quad \bar{F}_7 \quad \bar{F}_8 \quad \bar{F}_9 \quad \bar{F}_{10} \quad \bar{F}_{11} \quad \bar{F}_{12})^{\mathrm{T}} \\ \bar{\boldsymbol{\delta}}^e &= (\bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2 \quad \bar{\delta}_3 \quad \bar{\delta}_4 \quad \bar{\delta}_5 \quad \bar{\delta}_6 \quad \bar{\delta}_7 \quad \bar{\delta}_8 \quad \bar{\delta}_9 \quad \bar{\delta}_{10} \quad \bar{\delta}_{11} \quad \bar{\delta}_{12})^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{2-62}$$

设单元轴向拉压刚度为 EA，扭转刚度为 GI_ρ，在 $\bar{x}\bar{y}$ 平面内的弯曲刚度为 EI_z，在 $\bar{x}\bar{z}$ 平面内的弯曲刚度为 EI_y。

同交叉梁讨论一样，因为拉压、扭转和双向弯曲互不耦联，从而可由拉压、扭转和两个方向的弯曲单元根据位移编号顺序通过组合来建立杆端力与杆端位移的关系式，无荷载作用下的单元刚度方程为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e = \bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{2-63a}$$

式中，

$\bar{\boldsymbol{k}}^e$ 即为空间刚架局部坐标系下的单元刚度矩阵；

当杆上有荷载作用时，空间刚架单元的单元等效结点荷载 $\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e$ 也可由相应单元等效结点荷载的元素组合得到：

由拉压杆得 $\bar{F}_{\mathrm{E1}}$、$\bar{F}_{\mathrm{E7}}$；

由扭转单元得 $\bar{F}_{\mathrm{E4}}$、$\bar{F}_{\mathrm{E10}}$；

由 $\bar{x}\bar{z}$ 面内的弯曲单元得 $\bar{F}_{\mathrm{E3}}$、$\bar{F}_{\mathrm{E5}}$、$\bar{F}_{\mathrm{E9}}$、$\bar{F}_{\mathrm{E11}}$；

由 $\bar{x}\bar{y}$ 面内的弯曲单元得 $\bar{F}_{\mathrm{E2}}$、$\bar{F}_{\mathrm{E6}}$、$\bar{F}_{\mathrm{E8}}$、$\bar{F}_{\mathrm{E12}}$。

$$\bar{k}' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ & & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ & & & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{l} & 0 \\ & & & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ & & & & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{对} & & & & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ & & & & & & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 \\ & & & & & \text{称} & & & & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \tag{2-63b}$$

§2-4 杆系结构单元刚度矩阵子程序

用有限单元法作结构分析都是通过计算机来实现的，也即需用电算而不是手算。因此，要把有限元法的有关公式用计算机语言编成程序，通过计算机计算来求解问题。限于篇幅，本节仅以杆系结构单元刚度矩阵为例，用ELF-90语言编成子程序，从而实现了理论公式的计算机语言化，为下一步工作做好准备。

2-4-1 一些公共的自定义部分

```
MODULE EXA        ! 一个公共模块，名为
EXA
  IMPLICIT NONE
! 自定义结点类型
  TYPE :: DIM3-JOINT      ! 三维结点
!    自由度
    INTEGER :: GOF(6)
!    结点坐标
    REAL(8) :: X,Y,Z
  END TYPE DIM3-JOINT
! 自定义单元荷载信息
  TYPE :: EL-LOAD
```

```
!    单元和位移编号
     INTEGER :: ELEMENT-NO,DISP-NO
!    荷载值和作用位置距离
     REAL(8) :: LOAD-VALUE,SPACE
   END TYPE EL-LOAD
!自定义单元信息
   TYPE :: EL-INFORMAT
!    单元结点号
     INTEGER :: JOINT-NO(2)
!    定义两端结点
     TYPE(DIM3-JOINT) :: NODE(2)
!    单元材料和几何特性
     REAL(8) :: E,A,G,J,GC,IY,IZ
   END TYPE EL-INFORMAT
!定义单元动态数组
!定义单元荷载动态分配二维数组
   TYPE(EL-LOAD),ALLOCATABLE :: EL-
LOAD-INF(:,:)
!定义单元信息动态分配一维数组
   TYPE(EL-INFORMAT),ALLOCATABLE
:: EL-INF(:)
   PUBLIC :: .....
Contains
.....
END MODULE EXA
```

2-4-2 单元刚度矩阵(局部坐标系)子程序的源程序

```
! * * * * * * * * * * * * * * * * * *
! * *计算各类杆件单元局部单刚子程序* *
! * * * * * * * * * * * * * * * * * *
!本子程序包含如下各种单元
!ITYPE=1  平面桁架; ITYPE=2  空间桁
架;
!ITYPE=3  连续梁;  ITYPE=4  刚结梁
单元;
!ITYPE=5  左铰右固梁单元;ITYPE=6
右铰左固梁单元;
!ITYPE=7  交叉梁单元;ITYPE=8  空间
梁单元;
!子程序形残的含义如下
!IELEM  当前单元号
!EL-INF为自定义单元信息,包含以下内容:
!   E单元弹性模量;A  单元截面面积; G
剪切模量;
!   J 极惯性矩;  GC  单元长度; IY  对
Y轴惯性矩;
!(E)IZ  对Z轴惯性矩;
!DK  单元刚度矩阵;
!
    SUBROUTINE EL-STIF1(ITYPE,DK,
IELEM,EL-INF)
!       该子程序被 STUC-STIF 和 END-
FORCES子程序调用
      IMPLICIT NONE
!     子程序入口参数
      INTEGER,INTENT(IN) :: ITYPE,
IELEM
      TYPE(EL-INFORMAT),INTENT(IN)
:: EL-INF(:)
!     子程序出口参数
      REAL(8),INTENT(OUT) :: DK(:,:)
!     子程序工作变量
      REAL(8) :: E,A0,BL,YI,ZI,GP,S1,
S2
!     DK阵清零
      DK=0.0
      BL=EL-INF(IELEM)%GC   !  取
出单元长度
      E=EL-INF(IELEM)%E     !  弹性
模量
      SELECT CASE(ITYPE)    !  根据单
元类型号选择
        CASE(1)
!       ITYPE=1  平面桁架
!       提取单元信息
        A0=E*EL-INF(IELEM)%A/BL
!       赋值
```

```
      DK(1,1) = A0
      DK(3,3) = A0
      DK(1,3) = - A0
      DK(3,1) = - A0
    CASE (2)
!     ITYPE=2  空间桁架;
!     提取单元信息
      A0 = E * EL-INF(IELEM) % A/BL
!     赋值
      DK(1,1) = A0
      DK(4,4) = A0
      DK(1,4) = - A0
      DK(4,1) = - A0
    CASE (3)
!     ITYPE=3  连续梁
!     提取单元信息
      ZI = E * EL-INF(IELEM) % IZ/BL
!     赋值
      DK(1,1) = 4. * ZI
      DK(2,2) = DK(1,1)
      DK(1,2) = 2. * ZI
      DK(2,1) = DK(1,2)
    CASE (4)
!     ITYPE=4  刚结梁单元
!     提取单元信息
      A0 = E * EL-INF(IELEM) % A/BL
      ZI = E * EL-INF(IELEM) % IZ/BL
!     计算,形成 EA/L 项元素
      DK(1,1) = A0
      DK(4,1) = - A0
      DK(1,4) = - A0
      DK(4,4) = A0
!     计算,形成 EI/L 项元素
      DK(3,3) = 4.0 * ZI
      DK(6,6) = 4.0 * ZI
      DK(6,3) = 2.0 * ZI
      DK(3,6) = 2.0 * ZI
!     计算,形成 6 * EI/L/L 项元素
      S1 = 6.0 * ZI/BL
      DK(2,3) = S1
      DK(3,2) = S1
      DK(2,6) = S1
      DK(6,2) = S1
      DK(3,5) = - S1
      DK(5,3) = - S1
      DK(6,5) = - S1
      DK(5,6) = - S1
!     计算,形成 12 * EI/L/L/L 项元素
      S1 = 2.0 * S1/BL
      DK(2,2) = S1
      DK(5,2) = - S1
      DK(2,5) = - S1
      DK(5,5) = S1
    CASE (5)
!     ITYPE=5  左铰右固梁单元
!     提取单元信息
      A0 = E * EL-INF(IELEM) % A/BL
      ZI = E * EL-INF(IELEM) % IZ/BL
!     计算,形成 EA/L 项元素
      DK(1,1) = A0
      DK(3,1) = - A0
      DK(1,3) = - A0
      DK(3,3) = A0
      DK(5,5) = 3.0 * ZI
!     计算,形成 3 * EI/L/L 项元素
      S1 = 3.0 * ZI/BL
      DK(2,5) = S1
      DK(5,2) = S1
      DK(5,4) = - S1
      DK(4,5) = - S1
!     计算,形成 3 * EI/L/L/L 项元素
      S1 = S1/BL
      DK(2,2) = S1
      DK(4,2) = - S1
      DK(2,4) = - S1
      DK(4,4) = S1
    CASE (6)
!     ITYPE=6  右铰左固梁单元;
!     提取单元信息
      A0 = E * EL-INF(IELEM) % A/BL
      ZI = E * EL-INF(IELEM) % IZ/BL
!     计算,形成 EA/L 项元素
```

```
      DK(1,1) = A0
      DK(4,1) = - A0
      DK(1,4) = - A0
      DK(4,4) = A0
      DK(3,3) = 3.0 * ZI
!     计算,形成 3 * EI/L/L 项元素
      S1 = 3.0 * ZI/BL
      DK(2,3) = S1
      DK(3,2) = S1
      DK(3,5) = - S1
      DK(5,3) = - S1
!     计算,形成 3 * EI/L/L/L 项元素
      S1 = S1/BL
      DK(2,2) = S1
      DK(5,2) = - S1
      DK(2,5) = - S1
      DK(5,5) = S1
    CASE (7)
!     ITYPE = 7  交叉梁单元
!     提取单元信息
      GP = EL-INF(IELEM) % G * EL-INF
(IELEM) % J/BL
      ZI = E * EL-INF(IELEM) % IZ/BL
!     计算,形成 GJ/L 项元素
      DK(2,2) = GP
      DK(5,2) = - GP
      DK(2,5) = - GP
      DK(5,5) = GP
!     计算,形成 EI/L 项元素
      DK(3,3) = 4.0 * ZI
      DK(6,6) = 4.0 * ZI
      DK(6,3) = 2.0 * ZI
      DK(3,6) = 2.0 * ZI
!     计算,形成 6 * EI/L/L 项元素
      S1 = 6.0 * ZI/BL
      DK(3,4) = S1
      DK(4,3) = S1
      DK(4,6) = S1
      DK(6,4) = S1
      DK(3,1) = - S1
      DK(1,3) = - S1
      DK(6,1) = - S1
      DK(1,6) = - S1
!     计算,形成 12 * EI/L/L/L 项元素
      S1 = 2.0 * S1/BL
      DK(1,1) = S1
      DK(4,1) = - S1
      DK(1,4) = - S1
      DK(4,4) = S1
    CASE (8)
!     ITYPE = 8  空间梁单元;
!     提取单元信息
      A0 = E * EL-INF(IELEM) % A/BL
      ZI = E * EL-INF(IELEM) % IZ/BL
      GP = EL-INF(IELEM) % G * EL-INF
(IELEM) % J/BL
      YI = E * EL-INF(IELEM) % IY/BL
!     计算,形成 EA/L 项元素
      DK(1,1) = A0
      DK(7,1) = - A0
      DK(1,7) = - A0
      DK(7,7) = A0
!     计算,形成 GJ/L 项元素
      DK(4,4) = GP
      DK(10,4) = - GP
      DK(4,10) = - GP
      DK(10,10) = GP
!     计算,形成 EIy/L 项元素
      DK(5,5) = 4.0 * YI
      DK(11,11) = 4.0 * YI
      DK(11,5) = 2.0 * YI
      DK(5,11) = 2.0 * YI
!     计算,形成 EIz/L 项元素
      DK(6,6) = 4.0 * ZI
      DK(12,12) = 4.0 * ZI
      DK(12,6) = 2.0 * ZI
      DK(6,12) = 2.0 * ZI
!     计算,形成 6 * EIy/L/L 项元素
      S1 = 6.0 * YI/BL
      DK(5,9) = S1
      DK(9,5) = S1
      DK(9,11) = S1
```

```
      DK(11,9) = S1
      DK(3,5) = - S1
      DK(5,3) = - S1
      DK(3,11) = - S1
      DK(11,3) = - S1
!     计算,形成 6 * EIz/L/L 项元素
      S2 = 6.0 * ZI/BL
      DK(2,6) = S2
      DK(6,2) = S2
      DK(2,12) = S2
      DK(12,2) = S2
      DK(6,8) = - S2
      DK(8,6) = - S2
      DK(8,12) = - S2
      DK(12,8) = - S2
!     计算,形成 12 * EIy/L/L/L 项元素
      S1 = 2.0 * S1/BL
      DK(3,3) = S1
      DK(3,9) = - S1
      DK(9,3) = - S1
      DK(9,9) = S1
!     计算,形成 12 * EIz/L/L/L 项元素
      S2 = 2.0 * S2/BL
      DK(2,2) = S2
      DK(8,2) = - S2
      DK(2,8) = - S2
      DK(8,8) = S2
    CASE DEFAULT
      WRITE (9,"('单元',I5,'类型错误')") IELEM
  END SELECT
  RETURN
END SUBROUTINE EL-STIF1
```

§2-5 结论与讨论

2-5-1 本章结论

● 杆件单元虚位移原理虚功方程为(不考虑剪切变形)

$$\delta W_e^* = \bar{\boldsymbol{F}}_e^{\mathrm{T}}\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}^* + \int_0^l \left[\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\delta\bar{\boldsymbol{d}} + \sum_{i=1}^{n} P_i\delta(x - x_i)\cdot\delta\bar{v} \right] \mathrm{d}x \quad (2-9a)$$

$$\delta W_i^* = \int_0^l [N\delta\varepsilon + M\delta k]\,\mathrm{d}x \quad (2-9b)$$

$$\delta W_e^* = \delta W_i^* \quad (2-9c)$$

单元势能表达式为

$$E_P^* = V_e^* + E_{P,e}^* = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EI\left(\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + EA\left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \right]\mathrm{d}x - \left| \int_0^l \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{d}}\,\mathrm{d}x + \sum_i P_i\bar{v}(x_i) \right| - \bar{\boldsymbol{F}}_e^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\delta}}^* \quad (2-16)$$

这些原理是杆件单元分析的理论基础。

● 单元分析的核心是以结点位移参数作“基本未知量”建立单元位移模式，当将单元内任一点位移表示为 $N\bar{\delta}^e$（虚位移表为 $N\delta\bar{\delta}^e$）时，利用势能原理（或虚位移原理）按统一的步骤就可获得单元刚度方程。形函数可用广义坐标法和试凑法来得到，形函数具有“本点 1，它点 0；总和为 1”的性质。

● 在小变形的条件下，各种基本变形（拉、压、弯、剪、扭）互相独立，因此拉、弯、扭三类单元是最基本的，平面自由式、空间自由式和交叉梁等单元的刚度矩阵及等效结点荷载矩阵，均可根据位移排列顺序由三类基本单元的结果组合得到。

● 有限元单元分析的结果和矩阵位移法由叠加原理所得结果完全一样，通过杆件单元的有限元分析和矩阵位移法的对照，希望深刻理解有限元的基本原理和方法。

● 各种有“约束”单元可由对应的自由式单元改造来得到，位移约束只要划行划列即可，有“力约束”时，实质上是消去该约束对应的位移，对方程做降阶处理。

● 结点刚域的尺寸由结构课程和有关设计手册来定，对带有刚域的单元，其核心思想是建立弹性段杆端和单元杆端位移和力之间的转换关系。

2-5-2 几点讨论

● 杆件单元的形函数按定义可通过挠曲线微分方程的积分来得到，或者由图乘法通过位移计算来得到。建议有兴趣的读者做如下工作：

1. 推导与两端固定梁单元$\bar{1}$端单位侧移对应的形函数并和现有结果对照；

2. 推导两端固定梁单元考虑剪切变形时与$\bar{1}$端单位侧移对应的形函数。

● 只要建立了考虑剪切变形的形函数，利用考虑剪切变形的势能表达式（或虚功方程），和现有推导过程完全相同，即可获得考虑剪切变形的单元刚度矩阵和等效结点荷载，其结果和本章结果相同。对计剪切变形的载常数表中没有的荷载情况，可通过等效荷载公式由积分来获得。

● 单元分析用的是“总势能一阶变分等于零”（或“虚功方程恒成立”），这实际上是原理的充分性命题。但是，由于位移函数（位移模式）中形函数是确定的，可独立、任意变化的只有结点位移参数，因此位移函数不具有完全的任意性，所以单元分析不能保证单元的平衡。进一步研究可以证明，对杆系单元分析能保证作用于单元的全部外力平衡，这就是单元分析的物理实质。

● 用虚位移原理也可建立单元刚度方程。其步骤为：

1. 建立单元位移 $\bar{\boldsymbol{d}} = N\bar{\delta}^e$。

2．建立单元虚位移 $\delta\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{N}\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$。

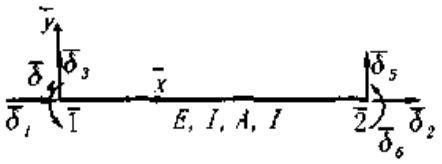
3．由单元位移求单元变形和内力，由单元虚位移求单元虚变形。

4．利用虚位移原理的充分性，令虚功方程恒成立。由结点虚位移的任意、独立性，建立单元刚度方程。

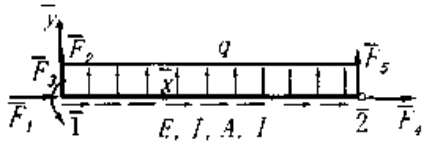
建议读者自行用虚位移原理对平面自由式单元进行分析。

习　题

2－1　自由式单元的单元刚度矩阵为什么可由拉压杆刚度矩阵和只计弯曲杆单元的单元刚度矩阵组合而成？如果结点位移如图所示，单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 如何表示？



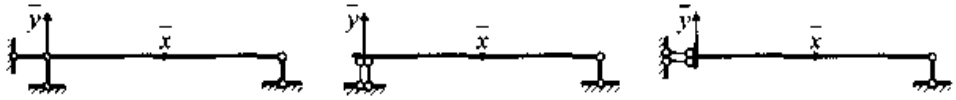
题 2－1 图



题 2－2 图

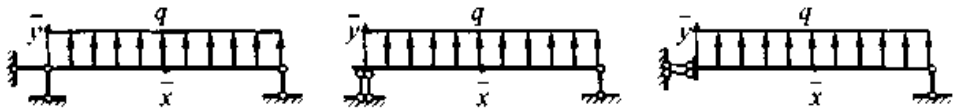
2－2　试写出图示 5 个位移未知量的自由式单元的等效结点荷载。

2－3　试给出考虑轴向变形的图示有约束单元的单元刚度矩阵，抗弯刚度为 EI，抗拉刚度为 EA，单元长度为 l。



题 2－3 图

2－4　试写出图示有约束单元的等效结点荷载矩阵。单元长度为 l。

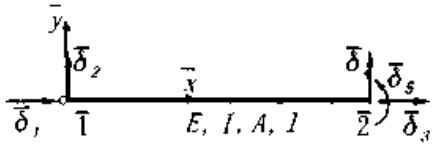


题 2－4 图

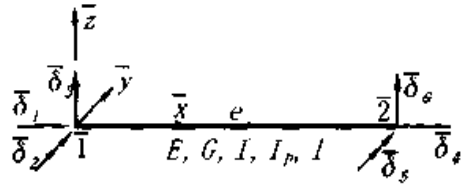
2－5　试给出图示左端铰结单元的单元刚度矩阵。

2－6　如果交叉梁单元如图所示，单元刚度矩阵等于什么？

2－7　设扭转单元的等效结点荷载为 $(A \quad B)^{\mathrm{T}}$，弯曲单元的等效结点荷载为 $(C \quad D \quad E \quad F)^{\mathrm{T}}$。又设交叉梁单元承受与上两单元相同的荷载，则当单元结点位移按题 2－6图所示排列时，单元等效结点荷载矩阵等于什么？

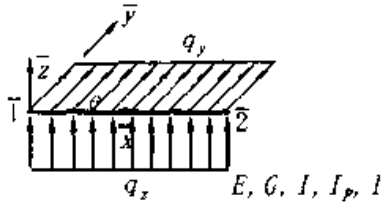


题 2－5 图



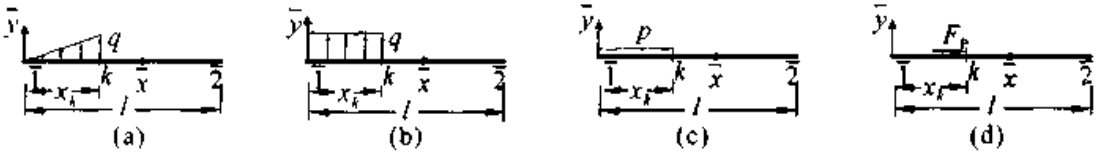
题 2－6 图

2－8　试写出图示空间刚架单元的等效结点荷载矩阵。



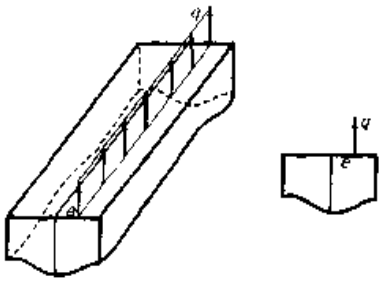
题 2－8 图

2－9　试用 $\bar{F}_E^i = \int_0^l qN^T dx$ 求图示单元等效结点荷载。

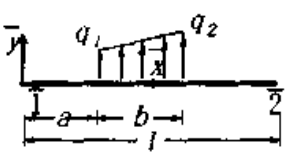


题 2－9 图

2－10　试求图示交叉梁单元在所示荷载作用下的等效结点荷载。



题 2－10 图



题 2－11 图

2－11　试求图示单元等效结点荷载矩阵。

2－12　试写出表 2－1 中各杆的杆端剪力。

第3章
杆系结构的整体分析

与矩阵位移法一样，有了单元分析的结果，接着进行单元综合，即整体分析。由矩阵位移法可知，整体分析应包含如下内容：

● **坐标变换**。由局部坐标下的单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵，通过坐标转换形成整体坐标下的单元刚度矩阵和等效荷载矩阵。

● **集成规则**。由全部结点的平衡条件建立结构的整体刚度方程。并由此导出直接刚度法的集成规则。

● **约束处理**。采用先处理法或后处理法进行边界约束条件处理，使结构的边界已知位移得以满足。

● **方程求解**。选取与整体（结构）刚度矩阵存贮方法相应的线性方程组解法，求得结构的结点位移。

● **内力分析**。从结构全部结点位移中取出各单元的结点位移，经坐标转换变成局部坐标下的杆端位移，再由单元刚度方程求得杆端内力，进一步还可求反力和截面内力，为结构设计提供数据。

本章将主要介绍，如何用势能原理（或虚位移原理）建立结构的结点位移与结点力之间的关系——结构整体的刚度方程。此外，对矩阵位移法中的约束条件处理加以扩充。其他和矩阵位移法相同的内容将不再赘述。

需要强调的是，本章的原理、方法不仅适用于杆系结构，同样也适用于平面问题等其他有限元分析。一般在有限元书籍中都不再介绍整体分析，认为直接刚度法集成结构刚度方程是已经掌握，

因此有必要深刻理解本章内容，为进一步学习奠定基础。

§3-1 结构整体刚度方程

和矩阵位移法一样，假设在进行整体分析以前所有单元都已经作了坐标转换，位移、力和刚度矩阵都已经是整体坐标的量。

3-1-1 用势能原理进行结构整体分析

设结构离散化为 m 个单元，共有 n 个结点。又设 e 单元的杆端位移为 $\boldsymbol{\delta}^e$，杆端力矩阵为 $\boldsymbol{F}^e$，以及等效结点荷载矩阵为 $\boldsymbol{F}_E^e$，单元刚度方程为

$$\boldsymbol{k}^e\boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{F}^e + \boldsymbol{F}_E^e \tag{3-1}$$

单元的总势能为

$$E_P^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{eT}\boldsymbol{k}^e\boldsymbol{\delta}^e - (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_E)^T\boldsymbol{\delta}^e \tag{3-2}$$

式中，$\boldsymbol{k}^e$ 为 e 单元的整体刚度矩阵。

1. 结构总势能

若记第 r 个结点的结点位移矩阵为 $\boldsymbol{\delta}_r$，直接作用于结点的荷载矩阵为 $\boldsymbol{P}_{dr}$，则记结构的结点位移矩阵、结点直接荷载矩阵分别为

$$\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\delta}_1^T \quad \boldsymbol{\delta}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{\delta}_n^T)^T \tag{3-3}$$

$$\boldsymbol{P}_d = (\boldsymbol{P}_{d1}^T \quad \boldsymbol{P}_{d2}^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{P}_{dn}^T)^T \tag{3-4}$$

考虑到结构包含各单元和结点，则结构的总势能 E_P 为

$$\bar{E}_P = \sum E_P^e + E_P^* \tag{3-5}$$

若第 i 结点是 k 个单元的汇交点，其中 k_1 个单元此结点是单元局部编码$\bar{1}$结点，k_2 个是局部编码$\bar{2}$结点，则结点的外力势可表示为

$$E_P^* = -\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\sum_{1}^{k_1}\boldsymbol{F}_{(\bar{1})}^T + \sum_{1}^{k_2}\boldsymbol{F}_{(\bar{2})}^T\right)\right]\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{P}_d^T\boldsymbol{\Delta} \tag{3-6}$$

例如图 3-1 所示结构结点的外力势为

$$\begin{aligned} E_P^* &= -(-\boldsymbol{F}_1^{①} + \boldsymbol{P}_{d1})^T\boldsymbol{\delta}_1 - (-\boldsymbol{F}_2^{①} - \boldsymbol{F}_1^{②} + \boldsymbol{P}_{d2})^T\boldsymbol{\delta}_2 - \\ &\quad (-\boldsymbol{F}_2^{②} - \boldsymbol{F}_2^{③} + \boldsymbol{P}_{d3})^T\boldsymbol{\delta}_3 - (-\boldsymbol{F}_1^{③} + \boldsymbol{P}_{d4})^T\boldsymbol{\delta}_4 \\ &= \sum_{i=①}^{③}\boldsymbol{F}_i^T\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{P}_d^T\boldsymbol{\Delta} \end{aligned} \tag{a}$$

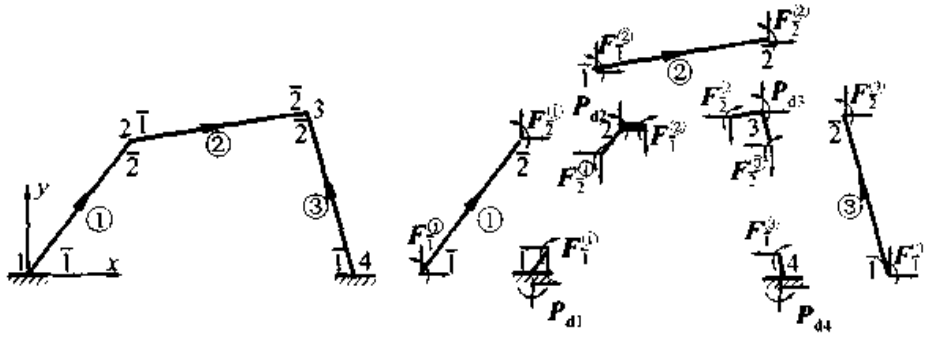


图 3－1　结点外力势计算示意

其中，

$$\boldsymbol{\delta}_{①}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_1\\ \boldsymbol{\delta}_2\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}_{②}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_2\\ \boldsymbol{\delta}_3\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}_{③}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_4\\ \boldsymbol{\delta}_3\end{Bmatrix} \tag{b}$$

式(a)结论适合于任何情形。由此结构总势能式(3－5)可写为

$$\begin{aligned}E_p &= \sum_{i=①}^{m}\left[E_{pi}+\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_i\right]-\boldsymbol{P}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{i=①}^{m}\left(\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{\delta}_i-2\boldsymbol{F}_{Ei}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_i\right)-\boldsymbol{P}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\end{aligned} \tag{3-7}$$

引入结构杆端位移矩阵、结构杆端力矩阵和结构未集装刚度矩阵分别表示如下：

$$\boldsymbol{u}=\left(\boldsymbol{\delta}_{①}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\delta}_{②}^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\delta}_m^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3-8}$$

$$\boldsymbol{F}=\left(\boldsymbol{F}_{①}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{F}_{②}^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{F}_m^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3-9}$$

$$\boldsymbol{K}_m=\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{k}_{①}\quad \boldsymbol{k}_{②}\quad \cdots\quad \boldsymbol{k}_m\right) \tag{3-10}$$

结构未集装等效结点荷载矩阵为

$$\boldsymbol{P}'_E=\left(\boldsymbol{F}_{E①}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{F}_{E②}^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{F}_{Em}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3-11}$$

式(3－10)中，diag 表示“元素”对角线排列，亦即为**块对角矩阵**。

根据矩阵乘法规则，式(3－7)可改写成：

$$\begin{aligned}E_P &= \sum_{i=①}^{m}E_{Pi}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{P}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\\ &=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_m\boldsymbol{u}-\boldsymbol{P}'^{\mathrm{T}}_E\boldsymbol{u}-\boldsymbol{P}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\end{aligned} \tag{3-12}$$

2．位移转换

由单元杆端位移和结点位移之间的协调条件，可建立 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{\Delta}$ 之间的对应关系

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta} \tag{3-13}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为反映位移协调的**位移变换矩阵**。

例如图 3-1 所示结构,其 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{\Delta}$ 为

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_1\\ \boldsymbol{\delta}_2\\ \boldsymbol{\delta}_2\\ \boldsymbol{\delta}_3\\ \boldsymbol{\delta}_4\\ \boldsymbol{\delta}_3\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\Delta}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_1\\ \boldsymbol{\delta}_2\\ \boldsymbol{\delta}_3\\ \boldsymbol{\delta}_4\end{Bmatrix}$$

由此可得位移变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

3. 整体刚度方程

将式(3-13)代入式(3-12),可得

$$\begin{aligned}E_P&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}-\boldsymbol{P}_E'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}-\boldsymbol{P}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_E'+\boldsymbol{P}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\end{aligned}\tag{3-14}$$

式中,结构(总体)原始刚度矩阵和结构(总体)原始等效结点荷载矩阵分别为

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_m\boldsymbol{A}\tag{3-15}$$

$$\boldsymbol{P}_E=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_E'\tag{3-16}$$

令结构势能的一阶变分为零,也即 $\delta E_P=0$,则可得

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}-(\boldsymbol{P}_E+\boldsymbol{P}_d)=\boldsymbol{0}$$

或

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{P}_E+\boldsymbol{P}_d=\boldsymbol{P}\tag{3-17}$$

式中,$\boldsymbol{P}$ 为结构原始综合结点荷载矩阵。上述结果与矩阵位移法结果完全相同。式(3-17)即为整体分析的刚度方程。

* 3-1-2 直接刚度法集装规则的推证

由式(3-15)可得结构原始矩阵 $\boldsymbol{K}$,但实际上这是很不经济的,目前在有限元程序中不用。一般采用矩阵位移法中已介绍的**直接刚度法**(direct

stiffness method)，由单元刚度矩阵的贡献获得结构原始刚度矩阵；由单元等效结点荷载矩阵的贡献获得结构原始等效结点荷载矩阵，下面推证单元贡献的集成规则。

● 证明由累加单元贡献可得整体特性

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对杆系结构为 $6m\times 3n$ 阶矩阵，按单元序号将其分割成 m 个 $6\times 3n$ 阶矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{①}\\ \boldsymbol{A}^{②}\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}^{m}\end{bmatrix} \tag{3-18}$$

例如图 3－1 所示结构，$\boldsymbol{A}$ 的划分为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{matrix}①\\ \\②\\ \\ \\③\end{matrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{①}\\ \boldsymbol{A}^{②}\\ \boldsymbol{A}^{③}\end{bmatrix}$$

将式(3－18)代入式(3－15)，可得

$$\boldsymbol{K}=\sum_{i=①}^{m}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{A}_i$$

由此可得结论：结构原始刚度矩阵可由各单元的贡献

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{A}_i \tag{3-19}$$

累加得到。

同理，可得

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}}=\sum_{i=①}^{m}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}i} \tag{3-20}$$

● 集成规则

式(3－19)中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 $6\times 3n$ 矩阵，按式(3－19)矩阵乘后再累加仍然不经济，为进一步确定单元贡献的规律，必须研究 $\boldsymbol{A}_i$。

设第 i 个单元的杆端位移矩阵为

$$\boldsymbol{\delta}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{\bar{1}}\\ \boldsymbol{\delta}_{\bar{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_r\\ \boldsymbol{\delta}_s\end{bmatrix}$$

下标 r,s 分别为与单元局部编码$\bar{1},\bar{2}$对应的整体结点位移编号，不失一般性，设 $r<s$。从式(3－13)和式(3－18)，可得

$$\boldsymbol{\delta}_i=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\Delta}$$

结点整体编号

$$A_i=\begin{matrix}\bar{1}\\ \bar{2}\end{matrix}\begin{matrix}1&2&\cdots&r-1&r&r+1&\cdots&s-1&s&s+1&\cdots&n\end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&\boldsymbol{I}&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&\boldsymbol{I}&0&\cdots&0\end{pmatrix}\tag{3-21}$$

将式(3-21)代入式(3-19)和式(3-20),并进行矩阵乘法运算可证明单元对整体贡献的规则如下:

1. 结构原始刚度矩阵的集成

设
$$\boldsymbol{k}_i=\begin{matrix}&r&s\\r\\s\end{matrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}_{11}&\boldsymbol{k}_{12}\\\boldsymbol{k}_{21}&\boldsymbol{k}_{22}\end{pmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{k}^i_{11}\rightarrow\boldsymbol{k}_{rr},\quad \boldsymbol{k}^i_{12}\rightarrow\boldsymbol{k}_{rs}\tag{3-22a}$$
$$\boldsymbol{k}^i_{21}\rightarrow\boldsymbol{k}_{sr},\quad \boldsymbol{k}^i_{22}\rightarrow\boldsymbol{k}_{ss}\tag{3-22b}$$

也即将第 i 单元的刚度矩阵子块 $\boldsymbol{k}^i_{11}$ 送到结构原始刚度矩阵第 r 行 r 列子矩阵位置并累加。其余类推。

2. 结构原始等效结点荷载集成

设
$$\boldsymbol{F}^i_{\mathrm{E}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}(\bar{1})}\\\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}(\bar{2})}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\s\end{matrix}$$

则
$$\boldsymbol{F}^i_{\mathrm{E}\bar{1}}\rightarrow\boldsymbol{P}_{\mathrm{E}r},\quad \boldsymbol{F}^i_{\mathrm{E}\bar{2}}\rightarrow P_{\mathrm{E}s}\tag{3-23}$$

亦即分别送到第 r 行,s 行子矩阵位置进行累加。这就是在矩阵位移法时所介绍的集成规则。虽然上述推证是基于杆系结构,但这一规则适用于其他有限单元的集成。

§3-2 整体分析的物理实质

式(3-7)给出了结构的总势能为

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{P}}&=\sum_{i=①}^{m}[E_{\mathrm{P}i}+\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_i]-\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=①}^{m}(\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{\delta}_i-2\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_i)-\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\end{aligned}$$

由于单元分析已使 $\delta E_{\mathrm{P}i}=0$,所以在整体分析令 $\delta E_{\mathrm{P}}=0$ 时,可得

$$\sum_{i=①}^{m}\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\delta}_i-\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Delta}=0$$

利用式(3-8)、式(3-9)和式(3-13),上式可改写成

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Delta} \tag{3-24}$$

由变分 $\delta\boldsymbol{\Delta}$ 的任意性，可得

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \tag{3-25}$$

将式(3-18)代入式(3-25)，则有

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{d}}=\sum_{i=①}^{m}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i \tag{3-26}$$

考虑到 $\boldsymbol{A}_i$ 的具体表达式(3-21)，则不难理解式(3-25) 所代表的是全部结点平衡条件。这就是有限元整体分析的物理实质。

例如图 3-1 所示结构，设结点 1 至 4 承受的直接结点外荷载分别为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4$。由式(3-26)计算可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1\\ \boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{P}_3\\ \boldsymbol{P}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_{\overline{1}}\\ \boldsymbol{F}_{\overline{2}}\end{Bmatrix}^{①}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_{\overline{1}}\\ \boldsymbol{F}_{\overline{2}}\end{Bmatrix}^{②}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_{\overline{1}}\\ \boldsymbol{F}_{\overline{2}}\end{Bmatrix}^{③}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{\overline{1}}^{①}\\ \boldsymbol{F}_{\overline{2}}^{①}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_{\overline{1}}^{②}\\ \boldsymbol{F}_{\overline{2}}^{②}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_{\overline{2}}^{③}\\ \boldsymbol{F}_{\overline{1}}^{③}\end{bmatrix}$$

这就是结点直接作用外荷载与杆端力(结点力)平衡的条件。可见整体分析确实保证了全部结点的平衡。需要指出的是，这一结论也适用于平面问题等其他有限元分析。

§3-3　边界条件处理的补充——斜支座问题

在矩阵位移法中已经介绍过，原始结构刚度方程及具有已知位移边界条件问题，都需要进行边界条件的处理，介绍了乘大数法和“划零置一”法。但那时介绍的结构边界支座方向平行于结构整体坐标方向。在实际结构中，常有这样一种支座，其支承方向既不平行 x 轴，又不平行于 $y(z)$ 轴，因此称为斜支座。这时，采用整体坐标位移 $\boldsymbol{\delta}_i$ 无法描述该支座约束条件。为了能够解决问题，可建立结点坐标系，利用坐标转换关系，引入沿支座支承方向的位移约束条件。现以平面桁架为例，说明斜支座的处理方法。

3-3-1 对单元进行处理,用先处理法集成整体刚度矩阵

设对具有斜边界支承的单元已进行标识,在对所有单元进行集成时识别出第 i 单元 $j(j=\bar{1}$或$\bar{2})$结点有斜支座如图 3-2 所示。对此类单元为引入支承条件可按如下原理和步骤进行:

● 局部坐标单元刚度矩阵

设局部坐标单元刚度矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{k}}_{11} & \bar{\boldsymbol{k}}_{12}\\ \bar{\boldsymbol{k}}_{21} & \bar{\boldsymbol{k}}_{22}\end{pmatrix}^e$$

桁架单元,

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e_{11}=\frac{EA}{l}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\bar{\boldsymbol{k}}^e_{22}$$

$$\bar{\boldsymbol{k}}^e_{12}=\frac{EA}{l}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\bar{\boldsymbol{k}}^e_{21}$$

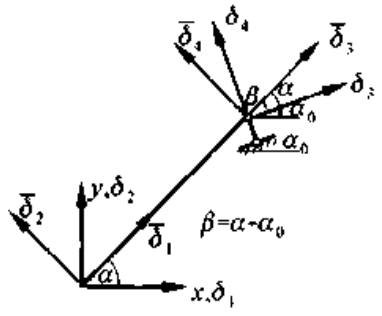


图 3-2 平面桁架单元斜支座示意

● 位移变换矩阵

在非斜支座结点,如图所示位移变换矩阵为

$$\boldsymbol{\lambda}_{\bar{1}}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\bar{\delta}_1\\ \bar{\delta}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\lambda}_{\bar{1}}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix}$$

对斜支座结点,设整体坐标与支座限制的位移一致,则由图 3-2 有结点位移转换矩阵为

$$\boldsymbol{\lambda}_{\bar{2}}=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix},\quad \beta=\alpha-\alpha_0$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\delta}_3\\ \bar{\delta}_4\end{pmatrix}=\lambda_{\bar{2}}\begin{pmatrix}\delta_3\\ \delta_4\end{pmatrix}$$

不同结点处用不同整体坐标,则单元坐标转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}_{\bar{1}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda}_{\bar{2}}\end{pmatrix}$$

单元整体刚度方程为

$$\boldsymbol{F}^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e$$

亦即单元"整体刚度矩阵"为

$$\boldsymbol{k}^e=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}$$

有了整体位移和斜支承位移对应的整体坐标单元刚度矩阵,就可以用常规的定位向量先处理法,在单元阶段进行边界条件处理。

* 3-3-2　对整体刚度矩阵进行处理

用后处理法，按常规建立平面桁架的整体刚度方程

$$\boldsymbol{K\Delta} = \boldsymbol{P}$$

写成按结点分块矩阵的形式，则为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} & \cdots & \boldsymbol{k}_{1i} & \cdots & \boldsymbol{k}_{1n} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} & \cdots & \boldsymbol{k}_{2i} & \cdots & \boldsymbol{k}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{k}_{i1} & \boldsymbol{k}_{i2} & \cdots & \boldsymbol{k}_{ii} & \cdots & \boldsymbol{k}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{k}_{n1} & \boldsymbol{k}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{k}_{ni} & \cdots & \boldsymbol{k}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Delta}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Delta}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_n \end{Bmatrix}$$

其中，n 为桁架结点总数，$\boldsymbol{\Delta}_i$ 为 i 结点的位移向量，$\boldsymbol{P}_i$ 为 i 结点的结点力向量，分别为

$$\boldsymbol{\Delta}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_i = \begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{Bmatrix}$$

子块 $\boldsymbol{k}_{ij}$ 为 2×2 阶矩阵。基于上述说明，下面给出处理方法：

● 建立结点坐标系

在 n 个结点中，设第 i 个结点为具有斜支承的约束结点。结点 i 可沿着与整体坐标 x 轴夹角为 α_0 的斜面滑动，如图 3-3 所示。

为了描述该点的位移状况，设一个新的坐标系——结点 i 的坐标系 x^*y^*，如图所示。结点坐标系下的结点位移为 u_i^*，v_i^*，结点力为 P_{xi}^*，P_{yi}^*，根据坐标转换关系，可得

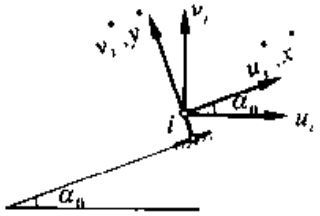


图 3-3　桁架斜支座示意

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^* \cos\alpha_0 - v_i^* \sin\alpha_0 \\ v_i &= u_i^* \sin\alpha_0 + v_i^* \cos\alpha_0 \end{aligned} \qquad (3-27)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \end{Bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{\Delta}_i = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta}_i^* \qquad (3-28)$$

同样，对于结点力也可得

$$\begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{xi}^* \\ P_{yi}^* \end{Bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{L}\boldsymbol{P}_i^* \qquad (3-29)$$

不难证明，$\boldsymbol{L}$ 为正交矩阵，故有

$$\boldsymbol{L}^{-1}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

● **修改整体刚度方程**

将式(3-28)和式(3-29)代入整体刚度方程，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} & \cdots & \boldsymbol{k}_{1i}\boldsymbol{L} & \cdots & \boldsymbol{k}_{1n} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} & \cdots & \boldsymbol{k}_{2i}\boldsymbol{L} & \cdots & \boldsymbol{k}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{k}_{i1} & \boldsymbol{k}_{i2} & \cdots & \boldsymbol{k}_{ii}\boldsymbol{L} & \cdots & \boldsymbol{k}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{k}_{n1} & \boldsymbol{k}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{k}_{ni}\boldsymbol{L} & \cdots & \boldsymbol{k}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Delta}_i^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Delta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{L}\boldsymbol{P}_i^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_n \end{pmatrix} \tag{3-30}$$

将第 i 个方程再左乘 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$，可得变换后的整体刚度方程为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} & \cdots & \boldsymbol{k}_{1i}\boldsymbol{L} & \cdots & \boldsymbol{k}_{1n} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} & \cdots & \boldsymbol{k}_{2i}\boldsymbol{L} & \cdots & \boldsymbol{k}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{i1} & \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{i2} & \cdots & \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{ii}\boldsymbol{L} & \cdots & \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{k}_{n1} & \boldsymbol{k}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{k}_{ni}\boldsymbol{L} & \cdots & \boldsymbol{k}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Delta}_i^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Delta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_i^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_n \end{pmatrix} \tag{3-31}$$

此时整体刚度方程中，第 i 个结点(有斜支座)的元素均用结点坐标系表示，也就是说斜支座的位移和结点力已经包含在方程中，然后就可以引入斜支座约束条件。例如，图 3-3 所示结点 i 的支座条件为 $v_i^*=0$，可按乘大数法或划零置一法进行处理。

§3-4 杆系结构静力分析程序简要说明

随本书发行光盘上的平面刚架程序(PMGJ.EXE)，只要在结构数据化时加以适当处理(有关处理方法和举例，可参考王焕定主编，高等教育出版社出版的《结构力学程序设计》等)，也能用于平面桁架、连续梁和平面组合结构的静力计算，对稍大一些的结构，数据准备工作量将增加许多。这里介绍的杆系结构静力分析程序(jlifx.exe)是用 FORTRAN 90 编写计算程序，用 VISUAL BASIC 和 DELPHI 编写前后处理界面程序，按各种结构分别数据化的平面、空间桁架，平面、空间刚架(空间问题暂缺图形前后处理)，连续梁、三铰拱等，给出反力、内力和变形计算(三铰拱无变形计算)结果的有限元程序，该程序还能用增量变刚度法作平面刚架极限荷载计算，作各种结构

影响线计算等。是杆系结构的一个通用程序。由于随书发行光盘上的程序是教学版,因此其解题规模有所限制,其功能和专业版完全相同。本程序的具体使用方法,请阅读光盘上的 gxjg _ readme 文件。

§3-5 结论与讨论

3-5-1 本章结论

● 整体刚度矩阵和整体等效结点荷载矩阵由直接刚度法用单元对应结果"集成"得到。

● 整体刚度矩阵是对称、带状、稀疏的矩阵,目前一般采用变带宽存储和对应的解法,对此有兴趣的读者可以参考有关计算方法和有限单元法的书籍。

● 对单元集合体进行整体分析的结果是保证结点平衡。对于杆系结构,有限元解得的位移是精确的(不是对所有有限元都有这结论)。

● 当有斜支承时也有先后处理之分,但基本思想都是建立"结点坐标系"。

3-5-2 几点讨论

● 有限单元法实际上是以分片连续的位移函数作为假设位移的里兹法,因此位移精度高于内力(应力)精度,所以杆件单元上截面内力要用截面法确定。只有对杆系结构在上述求内力条件下,有限元的结果是精确的。

● 一些参考书籍中往往简单地将整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 写为 $\boldsymbol{K}=\sum_{e}\boldsymbol{k}^{e}$,这里实际上包含了"整体刚度矩阵是由单元刚度矩阵的贡献集成结果",不能按数学意义理解。

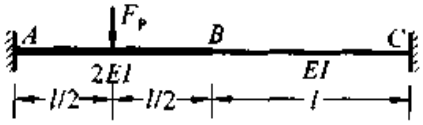
● 在程序中为节省存储、提高解算效率,希望带宽尽可能小。这就需要在离散时使相关(有单元相连)结点的位移码最大差值尽可能小,这是从整体分析角度对离散提出的要求。

● 随着有限元技术的发展,对于大型结构计算,为解决未知量太多整体刚度矩阵过大,还提出了诸如"子结构法"、"波前解法"、"超级单元法"等等。读者对此有兴趣的,可查阅有限单元法等书籍、资料。

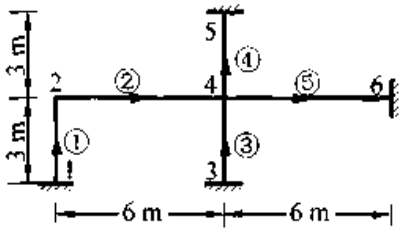
习　题

3－1　试用先处理法计算图示梁(将 AB 和 BC 视为两个单元)。

3－2　试用先处理法建立图示刚架的结构刚度矩阵。E，I，A 均为常数。



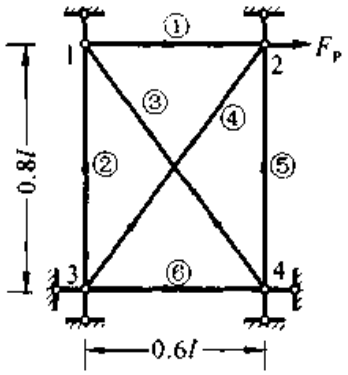
题 3－1 图



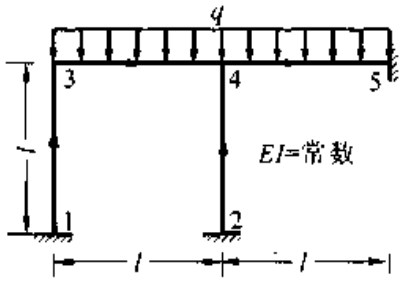
题 3－2 图

3－3　试用先处理法计算图示桁架的内力和反力。各杆 EA 为常数。

3－4　试用先处理法和后处理法计算图示刚架。E，I，A 均为常数。

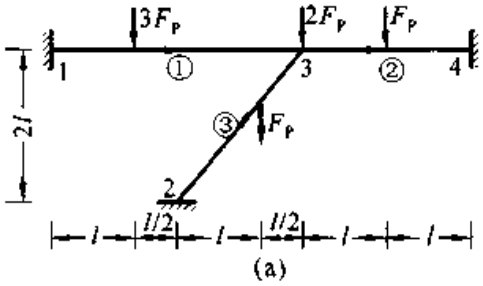


题 3－3 图

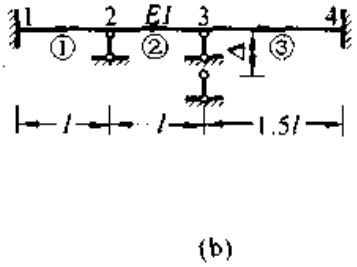


题 3－4 图

3－5　试求图示结构综合等效荷载矩阵(用先处理法)。



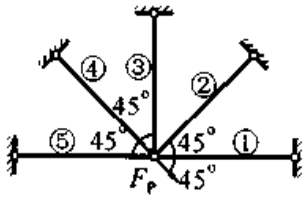
题 3－5a 图



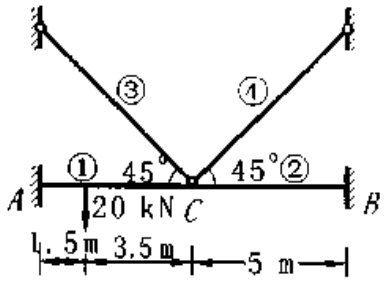
题 3－5b 图

3－6　试求图示桁架各杆轴力。各杆 E、A、L 相同。

3－7　试求图示结构 ABC 梁的弯矩图。设 E、I、A 为常数。



题 3－6 图



题 3－7 图

第4章

分支点稳定及极限荷载有限元分析简介

在本书第(Ⅰ)册第7章,曾经介绍了结构稳定与极限荷载的基本概念,实际结构自由度、可能的失效机构都很多,手算是很困难的。因此,也需要借助计算机用有限元方法解决。

结构稳定有两类:分支点和极值点失稳。极值点失稳属非线性力学内容,超出了本书的范围,因此本章只介绍刚架分支点稳定问题的有限元方法。

关于结构极限承载力,如果从全过程来研究,也是一个非线性力学问题,不属于本书范围。本章仅介绍确定极限荷载的增量变刚度法。

§4-1 平面刚架分支点稳定有限元分析

前面所讨论的刚架单元(自由式单元),在单元分析时没有考虑轴力对弯曲变形的影响,称为普通单元。在稳定问题中,压杆所承受的轴力是其失稳的决定因素,因此在单元分析中必须考虑轴向力对弯曲变形的影响,称为压杆单元,显然,这两种单元的刚度方程是不相同的。进行刚架分支点稳定分析时,对于非压杆单元,仍按普通单元的刚度方程计算,对于压杆单元,应该用压杆单元的刚度方程计算。本节首先讨论压杆单元的刚度方程,然后介绍刚架结构分支点稳定计算的方法,以及一种特征值问题的解法——幂法。

4-1-1 压杆单元的刚度方程

在分支点稳定问题中,隐含了不考虑轴向变形影响的假定,在此前提

下，图 4－1 所示承受轴向压力 F_P 的压杆单元 e，由图 4－1c 所示几何关系有：

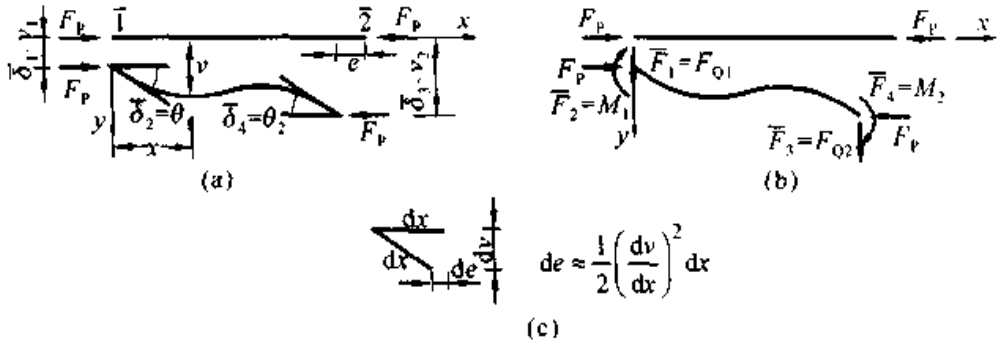


图 4－1　压杆单元杆端位移、杆端力示意图

$$de=\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

1．单元位移模式

设由单元杆端位移 $\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$ 引起的杆中任一点 A 的位移 v 仍同普通单元一样写为

$$v=\boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e=\sum_{i}^{4}N_i\bar{\delta}_i$$

其中形函数为

$$\begin{cases}N_1=1-3\left(\dfrac{x}{l}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{l}\right)^3=1-3\xi^2+2\xi^3\\ N_2=l\left[1-2\dfrac{x}{l}+\left(\dfrac{x}{l}\right)^2\right]\dfrac{x}{l}=l\xi(1-\xi)^2\\ N_3=3\left(\dfrac{x}{l}\right)^2-2\left(\dfrac{x}{l}\right)^3=\xi^2(3-2\xi)\\ N_4=-l\left(\dfrac{x}{l}\right)^2\left(1-\dfrac{x}{l}\right)=-l\xi^2(1-\xi)\end{cases}\tag{4-1}$$

2．压杆单元总势能

在稳定平衡状态（直线位置）时单元杆长设为 l，因为不考虑压杆的轴向变形，在图 4－1a、b 所示屈曲平衡状态（曲线位置）时，单元长仍然为 l，由此 $\bar{1}$、$\bar{2}$ 杆端间因弯曲变形将引起如图所示一段水平相对位移 e。显然，它可由微段 dx 因弯曲引起的水平相对位移 de 的积分求得

$$e=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dx\tag{4-2}$$

由于水平位移 e，压杆单元的总势能要增加轴向压力外力势项，于是，

$$E_P=V_\varepsilon+E_P^*+E_{PN}^*\tag{4-3}$$

式中，V_ε 为单元应变能，E_P^* 为单元杆端外力势，E_{PN}^* 为轴向压力外力势：

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^l EI(v'')^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\delta}}_e^{\mathrm{T}}\int_0^l \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}EI\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{4-4a}$$

$$E_{\mathrm{P}}^* = -\bar{\boldsymbol{F}}_e^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{4-4b}$$

$$E_{\mathrm{PN}}^* = -\frac{F_{\mathrm{P}}}{2}\bar{\boldsymbol{\delta}}_e^{\mathrm{T}}\int_0^l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\bar{\boldsymbol{\delta}}^e \tag{4-4c}$$

其中，

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x^2} = (N''_1 \quad N''_2 \quad N''_3 \quad N''_4) \tag{a}$$

3. 单元刚度方程

为了使体系处于平衡状态，由势能驻值条件可得

$$\int_0^l \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}EI\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\bar{\boldsymbol{\delta}}^e - F_{\mathrm{P}}\int_0^l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\bar{\boldsymbol{\delta}}^e - \bar{\boldsymbol{F}}^e = \boldsymbol{0} \tag{4-5}$$

式中，$\int_0^l \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}EI\boldsymbol{B}\mathrm{d}x = \bar{\boldsymbol{k}}^e$ 与第2章中局部坐标下不计轴向变形的单元刚度矩阵相同。

若引入记号

$$\bar{\boldsymbol{k}}_g^e = F_{\mathrm{P}}\int_0^l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{4-6a}$$

称为局部坐标单元**几何刚度矩阵**(geometric stiffness matrix)。其元素

$$\bar{k}_{ij_g} = F_{\mathrm{P}}\int_0^l N'_i N'_j \mathrm{d}x \tag{4-6b}$$

则式(4-5)可改写为

$$(\bar{\boldsymbol{k}} - \bar{\boldsymbol{k}}_g)^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e = \bar{\boldsymbol{F}}^e \tag{4-7}$$

将式(4-1)代入式(4-6)，并进行运算，可得

$$\bar{\boldsymbol{k}}_g = F_{\mathrm{P}}\begin{pmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ \text{对} & & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ & \text{称} & & \frac{2l}{15} \end{pmatrix} \tag{4-8}$$

4-1-2 刚架分支点稳定计算

1. 整体刚度方程

假设刚架是一完善体系，受均按同一比例系数 λ 由小到大施加的结点集中力荷载作用，在不考虑杆件的轴向变形的情形下，失稳前各杆只有轴

力。又设 $\lambda=1$ 时第 e 压杆单元的轴力为 $\bar{F}_N^e$，则此单元在比例系数为 λ 时的单元刚度方程为

$$(\bar{k}-\lambda\bar{k}_g')^e\bar{\delta}^e=\bar{F}^e \tag{4-9}$$

式中，$\bar{k}_g'^e$ 为式(4-8)中 F_P 以 $\bar{F}_N^e$ 代换的结果。

利用直接刚度法集成，可得整体刚度方程为

$$(\boldsymbol{K}-\lambda\bar{\boldsymbol{K}}_g)\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{P} \tag{b}$$

式中，$\boldsymbol{K}$，$\bar{\boldsymbol{K}}_g$ 分别为结构刚度矩阵和结构在 $\lambda=1$ 比例加荷下的几何刚度矩阵；

$\boldsymbol{\Delta}$、$\boldsymbol{P}$ 分别为结构失稳位移矩阵和结构结点荷载(与失稳位移相应)矩阵。

2. 稳定性分析原理

由分支点平衡状态二重性可知，在失稳前结构各杆只有轴力没有弯曲变形，因此与屈曲状态对应的结点荷载矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}$。所以对于分支点失稳问题，屈曲状态的结构刚度方程是齐次的。也即

$$(\boldsymbol{K}-\lambda\bar{\boldsymbol{K}}_g)\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{0} \tag{4-10}$$

由于**临界状态**(critical state)时 $\boldsymbol{\Delta}\neq\boldsymbol{0}$，因此要求

$$|\boldsymbol{K}-\lambda\bar{\boldsymbol{K}}_g|=0 \tag{c}$$

也即确定**临界荷载**(critical load)实质上化为求**稳定方程**(stability equation)式(4-10)或**特征方程**(equation of characteristics)式(c)**特征值**(eigenvalue)的数学问题。最小特征值 λ_{min} 对应的荷载状态已导致结构失稳，所以分支点稳定分析最终归结为求解方程式(4-10)或式(c)的最小特征值 λ_{min}。

4-1-3　一种特征值问题解法——幂法

将式(5-10)改写为

$$\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{K}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_g\boldsymbol{\Delta}$$

$$\beta=\frac{1}{\lambda},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{K}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_g \tag{4-11}$$

因此上式改写成如下由第 n 步结果求第 $n+1$ 步结果的迭代格式：

$$\beta\boldsymbol{\Delta}_{n+1}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}_n \tag{4-12a}$$

$$\|\boldsymbol{\Delta}_{n+1}-\boldsymbol{\Delta}_n\|\leqslant\varepsilon \tag{4-12b}$$

式中，$\|\boldsymbol{\Delta}_{n+1}-\boldsymbol{\Delta}_n\|$ 表示某种**矩阵范数**(matrix norm)，例如，可取

$$\|\boldsymbol{\Delta}_{n+1}-\boldsymbol{\Delta}_n\|=\max(\Delta_j^{n+1}-\Delta_j^n)\quad(j=1,2,\cdots)$$

亦即相邻两次迭代结果中对应元素的最大差值小于指定的任一小数 ε 时，

认为迭代已经收敛。由上述迭代格式(4－12)(也称**幂法** power method)可求得最大特征值 β_{max}，再由式(4－11)即可求得临界荷载状态相应的最小比例系数 λ_{min}。而满足收敛准则的迭代结果 Δ_{n+1} 即反映了结构失稳(不稳定平衡)状态相应的结构结点位移(也称**失稳形态** unstable mode)。

4－1－4　分支点稳定算例

[**例题 4－1**]　试用随本书发行光盘上的程序 jsjfx.exe(或 stab.exe)(有关内容可参见王焕定主编，《结构力学程序设计》(附录 E)，高等教育出版社)，计算图 4－2 所示刚架的临界荷载。

解：从理论分析可知，临界荷载与弹性模量和截面惯性矩成正比。因此数值计算时，可取 $E=1.0\ \text{kN/m}^2$，$A=1\ 000\ \text{m}^2$，$I=1.0\ \text{m}^4$。计算结果再乘以 EI 即可。根据图示单元划分及编码情况，按数据填写要求建立计算所需数据文件(见光盘 li241，结果文件为 li241.out)，用光盘中的 stab.exe 程序即可求得临界荷载为

$$F_{Pcr}=0.461\ 297\ 3EI$$

此计算结果与用位移法求得的精确结果

$$F_{Pcr}=0.462\ 4EI$$

十分接近。

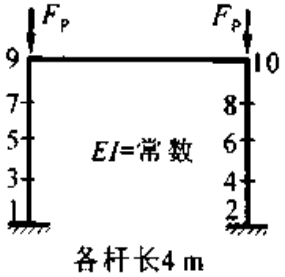


图 4－2　例题 4－1 图刚架示意

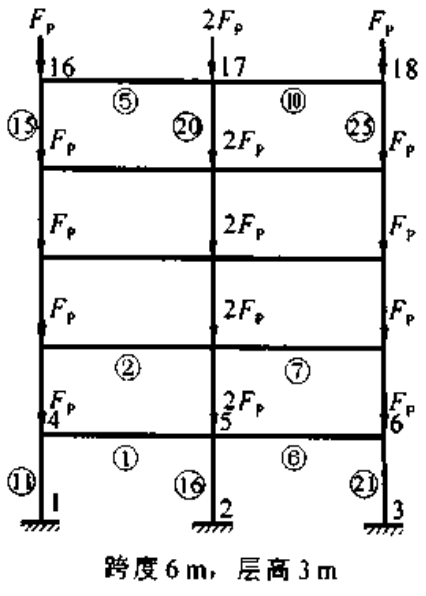


图 4－3　刚架稳定分析

[**例题 4－2**]　试用随本书光盘上的程序(jsjfx.exe)，计算图 4－3 所示刚架的临界荷载。梁、柱 $E=2.6\times10^6\ \text{kN/m}^2$，梁 $A=0.4\ \text{m}^2$，$I=2.133\times10^{-2}\ \text{m}^4$，柱 $A=0.16\ \text{m}^2$，$I=2.133\times10^{-3}\ \text{m}^4$；力对称如图所示，$F_P$，$2F_P$，$F_P$ 每层都有。不

计轴向变形。

解:所建立的数据文件和计算结果文件见光盘 li242 和 li242.out,临界荷载为

$$F_{P_{cr}} = 855.442\ 9\ \text{kN}$$

§4-2　刚架极限荷载分析

在第(Ⅰ)册第 7 章关于梁的极限分析中,曾经介绍了塑性铰、极限状态和极限荷载的概念。本节将在此基础上,介绍基于增量变刚度的刚架极限荷载有限元分析方法。这方法基本思想是,以产生塑性铰作为截面达到极限状态,而当塑性铰多到结构变成单自由度单向可变体系时,认为结构达到承载的极限状态,对应的荷载即为极限荷载。

为简化讨论过程,约定结构只承受结点荷载(有非结点荷载时,增加结点使其化为结点荷载),而且都是比例加载情形。

4-2-1　增量变刚度法

增量变刚度法是将非线性问题转化为分阶段的线性问题求解的一种方法,其基本思路包含二点:

● 所谓增量是将总荷载分解成几个荷载增量,逐级增加,从弹性阶段开始,使每增加一级荷载只产生一个塑性铰,最后达到结构的极限状态。将荷载增量累加,获得最终极限荷载。

● 所谓变刚度,是指当结构在比例加载情况下(整个荷载可用一个荷载参数 F_P 表示),在每级增量荷载作用下,由于出现了塑性铰,结构的组成形式就发生了变化,相关单元的单元刚度矩阵就要发生改变,虽然每个荷载增量阶段,仍按弹性方法计算,但不同阶段结构的刚度各不相同,所以每出现一次塑性铰,就要改变一次结构的整体刚度矩阵,直至结构变为机构。

4-2-2　单元刚度矩阵的修正

全刚结点平面刚架的计算,采用的是自由式单元。在作极限荷载分析计算过程中,单元杆端出现塑性铰的情况有三种。因此增量变刚度分析过程中将遇到 4 种情况的单元刚度矩阵。

1. 自由式单元刚度矩阵

$$\bar{k}'=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & \frac{6i}{l} & 4i & 0 & -\frac{6i}{l} & 2i \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} \\ 0 & \frac{6i}{l} & 2i & 0 & -\frac{6i}{l} & 4i \end{bmatrix}$$

这对应第 2 章单元刚度矩阵子程序中 ITYPE=4 的情形。

2. $\bar{1}$端出现塑性铰时的单元刚度矩阵

$$\bar{k}'_{\bar{1}}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3i}{l^2} & \frac{3i}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3i}{l^2} & -\frac{3i}{l} \\ 0 & \frac{3i}{l} & 0 & 0 & -\frac{3i}{l} & 3i \end{bmatrix}$$

这对应第 2 章单元刚度矩阵子程序中 ITYPE=5 的情形。

3. $\bar{2}$端出现塑性铰时单元刚度矩阵

$$\bar{k}'_{\bar{2}}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3i}{l^2} & \frac{3i}{l} & 0 & -\frac{3i}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{3i}{l} & 3i & 0 & -\frac{3i}{l} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{l^2} & -\frac{3i}{l} & 0 & \frac{3i}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这对应第 2 章单元刚度矩阵子程序中 ITYPE=6 的情形。

4. $\bar{1}$和$\bar{2}$端同时出现塑性铰时的单元刚度矩阵

$$\bar{k}'_{\bar{1}\bar{2}}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这对应第 2 章单元刚度矩阵子程序中 ITYPE = 1 的情形。

由于随本书光盘上的程序中原本有 5×5 的有铰约束和 4×4 的桁架单元刚度矩阵，因此出现塑性铰后上述单元刚度应划去对应转角的行和列，直接用有约束或桁架单元。显然，这样处理程序要复杂些。

4-2-3　增量变刚度法确定刚架极限荷载的计算过程及算例

增量变刚度法的计算步骤为：

● **第一阶段**。以原结构为对象进行弹性计算（此时结构刚度矩阵为 K_1），以便根据各单元极限弯矩和单位弯矩之比的最小值确定哪一截面出现塑性铰及所须施加的第一级最小荷载值 F_{P1}。为此要做：

（1）令单位比例荷载 $F_P=1$，用有限单元法求出各控制截面的杆端弯矩，组成单位弯矩向量 $\bar{M}_1$。

（2）将已知各控制截面的极限弯矩向量 M_u 与单位向量 $\bar{M}_1$ 比较，得出向量中最小的元素，它就是第一个塑性铰出现时的荷载 F_{P1}。

$$F_{P1}=\left(\frac{M_u}{\bar{M}_1}\right)_{\min}$$

在荷载 F_{P1} 的作用下，各控制截面的弯矩为

$$M_1=F_{P1}\bar{M}_1$$

此时必然有一个控制截面出现塑性铰，某一单元的刚度应该进行修正，第一阶段结束。

● **第二阶段**。由于塑性铰的出现，结构组成形式发生改变，亦即出现塑性铰单元的刚度矩阵发生改变。因此，修改结构刚度矩阵后，重复第一阶段计算，显然可求得出现新塑性铰对应的荷载增量等。这一计算过程如下所示：

（1）改变出现塑性铰单元的单元刚度矩阵，同时，整体结构刚度矩阵由 K_1 修改为 K_2。程序处理时，可先从结构刚度矩阵中减去此单元的刚度元

素，然后再加上新刚度矩阵元素。

(2) 检验 K_2 是否为奇异矩阵(可用刚度方程无法求解为判据进行判断)。如果非奇异，表明结构尚未达到极限状态，还可承受更大的荷载。

(3) 令比例荷载增量 $\Delta F_P = 1$ 作用在修改后的结构上，对刚度矩阵为 K_2 的结构作弹性计算，求出各控制截面的弯矩(有塑性铰单元，要用新刚度矩阵计算)，组成单位弯矩向量 $\overline{M}_2$。

(4) 与第一阶段一样，由 $\Delta F_{P1} = \left(\dfrac{M_u - M_1}{\overline{M}_2}\right)_{\min}$，求得第二阶段的荷载增量 ΔF_{P1}，在 ΔF_{P1} 作用下，各控制截面的弯矩为

$$\Delta M_1 = \Delta F_{P1}\overline{M}_2$$

这时承受的总荷载为 $F_{P2} = F_{P1} + \Delta F_{P1}$

各控制截面总的弯矩为 $M_2 = M_1 + \Delta M_1 = F_{P1}\overline{M}_1 + \Delta F_{P1}\overline{M}_2$

此时出现第二个塑性铰，又有一个单元将修改刚度，第二阶段结束。

● **重复第二阶段计算，进行第三、第四…阶段分析，直到第 n 阶段 $|k_n| = 0$ 为止。**这表明结构由于产生了多个塑性铰已成为机构，达到极限状态。最终极限荷载值和各截面弯矩值由累加得到，

$$F_{Pu} = F_{P1} + \sum_{i=2}^{n-1}\Delta F_{Pi-1}$$

$$M_u = F_{P1}\overline{M}_1 + \sum_{i=2}^{n-1}\Delta F_{Pi-1}\overline{M}_i$$

注意，以上讨论没有考虑加载过程中出现反向变形，亦即导致塑性铰闭合的情形，如有这种情形，上述算法需要修正。

[**例题 4-3**] 试用随本书发行光盘上增量变刚度法程序(jxhz.exe，也可用 jsjfx.exe)求图 4-4 所示刚架的极限荷载。数值计算中，设柱截面惯性矩为 1，极限弯矩 M_u 为 4；梁截面惯性矩为 2，极限弯矩为 $1.5M_u$。

解：现略去输出的一些计算结果，只将部分结果列于下面，并作一简单说明。计算所用的数据文件为 li243，结果文件为 li243.out。

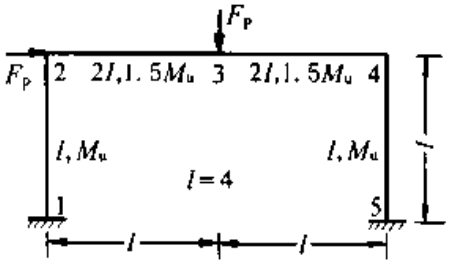


图 4-4 例题 4-3 图

(1) 第一阶段计算

刚架在单位荷载 $F_P=1$ 作用下的各单元杆端内力如下：

…… 各工况杆端力 ……

单元	杆端	轴力	剪力	弯矩
1	1	0.285 72	0.250 03	0.809 60
	2	−0.285 72	−0.250 03	0.190 51
2	2	0.749 97	0.285 72	−0.190 51
	3	−0.749 97	−0.285 72	1.333 4
3	3	0.749 97	−0.714 28	−1.333 4
	4	−0.749 97	0.714 28	−1.523 8
4	5	0.714 28	0.749 97	1.476 1
	4	−0.714 28	−0.749 97	1.523 8

由此可得第 1 步累计荷载为

$$F_{P1}=\left(\frac{M_u}{\overline{M}_1}\right)_{\min} \text{ 为 } 2.625\ 1$$

各单元杆端弯矩为

1	2.125 3	0.500 10
2	−0.500 10	3.500 2
3	−3.500 2	−4.000 0
4	3.874 9	4.000 0

第一个塑性铰出现在截面 4。

(2) 第二阶段计算

将截面 4 改为塑性铰，修改刚度矩阵。按所述步骤计算，结果如下：

…… 各工况杆端力 ……

单元	杆端	轴力	剪力	弯矩
1	1	0.434 78	0.597 84	1.869 6
	2	−0.434 78	−0.597 84	0.521 75
2	2	0.402 16	0.434 78	−0.521 75
	3	−0.402 16	−0.434 78	2.260 9
3	3	0.402 16	−0.565 22	−2.260 9
	4	−0.402 16	0.565 22	
4	5	0.565 22	0.402 16	1.608 7
	4	−0.565 22	−0.402 16	

增量 $\Delta F_{P1}=\left(\dfrac{M_u-M_1}{\bar{M}_2}\right)_{min}$ 为 0.077 8

第 2 步累计荷载为 2.702 8

各单元杆端弯矩为

1	2.270 6	0.540 67
2	-0.5406 7	3.676 0
3	-3.676 0	-4.000 0
4	4.000 0	4.000 0

第二个塑性铰出现在 5 点。

(3) 第三阶段计算

除截面 4 外,再将截面 5 改为塑性铰,据此修改刚度矩阵,作新的一轮计算。结果如下:

…… 各工况杆端力 ……

单元	杆端	轴力	剪力	弯矩
1	1	0.359 38	1.000 0	2.875 0
	2	-0.359 38	-1.000 0	1.125 0
2	2	0.000 00	0.359 38	-1.125 0
	3	0.000 00	-0.359 38	2.562 5
3	3	0.000 00	-0.640 62	-2.562 5
	4	0.000 00	0.640 62	
4	5 4	-0.640 62		

增量 $\Delta F_{P2}=\left(\dfrac{M_u-M_2}{\bar{M}_3}\right)_{min}$ 为 0.601 5

第 3 步累计荷载为 3.304 3

各单元杆端弯矩为

1	4.000 0	1.217 4
2	-1.217 4	5.217 4
3	-5.217 4	-4.000 0
4	4.000 0	4.000 0

第三个塑性铰在截面 1 处出现。

(4) 第四阶段计算

除截面 4 和 5 外,再将截面 1 改为塑性铰,据此修改刚度矩阵,作新的一轮计算。结果如下:

…… 各工况杆端力 ……

单元	杆端	轴力	剪力	弯矩
1	1	0.000 00	1.00 00	
	2	0.000 00	0.000 00	-1.000 0
2	2	0.000 00	0.000 00	-4.000 0
	3	0.000 00	0.000 00	4.000 0
3	3	0.000 00	-1.000 0	-4.000 0
	4	0.000 00	1.000 0	
4	5 4	-1.000 0		

增量 $\Delta F_{P2}=\left(\dfrac{M_u-M_3}{\bar{M}_4}\right)_{\min}$ 为 0.195 7

第 4 步累计荷载为 3.500 0

各单元杆端弯矩为

1	4.000 0	2.000 0
2	-2.000 0	6.000 0
3	-6.000 0	-4.000 0
4	4.000 0	4.000 0

此时 1、3、4、5 截面都出现了塑性铰，结构已变成单向机构。因此，这一步结果就是极限状态，对应的极限荷载参数为 3.500。

说明：荷载比例关系和各杆极限弯矩不变，但各杆的 EI 改变，例如柱子截面惯性矩为 1，梁的截面惯性矩为 1.837 时，各步计算结果将产生变化，而最终极限荷载却不变。这也即习题中一般没有给出各杆刚度的原因。

注意：本例中长度单位为 m，力单位为 kN，弯矩单位为 kN·m。

[例题 4-4]　试用随本书光盘中 jxhz.exe 程序计算图 4-5 所示刚架的极限荷载。

解：(1) 图 4-5a 结构只承受集中荷载，因此划分为 4 个单元计算，计算所需数据文件和计算结果文件为光盘上的 li244a、li244a.out，极限荷载为

$$F_{pu}=1.5\ \text{kN}$$

(2) 图 4-5b 结构承受均布荷载作用，而该程序只能计算集中荷载作用问题，因此必须将水平杆划分成若干个单元，单元上的均布荷载等效到结点上去才能计算。显然单元划分得越细，精度越高。本例将水平杆划分成 40 个单元，有关数据文件为 li244b、li244b.out，计算所得极限荷载为

$$q_u=1.10\ \text{kN/m}$$

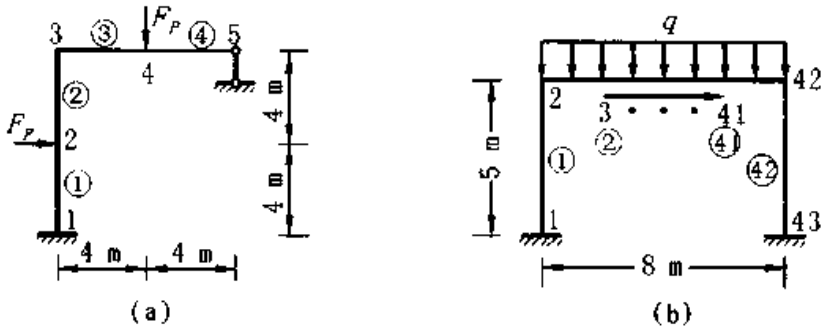


图 4－5　例 4－4 刚架示意

§4－3　结论与讨论

● 刚架结构分支点失稳问题是一种简化处理的结果，这里隐含不考虑轴向变形的假定。压杆的刚度方程推导时虽考虑了单元横向变形对轴向位移的二阶影响，但形函数仍然用的是小变形结果，因此是近似的。要提高精度，需要使单元的 $l\sqrt{\frac{F_P}{EI}}$ 小于 3，可见对给定的结构只有通过减小单元长度来提高精度。

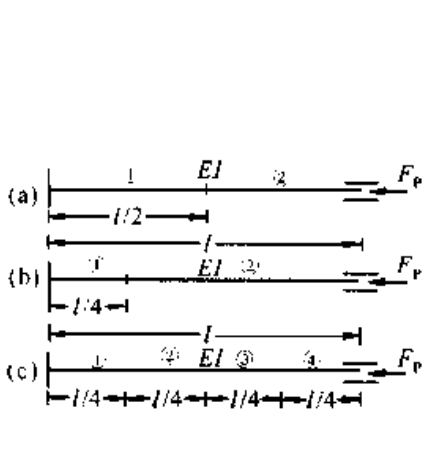
● 显然用增量变刚度法求刚架极限承载力比静力分析复杂，这时除需进行静力计算（确定单位弯矩图）外，还需判别和修改结构整体刚度矩阵。需要判断刚度矩阵奇异使结构达到极限状态。能否在静力计算源程序基础上进行修改，使其能够同时用以确定极限荷载，这一问题留给读者研究思考。

● 从极限状态的判断可见，用有限元法集成“体系”的整体刚度矩阵，由判断这个刚度矩阵是否奇异，可用来确定体系时否可变。进一步分析表明，从刚度矩阵秩的分析即可确定体系的可变性，这是复杂体系几何可变性分析的常用计算机方法。

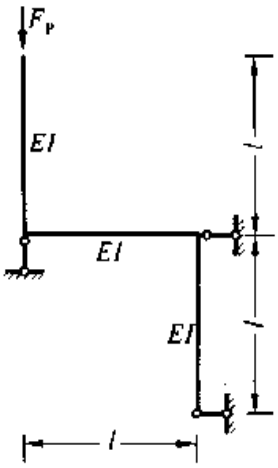
习　题

4－1　对图示等截面压杆，试分别按图 a、b、c 划分的单元计算临界荷载，并分析其精度。

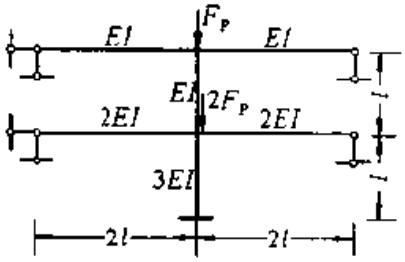
4－2　试计算图示刚架临界荷载。



习题 4－1 图



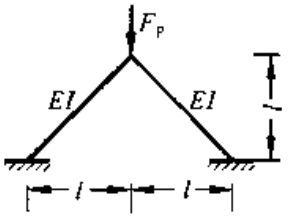
习题 4－2 图



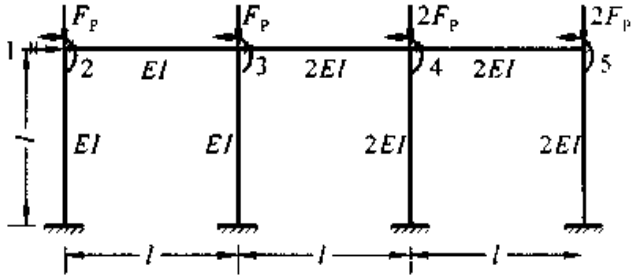
习题 4－3 图

4－3　试计算图示无侧移两层刚架的临界荷载。

4－4　试计算图示刚架临界荷载。



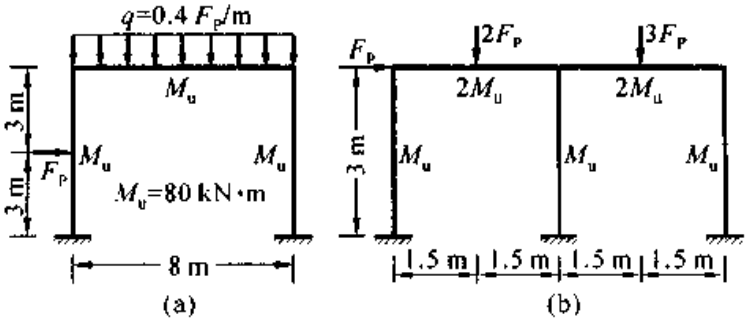
习题 4－4 图



习题 4－5 图

4－5　试计算图示结构的临界荷载。

4－6　试求图示刚架的极限荷载，各杆截面的塑性极限弯矩如图中所示。



习题 4－6 图

第5章
平面问题有限元分析

实际工程中的深梁、墙梁、剪力墙、水坝等虽然都是处于空间受力状态，但由于其问题的特殊性，如本书第1章所述，可以近似的按平面问题处理。

对弹性力学的平面应力和平面应变问题，由于应力－应变关系作弹性模量和泊松比的变换，即可从一类问题变成另一类问题。因此，本章只讨论平面应力问题。

虽然对一些平面应力问题可设法求得解析解，可是大量实际工程问题却难以获得精确解答。但是，有限元法不管什么形状和受荷情况，均能用统一的方法获得工程上满意的结果，因此在结构分析应用程序中得到广泛的应用。

本章着重介绍常用的常应变三角形单元和矩形双线性单元，并简单介绍高精度的平面等参数单元。由于连续体问题与杆系结构在组成和离散方式上的不同，因此还介绍了收敛性和应力结果整理等问题。最后，给出相应单元的计算程序说明及算例，供教学时参考使用。

§5-1 引　　言

5-1-1 结构离散化

1. 连续体问题的特殊性

对于连续体问题，它不象杆系结构有杆件的交汇点、截面突变点等可作

为结点将结构直观地拆成单元。因此，必须人为用假想的线或面将连续体分割成有限个部分，每个部分即为单元。各个部分用有限个点连接，这些连接点称为**结点**，如图 5－1 所示，用有限个仅在结点连接的单元组合体来代替连续的原结构，这显然存在着近似程度问题。随着网格划分的加密和单元的缩小，二者之间的差异将越来越小。常用的单元分为两大类：**三角形和矩形**。与杆系结构离散化类似，结构离散化也包括结点、单元等编码和选取坐标系等。

2．离散化时应注意的问题

● 相邻单元的尺寸应尽可能大小相近，以免因刚度矩阵等集成时产生一个很大的元素和一个很小的元素相加减，而导致精度的较大损失。

● 同一单元的最大和最小尺寸之比应尽可能接近 1，最多应不超过 2。

● 为使整体刚度矩阵的带宽最小，减少储存，提高效率。应使全部单元中相关结点的结点码差值为最小。

● 为获得较好的应力结果，单元划分时内部每个结点连接的单元数应尽量相等。

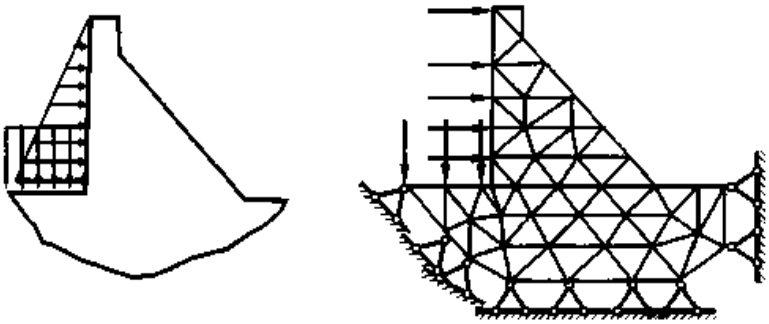


图 5－1　连续体离散示意图

5－1－2　平面问题的总势能表达式

将第 1 章的原理用于平面问题单元分析时，其总势能表达式为

$$E_p = \frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}A - \int_A \boldsymbol{F}_b^T \boldsymbol{d} \mathrm{d}A - \int_{L_\sigma} \boldsymbol{F}_s^T \boldsymbol{d} \mathrm{d}A - \boldsymbol{F}_i^T \boldsymbol{\delta}^e \qquad (5-1)$$

式中，相对第 1 章多了一项 $-\boldsymbol{F}_i^T\boldsymbol{\delta}^e$，它是单元结点力的外力势能。从整体分析角度，由于结点平衡单元结点力是不出现的，因此有的书上没有这一项。但从用势能原理作单元分析和整体分析的推导来说，应该包括这一项。

§5-2 常应变三角形单元

这是最早提出、最简单的一种单元，对于从杆系结构转入连续体问题，理解有限元法的原理、方法和步骤，从而更好的掌握有限单元法是十分必要的。这种单元虽然简单，但它也有可用来拟合复杂曲线边界计算问题的优点。虽然当边界为曲线时，仍存在以直线代替所带来的离散误差，但比用下一节矩形单元进行离散的误差要小得多。

5-2-1 单元结点位移和结点力

图 5-2 为图 5-1 坝体分析中的任一典型单元。单元局部结点编号记为 1,2,3，逆时针进行标记，其对应的整体结点编号记为 i,j,k。如图所示的单元每个结点有两个位移分量，称为**结点位移**(nodal displacement)，记为

$$\boldsymbol{\delta}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{5-2}$$

将三个结点位移排在一起称为**单元结点位移**(element nodal displacement)，与杆系问题一样，记为

$$\boldsymbol{\delta}^e = (\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\delta}_j^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\delta}_k^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{5-3}$$

每个结点上受有 2 个其他单元对它作用的力，称为**结点力**(joint force)，记为

$$\boldsymbol{F}_i = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \end{Bmatrix} \tag{5-4}$$

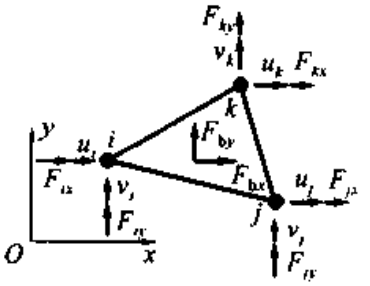


图 5-2 常应变三角形单元

将三个结点力排在一起称为**单元结点力**(element joint force)，记为

$$\boldsymbol{F}^e = (\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{F}_j^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{5-5}$$

单元上作用的体积力记为

$$\boldsymbol{F}_b^e = \begin{Bmatrix} F_{bx} \\ F_{by} \end{Bmatrix} \tag{5-6}$$

若单元的边界是物体边界，并且该边界有表面力作用，则该表面力记为

$$\boldsymbol{F}_s^e = \begin{Bmatrix} F_{Sx} \\ F_{Sy} \end{Bmatrix} \tag{5-7}$$

体积力和表面力分量均为沿坐标方向的分布荷载集度。

5-2-2　用面积坐标建立单元位移场

对于三角形单元，完全可以同杆系单元一样，在直角坐标下采用广义坐标法建立形函数及单元位移场。但下面将引入的面积坐标，除了也可确定点的位置外，对三角形类单元的分析具有许多优越性。因此，首先介绍面积坐标。

1. 面积坐标的定义

设 P 为三角形单元中的一点，与三个顶点 i、j、k 相连，则可将 $\triangle ijk$ 分割成 3 小块，如图 5-3a 所示，分别记这 3 个小三角形面积为

$$\triangle_i = \triangle Pjk, \quad \triangle_j = \triangle Pki, \quad \triangle_k = \triangle Pij$$

则显然存在如下恒等关系：

$$\triangle = \triangle_i + \triangle_j + \triangle_k = \triangle ijk \tag{5-8}$$

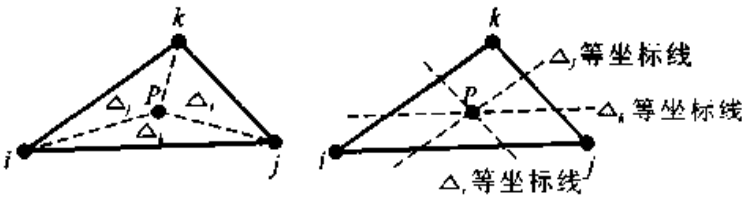


图 5-3　面积坐标示意

由图 5-3b 可见，P 点位置除可用直角表示外，也可用 $\triangle_i$、$\triangle_j$、$\triangle_k$ 中的任意两个来确定。

若令

$$L_l = \frac{\triangle_l}{\triangle} \quad (l = i, j, k) \tag{5-9}$$

则 P 点位置就可用量纲一的参数 L_i、L_j、L_k 中的两个来确定，因此 L_l（$l = i, j, k$）可以作为确定点位置的坐标。因为 L_l 是根据面积定义的，故称 L_i、L_j、L_k 为**面积坐标**(area coordinate)。

由上述定义可见：面积坐标是一种固定于单元的局部坐标，它具有如下性质：

● $L_i + L_j + L_k = 1$。

● 当 P 在结点 l 时，$L_l = 1$（$l = i, j, k$）；当 P 在结点 l 所对的边线上时 $L_l = 0$。

● 当 P 在与 ij 边平行的直线上时，$\triangle_k$ 为常数，L_k 为常数，因此称这些直线为等坐标线，如图 5-3 所示。

若以 L_i, L_j 构成**面积坐标系**，则单元在面积坐标系中的图形是一直角边长为 1 的等腰直角三角形，如图 5-4 所示。3 个结点的面积坐标分别是

结点 i： $L_i=1$， $L_j=L_k=0$

结点 j： $L_j=1$， $L_i=L_k=0$

结点 k： $L_k=1$， $L_i=L_j=0$

单元的三条边线方程为

ij 边 $L_k=0$， jk 边 $L_i=0$

ki 边 $L_j=0$

单元形心处的坐标为

$$L_i=L_j=L_k=\frac{1}{3}$$

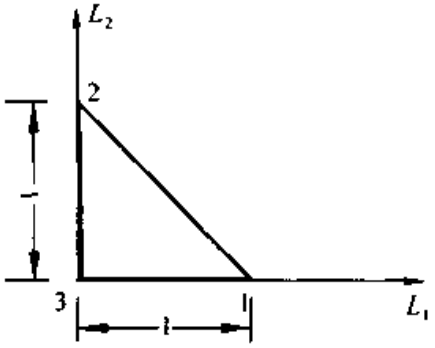


图 5-4 面积坐标下的单元

2. 面积坐标与直角坐标之间的关系

设 P 点坐标为(x,y)，则由数学可知，3 块小面积为

$$\triangle_i=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_j & y_j & 1\\ x_k & y_k & 1\end{vmatrix}\quad(\text{下标轮换规则为 } i\to j\to k\to i)$$

单元面积($\triangle ijk$)为

$$\triangle=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\\ x_k & y_k & 1\end{vmatrix}$$

因此有

$$L_i=\frac{\triangle_i}{\triangle}=\frac{1}{2\triangle}\left(x\begin{vmatrix}y_j & 1\\ y_k & 1\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x_j & 1\\ x_k & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}x_j & y_j\\ x_k & y_k\end{vmatrix}\right)\qquad(5-10)$$

$$=\frac{1}{2\triangle}(a_i+b_ix+c_iy)\quad(i\to j\to k\to i)$$

式中，a_i, b_i, c_i 分别为

$$\begin{aligned}a_i&=x_jy_k-x_ky_j\\ b_i&=y_j-y_k\qquad(i\to j\to k\to i)\\ c_i&=x_k-x_j\end{aligned}$$

若将式(5-10)写成矩阵关系，则有

$$\begin{Bmatrix}L_i\\ L_j\\ L_k\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\triangle}\begin{bmatrix}a_i & b_i & c_i\\ a_j & b_j & c_j\\ a_k & b_k & c_k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\end{Bmatrix}\qquad(5-11)$$

由式(5-11)可求得

$$\begin{Bmatrix}1\\x\\y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\x_i&x_j&x_k\\y_i&y_j&y_k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}L_i\\L_j\\L_k\end{Bmatrix} \tag{5-12}$$

也即

$$\left.\begin{aligned}&L_i+L_j+L_k=1\\&x=L_ix_i+L_jx_j+L_kx_k\\&y=L_iy_i+L_jy_j+L_ky_k\end{aligned}\right\} \tag{5-13}$$

式(5-10)和式(5-13)即为两种坐标系间的变换关系。

建立了坐标系间的变换关系，则按求导法则可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{1}{2\triangle}\left(b_i\frac{\partial}{\partial L_i}+b_j\frac{\partial}{\partial L_j}+b_k\frac{\partial}{\partial L_k}\right)\\\frac{\partial}{\partial y}&=\frac{1}{2\triangle}\left(c_i\frac{\partial}{\partial L_i}+c_j\frac{\partial}{\partial L_j}+c_k\frac{\partial}{\partial L_k}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-14}$$

利用数学知识($L_k=1-L_i-L_j$ 和分部积分)可以证明

$$\int_V L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma \mathrm{d}V=\frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!}2\delta\triangle \tag{5-15}$$

$$\int_s L_i^\alpha L_j^\beta \mathrm{d}S=\frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}\delta l_{ij}\quad(ij\to jk\to kj) \tag{5-16}$$

式中，l_{ij} 为 ij 边的长度，δ 为平面问题板厚。这些公式将在今后研究三角形类等参数单元计算中应用。

3．常应变三角形单元的位移场

由形函数的性质可知，本点为 1 它点为零，在单元内任一点全部形函数的和均为 1。面积坐标的性质正好与形函数的性质相同，所以常应变三角形单元的形函数可取面积坐标，即

$$N_i=L_i,\quad N_j=L_j,\quad N_k=L_k \tag{5-17}$$

由此可得形函数矩阵为

$$\begin{aligned}N&=\begin{bmatrix}N_i&0&N_j&0&N_k&0\\0&N_i&0&N_j&0&N_k\end{bmatrix}\\&=(N_iI_2\quad N_jI_2\quad N_kI_2)\end{aligned} \tag{5-18}$$

式中，I_2 为二阶单位矩阵；

$$N_i=\frac{1}{2\triangle}(a_i+b_ix+c_iy)\quad(i\to j\to k\to i) \tag{5-19}$$

有了形函数矩阵，与杆系单元分析一样，单元内任意一点的位移可表为

$$\boldsymbol{d}=\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e \tag{5-20}$$

5-2-3 基于势能原理的单元分析

下面与杆件单元分析一样，用势能原理推导单元的刚度矩阵和单元的等效荷载列阵。

1. 单元势能

为了计算单元的势能，首先由单元位移确定单元应变和应力，得到应变能。再由单元位移和单元上受的力计算外力势能。

● 应变

将单元位移式(5-20)代入平面问题的几何方程，可得

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \tag{5-21}$$

式中，微分算子矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{5-22}$$

因此由位移模式可得单元中任意一点的应变矩阵为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^{e}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{e} \tag{5-23}$$

式中，

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_k}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{B}_i \quad \boldsymbol{B}_j \quad \boldsymbol{B}_k) \tag{5-24}$$

称为应变矩阵。将式(5-19)代入式(5-24)，可得

$$\boldsymbol{B}_l=\frac{1}{2\triangle}\begin{bmatrix}b_l & 0\\ 0 & c_l\\ c_l & b_l\end{bmatrix}\quad (l=i,j,k) \tag{5-25}$$

可见，由于采用了线性位移函数，应变矩阵是常数矩阵。因此，单元中的应力及应变是常数，这就是把这种单元称为**常应变单元**(constant strain ele-

ment)的原因。

若单元中存在初应变(由温度改变或收缩等因素引起),

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \tag{5-26}$$

则单元的弹性应变 $\boldsymbol{e}$ 为

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \tag{5-27}$$

● **应力**

将式(5-27)代入物理方程可得单元应力,对线弹性各向同性体有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{De} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{B\delta}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &= \boldsymbol{S\delta}^e - \boldsymbol{D\varepsilon}_0 \end{aligned} \tag{5-28}$$

式中,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{DB} &= (\boldsymbol{DB}_i \quad \boldsymbol{DB}_j \quad \boldsymbol{DB}_k) \\ &= (\boldsymbol{S}_i \quad \boldsymbol{S}_j \quad \boldsymbol{S}_k) \end{aligned} \tag{5-29}$$

称为**应力矩阵**(stress matrix)。对两类平面问题应力矩阵分别为

平面应力:

$$\boldsymbol{S}_i = \frac{E}{2\triangle(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_i & \nu c_i \\ \nu b_i & c_i \\ \dfrac{1-\nu}{2} c_i & \dfrac{1-\nu}{2} b_i \end{bmatrix} \quad (i \to j \to k \to i) \tag{5-30}$$

平面应变:

$$\boldsymbol{S}_i = \frac{E(1-\nu)}{2\triangle(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} b_i & \dfrac{\nu}{1-\nu} c_i \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} b_i & c_i \\ \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} c_i & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} b_i \end{bmatrix} \quad (i \to j \to k \to i) \tag{5-31}$$

● **应变能**

根据式(5-27)和式(5-28),在有初应变的情况下单元的应变能为

$$V_\varepsilon(\boldsymbol{d}) = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}\,\mathrm{d}V = \frac{\triangle \cdot \delta}{2} \boldsymbol{\delta}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{DB\delta}^e - \delta \cdot \boldsymbol{\delta}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \int_\triangle \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}A + C \tag{5-32}$$

式中,δ、$\triangle$——分别为单元的厚度与中面面积,

C——与 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 无关的由 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 引起的应变能

● **外力势能**

若单元的三边均不是物体的边界(也即没有边界属于 S_σ),此时外力势为

$$E_p^e = -\int_V \boldsymbol{F}_{be}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}V - \boldsymbol{F}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}^e = -\left(\delta\int_\triangle \boldsymbol{F}_{be}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}A + \boldsymbol{F}_e^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\delta}^e \tag{5-33}$$

若单元至少有一边是物体边界时,外力势中应增加表面力的外力势,也即

$$\begin{aligned} E_p^e &= -\left(\int_V \boldsymbol{F}_{be}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_{Se}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}S + \boldsymbol{F}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}^e\right) \\ &= -\left[\delta\left(\int_V \boldsymbol{F}_{be}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}V + \int_{L_\sigma} \boldsymbol{F}_{Se}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}L\right) + \boldsymbol{F}_e^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\delta}^e \end{aligned} \tag{5-34}$$

● **单元总势能**

由式(5-32)和式(5-34)得单元总势能为

$$\begin{aligned} E_p^e &= V_\varepsilon(\boldsymbol{d}) + E_p^e \\ &= \frac{\delta\triangle}{2}\boldsymbol{\delta}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e - \delta\boldsymbol{\delta}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\int_\triangle \boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathrm{d}A + C + E_p^e \end{aligned} \tag{5-35}$$

2. 单元特性分析

● **单元刚度方程**

令单元势能的一阶变分等于零,也即 $\delta E_P^e = 0$,则可得

$$\delta\triangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e - \delta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\int_\triangle \boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathrm{d}A + \delta E_P^e = \boldsymbol{0} \tag{5-36}$$

当为内部单元时

$$\delta E_P^e = -\left(\boldsymbol{F}^e + \delta\int_\triangle \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_b^e\,\mathrm{d}A\right) \tag{5-37}$$

当单元在边界处时

$$\delta E_P^e = -\left[\boldsymbol{F}^e + \delta\int_\triangle \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_b^e\,\mathrm{d}A + \int_{L_\sigma} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_S^e\,\mathrm{d}L\right] \tag{5-38}$$

若记

$$\boldsymbol{k}^e = \delta\triangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} \end{bmatrix} \tag{5-39}$$

$$\boldsymbol{F}_E^e = \delta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\int_\triangle \boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathrm{d}A + \delta\int_\triangle \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_b^e\,\mathrm{d}A \tag{5-40}$$

或

$$\boldsymbol{F}_E^e = \delta\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\int_\triangle \boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathrm{d}A + \delta\left(\int_\triangle \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_b^e\,\mathrm{d}A + \int_{L_\sigma} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_S^e\,\mathrm{d}L\right)$$

则式(5-36)可改写为

$$\boldsymbol{k}^e\boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{F}^e + \boldsymbol{F}_E^e \tag{5-41}$$

上式即为**单元刚度方程式**，矩阵 k^e 和 F_E^e 分别称为**单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵**。

● **单元刚度矩阵的显式表示**

式(5－39)中子矩阵 k_{rs} 为

平面应力时：

$$k_{rs}=\frac{Et}{4(1-\nu^2)\Delta}\begin{bmatrix} b_rb_s+\dfrac{1-\nu}{2}c_rc_s & \nu b_rc_s+\dfrac{1-\nu}{2}c_rb_s \\ \nu c_rb_s+\dfrac{1-\nu}{2}b_rc_s & c_rc_s+\dfrac{1-\nu}{2}b_rb_s \end{bmatrix} \tag{5-42}$$

$$(r,s=i,j,k)$$

平面应变时：将上式中 E 变成 $\dfrac{E}{1-\nu^2}$，ν 变成 $\dfrac{\nu}{1-\nu}$ 即可。

● **单元等效结点荷载矩阵**

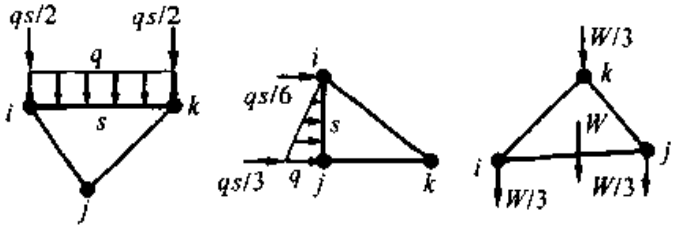


图 5－5　边界荷载与重力的静力等效示意图

等效结点荷载也可不按式(5－40)计算，而由静力等效原则直接取得，结果是相同的。图 5－5 所示即为几种单元边界荷载和自重的等效结点荷载。式(5－40)中第一项为与初应变有关的等效荷载，与引起 ε_0 的因素有关，对于温度引起的 ε_0，设温度改变量为 Δt，线胀系数为 α，则温度引起的初应变为

$$\varepsilon_0=(\alpha\Delta t \quad \alpha\Delta t \quad 0)^T$$

代入式(5－40)中第一项，即可求出温度改变而引起的等效结点荷载。

综上所述，对比平面问题和杆系问题可得如下几点结论：

● 由于平面问题对象是连续体，因此离散时单元、结点是人为确定的。

● 单元中任一点的位置可用(整体)直角坐标表示，也可用(局部)面积坐标表示。三个面积坐标只有两个是独立的。

● 无论用广义坐标法，还是用面积坐标下试凑法，所得形函数均为

$$N_i=\frac{1}{2\Delta}(a_i+b_ix+c_iy)=L_i \quad (i=i,j,k)$$

建立形函数的基本方法是与杆系一样的。

● 由形函数建立位移场，最终形式与杆系是一样的

$$d = N\delta^e$$

● 从建立的位移场出发，进行单元分析的全过程，除问题本身特性求应变、应力等几何方程、物理方程不同外，方法步骤是完全相同的，最终单元刚度方程形式完全相同。

$$k^e\delta^e = F^e + F_E^e$$

由此可见，有限元分析的关键是如何建立单元位移场。从编制程序考虑是获得 k_{rs}^e 和 F_E^e 的计算公式。

● 考虑温度等初应变，与杆系问题一样，最后归结为等效结点荷载.

5-2-4 计算实例

[**例题 5-1**] 试用三角形单元分析图 5-6 所示均匀应力场圆孔附近应力集中问题。

解：取无限大板的一部分，板的边缘处为均匀应力场。由于孔口附近会出现应力集中，故在孔口附近单元逐渐加密。图 5-6a 为网格划分情况。图 5-6b 与 5-6c 分别表示按各向同性体和正交各向异性体有限元解答与理论解的对比情况，图中曲线为理论解，小圆圈为有限元解。从图中可看出，二者吻合良好。

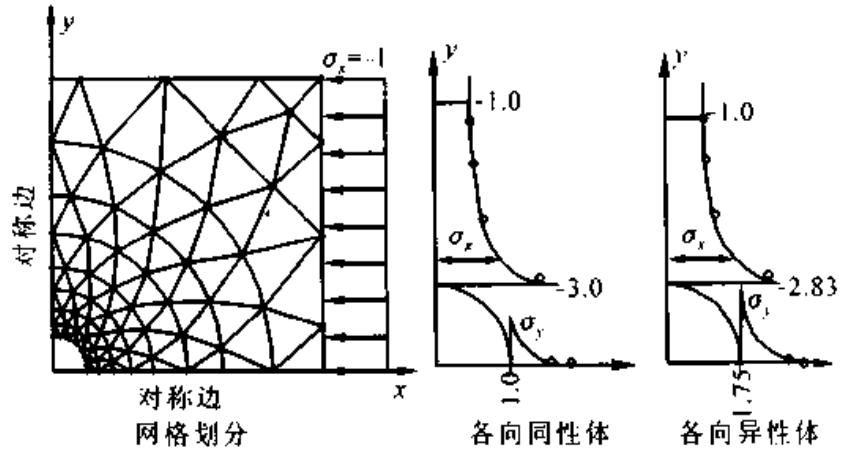


图 5-6 圆孔应力集中算例

5-2-5 收敛准则

在单元形状、结点个数确定之后，单元位移函数的选取是影响解答的关键。当位移函数满足下列准则时，解答一定是收敛的，即随着单元尺寸的缩小，解答趋于精确解。

准则 1. 位移函数中必须包含刚体位移。若不包含，则在单元结点位移为单元刚体位移时，单元会产生非零应变。

准则2. 位移函数必须能反映单元的常应变状态。因为在单元尺寸趋于零时,单元中各点的应变应趋于常数。

准则3. 位移函数应在单元内连续,在单元之间边界上要协调。以免连续体用离散模型代替后产生不连续而使势能原理不成立。

准则1和准则2称为完备性条件;准则3称为协调性条件。同时满足完备、协调条件的单元称为协调元。容易验证常应变三角形单元是一种协调元。利用它作有限元分析,解答一定是收敛的。

需要指出的是,不满足收敛准则的单元不一定不收敛。满足一定条件的一些非协调单元不仅收敛,而且收敛速度比协调单元还快、精度更高。有兴趣的读者可自行参阅其他参考资料。

§5-3 矩形双线性单元

常应变三角形单元的单元应力是常数,当用以分析应力剧烈变化的问题时,网格必需更密才能得到较好的计算结果。这样,将使结点数目增加,未知量增多,工作量增大。下面介绍的矩形双线性单元,其应力是线性的,比常应变单元更接近实际问题的应力状态,因此可以用较少的单元得到较好的结果。

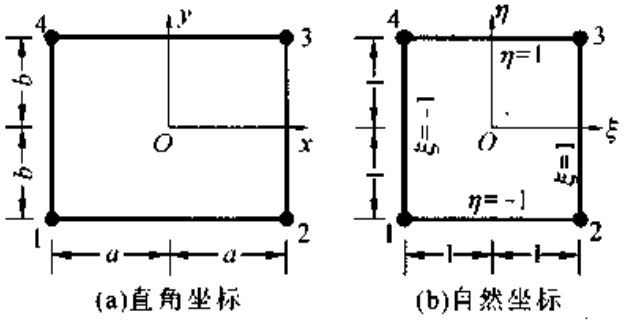


图5-7 矩形双线性单元

图5-7a所示为有四个结点的平面矩形单元,共有8个结点位移参数。可以直接在直角坐标下进行分析。为了使分析过程简洁,这里引入两个量纲为一的**正则坐标**(自然坐标 natural coordinate)。

$$\xi=\frac{x}{a},\quad \eta=\frac{y}{b} \tag{5-43}$$

在正则坐标系下原矩形单元映射为边长为2的正方形单元,如图5-7b所示。

5-3-1 用正则坐标建立单元位移场

1. 位移模式

● 广义坐标法

与杆系单元一样，根据结点位移条件，可设单元的位移函数为

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ v &= a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta \end{aligned} \tag{5-44}$$

式中，a_i 为广义坐标，可根据结点位移求出，代回式(5-44)整理后即可获得以形函数表达的位移场。

● 试凑法确定形函数

在 $\xi\eta$ 坐标系下，单元的四条边界线的方程分别为

$$\left.\begin{aligned} \eta + 1 = 0, \quad \xi - 1 = 0 \\ \eta - 1 = 0, \quad \xi + 1 = 0 \end{aligned}\right| \tag{5-45}$$

根据形函数应具有的性质，本点处形函数为 1，其他点处形函数为 0。例如

$$\begin{aligned} &N_1(\xi_1, \eta_1) = 1 \\ &N_1(\xi_2, \eta_2) = N_1(\xi_3, \eta_3) = N_1(\xi_4, \eta_4) = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

由式(5-45)可知如下函数

$$\begin{aligned} N_1 &= \alpha(\xi - 1)(\eta - 1) \\ N_2 &= \beta(\xi + 1)(\eta - 1) \\ N_3 &= \gamma(\xi + 1)(\eta + 1) \\ N_4 &= \delta(\xi - 1)(\eta + 1) \end{aligned} \tag{b}$$

将自动满足形函数其它点为零的性质。

代入本点坐标，且令其等于 1，可求得

$$\alpha = -\beta = \gamma = -\delta = \frac{1}{4} \tag{c}$$

将式(c)代回式(b)，且引入如下记号：

$$\xi_o = \xi_i\xi, \quad \eta_o = \eta_i\eta \quad (i = 1,2,3,4) \tag{5-46}$$

则形函数可写作

$$N_i = (1 + \xi_o)(1 + \eta_o)/4 \quad (i = 1,2,3,4) \tag{5-47}$$

可以验证广义坐标法与试凑法的结果完全相同。形函数的图形如图 5-8 所示。

● 单元位移函数

有了形函数，与三角形单元一样，可由单元结点位移用下式构造单元位移场：

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^{e} \tag{5-48}$$

式中，形函数矩阵 $\boldsymbol{N}$ 为

$$\boldsymbol{N}=(N_1\boldsymbol{I}_2 \quad N_2\boldsymbol{I}_2 \quad N_3\boldsymbol{I}_2 \quad N_4\boldsymbol{I}_2) \tag{5-49}$$

2. 单元协调性

从式(5－44)或式(5　47)和式(5－48)可见位移函数中包含常数项和一次项，并且从式(5－47)可验证 $\sum N_i=1$，故完备性条件满足。在单元边界上(或 $\xi=\pm1$ 或 $\eta=\pm1$)，位移是按线性变化的，在相邻单元边界上结点位移协调的情况下，边界位移也是协调的。因此，这种单元是收敛的。



图 5－8　双线性单元形函数示意图

5－3－2　应变和应力矩阵

采用与三角形单元完全相同的分析方法和步骤，可得以下结果

● **应变矩阵**

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \boldsymbol{B}_3 \quad \boldsymbol{B}_4) \tag{5-50}$$

式中，

$$\boldsymbol{B}_i=\frac{1}{4ab}\begin{bmatrix}b\xi_i(1+\eta_o) & 0\\ 0 & a\eta_i(1+\xi_o)\\ a\eta_i(1+\xi_o) & b\xi_i(1+\eta_o)\end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \tag{5-51}$$

式中，a、b 为 x，y 方向单元边长的一半。

● **应力矩阵**

平面应力：

$$\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_1 \quad \boldsymbol{S}_2 \quad \boldsymbol{S}_3 \quad \boldsymbol{S}_4) \tag{5-52}$$

$$\boldsymbol{S}_i=\frac{E}{4ab(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}b\xi_i(1+\eta_o) & \nu a\eta_i(1+\xi_o)\\ \nu b\xi_i(1+\eta_o) & a\eta_i(1+\xi_o)\\ \dfrac{1-\nu}{2}a\eta_i(1+\xi_o) & \dfrac{1-\nu}{2}b\xi_i(1+\eta_o)\end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \tag{5-53}$$

平面应变：

将上式中的 E、ν 分别用 $E'=\dfrac{E}{1-\nu}$、$\nu'=\dfrac{\nu}{1-\nu}$ 代替即可。

5-3-3 单元刚度矩阵和单元等效荷载列阵

利用势能原理可推得单元的刚度矩阵和等效结点荷载如下：

● **单元刚度矩阵**

$$\boldsymbol{k}^e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} & \boldsymbol{k}_{13} & \boldsymbol{k}_{14}\\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} & \boldsymbol{k}_{23} & \boldsymbol{k}_{24}\\ \boldsymbol{k}_{31} & \boldsymbol{k}_{32} & \boldsymbol{k}_{33} & \boldsymbol{k}_{34}\\ \boldsymbol{k}_{41} & \boldsymbol{k}_{42} & \boldsymbol{k}_{43} & \boldsymbol{k}_{44}\end{bmatrix}^e \tag{5-54}$$

$$\boldsymbol{k}_{ij}^e = ab\delta\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_j\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{5-55}$$

平面应力时：

$$\boldsymbol{k}_{ij}^e=\frac{Et}{4(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\quad(i,j=1,2,3,4) \tag{5-56a}$$

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{b}{a}\left(1+\frac{1}{3}\eta_i\eta_j\right)\xi_i\xi_j+\frac{1-\nu}{2}\frac{a}{b}\left(1+\frac{1}{3}\xi_i\xi_j\right)\eta_i\eta_j\\ A_2&=\nu\xi_i\eta_j+\frac{1-\nu}{2}\eta_i\xi_j\\ A_3&=\eta_i\xi_j+\frac{1-\nu}{2}\xi_i\eta_j\\ A_4&=\frac{a}{b}\left(1+\frac{1}{3}\xi_i\xi_j\right)\eta_i\eta_j+\frac{1-\nu}{2}\frac{b}{a}\left(1+\frac{1}{3}\eta_i\eta_j\right)\xi_i\xi_j\end{aligned}\right\} \tag{5-56b}$$

平面应变时：将上式中的 E、ν 分别用 $E'=\dfrac{E}{1-\nu}$、$\nu'=\dfrac{\nu}{1-\nu}$ 代替即可。

● **单元等效结点荷载矩阵**

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^e=\delta\left(\int_{-1}^{1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^e\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\sum\int_{L_\sigma}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}^e\mathrm{d}L\right) \tag{5-57}$$

式(5-57)中后一项只有单元处于边界且受有表面力时才有。与三角形单元一样，等效荷载也可由静力等效来得到。

从式(5-51)可看到，双线性单元内应变分量不是常数，这是由于位移函数增加了 $\xi\eta$ 项(相当于 xy 项)的结果，其精度要比常应变三角形单元高。但是这种单元对复杂边界形状的问题，离散误差比三角形单元大。为了解决这个问题，在程序中将这两种单元混合使用，但增加了程序编制的复杂性。

5-3-4 计算结果整理

常应变三角形单元、矩形双线性单元均是以位移参数作为基本未知量的。因此，这类单元称为**位移元**。在位移元的分析中，首先求得结点的位

移，然后由几何方程和物理方程求得应力，所以应力的精度与里兹法一样低于位移的精度。另外，由各个相关单元求得的应力是不相同的，存在应力阶梯变化，而实际结构应力是连续的。因此，对应力计算结果一般须进行整理。较简单的方法有：

1. 绕结点平均法

设常应变三角形单元划分如图 5－9 所示，因每一单元均是常应变(常应力)的，故相邻单元应力呈阶梯状变化。所谓**绕结点平均法**是指：

(1) 对图示内结点 j(1 到 6)分别计算与其相关的各单元应力的平均值作为该点的应力。也即：

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_j = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{\sigma}_i$$

(2) 根据所求得的内结点应力(一般不应少于三个)，利用外插值公式计算边界点的应力(如图中 σ_0，σ_7)。实践证明，绕结点平均法处理后的结果能较好反映实际应力。

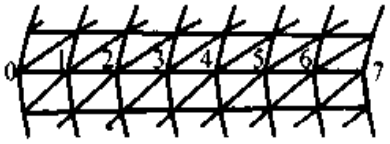


图 5－9　应力结果整理示意

2. 两单元平均法

仍以图 5－9 情形加以说明，所谓两单元平均法是指：

(1) 以相邻两单元应力的平均值作为其边中点的应力；

(2) 用外插值法求边界单元中点的应力。

上述两种方法主要用于处理三角形和矩形等普通低阶单元应力。

5－3－5　计算实例

[**例题 5－2**]　梁的尺寸及荷载如图 5－10a 所示，弹性模量 $E=2\times10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$，泊松比 $\nu=0.3$，梁厚 $\delta=1$ cm。试用矩形单元进行分析。

解：由于对称性及反对称性，仅需对梁的 1/4 进行计算，共划成 16 个单元，25 个结点，如图 5－10b 所示。为了消除刚体位移，假定结点 1 固定，即 $u_1=v_1=0$。

由弹性力学所求得的位移精确解为

$$u=\frac{1}{60\ 000}xy,\quad v=\frac{1}{120\ 000}(x^2+0.3y^2)$$

对于结点 25 和 13，按上式算得

$$u_{25}=2.25\times10^{-4}\ \mathrm{cm},\quad v_{25}=-1.912\ 5\times10^{-4}\ \mathrm{cm}$$

$$u_{13}=5.625\times10^{-4}\ \mathrm{cm},\quad v_{13}=-4.781\ 25\times10^{-4}\ \mathrm{cm}$$

有限单元法的计算结果为

$$u_{25}=2.216\times10^{-4}\ \text{cm},\quad v_{25}=-1.882\ 1\times10^{-4}\ \text{cm}$$

$$u_{13}=5.562\times10^{-5}\ \text{cm},\quad v_{13}=-4.715\times10^{-5}\ \text{cm}$$

二者对比可见，有限元位移精度是比较高的。

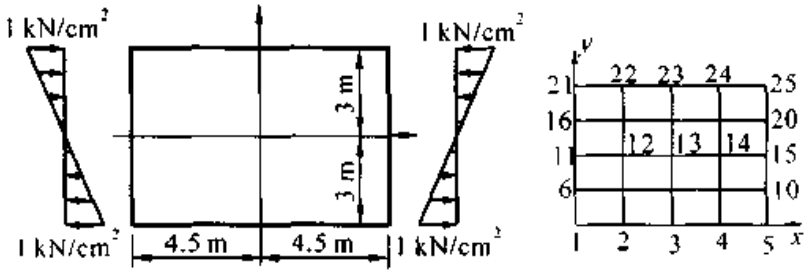


图 5－10　纯弯梁算例

[**例题 5－3**]　以图 5－11 所示单位厚度的悬臂梁为例，在悬臂端截面上承受抛物线分布的竖向荷载，试对三角形单元与矩形单元的计算结果进行比较。

解：对图 5－11 所示的悬臂梁，分别采用双线性矩形单元和常应变三角形单元，在不同单元个数情况下求得的 A 点竖向位移和理论值的结果进行对比。荷载在梁端截面上按抛物线分布，按功的等效原则移置到结点上。从图中可见双线性矩形单元在相同结点自由度情况下给出比常应变三角形单元好的结果。

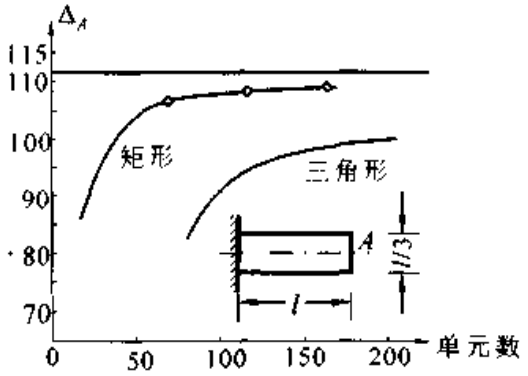


图 5－11　例题 5－3

§5－4　平面问题计算程序 PSTE 的简要说明

● **功能**。随书光盘上的 pste.for 是三角形和矩形单元作平面问题计算的 FORTRAN77 源程序，pste.exe 则为它的执行程序。为便于应用，程序中

已经考虑到尽量减少了数据的准备工作。

● **数据准备**。限于篇幅，随书光盘上有 pste.txt，简要说明了数据文件的填写格式，配合算例的数据文件和计算结果，读者不难掌握程序的使用。

● **算例**。随书光盘上 pste.dat 文件为算例的数据文件，pste.out 是用 pste.exe 计算 pste.dat 问题的结果。希望读者能结合上述原理阅读源程序，并在此基础上，仿照所给算例，用 jsjfx.exe 自行计算一些算例（例如深梁、剪力墙等），以便更好地掌握有限元原理和程序的应用。

*§5-5 平面等参数单元

对于曲线边界问题，矩形或三角形单元不仅精度低，而且必然产生离散误差。如果通过缩小单元尺寸来改善计算结果，又将使未知量数目剧增，为了提高精度减少未知量，本节介绍一种工程有限元分析中广泛应用的“等参数单元（简称等参元）”。

等参元的基本思想是：首先建立规整形状单元（称为母单元）的形函数，然后利用它解决以下两问题：

（1）根据坐标映射用母单元形函数和实际单元的结点坐标确定所划分单元的几何形状，这个实际划分单元称为“子单元”。

（2）利用母单元形函数和单元结点位移建立子单元的位移场。

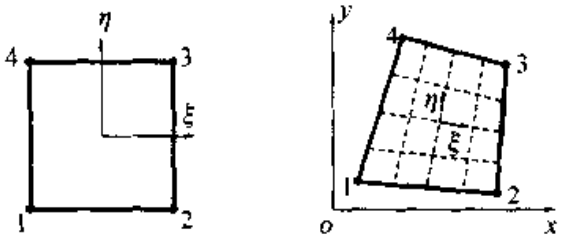
解决了这两个问题后，利用势能原理，进行一定的数学推导，就可以建立等参元的单元刚度方程。

5-5-1 基本概念

现以任意四边形等参元为例，说明等参元的有关基本概念。

1. 实际单元几何形状的描述，图形变换

图 5-12b 为一任意 4 个结点的四边形单元（子单元）。在直角坐标下若用解析式描述单元上的任意一点，亦即确定其几何形状不太容易，为此选用自然坐标表示的四结点正方形单元做参照（称为母单元），见图 5-12a。设法通过函数映射来实现从母单元到子单元之间的图形变换。其实质是建立两个单元上所有点的一一对应关系。母单元用自然坐标表示的形函数在§5-3 中已经建立：$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)$[见式(5-47)]。由于形函数的性质（“本点 1，其他点 0”），从母单元映射到任意子单元的映射关系可借子单



(a) 母单元　　(b) 等参元

图 5-12 四结点等参元示意

元的结点坐标表达为

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{4} x_i N_i(\xi,\eta) \\ y &= \sum_{i=1}^{4} y_i N_i(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{5-58}$$

若记单元任一点的坐标矩阵[简称**坐标矩阵**(coordinate matrix)]、结点坐标矩阵和单元结点坐标矩阵分别为

$$\boldsymbol{x} = (x \quad y)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_i = (x_i \quad y_i)^{\mathrm{T}} \quad (i = 1,2,3,4)$$

$$\boldsymbol{x}^e = (x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4)^{\mathrm{T}}$$

则式(5-58)可用矩阵形式表示如下：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^e \tag{5-59}$$

式中，$\boldsymbol{N}$ 为母单元的形函数矩阵。

由式(5-58)或式(5-59)可得如下结论：

● 由母单元形函数的性质可知，通过映射可得到子单元结点直角坐标。

● 母单元中某一坐标线(例如 η = 常数)代入式(5-58)，可得

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + a_2\xi \\ y &= b_1 + b_2\xi \end{aligned}\right\} \tag{5-60}$$

上式是以 ξ 为参变量的子单元整体 xy 坐标系中直线的参数方程。也即映射结果是子单元的一条斜直线。

● 母单元的正交坐标轴(ξ,η)映射到子单元上，得到一个斜角坐标(以后的高阶单元为曲线坐标)轴，仍记为(ξ,η)轴，因此现在子单元有两种坐标(x,y)和(ξ,η)。(x,y)是整体坐标，而(ξ,η)是固定于单元的局部坐标。

● 当母单元形函数确定后，再由各种具体问题的实际单元划分所确定的子单元结点坐标，由式(5-59)关系，可映射得到所有实际单元。因此，关键是建立母单元的形函数。

● 由于母单元直线经式(5-59)映射后仍为直线，而两个相邻子单元的

公共边线有相同的结点，故映射后的两子单元相邻边线处处吻合。因此，不会产生分离和重叠。

2. 建立单元位移场

由于(ξ,η)坐标既是母元的直角坐标，又是等参元的曲线坐标，因此，母单元的形函数是(ξ,η)的函数，因此等参元的位移场均可仿母单元的位移场建立如下：

$$u = \sum_{i=1}^{4} u_i N_i(\xi,\eta)$$

$$v = \sum_{i=1}^{4} v_i N_i(\xi,\eta)$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e \tag{5-61}$$

式中，$\boldsymbol{N}$ 为母单元的形函数，$\boldsymbol{d}$ 为子单元中任意一点的位移，

$\boldsymbol{\delta}^e$ 为子单元的结点位移。

3. 几点说明

● 尽管在形式上式(5－61)与母单元的位移场[见式(5－48)]是一样的，但等参元的位移场是以斜角或曲线坐标(ξ,η)表达的，而母单元的位移场是以正则坐标(ξ,η)表达的。因此，等参元的位移分布与母单元的位移分布即使在结点位移相同的情况下也可能是不同的。

● 比较式(5－59)与式(5－61)，可见它们是相似的，即单元位移场与单元几何形状都是用相同的形函数构造的，并且用相同个数的结点参数，(结点位移和结点坐标)来描述。因此，称这类单元为**等参数单元**(简称为等参元 isoparametric element)。

● 若由结点坐标插值构造单元几何形状所用的形函数比由结点位移插值构造单元位移场的形函数阶次低，并且所用结点参数个数少，则称为**亚参元**；反之，若阶次高，结点个数多，则称为**超参元**。亚参元和超参元虽也都有应用，但不如等参元应用普遍。前面介绍的常应变三角形单元和四结点矩形元实际都是等参元。

4. 两类坐标系之间导数的变换关系

(1) 由于单元位移是在局部坐标系(ξ,η)下描述的，而以位移求应变所用的公式是以整体坐标系(x,y)表达的，要将形函数利用坐标变换式(5－59)写成整体坐标(x,y)的显式一般是十分困难的。因此，需要将对直角坐标的求导运算变换成对斜角或曲线坐标的求导运算。下面讨论偏导数$\frac{\partial}{\partial\alpha}$，$\frac{\partial}{\partial y}$与$\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}$之间的变换关系。根据复合函数求导法则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}&=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial\eta}&=\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{5-62}$$

或以矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial\xi}\\ \frac{\partial}{\partial\eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi}&\frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta}&\frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}\tag{5-63}$$

将式(5-58)代入式(5-63),则有

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial\xi}\\ \frac{\partial}{\partial\eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\xi}x_i&\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\xi}y_i\\ \sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\eta}x_i&\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\eta}y_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}\tag{5-64}$$

由式(5-64)可得

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\det\boldsymbol{J}}\begin{bmatrix}\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\eta}y_i&-\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\xi}y_i\\ -\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\eta}x_i&\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\xi}x_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial\xi}\\ \frac{\partial}{\partial\eta}\end{Bmatrix}\tag{5-65}$$

其中,

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\xi}x_i&\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\xi}y_i\\ \sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\eta}x_i&\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\eta}y_i\end{bmatrix}\tag{5-66}$$

称为**雅可比矩阵**(Jacobi matrix)。而

$$\det\boldsymbol{J}=\left(\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\xi}x_i\right)\left(\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\eta}y_i\right)-\left(\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\xi}y_i\right)\left(\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial\eta}x_i\right)\tag{5-67}$$

称为**雅可比行列式**。基于式(5-65)和式(5-66)对于平面问题微分算子矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&0\\ 0&\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_x&0\\ 0&A_y\\ A_y&A_x\end{bmatrix}\tag{5-68}$$

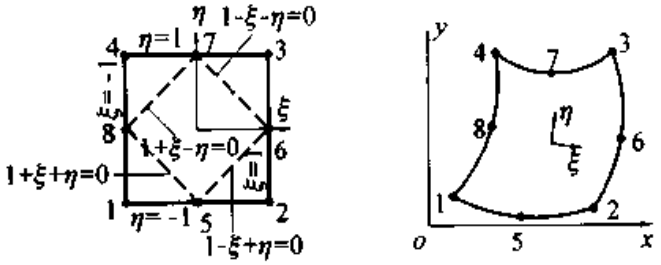
其中,

$$A_x = (\det \boldsymbol{J})^{-1}\left[\left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i\right)\frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right]$$
$$A_y = (\det \boldsymbol{J})^{-1}\left[-\left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i\right)\frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right] \tag{5-69}$$

5-5-2　几种常用单元描述和位移模式

1. 八个结点曲边四边形等参元

图5-13给出了8个结点曲边四边形等参元母单元与子单元图形示意，四边形等参元四结点增加到8个结点，一方面可以进一步提高精度，另一方面又可拟合曲线边界，因而此单元用途较广。



(a)母单元及试凑法方程示意　　(b)等参元

图5-13　8个结点等参元示意

● 母单元的形函数

8个结点四边形等参元母单元是8个结点正方形单元(图5-13a)，除4个角顶结点外，还取四边中点作为新结点。根据形函数性质，可由试凑法得到8个形函数。下面介绍由低阶母单元形函数按统一方法生成高阶母单元形函数的步骤：

(1) 根据形函数性质，用试凑法建立边界上新增结点的形函数。对8个结点等参元为

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$
$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

(2) 计算低阶母单元形函数在新增结点处的值。8个结点等参元分别为

$$N_1|_5 = N_1|_8 = 0.5, \quad N_1|_6 = N_1|_7 = 0, \quad N_2|_5 = N_2|_6 = 0.5$$
$$N_2|_7 = N_2|_8 = 0, \quad N_3|_6 = N_3|_7 = 0.5, \quad N_3|_8 = N_3|_5 = 0$$
$$N_4|_7 = N_4|_8 = 0.5, \quad N_4|_5 = N_4|_6 = 0$$

(3) 对低阶母单元角顶结点形函数进行“其他点为零的修正”。例如8

个结点等参元的 N_1 为

$$\begin{aligned}N_1 &= \overline{N}_1 - \sum_5^8 N_1|_i N_i \\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) - \\ &\quad \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \\ &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)\end{aligned}$$

可以验证直接试凑和用统一方法所得的结果完全相同。8 个结点等参元的全部形函数为

$$\left.\begin{aligned}N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta), \quad N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_2 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta), \quad N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_4 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)\end{aligned}\right\} \tag{5-70}$$

或

$$N_i = \begin{cases}\dfrac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(-1+\xi_0+\eta_0) & (i=1,2,3,4) \\ \dfrac{1}{2}(1-\xi)^2(1+\eta_0) & (i=5,7) \\ \dfrac{1}{2}(1-\eta)^2(1+\xi_0) & (i=6,8)\end{cases} \tag{5-71}$$

其中，

$$\xi_0 = \xi_i\xi, \quad \eta_0 = \eta_i\eta$$

● 图形变换

为了使母单元的 8 个结点(ξ_i, η_i)与等参元 8 个结点(x_i, y_i)互为对应点，可利用母单元形函数建立(ξ, η)和(x, y)之间的变换关系：

$$\left.\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^{8} x_i N_i(\xi,\eta) \\ y &= \sum_{i=1}^{8} y_i N_i(\xi,\eta) \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^e\end{aligned}\right. \tag{5-72}$$

● **位移场**

按照等参元建立位移场的思路，8 个结点曲边四边形等参元的位移模式可由 8 个结点母单元形函数构造得到

$$u = \sum_{i=1}^{8} u_i N_i(\xi, \eta), \quad v = \sum_{i=1}^{8} v_i N_i(\xi, \eta) \tag{5-73a}$$

或

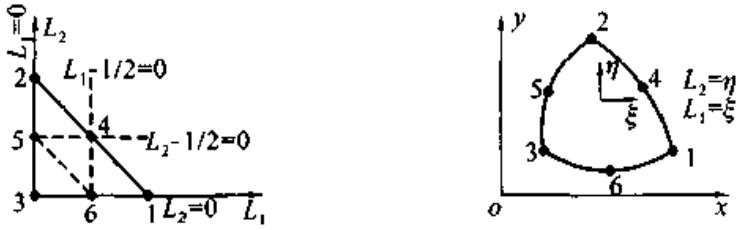
$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e \tag{5-73b}$$

2. 6 个结点三角形等参元

图 5-14 给出用面积坐标表示的 6 个结点三角形母单元及 6 个结点三角形等参元示意。

● **母单元的形函数**

在面积坐标下，由直接试凑或统一方法可得 6 个结点三角形等参元形函数为



(a)六结点三角形母元及试凑直线方程示意　　(b)等参元

图 5-14　六节点三角形等参元示意

角结点：　$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$　(1→2→3)　(5-74a)

边中点：　$N_4 = 4L_1L_2$　(4→5→6，1→2→3→1)　(5-74b)

● **图形变换**

根据等参元定义，子单元形状可由下式确定：

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{6} x_i N_i(L_1, L_2, L_3) \\ y &= \sum_{i=1}^{6} y_i N_i(L_1, L_2, L_3) \end{aligned}\right\} \tag{5-75}$$

或

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^e$$

其中，$\boldsymbol{x}^e$ 由子元的 6 个结点坐标分量所组成。

● **位移场**

根据等参元定义，6 个结点三角形等参元的位移模式，可由母单元形函数构造而成，即

$$u = \sum_{i=1}^{6} u_i N_i(L_1, L_2, L_3) \tag{5-76a}$$

$$v = \sum_{i=1}^{6} v_i N_i(L_1, L_2, L_3) \tag{5-76b}$$

或

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e$$

5-5-3 等参元单元特性分析

建立了上述3个单元的位移场后，可按统一的单元分析步骤进行推导，得出各自的单元刚度矩阵。

1. 分析的基础

下面用势能原理进行单元分析。

● **单元应变场**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e \tag{5-77}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_y \\ A_y & A_x \end{bmatrix} (N_1\boldsymbol{I}_2 \quad N_2\boldsymbol{I}_2 \quad \cdots)$$

$$= (\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \cdots) \tag{5-78}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_y \\ A_y & A_x \end{bmatrix} N_i\boldsymbol{I}_2 = (\det\boldsymbol{J})^{-1} \begin{bmatrix} B_{1i} & 0 \\ 0 & B_{2i} \\ B_{2i} & B_{1i} \end{bmatrix} \tag{5-79}$$

$$\left.\begin{aligned} B_{1i} &= \left(\sum_r \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_r\right)\frac{\partial N_r}{\partial \xi} - \left(\sum_r \frac{\partial N_r}{\partial \xi} y_r\right)\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ B_{2i} &= -\left(\sum_r \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_r\right)\frac{\partial N_r}{\partial \xi} + \left(\sum_r \frac{\partial N_r}{\partial \xi} x_r\right)\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \tag{5-80}$$

● **单元应力场**

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\delta}^e, \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B} \tag{5-81}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵，取决于材料和问题性质。

● **单元总势能**

将位移、应变和应力代入势能原理表达式，可得

$$E_P = \frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}A - \left(\int_A \boldsymbol{F}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}A + \int_{L_\sigma} \boldsymbol{F}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}l + \boldsymbol{F}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}^e\right) \tag{5-82}$$

2. 微面积等计算

为由积分得到单元刚度方程，尚需解决在规则坐标下 $\mathrm{d}A$，$\mathrm{d}l$ 的计算。

● $\mathrm{d}A$ 的计算

因为直角坐标子单元是由规则坐标母单元映射求得，母单元 $d\xi d\eta$ 的微面积经映射后变为图 5－15 所示的 dA。由数学可知：

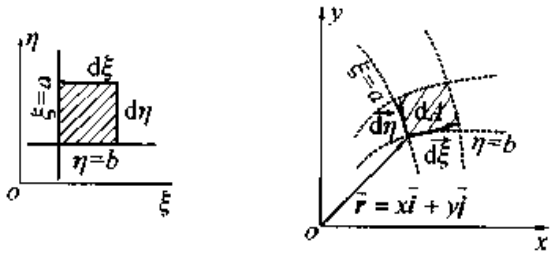


图 5－15　微面积示意

$$\begin{aligned} dA &= |d\vec{\xi} \times d\vec{\eta}| \\ &= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} \right) \right| d\xi d\eta \\ &= \det \boldsymbol{J} \, d\xi d\eta \end{aligned} \tag{5-83}$$

● dl 的计算

对单元表面积分现以 8 个结点单元 $\xi = 1$ 为给定表面力边界的情况为例说明如下，如图 5－16 所示。在界面 $L_{\sigma 1}$ $(\xi = 1)$：

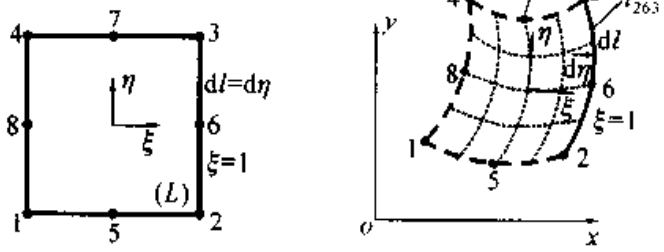


图 5－16　微弧长示意

$$N_1 = N_4 = N_5 = N_7 = N_8 = 0$$

$$N_2 = -\frac{1}{2}\eta(1-\eta), \quad N_6 = 1-\eta^2, \quad N_3 = \frac{1}{2}\eta(1+\eta)$$

因此，在此界面 $L_{\sigma 1}$ 上，

$$\left.\begin{aligned} x_L &= -\frac{1}{2}\eta(1-\eta)x_2 + (1-\eta^2)x_6 + \frac{1}{2}\eta(1+\eta)x_3 \\ y_L &= -\frac{1}{2}\eta(1-\eta)y_2 + (1-\eta^2)y_6 + \frac{1}{2}\eta(1+\eta)y_3 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}l &= (\mathrm{d}x_L^2 + \mathrm{d}y_L^2) \\ &= \left\{\left[\left(\eta - \frac{1}{2}\right)x_2 - 2\eta x_6 + \left(\frac{1}{2} + \eta\right)x_3\right]^2 + \right. \\ &\quad \left.\left[\left(\eta \quad \frac{1}{2}\right)y_2 - 2\eta y_6 + \left(\frac{1}{2} + \eta\right)y_3\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\eta \end{aligned}\right\} \tag{5-84}$$

对一般情况：

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \pm 1 \text{ 时}, \quad \mathrm{d}l = |\mathrm{d}\vec{\xi}| = \left(\left.\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|^2_{\xi=\pm 1} + \left.\frac{\partial y}{\partial \eta}\right|^2_{\xi=\pm 1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\eta \\ &\eta = \pm 1 \text{ 时}, \mathrm{d}l = |\mathrm{d}\vec{\eta}| = \left(\left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|^2_{\eta=\pm 1} + \left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|^2_{\eta=\pm 1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\xi \end{aligned}\right\} \tag{5-85}$$

3. 单元特性公式

● 对正方形母单元

将式(5-83)和式(5-84)代入式(5-82)，经整理可得

$$\boldsymbol{k}^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\det\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}^e \tag{5-86}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{k}_{ij}^e &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_j\det\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^e &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_b\det\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \int_{-1}^{1} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_S\mathrm{d}l \end{aligned}\right\} \tag{5-87}$$

$$\boldsymbol{F}_b = \begin{Bmatrix} F_{bx}\left(\sum_i N_i x_i, \sum_i N_i y_i\right) \\ F_{by}\left(\sum_i N_i x_i, \sum_i N_i y_i\right) \end{Bmatrix} \tag{5-88}$$

$$\boldsymbol{F}_S = \begin{Bmatrix} F_{sx}\left(\sum_i N_i x_i, \sum_i N_i y_i\right) \\ F_{sy}\left(\sum_i N_i x_i, \sum_i N_i y_i\right) \end{Bmatrix} \tag{5-89}$$

或由结点体积力，表面力插值构成。

● 三角形类母单元

形函数为

$$N_i = N_i(L_1, L_2, L_3) \tag{5-90}$$

$$\xi = L_1, \quad \eta = L_2, \quad L_3 = 1 - (\xi + \eta) \tag{5-91}$$

可将形函数转换成 ξ, η 的二元函数。因此，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}&=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial N_i}{\partial L_j},\quad \frac{\partial L_j}{\partial \xi}=\frac{\partial N_i}{\partial L_1}-\frac{\partial N_i}{\partial L_3}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}&=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial N_i}{\partial L_j},\quad \frac{\partial L_j}{\partial \eta}=\frac{\partial N_i}{\partial L_2}-\frac{\partial N_i}{\partial L_3}\end{aligned}\right\}\tag{5-92}$$

除此之外还需修改积分限。从图5-17可见，

$$\boldsymbol{k}^e=\int_A \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}A=\int_0^1\int_0^{1-\eta}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\det\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\tag{5-93}$$

对于边界表面力的等效荷载的微分弧长应视不同边界而异。

$$\left.\begin{aligned}&\xi=0\text{ 边}(L_1=0),\quad \mathrm{d}l=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}\eta\\ &\eta=0\text{ 边}(L_2=0),\quad \mathrm{d}l=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}\xi\end{aligned}\right\}\tag{5-94a}$$

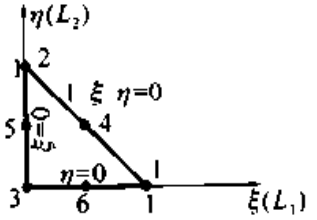


图5-17　积分限变化示意

$1-\xi-\eta=0$ 边$(L_3=0)$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}l&=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\bigg|_{\eta=1-\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\bigg|_{\eta=1-\xi}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}\xi\\&=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\bigg|_{\xi=1-\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\bigg|_{\xi=1-\eta}\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}\eta\end{aligned}\tag{5-94b}$$

不论对 ξ 还是对 η 积分，其积分限均为从0到1。

5-5-4　数值积分

等参元的单元刚度矩阵和等效结点荷载的计算公式中被积函数是十分复杂的，很难用精确积分得到解析结果。因而要采用数值积分方法，即在单元内选出某些点(称为积分点)，算出被积函数在这些点处的值，再分别乘以权系数，然后求和作为近似积分值。数值积分方法很多，在有限元分析中通常采用**高斯积分法**(gauss integral method)，因为它可以用较少的积分点达到较高的精度，从而可以节省计算时间。

1. 一维高斯积分公式

为计算积分

$$I=\int_{-1}^{1}f(\xi)\mathrm{d}\xi\tag{5-95}$$

可按如下高斯求积公式计算

$$I=\sum_{i=1}^{n}W_i f(\xi_i)\tag{5-96}$$

式中，n 为积分点个数；ξ_i 为高斯积分点坐标；

W_i 为对应积分点 ξ_i 的加权系数；$f(\xi_i)$ 为被积函数在积分点处的值。

对于一些常用积分点情况的 ξ_i，W_i 可见表 5-1。

表 5-1 高斯积分公式中 ξ_i 和 W_i

点数	求积结点坐标 ξ_i	求积加权系数 W_i
1	0	2
2	±0.57735 02692	1
3	0 ±0.77459 66692	0.88888 88888 0.55555 55555
4	±0.33998 10436 ±0.86113 63116	0.65214 51549 0.34785 48451
5	0 ±0.53846 93101 ±0.90617 98459	0.58888 88888 0.47862 86705 0.23692 68851
6	±0.23861 91861 ±0.66120 93865 ±0.93246 95142	0.46791 39346 0.36076 15731 0.0.17 0.17132 44924

当被积函数 $f(\xi)$是 $2n-1$ 次多项式时，数学上可以证明，高斯积分将获得精确值。

2. 二维高斯积分公式

● 方形域

为了计算积分

$$I_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{5-97}$$

可先保持 η 不变计算内积分，即按下式计算

$$\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi = \sum_{j=1}^{n} W_j f(\xi_j,\eta) \tag{5-98}$$

然后计算外积分，即

$$I_2 = \int_{-1}^{1}\left[\sum_{j=1}^{n} W_j f(\xi_j,\eta)\right]\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n} W_i \sum_{j=1}^{n} W_j f(\xi_j,\eta_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j f(\xi_j,\eta_i) \tag{5-99}$$

● 三角形域

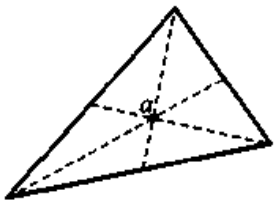
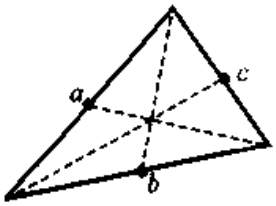
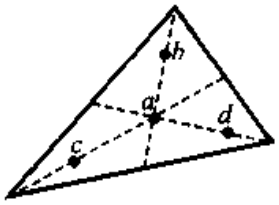
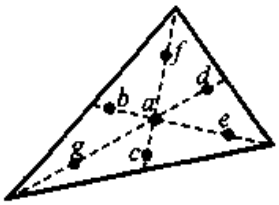
采用面积坐标 L_1, L_2, L_3，在三角形域上的高斯积分公式可写成：

$$\iint_A f(L_1,L_2,L_3)\mathrm{d}A \approx A\sum_{i=1}^{n} H_i f(L_{1i},L_{2i},L_{3i}) \tag{5-100}$$

这里 n 是积分点个数，L_{1i}, L_{2i}, L_{3i} 是积分点 i 的面积坐标，H_i 是加数系数，可按表 5－2 选取。

对于被积函数为面积坐标多项式时，可利用公式(5－15)和(5－16)进行显式积分。

表 5－2　三角形的数值积分公式

阶次	图	误差	积分点	面积坐标	权
线性		$O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
二次		$O(h^3)$	a b c	0.5, 0.5, 0 0, 0.5, 0.5 0.5, 0, 0.5	1/3 1/3 1/3
三次		$O(h^4)$	a b c d	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ 0.6, 0.2, 0.2 0.2, 0.6, 0.2 0.2, 0.2, 0.6	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$
四次		$O(h^5)$	a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.225 0.1323941527 0.1259391805

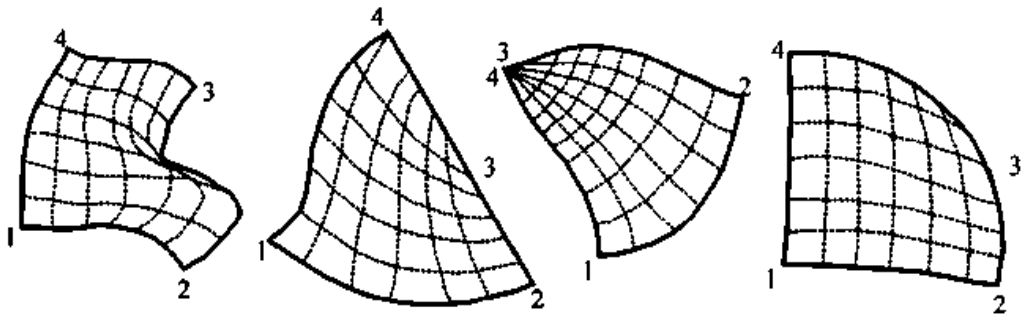
注：$\alpha_1 = 0.058\ 715\ 871\ 7, \beta_1 = 0.470\ 142\ 064\ 1, \alpha_2 = 0.797\ 426\ 985\ 3, \beta_2 = 0.101\ 286\ 507\ 3$

5－5－5　作等参元分析时的注意事项

1．在等参元应变分析中，式(5－66)表明 $\det \boldsymbol{J} = 0$ 时等参元分析将失效。导致 $\det \boldsymbol{J} = 0$ 有以下几种可能：

- 经 Nx' 映射的单元边界发生严重扭曲。
- 正方形母单元映射成三角形单元。
- 某角点处映射后单元边线的切线夹角接近 180°。

为避免出现上述情况，进行离散化时，应避免网格划分出现图 5-18 所示情况。



(a) 边界过分畸异　　(b) 退化成三角形　　(c) 角点处切线夹角 180°

图 5-18 子单元应避免的情况

2. 在母单元中边点是等距分布的，在子单元划分确定边线结点位置时也应尽量使其等距分布。若子单元边点位置如图 5-19 所示，则结点 1 处的应变、应力将趋于无穷大。这种单元称**畸异等参元**，在断裂力学分析裂缝端点处可采用畸异等参元。

3. 在等参元分析时根据 $x = Nx^e$ 可知母单元中(ξ, η)点在子单元中为(x, y)点，但一般无法从 $x = Nx^e$ 求出 $\xi = f(x, y)$和 $\eta = g(x, y)$。正因为如此，要求子单元中指定点(x, y)处的物理量是做不到的。只能先求出母单元中(ξ, η)点的物理量，然后从 $x = Nx^e$ 确定这物理量是子单元中那一点的值。

4. 当子单元网格划分的边界结点位于两角点连接线上时，映射后子单元的此边界将为一直线。但沿边界所求得的位移并不一定是线性变化的(因为结点位移并不一定在一直线上)。

5-5-6 计算实例

[**例题 5-4**] 有一两端简支的矩形截面梁，长 120 mm，高 20 mm，弹性模量 $E = 10^{11}$ N/m^2，泊松比 $\nu = 1/3$，重度 $\gamma = 10^5$ N/m^3。试计算自重作用下梁的挠度与应力。

解：取梁的轴线为 x 轴，梁的对称轴为 y 轴。由于对称性，所以只需考察梁的一半长度，如图 5-21 所示。今将它划分为 3 个 8 个结点等参数单元，结点编号如图 5-20 所示。

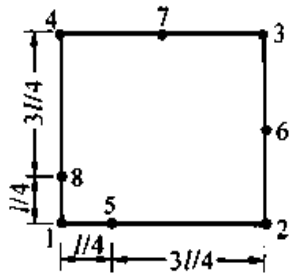


图 5-19　二次畸异等参元示意

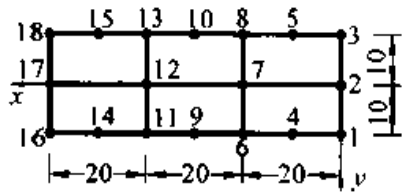


图 5-20　例题 5-4

由有限单元法计算，采用 2×2 阶高斯积分得到：结点 2 的挠度 $v_2 = 0.862\times10^{-5}$ mm，与精确值 $v_2 = 0.868\times10^{-5}$ mm 十分接近；结点 1 的应力 $\sigma_{x1} = 5\ 500$ Pa，结点 4 的应力 $\sigma_{x4} = 5\ 200$ Pa，与精确值 $\sigma_{x1} = 5\ 440$ Pa，$\sigma_{x4} = 5\ 290$ Pa 也十分接近。精确值是按弹性力学计算的。简支条件是取 $v_{17} = 0$。

5-5-7　二维(和三维)弹性分析计算程序简要说明

● **功能**。光盘上的 stress.exe 包含平面 4 个结点、8 个结点两种等参元(还有 9 结点拉格朗日单元)，可进行平面问题、轴对称问题(本书没有介绍)荷载和温度改变的应力计算；还包括 8、20 个结点三维问题(本书也没有介绍)等参元的荷载、温度应力计算。程序有自动数据检查功能，为便于应用，尽量减少了数据的准备工作。

● **数据准备**。限于篇幅，随书光盘上有 stress.txt，简要说明了数据文件的填写格式，配合算例的数据文件和计算结果，应该能够掌握程序的使用。

● **算例**。随书光盘上 stress.dat 是一个算例的数据文件，stress.out 是用 stress.exe 计算 stress.dat 问题的结果。希望读者能仿照此算例，自行计算一些题(例如深梁、剪力墙等)，以掌握程序的应用。具体计算时也可用 jsjfx.exe。

§5-6　结论与讨论

5-6-1　本章结论

● 本章所介绍的三角形和矩形单元及等参元都是协调元，理论分析和算例都表明，协调元一定收敛。非协调元满足一定条件也是收敛的，而且有时收敛的速度更快一些。

● 三角形单元用面积坐标描述较简便，而四边形单元用正则坐标描述，公式统一简便。

● 等参元可以是曲边单元，同样也分为两大类，即三角形类和四边形类。选什么样的单元作母单元即产生什么样的等参元。正则母单元的形函数是构造等参元的必备条件。

● 母单元的形函数，可以直接用试凑法得到，也可以用统一方法，由低阶（常应变三角形和双线性矩形）单元的形函数来得到。

● 等参元单元刚度矩阵和等效荷载计算公式中被积函数都十分复杂，一般只能采用数值积分方法获得近似积分结果。

● 等参元（子元）几何形状、位移模式都是由对应的母元形函数插值构造的。母单元的(ξ_i, η_i)点对应子元的 $x(\xi_i, \eta_i) = N(\xi_i, \eta_i)x^e$ 点。但由指定点(x_i, y_i)一般不可能求得对应的(ξ_i, η_i)点。

● 等参元当 $\det J = 0$ 时将失效，因此在离散化时要注意避免出现 $\det J = 0$ 的一些情况。

5-6-2　几点讨论

● 协调的单元其位移解答一般都小于精确解（真实解答），也即协调单元的刚度比实际值大。请读者考虑为什么？（提示：所设位移模式一般并非实际位移）

● 完备而非协调的单元可能是收敛的，请读者考虑，整体分析保证结点平衡，当单元变小（结点增多）时，显然平衡的点增加，单元趋于零时物体每一点都趋于平衡。那么从解答的唯一性考虑，非协调元应满足什么样的条件才是收敛的呢？

● 和常应变三角形单元和矩形双线性单元对应，作三维物体有限元分析时，有 4 个结点常应变四面体单元和 8 个结点的长方体单元。建议读者自行建立形函数，并导出单元刚度矩阵。

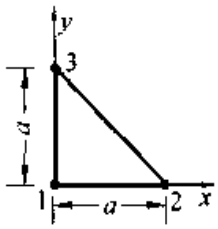
习　题

5-1　试证明常应变三角形单元形函数 N_k 在 ij 边界上的值与 k 结点坐标无关。

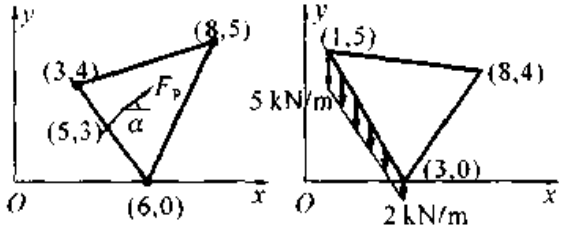
5-2　试证明常应变三角形单元发生刚体位移时，不会在单元内产生应力。

5-3　试求图示单元的形函数矩阵，并用势能原理进行单元列式。

5-4　试计算图示常应变单元的等效结点荷载 F_E。



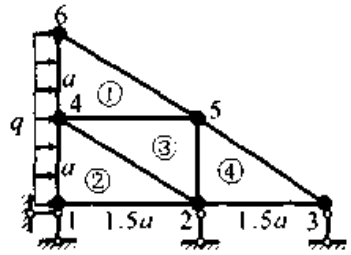
习题 5－3 图



习题 5－4 图

5－5　试计算习题 5－3 图所示单元的单元刚度矩阵。设 $\nu=0$，厚度为 δ，弹性模量为 E。

5－6　试利用 5－5 题结果，计算图示结构的总刚度矩阵，并求总荷载列阵。

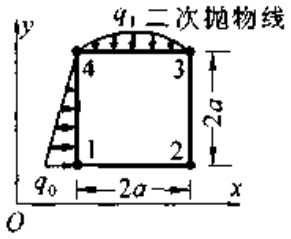


习题 5－6 图

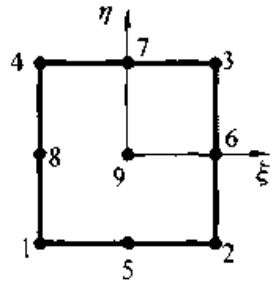
5－7　试说明有限元法分析产生误差的原因，为什么位移有限元有下限性？

5－8　试用广义坐标法确定双线性矩形单元的形函数。

5－9　试计算图示单元的等效结点荷载。



习题 5－9 图



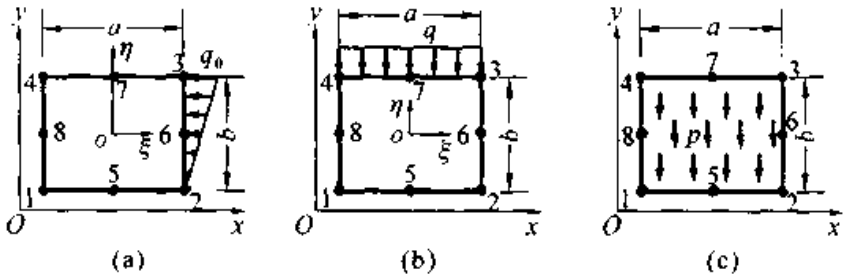
习题 5－11 图

5－10　当同时采用双线性矩形单元和常应变三角形进行有限元分析时，三角形单元和矩形单元之间边界能否满足位移协调？

5－11　试构造 9 个结点单元的形函数 N_2 和 N_6。

5－12　试求图示 4 个结点等参元在三种荷载作用下的等效结点荷载。

5－13　当上题所示单元为 8 个结点等参元时，试求等效结点荷载。



习题 5－12 图

结构动力分析篇

第 6 章　结构动力学概述
第 7 章　单自由度体系的振动分析
第 8 章　多自由度体系的振动分析
第 9 章　频率和振型的实用计算方法
第 10 章　结构地震反应分析及振动控制概述

结构动力分析篇

前两篇只讨论了结构在静荷载和移动荷载作用下的分析，实际工程结构除静荷载和移动荷载(按静荷载处理)外，还承受另一类外界作用——动荷载。研究结构在动荷载作用下响应规律的学科称为**结构动力学**(structural dynamics)。结构动力学内容非常丰富，本书只能介绍一些基本知识，作为读者进一步学习、研究的基础。本篇内容包括：由直接平衡法建立有限自由度体系的运动方程，单自由度体系的振动分析，多自由度体系的振动分析，频率和振型的实用计算方法，结构的地震响应分析和结构的振动控制概述等内容。

结构动力学与工程实际有着十分密切的关系，在结构振动实验、结构工程、地震工程、风工程、动力基础工程、海洋工程、船舶工程、航空工程和汽车工程等实际工程领域都得到十分广泛的应用。对于不同的工程，动力分析的内容也可能有所不同，但力学原理、方法(当然包括动力学原理、方法)是普遍适用的，因此学习中应该注意深刻理解和掌握基本力学原理和方法，以便能用以解决各种工程问题。

第6章

结构动力学概述

在本书的配书光盘上，有1996年日本阪神地震的录像，通过观看此录象，读者可以看到，不正确设计的结构在地震荷载（动荷载的一种）作用下的破坏以及由此造成的国民经济巨大损失；也可看出，只要设计正确并采取必要的减震和防震措施，就有可能减少结构的破坏或根本不发生破坏。结构动力学的原理和方法，既是设计基础，也是减震、防震措施理论依据。由此可见，学好结构动力学是很重要的。对承受动荷载作用的结构，只有计及动力响应的设计才是正确设计，才能保证结构发挥其正常功能。

§6-1 动荷载及其分类

6-1-1 动荷载的定义

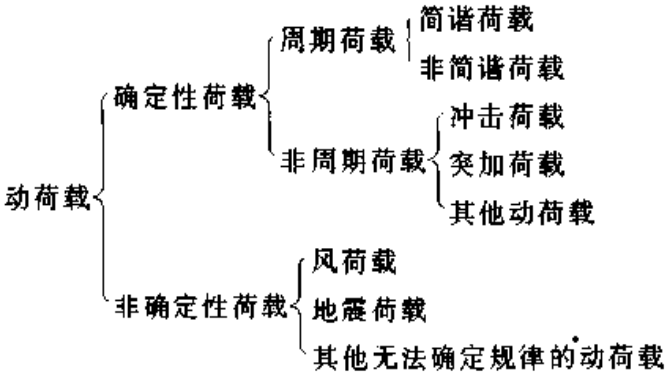
定义：结构在大小、方向和作用点随时间变化的荷载作用下，质量运动加速度所引起的惯性力与荷载相比大到不可忽视时，则把这种荷载称为**动荷载**（dynamic load）。

● 严格地说，结构上所受荷载都是随时间变化的。但是，如果荷载随时间变化的速度较慢，以致质量运动加速度所产生的**惯性力**与荷载相比小到**可以忽略不计**，这时仍可将其当作静荷载进行分析计算。

● 需要指出的是，所谓荷载变化的快慢，或者说是否要当作动荷载处理，不仅要看荷载，而且还要看结构。因为，结构的**动力特性**不同，同一荷载使质量所产生的加速度（惯性力）将不一样。何谓结构的动力特性，将在下面介绍。

6-1-2 动荷载的分类

动荷载是时间和位置(坐标)的函数,根据动荷载随时间变化的规律,可有多种分类方法,常用的分类有:



● **确定性荷载**。荷载的变化是时间的**确定性函数**。

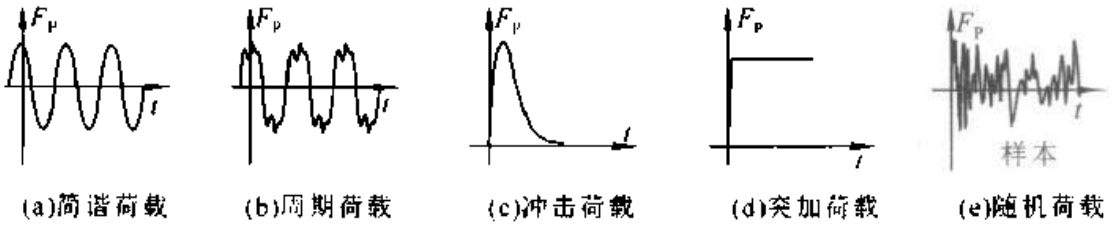
结构受确定性荷载作用时的响应分析通常称为**结构振动分析**。本篇涉及的确定性荷载有:

简谐荷载。这种荷载可用函数 $F_0\sin\theta t$ 或 $F_0\cos\theta t$ 来表示,F_0 称为荷载幅值。其随时间变化规律如图 6-1a 所示。机械转动部分由于偏心引起的荷载是典型的简谐荷载。

周期荷载。这种荷载随时间呈周期性地变化,如图 6-1b 所示(简谐荷载是周期荷载的一个特例)。例如船舶中螺旋桨产生的作用于船体的推力就是一种周期荷载。

冲击荷载。这种荷载作用的时间很短,如图 6-1c 所示。其最典型的例子是由于爆炸引起的冲击波荷载。

突加荷载。这种荷载以某一恒值突然施加于结构上并保持不变,如图 6-1d 所示。其较典型的实例为锻锤和打桩机所产生的荷载。



(a)简谐荷载 (b)周期荷载 (c)冲击荷载 (d)突加荷载 (e)随机荷载

图 6-1 荷载形式示意图

● **非确定性荷载**。荷载随时间的变化不确定或不确知,或边界不清晰。

随机荷载。这种荷载事先不可预知,以后也难再现,在任一时刻的荷载

大小为随机量，如图 6－1e 所示。例如由于脉动风和地震地面运动等对建筑物产生的荷载都是随机荷载，但对已发生的地震作用等荷载（也称为**样本**），都是确定性荷载。

结构受非确定性荷载作用的响应要用不确定性理论来分析。结构在**随机荷载**作用下的响应分析，称为结构的**随机振动分析**。

本篇只讨论确定性荷载的作用，随机振动等更深入的内容，超出了本书范围，故不作介绍。

§6－2　结构动力学的任务和研究内容

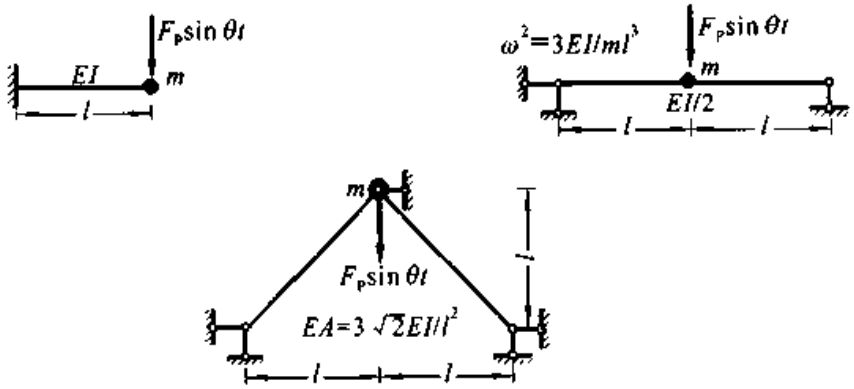
讨论静荷载作用下结构反应（内力和位移等）的分析计算问题，是结构静力学的研究内容。而结构动力学则是研究结构在动荷载作用下响应（或反应）规律的学科，是结构力学的一个重要分支。

6－2－1　结构动力学与结构静力学的对比

结构动力学与结构静力学相比，应注意以下两点：

1．在结构动力学中由于需要考虑惯性力的作用，因此问题的处理必将涉及位移对时间的二阶导数。由理论力学动静法可知，所建立的质量运动方程将为微分方程。因此，在数学处理上要比**静力问题**（线弹性问题为线性代数方程）复杂一些；

2．结构的**动力响应**不仅与荷载的幅值及其变化规律有关，而且还与结构的**动力特性有关**。例如图 6－2 所示的悬臂梁、简支梁和桁架，它们具有相



有相同质量、频率的不同体系动力响应相同

图 6－2　相同动力特性的不同结构

同的动力特性（质量和自振频率 ω 相同），当质量受相同的动荷载作用时，结

构的动力响应彼此相同。当 ω 和荷载频率 θ 相等时，结构将因共振而破坏，这是和静力分析不同的。

6-2-2 结构动力学的任务

结构动力学的任务可归纳为以下三个方面：

1. 提供任意给定结构在任意动荷载作用下进行响应分析的方法；

2. 确定结构固有动力特性及结构固有动力特性、动荷载和结构响应三者之间的相互关系，即结构在动荷载作用下的响应规律；

3. 提供进行结构动力可靠性设计的依据。

6-2-3 结构动力学的研究内容

现代结构动力学的研究内容包括以下四类：

1. **结构的响应分析**。已知动荷载(输入)和结构动力特性(系统)求结构的响应(输出)；

2. **结构的参数识别或系统识别**。已知动荷载(输入)和结构的响应(输出)求结构的动力特性(系统)参数或数学模型；

3. **荷载识别**。已知结构的动力特性(系统)和结构的响应(输出)，求未知的动荷载(输入)；

4. **结构的振动控制**。综合输入、系统和输出的全部信息，对结构响应进行控制。

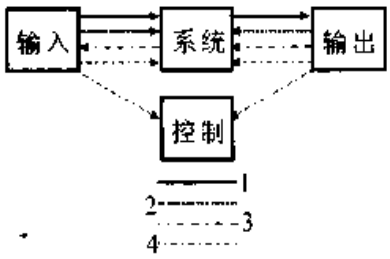


图 6-3

以上四类问题可用图 1-3 来表示。其中第一类问题称为**结构动力学的正问题**，第二、三两类问题称为**结构动力学的反问题**，第四类问题称为**结构振动控制问题**(control problem of structural vibration)。

本篇重点讨论结构动力学中的第一类问题，即正问题。只在第 10 章简单介绍有关结构振动控制方面的一些基本概念。

§6-3 结构动力分析中体系的自由度

与结构的静力分析一样，在结构的动力分析中也需要事先选取合理的计算简图。虽然两者选取计算简图的原则基本相同，但是由于结构的动力分析中要考虑惯性力的作用，因此在计算简图中必须考虑质量的分布及运动过程中位置的确定问题，也即要研究结构中质量在运动过程中的自由度问题。

6-3-1　动力分析中体系的自由度

定义　在振动过程的任一时刻，确定体系全部质量位置或变形状态所需的独立参数个数，称为体系的**自由度**(degree of freedom)。

实际结构质量都是**连续分布的**，因此都是**无限自由度体系**。但是，在工程实际中这样考虑不仅困难，而且往往也是不必要的。所以，通常是设法将无限的自由度问题简化为有限个自由度问题来处理。

6-3-2　体系自由度的简化

将无限自由度体系简化为有限自由度体系有以下三种常用方法：

1. 集中质量法。将结构的分布质量按一定规则集中到结构的某个或某些位置上，认为其他地方没有质量，从而将无限多自由度体系简化为有限个自由度体系。

如图 6-4a 所示不计轴向变形的均质简支梁，根据计算精度要求可简化为如图 6-4b、c、d、e、f 所示的一个、两个、三个、五个和七个自由度的体系。又如图 6-5a 所示的三层结构，当楼板为刚性且不考虑柱子轴向变形时，可简化为图 6-5b 所示三个自由度的串联剪切型结构模型进行动力计算。

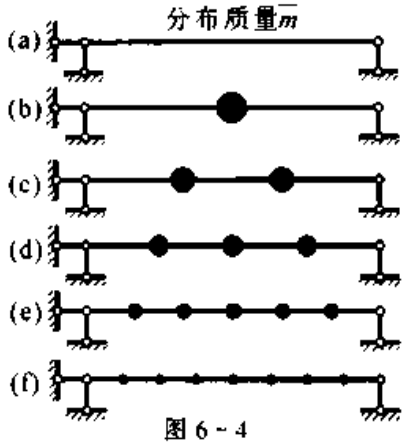


图 6-4

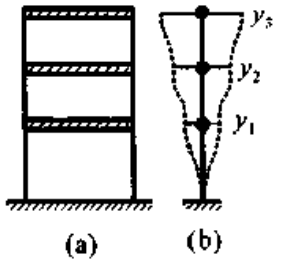


图 6-5

2. 广义坐标法。这一方法与第 1 章中的里兹法一样，是将具有分布质量杆件振动的**位移曲线** $y(x,t)$，用一系列满足位移边界约束条件的**位移函数**的线性组合来近似，**组合系数**即为体系的**广义坐标**。结果将无限自由度问题简化成与广义坐标个数相等的有限自由度问题。

例如：如图 6-4a 所示无限自由度简支梁结构，其位移曲线可近似用三角级数表示为：

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{n}A_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{6-1}$$

式中，$\sin\frac{k\pi x}{l}(k=1,2,3,\cdots,n)$是一组给定的函数，称为**位移函数或形状函数**(shape function 即基函数)，它与时间无关。因此，体系在任一时刻的位置由广义坐标 $A_k(t)(k=1,2,3,\cdots,n)$来确定，它是随时间变化的待定参数。

注意：在广义坐标法中位移函数或形状函数只要满足位移边界条件，所选的函数形式可以是任意的连续函数。

因此式(6-1)可写成更一般的形式

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{n}A_k(t)\phi_k(x) \tag{6-2}$$

式中，$\phi_k(x)(k=1,2,3,\cdots,n)$是自动满足位移边界条件的函数集合中任意选取的 n 个函数。

3. 有限单元法。该方法是将有限单元法的思想用于解决结构的动力计算问题。对分布质量的实际结构，此时体系的自由度数为单元结点可发生的独立位移未知量总个数，具体内容将在本篇第 8 章第 4 节中介绍。

例如，将图 6-6a 所示两端固定的梁分为 5 个单元，不考虑轴向变形。取中间四个结点的位移(挠度 y 和转角 θ)y_1、θ_1、y_2、θ_2、y_3、θ_3 和 y_4、θ_4 为未知量，每个结点的位移只与相邻两单元的形状函数有关，如图 6-6b、c 所示。如果记 i 结点位移 y_i 与 θ_i 相对应(其他结点位移为零)的位移函数为 $\phi_i(x)$和 $\psi_i(x)$，它们显然可由图 6-6 中所示的形函数 N_i^r 组合得到(建议读者自行写出 $\phi_i(x)$和 $\psi_i(x)$的表达式)，则梁的位移曲线可近似地表示为

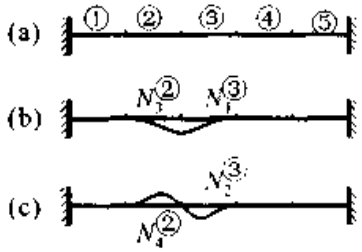


图 6-6

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{4}[y_i(t)\phi_i(x)+\theta_i(t)\psi_i(x)] \tag{6-3}$$

因此，图 6-6a 所示两端固定梁被简化成 8 个自由度的体系。

需要注意的是：

动力分析中自由度与结构体系组成分析时的自由度既有相同之处又有不同之处。

● 相同之处是，二者都是确定体系运动位置所需的独立坐标参数。

● 不同之处是，在结构组成分析中，讨论的对象是不考虑质量的刚体。而在动力分析中，讨论的一般是变形体，考虑的是体系中质量的自由度。

6-3-3 体系自由度的确定

● 用广义坐标法或有限元法将无限自由度体系简化为有限自由度体系时，体系的自由度数等于广义坐标数或独立结点位移数。

● 对于由集中质量法简化后得到的有限自由度体系，在确定结构的动力自由度数目时应注意以下两点：

1. 一般受弯结构的轴向变形忽略不计；

2. 集中质量的质点数并不一定等于体系的自由度数，而要根据自由度的定义及问题的具体情形确定。

图6-7a所示体系，因为质量可发生水平和竖向运动，因此其自由度为2。而图6-7b所示体系，因为不考虑杆件轴向变形，两个质量只能产生相等的水平运动，因此自由度数为1。这两例子表明自由度数和质点个数可以是不同的。但像图6-4和图6-5所示情形，质点个数和质量所能发生的独立位移个数(也即自由度数)又是相同的。这是初学者必须注意的。

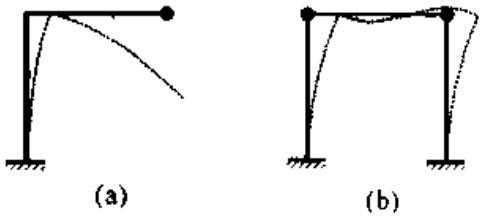


图6-7

§6-4 结构的动力特性

结构在动荷载下的响应规律，与结构**质量、刚度分布和能量耗散**等有关。由它们导出的、表征结构动力响应特性的一些固有量，称为**结构的动力特性**(structural dynamic characteristics)。

对于动力特性相同的不同结构，在相同的动荷载作用下，它们的动力响应(位移、速度和加速度等)是一样的。因此，结构的动力特性是结构动力分析的重要研究内容。

结构的动力特性包括以下三方面。

6-4-1 结构的自振频率

当结构受到某种外界干扰后会产生位移或速度，但外界干扰消失后结构将在平衡位置附近继续振动，这种振动称为结构的**自由振动**(free vibration)。

● **自振频率**。结构自由振动时的频率称为结构的**自振频率**(free vibra-

tion frequency)或**固有频率**(natural frequency)。

● **自振频率个数**。对多数工程结构来说,**自振频率的个数与结构的动力自由度数目相等**。

● **频率谱**。结构自振频率按从小到大顺序排列,称为结构的**频率谱**(frequency spectrum)。不同类型的结构,频率谱具有不同的特点。对于单跨梁、悬臂梁和不考虑扭转振动的房屋建筑等结构,频率谱中频率的间隔较大,此类频率谱称为**稀疏型**。对于连续梁、板、空间结构、考虑扭转振动的房屋建筑等结构,频率谱存在密集区,此类频率谱称为**密集型**。

● **基频**。频率谱中最小的频率称为结构的**基本频率**,简称为**基频**(fundamental frequency)。其余依次称为第二、第三、……等频率。

6-4-2 结构的振型

当结构按频率谱中某一自振频率作自由振动时,其**变形形状保持不变**,这种变形形状称为结构的**主振型**,简称为**振型**(mode of vibration)。图 6-8 给出了无限自由度简支梁频率谱中前三阶自振频率对应的振型。

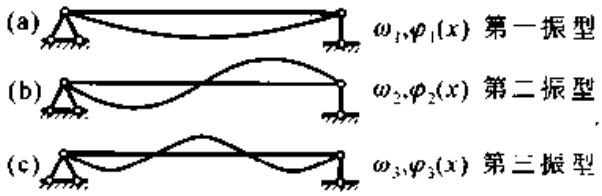


图 6-8 无限自由度简支梁的三个振型

● **基本振型**。与结构基本频率对应的振型称为结构的**基本振型**(fundamental mode of vibration),其余依次称为第二、第三振型等。

● **结构的位移响应**。对线性系统(线弹性),结构的位移响应可用结构振型的线性组合来表示。

6-4-3 结构的阻尼

结构的自由振动其实是势能与动能相互转化的过程。如果在这一过程中没有能量的耗散,则根据能量守恒定律,自由振动将是无衰减的等幅振动。但实际上,结构自由振动总是衰减的,直到最后恢复平衡(静止)。这说明在结构的振动过程中存在着**能量耗散**,这种能量的耗散作用通常称为**阻尼**(damping)。

产生能量耗散的因素很多,例如结构材料的内摩擦,各构件连接处的摩擦以及周围介质的阻力等。有关阻尼作用机理的研究,目前尚未完全搞清

楚。在动力分析中，为了便于数学处理，并尽可能符合实际，目前通常采用**等效粘滞阻尼理论**（就目前来说，阻尼理论只是一种假设）。它假设能量耗散是由阻尼力引起，作用于质量的阻尼力与质量的运动速度成比例，而反应阻尼大小的参数则由结构的动力试验确定。

对于单自由度问题，等效粘滞阻尼理论的阻尼力可表示为 $F_D = -c\dot{y}$，其中 c 称为**粘阻系数**（damping coefficient），$\dot{y}$ 为质量的速度，负号表示阻尼力与速度方向相反。

§6-5 建立结构体系运动方程的一般方法

在结构动力分析中，需要建立描述体系所有质量运动规律的方程，即体系质量运动位移的数学方程，称为体系的**运动方程**（equation of motion）。该方程的解答给出了各自由度方向位移随时间的变化规律。

建立结构运动方程的常用方法有以下三种：

1. 直接平衡法。该法根据**达朗贝尔原理**（d'Alembert principle）和所采用的阻尼理论，将惯性力、阻尼力假想地作用于质量上，再考虑作用于结构上的动荷载，结果使动力问题转化成任一时刻都动平衡的静力问题，此即理论力学中的动静法。

利用动静法，建立体系的运动方程与静力学中建立平衡方程相似，即作用于质量上的所有力保持平衡；另外，当要进行体系在动荷载、惯性力和阻尼力作用下的位移和内力等响应计算时，按动平衡概念，仍采用结构静力学方法计算。

2. 虚功法。该法和直接平衡法一样，根据达朗贝尔原理和所采用的阻尼理论，在动平衡的概念下，应用虚位移原理（惯性力和阻尼力当作外力）建立运动方程。

3. 变分法。该法利用理论力学中的哈密顿原理，通过对表示能量关系的泛函的变分建立动力平衡方程。应用这一原理可直接导出任一体系的运动方程，不是明显地应用惯性力、阻尼力和弹性力，而是用动能、耗能和势能的变分项代替。

本书仅涉及直接平衡法，下两节介绍建立单自由度和多自由度体系的运动方程。需要了解其他方法的读者，可参阅有关书籍。

§6-6 体系运动方程的建立

体系的运动方程是体系内各质量沿自由度方向位移随时间变化规律的数学描述。它将具体的振动问题归结为求解微分方程的数学问题。因此，掌握建立体系运动方程的具体方法，并对其一般形式有正确理解，是学好结构动力学的重要基础。

本节只介绍如何用直接平衡法建立体系的运动方程，为深入研究其他结构动力学内容奠定基础。

用直接平衡法建立有限自由度体系运动方程的一般步骤为：

1. 根据问题的具体情况及对计算精度的要求，确定体系动力自由度的数目，建立计算模型，简称**建模**。

2. 建立坐标系，给出各自由度的位移参数。

3. 根据达朗贝尔原理和所采用的阻尼理论，沿质量各自由度方向加上惯性力和阻尼力；

4. 通过分析质量平衡或考虑变形协调，建立体系的运动方程。具体方法有两种：

● **刚度法**。取每一运动质量为隔离体，分析质量所受的全部外力，它既有动荷载、惯性力和阻尼力，还有体系变形所产生的阻止质量沿自由度方向运动的恢复力（亦称约束反力、弹性力）。建立质量各自由度的瞬时“动平衡”方程，即可得到体系的运动方程。

● **柔度法**。以结构整体为研究对象，假想加上全部惯性力和阻尼力，与动荷载一起在任意 t 时刻视作静力荷载，用结构静力分析中计算位移的方法，求 j 自由度方向单位广义力（$X_j=1$）作用下，第 i（$i=1,2,\cdots$）自由度方向的位移系数 δ_{ij} 和荷载引起的 i 自由度方向的位移 Δ_{iP}，然后根据叠加原理列出该时刻第 i 自由度方向位移的协调条件，即可得到体系的运动方程。

6-6-1 单自由度体系运动方程举例

[**例题 6-1**] 试用刚度法建立图 6-9a 刚架受动荷载 $F_P(t)$ 作用的运动方程。

解：1. 确定自由度　由图 6-9a 可知结构只能产生刚梁水平位移，属单自由度体系。

2. 定位移参数　设刚梁在任一时刻的位移为 y，向右为正。

3. 隔离体受力　取隔离体如图 6-9b 所示，图中给出了惯性力、阻尼力

和弹性杆件恢复力，各力均设沿坐标正向为正。

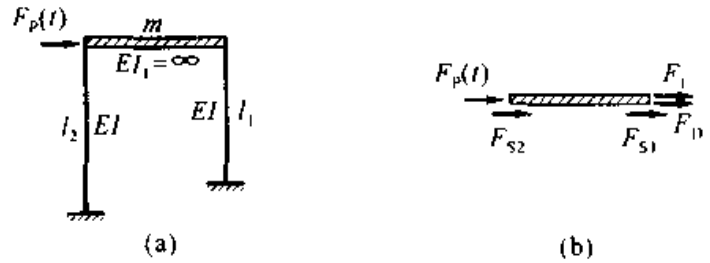


图 6－9　例题 6－1 图

4. 列方程　按动静法列动平衡方程，可得

$$F_P(t)+F_I+F_D+F_{S1}+F_{S2}=0 \tag{6-4}$$

式中，F_I 为惯性力，F_D 为阻尼力，F_{S1}、F_{S2}为立柱的弹性恢复力，由达朗贝尔原理和结构静力分析中位移法可得（F_{Si} 与位移方向相反，因此下式中其值为负）

$$F_I=-m\ddot{y},\ F_{S1}=-\frac{12EI}{l_1^3}y,\ F_{S2}=-\frac{12EI}{l_2^3}y \tag{a}$$

根据等效粘滞阻尼理论，阻尼力与质量的运动速度成正比、方向相反，则有

$$F_D=-c\dot{y} \tag{b}$$

式中，c 为体系的粘阻系数。

将式(a)、(b)代入式(6－4)，经整理可得

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F_P(t) \tag{6-5}$$

式中，刚度系数 $k=\dfrac{12EI}{l_1^3}+\dfrac{12EI}{l_2^3}$

式(6－5)即为图 6－9 所示刚架以刚度系数表示的运动方程。

［**例题 6－2**］　试用柔度法建立图 6－10a 所示受均布动荷载 $q(t)$作用的、一个集中质量简支梁的运动方程。

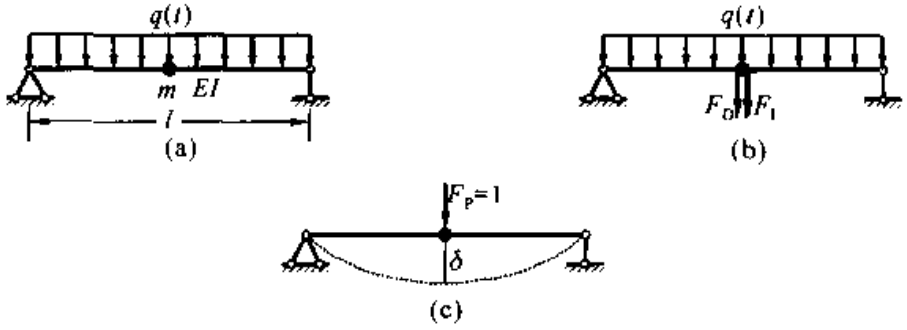


图 6－10　例题 6－2 图

解：1. 定自由度和坐标等　体系为单自由度。设质量 m 的位移为 y

(向下为正),加惯性力和阻尼力后的受力情形示于图 6-10b 中。

2. 列位移方程 体系位移是由惯性力、阻尼力和动荷载共同引起的。则由结构位移计算可知

$$y = \Delta_P + \delta(F_I + F_D) \tag{6-6}$$

式中,Δ_P 是由动荷载引起质量沿自由度方向的位移,δ 为自由度方向加单位广义力所引起的自身方向位移(如图 6-10c),由结构位移计算可求得

$$\Delta_P = \frac{5l^4}{384EI}q(t),\ \delta = \frac{l^3}{48EI}$$

将上式代入式(6-6),并注意到 $F_I = -m\ddot{y}$、$F_D = -c\dot{y}$,可得

$$y = \frac{5l^4 q(t)}{384EI} + \frac{l^3}{48EI}(-m\ddot{y} - c\dot{y}) \tag{6-7a}$$

经整理后可得

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_E(t) \tag{6-7b}$$

式中,$k = \frac{1}{\delta} = \frac{48EI}{l^3}$,$F_E(t) = k\Delta_P = \frac{5}{8}lq(t)$

式(6-7a)即为图 6-10 所示简支梁用柔度系数表示的运动方程,式(6-7b)为经转换后以刚度系数表示的运动方程。$F_E(t)$称为等效动荷载或等效干扰力,其含义为:$F_E(t)$直接作用于质量上所产生的位移和实际动荷载引起的位移相等。显然,实际荷载作用于质量上时,$F_E(t) = F_P(t)$。

[例题 6-3] 试建立图 6-11a 刚架受所示动荷载 $F_P(t)$作用的运动方程。

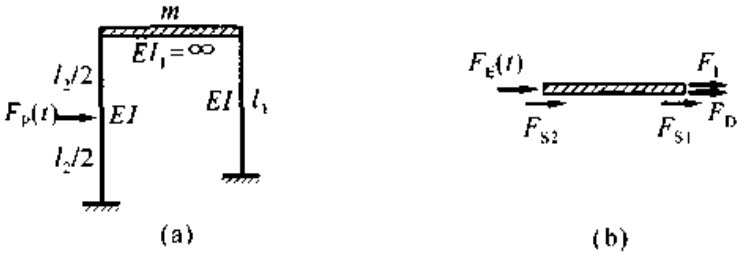


图 6-11 例题 6-3 图

解:本例仅仅动荷载作用位置与例题 6-1 不同,因此用刚度法求解时,解题步骤与例题 6-1 完全相同。故从略。

由于动荷载作用位置不同,图 6-11b 中代替图 6-9b 动荷载 $F_P(t)$的是等效干扰力 $F_E(t)$,因此要用动静法列方程,必须先解决 $F_E(t)$的计算。与例题 6-1 一样,根据位移法,动荷载作用下质量处沿自由度方向所附加支杆的反力为 $F_E(t)$。由此可得,$F_E(t) = F_P(t)/2$。

列方程　根据图6-11b建立$\sum F_y=0$，即可得结构的运动方程如下：

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F_E(t)=F_P(t)/2$$

$$k=\frac{12EI}{l_1^3}+\frac{12EI}{l_2^3}$$

建议读者仿照例题6-2用柔度法重作本例题，并考虑柔度法建立的方程和刚度法建立的方程之间有何关系。

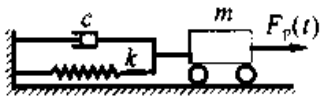


图6-12　弹簧、阻尼、质量系统

在理论力学中已经建立并讨论了图6-12所示质量、弹簧、阻尼器体系的运动方程及其解答。此体系运动方程为

刚度法

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F_P(t) \tag{6-8}$$

柔度法

$$y=\frac{1}{k}[-m\ddot{y}-c\dot{y}+F_P(t)] \tag{6-9}$$

对比式(6-8)与式(6-5)、式(6-9)与式(6-6)可见，当动荷载不作用于质量自由度方向时，只要以$F_E(t)$代替$F_P(t)$，则运动方程形式完全一致。

小结：

● 任意一个单自由度的振动问题，本质上都可抽象转换成一个图6-12所示的质量、弹簧、阻尼器体系。从实际结构到抽象模型的关键是求m和k(或δ)。

● 任何单自由度体系的运动方程，均可表为式$m\ddot{y}=F_E(t)+F_D+F_S$所示的二阶非齐次常微分方程形式。其中$F_E(t)$是动荷载引起的作用于质量m上的等效干扰力，F_D为体系的阻尼力、F_S为体系变形所引起的恢复力。上式不只是适用于等效粘滞阻尼和线弹性体系。也适用于其他阻尼和非线弹性体系。

● 当体系处于线弹性、阻尼为等效粘滞阻尼时，运动方程是二阶非齐次常系数线性微分方程：$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F_E(t)$。其中，$c$为体系的粘阻系数，$k$为体系的刚度系数，此时体系称为**线性体系**(linear system)。

● 可以证明等效干扰力$F_E(t)=k\Delta_P=\Delta_P/\delta$，它和动荷载作用下附加约束(为消除质量沿自由度方向运动而附加)上所产生的支座反力大小相等、方向相反。

● 对于具体的单自由度结构，原则上用刚度法或柔度法都可以建立运动方程。但是，计算工作量有差异，要视具体情况，灵活应用。

6-6-2 两个自由度体系运动方程举例

[例题 6-4] 试用刚度法建立图 6-13(其中图 a 为结构图,图 b 为动力分析计算简图)所示刚架的运动方程。不考虑阻尼。

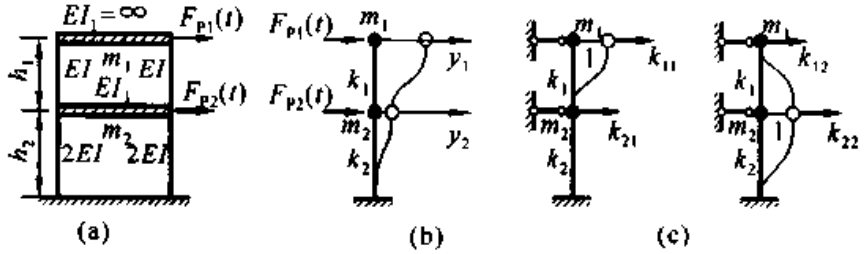


图 6-13 例题 6-4 图

解:由于横梁的刚度 $EI_1=\infty$,因此体系只能产生楼层侧移,故自由度为 2。这是结构静力分析篇位移法例题 4-19 中讨论过的剪切型串联多自由度结构,结构各层的层间侧移刚度 k_1 和 k_2 分别为

$$k_1=2\times\frac{12EI}{h_1^3}=\frac{24EI}{h_1^3} \tag{a}$$

$$k_2=2\times\frac{12\times 2EI}{h_2^3}=\frac{48EI}{h_2^3} \tag{b}$$

设任意时刻质量 m_1 的位移为 y_1,m_2 的位移为 y_2,如图 6-13b 所示。分别取 m_1、m_2 为隔离体,分析其受力如图 6-14 所示,由此可得如下动平衡方程:

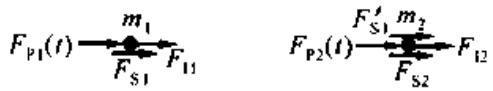


图 6-14 质量隔离体受力图

$$F_{P1}(t)+F_{I1}+F_{S1}=0,\ F_{P2}(t)+F_{I2}+F_{S2}+F'_{S1}=0 \tag{6-10}$$

其中,

$$\left.\begin{aligned}&F_{I1}=-m_1\ddot{y}_1,\ F_{S1}=-k_1(y_1-y_2)\\&F_{I2}=-m_2\ddot{y}_2,\ F_{S2}=-k_2y_2,\ F'_{S1}=-F_{S1}\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

将式(c)代入(6-10),整理后得

$$\left.\begin{aligned}&m_1\ddot{y}_1+k_{11}y_1+k_{12}y_2=F_{P1}(t)\\&m_2\ddot{y}_2+k_{21}y_1+k_{22}y_2=F_{P2}(t)\end{aligned}\right\} \tag{6-11}$$

式中,$k_{11}=k_1$,$k_{12}=k_{21}=-k_1$,$k_{22}=k_1+k_2$ 如图 6-13c 所示,称为体系的**刚度系数或反力系数**。

由结构静力分析可知,刚度系数 k_{ij} 的物理意义为"仅当质量沿第 j 个自由度方向产生单位位移时,在第 i 个自由度方向所需施加的约束力"。

如果将式(6-11)用矩阵形式表示,则可写成:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{P}} \tag{6-12}$$

式(6-11)或式(6-12)即为图 6-13a 所示刚架的运动方程。其中 $\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵，$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵，$\ddot{\boldsymbol{Y}}$ 为加速度向量，$\boldsymbol{Y}$ 为位移向量、$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 为干扰力向量。

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix},\ \ddot{\boldsymbol{Y}}=\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix} F_{\mathrm{P1}} \\ F_{\mathrm{P2}} \end{bmatrix} \tag{6-13}$$

● 不难看出，**质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为一对角线矩阵，而刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为一对称矩阵。这一结论对任何一个集中质量的线性体系均成立。**

[**例题 6-5**]　用柔度法重新建立图 6-13 所示刚架考虑阻尼的运动方程。

解：图 6-13a 所示结构的计算简图，根据达朗贝尔原理和等效粘滞阻尼理论，加惯性力、阻尼力后如图 6-15a 所示。

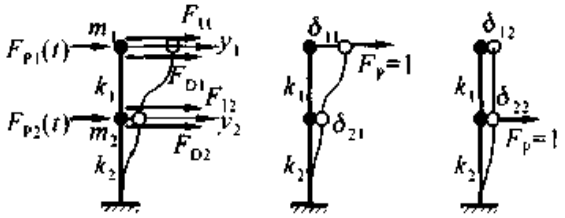


图 6-15　例题 6-5 图

由于层间剪力除以层侧移刚度可求得层间位移，而 m_1 的位移是两层间位移之和。所以，图 6-15a 所示“结构”在单位广义力作用下所引起的位移系数 δ_{ij} 分别为(如图 6-15b、c)

$$\delta_{11}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2},\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{k_2},\quad \delta_{22}=\frac{1}{k_2} \tag{a}$$

因此，在图 6-15a 所示荷载下，任一时刻 t 质量 m_1 和 m_2 的位移为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}[F_{\mathrm{P1}}(t)+F_{\mathrm{I1}}+F_{\mathrm{D1}}]+\delta_{12}[F_{\mathrm{P2}}(t)+F_{\mathrm{I2}}+F_{\mathrm{D2}}] \\ y_2 &= \delta_{21}[F_{\mathrm{P1}}(t)+F_{\mathrm{I1}}+F_{\mathrm{D1}}]+\delta_{22}[F_{\mathrm{P2}}(t)+F_{\mathrm{I2}}+F_{\mathrm{D2}}] \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

式(b)中惯性力比较简单，为 $F_{\mathrm{I1}}=-m_1\ddot{y}_1$，$F_{\mathrm{I2}}=-m_2\ddot{y}_2$。根据等效粘滞阻尼理论，如果记质量 j 自由度的单位速度所引起某质量 i 自由度方向的阻尼力为 c_{ij}，此即粘阻系数的物理意义。根据叠加原理阻尼力 F_{D1}、F_{D2} 可由质量 m_1 和 m_2 的速度写为

$$F_{\mathrm{D1}}=-(c_{11}\dot{y}_1+c_{12}\dot{y}_2),\quad F_{\mathrm{D2}}=-(c_{21}\dot{y}_1+c_{22}\dot{y}_2) \tag{c}$$

将惯性力和式(c)代入式(b)可得

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}[F_{P1}(t) - m_1\ddot{y}_1 - (c_{11}\dot{y}_1 + c_{12}\dot{y}_2)] + \\ &\quad \delta_{12}[F_{P2}(t) - m_2\ddot{y}_2 - (c_{21}\dot{y}_1 + c_{22}\dot{y}_2)] \\ y_2 &= \delta_{21}[F_{P1}(t) - m_1\ddot{y}_1 - (c_{11}\dot{y}_1 + c_{12}\dot{y}_2)] + \\ &\quad \delta_{22}[F_{P2}(t) - m_2\ddot{y}_2 - (c_{21}\dot{y}_1 + c_{22}\dot{y}_2)] \end{aligned}\right\} \tag{6-14}$$

式(6-14)是用柔度法建立的,图 6-13a 所示刚架考虑阻尼的运动方程。式(a)中的 k_1、k_2 由例题 6-4 式(a)和式(b)给出。

如果除例题 6-4 所引入的矩阵符号外,再引入体系的柔度矩阵 $\boldsymbol{\delta}$、体系的阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和速度向量 $\dot{\boldsymbol{Y}}$:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \tag{6-15a}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{Y}} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} \tag{6-15b}$$

则式(6-14)可改写成:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{F}_P - \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}}) \tag{6-16}$$

由式(6-15a)[包括式(a)]和式(6-13)(及刚度系数)通过矩阵乘证明:

$$\boldsymbol{\delta}^{-1} = \boldsymbol{K} \tag{6-17}$$

这表明,**体系的刚度矩阵与柔度矩阵互为逆矩阵,这一结论对于任意多自由度体系都成立**。

如果不考虑阻尼,即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$。式(6-16)和式(6-12)的结果完全相同。

[**例题 6-6**] 试用柔度法建立图 6-16a 所示刚架的运动方程。不考虑杆件的轴向变形。

解:在不考虑轴向变形条件下体系质量只能发生图 6-16a 所示的 y_1 和 y_2 位移,因此自由度为 2,沿 y_1 方向质量为 $2m$,沿 y_2 方向质量为 m。

作沿质量运动方向施加单位广义力的单位弯矩图,和在图 6-16a 所示动荷载作用下的荷载弯矩图,然后由结构静力分析可知,用荷载弯矩图和单位弯矩图(见图 6-16c)互乘可得

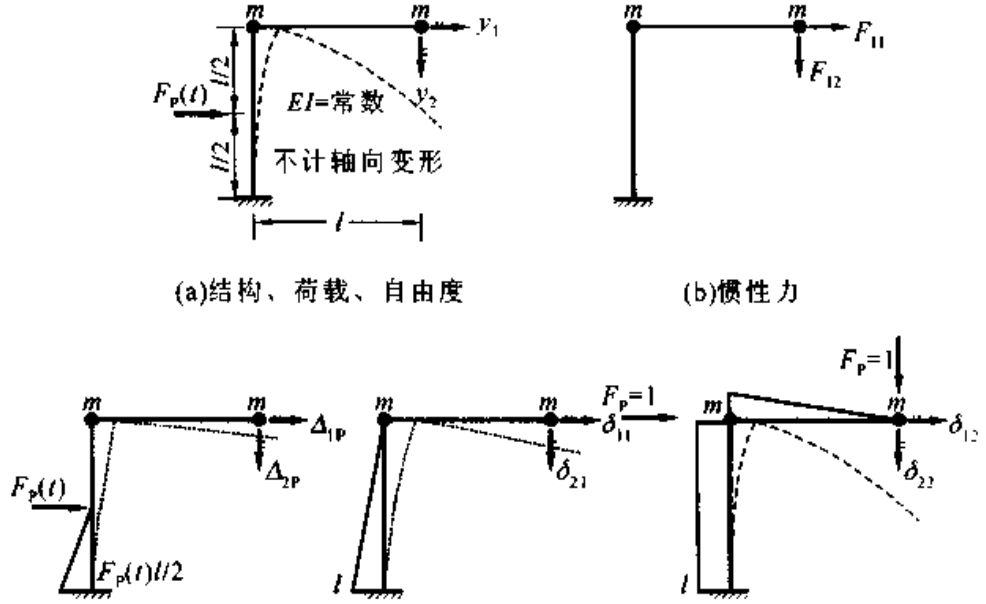
$$\Delta_{1P} = \frac{5F_P l^3}{48EI} = F_P\delta_{1P}, \quad \Delta_{2P} = \frac{F_P l^3}{8EI} = F_P\delta_{2P} \tag{a}$$

再由单位弯矩图自乘和互乘,得两个自由度方向上体系的柔度系数为

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^3}{2EI}, \quad \delta_{22} = \frac{4l^3}{3EI} \tag{b}$$

因此,由惯性力和动荷载共同引起的任一 t 时刻质量的位移为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \Delta_{1P}(t) + \delta_{11}F_{I1} + \delta_{12}F_{I2} \\ y_2 &= \Delta_{2P}(t) + \delta_{21}F_{I1} + \delta_{22}F_{I2} \end{aligned}\right\} \tag{6-18}$$



(a)结构、荷载、自由度　　(b)惯性力

(c)弯矩图和变形示意

图 6－16　例题 6－6 图

$$F_{I1} = -2m\ddot{y}_1, \quad F_{I2} = -m\ddot{y}_2, \tag{c}$$

将式(a)、(b)、(c)代入式(6－18)即可得图 6－16 所示刚架的运动方程。

如果将式(6－18)用矩阵形式来表示，可写成

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Delta}_P - \boldsymbol{\delta M}\ddot{\boldsymbol{Y}} \tag{6-19}$$

式中，$\boldsymbol{\delta}$、$\boldsymbol{Y}$、$\ddot{\boldsymbol{Y}}$ 展开时的表达式和含义同前述例题，这里从略。$\boldsymbol{\Delta}_P$ 和 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{\Delta}_P = \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{1P}F_P(t) \\ \delta_{2P}F_P(t) \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \tag{d}$$

在式(6－19)的两边同时左乘柔度矩阵的逆 $\boldsymbol{\delta}^{-1} = \boldsymbol{K}$，可得

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{KY} = \boldsymbol{F}_E(t) \tag{6-20}$$

其中，

$$k_{11} = \frac{48EI}{7l^3}, \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{18EI}{7l^3}, \quad k_{22} = \frac{12EI}{7l^3} \tag{e}$$

$$\boldsymbol{F}_E(t) = \boldsymbol{K\Delta}_P = \begin{Bmatrix} \dfrac{11}{28} \\ -\dfrac{3}{56} \end{Bmatrix} F_P(t) \tag{f}$$

可以证明：等效于扰力向量 $\boldsymbol{F}_E(t)$ 第 i 个元素的值，与质量全部固定时，动荷载 $F_P(t)$(任一时刻)在质量第 i 个自由度方向引起的约束反力等值、反号。

§6-7 多自由度体系运动方程的一般形式

6-7-1 运动方程一般形式

n 个自由度体系的运动方程不难由 2 个自由度推广得到，用刚度法或柔度法所建立的无阻尼运动方程矩阵形式为

刚度形式 $$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}(t) \tag{6-20}$$

柔度形式 $$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}$$

式中，质量矩阵 $\boldsymbol{M}$、刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$、柔度矩阵 $\boldsymbol{\delta}$、位移向量 $\boldsymbol{Y}$、加速度向量 $\ddot{\boldsymbol{Y}}$、动荷载向量 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$（亦称为干扰力向量）、荷载位移向量 $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}}$ 和等效干扰力向量 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}$ 的展开式分别为

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)^{\mathrm{T}}, \quad \ddot{\boldsymbol{Y}} = (\ddot{y}_1 \quad \ddot{y}_2 \quad \cdots \quad \ddot{y}_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}} = (F_{\mathrm{P1}} \quad F_{\mathrm{P2}} \quad \cdots \quad F_{\mathrm{Pn}})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}} = (\Delta_{\mathrm{P1}} \quad \Delta_{\mathrm{P2}} \quad \cdots \quad \Delta_{\mathrm{Pn}})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{E}} = (F_{\mathrm{E1}} \quad F_{\mathrm{E2}} \quad \cdots \quad F_{\mathrm{En}})^{\mathrm{T}}$$

等效干扰力向量 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{\delta}^{-1}\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}}$ 或按例题 6-6 所述求反力的方法形成。

当考虑阻尼时，加入阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$（c_{ij} 为等效粘阻系数），速度向量 $\dot{\boldsymbol{Y}}$，则多自由度体系运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}(t) \tag{6-21}$$

式中，$$\dot{\boldsymbol{Y}} = (\dot{y}_1 \quad \dot{y}_2 \quad \cdots \quad \dot{y}_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

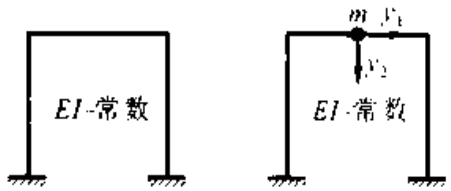
需要指出的是：

● 刚度形式方程和柔度形式方程可以互换。采用两种方法中的哪一种，要视问题的性质而定。对于多自由度静定结构，采用柔度法建立运动方程一般较刚度法要简单些。这是因为静定结构柔度系数很容易由位移计算得到，而当用刚度法求刚度系数时，会遇到求解多次超静定的问题。但在处理剪切型串联多自由度问题以及应用有限元法作动力分析时，通常用刚度法较为方便。

● 在单自由度体系中，刚度系数和柔度系数互为倒数；在多自由度体系中，刚度矩阵与柔度矩阵互为逆矩阵，对应系数不存在互为倒数的关系。

● 运动方程右端的等效干扰力向量 $\boldsymbol{F}_E$，当动荷载直接作用于质量时，由动荷载按自由度顺序组成，为动荷载向量 $\boldsymbol{F}_P$。否则由前述约束反力变号组成。

● 体系运动方程中的柔度矩阵、刚度矩阵并不等同于在求解超静定结构时力法和位移法中的柔度矩阵、刚度矩阵。这可由图 6－17 来说明，首先静力分析和动力分析方程的阶数就不同，如图 6－17 所示，前者为 3 阶，后者为 2 阶。其次，静力分析中柔度系数 δ_{ij} 是单位未知力 X_j 引起的 X_i 处 X_i 方向的位移；刚度系数 k_{ij} 是单位未知位移 Z_j 引起的 Z_i 处对应 Z_i 约束的反力。而动力分析中，柔度系数 δ_{ij} 是 j 自由度方向单位未知力 X_j 引起的 i 自由度方向的位移；刚度系数 k_{ij} 是 j 自由度方向单位未知位移 Z_j 引起的 i 自由度方向对应约束的反力。



(a)力法、位移法未知量均为3　　(b)动力分析自由度为2

图 6－17　动、静力对比分析

6－7－2　用刚度法和柔度法建立体系运动方程的具体步骤

● 刚度法

(1)　确定体系的自由度及各自由度运动方向的质量，建立质量矩阵 $\boldsymbol{M}$。然后沿每一自由度方向附加约束，固定全部运动质量。

(2)　求出所有作用在体系上的外加荷载在各质量自由度方向的约束

反力，从而组成等效干扰力矩阵 $\boldsymbol{F}_E$。

(3) 根据 k_{ij} 的物理意义：仅当第 j 个自由度方向给定一个单位位移时，在第 i 个自由度方向所需要施加的约束力。求出刚度系数 k_{ij}，从而得到刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$。

(4) 写出运动方程 $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}_E(t)$ 或 $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}_E(t)$，阻尼矩阵详细情况到第 3 章再讨论。

● **柔度法**

(1) 确定体系的自由度及各自由度方向的质量，建立质量矩阵 $\boldsymbol{M}$。

(2) 计算全部作用在体系上的动荷载在质量第 i 个自由度方向引起的位移 Δ_{ip}，从而得到动荷载引起的各质量静位移向量 Δ_P。

(3) 在质量第 j 个的自由度方向施加单位力，计算在质量第 i 个自由度方向引起的位移 δ_{ij}，从而得到柔度矩阵 $\boldsymbol{\delta}$。

(4) 写出运动方程 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Delta}_P - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}$。

(5) 求解柔度矩阵的逆矩阵 $\boldsymbol{\delta}^{-1} = \boldsymbol{K}$。

(6) 最后可得 $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}_P = \boldsymbol{F}_E(t)$。

关于用有限单元法进行结构动力分析，将在第 8 章中介绍。

§6-8 结论与讨论

6-8-1 本章结论

● 我国是地震多发国家，在当前综合国力条件下，对一般结构的抗震设计原则为“小震不坏、中震可修、大震不倒”，为此掌握结构动力学基本知识十分重要。

● 随时间变化的荷载作用是否作动力学问题分析，要看结构在这种荷载作用下所产生的惯性力大小。对于不同结构受同一荷载作用，结论可能是不同的。

● 现代结构动力学内容十分丰富，包含分析、识别和控制，有兴趣的读者应该关注“识别和控制”的发展动态。在将来的工作、学习中吸取这方面最新成果并将其用于工程设计。

● 实际结构都是无限自由度的，一般可用三种方法将其简化为有限自由度问题进行分析。对广义坐标法和有限元法，学习中要注意与第二篇知识相互联系和贯通。

● 体系的自由度数目既和体系的质量数目有关，又不完全取决于质量数目，自由度还和体系的可能变形状态有关，因此要根据具体问题“按自由度定义”分析确定。

● 频率、振型和阻尼是体系的重要动力特性。结构的动力响应，不仅和所作用的动荷载有关，而且还取决于结构的动力特性。因此，当荷载无法改变时，要改变结构的响应，只能从改变结构的动力特性入手。这实际就是振动控制的基本出发点。

● 建立体系运动方程的方法很多，最常用的是动静法，这是将随时间变化的运动方程建立问题，在考虑惯性力和阻尼力后简化为瞬时平衡问题。

● 直接平衡法有两种建立方程的方法：刚度法和柔度法。但都是根据达朗贝尔原理和所采用的阻尼理论，在体系上加惯性力和阻尼力。刚度法是考虑质量各自由度方向的平衡；柔度法是建立各自由度方向位移的协调条件。

● 动力自由度是确定质量空间位置的独立坐标(参数)个数，它和结构超静定次数或独立位移个数没有关系。因而，列运动方程时的刚度系数和柔度系数与解超静定问题时的对应系数之间也没有关系。

● 集中质量多自由度体系的质量矩阵是对角线矩阵，其元素为各自由度方向的总质量。刚度矩阵元素 k_{ij} 为“仅 j 自由度发生单位位移时，i 自由度方向所需施加的(附加)约束反力”，根据反力互等定理，刚度矩阵是对称的。刚度矩阵与柔度矩阵互为逆矩阵。

● 等效干扰力向量的元素可由“刚度矩阵乘荷载位移向量，即 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}(t)=\boldsymbol{K}\Delta_{\mathrm{P}}$”计算，也可由约束全部自由度的位移，求动荷载作用下附加约束上的反力来组成。用后一方案时，要注意反力反向才是等效干扰力。

6-8-2 几点讨论

● 从与里兹法相联系的广义坐标法出发，适当选取位移函数(基函数)，均可将任何结构化为单自由度(称为广义单自由度)问题进行分析，当然精度取决于位移函数的选取。因此研究单自由度问题，从工程意义上来说也是十分必要的。

● 建立广义单自由度运动方程的步骤为：

(1) 选取满足位移边界条件的位移函数并确定广义坐标；

(2) 加惯性力、阻尼力并将其视作外力；

(3) 利用虚位移原理建立虚功方程，考虑虚位移的任意性和独立性，从而获得广义单自由度运动方程。

● 当考虑结构杆件的轴向变形时，集中质量的数目和体系的自由度数有何关系？这时有 n 个质量的体系，其自由度数等于多少？

● 对于经受地震地面运动作用的结构，当不考虑地面运动转动分量时，以质量相对地面的运动参数作为体系的自由度，根据达朗贝尔原理加惯性力时考虑地面的牵连运动（惯性力由绝对加速度引起）即可。建议读者以单自由度问题为例，自行建立地震作用下结构体系的运动方程。

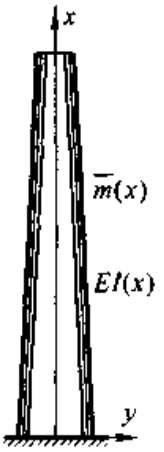


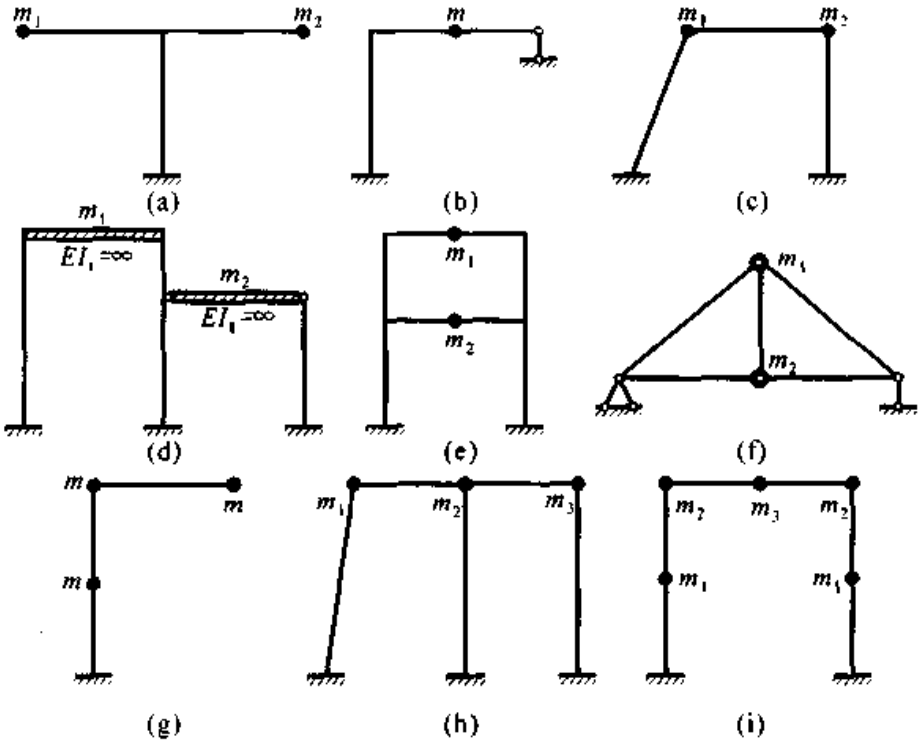
图 6－18

有兴趣的读者可按广义坐标法思路，自行练习建立图 6－18 所示烟囱的广义单自由度运动方程。位移函数可取幂级数或 $y(x,t)=Y(t)\left(1-\cos\frac{\pi x}{H}\right)$。

● 对于分布质量的无限自由度梁结构，可以在加惯性力（阻尼力）后取微段为对象，建立动平衡方程来得到运动方程，此时运动方程是偏微分方程。对等截面直梁是常系数的，否则是变系数的。建议读者以等截面简支梁为例，自行建立无限自由度体系的运动方程。

习　题

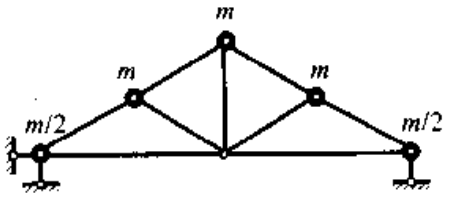
6－1　试确定图示体系的动力分析自由度。除图中表示抗弯刚度杆外，其他杆抗弯刚度均为 EI。不计轴向变形。



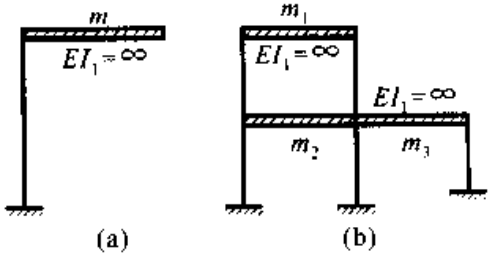
习题 6－1 图

6－2　试确定图示桁架的自由度数。

6－3　试确定图示体系的自由度数。除图中表示抗弯刚度的杆外，其他杆抗弯刚度均为 EI。

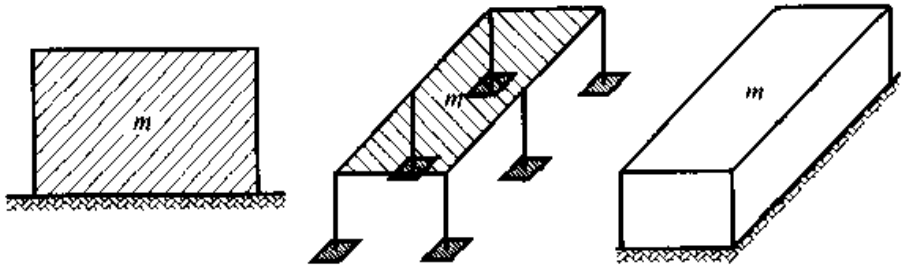


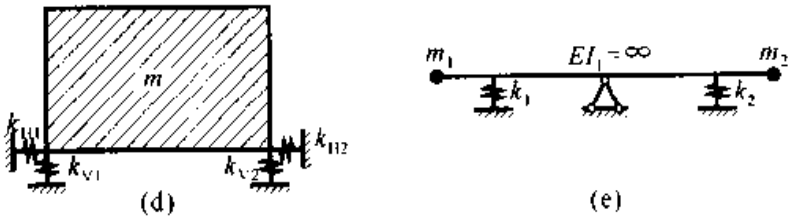
习题 6－2 图



习题 6－3 图

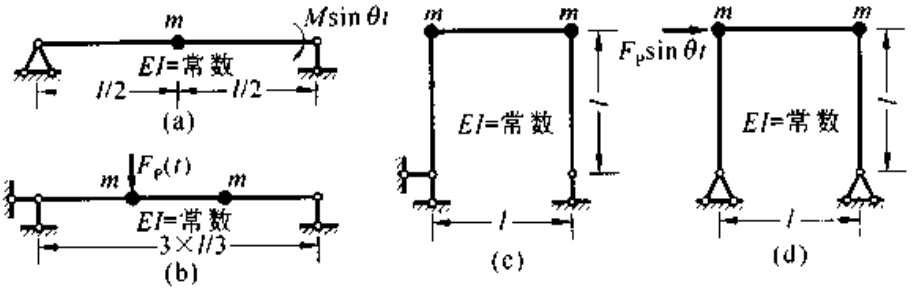
6－4　试确定图示体系的自由度数。阴影部分为具有质量的平面刚片，图 a 和 c 的地面均认为是弹性地基，图 c 为均质刚性块体。





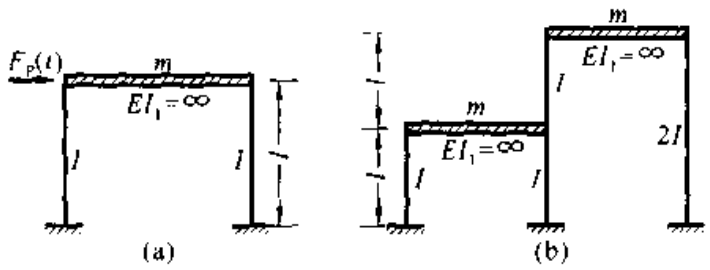
习题 6－4 图

6－5　试用柔度法列图示体系的运动方程。EI 等于常数。(a)不计阻尼；(b)计阻尼。



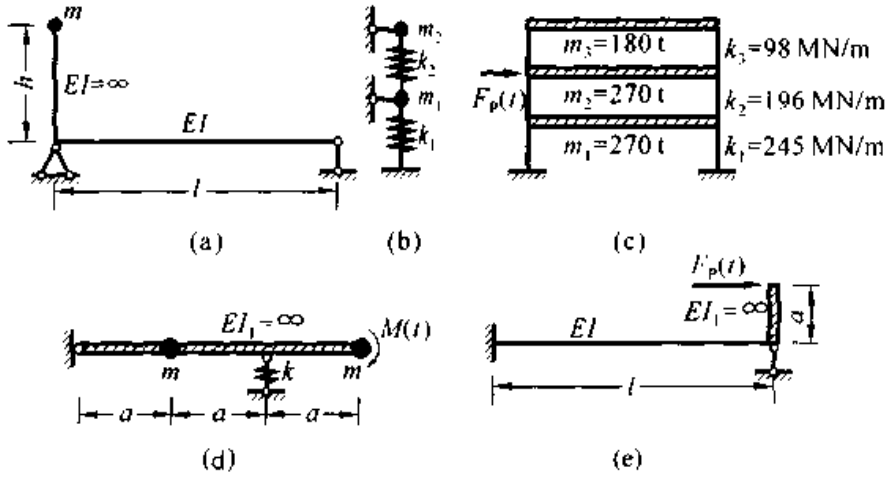
习题 6－5 图

6－6　试用刚度法列图示刚性梁体系的运动方程。(a)不计阻尼；(b)计阻尼。



习题 6－6 图

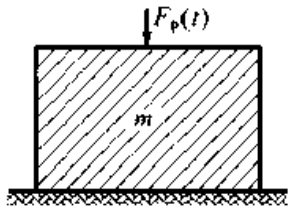
6－7　试列图示体系的无阻尼运动方程。图 c 为剪切型结构，图 d 为刚性杆且有分布质量 $\bar{m}$。



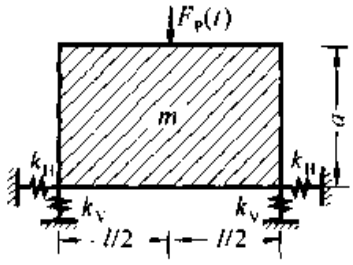
习题 6－7 图

6－8　试列图示均质刚性块体竖向振动计阻尼时的运动方程。块体质量为 m，地基竖向刚度为 K。

6－9　试列图示刚性块体的运动方程。水平和竖向弹簧刚度分别为 k_H 和 k_V，质量均匀分布，总质量为 M。(提示：水平、竖向和转动三个自由度)



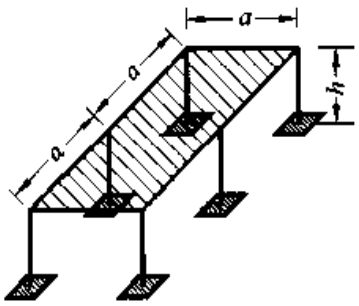
习题 6－8 图



习题 6－9 图

6－10　试列图示厂房刚性屋盖的运动方程。柱子质量不计，屋盖质量均匀分布，总质量为 M；柱子刚度相同，不计轴向变形，其截面为圆形，截面惯性矩为 I，极惯性矩为

J,弹性模量为 E。(提示:水平两方向和转动三个自由度)



习题 6-10 图

第7章

单自由度体系的振动分析

“理论力学”中读者已学过以质量、弹簧、阻尼器为模型的单自由度体系振动分析。本章首先对单自由度体系振动分析的一些主要内容作简单回顾，然后在此基础上加以扩展，作为第8章“多自由度振动分析”的重要基础。

§7-1 单自由度体系自由振动分析的回顾和扩展

在第6章中已经建立了单自由度体系运动方程的一般形式如下：

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_E(t) \tag{7-1}$$

7-1-1 自由振动的主要内容回顾

在式(7-1)中令 $F_E(t)=0$，即得自由振动的运动方程

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \tag{7-2}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega} \tag{7-3}$$

式(7-2)可改写为

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \tag{7-4}$$

式中，ω 称为体系的**自振频率**，ξ 为**阻尼比**(damping ratio)。

小阻尼情况($\xi<1$)下的通解为

$$y(t) = e^{-\xi\omega t}\left(y_0\cos\omega_d t + \frac{\dot{y}_0 + y_0\xi\omega}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) \tag{7-5}$$

有阻尼自振频率 ω_d 为

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} \tag{7-6}$$

y_0 和 $\dot{y}_0$ 为运动的初位移、初速度，统称为**初始条件**(initial condition)

如果令式(7－5)中

$$y_0 = A\sin\varphi,\quad \frac{\dot{y}_0 + y_0\xi\omega}{\omega_d} = A\cos\varphi \tag{7－7a}$$

则可将其改写成：

$$y(t) = Ae^{-\xi\omega t}\sin(\omega_d t + \varphi) \tag{7－7b}$$

式中，最大振幅 A 和初相位 φ 分别为

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + y_0\xi\omega}{\omega_d}\right)^2},\quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega_d y_0}{\dot{y}_0 + y_0\xi\omega}\right) \tag{7－7c}$$

由式(7－7b)可知，在小阻尼情况下，体系运动的时间－位移曲线为幅值按指数规律衰减的正弦曲线，如图 7－1 所示。

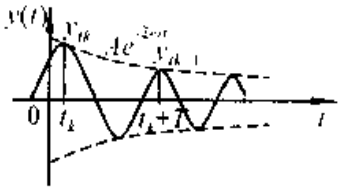


图 7－1　小阻尼情况位移影响

无阻尼自由振动

在理想状态下可认为体系无阻尼，即 $c=0$，显然它是上述结果在 $\xi=0$ 情形下的特例。此时，

$$y(t) = a\sin(\omega t + \alpha) \tag{7－8a}$$

式中无阻尼振幅 a 和无阻尼初相位 α 分别为

$$a = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2},\quad \alpha = \arctan\frac{\omega y_0}{\dot{y}_0} \tag{7－8b}$$

(1) $\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$。可见有阻尼自振频率小于无阻尼自振频率。但由于阻尼比通常远小于 1，因此二者差异甚小。实际分析中一般不计阻尼对频率的影响。

(2) 自振频率是结构的一个重要动力特性：

● 结构的自振频率只与结构的质量和刚度有关。对单自由度体系，自振频率与结构的刚度平方根成正比、与质量的平方根成反比。因此，要改变结构的自振频率只有通过改变结构的刚度或质量实现。

● 对于两个形式差异很大的结构，如果它的质量和自振频率相等，则在同样初始条件、或同一动荷载作用下它们的动力响应(位移、速度、加速度)相同。因此，结构的自振频率计算在结构动力分析中占有十分重要的地位。

(3) 由自振频率的定义，根据式(7－3)可得出以下的关系式：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{W\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} \tag{7－9}$$

式中，$\delta=\frac{1}{k}$为体系的**柔度系数**，g 为**重力加速度**，W 为**重量**，即 $W=mg$，Δ_{st}表示由重量 W 沿质量运动方向作用时引起的**静位移**，即 $\Delta_{st}=W/k$。

7-1-2 确定体系阻尼比的一种方法

由式(7-7b)及图 7-1 可见，当体系从任一时刻 t_k 经过 n 个周期$\left(T=\frac{2\pi}{\omega_d}\right)$后，其振幅的比值为

$$\frac{y_{t_k}}{y_{t_{k+n}}}=\frac{e^{-\xi\omega t_k}}{e^{-\xi\omega(t_k+nT)}}=e^{n\xi\omega T} \tag{a}$$

由式(a)可解得

$$n\xi\omega T=\ln\frac{y_{t_k}}{y_{t_{k+n}}} \tag{b}$$

将 $T=\frac{2\pi}{\omega_d}$代入上式，并注意到 $\omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2}$，可得

$$\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{1}{2n\pi}\ln\frac{y_{t_k}}{y_{t_{k+n}}} \tag{7-10}$$

工程实际中，ξ 通常在 0.02～0.2 之间，因此式(7-10)可近似地表示为

$$\xi\approx\frac{1}{2n\pi}\ln\frac{y_{t_k}}{y_{t_{k+n}}} \tag{7-11a}$$

利用式(7-11a)，便可根据实际测量得到的位移 y_{t_k} 等计算结构的阻尼比，再由式(7-3)便可求得结构的粘阻系数

$$c=2m\omega\xi=2\xi\sqrt{km} \tag{7-11b}$$

[**例题 7-1**] 图 7-2 所示刚架，柱的抗弯刚度 $EI=4.5\times10^6\ \mathrm{N\cdot m^2}$，不计质量，横梁为刚性，质量 $m=5\,000\ \mathrm{kg}$。为测得该结构的阻尼系数，先用千斤顶使横梁产生 25 mm 的侧移，然后突然放开，使刚架产生自由振动。经过 5 个周期后，测得侧移的幅值为 7.12 mm。试计算结构的阻尼系数。

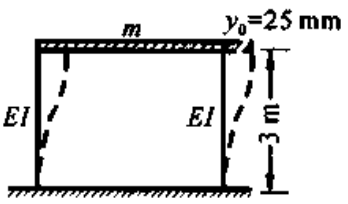


图 7-2 初位移测阻尼示意

解：由结构静力分析可知，两个柱子的侧移刚度为

$$k=2\times\frac{12\ EI}{h^3}=2\times\frac{12\times4.5\times10^6\ \mathrm{N\cdot m^2}}{(3\ \mathrm{m})^3}=4.0\times10^6\ \mathrm{N/m}$$

由式(7－11a)可求得阻尼比为

$$\xi=\frac{1}{2n\pi}\ln\frac{y_{t_k}}{y_{t_{k+n}}}=\frac{1}{2\times5\times\pi}\ln\frac{25\ \text{mm}}{7.12\ \text{mm}}=0.04$$

再由式(7－11b)可求得粘阻系数

$$c=2\xi\sqrt{km}=2\times0.04\times\sqrt{4.0\times10^6\ \text{N}\cdot\text{m}^2\times5\,000\ \text{kg}}=11\,313.7\ \text{kg/s}$$

大量结构实测结果表明，对于钢筋混凝土和砌体结构 $\xi=0.04\sim0.05$，钢结构 $\xi=0.02\sim0.03$。各种坝体的 $\xi=0.03\sim0.2$。拱坝 $\xi=0.03\sim0.05$，重力坝(大头坝)$\xi=0.05\sim0.1$，土坝、堆石坝 $\xi=0.1\sim0.2$。

[**例题 7－2**]　试求例题 7－1 中图 7－2 所示刚架的自振频率，并与有阻尼自振频率比较。

解：由例题 7－1 的结果可得

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{4\times10^6\ \text{N}\cdot\text{m}^2}{5\,000\ \text{kg}}}=28.284\ \text{rad/s}$$

$$\omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2}=28.284\ \text{rad/s}\ \sqrt{1-0.04^2}=28.261\ \text{rad/s}$$

误差$\frac{\omega_d-\omega}{\omega_d}\times100\%=-0.081\%$，工程中取 $\omega_d\approx\omega$ 是有足够精度的。

§7－2　单自由度体系的受迫振动

在理论力学里也曾学习过单自由度体系在简谐荷载下的受迫振动，得到过共振、瞬态振动、稳态振动等概念。实际工程中的动荷载不只简谐荷载一种，本节首先讨论任意荷载下的受迫振动一般解，然后作为一般解的应用，讨论一些常见动荷载情形的解答和特点。

7－2－1　单自由度体系受迫振动的一般解

在任意动荷载 $F_P(t)$ 所引起的等效干扰力 $F_E(t)$ 的作用下，单自由度体系的运动方程为

$$m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=F_E(t)\qquad(7-12a)$$

$$\ddot{y}(t)+2\xi\omega\dot{y}(t)+\omega^2y(t)=\frac{F_E(t)}{m}\qquad(7-12b)$$

由常系数常微分方程的解法可知，式(7－12)的全解为对应齐次方程的通解 $y_1(t)$ 和非齐次方程的特解 $y_2(t)$ 之和，即

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)\qquad(7-13)$$

上一节中已经得到齐次方程的通解 $y_1(t)$，对线性系统特解 $y_2(t)$可用叠加原理得到。

1. 基本思路

将随时间任意变化的动荷载视为一系列独立脉冲的总和，如图 7-3 所示。设法求出每一独立冲量作用下的响应后，由叠加原理就可以得到任意荷载的解答。

2. 公式推导

假设图 7-3 所示脉冲，在 $t<\tau$ 时刻以前，体系处于静止状态；不失一般性，设动荷载沿自由度方向直接作用在质量上，因此 $F_E(t)=F_P(t)$。在 $t=\tau$ 时刻质量 m 在 $\Delta\tau$ 时间内受到冲量 $I(\tau)=F_E(\tau)\Delta\tau$ 的作用。根据动量定理，在冲量结束后质量 m 将获得初速度

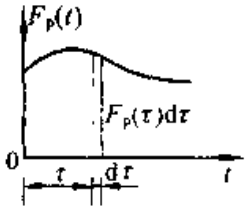


图 7-3 任意荷载

$$\dot{y}_0(\tau+\Delta\tau)=\frac{I(\tau)}{m}=\frac{F_P(\tau)\Delta\tau}{m} \tag{a}$$

加速度为 $F_P(\tau)/m$，在 $\Delta\tau$ 时间结束后，质量 m 将产生的位移为

$$y_0(\tau+\Delta\tau)=\frac{1}{2}\frac{F_P(\tau)}{m}(\Delta\tau)^2 \tag{b}$$

由式(a)和式(b)可见，当 $\Delta\tau\to 0$ 时，在 $t=\tau$ 时刻质量 m 获得的初速度为时间的一阶微量，而质量 m 获得的初位移是时间的二阶微量，可以忽略。

这就是说，在冲量作用结束后，质量的运动是以式(a)的初速度为初始条件的微幅自由振动。所以，当 $\Delta\tau\to 0$ 时，根据式(7-7b)，在 $t>\tau$ 以后的微幅自由振动可写成

$$\mathrm{d}y(t)=\frac{F_P(\tau)\mathrm{d}\tau}{m\omega_d}e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\quad(t>\tau) \tag{c}$$

根据基本思想，任意干扰力 $F_P(t)$可看作一系列冲量 $I(\tau)=F_P(\tau)\mathrm{d}\tau$ ($t=\tau$ 时刻)连续作用的过程，由于(7-12)是线性方程，因此叠加原理成立。由式(c)可得体系在动荷载下的响应为

$$y_2(t)=\int_0^t\frac{F_P(\tau)}{m\omega_d}e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7-14}$$

式(7-14)即为非齐次方程的一个特解，称为**杜哈梅积分**(Duhamel integration)。

通常也可将式(7-14)改写成如下形式：

$$y_2(t)=\int_0^t F_P(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7-15}$$

其中，

$$h(t-\tau)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau) \tag{7-16}$$

因为 $h(t)$ 表示单自由度体系在 $t=\tau$ 时刻受到单位脉冲荷载作用时的响应，因此称为**单位脉冲响应函数**(unit impulse response function)，简称**脉响函数**。

3. 方程全解

将齐次方程通解和非齐次方程特解相加，即可得受迫振动的全解为

$$y(t)=Ae^{-\xi\omega t}\sin(\omega_d t+\varphi)+\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7-17a}$$

式中，A 和 φ 由式(7-7c)从给定的初始条件确定。

对于无阻尼的情形，式(7-17a)可简化为

$$y(t)=a\sin(\omega t+\alpha)+\frac{1}{m\omega}\int_0^t F_P(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7-17b}$$

式中，a 和 α 由式(7-8b)计算。

如果体系在初始时刻处于静止状态，即 $y_0=\dot{y}_0=0$，则质量 m 的运动由式(7-14)描述。

7-2-2　几种常见荷载作用下的动力响应分析

1. 简谐荷载 $F_P(t)=F_0\sin\theta t$ 作用下的动力响应回顾及扩展

在简谐荷载 $F_P(\tau)=F_0\sin\theta\tau$ 下，运动方程的全解为

$$y(t)=Ae^{-\xi\omega t}\sin(\omega_d t+\varphi)+A_0\frac{\theta}{\omega_d}e^{-\xi\omega t}\sin(\omega_d t+\varphi')+A_0\sin(\theta t-\psi) \tag{7-18a}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}
&A=\sqrt{(y_0)^2+\left(\frac{\dot{y}_0+\xi\omega y_0}{\omega_d}\right)^2},\quad \tan\varphi=\frac{\omega_d y_0}{\dot{y}_0+\xi\omega y_0}\\
&\beta=\frac{\theta}{\omega},\qquad \tan\varphi'=\frac{2\xi\omega_d}{\omega[2\xi^2-(1-\beta^2)]}\\
&A_0=\frac{F_0}{m\omega^2}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2}},\quad \tan\psi=\frac{2\xi\theta}{\omega(1-\beta^2)}
\end{aligned}\right\} \tag{7-18b}$$

β 为荷载频率与自振频率的比值，称为**频率比**(frequency ratio)或简称为**频比**。

式(7-18a)表明，简谐荷载作用下的响应由三部分组成：第一部分是由初始条件引起的自由振动；第二部分是由动荷载引起频率为 ω 的伴随自由

振动;第三部分为动荷载引起、按荷载频率 θ 作等幅振动的纯受迫振动。同时存在第一和第二两部分时称为非稳态响应,由于阻尼使前两部分消失后,第三部分称为稳态响应。体系运动的时间位移曲线如图 7-4 所示。

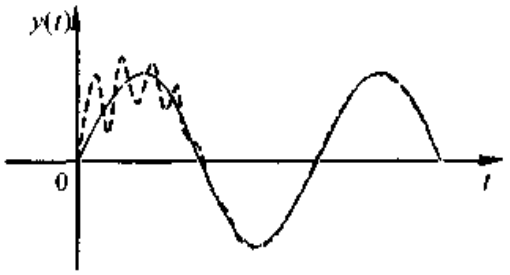


图 7-4 简谐荷载响应

工程中只关心体系的稳态响应。

(1) 稳态响应的动力放大系数

令简谐荷载幅值作用所产生的静位移为 $y_{st}=\dfrac{F_0}{m\omega^2}=\dfrac{F_0}{k}$,则稳态受迫振动为

$$y(t)=A_0\sin(\theta t-\psi)=y_{st}\mu\sin(\theta t-\psi) \tag{7-19}$$

式中,μ 称为位移**动力放大系数**(magnification coefficient)。

$$\mu=\frac{A_0}{y_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2}} \tag{7-20a}$$

这表明,动力放大系数 μ 的量值与阻尼比 ξ 和频率比 $\beta=\theta/\omega$ 有关。图 7-5 为给定阻尼比下放大系数和频比间的关系曲线。当无阻尼时,

$$\mu=1/(1-\beta^2) \tag{7-20b}$$

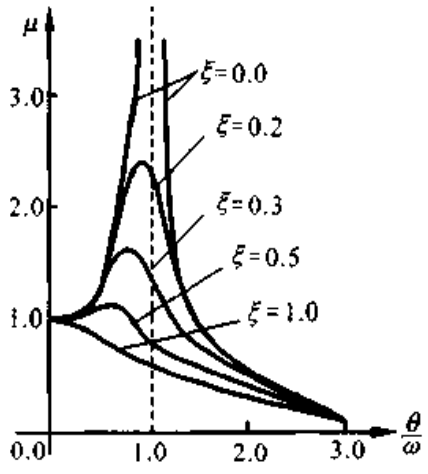


图 7-5 放大系数

● 当共振 $\theta=\omega$ 时 $\mu=\dfrac{1}{2\xi}$;

● 由极值条件,动力放大系数 μ 最大值发生在

$$\beta=\frac{\theta}{\omega}=\sqrt{1-2\xi^2} \tag{7-21}$$

●在实际工程中,一般应使结构的自振频率至少与荷载频率相差 30% 左右,以便避开共振。

(2) 体系内各种力的平衡

由式(7-19)可求得体系内各种力分别为

$$\left.\begin{aligned}&\text{惯性力:}F_I(t)=-m\ddot{y}(t)=\mu F_0\beta^2\sin(\theta t-\psi)\\&\text{阻尼力:}F_D(t)=-c\dot{y}(t)=-2\xi\mu F_0\beta\cos(\theta t-\psi)\\&\text{恢复力:}F_S(t)=-ky(t)=-\mu F_0\sin(\theta t-\psi)\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

将式(d)代入运动方程,可得

$$\mu F_0\beta^2\sin(\omega t-\psi)-2\xi\mu F_0\beta\cos(\theta t-\psi)-$$
$$\mu F_0\sin(\theta t-\psi)+F_P(t)=0 \tag{e}$$

这一结果表明：

● 当 $\beta\to 0$ 时，外荷载主要由恢复力平衡，这时体系响应与静力结果相差不大；

● 当 $\beta\to\infty$ 时，$\mu\to 0$，体系动位移很小，外荷载主要由质量的惯性力平衡；

● 当 $\beta\to 1$ 时，$\mu\to\dfrac{1}{2\xi}$，$\psi\to\dfrac{\pi}{2}$，外荷载主要由阻尼力来平衡。

需要指出的是：

● 在共振区($0.75<\beta<1.25$)以外，由于阻尼对稳态响应的影响较小，可以不考虑阻尼的影响而用无阻尼的稳态响应近似。

● 当不考虑阻尼时，由于相位角 $\psi=0$，因此位移响应与干扰力同步。

[例题 7-3] 不计阻尼，试求图 7-6 所示简支梁的最大动位移和最大动弯矩。已知 $\theta=0.6\omega$。

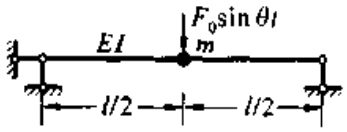


图 7-6　例 7-3 简支梁

解：简支梁在动荷幅值 F_0 作用下的静位移为 $y_{st}=\dfrac{F_0 l^3}{48EI}$，频率比 β 为 0.6，因此位移动力放大系数 $\mu=1.562\,5$，最大动位移为

$$y_{max}=\mu y_{st}=1.562\,5\times\frac{F_0 l^3}{48EI}$$

由式(d)，惯性力 $F_I(t)=\mu\beta^2 F_0\sin\theta t$，因此质量上所受总“外力”为

$$(1+\mu\beta^2)F_0\sin\theta t=\mu F_0\sin\theta t$$

由此可见最大动弯矩为

$$M_{max}=\mu\frac{F_0 l}{4}=\mu M_{st},\quad M_{st}=\frac{F_0 l}{4}$$

式中，M_{st} 为在动荷载幅值 F_0 作用下简支梁的最大静弯矩。与位移的动力放大系数一样，将最大动内力(弯矩)和最大静内力的比值称为内力(弯矩)放大系数，记为 μ_i。上述结果表明，当荷载作用于质量时，动内力放大系数 μ_i 等于动位移放大系数 μ。

[例题 7-4] 不计阻尼，试求图 7-7 所示简支梁的最大动位移和最大动弯矩。$\theta=0.6\ \omega$。

解：由静力分析中位移计算可得，简支梁上质量 m 处在动荷幅值 F_0 作用下的静位移为 $y_{st}=\dfrac{11F_0 l^3}{768EI}$，在上例的基础上可得最大动位移为($\mu=1.562\,5$)

$$y_{max}=1.562\ 5\times\frac{11F_0l^3}{768EI}$$

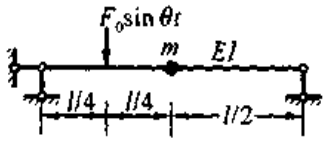


图 7-7 例 7-4 简支梁

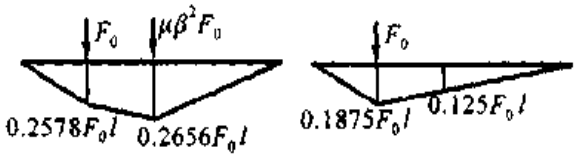


图 7-8 最大动弯距图

质量 m 上的惯性力为 $F_I(t)=\mu\beta^2F_0\sin\theta t$，动弯矩如图 7-8 所示，最大动弯矩为 $M_{max}=0.265\ 6F_0l$；而最大静弯矩(荷载幅值 F_0 下弯矩)为 $M_{max}^{st}=\frac{3}{16}F_0l$，按定义，动内力放大系数 $\mu_I=0.265\ 6/0.187\ 5=1.416\ 5$，但跨中和动荷载作用点对应弯矩的比分别为 2.124 8 和 1.374 9。这一结果表明，当动荷载不直接作用在质量 m 上时，动内力放大系数和动位移放大系数并不相同，而且不同截面对应的动弯矩和静弯矩比值也不同。

2. 周期荷载

对于周期为 T_P 的周期荷载 $F_P(t)$，可将其展开成富里叶级数：

$$F_P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi}{T_P}t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi}{T_P}t \tag{7-22}$$

其中，

$$a_0=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}F_P(t)\mathrm{d}t \tag{7-23a}$$

$$a_n=\frac{2}{T_P}\int_0^{T_P}F_P(t)\cos\frac{2n\pi}{T_P}t\mathrm{d}t$$

$$b_n=\frac{2}{T_P}\int_0^{T_P}F_P(t)\sin\frac{2n\pi}{T_P}t\mathrm{d}t \tag{7-23b}$$

式(7-22)中的第一项为静荷载，第二、第三项都是简谐荷载。因此，根据叠加原理，体系总的稳态响应为各项简谐荷载响应之和。

当不计阻尼时，根据式(7-18)，并令 $\xi=0$，则三项荷载的位移响应分别为

a_0 的静力响应：　$y_{st}=\frac{a_0}{k}$

$a_n\cos\frac{2n\pi}{T_P}t$ 的响应：　$y_{nc}(t)=\frac{a_n}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{2n\pi}{\omega T_P}\right)^2}\cos\frac{2n\pi}{T_P}t$ (7-24)

$b_n\sin\frac{2n\pi}{T_P}t$ 的响应：　$y_{ns}(t)=\frac{b_n}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{2n\pi}{\omega T_P}\right)^2}\sin\frac{2n\pi}{T_P}t$

由此可得体系总的位移响应：

$$y(t)=y_{st}+\sum_{n=1}^{\infty}[y_{nc}(t)+y_{ns}(t)]$$

$$=\frac{1}{k}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{2n\pi}{\omega T_P}\right)^2}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T_P}t+b_n\sin\frac{2n\pi}{T_P}t\right)\right] \tag{7-25}$$

当考虑阻尼时，可作类似的分析，这一问题留给读者自己研究。

3. 突加荷载

荷载形式如图 7-9 所示，其时间函数为

$$F_P(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ F_0 & t>0\end{cases} \tag{7-26}$$

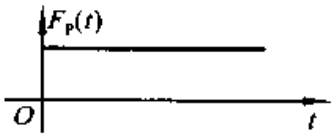


图 7-9　突加荷载

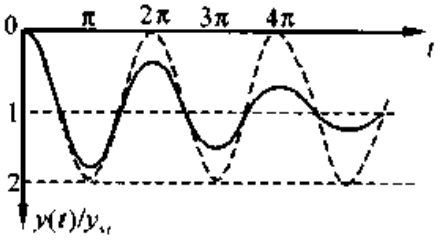


图 7-10　突加荷载位移响应

在零初始条件下，将式(7-26)代入式(7-14)，经分部积分后得

$$y(t)=y_{st}\left[1-e^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\xi\omega}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)\right],\quad y_{st}=\frac{F_0}{k} \tag{7-27}$$

式(7-27)表明，在突加荷载作用下，质量的位移由两部分组成，一部分是荷载引起的静位移，另一部分是在静力平衡位置产生的衰减简谐振动，其时间位移曲线如图 7-10 中的实线所示。

若不考虑阻尼的影响，则式(7-27)成为

$$y(t)=y_{st}(1-\cos\omega t) \tag{7-28}$$

此时质量在静力平衡位置附近作简谐振动，如图 7-10 中的虚线所示。

由式(7-27)和式(7-28)可分别求出质量的最大动位移为

$$y_{max}=\begin{cases}y_{st}(1+e^{-\frac{\xi\omega\pi}{\omega_d}}) & \text{有阻尼}\\ 2y_{st} & \text{无阻尼}\end{cases} \tag{f}$$

因此在突加荷载作用下，体系的动力放大系数为

$$\mu=\begin{cases}(1+e^{-\frac{\xi\omega\pi}{\omega_d}}) & \text{有阻尼}\\ 2 & \text{无阻尼}\end{cases} \tag{7-29}$$

由于 ξ 通常较小，所以一般认为突加荷载的位移动力放大系数为 2。

4. 矩形脉冲荷载

矩形脉冲荷载的解析表达式为

$$F_P(t)=\begin{cases}0 & t<0,t>t_1\\ F_0 & 0<t<t_1\end{cases} \tag{7-30}$$

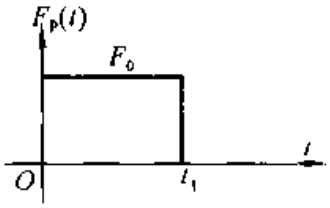


图 7-11 矩形脉冲荷载

如图 7-11 所示。由于这种荷载的作用时间 t_1 一般较短，最大位移一般发生在振动衰减还很少的开始阶段，因此通常可以不考虑阻尼的影响。将式(7-30)代入式(7-17b)，在零初始条件下可得

$$y(t)=\begin{cases}y_{st}(1-\cos\omega t) & 0<t<t_1\\ 2y_{st}\sin\dfrac{\omega t_1}{2}\sin\omega\left(t-\dfrac{t_1}{2}\right) & t>t_1\end{cases} \tag{7-31}$$

式(7-31)表明：在矩形脉冲荷载作用下，质量的运动分为两个阶段，前一阶段($0<t<t_1$)在脉冲作用时间内，与突加荷载的情形完全相同；后一阶段($t>t_1$)在脉冲作用结束后，为以脉冲结束时位移、速度为初始条件的自由振动。

由式(7-31)式可知，当 $t_1>\dfrac{T}{2}\left(T=\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$时，质量的最大动力位移为 $y_{max}=2y_{st}$；而当 $t_1<\dfrac{T}{2}$时，由于 $2\sin\dfrac{\omega t_1}{2}-(1-\cos\omega t)=2\sin\dfrac{\omega t_1}{2}-2\sin^2\dfrac{\omega t}{2}>0(t<t_1)$。所以质量的最大动力位移为 $y_{max}=2y_{st}\sin\dfrac{\omega t_1}{2}$。

因此，在矩形脉冲荷载作用下，质量的位移动力放大系数为

$$\mu=\begin{cases}2 & t_1>T/2\\ 2\sin(\omega t_1/2) & t_1<T/2\end{cases} \tag{7-32}$$

表 7-1 给出了不同的 t_1/T 比值下 μ 的数值。

表 7-1 矩阵脉冲荷载的位移动力放大系数

t_1/T	0	0.01	0.02	0.05	0.10	1/6	0.2	0.3	0.4	0.5	>0.5
μ	0	0.063	0.126	0.313	0.618	1.0	1.176	1.618	1.902	2	2

***5. 爆炸冲击荷载**

工程中遇到的爆炸冲击荷载如图 7-12a 所示，这种荷载的作用时间一般很短。由于在冲击荷载作用下，结构在很短的时间内达到最大响应，而阻尼力根本来不及吸收较多的能量。因此，这时(初始阶段)的分析可以不考虑阻尼力的影响。当然冲击结束后，由于存在阻尼，将仍然使自由振动衰减，最后恢复静止状态。

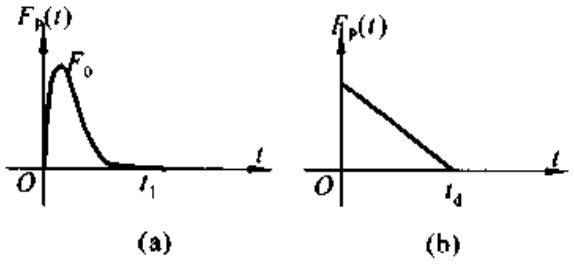


图 7－12　爆炸冲击荷载

在实际分析中，通常将图 7－12a 的冲击荷载简化为图 7－12b 的三角形脉冲荷载，其数学表达式为

$$F_P(t)=\begin{cases}0 & t>t_d\\ F_0\left(1-\dfrac{t}{t_d}\right) & 0<t<t_d\end{cases} \tag{7-33}$$

在零初始条件下，将式(7－33)代入式(7－17a)(不考虑阻尼的影响)，经分部积分后得：

$$y(t)=\begin{cases}y_{st}\left[(1-\cos\omega t)+\dfrac{1}{t_d}\left(\dfrac{\sin\omega t}{\omega}-t\right)\right] & t<t_d\\ y_{st}\left\{\dfrac{1}{\omega t_d}[\sin\omega t-\sin\omega(t-t_d)]-\cos\omega t\right\} & t>t_d\end{cases} \tag{7-34}$$

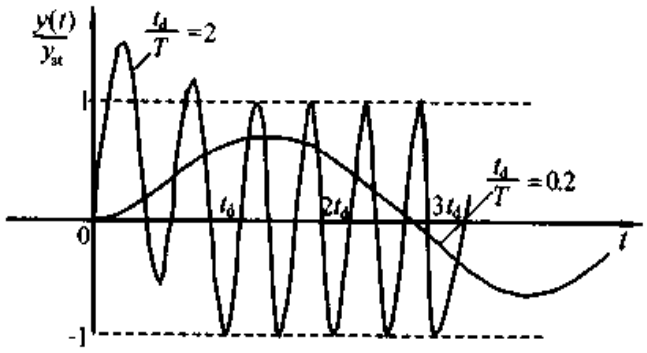


图 7－13　三角形脉冲、静位移比

图 7－13 给出了$\dfrac{y(t)}{y_{st}}$的曲线，由图示曲线可知：体系的动力响应与荷载持续时间和结构的自振周期$\left(T=\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$的比值关系很大，当持续时间趋于无穷大时，其结果与突加荷载时的响应一致。表 7－2 给出了不同持续时间的三角形脉冲荷载作用下体系位移动力放大系数值。

表 7-2 三角形脉冲荷载作用下体系位移动力放大系数的值

$\frac{t_1}{T}$	0.125	0.2	0.25	0.371	0.4	0.5	0.75	1.00	1.50	2.0	∞
μ	0.39	0.66	0.73	1.00	1.05	1.20	1.42	1.55	1.69	1.76	2.00

小结：

● 任意解析荷载都可通过 Duhamel 积分获得解答。当荷载变化规律是以数值形式给出时，需用数值积分获得响应的时程，这时可借助计算机给出数值解。

● 对于各种短期荷载，可以不考虑阻尼的影响，关键是要分时段考虑。在荷载作用时段内，用 Duhamel 积分求解，在荷载作用结束后，以结束时的位移、速度作为初始条件，求自由振动解。有了整个时程的解答，当然可以分析获得任何感兴趣的量。

● 上述几种荷载的位移响应和位移放大系数，可用表 7-3 归纳。

表 7-3 各种荷载形式下的动力位移公式和位移动力放大系数

荷载形式	动力位移公式	位移动力放大系数
$F_P(t)$	$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t+\int_0^t\frac{1}{m\omega}F(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$\mu=\frac{y(t)_{\max}}{y_{st}}$
$F_P(t)=F_0\sin\theta t$	$y(t)=y_{st}\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}\sin\theta t$	$\mu=\frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}$
$F_P(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ F_0 & t>0\end{cases}$	$y(t)=y_{st}(1-\cos\omega t)$	$\mu=2$
$F_P(t)=\begin{cases}0 & t<0,t>t_1\\ F_0 & 0<t<t_1\end{cases}$	$y(t)=y_{st}(1-\cos\omega t)\quad t<t_1$ $y(t)=y_{st}2\sin\frac{\omega t_1}{2}\sin\omega\left(t-\frac{t_1}{2}\right)\quad t>t_1$	$\mu=\begin{cases}2\sin\frac{t_1}{t} & \frac{t_1}{T}<\frac{1}{2}\\ 2 & \frac{t_1}{T}>\frac{1}{2}\end{cases}$
$F_P(t)=\begin{cases}0 & t<0,t>t_1\\ F_0\left(1-\frac{t}{t_1}\right) & 0<t<t_1\end{cases}$	$y(t)=y_{st}\left[(1-\cos\omega t)+\frac{1}{t_1}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}-t\right)\right]\quad t<t_1$ $y(t)=y_{st}\left\{\frac{1}{\omega t_1}[\sin\omega t-\sin\omega(t-t_1)]-\cos\omega t\right\}\quad t>t_1$	μ 见表 7-2
$I(\tau)=F_0\mathrm{d}\tau$	$y(t)=\frac{F_0\mathrm{d}\tau}{m\omega}\sin\omega(t-\tau)\quad t>\tau$	$\mu=\omega\mathrm{d}\tau$

* §7－3　单自由度非线性体系的响应分析

对于线性体系，可用 Duhamel 积分获得运动方程的解答。但非线性体系恢复力 F_S、阻尼力 F_D 等不仅和当前位移、速度有关，而且还和位移、速度的经历有关，因此叠加原理不再适用，因而不能再用 Duhamel 积分确定体系的响应。本节简单介绍一种求非线性响应的数值方法——线加速度逐步积分法，简称**线加速度法**(linear acceleration method)。

7－3－1　非线性运动的增量方程

设单自由度体系惯性力 F_I 和运动加速度 $\ddot{y}(t)$、阻尼力 F_D 和速度 $\dot{y}(t)$、恢复力 F_S 和位移 $y(t)$间的关系分别如图 7－14a、b 和 c 所示。由此可得 t 和 $t+\Delta t$ 瞬时的动平衡条件为

$$F_I(t)+F_D(t)+F_S(t)=F_P(t) \tag{7-35a}$$

$$F_I(t+\Delta t)+F_D(t+\Delta t)+F_S(t+\Delta t)=F_P(t+\Delta t) \tag{7-35b}$$

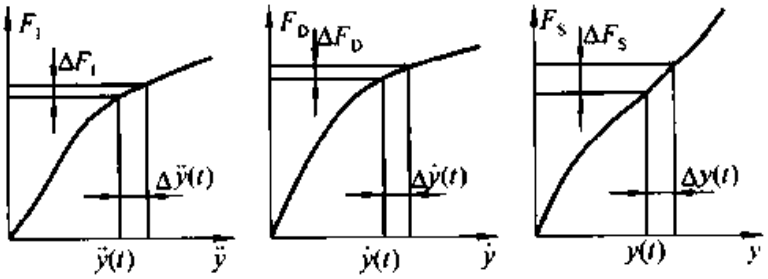


图 7－14　非线性特征关系

若记图示各割线的斜率为

$$\frac{\Delta F_I(t)}{\Delta\ddot{y}(t)}=m(\ddot{y}),\quad \frac{\Delta F_D(t)}{\Delta\dot{y}(t)}=c(\dot{y}),\quad \frac{\Delta F_S(t)}{\Delta y(t)}=k(y) \tag{a}$$

则由式(7－35)可得

$$m(\ddot{y})\Delta\ddot{y}(t)+c(\dot{y})\Delta\dot{y}(t)+k(y)\Delta y=\Delta F_P(t) \tag{7-36}$$

上式即为非线性体系的**增量方程**(incremental equation)。

由式(7－36)可得以下推论：

● 非线性体系的增量方程和线性体系运动方程形式相仿，不同处是增量方程中 m、c 和 k 可为加速度、速度和位移的函数。

● 线性体系可以作为图 7－14 示意的特征关系曲线为直线的特例。

● 当 Δt 足够小时，式(7-35)的割线斜率可用切线斜率来代替，也即

$$m(t)=\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\ddot{y}},\quad c(t)=\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}\dot{y}},\quad k(t)=\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}y} \tag{b}$$

则增量方程为

$$m(t)\Delta\ddot{y}(t)+c(t)\Delta\dot{y}(t)+k(t)\Delta y(t)=\Delta F_{\mathrm{P}}(t) \tag{7-37}$$

● 工程结构质量视为不变，达朗伯尔原理所得惯性力增量为 $m\Delta\ddot{y}(t)$，因此增量方程改为

$$m\Delta\ddot{y}(t)+c(t)\Delta\dot{y}(t)+k(t)\Delta y(t)=\Delta F_{\mathrm{P}}(t) \tag{7-38}$$

7-3-2 线加速度法解非线性问题

求解式(7-38)非线性方程的一般解析解是不可能的。为此，采用数值积分的方法。可用的数值积分方法很多，这里先介绍“线加速度法”。

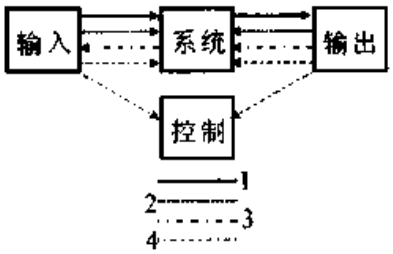


图 7-15 线加速度假设

(1) 基本假定

设加速度在$[t,t+\Delta t]$间隔内线性变化，如图 7-15 所示。也即

$$\ddot{y}(t+\tau)=\ddot{y}(t)+\frac{\Delta\ddot{y}(t)}{\Delta t}\tau \tag{7-39}$$

(2) 线加速度法逐步积分基本公式推导

● 对式(7-39)积分可得

$$\begin{aligned}\dot{y}(t+\tau)&=\dot{y}(t)+\ddot{y}(t)\tau+\frac{1}{2}\Delta\ddot{y}(t)\tau^2\\ y(t+\tau)&=y(t)+\dot{y}(t)\tau+\frac{1}{2}\ddot{y}(t)\tau^2+\frac{1}{6}\Delta\ddot{y}(t)\tau^3\end{aligned} \tag{7-40}$$

● 由式(7-40)第二式可得

$$\Delta\ddot{y}(t)=\frac{6}{\Delta t^2}\left(\Delta y(t)-\dot{y}(t)\Delta t-\frac{1}{2}\ddot{y}(t)\Delta t^2\right) \tag{c}$$

代回第一式可得

$$\Delta\dot{y}(t)=\frac{3}{\Delta t}\left(\Delta y(t)-\dot{y}(t)\Delta t-\frac{1}{6}\ddot{y}(t)\Delta t^2\right) \tag{7-41}$$

● 将式(c)和式(7-41)代入增量运动方程，整理后可得

$$K^*\Delta y(t)=\Delta F_{\mathrm{P}}^*(t) \tag{7-42a}$$

式中 K^*、ΔF_{P}^* 分别称为**拟静力刚度和拟静力增量荷载**

$$K^*=\frac{6}{\Delta t^2}m+\frac{3}{\Delta t}c(\dot{y})+k(y)=\frac{6}{\Delta t^2}m+\frac{3}{\Delta t}c(t)+k(t) \tag{7-42b}$$

$$\Delta F_P^*(t)=\Delta F_P(t)+m\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{y}(t)+3\ddot{y}(t)\right]+c(t)\left[3\dot{y}(t)+\frac{\Delta t}{2}\ddot{y}(t)\right] \tag{7-42c}$$

式(7-42a)～式(7-42c)即为线加速度法进行逐步积分的基本公式。

(3) 线加速度法的积分步骤

● 确定积分步长 Δt。

● 由初始条件 $y(0)$和 $\dot{y}(0)$根据运动方程确定初始加速度 $\ddot{y}(0)$。

● 确定初始粘阻系数 $c(0)$和刚度 $k(0)$。

● 由式(7-42b)计算拟静力刚度 K^*。

● 由式(7-42c)计算第一步的拟静力增量荷载 $\Delta F_P^*(t)$。

● 按 $\Delta y(t)=(K^*)^{-1}\Delta F_P^*(t)$,计算第一步增量位移 $\Delta y(t)$。

● 将增量位移代入式(7-41),计算增量速度 $\Delta\dot{y}(t)$。

● 由 $y(t)=y(0)+\Delta y(t)$和 $\dot{y}(t)=\dot{y}(0)+\Delta\dot{y}(t)$,可得 $t=\Delta t$ 时刻的位移、速度。

● 由 $t=\Delta t$ 时刻的位移、速度确定此时的阻尼力 $F_D(t)$和恢复力 $F_S(t)$,并从动平衡方程确定此时的加速度。

● 确定 $c(t)$和刚度 $k(t)$。以 $t=\Delta t$ 时刻的位移、速度和加速度作为“初始值”,重新计算拟静力刚度等。如此往复,即可由前一步求得后一步的响应,直到获得整个时间历程的响应。

上述步骤均可在计算机上实现,有条件的读者不妨自行编制出计算程序,用以确定体系的时间历程响应。随本书发行光盘上的 stepbystep.f90 程序,是包含有多种逐步积分方法的计算程序,可供读者学习时应用。

(4) 几点说明

● 线加速度法既可用于非线性体系,也可用于线性体系。

● 若体系周期为 T,用线加速度法进行逐步积分时,要求积分时间步长 $\Delta t<\frac{T}{10}$。

● 如果动荷载是由地震地面运动引起的,则 Δt 还应小于等于地震记录数值化的时间步长。

● 逐步积分方法可以用相对于泰勒级数展开的截断误差来估量其精度。经分析,线加速度法属截断误差为 Δt^2 的算法,可见要提高精度需取短的步长。

7-3-3　程序计算结果举例

为了说明线加速度法解非线性问题的应用,利用 stepbystep.f90 程序解算图 7-16a 所示单自由度体系在图 7-16b 荷载作用下,恢复力与位移的关

系如图 7－16c 的非线性响应。

程序计算结果由计算机所绘制的图形如图 7－17 所示。实线为非线性结果，虚线为线性响应。

有兴趣的读者，如果想用手算求解上面例题，可参考有关书中所介绍的列表计算方法。

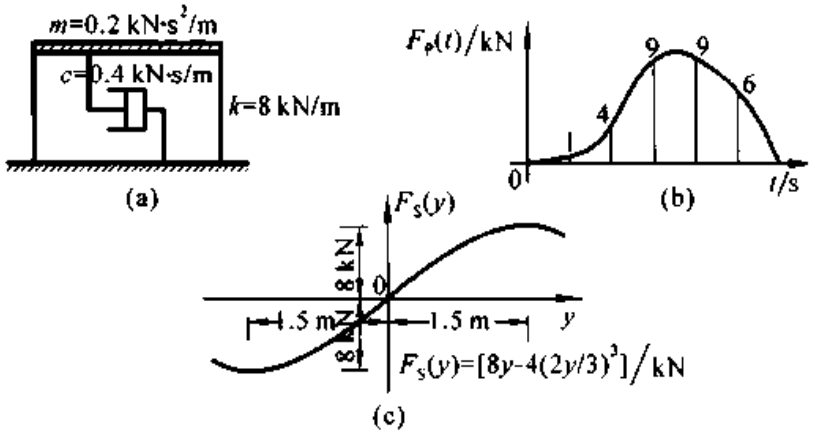


图 7－16　非线形响应分析算例

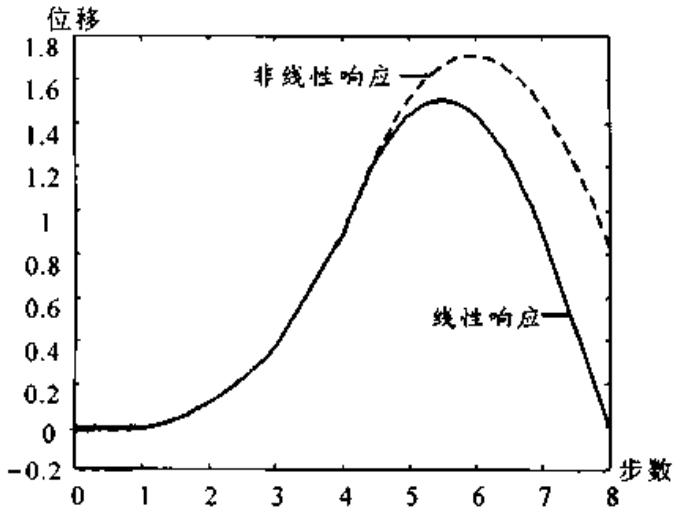


图 7－17　非线性和线性响应结果对比

§7－4　结论与讨论

7－4－1　本章结论

● 本章首先对理论力学单自由度振动分析的主要内容作了扼要回顾：

频率、周期的计算公式；振幅、相位的算式和各种力的平衡关系；简谐荷载下纯受迫振动的动力放大系数与频率比、阻尼比间的关系等等。这些基本概念必须深刻理解、熟练掌握。

● 利用使结构产生初位移(例如通过张拉)或初速度(例如给一冲击)来获得自由振动记录，从而可用式(7-11a)$\xi \approx \frac{1}{2n\pi}\ln\frac{y_{t_k}}{y_{t_{k+n}}}$由实测得到阻尼比；获得阻尼比的方法不只这一种，但这是最常用的方法之一。由于阻尼比一般很小，它对频率、周期的影响一般可忽略。

● 在共振区阻尼的作用是不可忽略的。从能量角度看阻尼使能量耗散，当不希望有能量耗散时应尽可能减少阻尼，而当希望尽可能使输入结构的能量减少时，应尽可能增大阻尼。结构振动控制在一定意义上就是设法增大耗能，因此研制高阻尼性能的材料或装置，是结构振动控制的重要内容之一。

● 对于线性体系利用冲量叠加建立了杜哈梅积分公式：

$$y_2(t)=\int_0^t \frac{F_P(\tau)}{m\omega_d}e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t F_P(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中，脉响函数为 $h(t-\tau)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)$。利用杜哈梅积分可获得结构在各种动荷载作用下的解析或数值响应。

● 利用付利叶级数展开，可将任意周期荷载变成常量荷载和一系列简谐荷载的叠加。

● 对于各种短期荷载作用，可以不考虑阻尼的影响，关键是要分时段进行分析。

● 杜哈梅积分不能用于非线性问题，而要从增量运动方程出发，采用直接(逐步)积分的计算机方法来得到数值解。逐步积分的方法很多，本章介绍的线加速度法是最简单的、条件稳定的算法。

7-4-2　几点讨论

● 在给定动荷载的条件下，单自由度体系的最大响应只和周期、阻尼比有关。对不同的的阻尼比做出最大响应随周期变化的曲线，这些曲线称为体系在给定荷载作用下的“反应谱”。位移、速度和加速度的最大响应曲线分别称为位移反应谱、速度反应谱和加速度反应谱。这一概念在第10章中将用于建立抗震设计方法。

● 威尔逊(E.B.Wilson)对线加速度法作了“修正”，认为加速度不只在 Δt 时间间隔内呈线性变化，而且在 $\theta\Delta t(\theta>1)$时间间隔内也呈线性变化，在

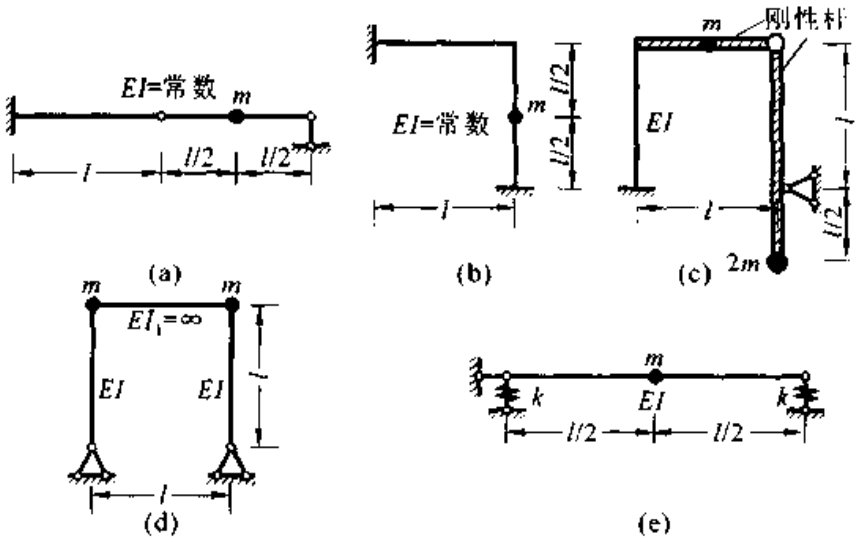
进行了类似线加速度法的推导后，建立了广为应用的 Wilson－θ 法。有兴趣的读者可以自行研究。

● 直接积分法的评判准则主要考虑以下几方面：稳定性、精度、算法阻尼（由算法而导致的一种虚假阻尼）和“超越”现象。详细的研究超出了本书范围，但应该知道稳定性是第一位的。威尔逊对线加速度法修正的意义就在于将一个条件稳定的算法变成了当 $\theta>1.37$ 时无条件稳定的算法。

Wilson－θ 法的精度并不比线加速度法高，仍然是一种二阶精度的算法。

习　题

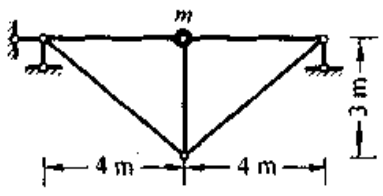
7－1　试求图示体系的自振频率与周期。



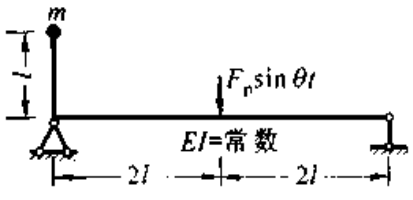
习题 7－1 图

7－2　试求图示桁架竖向振动自振频率。已知质量重 $W=40$ kN，各杆截面相同，$A=20$ cm^2，$E=2.1\times10^4$ kN/cm^2。忽略质量的水平运动。

7－3　试求图示体系质点的位移幅值和最大弯矩值。已知 $\theta=0.6\omega$。



习题 7－2 图

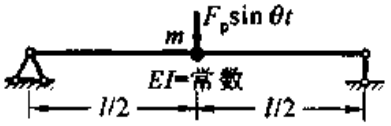


习题 7－3 图

7-4　图示梁跨中有重量为 20 kN 的电动机，荷载幅值 $F_P = 2$ kN，机器转速 400 r/min，$EI = 1.06 \times 10^4$ kN·m^2，梁长 $l = 6$ m。试求梁中点处的最大动位移和最大动弯矩。

(a) 不计阻尼；

(b) 阻尼比 $\xi = 0.05$。

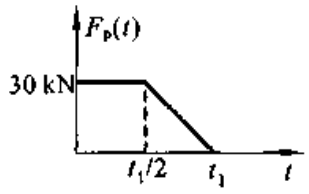


习题 7-4 图

7-5　习题 7-4 结构的质量上受到突加荷载 $F_P(t) = 30$ kN 作用。若开始时体系静止，试求梁中最大动位移。

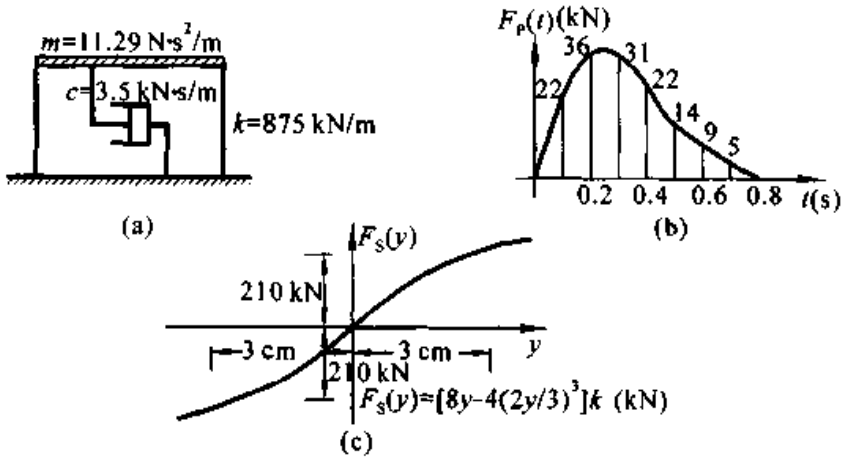
7-6　某结构在自振 10 个周期后，振幅降为原来初始位移的 10%（初速度为零）。试求其阻尼比。

7-7　习题 7-4 结构的质量上受到图示荷载作用，$t_1 = T$，T 为体系自振周期。若开始时体系静止，试求梁中最大动位移。



习题 7-7 图

7-8　试计算图 a 所示体系在图 b 荷载作用下的位移响应。已知非线性弹性力-位移关系如图 c 所示。



习题 7-8 图

第8章

多自由度体系的振动分析

工程结构中，很多问题需简化为多自由度体系加以分析。例如多层房屋、高层建筑、不等高厂房排架和块式基础等结构的振动分析问题。特别是，随着计算机技术和应用软件的发展和广泛应用，将结构按多自由度体系进行动力分析已在工程中得到普遍的应用。

本章将重点介绍对结构进行多自由度振动分析的基本方法，以及多自由度体系的主要动力特性。

§8-1 无阻尼多自由度体系的自由振动

由第7章的分析已知，阻尼对体系自由振动频率和周期的影响不大。此外，体系无阻尼自由振动分析还是体系受迫振动分析的基础。因此，首先讨论体系无阻尼的情形。

在第6章中，已建立了 n 个自由度体系无阻尼运动方程的一般形式，即

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}_P \tag{8-1a}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Delta}_P - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} \tag{8-1b}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵，$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵，$\boldsymbol{\delta}$ 为柔度矩阵，$\boldsymbol{Y}$、$\ddot{\boldsymbol{Y}}$ 分别为位移、加速度向量，$\boldsymbol{F}_P$ 为动荷载或等效干扰力向量，$\boldsymbol{\Delta}_P$ 为动荷载引起的位移向量。式(8-1a)称为刚度形式，式(8-1b)称为柔度形式。对刚度形式方程求解称为**刚度法**，而对柔度形式方程求解称为**柔度法**。因刚度矩阵和柔度矩阵互为逆矩阵，故两种形式完全等价。

当体系作自由振动时，运动方程变为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0} \tag{8-2a}$$

$$\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} = 0 \tag{8-2b}$$

8-1-1 多自由度体系的振型和频率方程

1. 刚度法

和单自由度体系无阻尼自由振动的解 $y(t) = a\sin(\omega t + \alpha)$一样，多自由度体系无阻尼自由振动刚度形式方程中，第 i 个运动自由度方向的位移可设为

$$y_i(t) = \varphi_i \sin(\omega t + \alpha) \tag{8-3}$$

式中，φ_i、ω、α 为未知的待定参数，则按自由度序号排列成的位移向量可写成

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}\sin(\omega t + \alpha) \tag{8-4}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_n)^{\mathrm{T}} \tag{8-5}$$

式中，$\boldsymbol{\varphi}$ 称为位移 $\boldsymbol{Y}$ 的**幅值向量**(amplitude vector)。

将式(8-4)代入式(8-2a)，消去时间因子 $\sin(\omega t + \alpha)$，即得

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0} \tag{8-6}$$

式(8-6)是位移幅值 $\boldsymbol{\varphi}$ 的齐次矩阵方程，称为**振型方程**(equation of mode shape)。如果运动方程(8-2a)存在非零解 $\boldsymbol{\varphi} \neq \boldsymbol{0}$，则式(8-6)的系数行列式必须为零。即有

$$|\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}| = 0 \tag{8-7}$$

方程(8-7)称为体系的**频率方程**(equation of frequency)或称为**特征方程**。

2. 柔度法

同理将式(8-4)代入柔度形式方程式(8-2b)，消去时间因子 $\sin(\omega t + \alpha)$即得振型方程

$$\boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} \tag{8-8}$$

式(8-8)振型方程也可改写成

$$(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0} \tag{8-9}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 为**单位矩阵**，特征值 λ 为

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \tag{8-10}$$

如果式(8-8)或式(8-9)有非零解 $\boldsymbol{\varphi} \neq \boldsymbol{0}$，则其系数行列式必然为零，即可得频率方程为

$$|\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0 \tag{8-11}$$

8-1-2 多自由度体系的频率和振型

1. 自振频率

将 n 个自由度体系频率方程式(8-7)[或式(8-11)]展开,可得一个 ω^2(或 λ)的 n 次代数方程。对于无刚体位移的结构振动体系,可以证明频率方程有 n 个大于零的实根 ω_i^2(或 λ_i),开方(或倒数开方)并将 ω_i 由小到大排列可得 $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_n$,则 ω_i 称为 n 个自由度体系的第 i 阶自振频率。全部自振频率按由小到大顺序的排列($\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_n$)称为体系的频率谱。简称频谱,其中最小的频率 ω_1 称为基本频率(简称基频或第一频率)。

体系的自振频率在结构动力分析中有十分重要的地位。与单自由度体系不同的是,多自由度体系有多个自振频率。工程分析中基频尤为重要。

● 刚度形式两个自由度体系的自振频率

式(8-7)当 $n=2$ 时为

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-\omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{8-12}$$

将上式展开并整理后,可得

$$(\omega^2)^2 - \left(\frac{k_{11}}{m_1}+\frac{k_{22}}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}{m_1 m_2} = 0 \tag{8-13}$$

式(8-13)是关于 ω^2 的二次方程(也称双二次方程),由此可解得 ω^2 的两个根:

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_{11}}{m_1}+\frac{k_{22}}{m_2}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{k_{11}}{m_1}+\frac{k_{22}}{m_2}\right)^2 - \frac{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}{m_1 m_2}} \tag{8-14}$$

由式(8-14)即可求得两个自由度体系的自振频率 ω_1, ω_2。

● 刚度形式特例

当 $k_{11}=k_{22}$, $m_1=m_2$ 时,有

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{11}-|k_{12}|}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_{11}+|k_{12}|}{m}} \tag{8-15}$$

● 柔度形式两个自由度体系的自振频率

式(8-11)当 $n=2$ 时成为

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1-\lambda & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8-16}$$

将上式展开并整理后得

$$\lambda^2 - (\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)\lambda + (\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})m_1 m_2 = 0 \tag{8-17}$$

由式(8－17)便可求得

$$\lambda_{1,2}=\frac{\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)^2-(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21})m_1m_2} \tag{8-18}$$

从而由式(8－10)可得两个自振频率。

● **柔度形式特例**

如果两个自由度体系的 $\delta_{11}=\delta_{22}$ 且 $m_1=m_2=m$，则式(8－18)可简化为

$$\lambda_1=(\delta_{11}+|\delta_{12}|)m,\quad \lambda_2=(\delta_{11}-|\delta_{12}|)m \tag{8-19}$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{(\delta_{11}+|\delta_{12}|)m}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{1}{(\delta_{11}-|\delta_{12}|)m}} \tag{8-20}$$

2. 振型

(1) 刚度形式

将第 i 个频率 ω_i 代入振型方程式(8－6)，则有

$$(\boldsymbol{K}-\omega_i^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0} \tag{8-21}$$

这是位移幅值向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 的 n 个未知量 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的齐次线性方程组，由于 ω_i 满足频率方程式(8－7)，因此独立的方程只有 $n-1$ 个。由式(8－21)对应于第 i 个频率只能求得 n 个未知量 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的相对值。这个对应于第 i 个频率 ω_i 的位移幅值向量非零解

$$\boldsymbol{\varphi}_i=(\varphi_1\quad\varphi_2\quad\cdots\quad\varphi_n)_i^{\mathrm{T}} \tag{8-22}$$

称为对应于第 i 个自振频率 ω_i 的主振型，简称为第 i 阶振型。对于 n 个自由度体系的工程结构，由 n 个频率可求得 n 个线性无关的主振型。

需要注意的是，由于式(8－21)的系数行列式为零，因此对应于自振频率 ω_i 的主振型 $\boldsymbol{\varphi}_i$，只能确定它的形状，而不能唯一地确定其幅值。

振型是在多自由度(包含无限自由度)体系振动问题中所特有的概念，它在多自由度体系强迫振动分析时是一个十分有用的工具。

(2) 柔度形式

同理将第 i 个特征值 λ_i 代入式(8－9)，则有

$$(\boldsymbol{\delta M}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0} \tag{8-23}$$

与刚度形式一样，由式(8－23)便可求得对应频率 $\omega_i=\sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}$ 的振型 $\boldsymbol{\varphi}_i$。

(3) 振型的标准化

为了使振型的幅值可用确定值表示，需要另加补充条件，这样得到的振型称为标准化振型。进行振型标准化的方法通常有以下两种：

1）规定振型 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 中的某个元素为一给定值。例如规定 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 中的第一个元素 $\boldsymbol{\varphi}_1^i$ 等于 1，或规定其中最大的元素 $\max(\varphi_j^i)$ 等于 1。

2）规定振型 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 满足条件：

$$\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i = 1 \tag{8-24}$$

可以证明，这一规定与下式等价，

$$\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i = \omega_i^2 \tag{8-25}$$

证明：

因为 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 是式(8-21)的解，因此有

$$(\boldsymbol{K} - \omega_i^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{0} \tag{8-26}$$

成立。在式(8-26)两边左乘 $\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}$，可得

$$\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i - \omega_i^2\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i = 0 \tag{8-27}$$

将式(8-24)代入式(8-27)，即可证明式(8-25)成立。

实际分析中，因为第一种方法相对简单，因此用的更多些。

(4) 两个自由度体系的振型

● 刚度形式两个自由度体系的振型

式(8-21)当 $n=2$ 时为

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \omega_i^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega_i^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8-28}$$

将式(8-28)展开，可得

$$(k_{11} - \omega_i^2 m_1)\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 = 0 \tag{8-29a}$$

$$k_{21}\varphi_1 + (k_{22} - \omega_i^2 m_1)\varphi_2 = 0 \tag{8-29b}$$

由式(8-29)可得

$$\varphi_2^i = -\frac{k_{11} - \omega_i^2 m_1}{k_{12}}\varphi_1^i = \frac{-k_{21}}{k_{22} - \omega_i^2 m_2}\varphi_1^i \tag{8-30}$$

从而可得两个自由度体系的振型为

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\dfrac{k_{11} - \omega_i^2 m_2}{k_{12}} \end{Bmatrix} \varphi_1^i = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\dfrac{k_{21}}{k_{22} - \omega_i^2 m_2} \end{Bmatrix} \varphi_1^i \quad (i = 1,2) \tag{8-31}$$

式中，φ_1^i 可以是非零任意参数。

若用第一种标准化方案，也即令 $\varphi_1^i = 1$ 对 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 进行标准化，则可得标准化振型：

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{-k_{21}}{k_{22} - \omega_i^2 m_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\dfrac{k_{11} - \omega_i^2 m_1}{k_{12}} \end{Bmatrix} \quad (i = 1,2) \tag{8-32}$$

若用第二种标准化方案，则需令 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 满足式(8－24)，也即

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^i & \dfrac{-k_{21}}{k_{22}-\omega_i^2 m_2}\varphi_1^i \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^i \\ \dfrac{-k_{21}}{k_{22}-\omega_i^2 m_2}\varphi_1^i \end{pmatrix} = 1 \tag{8-33}$$

将式(8－33)展开可得

$$m_1(\varphi_1^i)^2 + \left(\frac{k_{21}}{k_{22}-\omega_i^2 m_2}\right)^2 m_2(\varphi_1^i)^2 = 1 \tag{8-34}$$

由此可求得

$$\varphi_1^i = \sqrt{\frac{1}{m_1 + \left(\dfrac{k_{21}}{k_{22}-\omega_i^2}\right)^2 m_2}} \tag{8-35}$$

将式(8－35)代入式(8－31)，即可得满足式(8－24)条件的标准化振型。

● **柔度形式两个自由度体系振型**

对于两个自由度体系，式(8－23)成为：

$$\begin{pmatrix} \delta_{11}m_1-\lambda_i & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8-36}$$

$$(\delta_{11}m_1-\lambda_i)\varphi_1 + \delta_{12}m_2\varphi_2 = 0$$

$$\delta_{21}m_1\varphi_1 + (\delta_{22}m_2-\lambda_i)\varphi_2 = 0 \tag{8-37}$$

由此可求得

$$\varphi_2^i = -\frac{\delta_{11}m_1-\lambda_i}{\delta_{12}m_2}\varphi_1^i \quad \text{或} \quad \varphi_2^i = -\frac{\delta_{21}m_1}{\delta_{22}m_2-\lambda_i}\varphi_1^i \tag{8-38}$$

当按第一个元素为 1 进行标准化时，其振型可表示成

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\delta_{11}m_1-\lambda_1}{\delta_{12}m_2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\delta_{11}m_1-\lambda_2}{\delta_{12}m_2} \end{pmatrix} \tag{8-39}$$

式中，$\lambda_{1,2}$ 由式(8－18)计算。

对于两个自由度体系的特例情况：$k_{11}=k_{22}$，$m_1=m_2=m$ 或 $\delta_{11}=\delta_{22}$，且 $m_1=m_2=m$，请读者自行研究其振型的表达形式。

8－1－3　多自由度体系自由振动的通解

不管从哪种运动方程形式出发，自由振动的一个解答都可表成

$$\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{\varphi}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{8-40}$$

式中，α_i 是待定的参数。由于自由振动运动方程是齐次方程组，如果 $\boldsymbol{Y}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是方程组的解，则它们的线性组合仍然是原方程的解。因此，运动方程的通解形式为

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n} C_i\boldsymbol{\varphi}_i\sin(\omega_i t+\alpha_i) \tag{8-41}$$

式中 $2n$ 个待定参数 C_i 和 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$可由运动的初始条件确定。从物理意义上,式(8-41)表明,任意初始条件下的位移解答均可用全部振型的线性组合表示。

如果体系运动的 $2n$ 个初始条件为

$$y_i(0)=y_{i0},\quad \dot{y}_i(0)=\dot{y}_{i0}\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{8-42a}$$

$$\boldsymbol{Y}_i(0)=\boldsymbol{Y}_{i0},\quad \dot{\boldsymbol{Y}}_i(0)=\dot{\boldsymbol{Y}}_{i0} \tag{8-42b}$$

则将式(8-41)代入式(8-42),可获得未知参数 C_i 和 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$的 $2n$ 个线性代数方程,从而原则上即可求得 $2n$ 个未知数。

8-1-4 多自由度体系频率和振型计算举例

[**例题 8-1**] 图 8-1a 所示两层刚架,已知横梁是刚性的,各立柱的抗弯刚度 $EI=6.0\times10^6\ \mathrm{N\cdot m^2}$,立柱的质量忽略不计,横梁的质量 $m_1=m_2=5\,000\ \mathrm{kg}$,每层的高度 $l=5\ \mathrm{m}$,试求其自振频率和振型。

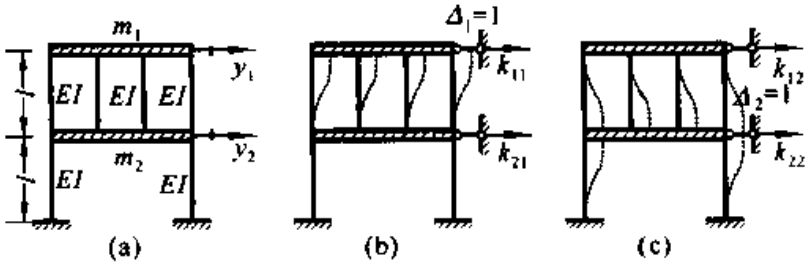


图 8-1 例题 8-1 结构及求解

解:由自由度分析可知,结构是两个自由度的体系,设 m_1 的位移为 y_1,m_2 的位移为 y_2,如图 8-1a 所示。因为是剪切型结构,所以用刚度法求解。根据结构静力分析,如图 8-1b、c,可求得

$$k_{11}=4\times\frac{12EI}{l^3}=\frac{48EI}{l^3}$$

$$k_{12}=k_{21}=-4\times\frac{12EI}{l^3}=-\frac{48EI}{l^3},\quad k_{22}=6\times\frac{12EI}{l^3}=\frac{72EI}{l^3}$$

将刚度系数 k_{11}、k_{12}、k_{21}、k_{22}和各自由度的质量 m_1、m_2 代入式(8-14),可得

$$\omega_1^2=\frac{60EI}{ml^3}-\frac{12\sqrt{17}EI}{ml^3}=(60-12\sqrt{17})\frac{EI}{ml^3}$$

$$\omega_2^2=\frac{60EI}{ml^3}+\frac{12\sqrt{17}EI}{ml^3}=(60+12\sqrt{17})\frac{EI}{ml^3}$$

代入已知条件的有关数值后，刚架的自由振动频率为

$$\omega_1 = \sqrt{(60 - 12\sqrt{17})\frac{EI}{ml^3}} = 10.050\ 8\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \sqrt{(60 + 12\sqrt{17})\frac{EI}{ml^3}} = 32.\ 418\ 8\ \mathrm{s}^{-1}$$

将所得频率代入式(8－32)可得标准化振型为

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-k_{21}}{k_{22} - \omega_1^2 m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.780\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-k_{21}}{k_{22} - \omega_2^2 m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.280\ 9 \end{pmatrix}$$

请读者根据所得的标准化振型，自行画出结构的振型图。需要指出的是，两个自由度的体系实际分析时，并不一定要记住频率、振型的有关公式，只要写出了质量和刚度矩阵，从频率方程 $|\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}| = 0$ 和振型方程 $(\boldsymbol{K} - \omega_i^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ 直接求解即可。

[**例题 8－2**]　图 8－2a 所示简支梁在三分点处有两个相等的集中质量 m，梁的抗弯刚度 EI 为常数。试用柔度法求其自振频率和振型。

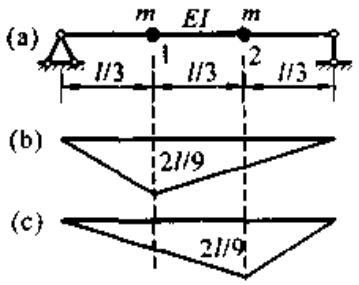


图 8－2　例题 8－2 结构及求解

解：不计轴向变形，本例有两个自由度，设 1、2 两处质量的竖向位移分别为 y_1 和 y_2。为用柔度法求解，沿位移方向分别施加单位力得单位弯矩图如 8－4b、c，用图乘法可求得体系的柔度系数为

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{243EI},\quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{486EI}$$

且因 $m_1 = m_2 = m$，则由式(8－19)可得

$$\lambda_1 = (\delta_{11} + \delta_{12})m = \frac{15}{486} \times \frac{ml^3}{EI}$$

$$\lambda_2 = (\delta_{22} - \delta_{21})m = \frac{1}{486} \times \frac{ml^3}{EI}$$

从而可求得两个自振频率

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 5.69\sqrt{\frac{EI}{ml^3}},\quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 22\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

最后由式(8－39)可得

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

图 8-3 即为两个振型的示意图。从图 8-3 可见，第一振型是对称的，第二振型是反对称的。

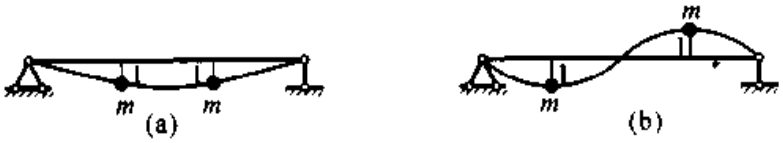


图 8-3 简支梁振型

如果先利用对称性，则由第一篇可知，可分别取对称和反对称计算简图如图 8-4 所示。



图 8-4 利用对称性取半结构分析计算简图

因此，对称两自由度体系的自由振动可通过求解两个单自由度问题来解决。

对于轴线、质量、刚度、支承均对称的多自由度体系——称为动力对称结构，可以利用对称性使自由度数减为一半左右。显然，这对简化计算是十分有利的。

§8-2 多自由度体系振型的正交性

8-2-1 正交的概念

在矢量代数中，若两个矢量 γ_1 和 γ_2 的点积为零，即

$$\gamma_1\cdot\gamma_2=0$$

则称两矢量 γ_1 和 γ_2 相互垂直。

在线性代数中，若两个 n 维向量 A_1 和 A_2 存在如下关系

$$A_1^{\mathrm{T}}A_2=0 \tag{8-43}$$

则称向量 A_1 与向量 A_2 正交。

如果存在一个 n 阶方阵 B，使得

$$A_1^{\mathrm{T}}BA_2=0 \tag{8-44}$$

则称向量 A_1 与向量 A_2 **带权正交或加权正交**，B 称为**权矩阵**，也称为向量

A_1 与向量 A_2 对矩阵 B 正交。

8-2-2　振型向量的正交性

n 自由度体系有 n 个振型向量 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,n)$。在这些振型向量中，对应于不同自振频率的振型向量之间存在着对质量矩阵 M 和刚度矩阵 K 的正交性，也即

$$\varphi_i^{\mathrm{T}}M\varphi_j=0 \quad (i\neq j) \tag{8-45a}$$

$$\varphi_i^{\mathrm{T}}K\varphi_j=0 \quad (i\neq j) \tag{8-45b}$$

振型的这一正交性质，在多自由度体系动力分析中有着十分重要的用途。

● 关于振型正交性的证明

设 φ_i 为体系第 i 阶振型，将其代入式(8-6)则有：

$$K\varphi_i=\omega_i^2M\varphi_i \tag{8-46}$$

上式两边同时左乘第 j 阶振型的转置 φ_j^{T}，可得

$$\varphi_j^{\mathrm{T}}K\varphi_i=\omega_i^2\varphi_j^{\mathrm{T}}M\varphi_i \tag{8-47}$$

同理可得：

$$\varphi_i^{\mathrm{T}}K\varphi_j=\omega_j^2\varphi_i^{\mathrm{T}}M\varphi_j \tag{8-48}$$

由于矩阵乘积的转置等于矩阵倒序后转置的乘积，也即

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \tag{a}$$

加之质量矩阵 M 和刚度矩阵 K 都是对称矩阵，因此式(8-48)可写成

$$\varphi_j^{\mathrm{T}}K\varphi_i=\omega_j^2\varphi_j^{\mathrm{T}}M\varphi_i \tag{8-49}$$

将式(8-47)与式(8-49)相减，可得

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)\varphi_j^{\mathrm{T}}M\varphi_i=0 \tag{8-50}$$

当 $i\neq j$ 时若 $\omega_i\neq\omega_j$，式(8-50)表明

$$\varphi_j^{\mathrm{T}}M\varphi_i=0 \tag{8-51}$$

由上式及式(8-47)立即可得

$$\varphi_j^{\mathrm{T}}K\varphi_i=0 \tag{8-52}$$

式(8-51)和式(8-52)证明了对应不同自振频率的振型向量对质量矩阵和刚度矩阵都是正交的。需要指出的是，式(8-51)和(8-52)是最基本的正交关系，还可推得更为一般的广义正交关系，这留给有兴趣的读者自行研究。

8-2-3　关于振型正交性的物理解释

将式(8-51)两边同乘以 ω_i^2，可得

$$\omega_i^2\varphi_j^{\mathrm{T}}M\varphi_i=0 \tag{8-53}$$

因为在 $\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{\varphi}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$情形下，第 i 振型的惯性力为 $\boldsymbol{F}_I^i = -\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}_i$，因此

$$\boldsymbol{F}_I^i = \omega_i^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{8-54}$$

上式两边左乘 $\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}$，并考虑到式(8-53)可得

$$\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_I^i = 0 \tag{8-55}$$

式(8-55)表明，**第 i 阶振型产生的惯性力在第 j 阶振型的位移上所做的虚功为零，即由某振型产生的惯性力在非自身振型上不做功。**

8-2-4 正交性的利用

- 可用振型的正交性来检验所求得的振型是否正确。
- 已知振型的情形下，可用以计算该振型对应的自振频率。

将各振型线性组合的位移 $\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \boldsymbol{\varphi}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$代入运动方程 $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$，可得

$$-\boldsymbol{M} \sum_{i=1}^{n} C_i \omega_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) + \boldsymbol{K} \sum_{i=1}^{n} C_i \boldsymbol{\varphi}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) = \boldsymbol{0} \tag{b}$$

对式(b)两边同时左乘 $\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}$，根据振型的正交性并消去 $\sin(\omega_j t + \alpha_j)$，可得

$$-\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \omega_j^2 \boldsymbol{\varphi}_j + \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_j = 0 \tag{8-56}$$

若引入**第 j 振型的广义刚度(或折算刚度)K_j^*、第 j 阶振型的广义质量(或折算质量)M_j^***，也即

$$K_j^* = \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_j, \quad M_j^* = \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_j \tag{8-57}$$

则由式(8-56)可得

$$K_j^* = \omega_j^2 M_j^* \tag{8-58}$$

$$\omega_j^2 = \frac{K_j^*}{M_j^*} \tag{8-59}$$

上述分析表明，在已知第 j 振型 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 时，可先按式(8-57)计算第 j 振型的广义刚度 K_j^* 和第 j 阶振型的广义质量 M_j^*，然后应用式(8-59)计算对应第 j 振型的自振频率 ω_j^2，其形式与单自由度体系的频率计算公式一样。

- **位移的分解**

任意一个给定的位移向量 $\boldsymbol{Y}$，利用振型的正交性，均可将其分解成各振型的线性组合，即

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \boldsymbol{\varphi}_i \tag{8-60}$$

式(8－60)称为**位移向量 $\boldsymbol{Y}$ 按振型的正则坐标变换**，其中组合系数 η_i 称为**位移向量的广义坐标(或称正则坐标)**，可由振型的正交性来确定。

对式(8－60)的两边同时左乘 $\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}$，即得

$$\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\boldsymbol{\varphi}_i \tag{8-61}$$

根据振型的正交性，式(8－61)右端 n 项中除第 $i=j$ 这一项外，其余各项均为零，因此有

$$\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}=\eta_j M_j^* \tag{8-62}$$

由式(8－62)便可求得位移向量的广义坐标

$$\eta_j=\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}/M_j^*=\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_j \tag{8-63}$$

将式(8－63)代入(8－60)即可得到将任意位移向量 $\boldsymbol{Y}$ 按振型分解的表达式。

● 将多自由度体系变成单自由度求解

将多自由度体系任意时刻的位移向量 $\boldsymbol{Y}$ 按式(8－60)作坐标变换后代入运动方程(8－2a)，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\ddot{\eta}_i(t)\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t)\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i=\boldsymbol{0} \tag{8-64}$$

与推导式(8－62)一样，上式两边同时左乘 $\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}$，根据振型的正交性则有

$$M_j^*\ddot{\eta}_j(t)+K_j^*\eta_j(t)=0\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{8-65}$$

上式除以第 j 阶振型的广义质量 M_j^* 并引入式(8－59)，则可得一组广义坐标 $\eta_j(t)$ 的单自由度运动方程

$$\ddot{\eta}_j(t)+\omega_j^2\eta_j(t)=0\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{8-66}$$

式(8－66)表明，只要有了 n 自由度的体系的全部振型向量，就可将其变成 n 个独立的单自由度体系进行计算获得广义坐标 $\eta_j(t)$，然后由式(8－60)即可获得多自由度的解答。

● 自由振动初值问题的确定

式(8－41)给出了自由振动的通解，为

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{\varphi}_i\sin(\omega_i t+\alpha_i)$$

并指出参数 C_i、$\alpha_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 可用初始条件 $\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{Y}_0$，$\dot{\boldsymbol{Y}}(0)=\dot{\boldsymbol{Y}}_0$ 确定。请有兴趣的读者利用振型的正交性验证下式的正确性。

为便于书写，引入以下记号

$$Y_{Ai}=\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}_0,\quad Y_{Bi}=\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{Y}}_0 \tag{8-67}$$

则参数 C_i、α_i 为

$$C_i=\sqrt{\left(\frac{Y_{Ai}}{M_i^*}\right)^2+\left(\frac{Y_{Bi}}{\omega_i M_i^*}\right)^2},\quad \tan\alpha_i=\frac{\omega_i Y_A}{Y_B}\qquad(8-68)$$

由式(8-67)可见，当 $\boldsymbol{Y}_{i0}$ 和 $\dot{\boldsymbol{Y}}_{i0}$ 与第 j 振型相符时，仅 C_j，α_j 不等于零，也即此时仅激起第 j 振型的振动。

8-2-5 多自由度体系振型正交性应用举例

[例题 8-3] 试检验例题 8-1 所求得振型的正确性。

解： 由例题 8-1 已得到

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}m_1,\quad \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}48&-48\\-48&72\end{pmatrix}\frac{EI}{l^3},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1=(1\quad 0.780\,8)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\varphi}_2=(1\quad -1.280\,9)^{\mathrm{T}}$$

利用振型正交性进行检验

$$\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_2=(1\quad 0.780\,8)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}m_1\begin{pmatrix}1\\-1.280\,9\end{pmatrix}=-0.000\,127m_1\approx 0\cdot m_1$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_2=(1\quad 0.780\,8)\begin{pmatrix}48&-48\\-48&72\end{pmatrix}\frac{EI}{l^3}\begin{pmatrix}1\\-1.280\,9\end{pmatrix}=-0.004\,324\,\frac{EI}{l^3}\approx 0\cdot\frac{EI}{l^3}$$

由此证明，所得振型具有较好的精度，是正确的。

[例题 8-4] 已知图 8-5 所示三层刚架 $m_1=18\times10^4$ kg，$m_2=m_3=27\times10^4$ kg；层侧移刚度 $k_2=98\times10^3$ kN/m，$k_2=196\times10^3$ kN/m，$k_3=245\times10^3$ kN/m。此外，已设法得结构的前两个振型 $\boldsymbol{\varphi}_1=(1\ 2/3\ 1/3)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2=(1\ -2/3\ -2/3)^{\mathrm{T}}$。试求结构的频率。

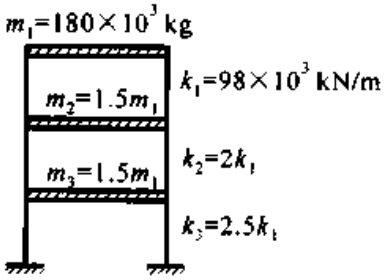


图 8-5

解：根据已知条件，可得结构的质量和刚度矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1.5&0\\0&0&1.5\end{bmatrix}m_1,\quad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&3&-2\\0&-2&4.5\end{bmatrix}k_1$$

为求全部频率，首先求第 3 振型。

(1) 求第 3 振型 设 $\boldsymbol{\varphi}_3=(1\quad \varphi_{23}\quad \varphi_{33})$，根据振型对质量(或刚度)的正交性，即

$$\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_3=0=m_1+\frac{2}{3}m_2\varphi_{23}+\frac{1}{3}m_3\varphi_{33}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_3=0=m_1-\frac{2}{3}m_2\varphi_{23}-\frac{2}{3}m_3\varphi_{33}$$

由此可求得 $\boldsymbol{\varphi}_3=(1\quad -3\quad 4)^{\mathrm{T}}$。

(2) 求广义质量　根据振型广义质量定义 $\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_j=M_j^*$，可得

$$M_1^*=33\times10^4\ \mathrm{kg},\ M_2^*=42\times10^4\ \mathrm{kg},\ M_3^*=6.93\times10^6\ \mathrm{kg}$$

(3) 求广义刚度　根据振型广义刚度定义 $\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i=K_i^*$，可得

$$K_1^*=\frac{539}{9}\times10^3\ \mathrm{kN/m},\ K_2^*=\frac{3\,430}{9}\times10^3\ \mathrm{kN/m},\ K_3^*=15\,092\times10^3\ \mathrm{kN/m}$$

(4) 求各振型频率　由 $\omega_j^2=K_j^*/M_j^*$ 可得各振型的频率为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{(539/9)\times10^3\ \mathrm{kN/m}}{33\times10^4\ \mathrm{kg}}}\approx13.472\ \mathrm{s}^{-1};$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{(3\,430/9)\times10^3\ \mathrm{kN/m}}{42\times10^4\ \mathrm{kg}}}\approx30.123\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_3=\sqrt{\frac{15\,092\times10^3\ \mathrm{kN/m}}{693\times10^4\ \mathrm{kg}}}\approx46.667\ \mathrm{s}^{-1}$$

[**例题 8-5**]　设有一位移向量 $\boldsymbol{a}=(1\quad 3\quad 5)^{\mathrm{T}}a$，试用例题 8-4 的振型向量将其进行分解。

解：根据式(8-63)任意位移向量按振型进行分解的广义坐标为

$$\eta_j=\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}/M_j^*=\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}/\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_j\quad(j=1,2,3)$$

为此首先求 $\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}$。利用例题 8-4 的振型，可得如下结果：

$$\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}=6.5am_1=(1\ 170\times10^3\ \mathrm{kg})\ a$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}=-7am_1=(-1260\times10^3\ \mathrm{kg})a$$

$$\boldsymbol{\varphi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}=17.5am_1=(3\ 150\times10^3\ \mathrm{kg})a$$

再利用例题 8-4 的广义质量 M_j^*，即可得如下广义坐标：

$$\eta_1\approx3.545\ 45a,\ \eta_2=-3a,\ \eta_3\approx0.454\ 55a$$

由此可得分解结果为

$$\boldsymbol{a}=\left\{3.545\ 45\begin{Bmatrix}1\\2/3\\1/3\end{Bmatrix}-3\begin{Bmatrix}1\\-2/3\\-2/3\end{Bmatrix}+0.454\ 55\begin{Bmatrix}1\\-3\\4\end{Bmatrix}\right\}\cdot a$$

§8-3　多自由度体系的受迫振动

与单自由度体系一样，在动荷载作用下，多自由度体系的受迫振动也存在自由振动与受迫振动共存的初始阶段。但是，由于阻尼的存在，不久便进入稳态阶段。因为在非共振区，阻尼对纯稳态响应影响不大。因此，本节首

先对多自由度无阻尼体系的简谐荷载与一般荷载作用下的受迫振动稳态响应进行讨论，然后再讨论有阻尼体系受迫振动分析的振型分解法。

8-3-1 简谐荷载作用下的无阻尼受迫振动分析

无阻尼体系受简谐荷载作用时，其运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}_0 \sin \theta t \tag{8-69}$$

式中 $\boldsymbol{F}_0$ 为作用于体系各自由度的简谐荷载(或简谐等效干扰力)幅值所组成的向量，θ 为简谐荷载角频率，简称扰频。与单自由度体系受简谐荷载作用的受迫振动一样，可设方程(8-69)位移向量有如下形式的稳态解：

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A} \sin \theta t \tag{8-70}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是位移幅值向量。

将式(8-70)代入运动方程(8-69)，消去时间因子 $\sin \theta t$ 后可得

$$-\theta^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{A} = (-\theta^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_0 \tag{8-71}$$

如果记

$$\boldsymbol{B} = -\theta^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} \tag{8-72}$$

又如果 $\boldsymbol{B}$ 矩阵可逆，则幅值向量 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{F}_0 = (-\theta^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{F}_0 \tag{8-73}$$

将式(8-73)结果代回式(8-70)，即可得到运动方程(8-69)的纯受迫振动响应。

● 共振分析

如果矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的行列式为零，也即 θ 满足条件

$$|\boldsymbol{K} - \theta^2 \boldsymbol{M}| = 0 \tag{8-74}$$

则位移幅值 $\boldsymbol{A}$ 将为无穷大，即出现共振现象。

将式(8-74)和频率方程 $|\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}| = 0$ 比较，如果 $\theta = \omega_i (i = 1,2,\cdots,n)$，则将出现共振。

因此，在 n 个自由度体系的振动中，当外界干扰力的频率等于体系的任意一阶自振频率时，都会出现共振，即体系存在 n 个共振点。

例如，在工程实际中，高速运转的机械在起、停过程中，如果支撑该机械的体系前几阶自振频率小于机械转动的角频率，则在起动、刹车过程中会因越过自振频率而出现几次较大的振动。因此，如果机械的起停次数较多，必将对支撑体系的寿命产生较大的影响，这是应该注意避免的。

另外，与单自由度问题相类似，即使考虑了体系阻尼的作用，在共振点附近，体系仍将产生很大的振幅。

当然，共振也有可以利用之处。例如用激振器进行激振，可由共振来测

量体系的固有频率。又如利用共振曲线，用功率谱法可以测定体系的阻尼比等。对此有兴趣的读者，可自行参阅有关振动测量的书籍。

● **特例分析**

对 2 自由度的体系，式(8－72)可写为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} k_{11}-\theta^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-\theta^2 m_2 \end{bmatrix} \tag{8-75}$$

在 $\omega_i \neq \theta$ 时，由式(8－73)可求得

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{B_0}\begin{bmatrix} k_{22}-\theta^2 m_2 & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11}-\theta^2 m_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \tag{8-76}$$

其中 $B_0=(k_{11}-\theta^2 m_1)(k_{22}-\theta^2 m_2)-k_{12}k_{21}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 对应的行列式值。由于 $\theta=\omega_1$ 和 $\theta=\omega_2$ 是 $B_0=0$ 的解，因此 B_0 可写成 $B_0=\alpha(\theta^2-\omega_1^2)(\theta^2-\omega_2^2)=(k_{11}-\theta^2 m_1)(k_{22}-\theta^2 m_2)-k_{12}k_{21}$，由对应系数相等可得 $\alpha=m_1 m_2$，也即

$$B_0=m_1 m_2(\theta^2-\omega_1^2)(\theta^2-\omega_2^2) \tag{8-77}$$

将式(8－76)展开，有

$$\begin{aligned} A_1&=\frac{1}{B_0}\left[(k_{22}-\theta^2 m_2)F_{01}-k_{12}F_{02}\right] \\ A_2&=\frac{1}{B_0}\left[-k_{21}F_{01}+(k_{11}-\theta^2 m_1)F_{02}\right] \end{aligned} \tag{8-78}$$

式(8－78)即为 2 自由度体系受简谐荷载作用时的位移幅值一般解。

● **吸振原理**

如果体系只受一个简谐干扰力 $F_{01}\sin\theta t$ 的作用($F_{02}=0$)，则式(8－78)可简化为

$$A_1=\frac{k_{22}-\theta^2 m_2}{B_0}F_{01},\quad A_2=-\frac{k_{21}}{B_0}F_{01} \tag{8-79}$$

在式(8－79)中，如果改变体系的刚度系数 k_{22} 和质量 m_2，则

$$\frac{k_{22}}{m_2}=\theta^2 \tag{8-80}$$

$$A_1=0,\quad A_2=\frac{F_{01}}{k_{12}} \tag{8-81}$$

式(8－81)表明：为减少单自由度体系主体结构的振动，可适当地附加质量、弹簧系统。只要合理地设计质量和弹簧，使 k_{22} 和 m_2 的比值等于或接近干扰力频率 θ^2，就可以消除主体结构质量 m_1 的振动。这就是吸振器的原理。已被工程实际应用的调频质量

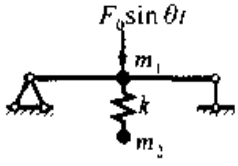


图 8－6

阻尼系统和调频液体

阻尼系统等结构振动控制技术,都应用了这一思想。

例如,图 8-6 所示单自由度体系 m_1,如果附加一弹簧 k、质量 m_2 体系,并使 $k/m_2=\theta^2$,则可消除 m_1 在 $F_0\sin\theta t$ 作用下引起的振动。

8-3-2 无阻尼体系在任意荷载作用下的受迫振动分析

在任意动荷载 $\boldsymbol{F}(t)$作用下,n 自由度无阻尼体系的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{F}(t) \tag{8-82}$$

一般情形下,式(8-82)是一组联立的非齐次微分方程组,直接进行求解,数学处理较为复杂。为此,用§8-2 介绍的正则坐标 $\eta_i(t)$将位移向量 $\boldsymbol{Y}$ 按振型展开。也即设

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\boldsymbol{\varphi}_i \tag{8-83}$$

将式(8-83)代入式(8-82)得

$$\sum_{i=1}^{n}\ddot{\eta}_i(t)\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t)\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i=\boldsymbol{F}(t) \tag{8-84}$$

将式(8-84)两边同时左乘 $\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}$,利用振型的正交性可得

$$M_j^*\ddot{\eta}_j(t)+K_j^*\eta_j(t)=F_j^*(t)\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{8-85}$$

式中,M_j^*、K_j^* 分别为第 j 阶振型的广义质量和广义刚度。

$$F_j^*(t)=\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t) \tag{8-86}$$

称为对应于第 j 阶振型的广义荷载。

将式(8-85)两边同时除以 M_j^*,并注意到$\dfrac{K_j^*}{M_j^*}=\omega_j^2$,则有

$$\ddot{\eta}_j(t)+\omega_j^2\eta_j(t)=\frac{1}{M_j^*}F_j^*(t)\quad(j=1,2,3,\cdots,n) \tag{8-87}$$

式(8-87)是关于正则坐标 $\eta_j(t)(j=1,2,3,\cdots,n)$的 n 个独立运动方程,其解法与单自由度问题完全一致,方程(8-87)的解答可由单自由度的 Duhamel 积分给出

$$\eta_j(t)=\frac{1}{M_j^*\omega_j}\int_0^t F_j^*(t)\sin\omega_j(t-\tau)\mathrm{d}\tau\quad(j=1,2,3,\cdots,n) \tag{8-88}$$

求得正则坐标 $\eta_j(t)(j=1,2,3,\cdots,n)$后,代回式(8-83)即可得到多自由度问题的解答。

这一解法的主要核心是,把位移向量 $\boldsymbol{Y}$ 按振型进行分解,利用振型的正交性,从而得到相互独立的关于正则坐标的单自由度运动方程。因此,该方

法通常称为振型分解法或振型叠加法。

● 振型分解法的求解步骤

综上所述，多自由度体系在任意动荷载作用下的响应，可按以下步骤进行：

(1) 求体系的自振频率 ω_i 和对应的振型 $\boldsymbol{\varphi}_i$ ($i=1,2,3,\cdots,n$)。

(2) 计算对应于第 j 阶振型的广义质量 M_j^* 和广义荷载 $F_j^*(t)$。

$$M_j^* = \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_j,\quad F_j^*(t) = \boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\quad (j=1,2,3,\cdots,n)$$

(3) 用杜哈梅积分求解正则坐标 $\eta_j(t)$ 为

$$\eta_j(t) = \frac{1}{M_j^*\omega_j}\int_0^t F_j^*(\tau)\sin\omega_j(t-\tau)\mathrm{d}\tau\quad (j=1,2,3,\cdots,n)$$

(4) 计算体系的位移响应向量

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\boldsymbol{\varphi}_i$$

[**例题 8－6**]　分析图 8－7a 所示结构在质点 2 处受突加荷载作用时的位移响应。已知 $m_1=m_2=m$，荷载为 $F_P(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ F_0 & t>0\end{cases}$，$EI$ = 常数。

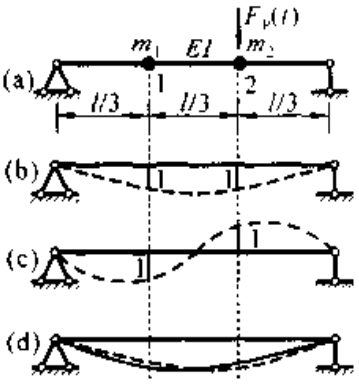


图 8－7　例题 8－6 图

解：(1) 由例题 8－2 已经解得图 8－7a 所示结构的自振频率和振型(如图 8－7b、c)分别为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{486EI}{15ml^3}},\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{486EI}{ml^3}}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

(2) 计算广义质量

$$M_1^* = (1\quad 1)\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2m$$

$$M_2^* = (1\quad -1)\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 2m$$

(3) 计算广义荷载

$$F_1^*(t) = (1\quad 1)\begin{Bmatrix}0\\ F_P(t)\end{Bmatrix} = F_0,\quad F_2^*(t) = (1\quad -1)\begin{Bmatrix}0\\ F_P(t)\end{Bmatrix} = -F_0$$

(4) 正则坐标的解答(杜哈梅积分)为

$$\eta_1(t) = \frac{1}{M_1^*\omega_1}\int_0^t F_1^*(\tau)\sin\omega_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{F_0}{2m\omega_1}(1-\cos\omega_1 t)$$

$$\eta_2(t)=\frac{1}{M_2^*\omega_2}\int_0^t F_2^*(\tau)\sin\omega_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{-F_0}{2m\omega_2}(1-\cos\omega_2 t)$$

(5) 2 自由度体系的位移向量解答

$$\boldsymbol{Y}=\eta_1(t)\boldsymbol{\varphi}_1+\eta_2(t)\boldsymbol{\varphi}_2=\begin{Bmatrix}\eta_1(t)+\eta_2(t)\\ \eta_1(t)-\eta_2(t)\end{Bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned}y_1(t)&=\eta_1(t)+\eta_2(t)\\&=\frac{F_0}{2m\omega_1}\left[(1-\cos\omega_1 t)-\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2(1-\cos\omega_2 t)\right]\\&=\frac{F_0}{2m\omega_1}[(1-\cos\omega_1 t)-0.066\,7(1-\cos\omega_2 t)]\\y_2(t)&=\eta_1(t)-\eta_2(t)\\&=\frac{F_0}{2m\omega_1}\left[(1-\cos\omega_1 t)+\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2(1-\cos\omega_2 t)\right]\\&=\frac{F_0}{2m\omega_1}[(1-\cos\omega_1 t)+0.066\,7(1-\cos\omega_2 t)]\end{aligned}$$

由上式可见,质点的位移中(如图 8-11d 示意),第二振型所占的比例比第一振型要小得多。

需要注意的是:

● 在多自由度体系的动力分析中,动力位移一般主要由前几阶较低频率的振型组成,高阶振型的影响较小,因而可只取少数几个振型进行计算,从而减少计算工作量。这是振型分解法的突出优点。

● 由于不同振型的频率不同,因此位移响应随时间的变化并不是同步的。在求位移的幅值时,不能简单地由各振型幅值叠加。

8-3-3 无阻尼结构的动内力计算

无阻尼结构在动荷载作用下产生振动时,结构中的内力将由动荷载和惯性力共同产生。如果已经求得体系的位移向量 $\boldsymbol{Y}$,则惯性力向量为

$$\boldsymbol{F}_I=-\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} \tag{8-89}$$

因此,结构在任意时刻的内力可由动载荷引起的内力和惯性力引起的内力叠加得到。

当结构受简谐荷载 $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}_0\sin\theta t$ 作用时,由式(8-70)至(8-73)可知,结构的位移向量为

$$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{K}-\theta^2\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{F}_0\sin\theta t \tag{8-90}$$

将式(8-90)代入式(8-89)可得

$$\boldsymbol{F}_I = \boldsymbol{F}_{I0}\sin\theta t \tag{8-91}$$

其中惯性力的幅值向量为

$$\boldsymbol{F}_{I0} = \theta^2\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}-\theta^2\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{F}_0 \tag{8-92}$$

因为$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，所以

$$\theta^2\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}-\theta^2\boldsymbol{M})^{-1}=\theta^2[(\boldsymbol{K}-\theta^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{M}^{-1}]^{-1}$$

经过简单的推演，式(8-92)可表示成

$$\boldsymbol{F}_{I0}=\left(\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}}{\theta^2}-\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{F}_0 \tag{8-93}$$

又因为$\left(\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}}{\theta^2}-\boldsymbol{I}\right)^{-1}=\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{\boldsymbol{M}^{-1}}{\theta^2}-\boldsymbol{K}^{-1}\right)\right]^{-1}=\left(\frac{\boldsymbol{M}^{-1}}{\theta^2}-\boldsymbol{\delta}\right)^{-1}\boldsymbol{K}^{-1}$，所以

$$\boldsymbol{F}_{I0}=\left(\frac{\boldsymbol{M}^{-1}}{\theta^2}-\boldsymbol{\delta}\right)^{-1}\boldsymbol{\Delta}_{P0} \tag{8-94}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{\Delta}_{P0}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F}_0$ 为由荷载幅值 $\boldsymbol{F}_0$ 引起的位移向量。

由式(8-91)可见，当结构受简谐载荷作用产生无阻尼振动时，由振动产生的惯性力随时间的变化与外荷载同步。因此，在计算结构最大内力时可将由荷载幅值产生的内力与惯性力幅值产生的内力直接相加。另外，惯性力的幅值可通过式(8-93)或式(8-94)直接计算而不必先求位移再由式(8-89)进行计算。但是，对于任意荷载引起的振动，必须先计算位移向量，再由式(8-89)计算惯性力。

［**例题 8-7**］　例题 8-1 所示两层刚架，顶层横梁受简谐荷载 $F=F_0\sin\theta t$ 的作用，其中 $F_0=50\times10^3$ kN，$\theta=10\ \pi/\mathrm{s}^{-1}$，试计算结构的惯性力幅值。其他数据同例题 8-1，结构和荷载如图 8-8。

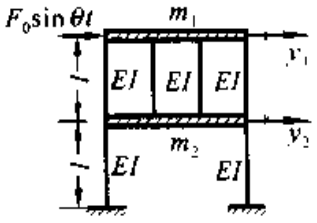


图 8-8　例题 8-7 图

解：由例题 8-1 已经解得

$$k_{11}=4\times\frac{12EI}{l^3}=\frac{48EI}{l^3},$$

$$k_{12}=k_{21}=-4\times\frac{12EI}{l^3}=-\frac{48EI}{l^3}$$

$$k_{22}=6\times\frac{12EI}{l^3}=\frac{72EI}{l^3}$$

因此有

$$\boldsymbol{K}=48\ 000\ \mathrm{N/m}\begin{pmatrix}48&-48\\-48&72\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{M}^{-1}=\frac{1}{5\ 000\ \mathrm{kg}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}}{\theta^2}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0.467&-0.467\\-0.467&0.700\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.533&-0.467\\-0.467&-0.300\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{KM}^{-1}}{\theta^2}-\boldsymbol{I}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}5.146 & 8.018\\ 8.018\,7 & 9.156\end{pmatrix}$$

将上式代入(8-93),可得

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I0}}=\left(\frac{\boldsymbol{KM}^{-1}}{\theta^2}-\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{F}_0=\begin{pmatrix}5.156 & 8.027\\ 8.027 & 9.121\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}5\times10^3\\ 0\end{Bmatrix}\mathrm{kN}=\begin{Bmatrix}25.78\times10^3\\ 40.14\times10^3\end{Bmatrix}\mathrm{kN}$$

在求得了惯性力幅值的情形下,结构动内力的计算留给读者自行解决。

8-3-4 有阻尼受迫振动分析

多自由度体系有阻尼时的运动方程,其一般形式(柔度形式方程,假设已经转换成刚度形式)可表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{F}(t) \tag{8-95}$$

式中,$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶方阵,称为**阻尼矩阵**。

像无阻尼受迫振动分析一样,将位移向量用振型进行分解,即设

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t)\boldsymbol{\varphi}_i \tag{c}$$

将式(c)代入式(8-95),再左乘 $\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}$,并利用振型的正交性条件可得

$$M_j^*\ddot{\eta}_j(t)+\sum_{i=1}^{n}\dot{\eta}_i(t)\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varphi}_i+K_j^*\eta_j(t)=F_j^*(t)\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{8-96}$$

式中,M_j^* 和 K_j^* 为式(8-57)给出的广义质量和广义刚度,$F_j^*(t)$是由(8-86)给出的广义荷载。

如果像第6章那样,阻尼矩阵由粘阻系数 c_{ij}(其含义见第6章或8-3-5)组成,式(8-96)中第二项一般是耦联的,这将给分析带来很大困难。为了使式(8-96)能方便地求解,假设体系的阻尼矩阵亦满足振型的正交性条件,即有

$$\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varphi}_i=\begin{cases}0 & i\neq j\\ C_j^* & i=j\end{cases} \tag{8-97}$$

式中,C_j^* 称为对应于**第 j 阶振型的广义粘阻系数**。式(8-96)可改写成

$$M_j^*\ddot{\eta}_j(t)+C_j^*\dot{\eta}_j(t)+K_j^*\eta_j(t)=F_j^*(t)\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{8-98}$$

式(8-98)与有阻尼的单自由度问题完全类似。令

$$\frac{C_j^*}{M_j^*}=2\xi_j\omega_j \tag{8-99}$$

式中,ξ_j 称为对应于**第 j 阶振型的广义阻尼比**,式(8-98)可表示成

$$\ddot{\eta}_j(t)+2\xi_j\omega_j\dot{\eta}_j(t)+\omega_j^2\eta_j(t)=\frac{F_j^*(t)}{M_j^*}\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{8-100}$$

式(8－100)与单自由度问题一样，可用 Duhamel 积分获得正则坐标 $\eta_j(t)$ 的响应。在零初始条件下，其解答为

$$\eta_j(t)=\frac{1}{M_j^*\omega_{d_j}}\int_0^t F_j^*(t)e^{-\xi_j\omega_j(t-\tau)}\sin\omega_{d_j}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (j=1,2,3,\cdots,n) \tag{8-101}$$

求出正则坐标 $\eta_j(t)$ 后，代回式(c)就可以得到体系的位移向量 $\boldsymbol{Y}$。

8－3－5　有关阻尼矩阵的补充说明

运动方程(8－95)中引入了阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$，其元素 c_{ij} 的物理意义为：第 j 个位移方向单位速度所引起的第 i 个位移方向的阻尼力，称为**粘阻影响系数**。然而，在处理实际问题时，要直接确定粘阻影响系数 c_{ij} 是十分困难的，因为阻尼力的机理十分复杂，要确定 $\dot{y}_j=1$ 时在第 i 个位移方向的阻尼力，并不像 $y_j=1$ 时在第 i 个位移方向所产生的约束力 k_{ij} 那样容易做到。

另外，在用振型叠加法对运动方程(8－95)进行处理时，为了使方程解耦，成为 n 个正则坐标的独立方程，假设体系的阻尼矩阵对振型满足正交性条件式(8－97)，并引入了广义粘阻系数 C_j^*。虽然如此，但如何确定粘阻影响系数仍是一个尚未解决的问题。

因为振型向量对质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是正交的，为了满足式(8－97)的正交性条件，通常假设阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的线性组合，称为**比例阻尼**(也称 Rayleigh 阻尼)，其表达式为

$$\boldsymbol{C}=a\boldsymbol{M}+b\boldsymbol{K} \tag{8-102}$$

式中，a、b 为两个常数。将式(8－102)代入式(8－97)得

$$C_j^*=\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{T}}(a\boldsymbol{M}+b\boldsymbol{K})\boldsymbol{\varphi}_j=aM_j^*+bK_j^* \tag{8-103}$$

利用关系式 $K_j^*=\omega_j^2M_j^*$，由式(8－99)和(8－103)可得

$$\xi_j=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\omega_j}+b\omega_j\right) \tag{8-104}$$

在实际问题中，通常根据两个已知的 ω_j 和由实验测得的阻尼比 ξ_j 来计算 a、b 的值。例如，由已知的 ω_1、ω_2 和实测得到的 ξ_1、ξ_2 分别代入式(8－104)，则可求得

$$\begin{aligned}a&=\frac{2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2-\xi_2\omega_1)}{\omega_2^2-\omega_1^2}\\ b&=\frac{2(\xi_2\omega_2-\xi_1\omega_1)}{\omega_2^2-\omega_1^2}\end{aligned} \tag{8-105}$$

再将所求得的 a、b 代入式(8－104)，即可计算更高阶振型的阻尼比 ξ_3，ξ_4，

…。在多自由度建筑结构受迫振动分析中，一般设 $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$，因此

$$a = \frac{0.1\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad b = \frac{0.1}{\omega_1 + \omega_2}。$$

* §8-4 杆系结构有限元动力分析

在结构计算机分析篇中，曾经讨论了任意杆系结构、弹性力学平面问题在静力荷载作用下的有限元分析方法。本节将介绍杆系结构承受动荷载作用时，如何将达朗贝尔原理和有限元分析思想相结合，如何建立单元的特性方程等，以便利用有限元动力分析程序解决杆系结构的动力分析问题。

8-4-1 基本原理

在第 1 章中已经介绍过虚位移原理和势能原理，它们在虚位移或位移变分完全任意的前提下，等价于变形体的平衡条件。利用势能原理，通过建立单元位移场，导出了静荷载作用下的单元刚度方程，建立了有限单元分析方法。

对于动力问题，本篇前面章节已述，首先需要建立体系的运动方程。为利用有限元将实际结构变成有限自由度体系进行动力分析，下面对只适用于平衡分析的虚位移原理进行必要的“修正”，使其在瞬时条件下也能用以解决动力运动方程的建立。

如前所述，在每一瞬时都引入作用于质量的假想惯性力后，则根据达朗贝尔原理体系在此瞬时处于“动平衡”状态。在一般情况下，假设变形体密度为 ρ，微元体的体积为 $\mathrm{d}V$，则微元体的质量为 $\rho\mathrm{d}V$。又设体系任一点 $P(x,y,z)$ 在 t 时刻的位移为 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}(x,y,z,t)$，因此 P 点的加速度为 $\boldsymbol{a} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{d}}{\partial t^2} = \boldsymbol{a}(x,y,z,t)$。微元体的惯性力为 $-\rho\mathrm{d}V\boldsymbol{a} = -\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{d}}{\partial t^2}\mathrm{d}V$。因为它被假想地作用于体系体内的任意一点，因此可以看作是一种“体积力”。在利用了达朗贝尔原理前，第 1 章的虚位移原理为：

受给定外力作用的变形体处于平衡状态的充分、必要条件是，对一切虚位移，外力所作总虚功恒等于变形体所接受的总虚变形功。也即恒有如下虚功方程成立：

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{a}$$

对于二维问题，上述虚功方程的矩阵表达式为

$$\delta W_e = \iint_A \boldsymbol{F}_b^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_S^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{d}\mathrm{d}S = \iint_A \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \delta W_i \tag{b}$$

利用达朗贝尔原理后，虚位移原理应该作如下的“修正”：

受给定动荷载作用的变形体处于瞬时动平衡的充分、必要条件是，对一切虚位移，外力(包括动荷载和惯性力)所作总虚功恒等于变形体所接受的总虚变形功。也即恒有如下虚功方程成立：

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{8-106}$$

对于二维问题，式(8-106)的矩阵表达式为

$$\delta W_e = \iint_V \left(\boldsymbol{F}_b - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{d} \right)^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{d} \mathrm{d}A + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{F}_S^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{d} \mathrm{d}S = \iint_A \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}A = \delta W_i \tag{8-107}$$

与结构计算机分析篇利用势能原理建立单元、整体分析一样，式(8-107)即为单元运动方程推导的理论依据。所不同的是，这里用虚位移原理，而不是用势能原理。

8-4-2　杆件单元运动方程及结构运动方程的建立

1. 无阻尼自由振动单元运动方程

平面弯曲(不考虑轴向变形)杆件单元如图 8-9 所示，在无阻尼自由振动的情况下，式(8-107)为

$$\delta W_e = \int_0^l \left(-\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)^{\mathrm{T}} \delta v \mathrm{d}x = \int_0^l \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} \mathrm{d}x = \delta W_i \tag{8-108}$$

式中：A、l 分别为单元面积、长度；EI 为单元抗弯刚度；

v 和 δv 分别为单元位移和虚位移。

如果与第 2 章一样，对不考虑轴向变形的弯曲单元仍近似取(单元局部坐标，以下不再说明)

$$\bar{v} = \bar{v}(x,t) = \boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t) \tag{8-109}$$

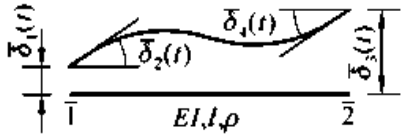


图 8-9　平面弯曲杆件单元位移

式中，$\boldsymbol{N} = (N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4)$为对应单元杆端位移的形函数矩阵，且

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \quad N_2 = x\left(1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) \\ N_3 &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, \quad N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{aligned}\right\} \tag{8-110}$$

$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t)$为**单元杆端位移矩阵**，在动力问题中它是时间的函数，则同样可得虚位移为

$$\delta\bar{v} = \delta\bar{v}(x,t) = \boldsymbol{N}\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t) \tag{c}$$

将式(8-109)和式(c)代入式(8-108),可得

$$\int_0^l \left(-\rho A \frac{\partial^2 \boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t)}{\partial t^2}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t)\mathrm{d}x = \int_0^l \left(EI \frac{\partial^2 \boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t)}{\partial x^2}\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{N}\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x \tag{d}$$

$$\bar{\boldsymbol{m}}^e = \int_0^l \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\rho A\boldsymbol{N}\mathrm{d}x \tag{e}$$

$\bar{\boldsymbol{m}}^e$ 称为**单元一致质量矩阵**,若代入形函数矩阵并积分,则可得

$$\bar{\boldsymbol{m}}^e = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{8-111}$$

$$\ddot{\bar{\boldsymbol{\delta}}}^e(t) = \frac{\partial^2 \bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t)}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$\ddot{\bar{\boldsymbol{\delta}}}^e(t)$称为**单元杆端加速度矩阵**,则式(d)可写为

$$-\ddot{\bar{\boldsymbol{\delta}}}^e(t)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{m}}^e\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t) = \bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t) \tag{g}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{k}}^e = \int_0^l \boldsymbol{N}''^{\mathrm{T}}EI\boldsymbol{N}''\mathrm{d}x \left(\boldsymbol{N}'' = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x^2}\right)$与第 2 章一样,为**单元刚度矩阵**。

需要指出的是,单元一致质量矩阵 $\bar{\boldsymbol{m}}^e$ 的元素 m_{ij} 的物理意义是:单元杆端加速度 $\ddot{\bar{\delta}}_j = 1$ 时,所引起的 $\ddot{\bar{\delta}}_i$ 方向的惯性力为 F_{Ii}。因此,单元一致质量矩阵 $\bar{\boldsymbol{m}}^e$ 中包含与杆端转角对应的转动惯量。所谓"一致"是指,求 $\bar{\boldsymbol{m}}^e$ 和求 $\boldsymbol{k}^e$ 取相同的形函数。

由虚位移 $\delta\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t)$的任意性、独立性,*GNG* 第 2 章位移变分任意、独立一样,从式(g)可得

$$\bar{\boldsymbol{m}}^e\ddot{\bar{\boldsymbol{\delta}}}^e(t) + \bar{\boldsymbol{k}}^e\bar{\boldsymbol{\delta}}^e(t) = \boldsymbol{0} \tag{8-112}$$

上式即为弯曲(杆件)单元无阻尼自由振动单元的运动方程。

在单元分析的基础上,与第 3 章一样进行整体分析(这里从略),即可用有限元建立杆系结构的自由振动运动方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\Delta}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{0} \tag{8-113}$$

式中,$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 分别为**结构一致质量和刚度矩阵**(是整体坐标的,下同);

$\boldsymbol{\Delta}$、$\ddot{\boldsymbol{\Delta}}$分别为**结构的结点位移和加速度矩阵**。

用有限单元法建立了运动方程,显然式(8-113)为多自由度体系自由振动方程,那么利用本章前面所讲内容,即可对结构进行自由振动分析,从而获得结构的动力特性(振型和频率)等。

2. 无阻尼受迫振动单元运动方程

设杆件单元上受横向动力外荷载 $q(x,t)$作用,则式(8-108)可改写为

$$\delta W_e = \int_0^l \left(q(x,t) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)^{\mathrm{T}} \delta v \mathrm{d}x = \int_0^l \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} \mathrm{d}x = \delta W_i \quad (g)$$

从式(h)出发,取相同的单元位移函数,并记

$$\int_0^l \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} q(x,t) \mathrm{d}x = \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e(t) \quad (8-114)$$

$\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e(t)$称为**单元等效结点动荷载**。类似上一小节的推导,可得

$$\overline{\boldsymbol{m}}^e \ddot{\overline{\boldsymbol{\delta}}}^e(t) + \overline{\boldsymbol{k}}^e \overline{\boldsymbol{\delta}}^e(t) = \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e(t) \quad (8-115)$$

这就是无阻尼受迫振动单元运动方程。对单元进行整体集成后,式(8-113)改为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\Delta}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}(t) \quad (8-116)$$

从式(8-114)可见,如果动荷载 $q(x,t)$可分离变量,也即 $q(x,t) = q(x) \cdot T(t)$,则单元等效结点动荷载矩阵为

$$\int_0^l \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} q(x) \cdot T(t) \mathrm{d}x = \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e T(t) \quad (8-117)$$

式中,$\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{E}}^e$ 和单元承受 $q(x)$静荷载作用下的等效荷载相同,也可以从载常数表得到。$T(t)$是已知的动荷载随时间变化的规律。

对式(8-116)所示的多自由度体系运动方程,可用振型分解法或逐步积分法求解。

3. 有阻尼情况的说明

如果所研究的问题的微元体能量耗散规律可用阻尼力 $-c\frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial t}\mathrm{d}V$ 来表示,而且已知粘阻系数 c 的变化规律,则和惯性力一样可将阻尼力视作体积力进行单元分析,也可以建立有阻尼的单元运动方程。

但是很遗憾,由于阻尼机理并不清楚,不可能给出 c 的变化规律,所以用有限单元法对结构进行动力分析时,阻尼矩阵不是从单元阻尼矩阵来获得。而是一般假设结构的阻尼矩阵为 Rayleigh 正交阻尼,由结构的质量、刚度矩阵以及两个阻尼比按式(8-102)和式(8-105)来确定。一旦建立了结构的阻尼矩阵,则结构的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\Delta}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\Delta}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}(t) \quad (8-118)$$

4. 关于单元和结构质量矩阵的说明

如果考虑单元的轴向变形,则和刚度矩阵要增加轴向刚度项一样,一致质量矩阵也应增加相应项。建议读者仿照本节和第2章拉、压杆单元分析,自行建立拉、压单元的一致质量矩阵,在此基础上再写出考虑轴向变形的单元一致质量矩阵。

美国伯克利加州大学克拉夫(Clough)教授曾指出,采用集中质量矩阵可能比采用结构一致质量矩阵的分析结果更符合实际。正因如此,目前的应用软件一般都用集中质量矩阵。当采用集中质量矩阵时,结构质量矩阵对应转动未知量的元素为零。如果假设先编结构的线位移未知量位移码,后编转角位移码,则结构位移、加速度矩阵可分块为 $\boldsymbol{\Delta}_l$、$\boldsymbol{\Delta}_a$、$\ddot{\boldsymbol{\Delta}}_l$、$\ddot{\boldsymbol{\Delta}}_a$(下脚标 l、a 分别表示线位移和角位移),与此对应,无阻尼受迫振动运动方程可写成如下分块矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_l & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\Delta}}_l \\ \ddot{\boldsymbol{\Delta}}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_l & \boldsymbol{K}_{la} \\ \boldsymbol{K}_{la}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_l \\ \boldsymbol{\Delta}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{El}(t) \\ \boldsymbol{F}_{Ea}(t) \end{Bmatrix} \tag{8-119}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M}_l \ddot{\boldsymbol{\Delta}}_l + \boldsymbol{K}_l \boldsymbol{\Delta}_l + \boldsymbol{K}_{la} \boldsymbol{\Delta}_a &= \boldsymbol{F}_{El}(t) \\ \boldsymbol{K}_{la}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Delta}_l + \boldsymbol{K}_a \boldsymbol{\Delta}_a &= \boldsymbol{F}_{Ea}(t) \end{aligned}\right\} \tag{8-120}$$

从式(8-120)的第二式可解出:

$$\boldsymbol{\Delta}_a = \boldsymbol{K}_a^{-1}(\boldsymbol{F}_{Ea}(t) - \boldsymbol{K}_{la}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Delta}_l) \tag{h}$$

将其代入式(8-120)的第一式,整理后可得

$$\boldsymbol{M}_l \ddot{\boldsymbol{\Delta}}_l + (\boldsymbol{K}_l - \boldsymbol{K}_{la} \boldsymbol{K}_a^{-1} \boldsymbol{K}_{la}^{\mathrm{T}}) \boldsymbol{\Delta}_l = \boldsymbol{F}_{El}(t) - \boldsymbol{K}_{la} \boldsymbol{K}_a^{-1} \boldsymbol{F}_{Ea}(t) \tag{8-121}$$

经上述静力凝聚后的式(8-121)只包含了线位移未知量,但又考虑了结点转动的刚度等的影响,从式(8-121)解得结构线位移响应 $\boldsymbol{\Delta}_l$ 后,即可由式(h)求得转角位移,从而解决结构的整个位移响应。因此,式(8-121)就是集中质量模型杆系结构动力有限单元分析的基本方程。随书发行光盘中的 vibra.exe 程序,就是按此方程编制的杆系结构动力有限单元自振特性程序。限于篇幅,读者可在光盘上找到 vib1、vib1.out 和 vibrat、vibrat.out 两个算例的数据和计算结果文件。读者可仿此自行练习使用 vibra 程序。

*§8-5 多自由度体系的逐步积分方法

当应用振型分解(也称振型叠加)法做多自由度体系的动力响应分析时,首先需要求得体系的频率和振型等动力特性,对正则坐标的单自由度方程,当所受的动荷载是地震等数值记录荷载时,还需用逐步积分法求解正则坐标响应。因此,随着计算机应用的普及,对进行确定性动荷载下多自由度响应的分析,往往直接对运动方程应用逐步积分的方法解决。多自由度体系的逐步积分方法很多,限于篇幅不作全面介绍,本节只简单介绍最常用的三种算法,以供读者阅读已有程序或编制逐步积分程序时参考。

8-5-1　线加速度法

在 §7-3 中曾结合非线性问题介绍过单自由度体系的线加速度法，只要注意单自由度运动方程和多自由度方程的相似性

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F_E(t),\quad \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{F}_E(t)$$

即单自由度运动方程的所有量都改成多自由度相对应的矩阵，便可得多自由度运动方程。因此，单自由度的线加速度法的基本假设及逐步积分公式的推导过程，显然也可通过相似性来得到。这里只给出相关公式，具体推导请读者参照 §7-3 自行研究。

● **基本假定**

在 Δt 时间间隔内 $\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\tau)=\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)+\frac{\tau}{\Delta t}\Delta\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)$，即加速度线性变化。

● **逐步积分公式**

拟静力刚度　$\boldsymbol{K}^*=\frac{6}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}+\frac{3}{\Delta t}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}$

拟静力增量荷载

$$\Delta\boldsymbol{F}_E^*(t)=\Delta\boldsymbol{F}_E(t)+\boldsymbol{M}\left[\frac{6}{\Delta t}\dot{\boldsymbol{Y}}(t)+3\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)\right]+\boldsymbol{C}\left[3\dot{\boldsymbol{Y}}(t)+\frac{\Delta t}{2}\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)\right]$$

拟静力方程　$\boldsymbol{K}^*\Delta\boldsymbol{Y}(t)=\Delta\boldsymbol{F}_E^*(t)$，$\Delta\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{K}^{*-1}\Delta\boldsymbol{F}_E^*(t)$

速度增量计算公式　$\Delta\dot{\boldsymbol{Y}}(t)=\frac{3}{\Delta t}\left(\Delta\boldsymbol{Y}(t)-\dot{\boldsymbol{Y}}(t)\Delta t-\frac{1}{6}\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)\Delta t^2\right)$

像单自由度线加速度法积分步骤一样，利用上述公式，即可从已知的初始时刻开始，逐步积分获得多自由度体系响应的整个时间历程，因此逐步积分法也称为**时程分析**。但需要特别指出的是，线加速度法是有条件稳定的算法，为了保证积分结果能收敛且具有足够的精度，积分时间步长应该满足 $\Delta t\leqslant T_{min}/10$，其中 T_{min} 为体系的最短周期。当自由度很多时，最短周期是很小的，为获得满意的响应结果，时间间隔 Δt 将很短，从而导致积分时间将很长，这是线加速度法的一大缺点。

8-5-2　Wilson-θ 法

为了克服线加速度法条件稳定的缺点，美国伯克利加州大学 Wilson 教授对线加速度法作了如下修正：

1. 设参数 $\theta\geqslant 1$，将 Δt 时间间隔内线性变化，改成 τ 在 $[0,\theta\Delta t]$ 时间间隔内线性变化。

$$\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\tau)=\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)+\frac{\tau}{\Delta t}\Delta\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)$$

2. 假设等效干扰力 $\boldsymbol{F}_E(t)$在 $\theta\Delta t$ 时刻的值可由 $\Delta\boldsymbol{F}_E(t)$的线性外延来得到,即

$$\boldsymbol{F}_E(t+\theta\Delta t)=\boldsymbol{F}_E(t)+\theta(\boldsymbol{F}_E(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}_E(t))$$

基于上述对线加速度法的修正,采取类似线加速度法的推导,即可获得全部计算所需公式。这里只给出相关公式,以便编制程序时使用。公式的具体推导请读者参照本篇§7-3自行研究(或参阅有关资料)。

$$\boldsymbol{K}^*=a_0\boldsymbol{M}+a_1\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K} \tag{8-122}$$

$$\boldsymbol{F}_E^*(t+\theta\Delta t)=\boldsymbol{F}_E(t)+\theta\Delta\boldsymbol{F}_E(t)+\boldsymbol{M}[a_0\boldsymbol{Y}(t)+a_2\dot{\boldsymbol{Y}}(t)+2\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)]+\boldsymbol{C}[a_1\boldsymbol{Y}(t)+2\dot{\boldsymbol{Y}}(t)+a_3\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)] \tag{8-123}$$

$$\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{Y}(t+\theta\Delta t)=\boldsymbol{F}_E^*(t+\theta\Delta t) \tag{8-124}$$

$$\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)=a_4(\boldsymbol{Y}(t+\theta\Delta t)-\boldsymbol{Y}(t))+a_5\dot{\boldsymbol{Y}}(t)+a_6\ddot{\boldsymbol{Y}}(t) \tag{8-125}$$

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)=\dot{\boldsymbol{Y}}(t)+a_7(\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)+\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)) \tag{8-126}$$

$$\boldsymbol{Y}(t+\Delta t)=\boldsymbol{Y}(t)+\Delta t\,\dot{\boldsymbol{Y}}(t)+a_8(\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)+2\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)) \tag{8-127}$$

式中,$a_0\sim a_8$ 是由 θ 和 Δt 确定的常数,具体公式如下:

$$a_0=\frac{6}{(\theta\Delta t)^2},\quad a_1=\frac{3}{\theta\Delta t},\quad a_2=2a_1,\quad a_3=\frac{\theta\Delta t}{2},\quad a_4=\frac{a_0}{\theta} \tag{8-128a}$$

$$a_5=\frac{a_2}{\theta},\quad a_6=1-\frac{3}{\theta},\quad a_7=\frac{\Delta t}{2},\quad a_8=\frac{\Delta t^2}{6} \tag{8-128b}$$

(1) Wilson-θ 法的积分步骤

有了上述公式,按如下步骤即可编制 Wilsion-θ 法时程分析程序:

● 形成质量 $\boldsymbol{M}$、阻尼 $\boldsymbol{C}$ 和刚度 $\boldsymbol{K}$ 矩阵。

● 确定初始位移 $\boldsymbol{Y}(0)$、速度 $\dot{\boldsymbol{Y}}(0)$、加速度 $\ddot{\boldsymbol{Y}}(0)$向量(也称状态向量);

● 确定积分步长 Δt 和 $\theta(\geqslant 1.37$,一般取 1.4)值,利用式(8-128)计算常数值。

● 按式(8-122)计算拟静力刚度 $\boldsymbol{K}^*$。

● 对拟静力刚度矩阵作修正平方根法(LDLT 法)分解。

● 按式(8-123)计算拟静力荷载 $\boldsymbol{F}_E^*(t+\theta\Delta t)$。

● 按拟静力方程用 LDLT 法求解 $t+\theta\Delta t$ 时刻的位移 $\boldsymbol{Y}(t+\theta\Delta t)$。

● 用式(8-125)~(8-127)计算 $t+\Delta t$ 时刻的位移 $\boldsymbol{Y}$、速度 $\dot{\boldsymbol{Y}}$ 和加速度 $\ddot{\boldsymbol{Y}}$。

● 以所得状态向量作为初始向量,重新计算拟静力荷载并重复计算,直

到整个历程计算结束。

(2) 关于 Wilson－θ 法的说明

● 进一步的数学推导证明，Wilson－θ 法是一种无条件稳定的算法。

● 用这种算法会使系统增加“算法阻尼”，从而使振幅减小、周期增长。对单自由度体系分析结果表明，当 $\theta=1.4$，$\Delta t/T=0.1$ 时，振动一周约使振幅减小 6.5%，相当于引入 1% 的算法阻尼。由于动力计算模型和实际结构间的差异，往往按计算模型算得的高振型与实际有很大偏差，因此没有必要精确地积分高振型分量。从这一观点看，引入算法阻尼可使高振型衰减的更快，这是有利的。但是，当 $\Delta t/T>0.25$ 时，将使任何反应都较快地衰减，显然这又是不好的。

● 计算经验表明，当步长过大时，虽理论上是无条件稳定的，实际上将出现发散现象，一般称为**超越现象**(Overshoot)。

● 从泰勒级数展开角度分析，Wilson－θ 法的截断误差只有 $(\Delta t)^2$ 量级，要提高计算精度，需减小积分步长，可这又将增加计算工作量。解决的方法是寻求具有更好性能(无条件稳定、优良算法阻尼特性、无超越现象)的高精度算法。

8－5－3　Newmark－β 法

● **基本假定**

美国伊利诺伊斯大学纽马克(Newmark)也对线加速度法作了修正，他提出如下速度、位移的假定：

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)=\dot{\boldsymbol{Y}}(t)+[(1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)+\gamma\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)]\Delta t$$

$$\boldsymbol{Y}(t+\Delta t)=\boldsymbol{Y}(t)+\dot{\boldsymbol{Y}}(t)\Delta t+\left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\boldsymbol{Y}}(t)+\beta\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)\right]\Delta t^2 \tag{8-129}$$

式中，γ 和 β 是适当选取的积分参数，为保证无条件稳定，需要 $\gamma\geqslant\frac{1}{2}$。当取 $\gamma=\frac{1}{2}$ 时习惯上称为 Newmark－β 法。

● **推导的基本思路**

(1) 由式(8－129)的第二式解出 $\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)$，也即将 $\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)$ 用 $t+\Delta t$ 时刻位移和 t 时刻状态向量表示。

(2) 将 $\ddot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)$ 代回第一式，使 $\dot{\boldsymbol{Y}}(t+\Delta t)$ 也同样用 $t+\Delta t$ 时刻位移和 t 时刻状态向量表示。

(3) 利用 $t+\Delta t$ 时刻的运动方程则可建立拟静力方程，从中可得到拟静

力刚度矩阵、拟静力荷载矩阵表达式。

建议读者按上述步骤，仿照线加速度法推导方法，自行建立 Newmark 法的全部计算公式，并仿照 Wilson-θ 法的步骤写出 Newmark 法的积分步骤，以便编制程序供分析计算时用。

本节仅选择上述三种积分算法作了基本思路的简单介绍，实际上我国学者在时程分析的直接积分方法方面也做了许多工作。本书作者也曾提出过一种高精度的单步算法——高阶单步法。有兴趣的读者可查阅相关的文献资料。

§8-6 结论与讨论

8-6-1 本章结论

● 不管运动方程用哪种方法建立，多自由度体系自由振动最终归结为求解频率和振型方程，从数学上说属矩阵特征值问题。

● 体系的自振频率取决于结构的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$（或柔度矩阵 $\boldsymbol{\delta}$）和质量矩阵 $\boldsymbol{M}$，频率方程为

$$|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=0 \text{ 或 } |\boldsymbol{\delta M}-\lambda\boldsymbol{I}|=0 \quad \left(\lambda=\frac{1}{\omega^2}\right)$$

● 对一般工程结构来说作多自由度无阻尼自由振动分析时，其自振频率个数等于自由度数，且各不相等。其中最小频率称为基频。全部频率由小到大排列的序列，称为体系的频率谱。频率谱可分为密集型和稀疏型两类。频率谱是结构的重要动力特性之一。

● 将频率代入振型方程 $(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$ 或 $(\boldsymbol{\delta M}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$，可求得每一个自振频率对应的振型向量，它反映了结构以该自振频率振动时所固有的变形形态。振型向量有多种规格化方法，最常用的是令向量中某个元素为一给定值（一般取为 1）。

● 不同自振频率的振型向量对质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 都是正交的，也即有

$$\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ M_j^* & i=j\end{cases},\quad \boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ K_j^* & i=j\end{cases}$$

阻尼是一个复杂的问题，为简化一般结构的动力分析，常用 Rayleigh 比例阻尼，即阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}=a\boldsymbol{M}+b\boldsymbol{K}$。显然，这时振型对阻尼也将是正交的

$$\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varphi}_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ C_j^* & i=j\end{cases}$$

其中，a、b 由已知的任意两频率 ω_r、ω_s 及对应的阻尼比 ξ_r、ξ_s 确定。对钢筋混凝土结构，一般假设第一和第二振型阻尼比 ξ_1、ξ_2 都为 0.05，由此可求得各振型的阻尼比。

● 多自由度体系可产生多种频率下的共振。简谐荷载作用下非共振的稳态位移响应，可通过求解如下幅值方程得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{K}-\theta^2\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{F}_{E0},\quad \boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{A}\sin\theta t$$

其中，$\boldsymbol{F}_{E0}$ 为等效干扰力向量的幅值。实质为转换成线性代数方程求解问题。

● 任意一个 n 维已知向量 $\boldsymbol{Y}$，均可按 n 自由度体系的振型展开。因此，多自由度在任意荷载作用下的强迫振动，在假设体系阻尼为比例阻尼的条件下，可通过振型叠加法（或称振型分解法），作如下正则坐标变换：

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t)\boldsymbol{\varphi}_i$$

将多自由度体系耦合的运动微分方程组转换成 n 个独立正则坐标的单自由度运动方程，利用单自由度问题的杜哈梅积分，在获得正则坐标解答后，即可利用上式得到受迫振动的响应。

● 利用吸振器原理，在主体结构上附加调频质量阻尼器或调频液体阻尼器，使阻尼器的频率接近主体结构的基频，可达到减少主体结构振动的作用。

● 根据达朗贝尔原理将惯性力也视为外加动荷载，则体系在每一瞬时都是动平衡的。因此与结构计算机分析篇一样，利用虚位移原理或势能原理按有限单元法的分析步骤，可建立单元和结构的运动方程，从而可用动力有限单元编制计算程序，进行结构的动力分析。当仍取静力问题杆件单元位移模式分析时，可得杆件单元的一致质量矩阵。

● 当取集中质量模型进行分析时，由于没有转动惯量，因此可利用静力凝聚建立只包含线位移自由度的运动方程。经验表明，利用集中质量模型不仅能减少工作量，而且也能获得满意的精度。

● 除振型叠加法外，对确定性动荷载作用下的响应分析，可应用时程分析法获得数值解答。逐步积分方法很多，在已有的动力响应分析程序中用的较多的是 Wilson－θ 法和 Newmark－β 法，其基本思路是作出某种基本假定：Wilson－θ 法假定加速度线性变化；Newmark－β 法假定位移、速度的变化规律。在此基础上，利用运动方程推导出由前一步状态向量（位移、速度和加速度）计算后一步状态向量的逐步积分公式。

8－6－2　几点讨论

● 结构如果存在刚度较小的顶部附属部分，例如建筑结构屋顶小烟囱、

女儿墙等。当结构承受地震荷载等作用时，这些附属部分将产生激烈的运动，从而导致破坏并可能引起次生灾害，这种现象称为鞭击效应或鞭梢效应。用2个自由度说明鞭击效应的例子，留给读者自行研究。

● 除了振型对于质量和刚度的基本正交性条件之外，从振型方程 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}$ 和基本正交性出发，可以用归纳法证明如下的正交关系：

(1) $\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M})^n\boldsymbol{\varphi}_j = 0$，式中 n 为任意整数，$i \neq j$。

(2) $\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})^n\boldsymbol{\varphi}_j = 0$，式中 n 为任意整数，$i \neq j$。

(3) $\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})^k + \sum_{l=1}^{n}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M})^l\right)\boldsymbol{\varphi}_j = 0$。

(4) 在矩阵负幂表示求逆运算的情形下，$\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})^n\boldsymbol{\varphi}_j = 0$、$-\infty < n < \infty$。

这些正交关系的证明留给有兴趣的读者自行研究。

● 瑞利比例阻尼可使运动方程解耦，但在用第一、二振型阻尼比确定质量和刚度的比例系数 a、b 时，高振型的阻尼比为 $\xi_i = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\omega_i} + b\omega_i\right)$。这一结果将导致振型阶次越高，阻尼比和实际差别越大。如果由实测已知 n 个振型的阻尼比 ξ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$，则为了克服这一缺点，可取 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}\sum_{i=0}^{n-1} a_i (\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})^i$，式中 a_i 为待定系数。这种阻尼假定称为**考伊阻尼**，利用它可使 n 个振型的阻尼比都与实测结果一致。

● 本章讨论了杆系结构动力有限单元，其原理和方法同样适用于平面问题和一切有限单元的动力分析，建议读者按本章思路自行推导平面三角形单元的一致质量矩阵和单元运动方程。

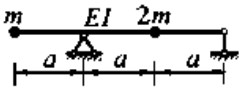
● 振型分解法需要事先求解特征值问题，获得频率、振型后将运动方程解耦为正则坐标的单自由度体系来求解，最后叠加各振型正则坐标的结果，即可得到问题的解答。由于实际结构的阻尼作用，响应中的高振型成分很快被衰减掉，因此可取少量低阶振型结果的叠加作近似解，使工作量减少。在地震地面运动作用下，振型分解所得的正则坐标解答仍然需要采用逐步积分得到。因此，利用这一思想可将振型分解法和时程分析法结合，从而解决多自由度的非线性响应分析。更多的内容超出了本书范围，这里不再赘述。

● 当结构上存在人群时，英籍华人季天健博士通过大量实际测量证明：人体在结构上不仅仅是增加了质量，人体和结构的共同作用结果，将使结构的刚度和阻尼都发生变化，使人－结构体系的频率比原结构的频率增高。这一结论与将人单纯看成质量是不同的。

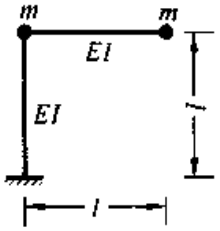
习　题

8－1　试求图示梁的自振频率和振型。

8－2　试求图示刚架的自振频率和振型。



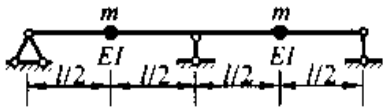
习题 8－1 图



习题 8－2 图

8－3　试求图示梁的自振频率和振型。

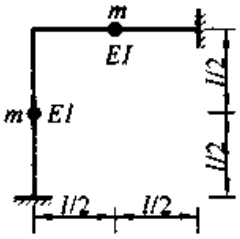
已知：$l = 100$ cm，$mg = 1\ 000$ N，$I = 68.82\ \text{cm}^4$，$E = 2 \times 10^5$ MPa。



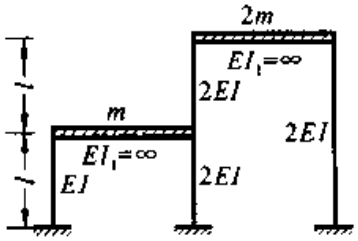
习题 8－3 图

8－4　试求图示刚架的自振频率和振型。

8－5　试求图示刚架的自振频率和振型。

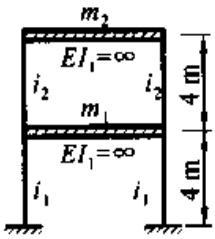


习题 8－4 图



习题 8－5 图

8－6　试求图示刚架的自振频率和振型。设楼面质量分别为 $m_1 = 120$ t 和 $m_2 = 100$ t，柱的质量已集中于楼面，柱的线刚度分别为 $i_1 = 20$ MN·m 和 $i_2 = 14$ MN·m，横梁刚度为无限大。



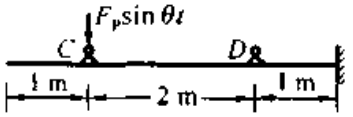
习题 8－6 图

8－7　设在习题 8－6 的两层刚架的二层楼面处沿水平方向作用一简谐干扰力 $F_p\sin\theta t$，其幅值 $F_p=5$ kN，机器转速 $=150$ r/min。试求第一、二层楼面处的振幅值和柱端弯矩的幅值。

8－8　图示悬臂梁上有两个电动机，每个重 30 kN，$F_p=5$ kN。试求当只有电动机 C 开动时的动力弯矩图。已知梁的 $E=210$ GPa，$I=2.4\times10^{-4}$ m^4。梁重可以略去。

(1) 转速为 300 r/min；

(2) 转速为 500 r/min。



习题 8－8 图

8－9　试用振型分解法重作习题 8－7。

8－10　试用振型分解法重作习题 8－8。

第9章

频率和振型的实用计算方法

对于多自由度体系，利用频率方程和振型方程即可求得结构的频率和振型。然而在实际结构的动力分析中，频谱稀疏型结构只需用前三、四阶频率及其相应的振型。即便是频谱密集型结构，一般也只需考虑20个左右频率和振型即可。因此，掌握频率和振型的实用计算方法便显得非常必要。本章将主要介绍能量法求基本频率和迭代法求前几阶较低的频率及其相应的振型。同时考虑到应用计算机解决频率和振型的计算，作为选学内容，也介绍了瑞利比、瑞利－里兹法和子空间迭代法等内容。

§9－1 能 量 法

根据能量守恒原理，线性体系作无阻尼自由振动时，没有能量的输入和耗散，因此在任一时刻变形能与动能之和保持不变，即有

$$V_\varepsilon(t) + T(t) = \text{cost}. \tag{9-1}$$

9－1－1 单自由度体系

单自由度线性体系无阻尼自由振动的位移随时间变化规律为

$$y(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{9-2}$$

式中，A 为振幅，ω 为自振频率，α 为初相位。因此，在任一时刻质量运动的速度为

$$\dot{y}(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha) \tag{9-3}$$

由式(9－2)、(9－3)可见，当 $\cos(\omega t + \alpha) = 0$ 时，速度和动能为零，位移

和变形能达到了最大值

$$V_{\varepsilon,\max}=\frac{1}{2}ky_{\max}^2=\frac{1}{2}kA^2 \tag{9-4}$$

而当 $\sin(\omega t+\alpha)=0$ 时，位移和变形能为零，速度和动能达到了最大值

$$T_{\max}=\frac{1}{2}m\dot{y}_{\max}^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \tag{9-5}$$

因此式(9-1)成为

$$T_{\max}=V_{\varepsilon,\max} \tag{9-6}$$

若记

$$\bar{T}_{\max}=\frac{1}{2}mA^2 \tag{9-7}$$

它可以理解为单位圆频率($\omega=1$)的动能，简称为**单位动能**。则式(9-6)改写为

$$\bar{T}_{\max}\omega^2=V_{\varepsilon,\max} \tag{9-8}$$

由此可得

$$\omega^2=\frac{V_{\varepsilon,\max}}{\bar{T}_{\max}}\qquad 或\ \omega=\sqrt{\frac{V_{\varepsilon,\max}}{\bar{T}_{\max}}} \tag{9-9}$$

将变形能算式(9-4)和单位动能算式(9-7)代入式(9-9)，显然与以前由刚度和质量求频率的计算公式完全一致，但是这里是由能量守恒原理得到的，因此该方法称为**能量法**(energy method)或**瑞利法**(Rayleigh method)。

9-1-2 多自由度体系

多自由度体系的第 i 个自振频率 ω_i，根据振型的正交性可用下式计算：

$$\omega_i^2=\frac{K_i^*}{M_i^*}=\frac{\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i}{\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i} \tag{9-10}$$

即可由第 i 振型对应的广义刚度 K_i^* 和广义质量 M_i^* 与单自由度一样计算。式中 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别为体系的刚度矩阵和质量矩阵。

对多自由度体系，仿照单自由度不难验证最大势能和最大动能分别为

$$V_{\varepsilon,\max}^i=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i,\quad T_{i,\max}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i$$

因此，第 i 振型对应的广义刚度 K_i^* 和广义质量 M_i^* 分别为

$$K_i^*=\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i=2V_{\varepsilon,\max}^i \tag{9-11a}$$

$$M_i^*=\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i=2\bar{T}_{i,\max} \tag{9-11b}$$

由此式(9-10)可写成如下能量的形式：

$$\omega_i^2 = \frac{V_{\varepsilon,\max}^i}{\overline{T}_{i,\max}} \tag{9-12}$$

似乎用式(9－12)可求得体系的各阶频率，但是由于应用(9－12)计算频率要预先知道第 i 阶频率所对应的振型，而体系的振型在频率未求得以前同样是未知的，因此用它精确地计算各个振型的频率是不可能的。

在实际工程的动力分析中，如果能建立一个既满足体系的位移约束条件、又与体系的第 i 振型 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 相接近的位移函数 $\boldsymbol{Y}_i$，则以 $\boldsymbol{Y}_i$ 代替 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 计算最大应变能和最大单位动能，由式(9－12)即可求得第 i 振型的近似频率。可是，除能较容易地假设出与第一振型相接近的位移函数外，要很好地假设出接近高阶振型的位移函数是很困难的。因此，一般只用式(9－12)计算基本频率 ω_1。此时

$$\omega_1^2 = \frac{V_{\varepsilon,\max}^1}{\overline{T}_{1,\max}} \tag{9-13}$$

其中，

$$2V_{\varepsilon,\max}^1 = \boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}_1 \tag{9-14a}$$

$$2\overline{T}_{1,\max} = \boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}_1 \tag{9-14b}$$

需要指出的是，在式(9－13)中所假设的(接近基本振型的)位移函数 $\boldsymbol{Y}_1$，只要能满足体系的位移约束条件即可。用式(9－13)所求得的频率的精度，取决于位移函数 $\boldsymbol{Y}_1$ 和基本振型的接近程度，当 $\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{\varphi}_1$ 时，显然结果为精确解。

［**例题 9－1**］　试用能量法求例题 8－1 两层刚架的基本频率。图 9－1 所示刚架各立柱的抗弯刚度 $EI = 6.0\times10^6\ \mathrm{N\cdot m^2}$，横梁的质量 m_1、m_2 均为 5 000 kg，立柱的质量忽略不计，每层的高度 $l = 5$ m。

解：解法 1

由例题 8－1 所得刚度系数和层间侧移刚度的定义，结构的层间侧移刚度为

$$k_1 = \frac{48EI}{l^3},\quad k_2 = \frac{24EI}{l^3}$$

为了假设一个与基本振型较为相近的振型，在质量 m_1 上作用一个单位力(如图 9－1d)，则得到以下两个位移：

$$A_2 = \frac{1}{k_2} = \frac{l^3}{24EI},\quad A_1 = A_2 + \frac{l}{k_1} = \frac{l^3}{24EI} + \frac{l^3}{48EI} = \frac{3l^3}{48EI}$$

令 $\boldsymbol{Y}_1 = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \frac{l^3}{24EI}\begin{Bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$，则可得

$$M_1^* = 2\bar{T}_{1\max} = \left(\frac{l^3}{24EI}\right)^2 (1.5,1.0)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.0 \end{pmatrix} = \frac{13}{4} m \left(\frac{l^3}{24EI}\right)^2$$

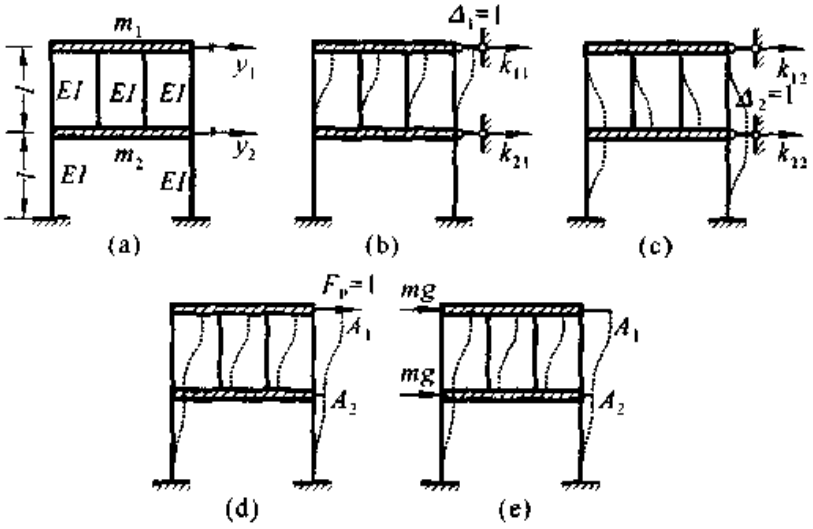


图 9-1 例题 9-1 图

由于体系是弹性体，因此最大变形能 $V_{\varepsilon,\max}^1$ 与外力所做的功相等，则有

$$V_{\varepsilon,\max}^1 = \frac{1}{2}1 \cdot A_1 = \frac{3l^3}{96EI}$$

将以上 $\bar{T}_{1\max}$ 和 $V_{\varepsilon,\max}^1$ 结果代入式(9-13)，可得

$$\omega_1^2 = \frac{144EI}{13ml^3} = 11.077\ \frac{EI}{ml^3}, \quad \omega_1 = 10.312\ \mathrm{s}^{-1}$$

由例题 8-1 已求得该体系的基本频率为 $10.050\ \mathrm{s}^{-1}$，可见其误差为 2.6%。

解法 2

将运动质量对应的重量沿振动方向作用在结构上，取由此产生的静位移作为近似的第一振型 $\boldsymbol{Y}_1$(如图 9-1e)，则可得

$$A_2 = \frac{2mg}{k_2} = \frac{mgl^3}{12EI}, \quad A_1 = A_2 + \frac{mg}{k_1} = \frac{mgl^3}{12EI} + \frac{mgl^3}{48EI} = \frac{5mgl^3}{48EI}$$

令 $\boldsymbol{Y}_1 = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \frac{mgl^3}{12EI}\begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.00 \end{pmatrix}$，则可得

$$M_1^* = 2\bar{T}_{1\max} = \left(\frac{mgl^3}{12EI}\right)^2 (1.25,1.0)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{41}{16} m \left(\frac{mgl^3}{12EI}\right)^2$$

最大变形能 $V_{\varepsilon,\max}^1$ 仍然由外力所做的功计算，则有

$$V_{\varepsilon,\max}^1 = \frac{1}{2}mgA_1 + \frac{1}{2}mgA_2 = \frac{9}{8}mg\,\frac{mgl^3}{12EI}$$

将以上 $\bar{T}_{1\max}$ 和 $V'_{\varepsilon,\max}$ 结果代入式(9－13)，可得

$$\omega_1^2 = \frac{432EI}{41ml^3} = 10.536\,\frac{EI}{ml^3},\quad \omega_1 = 10.057\ (\mathrm{s}^{-1})$$

此时的误差仅0.07%。

由以上两个近似解的结果可见，将运动质量对应的重量沿振动方向作用，取由此所产生的静位移作为近似的第一振型 Y_1，能量法所得到的结构基本频率具有相当高的精度。

9－1－3　无限自由度体系

对于具有连续分布质量的无限自由度体系，以梁为例，设 $m(x)$ 为分布质量，为了求其第一频率 ω_1，可设对应基频的任意点 x 的自由振动位移为

$$y_1(x,t) = Y(x)\sin(\omega_1 t + \alpha) \tag{9－15a}$$

式中，$Y(x)$ 是所假设的满足位移边界条件的基本振型，或称为位移函数。与此对应的速度为

$$\dot{y}_1(x,t) = \omega_1 Y(x)\cos(\omega_1 t + \alpha) \tag{9－15b}$$

由以上两式可得体系的最大动能为

$$T_{1,\max} = \frac{1}{2}\omega_1^2\int_0^l m(x)Y^2(x)\mathrm{d}x \tag{9－16}$$

式中，l 为梁度。而体系的最大变形能为

$$V'_{\varepsilon,\max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)[Y''(x)]^2\mathrm{d}x \tag{9－17}$$

式中，$EI(x)$ 为抗弯刚度变化规律，$Y''(x)$ 为 $Y(x)$ 对 x 的二阶导数，也即曲率。则由式(9－6)可得

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l EI(x)[Y''(x)]^2\mathrm{d}x}{\int_0^l m(x)Y^2(x)\mathrm{d}x} \tag{9－18}$$

如果梁上还有若干集中的质量块 $m_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则分母中应添加由集中质量所产生的动能，而式(9－18)改写成

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l EI(x)[Y'']^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l m(x)Y^2(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{N} m_i Y_i^2} \tag{9－19}$$

式中，Y_i 为集中质量 m_i 的位移值，也即 $Y_i = Y(x_i)$。x_i 为集中质量 m_i 的位置坐标。

当取结构的自重沿振动方向作用所产生的静位移作为第一振型的近

似，也即位移函数 $Y(x)$时，可以求得较为精确的基本频率。这时，式(9-19)分子中代表变形能的项可用重力沿位移方向所做的外力功代替，即

$$\omega_1^2=\frac{g\left(\int_0^l m(x)Y(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}m_iY_i\right)}{\int_0^l m(x)Y^2(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}m_iY_i^2} \tag{9-20}$$

必须强调指出的是，如果体系作水平振动，重力应沿水平方向作用。

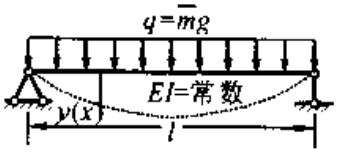


图 9-2 无限自由度简支梁

[**例题 9-2**] 试求图 9-2 所示等截面简支梁的基本频率。$\bar{m}$ 为沿梁长的均布质量。

解：解法 1

假设位移形状函数 $Y(x)$为抛物线，即

$$Y(x)=\frac{4a}{l^2}x(l-x) \tag{a}$$

$$Y''(x)=-\frac{8a}{l^2} \tag{b}$$

将式(a)、(b)代入式(9-19)，可得

$$\omega_1^2=\frac{\int_0^l EI\left(-\frac{8a}{l^2}\right)^2\mathrm{d}x}{\int_0^l \bar{m}\left(\frac{4a}{l^2}x(l-x)\right)^2\mathrm{d}x}=\frac{\frac{64EIa^2}{l^3}}{\frac{8}{15}\bar{m}a^2l}=\frac{120EI}{\bar{m}l^4}$$

$$\omega_1=\frac{10.954\,5}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

解法 2

如果取自重 $q=\bar{m}g$(为荷载集度)作用下的挠曲线作为位移形状函数 $Y(x)$，由材料力学可得

$$Y(x)=\frac{\bar{m}q}{24EI}(l^3x-2lx^2+x^4) \tag{c}$$

将式(c)代入式(9-20)，可得

$$\omega_1^2=\frac{\int_0^l qY(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l Y^2(x)\mathrm{d}x}=\frac{\frac{q^2l^5}{120EI}}{\bar{m}\left(\frac{q}{24EI}\right)^2\times\frac{31}{630}l^9}=\frac{3\,024EI}{31\bar{m}l^4}$$

$$\omega_1=\frac{9.876\,7}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

解法 3

如果取位移形状函数为正弦曲线，即

$$Y(x)=a\sin\frac{\pi x}{l} \tag{d}$$

将式(d)代入式(9－19)，可得

$$\omega_1^2=\frac{EIa^2\dfrac{\pi^4}{l^4}\displaystyle\int_0^l\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)^2\mathrm{d}x}{\overline{m}a^2\displaystyle\int_0^l\left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)^2\mathrm{d}x}=\frac{\pi^4EI}{\overline{m}l^4}$$

$$\omega_1=\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}}=\frac{9.869\,6}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}}$$

从等截面简支梁无限自由度自由振动运动方程可解得，正弦曲线为体系的基本振型，因此能量法求得的基本频率是精确解。将以上三种解法进行比较，第一个解法的误差为 11%，而第二个解法的误差仅为 0.07%。这再次表明，用结构的自重作为外荷载，取沿振动方向作用所产生的静位移作为位移函数，所求得的基本频率具有很高的精度。

*9－1－4　瑞利比

● **无限自由度体系**

对于具有连续分布质量的体系，如果已知结构的第 i 个主振型 $\varphi_i(x)$，则体系的第 i 个频率可用下式计算

$$\omega_i^2=\frac{\sum\int EI(x)[\varphi_i''(x)]^2\mathrm{d}x}{\sum\int m(x)\varphi_i^2(x)\mathrm{d}x} \tag{9－21}$$

仿照式(9－21)，对于任意一个满足位移边界条件的位移函数 $Y(x)$，定义如下比值称为**瑞利比**(Rayleigh ratio)，即

$$R(Y)=\omega^2=\frac{\sum\int EI(x)[Y''(x)]^2\mathrm{d}x}{\sum\int m(x)Y^2(x)\mathrm{d}x} \tag{9－22}$$

由于对给定的体系，$EI(x)$和 $m(x)$都是已知的，因此瑞利比 $R(Y)$的值完全由所选的位移函数 $Y(x)$确定。

如果将式(9－22)中的位移函数表示成 n 个彼此独立且又都满足体系位移边界条件的已知位移函数(也称“基函数”)$\psi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$的线性组合，即

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\psi_i(x) \tag{9－23}$$

式中，a_i 是可变参数，也称广义坐标。式(9-23)相当于把无限自由度体系折减为 n 个自由度体系。将式(9-23)代入式(9-22)，瑞利比可表示成

$$R(Y)=\frac{\sum\int EI(x)\left[\sum_{i=1}^{n}a_i\psi_i''(x)\right]^2\mathrm{d}x}{\sum\int m(x)\left[\sum_{i=1}^{n}a_i\psi_i(x)\right]^2\mathrm{d}x}=\frac{A(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{B(a_1,a_2,\cdots,a_n)} \tag{9-24}$$

由式(9-24)可见，瑞利比 $R(Y)$ 是所选位移函数中广义坐标的函数。

● **多自由度体系**

对 n 个自由度的体系，设体系的任意一个位移幅值向量为 $\boldsymbol{Y}$，则瑞利比 $R(\boldsymbol{Y})$ 定义为

$$R(\boldsymbol{Y})=\frac{\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}} \tag{9-25}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 为体系的质量矩阵，$\boldsymbol{K}$ 为体系的刚度矩阵。

若位移幅值向量 $\boldsymbol{Y}$ 可表示成 s 个满足位移边界条件的基向量 $\boldsymbol{\Psi}_j$ 的线性组合，即

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{j=1}^{s}a_j\boldsymbol{\Psi}_j=\boldsymbol{\Psi}_{n\times s}\boldsymbol{a}_{s\times 1} \tag{9-26}$$

则 n 个自由度的体系的瑞利比为

$$R(\boldsymbol{Y})=\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}}=\frac{A(\boldsymbol{a})}{B(\boldsymbol{a})} \tag{9-27}$$

§9-2 迭代法求振型和频率

多自由度体系的无阻尼自由振动运动方程和振型方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0},\quad \omega_i^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i=\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i$$

振型方程也可写成：

$$\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}_i,\quad \lambda_i=\frac{1}{\omega_i^2},\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{M}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 称为**动力矩阵**(dynamic matrix)。

9-2-1 计算第一振型和频率

为了计算第一振型，可任意假设一个经过标准化(例如取第一个元素为1)的初始迭代向量 $\boldsymbol{A}_0$，将其按振型分解，可得

$$\boldsymbol{A}_0=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\boldsymbol{\varphi}_i \tag{9-28}$$

经迭代可得

$$\bar{\boldsymbol{A}}_1 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{D}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_1\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\boldsymbol{\varphi}_i \tag{9-29}$$

由于 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n$，因此$\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}=\dfrac{\omega_1^2}{\omega_i^2}<1$，所以在式(9-29)的 $\bar{\boldsymbol{A}}_1$ 中除第一振型以外，其他的振型所占的比例比 $\boldsymbol{A}_0$ 减小了$\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}$倍。

将 $\bar{\boldsymbol{A}}_1$ 进行标准化，可得 $\bar{\boldsymbol{A}}_1=\alpha_1\boldsymbol{A}_1$，也即

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\boldsymbol{\varphi}_i \tag{9-30}$$

重复以上的迭代过程，可得

$$\bar{\boldsymbol{A}}_2=\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_1=\frac{\lambda_1^2}{\alpha_1}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^2\boldsymbol{\varphi}_i=\alpha_2\boldsymbol{A}_2 \tag{9-31}$$

标准化后的迭代向量

$$\boldsymbol{A}_2=\frac{(\lambda_1)^2}{\alpha_1\alpha_2}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^2\boldsymbol{\varphi}_i \tag{9-32}$$

如此反复，当迭代 m 次后，则有

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{m-1}=\alpha_m\boldsymbol{A}_m=\frac{\lambda_1^m}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m-1}}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m\boldsymbol{\varphi}_i \tag{9-33}$$

当 m 足够大时，由于$\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m\ll 1$，则在式(9-33)的 $\boldsymbol{A}_m$ 中，第一振型的分量占了绝对的优势，所以有

$$\boldsymbol{A}_m\approx\frac{\lambda_1^m}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}\eta_1\boldsymbol{\varphi}_1 \tag{9-34}$$

这样就求得第一振型。

又由于当 m 足够大时，$\boldsymbol{A}_{m-1}$ 与 $\boldsymbol{A}_m$ 已十分接近，即有

$$\frac{\lambda_1^{m-1}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m-1}}\eta_1\boldsymbol{\varphi}_1\approx\frac{\lambda_1^m}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}\eta_1\boldsymbol{\varphi}_1 \tag{9-35}$$

所以，由式(9-35)可得 $\lambda_1=\alpha_m$，由此即可求得第一频率 $\omega_1=\sqrt{\dfrac{1}{\alpha_m}}$。

根据上述推证和说明，可得求第一频率、振型的步骤为：

(1) 计算并形成体系的质量和柔度矩阵。

(2) 由柔度和质量矩阵生成体系的动力矩阵 $\boldsymbol{D}$。

(3) 假设第一振型的初始迭代向量 $\boldsymbol{A}_0$。

(4) 由 $\boldsymbol{A}_0$ 用 $\bar{\boldsymbol{A}}_1=\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_0$ 求迭代值并进行标准化(例如取第一个元素为

1)，得 α_1、$\boldsymbol{A}_1$。

(5) 用 $\boldsymbol{A}_1$ 代替 $\boldsymbol{A}_0$，重复(4)进行反复迭代，直到满足精度要求为止。

(6) 由 $\omega_1=\sqrt{1/\alpha_m}$ 计算第一频率，$\boldsymbol{A}_m$ 即为第一振型。

9-2-2 迭代法求高阶振型和频率

由迭代法上述推证可见，不管初始迭代向量如何选取，也不管迭代过程中是否出现过错误，当 m 足够大时，迭代结果总是收敛于第一振型。

但是，如果在所假设的初始迭代向量 $\boldsymbol{A}_0$ 中，不包含第一主振型，也即 $\eta_1=0$。那么经同样的推证，迭代结果一定收敛于第二主振型。同样，如果 $\eta_1=\eta_2=0$，那么结果将收敛于第三主振型。依此类推，要想求出体系的高阶振型、频率，就必须在所假设的振型迭代向量中把低阶主振型的分量消除。这个步骤称为**清型或滤型**。下面来介绍如何进行清型或滤型。

将任意设定的振型迭代向量按振型分解：

$$\boldsymbol{A}_0=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\boldsymbol{\varphi}_i \tag{9-28}$$

上式两边同时左乘 $\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}$，考虑到振型的正交性，则可得

$$\eta_i=\frac{\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_0}{M_i^*} \tag{9-36}$$

M_i^* 为第 i 振型广义质量。为了从 $\boldsymbol{A}_0$ 中滤掉第一主振型的分量，可设振型迭代向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_0^2&=\boldsymbol{A}_0-\eta_1\boldsymbol{\varphi}_1\\&=\boldsymbol{A}_0-\boldsymbol{\varphi}_1\frac{\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_0}{M_1^*}\\&=\left(\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{\varphi}_1\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}}{M_1^*}\right)\boldsymbol{A}_0\end{aligned} \tag{9-37}$$

$$\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{\varphi}_1\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}}{M_1^*} \tag{9-38}$$

$$\boldsymbol{A}_0^2=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A}_0 \tag{9-39}$$

式中，$\boldsymbol{Q}_1$ 称为**一阶滤型矩阵**。利用它左乘任一迭代向量 $\boldsymbol{A}_0$，即可在 $\boldsymbol{A}_0$ 中将一阶主振型滤掉。所以，如果取 $\boldsymbol{A}_0^2=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A}_0$ 作为初始迭代向量，则迭代的结果将收敛于第二主振型 $\boldsymbol{\varphi}_2$。

为了避免在迭代的过程中由于舍入误差而引入第一主振型的分量，必须在每次迭代前重复进行上述的滤型过程，以保证迭代过程能收敛于第二主振型。

实际上，我们可以把每次的迭代运算和滤型运算合并在一起。因为在求第一振型时，每次的迭代运算相当于前一次迭代得到的振型向量左乘动力矩阵 $\boldsymbol{D}$。现在求第二主振型时，还需要在每次迭代运算前再进行滤型运算，这相当于再左乘一阶滤型矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$。如果将这两个运算合并，则每次的迭代相当于左乘以下的矩阵：

$$\boldsymbol{D}^2 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{\varphi}_1 \boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}}{M_1^*}\right)$$

$$= \boldsymbol{D} - \frac{\lambda_1 \boldsymbol{\varphi}_1 \boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}}{M_1^*} \tag{9-40}$$

矩阵 $\boldsymbol{D}^2$ 就是经过滤型后的求第二主振型所需用的动力矩阵。

同理，求第三主振型时，每次迭代相当于左乘以下的动力矩阵

$$\boldsymbol{D}^3 = \boldsymbol{D}^2 - \frac{\lambda_2 \boldsymbol{\varphi}_2 \boldsymbol{\varphi}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}}{M_2^*} \tag{9-41}$$

一般来说，求 p 阶主振型时，其相应的动力矩阵为

$$\boldsymbol{D}^p = \boldsymbol{D}^{p-1} - \frac{\lambda_{p-1} \boldsymbol{\varphi}_{p-1} \boldsymbol{\varphi}_{p-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}}{M_{p-1}^*} \tag{9-42}$$

需要强调指出的是，迭代法（数学上也称为幂法）对求前几阶（3～5 阶）频率和振型是比较有效的，求更高阶的频率和振型时，一般收敛很慢。

用迭代法求高阶频率和振型的步骤以及迭代法的特点，留给读者自行归纳和研究。

9-2-3　迭代法算例

［**例题 9-3**］　试用迭代法求图 9-3 所示简支梁的第一频率和振型。

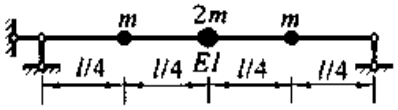


图 9-3　例题 9-3 图

解：在不考虑轴向变形条件下，体系有三个自由度。根据静力分析的位移计算可得体系的柔度矩阵和质量矩阵为

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{l^3}{768EI}\begin{pmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

由此可得体系的动力矩阵为

$$\boldsymbol{D} = \frac{ml^3}{768EI}\begin{pmatrix} 9 & 22 & 7 \\ 11 & 32 & 11 \\ 7 & 22 & 9 \end{pmatrix}$$

设振型初始迭代向量为 $\boldsymbol{A}_0 = (1 \quad 2 \quad 1)^{\mathrm{T}}$，则根据迭代步骤可得

$\bar{\boldsymbol{A}}_1 = ml^3/768EI(60 \quad 86 \quad 60)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_1 = 60ml^3/768EI$，

$\boldsymbol{A}_1 = (1 \quad 1.433 \quad 1)^{\mathrm{T}}$

$\bar{\boldsymbol{A}}_2 = ml^3/768EI(47.526 \quad 67.856 \quad 47.526)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = 47.526ml^3/768EI$，

$\boldsymbol{A}_2 = (1 \quad 1.4278 \quad 1)^{\mathrm{T}}$

$\bar{\boldsymbol{A}}_3 = ml^3/768EI(47.416 \quad 67.689 \quad 47.416)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3 = 47.416ml^3/768EI$，

$\boldsymbol{A}_3 = (1 \quad 1.4277 \quad 1)^{\mathrm{T}}$

由此得频率和振型为 $\omega_1 \approx \sqrt{\dfrac{768EI}{47.416ml^3}} = \sqrt{\dfrac{16.19EI}{ml^3}}$，$\boldsymbol{\varphi}_1 \approx (1 \quad 1.4277 \quad 1)^{\mathrm{T}}$。

有兴趣的读者可以在此基础上过滤掉第一振型，试求第二频率和振型。

*§9-3 瑞利-里兹法

对于 n 个自由度或无限个自由度体系，如果希望用能量法求结构最初几个频率的近似解，也可采用本节所介绍的方法。

9-3-1 瑞利比的特性

式(9-22)和式(9-27)所定义的瑞利比 $R(Y)$ 具有以下三个重要特性：

(1) 如果位移函数 $Y(x)$(或位移幅值向量 $\boldsymbol{Y}$)在第一主振型 $\varphi_1(x)$(或 $\boldsymbol{\varphi}_1$)附近变化，则当 $Y(x) = \varphi_1(x)$时，$R(\boldsymbol{Y})$为极小值。

(2) 如果位移函数 $Y(x)$(或位移幅值向量 $\boldsymbol{Y}$)在第 i 主振型$\varphi_i(x)$附近变化，则当 $Y(x) = \varphi_i(x)$(或 $\boldsymbol{\varphi}_i$)时，$R(\boldsymbol{Y})$为驻值。

(3) 在具有 n 个自由度的体系中，如果位移幅值向量 $\boldsymbol{Y}$ 在第 n 主振型 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 附近变化，则当 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}_n$ 时，$R(\boldsymbol{Y})$为极大值。

由瑞利比的以上特性可知，用能量法——瑞利法所求得的频率一定是第一频率的上限，是最高频率的下限。

上述特性可按如下说明来理解，当位移函数不是第一主振型时，为发生位移函数 $Y(x)$或位移幅值向量 $\boldsymbol{Y}$ 对应的振动，相当于在体系上施加了一定的位移限制，即增加了约束，结果使体系的刚度增加，因此近似解总是高于或等于第一频率。对 n 个自由度的体系，位移幅值向量 $\boldsymbol{Y}$ 在第 n 主振型 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 附近变化，相当于放松了对某些自由度按主振型 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 振动的约束限制，因此等于使系统变柔，所以近似解总是小于或等于最高频率。对于中间的一些振型，由于不可能确定使系统变刚还是变柔，因此瑞利比取驻值。

9-3-2　瑞利-里兹法

利用瑞利比在主振型附近的驻值特性，可导出一种求解结构频率、振型的方法，这种方法称为**瑞利-里兹法**(Rayleigh-Ritz method)。

以无限自由度问题为例，设近似振型(也即位移函数)可表示成基函数的广义坐标组合形式：

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\psi_i(x) \tag{9-23}$$

则如式(9-24)所示，瑞利比可表示成广义坐标 a_i 的函数，因此瑞利比的驻值条件为

$$\frac{\partial R}{\partial a_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{9-43}$$

将式(9-24)代入上式，可得

$$\frac{\partial R}{\partial a_i}=\frac{1}{B^2}\left(B\frac{\partial A}{\partial a_i}-A\frac{\partial B}{\partial a_i}\right)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{9-44a}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_i}-\frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial a_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{9-44b}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2=\frac{A}{B}\\&\frac{\partial A}{\partial a_i}=2\sum\sum_{j=1}^{n}a_j\int EI(x)\psi_i''(x)\psi_j''(x)\mathrm{d}x\\&\frac{\partial B}{\partial a_i}=2\sum\sum_{j=1}^{n}a_j\int m(x)\psi_i(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{9-45}$$

将上式代入式(9-44b)，则可得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum\int(EI\psi_i''\psi_j''-\omega^2 m\psi_i\psi_j)\mathrm{d}x\right)a_j=0 \tag{9-46}$$

令

$$\sum\int EI\psi_i''\psi_j''\mathrm{d}x=k_{ij} \tag{9-47a}$$

$$\sum\int m\psi_i\psi_j\mathrm{d}x=m_{ij} \tag{9-47b}$$

则可得

$$\sum_{j=1}^{n}(k_{ij}-\omega^2 m_{ij})a_j=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{9-48}$$

其展开形式为

$$\left.\begin{aligned}
&(k_{11}-\omega^2 m_{11})a_1+(k_{12}-\omega^2 m_{12})a_2+\cdots+(k_{1n}-\omega^2 m_{1n})a_n=0\\
&(k_{21}-\omega^2 m_{21})a_1+(k_{22}-\omega^2 m_{22})a_2+\cdots+(k_{2n}-\omega^2 m_{2n})a_n=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(k_{n1}-\omega^2 m_{n1})a_1+(k_{n2}-\omega^2 m_{n2})a_2+\cdots+(k_{nn}-\omega^2 m_{nn})a_n=0
\end{aligned}\right\} \tag{9-49}$$

式(9-49)是广义坐标 a_i 的线性齐次方程组，为获得 a_i 的非零解，其系数行列式应为零，

$$\begin{vmatrix}
k_{11}-\omega^2 m_{11} & k_{12}-\omega^2 m_{12} & \cdots & k_{1n}-\omega^2 m_{1n}\\
k_{21}-\omega^2 m_{21} & k_{22}-\omega^2 m_{22} & \cdots & k_{2n}-\omega^2 m_{2n}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\
k_{n1}-\omega^2 m_{n1} & k_{n2}-\omega^2 m_{n2} & \cdots & k_{nn}-\omega^2 m_{nn}
\end{vmatrix}=0 \tag{9-50}$$

这是关于 ω^2 的 n 次代数方程，由此即可求得体系最初的 n 个近似频率 ω_i^2 $(i=1,2,\cdots,n)$。

从上述说明可见，瑞利-里兹法实质上是将无限自由度问题，通过基函数化成广义多自由度问题来解决，是一种减少自由度从而减少计算工作量的方法。显然，所取的基函数越多，所求频率的精度越高，但工作量也越大。特别当基函数接近体系的振型时，瑞利-里兹法的效果就更好。如果从式(9-27)出发，则可将 n 自由度的体系化为 $s<n$ 个自由度问题，从而可求体系前 s 个频率。

9-3-3 瑞利-里兹法的步骤

无限自由度问题用瑞利-里兹法求前几阶频率、振型的步骤为：

(1) 选取满足位移边界条件的独立的基函数 $\psi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$。

(2) 用 $\sum\int EI\psi_i''\psi_j''\mathrm{d}x=k_{ij}$ 和 $\sum\int m\psi_i\psi_j\mathrm{d}x=m_{ij}$ $(1,2,\cdots,n)$计算"刚度"和"质量"系数。

(3) 列广义多自由度幅值方程 $\sum_{j=1}^{n}(k_{ij}-\omega^2 m_{ij})a_j=0(i=1,2,\cdots,n)$。

(4) 由广义坐标的系数行列式等于零，得频率方程 $|(k_{ij})_{n\times n}-\omega^2(m_{ij})_{n\times n}|=0$，由此可求解前几阶频率 ω_i。

(5) 将频率 ω_i 代回幅值方程，可求得对应于 ω_i 的一组广义坐标 a_i。

(6) 由 $\varphi_i(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^i\psi_j(x)$求与 ω_i 对应的振型。

对 n 个自由度的体系，建议读者仿此自行列出瑞利-里兹法的步骤。

* §9-4　子空间迭代法

本节所介绍的子空间迭代法，是一种既可以同时求得满足工程精度要求的前若干振型和频率，又使计算过程与初始选取的位移函数或振型无关的复杂结构计算机分析方法。这是目前复杂结构动力特性分析的常用算法之一。

9-4-1　子空间迭代法基本思路

能量法一般只适用于求解体系的基频；迭代法虽然可以求解高阶振型和频率，但每次只能求得一个振型和相应的频率，而且随着所求振型和频率阶次的升高，迭代次数迅速增加。瑞利－里兹法可以使自由度折减，用来求得前几个频率和振型。但是，其精度与所设的位移函数（基函数）和振型的接近程度相关性较大。

利用瑞利－里兹法使自由度得到折减，又用迭代法使振型逐步趋于精确解，将两种方法的优点结合起来，以期得到更好的结果，这就是子空间迭代法的基本思路。

9-4-2　多自由度瑞利－里兹法的矩阵表达式

对于 n 个自由度的体系，在设位移幅值向量 $\boldsymbol{Y}$ 可表示成 $s(s<n)$ 个满足位移边界条件的基向量 $\boldsymbol{\psi}_i$ 的线性组合时，瑞利比为

$$R(\boldsymbol{Y})=\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}}=\frac{A(\boldsymbol{a})}{B(\boldsymbol{a})} \tag{9-27}$$

应用瑞利比的驻值条件，有

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{a}}=\frac{1}{B^2}\left(B(\boldsymbol{a})\frac{\partial A(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}-A(\boldsymbol{a})\frac{\partial B(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right)=\boldsymbol{0} \tag{9-51}$$

因为

$$\frac{A(\boldsymbol{a})}{B(\boldsymbol{a})}=\omega^2,\quad \frac{\partial A(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}=2\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a},\quad \frac{\partial B(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}=2\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a} \tag{9-52}$$

将这些结果代入式(9－51)，则可得

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}-\omega^2\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \tag{9-53}$$

令

$$\boldsymbol{K}^{*}_{s\times s}=\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}\quad \boldsymbol{M}^{*}_{s\times s}=\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi} \tag{9-54}$$

分别称为**广义刚度矩阵**和**广义质量矩阵**，则式(9－53)为

$$(\boldsymbol{K}^{*}_{s\times s}-\omega^2\boldsymbol{M}^{*}_{s\times s})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \tag{9-55}$$

这样，由式(9-55)求解 ω^2 和 $\boldsymbol{a}$ 又归结为矩阵的特征值问题。但是，这里是 $s\times s$ 阶矩阵，而不是原来的 $n\times n$ 阶矩阵。由此可见，瑞利-里兹法起到了减少自由度的作用。

令式(9-55)的系数行列式为零，可求得 s 个特征值 $\omega_j^2(j=1,2,\cdots,s)$，可以作为原体系的前 s 个频率平方的近似值，相应地还可得到 s 个特征向量 $\boldsymbol{a}_j(j=1,2,\cdots,s)$。而体系的前 s 个振型可近似地表示为

$$\boldsymbol{Y}_j=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}_j\quad(j=1,2,\cdots,s)\tag{9-56}$$

需要指出的是，由于特征向量 $\boldsymbol{a}_j$ 对于广义质量矩阵和广义刚度矩阵是正交的，也即

$$\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{a}_j=0,\quad \boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{a}_j=0\quad(k\neq j)\tag{9-57}$$

又因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}_j&=\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{a}_j=0\\ \boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}_j&=\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{a}_j=0\end{aligned}\tag{9-58}$$

因此，由式(9-56)表示的体系前 s 个振型已经满足对体系的质量矩阵和刚度矩阵的正交性条件。

[**例题 9-4**] 试用瑞利-里兹法求图 9-4 所示三层刚架的的前两阶频率和振型。已知楼层抗弯刚度无限大，顶层质量 $m_1=180\times10^3$ kg，顶层抗侧移刚度 $k_1=98\times10^3$ kN/m。

解：这是三自由度体系，质量矩阵为

$$\boldsymbol{M}=180\times10^3\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&1.5&0\\0&0&1.5\end{Bmatrix}\ \mathrm{kg}$$

刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}=98\times10^3\begin{Bmatrix}1&-1&0\\-1&3&-2\\0&-2&4.5\end{Bmatrix}\mathrm{kN/m}$$

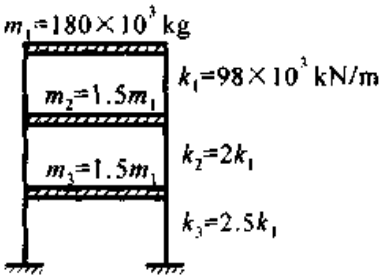


图 9-4 例题 9-4 图

设两个规格化“基向量”为

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3&2&1\\-2&3&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m}$$

则对于此基向量的广义质量和广义刚度矩阵为

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{M}^*=180\times10^3\begin{pmatrix}16.5&4.5\\4.5&19\end{pmatrix}\mathrm{kg\cdot m^2}$$

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{K}^*=98\times10^3\begin{pmatrix}5.5&1.5\\1.5&35.5\end{pmatrix}\mathrm{kN\cdot m}$$

引入记号 $\zeta=180\omega^2/98\times10^3\,\mathrm{s}^{-2}$，则频率方程为

$$\begin{vmatrix} 5.5 & -16.5\zeta & 1.5 & -4.5\zeta \\ 1.5 & -4.5\zeta & 35.5 & -19\zeta \end{vmatrix}=0 \quad 或 \quad 293.25\zeta^2-676.75\zeta+193=0$$

由此可解得 $\zeta_1=0.333\,333$，$\zeta_2=1.974\,425$。从而可得

$$\omega_1=13.472\ \mathrm{s}^{-1},\ \omega_2=32.787\mathrm{s}^{-1}$$

此体系由例题 8－4 所解得的频率为：$\omega_1=13.445\ \mathrm{s}^{-1}$，$\omega_2=30.123\ \mathrm{s}^{-1}$。

从瑞利－里兹法的振型方程$(\boldsymbol{K}^*-\omega^2\boldsymbol{M}^*)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，可求得

$$\boldsymbol{a}_1=(1\quad -0.000\,000\,051)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}_2=(1\quad -3.666\,652)^{\mathrm{T}}$$

由此可求得前两近似振型为

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_1=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}_1\approx(3\quad 2\quad 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_2=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{a}_2\approx(10.333\,304\quad -8.999\,956\quad -2.666\,652)^{\mathrm{T}}$$

以第一个元素等于 1 进行规格化，则可得

$$\boldsymbol{\varphi}_1\approx(1\quad 0.666\,667\quad 0.333\,333)^{\mathrm{T}}.$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2\approx(1\quad -0.870\,966\quad -0.258\,064)^{\mathrm{T}}$$

由例题 8－4 所解得的振型为

$$\boldsymbol{\varphi}_1\approx(1\quad 0.667\quad 0.333)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2\approx(1\quad -0.667\quad -0.667)^{\mathrm{T}}。$$

从本例结果可见，瑞利－里兹法所求得的第一频率和振型是相当精确的，但第二频率和振型就较差。

9－4－3　子空间迭代法

在自由度 n 很大的体系中，为了求前 s 阶频率和振型，可选取 s 个（一般 $s\ll n$）独立的标准化向量 $\boldsymbol{\psi}_j^0(j=1,2,\cdots,s)$，这 s 个向量是 $n\times1$ 阶的，由它所定义的空间称为原体系 n 个振型向量所构成空间中的一个子空间。设系统前 s 个振型向量所组成矩阵的零次近似值 $\boldsymbol{Y}_0$ 为

$$\boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{\psi}_{n\times s}^0 \tag{9-59a}$$

$$\boldsymbol{\psi}_{n\times s}^0=(\boldsymbol{\psi}_1^0\quad \boldsymbol{\psi}_2^0\quad \cdots\quad \boldsymbol{\psi}_s^0) \tag{9-59b}$$

对 $\boldsymbol{Y}_0$ 左乘体系的动力矩阵 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}$，进行第一次迭代可得

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}_0=\tilde{\boldsymbol{Y}}_1 \tag{9-60}$$

这里与普通迭代法的不同之处是，同时进行迭代的是 s 个 n 维向量。对于由第一次迭代得到的 $\tilde{\boldsymbol{Y}}_1$，将其按最大模为 1 进行标准化处理，其结果记为 $\hat{\boldsymbol{Y}}_1$。

由普通迭代法已经知道，在 $\boldsymbol{Y}_0$ 中不管 $\boldsymbol{\psi}_1^0$ 如何选择，反复迭代的结果它一定收敛于第一阶主振型；对于 $\boldsymbol{\psi}_2^0$ 如果选取时使它不含第一阶振型分量，

则反复迭代后，它一定收敛于第二阶主振型。同理，如果选取 $\boldsymbol{\psi}_j^0$ 时使它不含前面 $j-1$ 阶的主振型分量，则反复迭代后，它一定收敛于第 j 阶主振型，依此类推。但是，对初次选取的标准化向量 $\boldsymbol{\psi}_j^0$，不可能一开始就能做到这一点。因此，希望能在迭代过程中逐步达到不含前面 $j-1$ 阶的主振型分量这个目标。为此，对于由第一次迭代得到的 $\hat{\boldsymbol{Y}}_1$，现在不能直接用它去进行下一轮迭代，而要在进行下一轮迭代之前，先对它进行一次处理。

由迭代法可知，如果选取的任意一个 n 维位移向量，要使其收敛于第 i 阶振型，则必须利用振型的正交性滤掉其所含前面 $i-1$ 阶的主振型分量。因此，如果能设法构造出 s 个 n 维向量，使其在每次迭代之前关于体系的质量矩阵是相互正交的，则当迭代次数增加时，这 s 个 n 维向量便能够分别趋于体系的前 s 个不同的振型。为此，构造以下的位移向量，

$$\bar{\boldsymbol{Y}}_1 = \hat{\boldsymbol{Y}}_1 \boldsymbol{a}_1 \tag{9-61}$$

式中，$\boldsymbol{a}_1$ 为未知的参数向量，即广义坐标向量。

根据瑞利－里兹法，将式(9-61)代入式(9-27)的瑞利比，则由瑞利比的驻值条件可知，广义坐标向量 $\boldsymbol{a}_1$ 满足以下的条件：

$$(\boldsymbol{K}_1^* - \omega_1^2 \boldsymbol{M}_1^*)\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0} \tag{9-62}$$

其中，

$$\boldsymbol{K}_1^* = \hat{\boldsymbol{Y}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \hat{\boldsymbol{Y}}_1, \quad \boldsymbol{M}_1^* = \hat{\boldsymbol{Y}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \hat{\boldsymbol{Y}}$$

由式(9-62)可求得 s 个特征值 ω_{1j}^2 和特征向量 $\boldsymbol{a}_{1j}(j=1,2,\cdots,s)$。则由 $\hat{\boldsymbol{Y}}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_{1j}$ 可重新构造 s 个位移向量

$$\boldsymbol{\psi}_j^1 = \hat{\boldsymbol{Y}}_1 \boldsymbol{a}_{1j} \quad (j=1,2,\cdots,s) \tag{9-63}$$

由瑞利－兹法可知，$\boldsymbol{\psi}_j^1(j=1,2,\cdots,s)$ 对于体系的刚度矩阵和质量矩阵是正交的。因此，由这样处理后的位移向量 $\boldsymbol{\psi}_j^1$ 组成 $n \times s$ 阶矩阵：

$$\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{\psi}_{n\times s}^1 \tag{9-64a}$$

$$\boldsymbol{\psi}_{n\times s}^1 = (\boldsymbol{\psi}_1^1 \quad \boldsymbol{\psi}_2^1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\psi}_s^1) \tag{9-64b}$$

作为体系前 s 阶主振型矩阵 $\boldsymbol{Y}_{n\times s}^1$ 的第一次近似，比 $\boldsymbol{Y}_{n\times s}^0$ 已有了一定的改善。而 $\omega_{1j}^2(j=1,2,\cdots,s)$ 是体系前 s 阶频率平方的第一次近似。

重复以上的过程，用 $\boldsymbol{Y}_{n\times s}^1$ 进行第二次迭代，经过标准化后得 $\hat{\boldsymbol{Y}}_2$，再用瑞利－里兹法求得 ω_{2j}^2 和 $\boldsymbol{a}_{2j}(j=1,2,\cdots,s)$，从而可得到体系前 s 个主振型矩阵的第二次近似：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_j^2 &= \hat{\boldsymbol{Y}}_2 \boldsymbol{a}_{2j} \quad (j=1,2,\cdots,s) \\ \boldsymbol{Y}_2 &= \boldsymbol{\psi}_{n\times s}^2 \end{aligned}\right\} \tag{9-65a}$$

$$\boldsymbol{\psi}^2_{n\times s}=(\boldsymbol{\psi}^2_1 \quad \boldsymbol{\psi}^2_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\psi}^2_s) \tag{9-65b}$$

重复上述的迭代过程。可以算出第 i 次近似的 $\boldsymbol{Y}^i_{n\times s}$ 和 $\omega^2_{ij}(j=1,2,\cdots,s)$。当 $i\to\infty$ 时，则计算结果将收敛于体系的前 s 阶的主振型矩阵和特征值矩阵，即当 $i\to\infty$ 时有

$$\boldsymbol{Y}^i_{n\times s}=\boldsymbol{\varphi}_{n\times s},\quad \boldsymbol{\Omega}^2_i=\mathrm{diag}(\omega^2_{ij})=\boldsymbol{\omega}^2_{s\times s} \tag{9-66}$$

计算实践表明，用子空间迭代法，最低的几阶特征值和特征向量一般收敛很快。因此，为了加快收敛速度，如果需要计算前 s 阶振型，则通常选取 r 个($r>s$)位移向量，然后将迭代过程进行到前 s 阶振型满足所需要的精度为止。这样做会使每一次迭代的计算工作量增加一些，所以必须权衡得失。如何选取合理的附加位移向量个数，一般建议可以在 $r=2s$ 和 $r=s+8$ 的两个数中取其小者。

需要指出的是，在大型复杂结构的振动分析中，体系的自由度可以多达数百甚至于上千，但实际需要的主振型和其对应的频率往往只是最低的10—20阶。这时，用子空间迭代法非常适合，不但计算速度快，而且精度高，结果可靠。另外，当体系中的几个自振频率非常接近时，用一般的迭代法会出现迭代收敛速度很慢的情况，而子空间迭代法可以克服这一困难。因此，该方法被公认为是大型结构自振频率和主振型计算的最有效方法之一。

9-4-4　子空间迭代法算例

随书发行光盘上的 subspace.f90 程序即是按上述原理编制的子空间迭代程序，下面给出的例题就是利用此程序计算的。

[**例题 9-5**] 试求图 9-5 所示21层钢筋混凝土刚架前八阶的频率和振型。各层质量集中于楼层梁处，已知1～6层的质量为 75 156 kg，7层质量为 68 596 kg，8～13层的质量为 59 976 kg，14层为 59 383 kg，15～20层的质量为 55 909 kg，21层为 53 378 kg。

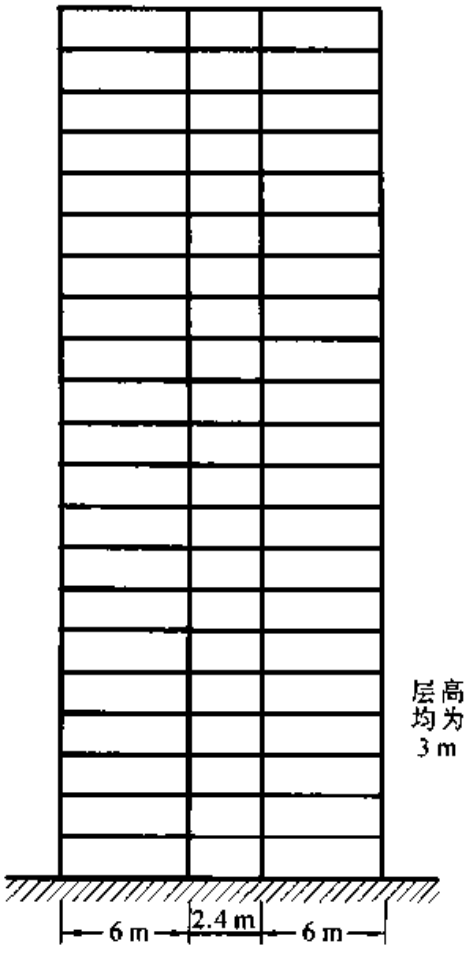


图 9-5　例题 9-5 图

不考虑杆件的轴向变形。1～7层的柱子截面为550mm×550mm，梁的截面为 550 mm×800 mm，8～14 层柱子截面为 500 mm×500 mm，梁的截面为 500 mm×700 mm，15～21 层柱子截面为 450 mm×450 mm，梁的截面为 450 mm×600 mm。钢筋混凝土的弹性模量为 30×10^6 MPa，跨度和层高如图所示。

解：本题用子空间迭代法手算是不可能的。随本书光盘上 subspace.exe 是按集中质量考虑的杆件模型动力有限元程序，经缩聚后有 21 个自由度，自下往上排列。根据程序要求输入一些控制数据后，即可利用此程序用子空间迭代法求得所需结果。因为要求前八阶频率和振型，为保证精度取 $s+8=16$。经过计算得

子空间迭代法所求得前八阶特征值(ω^2)分别为

0.5918E+2　0.1187E+3　0.3694E+3　0.7207E+3

0.1076E+4　0.1685E+4　0.2258E+4　0.3034E+4

所求得的对应特征向量分别为

0.0335	0.0751	0.1151	0.1523	0.1861	0.2161	0.2426
0.2796	0.3123	0.3358	0.3539	0.3613	0.3578	0.3436
0.3361	0.4976	0.6630	0.7966	0.8958	0.9635	1.000

-0.1507	-0.3353	-0.5065	-0.6560	-0.7786	-0.8708	-0.9319
-0.9876	-1.000	-0.9613	-0.8910	-0.7748	-0.6183	-0.4290
-0.1380	0.1153	0.3481	0.5534	0.7184	0.8352	0.8981

-0.2301	-0.4942	-0.7004	-0.8227	-0.8474	-0.7732	-0.6075
-0.2729	0.1280	0.5079	0.7984	0.9694	1.000	0.8852
0.5809	0.4432	0.2564	0.0126	-0.2378	-0.4416	-0.5579

0.1272	0.2598	0.3344	0.3332	0.2568	0.1228	-0.0409
-0.2650	-0.4368	-0.4887	-0.4062	-0.2114	0.0410	0.2836
0.5569	0.9327	0.9782	0.6276	0.0184	-0.6046	-1.000

0.3959	0.7666	0.8852	0.7094	0.2980	-0.2130	-0.6599
-1.000	-0.9776	-0.5652	0.0609	0.6616	0.9992	0.9360
0.3297	-0.3338	-0.7773	-0.7662	-0.3047	0.3378	0.7972

0.5353	0.9425	0.8738	0.3602	-0.3374	-0.8660	-0.9582
-0.4297	0.3900	0.9682	0.9324	0.3220	-0.4862	-1.000
-0.9036	-0.4962	0.2759	0.8060	0.6280	-0.1013	-0.7585

-0.2636	-0.4218	-0.2994	0.0236	0.3313	0.4185	0.2250
-0.2422	-0.5509	-0.4187	0.0541	0.4846	0.5292	0.1470
-0.5846	-1.000	-0.3278	0.7157	0.9456	0.1047	-0.8791

0.5668	0.7886	0.3216	-0.4284	-0.8028	-0.4738	0.2771
0.9744	0.7236	-0.2785	-0.9847	-0.6619	0.3520	1.000
0.4476	-0.5372	-0.7086	0.1495	0.7875	0.2834	-0.6558

§9-5 本章结论

● 对无阻尼体系，根据能量守恒，可用能量法求体系自振频率，一般用以求基频。当将运动质量的重量沿自由度方向作用，以其所产生的静位移作为第一振型的近似值时，按能量法计算可获得相当精确的结果。能量法结果是精确解的上限。

● 对频率稀疏型结构，用迭代法可方便地求得前几阶振型和频率。求第一振型时的动力矩阵为 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}$，不管初始假设的近似振型如何，也不管计算过程中是否有误，均能收敛与第一振型和频率。当要求频谱前几阶频率和振型时，得用考虑滤型的动力矩阵：$\boldsymbol{D}^{p}=\boldsymbol{D}^{p-1}-\dfrac{\lambda_{p-1}\boldsymbol{\varphi}_{p-1}\boldsymbol{\varphi}_{p-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}}{M_{p-1}^{*}}$

$(p=1,2,3,\cdots)$。

● 根据瑞利比的特性，可用瑞利－里兹法减少自由度的数目，其计算精

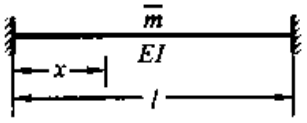
度取决于“基函数”和实际振型的接近程度。广义坐标越多工作量越大，精度越好。化为 s 个自由度时，前 $k<s$ 阶结果较好。

● 将瑞利－里兹法和迭代法的思想相结合，可用子空间迭代法进行计算机分析。这是大型结构计算机分析的有效方法之一。

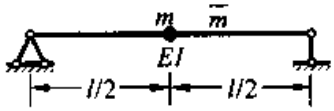
习　题

9－1　试用能量法求图示梁的第一频率。

9－2　试用能量法求图示梁的第一频率。



习题 9－1 图



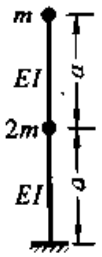
习题 9－2 图

9－3　试用瑞利－里兹法求题 9－1 梁的前两个自振频率。

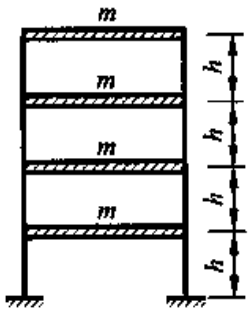
9－4　试用瑞利－里兹法求题 9－2 梁的前两个自振频率。

9－5　试用迭代法求图示体系的自振频率和振型。

9－6　试用迭代法求图示体系的前两个自振频率和振型。设各柱 EI 相同，质量不计，横梁刚度无穷大。



题 9－5 图



习题 9－6 图

9－7　试根据例题 9－5 所给的已知数据，用 sub space 程序自行计算频率和振型。建议改变梁、柱刚度，看刚度变化的影响。

第10章

结构地震响应分析及振动控制概述

减灾防灾研究的重要课题之一是如何减轻地震灾害，而结构的地震响应分析是抗震防灾、进行抗震设计的力学基础，因此必须熟练掌握这些力学基础。

§10-1 地震作用与地震作用理论概述

10-1-1 地震作用

在地震过程中，由于地面运动在结构中所产生的惯性力，称为**地震力**(earthquake force)或**地震作用**。

对于结构抗震设计来说，首先应该确定作用在结构上的荷载，即结构所受的地震力。由于地震力是结构所产生的惯性力，因此由前几章的动力学知识可知，地震力既和地震地面运动的规律有关，还和结构的动力特性有关。

地震时地面的运动规律是非常复杂的，它和结构寿命期内可能发生的地震震源机制，地震所释放的能量等级(即强度)、频谱特性和地震持续时间等特征、结构建造场地的地质条件等等因素有关。而结构本身又是一个十分复杂的力学系统，梁、板、柱等等结构部件的性能就有很大的变异性，将它们相互连接起来组成结构，在连接处的力学性能就更复杂了，加上结构和地基基础之间的相互作用难以搞清等，上述因素必然导致结构动力特性也是难以确定的。因此，对地震作用的研究，几十年来所经过的历程是艰难的。由于问题的复杂性，为了确定地震作用，必须对问题作出适当的简化。

地震地面运动是多维的，既有三个方向的移动，也有三个方向的转动。但经验表明，**地震的水平运动是导致结构破坏的主要因素**。因此，对于抗震

结构，就要求它必须具有一定的抗侧力的强度、刚度、延性和耗能能力。

在高烈度区地震的竖向运动影响也较为显著，根据国内外的地震记录统计，发现同一地震记录的竖向最大加速度与水平最大加速度的比值大约在0.42～0.67，一些地震记录甚至达到或超过水平最大加速度的值。因此，我国对高烈度区的一些大跨度结构、高耸悬臂结构和靠自重平衡的结构等，规定需要考虑竖向地震的作用。

10-1-2 地震作用理论

地震作用的理论是逐步发展的，到目前为止主要有以下几种：

● 静力理论

这一理论把结构理想化为一不变形的刚体如图10-1所示。因此其上各点加速度均为地面运动加速度，若以 W 表示结构某部分的重量，则此部分所受最大地震力为

$$F_P = \frac{W}{g}\ddot{y}_{g\max} = kW \tag{10-1}$$

式中，$\ddot{y}_{g\max}$ 为地震地面最大加速度；g 为重力加速度；$k = \ddot{y}_g/g$ 为地震系数。



图10-1 静力理论示意

这种理论是由日本地震学家大森房吉首先在20世纪初提出的，是最早的地震作用理论。因为它不考虑结构的振动，所以称为**静力理论**(statics theory)。应用这一理论计算地震力十分方便，但是由于完全不考虑结构的变形，即不考虑结构的动力特性，因此结果和实际差别较大。

● 定函数理论

这一理论认为地面运动可以用确定的函数表示，然后以它作为动荷载计算结构的地震作用(惯性力)。

这是前苏联扎夫里耶夫在批判大森房吉的静力理论时首先提出的，他认为地震地面运动可用余弦函数来描述，即地面位移为

$$y_g(t) = a\cos\theta t \tag{10-2}$$

扎夫里耶夫的这一理论，曾经是前苏联1951年颁发的《地震区建筑规范》中，地震作用计算的理论依据。它是一种**动力理论**(dynamics theory)，但是因为这一理论所假设的余弦地面位移变化规律和实际差别很大，因此结果当然不可能理想。

为修正扎夫里耶夫对地面运动描述的不合理性，前苏联的柯尔琴斯基提出地面运动可用若干个不同振幅、不同阻尼和不同频率的衰减正弦函数的和来表示，即

$$y_g(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\xi_i t}\sin\theta_i t \tag{10-3}$$

前苏联 1957 年颁发的《地震区建筑规范》中地震力计算方法，就是依此为根据的。这一地面运动描述相对扎夫里耶夫的要好，但地震地面运动是极复杂的，根本不可能用确定的函数来表达。因此随着研究的深入这一理论也被淘汰了。

● **反应谱理论**(response spectrum theory)

这是以单自由度体系在实际地震作用下的响应为基础，对线性结构的响应进行分析的一种理论。目前包括我国在内，许多国家的地震作用计算都采用这一理论。本章后面将展开说明，因此这里就不再赘述了。

● **直接动力分析理论**

近年来，由于电子计算机的发展和广泛应用，使得可以将实际地震加速度时程记录(简称地震记录 earthquake record)作为动荷载输入，进行结构的地震响应分析。这种分析方法称为**直接动力分析法**(direct dynamics analysis method)，也称为**时程分析法**(time-history analysis method)或**逐步积分法**(step by step integration method)。

与直接动力分析法相比，因为反应谱理论是将地震对结构的作用代换成一组当量静力作用，所以称反应谱理论的分析方法为**拟静力方法**。

我国最新国家标准《建筑抗震设计规范》规定，对于特别不规则结构、甲类建筑和 7 度、8 度地区Ⅰ、Ⅱ类场地高度超过 100 m 的高层建筑，以及 8 度地区Ⅲ、Ⅳ类场地高度超过 80 m 的高层建筑，9 度地区高度超过 60 m 的高层建筑，都应采用时程分析法进行补充计算。

对于非线性地震响应分析也要用直接动力分析法。随着计算机技术和应用软件的发展，这种方法将会得到更多的应用和发展。

此外，有用随机振动理论来分析结构地震响应统计特征的，有以地震时输入结构的能量进行设计，使结构所吸收的能量不致造成结构破坏的理论等。但是，这些方法还没有进入抗震设计规范，因此未被抗震设计使用。限于篇幅，本书不再赘述。

§10－2　单自由度体系的地震作用分析

为介绍反应谱理论，首先讨论作为其基础的单自由度体系在地震作用下的动力响应。

10-2-1 地震作用下结构的运动方程

受地震地面运动牵连的单自由度体系如图10-2所示，y 为质量相对地面的位移，$y_g(t)$为地面牵连位移。取质量 m 为隔离体，应注意的是，质量上的惯性力应该是质量乘绝对加速度(如图)，则用动静法可得体系运动方程为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_g \qquad (10-4)$$

显然，由式(10-4)可知，地震地面运动的激励相当于结构受 $F_P(t) = -m\ddot{y}_g(t)$的动荷载作用。

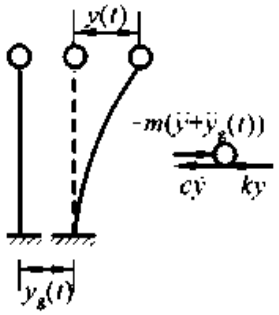


图 10-2 地震作用单自由度体系示意

基础激励(即地面运动)情况下多自由度体系的运动方程，可写成如下形式，请读者自行验证。

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}}_g = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{1}\ddot{y}_g(t) \qquad (10-5)$$

$$\boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{Y}} + \ddot{\boldsymbol{y}}_g))$$

$$= -\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{1}\ddot{y}_g(t))) \qquad (10-6)$$

式中，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{\delta}$ 分别为结构的质量、阻尼、刚度和柔度矩阵；

$\boldsymbol{Y}$、$\dot{\boldsymbol{Y}}$、$\ddot{\boldsymbol{Y}}$、$\ddot{\boldsymbol{y}}_g$ 分别为结构相对地面的位移、速度、加速度和地面运动加速度向量。$\boldsymbol{1}$ 是元素全为 1 的列向量。

式(10-5)是刚度法结果(刚度形式方程)，式(10-6)是柔度法结果(柔度形式方程)。

10-2-2 地震作用反应谱理论的基本假定

地震作用反应谱理论大体有如下三点假定：

● **结构物的地基为一刚性盘体，因此基础各点的运动完全一致，没有相位差。**地震波在地表的传播是很复杂的，地基是一变形体，在地震时结构基础处各点的运动是不同的。但是，对于一般建筑物，其长度远小于地震波的波长(它和场地介质的情况有关)，因此将建筑物的地基近似看作刚性盘体是可以的。显然，对于像大型水坝等很长的结构，本假定就不合理了。

● **结构处于线性弹性状态。**我国抗震规范规定，按规范设计的建筑"当遭受低于本地区抗震设防烈度的多遇地震影响时，一般不受损坏或不需修理仍可继续使用"，因此假设结构处于弹性工作阶段是合理的。必须说明，结构进入非弹性工作阶段时，反应谱理论已不再适用。

● **地震时的地面运动过程可以用地震记录来表示。**虽然记录地震时地面运动的地震仪对运动的高频和低频部分有失真，但分析表明，这种失真并不影响地震反应谱的主要区段。因此以地震仪的记录作为地面运动变化规

律，当然是无可非议的。

10-2-3　单自由度体系的地震作用分析

令地面激励的等效干扰力为

$$F_E(t) = -m\ddot{y}_g(t) \tag{10-7}$$

则式(10-4)与第 8 章单自由度运动方程完全一样。在所述假定下，由杜哈梅积分可得零初始条件下的地震响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F_E(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau \\ &= -\frac{1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{10-8}$$

式中，有阻尼的频率为 $\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$。

由于一般结构阻尼比很小，所以 $\omega \approx \omega_d$。由数学可得

$$I(t) = \int_0^t f(t,\tau)d\tau$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_0^t \frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t}d\tau + f(t,t)$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{\omega}{\omega_d}\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cos[\omega_d(t-\tau)+\alpha]d\tau \tag{10-9}$$

式中，$\alpha = \arctan(\xi/\sqrt{1-\xi^2})$。将式(10-8)和式(10-9)代入运动方程式(10-4)并考虑到 $\omega \approx \omega_d$，α 很小，则整理后可得

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \ddot{y}_g(t) &= -(2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y) \\ &= \frac{\omega^2}{\omega}\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)+2\alpha]d\tau \end{aligned} \tag{10-10a}$$

$$\approx \omega\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

$$\dot{y}(t) \approx -\frac{\omega}{\omega_d}\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\cos\omega_d(t-\tau)d\tau \tag{10-10b}$$

由式(10-10)可见，体系的地震作用为

$$\begin{aligned} F_P(t) &= -m[\ddot{y}(t) + \ddot{y}_g(t)] \\ &= -m\omega\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{10-11}$$

它是随时间变化的。但是，对于结构抗震设计来说，只需要用最大值，因此单自由度体系的地震作用公式为

$$F_P = m[\ddot{y}(t) + \ddot{y}_g(t)]_{max} = m\left|\omega\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau\right|_{max} \tag{10-12}$$

若记 $a_{\max}=[\ddot{y}(t)+\ddot{y}_g(t)]_{\max}=\left|\omega\int_0^t\ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|_{\max}$，

则式(10－12)可写成式(10－1)的形式：

$$F_P=ma_{\max}=\frac{W}{g}a_{\max}=\alpha W \tag{10-13}$$

必须注意的是，式(10－1)和式(10－13)仅仅形式上是一样的，而在概念上是完全不同的。式(10－1)中加速度是地面运动的最大加速度，和结构没有关系。而式(10－13)中的是绝对加速度最大值，其中相对加速度是体系的响应，它和体系的动力特性有关。

对结构抗震设计来说，一旦求得地震作用(地震力)F_P 后，即可在 F_P 作用下按静力分析进行结构的强度和刚度等验算。

本节对单自由度体系的地震作用原理作了分析，但尚未解决结构抗震设计中地震作用的实用计算方法。对此，需在下一节中讨论。

§10－3　地震反应谱

上一节式(10－8)至式(10－11)给出了单自由度体系的相对位移、相对速度、绝对加速度和地震作用的变化规律，它们都是时间的函数。为了获得它们的最大值，必须求出这些时间函数。但是，地面运动加速度的变化规律是十分复杂的(如图10－3所示)，不可能用一个简单的时间函数来表示。因此要想获得解析的积分结果是不可能的。虽然现在借助电子计算机，可以通过数值积分的方法获得体系的最大响应。不难想象，这样做对结构工程的抗震设计是很不方便的。为了解决工程设计的具体应用，下面来讨论有关地震反应谱的问题。

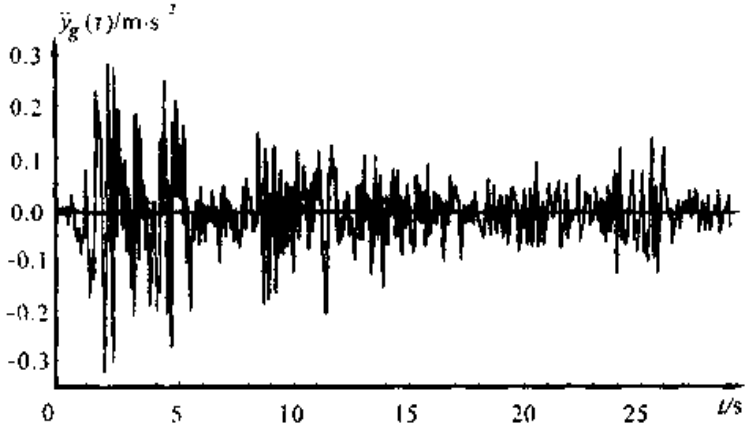


图10　3　Elcentro N－S地震记录示意

10-3-1　相对位移、相对速度和绝对加速度反应谱

由式(10-8)可知，体系相对位移最大响应 $y|_{max}$ 与自振频率 ω(或周期 T)、阻尼比 ξ 有关，也即

$$y|_{max}=\left|-\frac{1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{y}_g(t)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|_{max}=D(T,\xi) \tag{10-14}$$

如果给定阻尼比 $\xi=\xi_0$，则最大位移响应 $y\Big|_{max}^{\xi_0}$ 只是周期 T 的函数，即

$$y\Big|_{max}^{\xi_0}=\left|-\frac{1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{y}_g(t)\mathrm{e}^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|_{max}^{\xi_0}=D(T) \tag{10-15a}$$

对于给定的地震记录，式(10-15)所表示的曲线，称为该地震记录的相对位移反应谱，简称**位移反应谱**(displacement response spectrum)。由于 $\omega\approx\omega_d$，所以式(10-15a)可写为

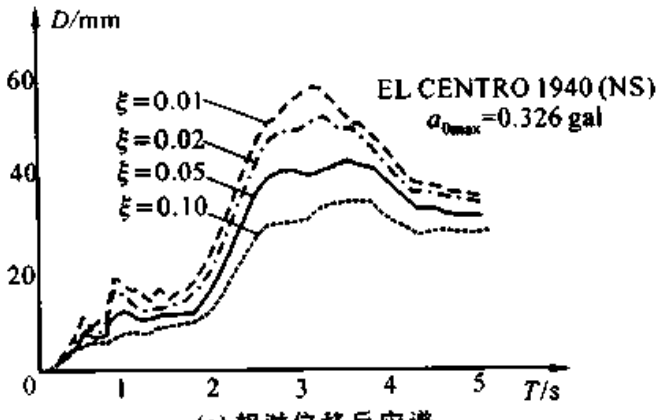
$$y\Big|_{max}^{\xi_0}\approx\left|\frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{y}_g(t)\mathrm{e}^{-\xi_0\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|_{max}=D(T) \tag{10-15b}$$

同理，由式(10-9)和式(10-10)可得**相对速度反应谱**(relative velocity response spectrum) $V(T)$ 和**绝对加速度反应谱**(absolute accelerate response spectrum) $A(T)$ 为

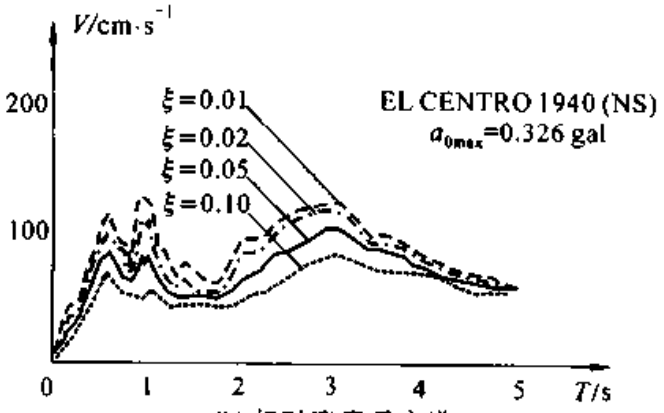
$$V(T)\approx\left|\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi_0\omega(t-\tau)}\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|_{max} \tag{10-16}$$

$$A(T)\approx\left|\omega\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi_0\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|_{max} \tag{10-17}$$

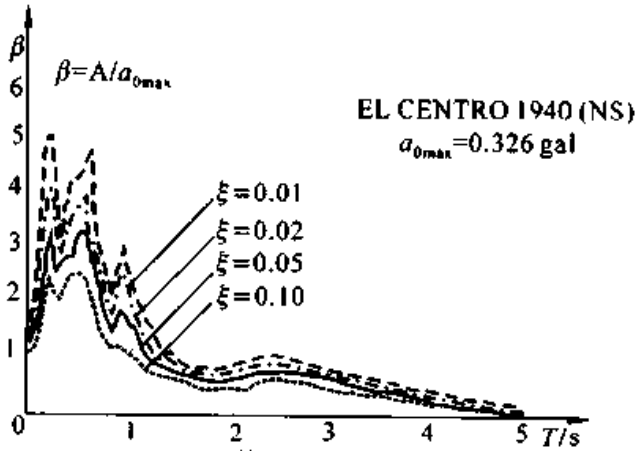
对图 10-3 所示的 Elcentro N-S 记录，利用上述公式可得图 10-4 所示的三种反应谱，其中 $\beta=A/\ddot{y}_{g\,max}$($a_{0\,max}=\ddot{y}_{g\,max}$)。



(a) 相对位移反应谱



(b) 相对速度反应谱



(c) 绝对加速度反应谱

图 10－4　Elcentro N－S 的三类反应谱

10－3－2　三种反应谱的关系

如果称下式所表达的关系为**准速度反应谱**，

$$\overline{V}(T)\approx\left|\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi_0\omega(t-\tau)}\sin\,\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|_{\max} \qquad (10-18)$$

则由式(10－15)、(10－17)和(10－18)可建立三者间的关系为

$$D(T)=\frac{1}{\omega}\overline{V}(T),\quad A(T)=\omega\,\overline{V}(T) \qquad (10-19)$$

如果记

$$B_1(t)=\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi_0\omega(t-\tau)}\cos\,\omega\tau\mathrm{d}\tau,\quad B_2(t)=\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi_0\omega(t-\tau)}\sin\,\omega\tau\mathrm{d}\tau \qquad (10-20)$$

则式(10－16)和式(10－18)可改写为

$$V(T)=|B_1(t)\cos\,\omega t+B_2(t)\sin\,\omega t|_{\max},\quad \overline{V}(T)=|B_1(t)\sin\,\omega t-B_2(t)\cos\,\omega t|_{\max} \qquad (10-21)$$

进一步引入记号，

$$S(t)=\sqrt{B_1^2(t)+B_2^2(t)},\quad \alpha=\arctan\frac{B_2(t)}{B_1(t)} \tag{10-22}$$

则式(10-21)改写为

$$V(T)=|S(t)\cos(\omega t-\alpha)|_{\max},\quad \overline{V}(T)=|S(t)\sin(\omega t-\alpha)|_{\max} \tag{10-23}$$

上两式有如下关系：

$$V(T)\approx\overline{V}(T) \tag{10-24}$$

$$D(T)\approx\frac{1}{\omega}V(T),\quad A(T)\approx\omega V(T) \tag{10-25}$$

由此可见，只要知道地震记录的某一反应谱，就可利用式(10-25)方便地求得另两个反应谱。

为说明式(10-24)的正确性，图 10-5 给出了 1965 年墨西哥城阿拉梅达公园记录的速度反应谱和准速度反应谱。由图可见，周期小于 3 s 时两条反应谱是很接近的。而由结构实测周期可知，绝大多数结构的基本周期都小于 3 s，因此认为式(10-24)成立是合适的。

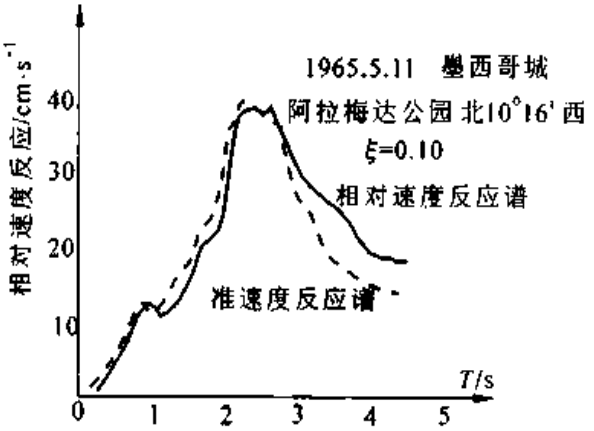


图 10-5　相对速度反应谱和准相对速度反应谱

10-3-3　地震反应谱的标准化

因为式(10-15)～(10-17)所示三类反应谱的计算公式中都含有 $\ddot{y}_g(t)$，因此反应谱是随地面运动规律的不同而变化的。从历史地震记录分析可知，同一地点不同次地震所测得的地面运动是不同的，同一次地震引起不同地点的地面运动也是不同的。更何况地震发生是随机的，从工程抗震设计角度考虑，不可能预知建设场地将来可能发生什么样的地震，因此要根据实际的地震反应谱进行设计是不可能的。

但是，由分析许多地震记录所算出来的反应谱得知，虽然每个地震加速度记录都不相同，可是所得反应谱却有共同的特征。这就有可能以大量地

震加速度记录所算得的反应谱为样本，得到统计意义下的**平均反应谱**（average response spectrum），以它作为抗震设计的依据。这个平均反应谱也称为**标准反应谱**（standard response spectrum）。图 10－6 和图 10－7 即为美国地震工程专家豪斯纳（C. W. Housner）所建立的平均速度和平均加速度反应谱。

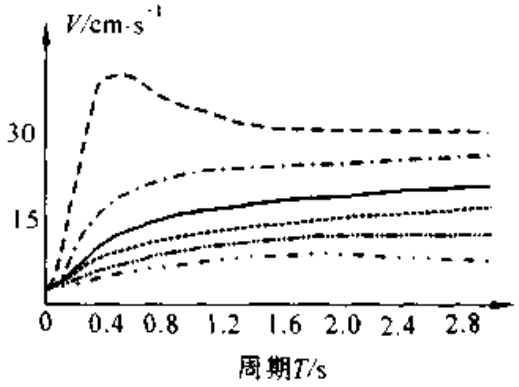


图 10－6　C. W. Housner 平均速度反应谱

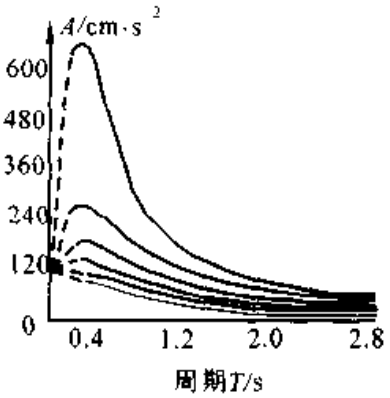


图 10－7　C. W. Housner 平均加速度反应谱

从图 10－6 和图 10－7 可看出如下规则：

● 阻尼对削减反应谱峰值有很大作用。当 $\xi=0$ 时反应谱峰值很突出，而阻尼比 $\xi=0.02$ 时即可使峰值削减很多。

● 速度反应谱在相当宽的频带或周期范围内，趋于水平线，也即接近于一个定值。

● 加速度反应谱当周期稍长时，显示出反应谱的值有与周期成反比例下降的趋势。

三种反应谱随周期变化的趋势，可用图 10－8 表示。下面讨论一下反应谱在极端情况下的值。

● **短周期情形**。当周期特短，极限情况 $T=0$ 时体系为一刚体，此时体系相对地面无任何位移，因此 $D(T)=V(T)=0$。而绝对加速度这时等于地面运动加速度，虽因加速度仪所记录的地震记录在短周期部分失真较大，

导致反应谱在此段有较大误差，但在极端情况下加速度反应谱 $A(T)=|\ddot{y}|_{max}$ 是确定无疑的。因此，在图 10－7 的短周期段用虚线表示。

● **长周期情形**。若体系的周期很长，则体系的刚度必很小。由第 8 章图 8－5 可知，当频率比($\beta=\theta/\omega$)很大时，放大系数趋于零，质量相当于空中一个定点，处于"静止"状态。所以体系质量相对于地面的位移近似等于地面位移，即 $D(T)=|y_g|_{max}$。由此出发，根据三种反应谱之间的关系，可知在长周期时速度反应谱 $V(T)\to\frac{2\pi}{T}|y_g|_{max}$，加速度反应谱为 $A(T)\to\frac{4\pi^2}{T^2}|y_g|_{max}$。

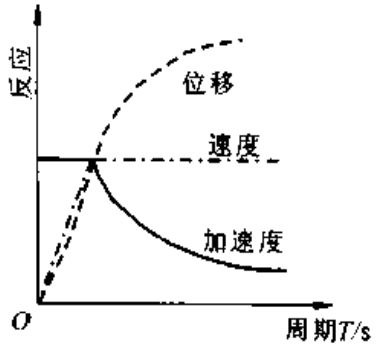


图 10－8　三种反应谱的变化趋势

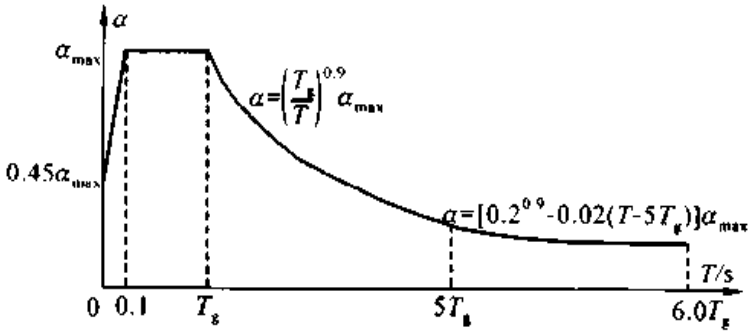


图 10－9　地震影响系数曲线

10－3－4　抗震设计反应谱

上一节由单自由度地震响应分析给出了

$$F_P=ma_{max}=\frac{W}{g}a_{max}=\alpha W \tag{10-13}$$

式中，最大加速度 a_{max} 和地震影响系数 α 分别为

$$a_{max}=[\ddot{y}(t)+\ddot{y}_g(t)]_{max}=\left|\omega\int_0^t\ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau\right|_{max}$$

$$\alpha=\frac{a_{max}}{g}$$

我国最新的《建筑抗震设计规范》给出了地震影响系数 α 与体系自振周

期T的关系曲线$\alpha(T)$,如图10-9所示。图中α_{max}为地震影响系数最大值;T_g为特征周期。表10-1给出了由地震设防烈度确定的α_{max}取值;表10-2给出了根据全国主要城镇的地震环境分区以及场地类别确定的特征周期取值。

表10-1 水平地震影响系数最大值(阻尼比0.05)

地震影响	6度	7度	8度	9度
多遇地震	0.04	0.08(0.12)	0.16(0.24)	0.32
罕遇地震	–	0.50(0.72)	0.90(1.20)	1.40

表10-2 地震环境分区的特征周期T_g/s

场地类别			
Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
0.20	0.30	0.40	0.65

表中场地类别是根据场地土类型和基岩上土层厚度来确定的,分为四类。结构所在地区的地震烈度,全国主要城镇的设计基本地震加速度取值和地震环境分区,是由国家规定的权限审批、颁发的文件(图件)来确定的,限于篇幅,这里不加赘述。

有了上述结果,利用式(10-13)即可得到质量上所作用的地震力,进而即可将地震力视作静力,进行强度和刚度等的验算。

§10-4 多自由度线性体系地震响应分析

在§10-2中,给出了受地面运动激励的多自由度体系运动方程(柔度形式可作转换)

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}=-\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)=-\boldsymbol{M}\boldsymbol{1}\ddot{y}_g(t) \tag{10-25}$$

式中符号如§10-2中的说明。

10-4-1 振型分解法解多自由度体系地震响应

对于线性体系,式(10-5)与第8章一样,可以用振型分解法求解。为此可设

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta} \tag{10-26}$$

式中,$\boldsymbol{\eta}$为广义坐标向量或称正则坐标向量;

$\boldsymbol{\Phi}$ 为各振型向量所组成的振型矩阵。

将式(10－26)代入式(10－5)可得

$$\boldsymbol{M\Phi\ddot{\eta}} + \boldsymbol{C\Phi\dot{\eta}} + \boldsymbol{K\Phi\eta} = -\boldsymbol{M\ddot{y}}_g(t) = -\boldsymbol{M}1\ddot{y}_g(t) \qquad (10-27)$$

对式(10－27)用 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}$ 左乘各项，在正交阻尼假设下，根据振型的正交性可得

$$M_i^*\ddot{\eta}_i + C_i^*\dot{\eta}_i + K_i^*\eta_i = -\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}1\ddot{y}_g(t) \qquad (10-28)$$

式中，M_i^*、C_i^*、K_i^* 分别为第 i 振型的广义质量、广义阻尼系数、广义刚度，$\boldsymbol{\varphi}_i$ 为第 i 振型的振型向量。

为改写上式，引入

$$\gamma_i = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}1}{M_i^*} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}1}{\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M\varphi}_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (10-29a)$$

对集中质量体系　$\gamma_i = \dfrac{\sum_j m_j\varphi_i(j)}{\sum_j m_j\varphi_i^2(j)}$　$(i=1,2,\cdots,n)$　(10－29b)

式中，γ_i 对每一振型都是常数，称为**振型参与系数**。$\varphi_i(j)$ 表示第 i 振型 j 自由度的量值。

有了上述结果，式(10－28)可改写为

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = -\gamma_i\ddot{y}_g(t) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (10-30)$$

此即与第 i 振型对应的单自由度方程。在零初始条件下，由杜哈梅积分可得上式的广义坐标解答为

$$\eta_i(t) = -\frac{\gamma_i}{\omega_{di}}\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_{di}(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \gamma_i\delta_i(t) \qquad (10-31)$$

式中，$\delta_i(t)$ 称为**第 i 振型广义位移**，当近似取 $\omega_{di}\approx\omega_i$ 时，

$$\delta_i(t) = -\frac{1}{\omega_i}\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (10-32)$$

将式(10－31)和式(10－32)代回式(10－26)，可得体系第 i 自由度的相对位移 $Y_i(t)$ 为

$$Y_i(t) = \sum_j \varphi_j(i)\eta_j(t) = \sum_j \gamma_j\varphi_j(i)\delta_j(t) \qquad (10-33a)$$

或以矩阵表示：

$$\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{\Phi\gamma\delta} \qquad (10-33b)$$

式(10－33)即为线性多自由度体系振型分解法求解的相对位移结果。这里应该指出的是，式(10－33)表示的质点位移，当 n 个自由度体系分解成 n 项叠加时，结果是精确的。而当只取前几项时，结果是近似的。

10－4－2　线性多自由度体系的地震作用——振型分解反应谱法

已知第 i 点的相对位移 $Y_i(t)$，求导数可得相对加速度 $\ddot{Y}_i(t)$，因此质点 i 的地震作用为

$$F_{Pi}(t)=m_i[\ddot{y}_g(t)+\ddot{Y}_i(t)]=m_i[\ddot{y}_g(t)+\sum_j\gamma_j\varphi_j(i)\ddot{\delta}_j(t)] \tag{10-34}$$

虽然式(10－34)中的第一项 $m_i\ddot{y}_g(t)$ 与结构本身的变形及动力特性毫无关系，但也可将它按振型进行分解，即

$$m_i\ddot{y}_g(t)=\sum_j b_j m_i\varphi_j(i)\ddot{y}_g(t)\quad 或\quad \boldsymbol{M1}=\sum_i b_i\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i \tag{a}$$

则用振型矩阵 Φ^{T} 左乘式(a)两边，利用振型的正交性即可证明

$$b_i=\frac{\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M1}}{M_i^*}=\frac{\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M1}}{\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i}=\gamma_i\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{b}$$

对集中质量体系

$$b_i=\frac{\sum_j m_j\varphi_i(j)}{\sum_j m_j\varphi_i^2(j)}=\gamma_i\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{c}$$

将式(b)或式(c)和式(a)一起代入式(10－34)可得

$$\begin{aligned}F_{Pi}(t)&=m_i[\ddot{y}_g(t)+\sum_j\gamma_j\varphi_j(i)\ddot{\delta}_j(t)]\\&=m_i\sum_j\gamma_j\varphi_j(i)[\ddot{y}_g(t)+\ddot{\delta}_j(t)]\\&=m_i\sum_j\gamma_j\varphi_j(i)a_j(t)\end{aligned} \tag{10-35}$$

式中，$a_j(t)=[\ddot{y}_g(t)+\ddot{\delta}_j(t)]$ 称为第 j 振型广义加速度响应函数。

与单自由度情形相同，引入第 j 振型地震影响函数 $\alpha_j(t)=a_j(t)/g$，则式(10－35)变为

$$\begin{aligned}F_{Pi}(t)&=m_i\sum_j\gamma_j\varphi_j(i)a_j(t)=W_i\sum_j\gamma_j\varphi_j(i)\frac{a_j(t)}{g}\\&=W_i\sum_j\gamma_j\varphi_j(i)\alpha_j(t)=\sum_j F_{Pij}(t)\end{aligned} \tag{10-36}$$

式中，$F_{Pij}(t)=W_i\gamma_j\varphi_j(i)\alpha_j(t)$ 为第 j 振型对应第 i 自由度的地震作用函数，而第 j 振型地震最大作用为

$$F_{Pij}=W_i\gamma_j\varphi_j(i)\alpha_j(T) \tag{10-37}$$

上式表明，第 j 振型第 i 自由度的地震最大作用，在求得结构的动力特性(振型、周期等)后，可方便地像单自由度问题一样，利用式(10－37)求得。$\alpha_j(T)$ 为第 j 振型地震影响系数。

10-4-3　关于振型组合问题

1. 地震内力计算问题

式(10-36)给出的地震作用响应函数是各振型地震作用函数的和，它是地震作用的一般性公式。但是，工程抗震设计中，要求结构的内力，并以最大内力作为设计依据。如果记第 j 振型地震作用响应函数所求得的第 j 振型内力响应函数为$S_j(t)$，结构杆件某 k 截面第 j 振型的内力响应函数为 $S_{kj}(t)$，则

$$S_{kj}(t)=\overline{S}_{kj}\alpha_j(t) \tag{10-38}$$

式中，$\overline{S}_{kj}$是将$\overline{F}_{Pij}=W_i\gamma_j\varphi_j(i)$(包括 $i=1,2,\cdots,n$ 的$\overline{F}_{Pij}$)作为静力作用时，所引起的结构该杆 k 截面的内力。由各振型 k 截面地震内力响应函数的线性叠加，即可得到 k 截面的地震内力响应函数。也即

$$S_k(t)=\sum_j \overline{S}_{kj}\alpha_j(t) \tag{10-39}$$

2. 振型组合问题

如果按式(10-39)计算最大地震内力，必须首先建立内力响应函数 $S_k(t)$，然后从中找出最大值，显然这是十分麻烦、不便于工程使用的。为了解决这一困难，可利用上一节的反应谱，由反应谱可求得每一振型地震影响响应函数 $\alpha_j(t)$的最大值 $\alpha_j(T)$。从而得到每一振型(例如第 j 振型)k 截面的最大地震内力

$$S_{kj\max}=\overline{S}_{kj}\alpha_j(T)=S_{kj} \tag{10-40}$$

每一振型(例如第 j 振型)k 截面的最大地震内力，因为 k 截面各振型的最大地震内力并不同时出现，将各振型 k 截面的最大地震内力相加起来作为k 截面的最大地震内力，所以会过于安全而偏于保守。这就产生了一个各振型最大地震内力应如何组合才能更符合实际的问题，在工程抗震学里这称为**振型组合问题**或**振型遇合问题**。

关于振型组合问题，各国学者和各国结构抗震设计规范曾提出一些不同的组合方案，主要有以下几种：

● **只考虑一个起主要作用的振型地震内力**。这时地震内力为

$$S_k=\overline{S}_{kj}\alpha_j(T)=S_{kj} \tag{10-41}$$

相应的第 i 个自由度的地震作用为

$$F_{Pi}=W_i\gamma_j\varphi_j(i)\alpha_j(T)=F_{Pij}\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{10-42}$$

对于比较刚性的结构，只考虑一个起主要作用的振型(一般为第一振型)是可以的。但对于柔性结构而言，前几个振型都起重要作用，只考虑一个振型是不合理的，是偏于不安全的。

● **各振型最大地震内力绝对值相加**。这时地震内力为

$$S_k = \sum_j |\overline{S}_{kj}\alpha_j(T)| = \sum_j |S_{kj}| \tag{10-43}$$

相应的第 i 个自由度的地震作用为

$$F_{Pi} = \sum_j W_i |\gamma_j\varphi_j(i)|\alpha_j(T) = \sum_j F_{Pij} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{10-44}$$

显然这种组合方案过于保守。

● **各振型最大地震内力乘以组合系数之后相加**。设第 j 振型组合系数为 $\mu_j(0<\mu_j<1)$，这时地震内力为

$$S_k = \sum_j \mu_j\overline{S}_{kj}\alpha_j(T) = \sum_j \mu_j S_{kj} \tag{10-45}$$

相应的第 i 个自由度的地震作用为

$$F_{Pi} = \sum_j W_i\mu_j\gamma_j\varphi_j(i)\alpha_j(T) = \sum_j \mu_j F_{Pij} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{10-46}$$

此方案需要对各类结构进行大量计算，然后统计出组合系数，因此使用不甚方便。

● **各振型地震内力平方和开平方的组合方法(SRSS 法)**这时地震内力为

$$S_k = \left(\sum_j S_{kj}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_j \overline{S}_{kj}^2\alpha_j^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10-47}$$

对于稀疏型频谱的结构，采用这种组合方案比较合适。

● **完全二次型组合方法(CQC 法)**这时地震内力为

$$S_k = \left(\sum_i\sum_j \rho_{ij}S_{ki}S_{kj}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10-48}$$

式中，耦连系数 ρ_{ij} 和 j 振型与 i 振型的自振周期比 λ 为

$$\rho_{ij} = \frac{0.02(1+\lambda)\lambda^{1.5}}{(1-\lambda^2)^2+0.01\lambda(1+\lambda)^2}, \quad \lambda = \frac{\omega_i}{\omega_j} \tag{10-49}$$

对于密集型频谱的结构，适合于采用这种组合方案，一般需取 9～15 个振型。因为这是一种非线性组合，因此组合以后的地震内力和地震作用不相对应。

式(10－47)和式(10－48)是根据地震时地面运动假定为平稳随机过程而得到的，其计算结果与用式(10－39)精确计算结果相差很小。因此，我国《建筑抗震设计规范》就是采用这两种组合方案的。

§10－5　结构对策的发展和结构振动控制的概念

结构振动控制是当前结构工程的高科技领域之一。从是否需要外界输入能量，可分为被动控制、主动控制和半主动控制，当然也可以是它们的混合应用。虽然结构振动控制概念提出时间不长，但发展非常迅速，特别是被动控制理论和实际应用已趋成熟，国家抗震设计规范中增加了隔震和消能减震一章。主动(半主动)控制根据外界输入、系统响应来确定所需输入能量，驱动作动器施加控制力(或改变控制装置的特性)来减小结构振动，这是一种智能对策，其效果当然更好。

作为结构振动控制入门，本节及以下两节将简单介绍被动控制和典型主动控制方法的基本概念，为进一步学习奠定基础。

10－5－1　结构对策的发展

从工程结构设计角度出发，结构对策的发展可分为：经验对策、分析对策、综合对策和控制对策四个发展阶段。

1．经验对策阶段

在古代，人们建造了许多工程结构，有些至今仍可称为伟大的工程结构。例如我国李冰父子组织兴建于秦朝(公元前 221 年到公元前 202 年)的四川灌县都江堰，以卵石竹笼堆砌成堤，分岷江为两道。隋朝(公元 581 到 618 年)大业年间，卓越匠师李春在河北赵县建造了一座跨度 37.02 m 的石拱桥(即著名的赵州桥)等工程，当时没有力学和结构设计理论，工程结构的建造都是凭借经验估计和判断，**属经验对策**(experience countermeasure)阶段。

2．分析对策阶段

18 世纪在英国开始的工业革命使生产技术迅速发展，到 19 世纪初，资本主义经济的发展，促使建筑、交通和水利等工程得到高速发展，从而提出和逐步发展了结构设计分析的一些理论，总的来说设计的方法和过程可表示为

$$S \leqslant R \tag{10-50}$$

式中，S 为结构构件的效应(内力、变形等)，R 为抗力。

这就是**分析设计对策**(analysis design countermeasure)阶段。

3．综合对策阶段

每一个结构工程师在满足式(10－50)的条件下可有各不相同的设计方

案，这些方案自然存在优劣之分，因此便产生了如何寻求最优设计方案，即结构优化设计问题。结构优化设计是本世纪50年代末开始研究并逐步发展应用于工程设计的方法。结构优化设计就是综合考虑各方面因素的设计对策，即**综合对策**(synthesis countermeasure)阶段。

4. 控制对策阶段

振动控制技术在航空、航海和机械工程中早就得到应用。但直到1972年美国普渡大学J.T.P.Yao教授提出结构控制的概念，才将控制理论和控制系统用于结构工程，使结构和控制系统共同抵御外界环境的作用，达到控制结构性态的目的，这就是结构设计的**控制对策**(control countermeasure)。它是一种积极主动的设计对策。

目前结构体型正向着高耸、大跨方向发展，所用材料向轻质高强方向发展，这就导致结构变形和振动等加大。采用控制对策，可以根据不同外界荷载变化和结构的响应自动调节控制作用，使结构性态满足安全性和功能性的要求。因此，研究结构振动控制具有重大的理论意义和实用价值。

10－5－2　结构振动控制的概念

在结构上施加控制系统，由结构和控制系统共同抵御外界动荷载的作用，达到减轻结构动力响应的目的，这就是结构振动控制，简称为**结构控制**(structural control)。

结构控制可分为**被动控制**(passive control)、**主动控制**(active control)、**半主动控制**(half－active control)和**混合控制**(hybrid control)四种，可用图10－10表示

● 被动控制和主动控制的区别在它不需要外部输入能量，因此也称无源控制。通过控制系统改变结构系统的动力特性，达到减轻动力响应的目的。

● 主动控制则需要通过外部输入能量提供“控制力”，控制过程依赖于外界激励和结构响应信息。

● 半主动控制基本上属于被动控制范畴。它利用结构响应或外界激励信息，通过输入少量能量以改变控制系统的性态，达到改变结构系统动力特性从而减轻响应的目的。

结构控制理论和技术，是结构工程的高科技领域，作为21世纪的工程技术人员，应该对其有所了解。

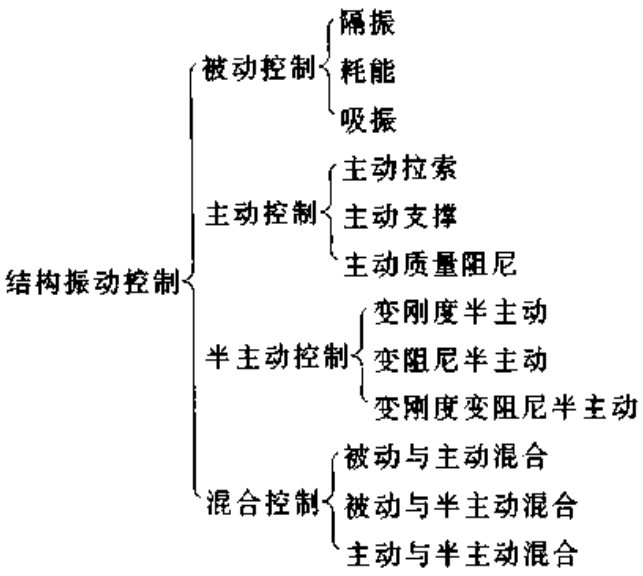


图 10－10　结构控制分类

§10－6　结构被动控制概述

结构被动控制是一种无源控制方法，包含隔震、吸振和耗能三大控制形式，其理论研究和工程实践经验都趋于成熟，隔震和消能减震已被列入抗震规范，其内容非常丰富，这里仅简要介绍一些有关的基本知识。

10－6－1　基底隔震

基底隔震主要用于低矮的刚性结构的抗震。它的基本思路是，在结构和基础之间设置一隔离层，使地面运动（或震动源）的能量尽可能多耗散在隔震层上，从而使结构所吸收的能量大为减少，以保证结构安全工作。

基底隔震方法很多，下面是若干工程中常用的方法：

● **沙粒隔震层。**在结构和地基之间铺一层均匀的一定粒径的沙粒，使结构和地基隔离，当发生地震时只通过摩擦传送能量，使振动减少。这种方法简单、便宜，但只适用于低矮、小型结构，结构和地基之间的位移不好控制。除沙粒外，还可用滚珠、滚轴等进行隔离，这些统称为滑移隔震。

● **橡胶垫或粘滞阻尼材料隔震装置。**叠合橡胶垫隔震支座是目前使用最多的隔震装置。它有图 10－11 所示的几种常用做法：图 10－11a 所示为橡胶硫化在钢板上叠合而成的橡胶垫支座，图 10－11b 为具有铅芯的叠合橡胶垫支座。图 10－11c 为以粘弹性阻尼材料代替橡胶制作的隔震支座示意。这类支座可以在工厂制造，震害和试验都表明它有很好的隔震效果。但是，

它的抗侧移刚度较小，地震时仍将导致结构和地基间产生较大的位移，为此还得专门设计限位装置，而且一旦位移后也难复位。此外橡胶存在老化、粘弹性阻尼材料存在受外界环境影响等有待改善的问题。

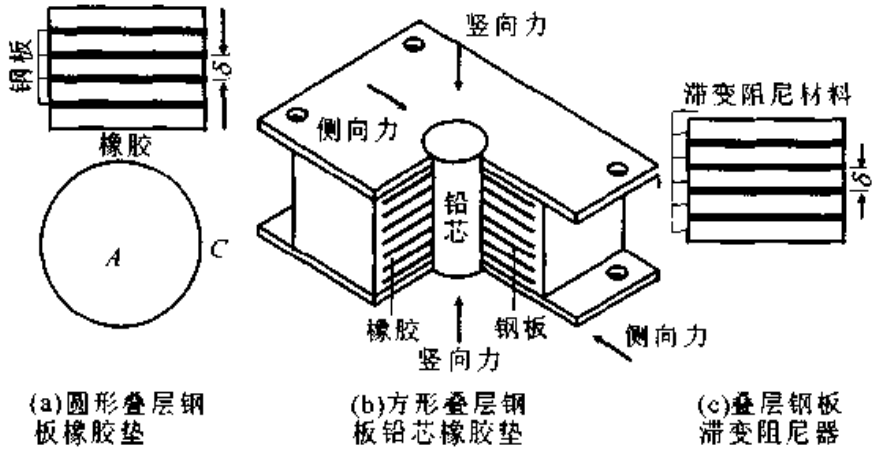


图 10－11　橡胶垫和粘滞阻尼材料隔震支座

● **"短柱"隔震支座**　图 10－12 为钢筋混凝土短柱支座示意图，其中短柱部分有多种方案：一种是普通钢筋混凝土柱，另一种为悬臂压弯钢柱，还有一种为悬臂钢管混凝土柱。不同方案具体构造有所不同，限于篇幅，不一一说明了。相对橡胶垫等隔震支座，短柱支座具有刚度大、可在施工现场用普通材料制作、在结构使用期内不用维护更换等优点。俄罗斯等国建造的短柱隔震支座建筑经受了地震的考验，大量实验分析结果也表明这种支撑装置具有很好的隔震性能。

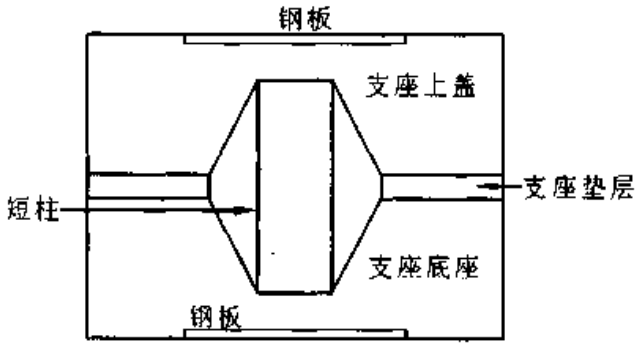


图 10－12　"短柱"隔振支座

当采用基底隔震措施后，以剪切型串联多自由度体系为例，n 自由度的结构体系由于增加了隔震层将变为 $n+1$ 自由度系统，图 10－13a 所示计算简图变为图 10－13b 所示计算简图，其运动方程为

$$\begin{bmatrix} m_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_0 \\ \ddot{\boldsymbol{Y}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 + c_1 & \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{\boldsymbol{Y}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & \boldsymbol{K}_1 \\ \boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ \boldsymbol{Y} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{1} \end{Bmatrix} \ddot{y}_g(t) \tag{10-51}$$

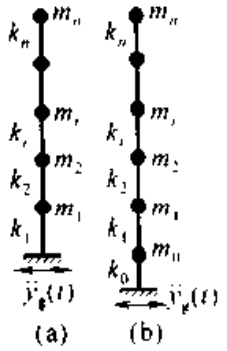


图 10－13　计算简图

式中，m_0, c_0, k_0 分别为基底隔震层的质量、粘阻系数和侧移刚度。$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}$ 分别为原体系的质量、阻尼和刚度矩阵。$\boldsymbol{C}_1 = (-c_1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$，$\boldsymbol{K}_1 = (-k_1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$。

由式(10－51)出发，可讨论隔震支座的设计和系统的隔震性能。图 10－14 为日本 Oiles 技术中心加隔震装置后测得的加速度情况，从图可见基底隔震效果非常好，一般能使地震作用减少将近一半。

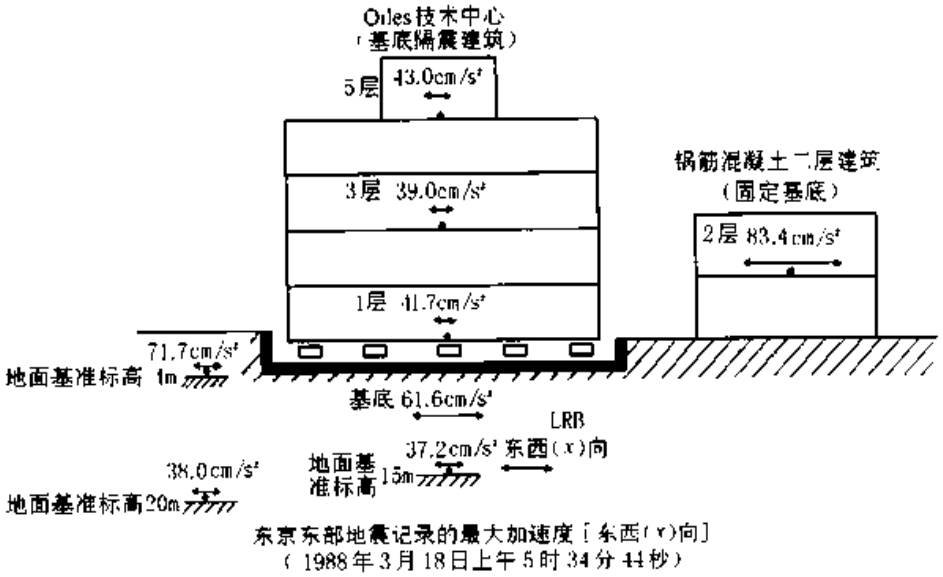


图 10－14　日本 Oiles 技术中心实测隔震支座效果

10－6－2　耗能装置

耗能器的作用象装于门上使关门速度减慢的减速器。由于装置具有耗能机制，它将使结构在外界干扰(风荷载和地震荷载等)下的响应减小。为增加能量耗散能力，除合理设计耗能器外，还应将耗能器安装于结构中相对位移较大的两点之间。耗能器的种类很多，不可能一一介绍，下面仅介绍三类典型的耗能装置。

● **铅挤压耗能器**(lead compression dissipater)。铅是一种结晶金属，发生塑性变形时晶格被拉长或错动，一部分能量将转换成热量，另一部分能量为促使再结晶而消耗，使铅回到非变形的弹性状态，其机理如图 10－15 示意。结晶过程在常温下进行，耗时短且无疲劳现象，因此具有稳定的耗能能力。铅挤压耗能器的典型构造如图 10－16 所示。

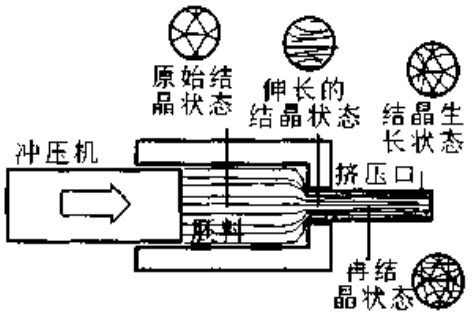


图 10－15　铅挤压耗能机理

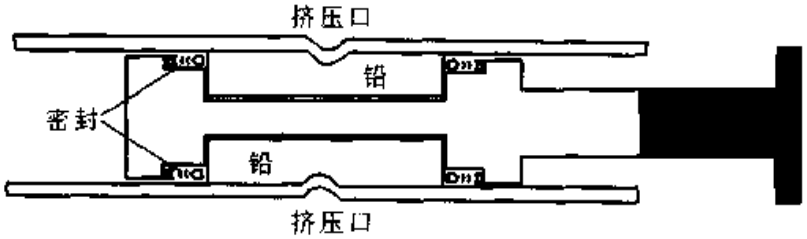


图 10－16　收缩管型铅挤压阻尼器纵截面

利用铅的上述优良特性，也可用作基础隔震(具有铅芯的叠合橡胶垫支座)中的阻尼器部件。在新西兰、日本等国已得到应用。除铅挤压耗能器外，还有软钢、记忆合金耗能器等。

● **摩擦耗能支撑**(friction－damped braced frame)。摩擦耗能器是一种可产生滑动的机构。设计时使其在小震时不产生滑动，当经受强风和罕遇地震时，以保证主要受力构件不屈服而机构产生滑动为目标设计、布置摩擦耗能器，达到减小振动的目的。由循环荷载下装置的实验研究可知，摩擦耗能支撑具有滞回曲线呈矩形、耗能能力强、效果稳定等特点。其典型装置如图 10－17 所示，其滞回曲线如图 10－18a、b 所示。将耗能器装在支撑上，即成为摩擦耗能支撑，我国抗震设计规范已将此列入消能减震的条文。

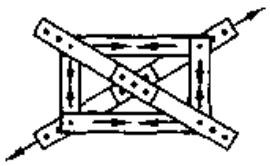


图 10－17　典型摩擦耗能器

● **粘弹性耗能器**(viscoelastic dissipater)。在材料力学中已介绍过，粘弹性材料兼具弹性和粘性，在一定的变形范围内，由弹性可回到原始状态。另一方面，它具有一定的抗剪能力，但不像弹性材料因变形储存应变能，而是将其转换成热能耗散掉。试验结构表明，用非常薄的薄层粘弹性材料做

成的阻尼器，具有良好的耗能能力。其典型粘弹性阻尼器构造与摩擦耗能器相似，其典型滞回曲线如图 10－18c 所示。在美国已有若干高层结构安装了这种耗能装置。

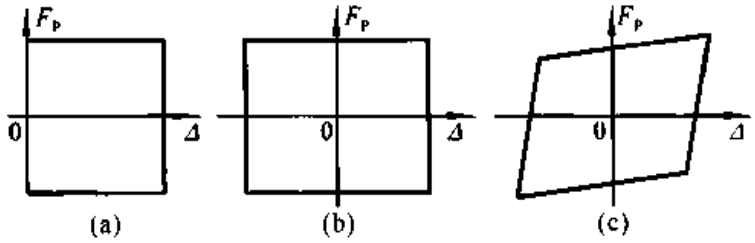


图 10－18　典型摩擦、粘弹性耗能器滞回曲线示意

在结构上安装耗能装置之后，耗能装置将使结构的刚度、阻尼发生改变，以结构的地震响应为例，装有耗能装置的结构运动方程（一般均不考虑耗能器装置对质量的改变）为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}_d)\dot{\boldsymbol{Y}} + (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}_d)\boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{1}\ddot{y}_g(t) \qquad (10-52)$$

式中，$\boldsymbol{C}_d$，$\boldsymbol{K}_d$ 分别为耗能器所附加的阻尼和刚度矩阵。由此出发可讨论耗能器的设计和效果等问题。

10－6－3　利用吸振原理设计的减震装置

为了说明这类减震装置，首先回顾吸振器原理。

● **吸振器原理**

图 10－19 所示剪切型两自由度体系，其稳态振动响应为

$$A_1 = \frac{(k_2 - \theta^2 m_2)F_P}{D_0};\ A_2 = \frac{k_2 F_P}{D_0}$$

$$D_0 = (k_1 + k_2 - \theta^2 m_1)(k_2 - \theta^2 m_2) - k_2^2$$

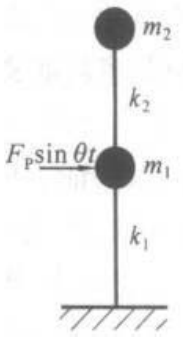


图 10－19　吸振原理

由此可见，如果 $k_2 - \theta^2 m_2 = 0$，则主结构质点 m_1 的位移为零，吸振器质量 m_2 的位移幅值为

$$A_2 = -\frac{F_P}{k_2}$$

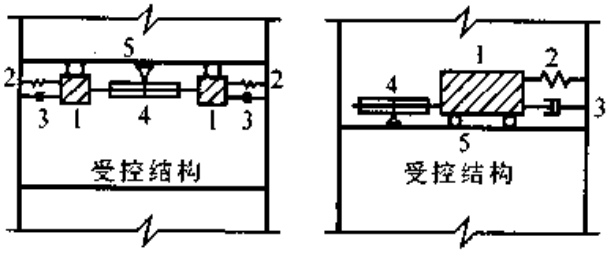
也就是说，经合理设计（使附加装置的频率等于或接近干扰力的频率），在主结构上安装“吸振器”后，可使主结构的振动减少，从而保证主结构安全。这就是吸振器原理。

● **调频质量阻尼器**（tuned mass damper 简称 TMD）。根据主结构的各

种形式，可有多种 TMD 形式，一般分为悬吊式和支撑式两类如图 10－20 所示。

不管哪种 TMD，其主要部件均为质量块、弹簧和阻尼系统、质量块支撑系统。

(1) 质量块



(a) 悬吊式　　(b) 支撑式

图 10－20　两类 TMD

TMD 利用质量块与结构的相对运动加速度(以惯性力抵消部分地震作用)来达到减震的目的。实际工程中可利用建筑物水箱、混凝土块、装铅钢箱或环绕结构的装铅钢圈等等作为质量块。

一般来说，质量块越大，减震效果越好。但实际工程中 TMD 大小有一定限制，TMD 质量和主结构质量之比在 0.005 到 0.02 之间。

(2) 弹簧系统

弹簧系统的作用是调整 TMD 的自身频率，使之与结构被控制自振频率接近，以达到较好的控制效果。一般来说，对高层结构可将质量块沿结构的纵、横方向安装，对高耸结构应四周都安装。

(3) 阻尼系统

它的作用是为 TMD 提供阻尼，改善 TMD 的减震效果。设计它的依据是既使结构振动减小，又使质量块的运动能控制在一定范围内。当采用油压阻尼器时，可通过设计活塞面积和油的粘度来调节阻尼值。

(4) 支撑系统

悬吊式支撑系统为悬吊的挂钩，挂钩和质量块间摩擦很小，一般不需要附加设备来保证质量块运动的灵敏度。

对支撑式来说，必须使质量块和结构间的摩擦尽可能小，这将大大增加支撑系统的复杂性。

在我国、美国、日本和澳大利亚等国，已将 TMD 应用于实际工程，取得了良好的减震效果。

● **调频液体阻尼器**(tuned liquid damper)。这种控制装置在航天和航海

中早有应用，但是在结构工程中的应用是 1987 年提出的，其减震原理如图 10－21 所示。日本等国家已将液体调频阻尼器用于实际工程。

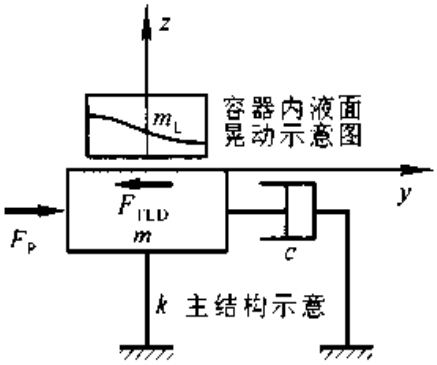


图 10－21　调频液体阻尼器减震原理

这种装置有如下优点：

(1) 经济。由于可利用建筑物水箱，因此基本不增加或很少增加土建费用。

(2) 简单易行。只要将盛液容器置于结构上即可。

(3) 适合于短期和长期使用。

(4) 维护方便。

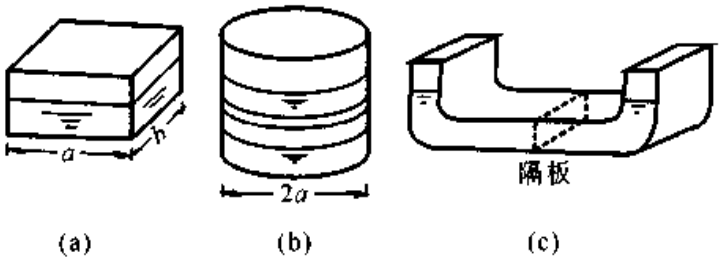


图 10－22　调频液体阻尼器常见形式

调频液体阻尼器按容器外形又分为矩形、圆柱形和 U 型三类，如图 10－22 所示。其减震效果取决于容器中液体的晃动程度、液体的粘滞度、容器内壁的粗糙度和液体的质量大小。

它通过液体的惯性力和液体晃动所产生作用于容器壁的动压力差来提供控制力，从而达到减震效果。

*§10-7 结构主动控制概述

被动控制虽然简单、便宜,设计好了效果也不错。但半主动和主动控制是根据外界激励和结构响应预估所需的控制力,从而调节控制器性能参数,或由输入能量驱使作动器施加控制力,以便达到减震的效果。显然这是积极主动的智能化措施,因而它的控制性能当然比被动控制要好。

10-7-1 主动控制系统的构成和分类

主动控制根据**控制规律**(简称**控制律** control rule)是否依赖结构响应或外界激励可分为:**闭环控制**(close-loop control)、**开环控制**(open-loop control)和**开闭环控制**(open-close-loop control)。目前研究和工程应用较多的是闭环控制。三类控制可用图 10-23 的不同框表示。

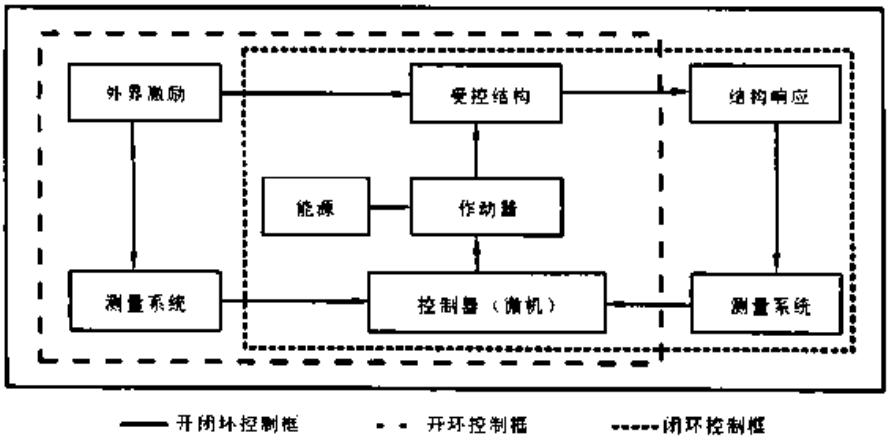


图 10-23 结构主动控制系统框图

根据控制器的不同,主动控制又有**主动调频质量阻尼器**(active mass damper 简称为 AMD)和**主动拉索**(active tendon)等。限于篇幅,这里仅简单介绍闭环控制的 AMD 系统。

10-7-2 AMD 受控系统运动方程与状态方程

典型支撑式 AMD 系统如图 10-24 所示。图中 1 为受微机和伺服系统控制的作动器,2 为质量块,其质量为 m_T,3 为 AMD 的弹簧系统,弹簧刚度为 k_T,4 为 AMD 的阻尼系统,粘阻系数为 c_T,作动器作用于质量块的力为 $F_P(t)$,主结构所受到的 AMD 系统的控制力为 $F_U(t)$。

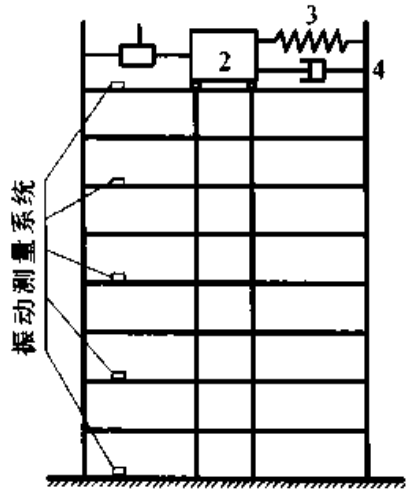


图 10－24　AMD 示意图

由每个 AMD 质量块 m_T 的"动平衡"可得运动方程为

$$m_T\ddot{y}_T + c_T\dot{y}_T + k_T y_T = F_P(t) \tag{10-53}$$

结构在每个 AMD 装置处所受到的控制力 $F_U(t)$和作动器出力 $F_P(t)$间的关系为

$$F_U(t) = k_T y_T + c_T\dot{y}_T - F_P(t) \tag{10-54}$$

对于受地震激励的主结构来说，其运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{1}\ddot{y}_g(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}_U(t) \tag{10-55}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 为 $n \times r$ 阶的控制力位置矩阵，元素由 0 和 1 组成。$\boldsymbol{F}_U(t)$为 r 阶控制力向量(图示系统为仅一层施加控制力的情形，所以 $F_U(t) = F_U(t)$)。引入以下记号

$$\boldsymbol{Z} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \dot{\boldsymbol{Y}} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} \end{bmatrix}; \tag{10-56a}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{D} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(t) = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{1}\ddot{y}_g(t) \tag{10-56b}$$

式中，$\boldsymbol{Z}$ 称为**状态向量**(state vector)。则式(10－55)可改写为

$$\dot{\boldsymbol{Z}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_U(t) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{F}(t) \tag{10-57}$$

式(10－57)在现代控制论中称为**状态方程**(state equation)，它是主动控制研究的基本方程。

10－7－3　主动控制常用控制算法简要说明

结构主动控制的研究以各种控制算法为主线，近 20 多年来已提出的算法有：经典线性最优控制、线性瞬时最优控制、极点配置控制、界限状态控

制、预测控制、自适应控制、非线性瞬时最优控制、随机最优控制和模糊控制，等等。

对于主动控制的优化理论来说，控制系统的效益由下面性能指标衡量：

● 从系统的安全性考虑，评价系统应包含结构响应的协方差，它可表为

$$E\left[\int_0^{t_f} \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}\mathrm{d}t\right] \tag{a}$$

式中 t_f 为动荷载的持续时间，$\boldsymbol{Q}$ 为权矩阵，可根据其元素对安全性的重要性来进行调整。考虑到 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_Y\boldsymbol{Y}$ 和 $\dot{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\dot{Y}}\dot{\boldsymbol{Y}}$ 的物理意义反映的是主结构势能和动能，因此也可从能量角度来确定权矩阵。例如取 $\boldsymbol{Q}_Y = k_y\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{Q}_Y = k_y\boldsymbol{C}$ 等，式中 k_y、$k_{\dot{y}}$ 为待定参数。

● 从系统的经济性考虑，评价系统应包含反映系统所接受能量的指标，它可表为

$$E\left[\int_0^{t_f} \boldsymbol{F}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}_{\mathrm{U}}\mathrm{d}t\right] \tag{b}$$

$\boldsymbol{R}$ 也为权矩阵，其元素根据对控制力的重要性来调整。

● 上述两方面要同时达到最小是不可能的，要使响应达到最小就得加较大的控制力，而要使控制力最小，结构的响应就会变大。为了达到协调，目前通常应用如下的性能指标

$$J = E\left[\int_0^{t_f} [\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}_{\mathrm{U}}]\mathrm{d}t\right] \tag{10－58}$$

● 对于线性最优控制，其最优评价函数表示成

$$J = \int_0^{t_f} [\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}_{\mathrm{U}}]\mathrm{d}t \tag{10－59}$$

● 对于线性瞬时最优控制，其最优评价函数表示成

$$J = \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}_{\mathrm{U}} \tag{10－60}$$

● 从性能指标 J 出发，在满足式(10－57)条件下寻求其最小。利用 Lagrange 乘子将式(10－57)吸收到最优评价函数中，再令其一阶变分为零，可推得控制力规律，从而设计控制系统和实现振动控制。具体推导超出了本书范围，因此不再介绍。

10－7－4 主动控制试验

AMD 控制实验是美国纽约布法罗大学首先实现的，在我国由哈尔滨建筑大学刘季教授主持，继布法罗大学之后已成功地进行了一系列主动和半主动理论和试验研究。

图 10－25 为哈尔滨建筑大学进行主动控制试验 AMD 装置示意。试验

模型为 1/3 的五层钢框架，AMD 系统安装在结构顶层。试验在哈尔滨建筑大学力学－结构试验中心 3 m×4 m 模拟振动台上进行。图 10－26 为主动控制支撑式模型结构第一层的位移时程曲线，由此可见 AMD 系统可大大减小结构的响应。

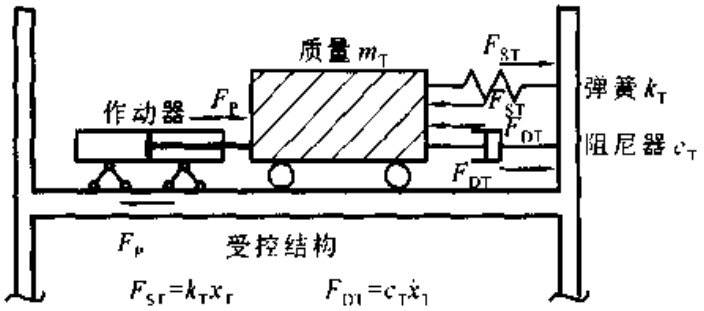


图 10－25　支撑式主动控制 AMD 装置示意图

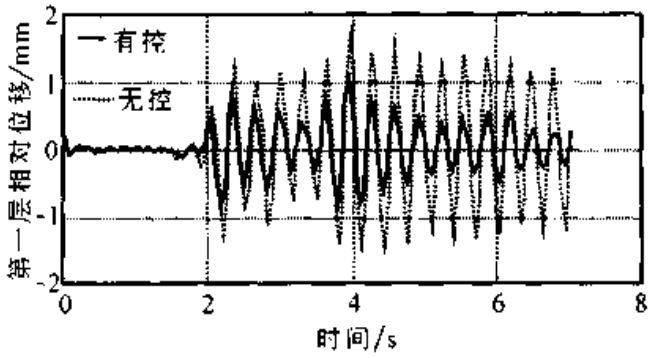


图 10－26　底层位移时程曲线

主动控制效果优于被动控制，但需要外界输入能量、装置复杂造价高、需要经常维护，加上系统和算法不可避免会有“时迟”，控制系统的可靠性也还存在一些问题。因此，从经济和技术两方面来说，虽然美国、日本等已将主动控制用于实际工程，但要广泛应用还有较大困难。

§10－8　几点结论

作为结构抗震设计的力学基础，本章概要介绍了地震作用理论级地震响应分析方法，通过本章的学习，应该掌握如下一些结论。

● 工程抗震设计目前主要应用反应谱理论，它是以单自由度体系在实际地震激励作用下的响应为依据，建立地震作用计算方法的拟静力理论。一旦求得地震作用，即求得地震力后，可按静力学的方法求内力及进行设计。

● 时程分析法是以地震记录或满足一定条件的人造地震波作为地面运动激励，直接对系统的运动方程进行数值积分的方法。目前对重要结构或特不规则结构或高烈度区的高层结构等等，我国规范已规定要进行时程分析的补充验算。随着计算机技术和应用计算软件的发展，时程分析方法必将得到更广泛的应用。

● 由多自由度体系的振型分解反应谱法可知，反应谱理论前提之一是体系处于线性弹性工作阶段。根据我国抗震设计原则"当遭遇低于本地区抗震设防烈度的多遇地震影响时，一般不受损坏或不需修理仍可继续使用，当遭受相当于本地区抗震设防烈度的地震影响时，可能损坏，经一般修理或不需修理仍可继续使用，当遭受高于本地区抗震设防烈度的预估的罕遇地震影响时，不致倒塌或发生危及生命的严重破坏。"（也即通常所说的"小震不坏，中震可修，大震不倒"的原则），多数结构在遭受地震地面运动激励时，都将进入非线性的工作状态，这时反应谱理论是不适用的。非线性状态下的地震响应方法，主要是时程分析法。

● 某地震记录的反应谱，是阻尼比和周期的函数，不同记录的反应谱是不同的。虽然地震反应谱各不相同，但因为具有共同的特征，所以由大量记录算得的反应谱可建立标准反应谱，我国规范就是依此为据规定地震影响系数曲线，从而解决抗震结构设计问题的。位移、速度和加速度三条反应谱是相关的，知道一个即可推得另两个。

● 用振型分解反应谱法作地震响应分析时，因为各振型地震作用响应不是同时刻达到最大值，因此内力等响应存在组合问题。不同动力特性的结构可用不同的组合方法，工程抗震设计中 SSRS 法和 CQC 法较为常用。

● 本章是为结构抗震设计课程奠定力学基础，限于篇幅本章没有举具体例子来说明，为了学好抗震设计，读者应该结合前几章的知识切实掌握本章的上述知识。

附录A 习题答案

第1章

1-2 (a) $\theta=\dfrac{F_P a^2}{96EI}(\curvearrowright)$, $M_{CB}=\dfrac{F_P a}{24}$

(b) $\Delta=\dfrac{F_P a^3}{24EI}(\rightarrow)$, $M_{AB}=-\dfrac{F_P a}{4}$

第2章

2-1

$$k^e=\begin{pmatrix}
\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\
 & & & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\
 & & \text{对称} & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\
 & & & & & \frac{4EI}{l}
\end{pmatrix}$$

2-2 $F_E^e=\left(\dfrac{pl}{2}\quad\dfrac{5ql}{8}\quad\dfrac{ql^2}{8}\quad\dfrac{pl}{2}\quad\dfrac{3ql}{8}\right)^T$

2-3 (a) $k^e=\begin{pmatrix}\frac{4EI}{l} & 0 & \frac{2EI}{l}\\ & \frac{EA}{l} & 0\\ \text{对称} & & \frac{4EI}{l}\end{pmatrix}$

2-3 (b) (c)

$$\boldsymbol{k}'=\begin{pmatrix}\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0\\ \text{对} & \frac{EA}{l} & 0\\ & \text{称} & \frac{4EI}{l}\end{pmatrix},\boldsymbol{k}'=\begin{pmatrix}\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2}\\ \text{对} & \frac{EA}{l} & 0\\ & \text{称} & \frac{4EI}{l}\end{pmatrix}$$

2-4 (a) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(\frac{ql^2}{12}\quad 0\quad -\frac{ql^2}{12}\right)^T$,(b) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(\quad 0\quad 0\quad -\frac{ql^2}{12}\right)^T$

(c) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(\frac{ql}{2}\quad 0\quad -\frac{ql^2}{12}\right)^T$

2-5 $\boldsymbol{k}'=\begin{pmatrix}\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ & \frac{3EI}{l^3} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2}\\ \text{对} & & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\ & & & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2}\\ & & \text{称} & & \frac{3EI}{l}\end{pmatrix}$

2-6 $\boldsymbol{k}'=\begin{pmatrix}\frac{GI_p}{l} & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{l} & 0 & 0\\ & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2}\\ & & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3}\\ \text{对} & & & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0\\ & & & & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2}\\ & & \text{称} & & & \frac{12EI}{l^3}\end{pmatrix}$

2-7 $\boldsymbol{F}_E^e=(A\quad D\quad -C\quad B\quad F\quad -E)^T$

2-8 (a) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(0\quad \frac{q_yl}{2}\quad \frac{q_zl}{2}\quad 0\quad -\frac{q_zl^2}{12}\quad \frac{q_yl^2}{12}\quad 0\quad \frac{q_yl}{2}\quad \frac{q_zl}{2}\quad 0\quad \frac{q_zl^2}{12}\quad -\frac{q_yl^2}{12}\right)^T$

(b) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(\frac{p_xl}{2}\quad 0\quad 0\quad \frac{m_xl}{2}\quad 0\quad 0\quad \frac{p_xl}{2}\quad 0\quad 0\quad \frac{m_xl}{2}\quad 0\quad 0\right)^T$

2-9 (a) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(0\quad \frac{qx_k}{4}\left(2-3\frac{x_k^2}{l^2}+1.6\frac{x_k^3}{l^3}\right)\quad \frac{qx_k^2}{6}\left(2-3\frac{x_k}{l}+1.2\frac{x_k^2}{l^2}\right)\right.$

$\left.0\quad \frac{qx_k^3}{4l^2}\left(3-1.6\frac{x_k}{l}\right)\quad -\frac{qx_k^3}{4l}\left(1-0.8\frac{x_k}{l}\right)\right)^T$

(b) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(0\quad \frac{qx_k}{2}\left(2-2\frac{x_k^2}{l^2}+\frac{x_k^3}{l^3}\right)\quad \frac{qx_k^2}{12}\left(6-8\frac{x_k}{l}+3\frac{x_k^2}{l^2}\right)\right.$

$$0 \quad \frac{qx_k^3}{l^2}\left(1-\frac{x_k}{2l}\right) \quad -\frac{qx_k^3}{12l}\left(4-3\frac{x_k}{l}\right)\Bigg)^{\mathrm{T}}$$

(c)(略)

(d)(略)

2-10 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}=\left(\frac{ql}{2} \quad \frac{qel}{2} \quad \frac{ql^2}{12} \quad \frac{ql}{2} \quad \frac{qel}{2} \quad -\frac{ql^2}{12}\right)^{\mathrm{T}}$

2-11 (略)

2-12 (略)

第3章

3-1 $M_{AB}=-0.299F_{\mathrm{P}}l, M_{BA}=0.072\ F_{\mathrm{P}}l, Q_{AB}=0.864F_{\mathrm{P}}, Q_{BA}=-0.136F_{\mathrm{P}}$

3-2
$$\begin{pmatrix} 75973 & 0 & 8960 & -70000 & 0 & 0 \\ & 140747 & 2240 & 0 & -747 & 2240 \\ & \text{对} & 26880 & 0 & -2240 & 4480 \\ & & & 151946 & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & 281494 & 0 \\ & & & & & 53760 \end{pmatrix}$$

3-3 $F_{\mathrm{N}①}=0.451F_{\mathrm{P}}$(拉), $F_{\mathrm{N}②}=0$, $F_{\mathrm{N}③}=0.752F_{\mathrm{P}}$(压), $F_{\mathrm{N}④}=0.915F_{\mathrm{P}}$(拉)

3-4 $M_{34}=\frac{3}{80}ql^2, M_{43}=\frac{1}{10}ql^2, M_{45}=\frac{11}{120}ql^2, M_{54}=-\frac{19}{240}ql^2$

3-5
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6F_{\mathrm{P}} \\ -\frac{5F_{\mathrm{P}}l}{6} \end{pmatrix}, M_{12}=0.845/l, M_{21}=1.69/l, M_{34}=2.161/l, M_{43}=1.014/l$$

3-6 $F_{\mathrm{N}①}=-0.235\ 7F_{\mathrm{P}}, F_{\mathrm{N}②}=0.083\ 3F_{\mathrm{P}}, F_{\mathrm{N}③}=0.353\ 5F_{\mathrm{P}}$

$F_{\mathrm{N}④}=0.416\ 7F_{\mathrm{P}}, F_{\mathrm{N}⑤}=0.2357\ F_{\mathrm{P}}$

3-7 $M_{\mathrm{AB}}=-17.8\ \mathrm{kN\cdot m}, M_{\mathrm{CB}}=2.54\ \mathrm{kN\cdot m}, F_{\mathrm{DB}}=1.43\ \mathrm{kN}, N_{\mathrm{EB}}=1.43\ \mathrm{kN}$

第4章

4-1 (a) $2.5EI$, (b) $3.01EI$, (c) $2.486EI$(计算时 $l=4\ \mathrm{m}$)

4-2 $0.02254EI$(计算时 $l=4\ \mathrm{m}$)

4-3 $9.8386EI$(计算时 $l=2\ \mathrm{m}$)

4-4 $3.661EI$(计算时 $l=2\ \mathrm{m}$)

4-5 (略)

4-6 (a) $F_{\mathrm{P}_u}=51.25\ \mathrm{kN}$ (b) $1.5556\ M_u$

第5章

5-1 (略)

5-2 (略)

5-3 $N_1=\frac{1}{a}(a-x-y),N_2=\frac{x}{a},N_3=\frac{y}{a}$

5-4 (a)(略)

(b) $\boldsymbol{F}_E^e=(0\quad 2\sqrt{29}\quad 0\quad 1.5\sqrt{29}\quad 0\quad 0)^T$

5-5 $b_i=-a,c_i=-a,b_j=a,c_j=0,b_k=0,c_k=a,\Delta=\frac{a^2}{2}$

$$\boldsymbol{k}_{rs}=\frac{E\delta}{4(1-\nu^2)\Delta}\begin{pmatrix} b_rb_s+\frac{1-\nu}{2}c_rc_s & \nu b_rc_s+\frac{1-\nu}{2}c_rb_s \\ \nu c_rb_s+\frac{1-\nu}{2}b_rc_s & c_rc_s+\frac{1+\nu}{2}b_rb_s \end{pmatrix}\quad (r,s=i,j,k)$$

$$\boldsymbol{k}^e=\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{ii} & \boldsymbol{k}_{ij} & \boldsymbol{k}_{ik} \\ 对 & \boldsymbol{k}_{jj} & \boldsymbol{k}_{jk} \\ & 称 & \boldsymbol{k}_{kk} \end{pmatrix}$$

5-6 (略)

5-8 $\xi=\frac{x}{a},\eta=\frac{y}{b},\xi_0=\xi_i\xi,\eta_0=\eta_i\eta$

(ξ_i,η_i)=1点(-1,-1),2点(1,-1),3点(1,1),4点(-1,1)

$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)\quad (i=1,2,3,4)$

5-9 $\boldsymbol{F}_E^e=\left(\frac{2q_0a}{3}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad -\frac{2q_1a}{3}\quad \frac{q_0a}{3}\quad -\frac{2q_1a}{3}\right)^T$

5-11 $N_2=\frac{1}{4}(H\xi)\xi\eta(\eta-1),N_6=\frac{1}{2}\xi(1+\xi)(1-\eta^2)$

5-12 (a) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(0\quad 0\quad -\frac{q_0b}{6}\quad 0\quad -\frac{q_0b}{3}\quad 0\quad 0\quad 0\right)^T$

(b) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad -\frac{qa}{2}\quad 0\quad -\frac{qa}{2}\right)^T$

(c) $\boldsymbol{F}_E^e=\left(0\quad -\frac{pab}{4}\quad 0\quad -\frac{pab}{4}\quad 0\quad -\frac{pab}{4}\quad 0\quad -\frac{pab}{4}\right)^T$

5-13 (略)

第6章

6-1 (a)3,(b)2,(c)1,(d)2,(e)4,(f)4,(g)3,(h)1,(i)4

6-2 7

6-3 (a)2,(b)2

6-4 (a)3,(b)3,(c)6,(d)3,(e)1

6-5 (a) $\ddot{y}+\frac{1}{m\delta_{11}}y=-\frac{1}{m\delta_{11}}\Delta_{1P},\delta_{11}=\frac{l^3}{48EI},\Delta_{1P}=-\frac{1}{16}l^2M\sin\theta t$

(b) $\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{4}{243}\frac{l^3}{EI},\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{7}{486}\frac{l^3}{EI}$,方程略

(c) $\delta_{11}=\frac{2}{3}\frac{l^3}{EI}$,方程略

(d) $\delta_{11}=\dfrac{1}{4}\dfrac{l^3}{EI}$，方程略

6-6 (a) $k_{11}=\dfrac{24EI}{l^3}$，方程略

(b) $k_{11}=36\dfrac{EI}{l^3}$，$k_{12}=k_{21}=-\dfrac{12EI}{l^3}$，$k_{22}=\dfrac{15EI}{l^3}$

6-7 (a) $\delta_{11}=\dfrac{1}{3}\dfrac{h^2l}{EI}$

(b) $k_{11}=k_1+k_2$，$k_{12}=k_{21}=-k_2$，$k_{22}=k_2$

(c) $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}_P$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}270&0&0\\0&270&0\\0&0&180\end{bmatrix}\times10^3\ \text{kg},\quad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}441&-196&0\\-196&294&-98\\0&-98&98\end{bmatrix}\times10^6\ \text{N/m}$$

$$\boldsymbol{F}_P=\begin{Bmatrix}0\\F_P(t)\\0\end{Bmatrix}$$

(d) $10a^2m\ddot{\theta}+4a^2k\theta=M(t)$

(f) $\dfrac{1}{3}a^3m\ddot{\theta}+4\dfrac{EI}{l}\theta=aF_P(t)$

6-8 $m\ddot{y}+ky=F_P(t)$

6-9
$$\begin{cases}M\ddot{x}+\dfrac{1}{2}k_Hx-\dfrac{1}{4}ak_H\theta=0\\M\ddot{y}+2k_Vy=F_P(t)\\J\ddot{\theta}+\dfrac{1}{2}(a^2k_H+l^2k_V)\theta-ak_Hx=0\quad\left[J=\dfrac{M}{12}(a^2+l^2)\right]\end{cases}$$

6-10
$$\begin{cases}M\ddot{x}+\dfrac{72EI}{h^3}x=0\\M\ddot{y}+\dfrac{72EI}{h^3}y=0\\\dfrac{5}{12}a^2M\ddot{\theta}+\left(\dfrac{6GJ}{h}+\dfrac{66EI}{h^3}\cdot a^2\right)\theta=0\end{cases}$$

第7章

7-1 (a) $\omega=3.098\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}$，(b) $\omega=11.82\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}$

(c) $\omega=2.83\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}$，(d) $\omega=1.732\sqrt{\dfrac{EI}{ml^3}}$

(e) $\omega=\sqrt{\dfrac{1}{m\left(\dfrac{1}{2k}+\dfrac{l^3}{48EI}\right)}}$

7-2 $\omega=87.3\ \text{s}^{-1}$

7-3 $\mu=\frac{25}{16}$，$y_{st}=\frac{F_P l^3}{EI}$，$A=1.562\,5\frac{F_P l^3}{EI}$，$M_{max}=1.844F_P l$

7-4 (a) $A=8.843\,7\times10^{-4}$ m，$M_{d\,max}=6.249\,9\times10^{3}$ N·m

(b) $A=8.566\,56\times10^{-4}$ m，$M_{d\,max}=6.053\,47\times10^{3}$ N·m

7-5 (a) $A=0.254\,7$ m，(b) $A=0.236\,16$ m

7-6 $\xi=0.036\,6$

7-7 (略)

7-8 (略)

第8章

8-1 $\omega_1=931\,4\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$，$\omega_2=2.352\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$

$\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\-0.305\end{pmatrix}$，$\varphi_2=\begin{pmatrix}1\\1.638\end{pmatrix}$

8-2 $\omega_1=0.749\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$，$\omega_2=2.14\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$

$\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\2.23\end{pmatrix}$，$\varphi_2=\begin{pmatrix}1\\-0.896\,7\end{pmatrix}$

8-3 $\omega_1=254.45\ s^{-1}$，$\omega_2=388.61\ s^{-1}$

$\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\varphi_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

8-4 $\omega_1=10.474\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$，$\omega_2=13.856\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$

$\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\varphi_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

8-5 $\omega_1=2.822\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$，$\omega_2=8.095\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$，$\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\1.836\end{pmatrix}$，$\varphi_2=\begin{pmatrix}1\\-2.96\end{pmatrix}$

8-6 $\omega_1=9.885\ s^{-1}$，$\omega_2=23.179\ s^{-1}$，$\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\1.963\end{pmatrix}$，$\varphi_2=\begin{pmatrix}1\\-0.13\end{pmatrix}$

8-7 $A_1=0.032\,4\times10^{-3}$ m，$A_2=0.124\,4\times10^{-3}$ m

8-8 (略)

8-9 (略)

8-10 (略)

第9章

9-1 $39.478\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$

9-2 $9.8696\sqrt{\frac{EI}{(\overline{ml}+2m)l^3}}$

9-3 （略）

9-4 （略）

9-5 $\omega_1 = 0.558\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$，$\varphi_1 = (1 \quad 0.327)^T$

$\omega_2 = 2.874\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$，$\varphi_2 = (1 \quad -1.527)^T$

9-6 $\omega_1 = 1.701\,4\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$，$\varphi_1 = (1 \quad 0.879\,3 \quad 0.652\,8 \quad 0.347\,5)^T$

$\omega_2 = 4.898\,9\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$，$\varphi_2 = (-0.9921 \quad -0.005\,3 \quad 0.995\,2 \quad 1)^T$

9-7 （略）

附录B 索 引

B

半主动控制(half-active control) 241
被动控制(passive control) 249
闭环控制(close-loop control) 249
边界条件(boundary condition) 8
变分(variation) 17
标准反应谱(standard response spectrum) 233

C

初始条件(initial condition) 148
超越现象(overshoot) 196
常应变单元(constant strain element) 89

D

达朗伯尔原理(d' Alembert principle) 130
单位脉冲函数(unit impulse function) 28
单位脉冲响应函数(unit impulse response function) 152
单元分析(element analysis) 4
单元结点力(element joint force) 85
单元结点位移(element nodal displacement) 85
等参数单元(isoparametric element) 102
地震记录(earthquake record) 226
地震力(earthquake force) 224
动荷载(dynamic load) 122
动力放大系数(magnification coefficient) 153
动力矩阵(dynamic matrix) 209
动力理论(dynamic theory) 225
杜哈梅积分(Duhamel integration) 151

F

反应谱理论(response spectrum theory) 226
泛函(functional) 17
分析设计对策(analysis design countermeasure) 240
幅值向量(amplitude vector) 168

G

刚域(rigidity range) 43
高斯积分法(Gauss integral method) 110
工程应变(engineering strain) 8
固有频率(natural frequency) 129
广义坐标(generalized coordinate) 21
广义坐标法(generalized coordinate method) 36

H

混合控制(hybrid control) 241

J

基本振型(fundamental mode of vibration) 129
基频(fundamental frequency) 129
几何方程(geometrical equation) 8

几何刚度矩阵(geometric stiffness method) 71
计算结构力学(computational structural mechanics) 3
结点(node) 3
结点力(joint force) 85
结点位移(nodal displacement) 85
结构的动力特性(structural dynamic characteristics) 128
结构动力学(structural dynamics) 121
结构刚度系数(structural stiffness coefficient) 19
结构控制(structural control) 241
结构设计(structural design) 4
结构振动控制问题(control problem of structural vibration) 125
经验对策(experience countermeasure) 240
静力理论(static theory) 225
矩阵范数(matrix norm) 72
绝对加速度反应谱(absolute accelerate response spectrum) 230

K

开闭环控制(open-close-loop control) 249
开环控制(open-loop control) 249
控制对策(control countermeasure) 241
控制律(control rule) 249

L

里兹法(Ritz method) 21
临界荷载(critical load) 72
临界状态(critical state) 72

M

幂法(power method) 73
面积坐标(area coordinate) 86
摩擦耗能支撑(friction-damped braced frame) 245

N

能量法(energy method) 203
粘阻系数(damping coefficient) 130
粘弹性耗能器(viscoelastic dissipater) 245

P

频率比(frequency ratio) 152
频率方程(equation of frequency) 168
频率谱(frequency spectrum) 129
平衡微分方程(equilibrium differential equation) 6
平均反应谱(average response spectrum) 233
平面应变(plane strain) 10
平面应力(plane stress) 10

Q

铅挤压耗能器(Lead compression dissipater) 245

R

瑞利比(Rayleigh ratio) 208
瑞利法(Rayleigh method) 203
瑞利－里兹法(Rayleigh－Ritz method) 214

S

失稳状态(unstable mode) 73
时程分析法(time-history analysis method) 226
势能(potential energy) 18
试凑法(trial and error method) 36

T

特征方程(equation of characteristics) 72
特征值(eigenvalue) 72

调频质量阻尼器(tuned mass damper) 246
调频液体阻尼器(tuned liquid damper) 247

W

外力势能(potential energy of load) 18
位移场(displacement field) 3
位移反应谱(displacement response spectrum) 230
位移模式(displacement mode) 31
位移转换矩阵(displacement transformation matrix) 43
稳定方程(stability equation) 72

X

线弹性本构方程(linear elastic constitutive equation) 9
线加速度法(linear acceleration method) 160
线性体系(linear system) 134
相对速度反应谱(relative velocity response spectrum) 230
形函数(shape function) 32
形函数矩阵(shape function matrix) 32
形状函数(shape function) 127
虚功原理(virtual work principle) 14
虚位移原理(virtual displacement principle) 14

Y

雅可比矩阵(Jacobi matrix) 103
应变矩阵(strain matrix) 32
应力边界条件(stress boundary condition) 8
应力矩阵(stress matrix) 90
有限单元法(finite element method) 3
运动方程(equation of motion) 130

Z

增量方程(incremental equation) 160
振型(mode of vibration) 129
振型方程(equation of mode shape) 168
整体分析(integral analysis) 4
直接动力分析法(direct dynamics analysis method) 226
直接刚度法(direct stiffness method) 59
逐步积分法(step-by-step integration method) 226
主动调频质量阻尼器(active mass damper) 249
主动控制(active control) 241
主动拉索(active tendon) 249
状态方程(state equation) 250
状态向量(state vector) 250
自然坐标(natural coordinate) 94
自由度(degree of freedom) 126
自由振动(free vibration) 128
自振频率(free vibration frequency) 128
综合对策(synthesis countermeasure) 241
阻尼(damping) 129
阻尼比(damping ratio) 147
坐标矩阵(coordinate matrix) 101

主要参考书目

1 龙驭球,包世华主编．结构力学．第二版．北京:高等教育出版社,1994
2 龙驭球,包世华编．结构力学教程．北京:高等教育出版社,1988
3 王勋成主编．有限单元法基本原理及数值方法．北京:清华大学出版社,1988
4 王焕定,吴德伦主编．有限单元法及计算程序．北京:中国建筑工业出版社,1997
5 克拉夫 R W 等著．结构动力学．王光远等译．北京:科学出版社,1983
6 赵光恒编著．结构动力学．第一版．北京:水利电力出版社,1996
7 王焕定主编．结构力学程序设计．第一版．北京:高等教育出版社,1993
8 Fortran 工作组编．标准 Fortran 90 语言程序设计．北京:学苑出版社,1994