高等学校水利类教材

计算水动力学

郑邦民　赵 昕　编著







武汉大学出版社



责任编辑　徐睦书
责任校对　王　建
版式设计　支　笛
封面设计　涂　驰

ISBN 7-307-03296-1
9 787307 032965 >

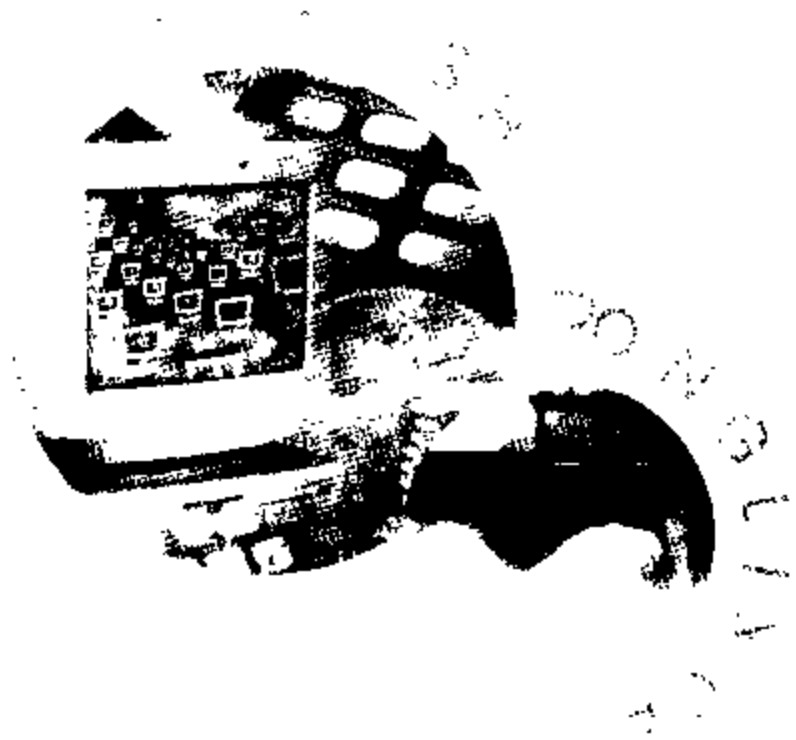
ISBN 7-307-03296-1/TV · 8
定价：29.60元

高等学校水利类教材

计算水动力学

郑邦民　赵　昕　编著

武汉大学出版社



内容提要

本书共分八章，论述了计算水动力学的原理，方法及其实际应用。主要内容包括：计算水动力学的发展，流体有限元法，差分法基本问题，对流扩散、河道水流、水沙两相流的数值解，边界层及紊流预测及水动力学随机游动方法。

本书可供水利、土木、环境、港航等高校专业师生使用，也可供有关工程科技人员参考。并可提供有关应用程序的磁盘、光盘。

图书在版编目(CIP)数据

计算水动力学/郑邦民，赵　昕编著. —武汉：武汉大学出版社，2001.8
高等学校水利类教材
ISBN 7-307-03296-1

Ⅰ.计…　Ⅱ.①郑…　②赵…　Ⅲ.水动力学—水力计算　Ⅳ.TV131.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 21258 号

责任编辑：徐睦书　　责任校对：王　建　　版式设计：支　笛

出版：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
发行：新华书店湖北发行所
印刷：湖北民政印刷厂
开本：787×1092　1/16　　印张：19.5　　字数：494 千字
版次：2001 年 8 月第 1 版　　2001 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-03296-1/TV・8　　定价：29.60 元

版权所有，不得翻印；凡购我社的图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题者，请与当地图书销售部门联系调换。

前　言

本书的雏形起于 20 世纪 70 年代，是我在几个学校和科研单位的讲座“计算水力学”，“计算流体力学”的讲稿。在这二三十年中，我和我的学生们在这一领域里不断地工作，扩大、充实了本书的内容与不断地改进和提出了新的方法，如水动力学中随机方法完全是近年扩充的内容。

本书之所以命名为“计算水动力学”，是因为它是侧重于不可压缩流体——水。本书的内容几乎涉及水力学计算各个方面。而称为“水动力学”的计算领域对于波浪，舰船似乎尚有不少缺陷，这受我的知识与工作领域所限。

本书写法上除了一般原理外，重点是它在各方面实际工程问题的应用。为了节省篇幅，反映特色，本书着重介绍我们自己所做的工作，减少一般性叙述以避免重复。

我和我的学生们最初工作领域是 1975~1985 年在流体有限元方面，先做的是溢流坝面，具有自由面，同时又有缓、急流的问题，这也是水利工程中一个现实课题。这也许是我国水利工程界最先涉猎于计算水动力学的领域。我国专家对此问题的探讨都有自身的特色（详见《中国科学》）。当然流体有限元我们也计算了渗流流场，水环境有关的火电厂温排水热污染计算。

在那时我们也初步接触到坐标变换概念把流函数 $\psi = \psi(x, y)$变换为 $y = y(x, \psi)$求解。交替方向 (ADI 法)，分数步长法 (Farctional Step) 也是那时开始用的。对线性方程分步与不分步等价，也是从那时认识的。对于算子分裂 (粘性分裂) (Split Operator) 一直持谨慎的态度。实际计算经验告诉我们，如果处理不当，效果并不好，现在有人在理论上已证明，把对流与扩散算子分开必须在方程或边界条件上做一定的工作。

对于扩散方程，我们开始做两方面的工作，一是采用有限分析法 (FAM)，保持其系统自动迎风的特性；FA 方法源于陈景仁教授，其格式依据单元内部解析，边界点上近似的思想，在粘性流计算中有较好的稳定性与精度。我们在三维流计算中应用此法，改进了 FA 系数计算，使其在斜迎风与自动迎风方面获得较好的结果。二是对于如水环境方面的射流扩散，我们采用一种新方法——随机游动方法。

此时，由于任务的需要，我们转向了河渠非恒定流，双曲型方程，波动问题，由洪水演进计算到溃坝，这一时期特征线格式，分裂格式都采用过，由一维到二维，由单相水流到水沙两相流及变形河床，桥墩、丁坝局部冲刷的数值模拟，像黄河这样高浓度含沙的浑水问题，拓宽和加深了计算领域。最近，又接触到如太湖，珠江口大型河网，虽然计算仍可按一维考虑，但大型河网多至几百条、上千条，为大型稀疏矩阵的解，带来实际的困难。

我们在“计算水动力学”长期工作，得到以下两点体会：(1) 由一维到二维计算，决不是初学者认为的像一加一等于二那样简单，有时有“质”的飞跃；(2) 教科书中的举例往往非常简单，而实际问题则都是复杂而丰富多样的。

对于紊流模型我们做过如 $k-\varepsilon$ 模型、应力代数模型等，但它只给出时均流，不能揭示紊流结构，因此，书中引入我的学生做的大涡模拟例子，而紊流的直接数值模拟 (DNS) 要用

于实际工程，恐怕是未来的事。对于N－S方程，原参数法，$\omega-\psi$法，我们虽做过，而三维流$\omega-\psi$法，也是以后的事。

计算水动力学中我们最近在溃坝波、间断波计算中引入过空气动力学计算各种优良格式，我们体会到不断借助于水气比拟是一条有效途径。

计算水动力学发展有赖于数学、流体力学、计算机三者有机的结合。

本书第二章流体流动的有限元法，第四章有限体积法，以及第七章紊流模型部分为我的学生赵昕副教授所写，其余为我本人执笔，如果本书能对有兴趣于此课题的同仁、学子有所帮助，我们将不胜欣慰。谬误及不足之处，欢迎批评指正。

郑邦民

2000年2月 于珞珈山

目　录

前　言 …… 1

第一章　计算水动力学的形成与发展 …… 1

§1.1　计算水动力学的内容及其发展 …… 1

§1.2　计算水动力学的原理与方法 …… 10

第二章　流体流动的有限元法与边界元法 …… 14

§2.1　变分原理与加权余量法 …… 14

§2.2　有限元法及其插值函数 …… 22

§2.3　水动力学问题的有限元解 …… 38

§2.4　边界元法 …… 50

第三章　水动力学中的有限差分法 …… 59

§3.1　势流有限差分解 …… 59

§3.2　差分解的基本问题：适定性、相容性、收敛性、稳定性 …… 64

§3.3　扩散（抛物型）方程的差分解法 …… 71

§3.4　变换函数交替方向解非线性边界自由面流动 …… 79

第四章　对流扩散方程的数值解 …… 87

§4.1　流函数——涡量法解二维对流扩散 …… 87

§4.2　有限分析法 (Finite Analytic Metlood) 解水动力学问题 …… 103

§4.3　水动力学N－S方程原参数解 …… 114

§4.4　流场中适体坐标变换与网格生成 …… 120

§4.5　有限体积法 …… 124

第五章　河道水流的数值模拟 …… 142

§5.1　一维非恒定流数值计算特征线法及其它格式 …… 144

§5.2　水网数值计算特点分析及其应用 …… 156

§5.3 三维河渠非恒定流数值计算 …… 176
§5.4 溃坝水流数值分析 …… 183
第六章 水沙两相流数值模拟 …… 188
§6.1 变形河床冲淤计算 …… 188
§6.2 桥墩局部冲刷的三维计算 …… 203
§6.3 浑水两相流洪水演进数值模拟 …… 208
第七章 边界层计算及紊流预测 …… 215
§7.1 紊流模型 …… 215
§7.2 两相紊流方程及其模拟 …… 226
§7.3 溢流面紊流边界层数值分析 …… 232
§7.4 紊动射流数值计算 …… 241
§7.5 明渠整治结构的剪切湍流特性的大涡模拟 …… 248
第八章 计算水动力学中的随机方法 …… 257
§8.1 随机游动方法的原理 …… 257
§8.2 随机游动法解对流扩散问题 …… 264
§8.3 随机游动法在水动力学一些领域推广应用 …… 276
§8.4 质点法与流场法相结合的随机模拟 …… 287
参考文献 …… 304

第一章　计算水动力学的形成与发展

§1.1　计算水动力学的内容及其发展

1.1.1　概述

随着电子计算机的出现和现代计算技术的飞速发展，近二三十年来，在流体运动的数值模拟、数值计算和计算机实验方面获得蓬勃发展，并形成流体力学新分支——计算流体力学。侧重于不可压缩流体的有计算水动力学 (Computational Hydrodynamics)，在水力学方面有计算水力学 (Computational Hydraulics)。它是以电子计算机作为模拟、计算或实验手段来数值地求解各种各样的水力学问题。

自 1965 年美国人 Harlow 在“科学的美国人”上发表“流体力学的计算机实验”，用计算机模拟出卡门涡列，法国人 Macagno 在“白煤”杂志发表“水力学模拟的某些新方向”，模拟计算了突然扩大管内的流动以来，虽然只有二十多年的历史，它已在水力学各个领域取得各种新的成果，引起人们极大关注。目前，水利工程中，河道水力学、水工水力学中各种水流问题，海洋动力学和水环境污染问题、水资源问题、水处理问题、水力机械中叶栅、流道问题，计算水动力学都有所涉及。

由于实际工程问题边界几何形状的不规则和流动的非线性性质，理论分析解很难求得；因此，多采用实验手段和数值计算来解决，计算水动力学采用数值方法，它比较省钱、省时，不受模型律（比尺）限制，因此适用性强、应用面广，能得出满足工程需要的定量结果，可以改变不同参数，做出理论分析的各种近似，可以迅速地作出多方案比较等优点，而为工程实际方面采用获得蓬勃的发展。

1.1.2　计算水动力学的课题内容及其进展

目前计算水动力学的发展，数值模拟计算已经从一维、二维进入到三维，从势流进到旋涡运动，从层流发展到紊流模拟，从恒定流进入到非恒定流，从单相水流到液、固两相流体，到液、固、气三相流体；从大范围流动到水流内部机理都有所涉及。近二十年来，计算水动力学在以下方面取得较快的进展。

1.1.2.1　非恒定流

管、渠非恒定流也许是电子计算机应用最适合的领域，虽然计算管道或河渠的非恒定流的特征线法早在一百年前已经提出，但以人工计算。例如，巴拿马运河非恒定流计算就需要两位专家费时一二个月才能完成。一个简单的瞬态法，有五六个断面的算例，也需一个人算一二周。而现在已有的明渠非恒定流程序，微机计算也不过几分钟到十几分钟。

目前一维明渠非恒定流已有通用的程序包，并且比较成熟。包括河网、分叉河道洪水波

演进、电站日调节非恒定流均可计算，计算应用了各种差分格式。实际问题有长江、黄河、辽河的洪水演进，三峡、葛洲坝、丹江口水电站日调节问题等。

由于水利枢纽上、下游，水库与河道地形变化，河口潮汐，湖泊风波，排污环境问题需要进行二维计算，因此最近几年二维非恒定流计算获得较快的发展。

计算方法中有差分法与有限元法。对于洪水波演进多采用隐式差分，步长为Δx、Δy有几十米至上千米不等，时间步长Δt为一分钟至三十分钟，对潮汐水流采用显式或隐式，步长较短。经验表明：有限元法可以适应边界几何形状的不规则性。有人在内部区域用差分，接近固体边界区域采用三角形单元，这种混合格式比全部区域采用矩形差分网格，更能适合边界上波的反射，使得波高尤其是波的相位计算更符合实际。

平面二维河口潮汐非恒定流计算的实际问题，有钱塘江潮流、长江口、渤海湾、辽河口的非恒定流。在辽河口的计算中，有人在河道与河口衔接的地方，采用一、二维网格相结合的计算办法，从而简化了计算。为了保护计算的稳定，应注意一维、二维连接处的信息交换，最好使两者网格重合一段，二维计算中的有限元法已很好地处理了其迎风 (up-wind) 性质。

计算是基于浅水流动模型，平面二维计算流场是沿垂线积分后的平均流速场。所求得的水深变化及流速分量是进一步计算污染浓度场、热水温度场与泥沙运动的基础。

计算中对非恒定流糙率的调整有一定的经验，对于糙率沿河宽度分布关系也有一定非确定方法。潮水涨落，洪泛区淹没边界往往是随时间变化的动边界问题，为了考虑底面和水面高程随着位置和时间的变化，引入水深修正系数以处理动边界区域问题。

$$a_{ij}=\frac{H_{ij}}{\bar{h}}=\frac{h_{ij}-\Delta h_{ij}}{\bar{h}} \tag{1.1.1}$$

式中：h_{ij}为局部水深；Δh_{ij}为局部水深变化。

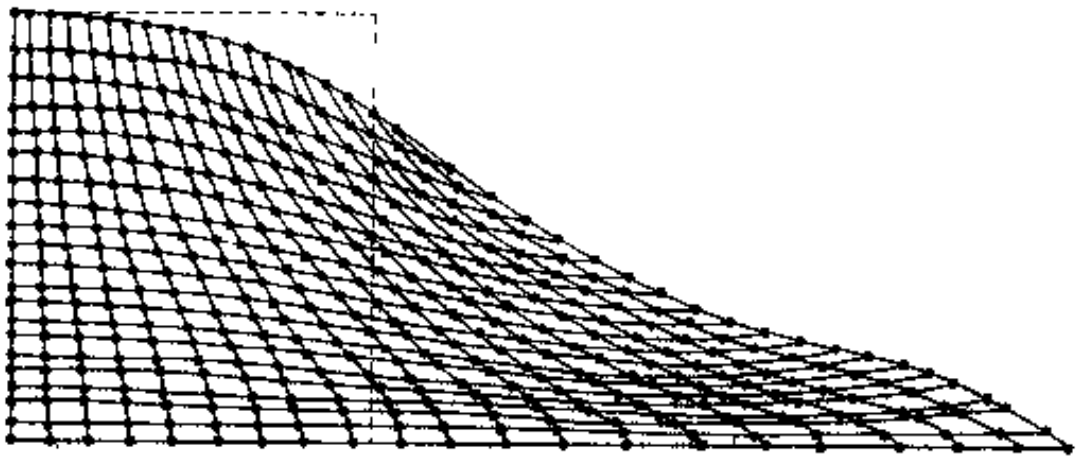
如果选主槽静水深作为特征水深$\bar{h}$，上式中：$a_{ij}=0$表示陆地或岛屿无水区的干地；$a_{ij}\neq 0$表示有水流动区域；$a_{ij}<1$表示浅水区；$a_{ij}>1$表示深水区。在有限容积法中，水深修正系数又可以分成作用在单元中心和控制面上两类。在变化区界上，为了不使计算水深发生突变而间断，给计算带来不稳定，有人引入剩余水深，残留水量，缝隙单元等概念。

虽然洪水波在河道中演进的一维计算在 20 世纪 70 年代后期已趋成熟。但多数算法对时变项很大的溃坝波（尤其是瞬间溃坝所形成的间断波）计算常遭失败。原因常在于差分格式的非线性不稳定性。这种不稳定性不能通过减少显式时间步长和采用线性无条件稳定的隐格式而改变。有的格式虽然可以保证计算稳定，但耗散太强不能正确给出间断波波形，而是把波抹平了或产生数值弥散的波形振荡。因此，对溃坝波计算有人不用渐变流下的 Saint - Venant 方程，而直接解急变流情况的 N. S. 方程 (如图 1.1 所示)，或采用 Lagrange 法求质点运动而不用 Euler 法。也有人采用动网格技术跟随波前运动。有人借鉴空气动力学中“激波”计算的经验，采用 TVD (Total Variation Diminishing) 格式，消除了人工的数值耗散和数值弥散，使间断波有较高的分辨率，得到溃坝波稳定的计算结果。

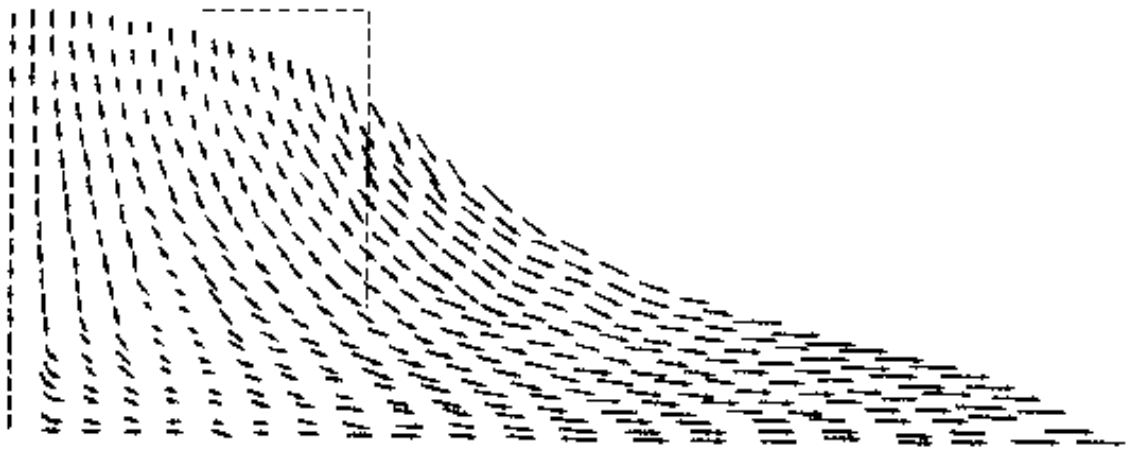
管道非恒定流中的水击与调压室中水位波动计算，近年也有很大进展，复杂管道中的水击，可以结合水轮机、水泵联合计算。这一水力瞬态流现象，已有专著和专门程序进行研究。

1.1.2.2 渗流

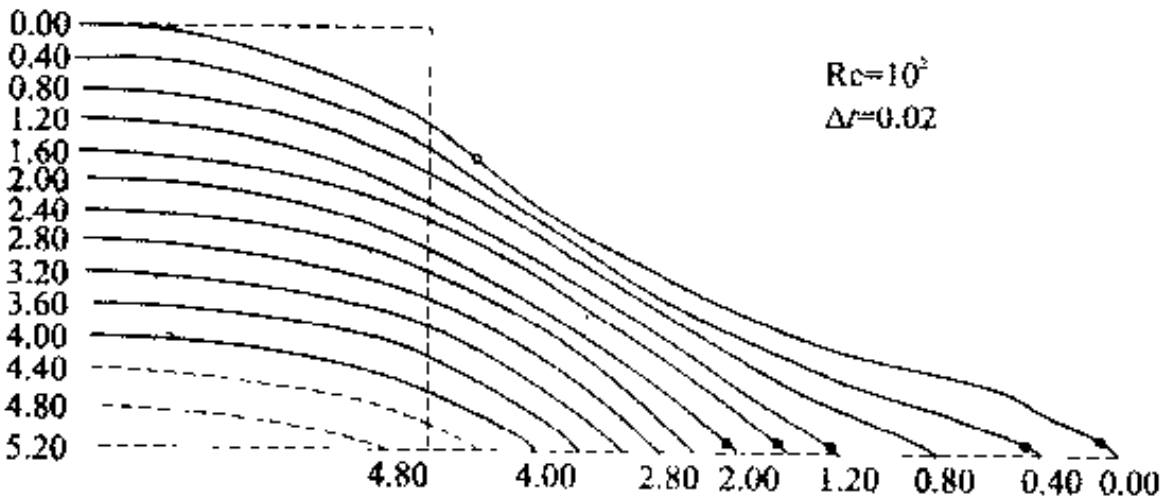
坝身或坝基土壤中的渗流，由于它满足势流条件，而最先得到有限元的应用。非均质、各向异性渗流已取得较好成果，并已有通用程序。使三维土坝恒定与非恒定渗流均可顺利进



(a) 网格



(b) 速度分布



(c) 压力分布

图1.1　溃坝波计算(当t=3s时)

行。井群地下水渗流，这方面对国民经济特别有意义，在防止土壤盐碱化，水资源利用，石油开采方面有着广泛的应用。

近年来除了土壤中符合达西定律的层流渗流外，过堆石坝素流渗流，有人用三维有限元与坝上溢流进行联合计算，复杂岩基三维渗流有限元分析也在进行。计算中采用了随机连续模型，并用 Monte-carlo 法产生离散裂隙网进行。有人给出导水薄断层和排水井列的简便计算方法。在三维渗流计算有人采用有限元、边界元耦合分析方法。

1.1.2.3　自由面溢流

水工中溢洪道、溢流坝、泄水孔的流动，20 世纪 40 年代冯·卡门就予以重视，但由于那时没有电子计算机，对溢流坝流场的研究工程界只可能用水工模型实验来解决。20 世纪 70 年代中期到现在，国内外已有许多人通过数值计算来求溢流坝上的流速分布、压强分布、流量系数。设计坝面曲线及分析各种参数的影响，已取得一系列成果，并已规范采用。

先是采用有限元法对二维势流进行计算，现在已可以计算三维坝面流动，考虑闸墩的影

响，方法上也不限于有限元，可以采用坐标变换方法，把溢流不规则区域变换为矩形区域，然后，再用差分法交替方向进行求解，也有人用边界元进行。有人发展了一种解析数值方法，将复变函数中解析变换与数值解结合运用。具有自由面重力流的溢流数值计算，内容涉及溢流坝、泄水孔、陡坡急流段，挑流水舌形状等。溢流坝面上的流动涉及急、缓流并存，自由面位置待定，流量（或水头）未知等因素，给计算带来困难。计算的关键在于自由面的调整和确定，而挑流水舌有上、下两个自由面。以上所提到的各种方法，解决问题各具特色。我国在这个计算领域成果较多，方法多样，并具有创造性，处于国际领先地位。

目前溢流计算除了势流之外，也考虑了边界层影响。有人直接解溢流面曲面边界层微分方程，并应用紊流模型中 $k-\varepsilon$ 方程计算坝面流动和坝身泄水孔孔板流的紊流特性。也有人计算了溢流反弧段流动特性，导流建筑物附近的流场。而溢流坝流动的反问题与安全度及优化问题也开始有人在做。

由于水利枢纽形式多样，流动复杂，整体流动问题，目前主要还是依靠水工模型试验来解决。对于水工建筑物的三维计算尚存在不少困难，有待进一步的发展。

1.1.2.4 水力机械流动的数值计算

随着计算机和计算技术的发展，转轮中全三维流动势流分析法不断出现。一种是采用有限元法解三维拉普拉斯方程，给定上游环量，下游环量待定；另一种是采用了非线性边界元法，考虑旋转和叶片不均匀荷载所产生的涡流，边界元法具有降维特点，内存较少，计算速度较快。

对于叶轮三维粘性流场计算，有直接解平均的 N - S 方程和势流与边界层迭代两种算法。直接解平均 N - S 方程，工作量大，势流边界层迭代法比较实用和经济可行。近年对三维边界层计算，着重在分离流。流体机械中分离现象很普遍，在叶轮叶片角变化时，流动参数受分离条件控制，当给定压力梯度时，边界层方程在分离点处是奇点，D. Catherall 首次提出边界层反解法，解决了奇点问题，直至 1981 年，J. Cousteix 提出三维定常分离流，奇点可能存在，并将反解法用于三维边界层计算。在三维边界层分离流计算中考虑了叶轮叶片表面曲率的影响，反映三维流的各向异性涡粘性模拟，给出了反解法中边界条件的一般表达式。计算结果表明：分离流的存在对叶轮流场影响很大。计算采用了边界层曲线（面）坐标，对三维流叶栅流道采用流面坐标，并沿边界厚度方向进行变换参数，使变量梯度大为减小。

1.1.2.5 粘性流与紊流模拟

各种水动力学问题的控制方程是不可压缩流体的 Navier - Stokes 方程（N - S 方程），其无量纲形式为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{U} = 0 & (1.1.2) \\ \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \nabla)\underline{U} = \boldsymbol{g} - \nabla p + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \underline{U} & (1.1.3) \end{cases}$$

式中：$\underline{U}$，p 分别为流速、压强；$\boldsymbol{g}$，Re 为重力与雷诺数已知。

多年来对 N - S 方程的数值解，数学界、力学界、工程界均给予足够重视，一直在寻找有效的数值解法。遗憾的是由于 N - S 方程的非线性性质，目前仅限于小雷诺数才有可能直接求出它的稳定的解。当雷诺数超过一定数值时实际流动将成紊流，流动出现分歧和失稳。即使目前出现了每秒上亿次速度的计算机，但要直接求解真实紊流瞬时流场仍是非常困难甚

至是不可能的。也许再经过几代计算机的发展，到本世纪中叶或许有可能实现直接用 N－S 方程求解瞬时真实紊流场的愿望。

由于实际工程问题多是紊流，而水利、环境、海洋工程的实际需要，要求对工程中的紊流问题作出估计。因此，人们着眼于求解紊流的时均场。随着计算机的发展，20 世纪 60 年代后期，国际上发展起来的各种紊流模型是现阶段处理工程中紊流问题的常用的可行的办法。

N－S 方程解粘性流的方法有：①流速、压强的原参数解；②将它化为流函数、涡量解；③流函数解三种。这三种解法近年都有人用有限元法或差分法做过。

对二维流动 N－S 方程可化为含流函数、涡量的两个方程，求解比较方便；而流速、压强原参数解可以推广于三维流，因而人们给予更多的注意，纯粹的流函数解需要解高阶（三阶或四阶）的流函数的偏微分方程，解需要满足高阶连续条件，或要用多层网格点，这对有限元法和差分法都不方便，所以纯流函数解用得不多。

流速、压强解近年来发展较快，工程界较为流行的为 SIMPLE 系列的算法(Semi－Implicit－Method－Pressure－Linked－Equation)。该法物理概念清晰，计算简便，近年来国内许多人应用此法，为了保持压力迭代的稳定而采用交错网格。最近也有人采用标准网格，并求得压力、流速同步收敛的迭代公式。水工方面需要更准确的压力场特性如图 1.2、图 1.3 所示。

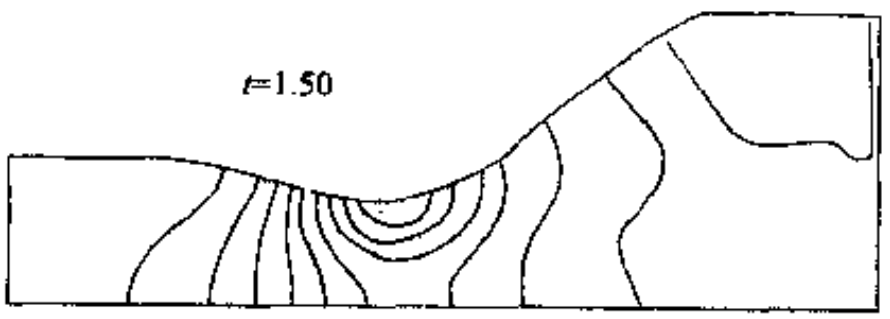


图1.2　收缩扩张管压力场

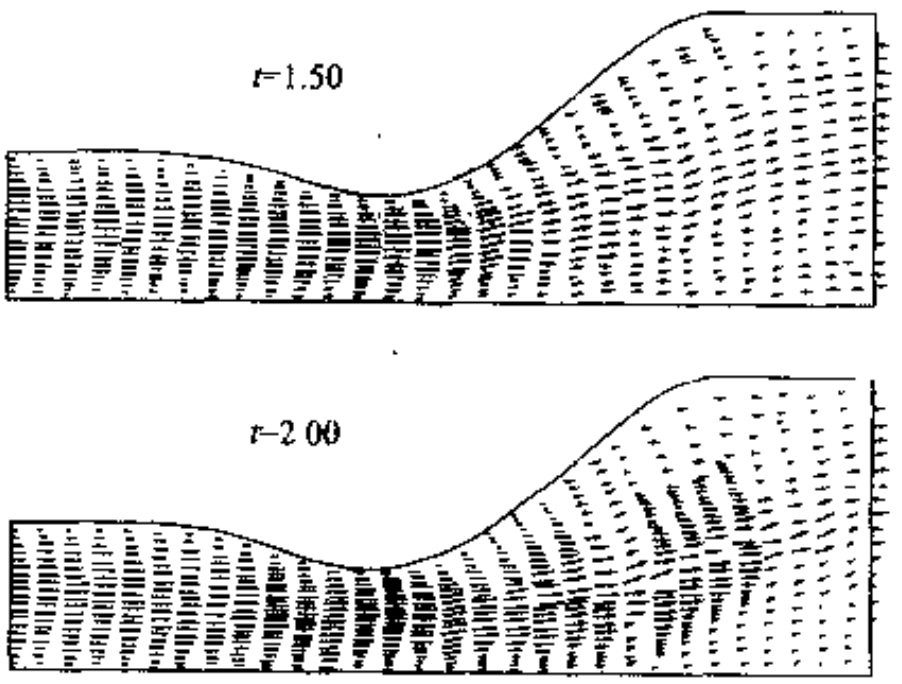


图1.3　收缩扩张管流场

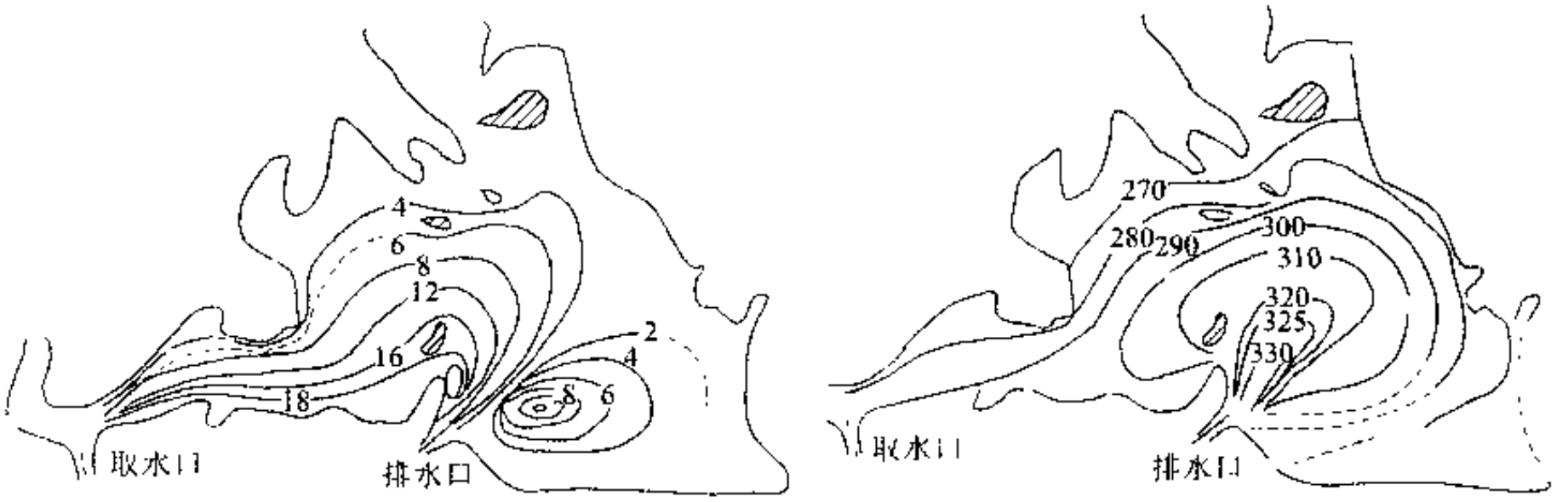
近年来紊流模型的数值计算已应用于水工水力学和环境水力学各种场合。目前采用得最多的为 $k-\varepsilon$ 模型和雷诺应力模型。计算表明：紊流模型中的各种系数只适用于同一类型的紊流情况，有人对 k 方程中的系数作了调整，有人也对 ε 方程模式化不完善提出了改进。使其系数变化，而与此同时也限制了紊流模型的预测范围。有人采用两尺度紊流模型，用小涡尺度反映 ε 方程的模拟效应，使回流区长度、空间射流及尾流计算与实测资料更加符合。对于各向异性紊流近来多采用复杂的雷诺应力代数模型或雷诺应力模型如图 1.4 所示。

在计算中为了获得不规则流动区域的数值解，对差分法经常用适体 (body－fitted) 坐标生成网格，在一般曲线坐标 ξ^i 中的泊松方程为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi^j}\right)=Q_i \tag{1.1.4}$$

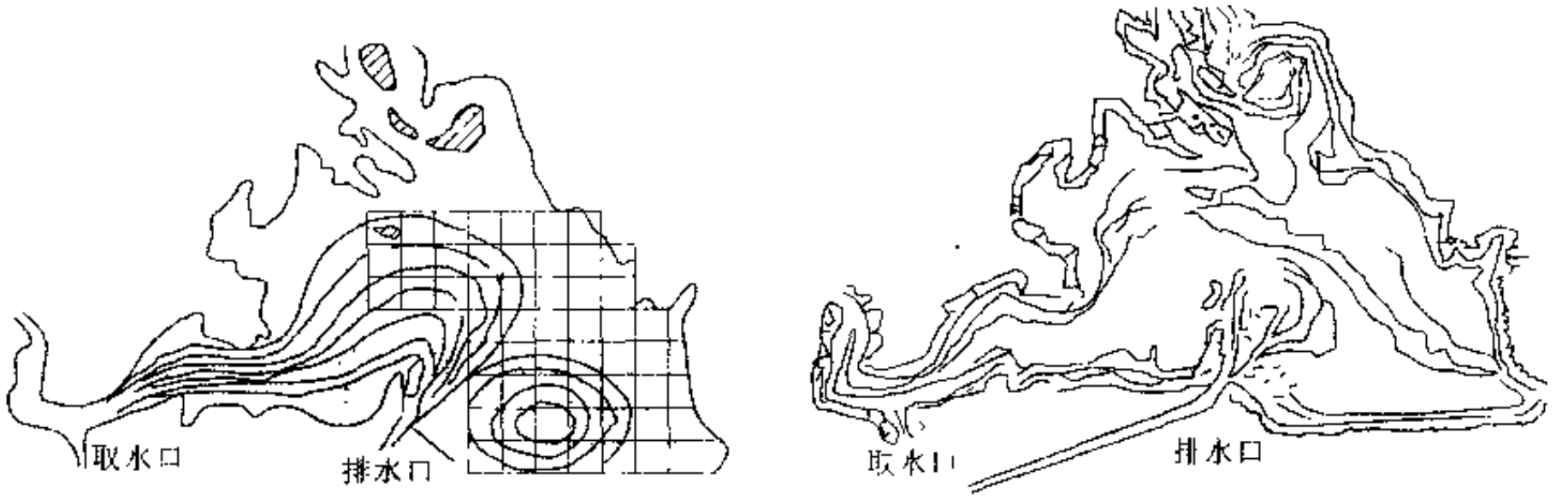
如果 Φ_i 是笛卡儿坐标 x^i，则用公式 1.1.4 及相应的边界条件，可数值地进行坐标变换生成网

格如图 1.5 所示。



(a)计算流场(水位28.6 m)，流速相对值

(b)计算温度场(水位28.6 m，温度单位℃)$\frac{1}{10}$



(c)原体实测流态(H=28.6 m)

(d)红外遥测等温线(温度单位℃，水位28.6 m)

图1.4　雷诺应力模型计算结果

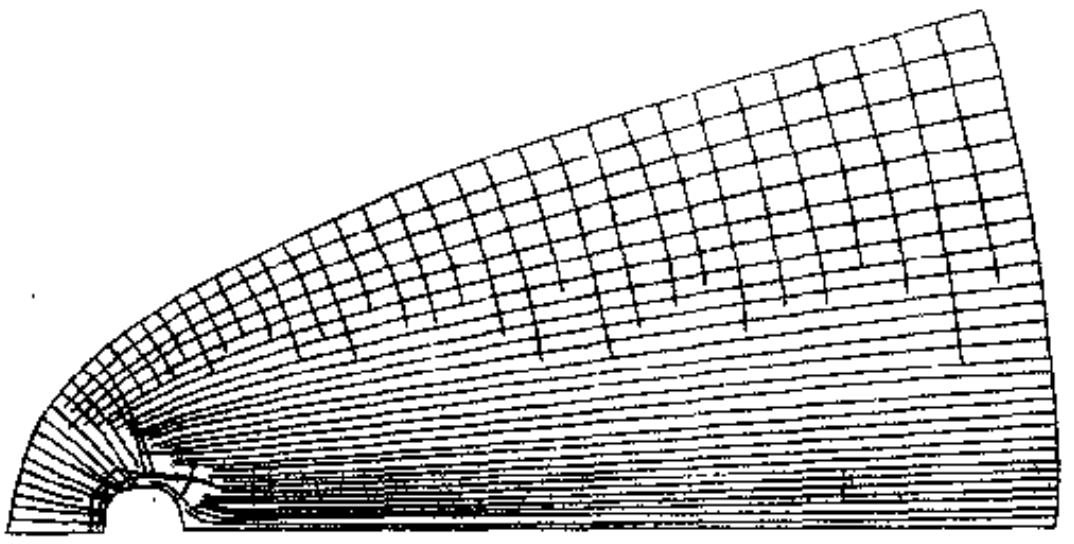


图1.5　物理平面上正交网格的分布

这种坐标变换方法使不规则的物理区域的流动变为规则的矩形块状计算区域。与此同时控制方程中的物理量，如压强、速度等应从笛卡儿坐标x的函数变为ξ坐标上的函数，并应是物理分量才便于应用。这需要用到普遍张量的概念。

另外，粘性流方程或紊流方程都是典型的对流扩散方程：

$$\Phi'_{ij} = 2A_i\Phi'_j + f + \Phi_i \tag{1.1.5}$$

不论差分或有限元，对于局部线性化了的对流扩散方程离散化之后的代数方程形式，都可以写成单元中周围相邻点对于中心 P 点“贡献”形式

$$\Phi_P = \frac{\sum_{m=1}^{M} C_m\Phi_m + C_P\dfrac{R_{ij}}{\tau}\Phi_{ij} + C_P f_P}{1 + \dfrac{C_P R_{ij}}{\tau}} \tag{1.1.6}$$

式中：M 为相邻结点总数。

为了使对流扩散方程计算稳定，有人采用有限分析 (Finite Analytic) 法，上述系数C_m 、C_P 在有限分析法中具有自动迎风效应。而有限分析法在单元解析，单元边界上插值近似，能较好地保证扩散问题的收敛精度。有限分析法二维为 9 点格式 ($M=8$)，三维为时、空 28 点 ($M=27$)，计算起来非常不便，且原来 FA 系数用于大雷诺数计算时，失去自动迎风效应变为简单迎风格式。有人对系数计算作了改进，并对高维问题采用 ADI 方法自交替方向解全椭圆型方程，这样计算精度与速度都得到保证。

1.1.3 计算水动力学的发展与展望

三十年来，计算水动力学从无到有，各方面取得不少成果。今后在江、河、湖、海治理方面大有用武之地。对于我国大流域的江河治理，洪水预报与决策，水动力学数值方法将占主要地位。我国主要江河洪水风险图正在逐步分期分批地进行。

东海、南海水环境污染三维非恒定流计算已完成。水沙数学模型正在总结一维计算的经验，向二维问题发展。

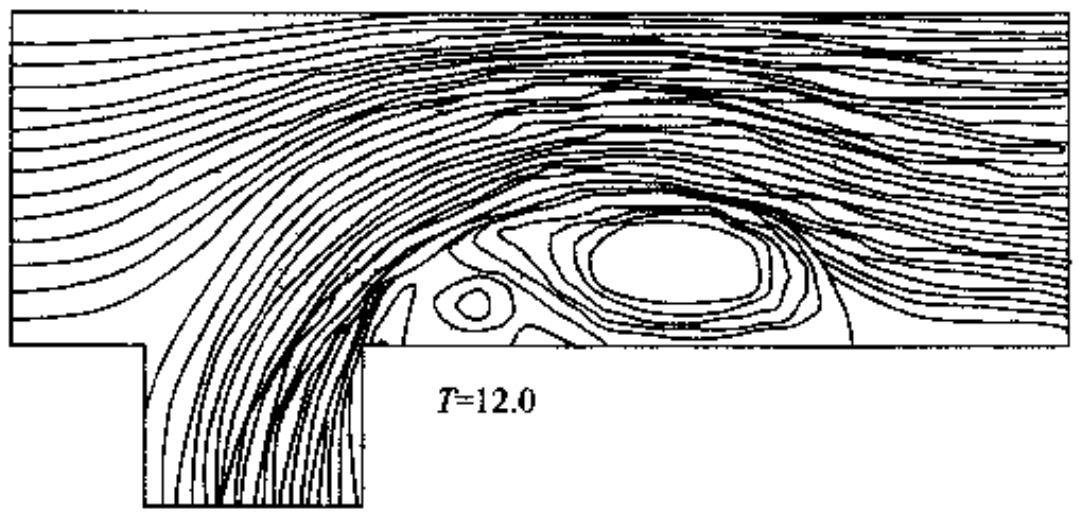
国内外对粘性流、紊流、涡旋流数值方法的研究正在深入进行。计算对象正扩展到双流体，二相与三相流体领域将逐步扩大应用范围。直接大涡模拟，离散涡，随机涡计算并模拟旋涡和用细网格解紊流旋涡也在尝试，如图 1.6 (a) (b)，随着计算机不断换代与发展，其价格大大降低，效率和功能不断提高，三维计算将更广泛地开展。

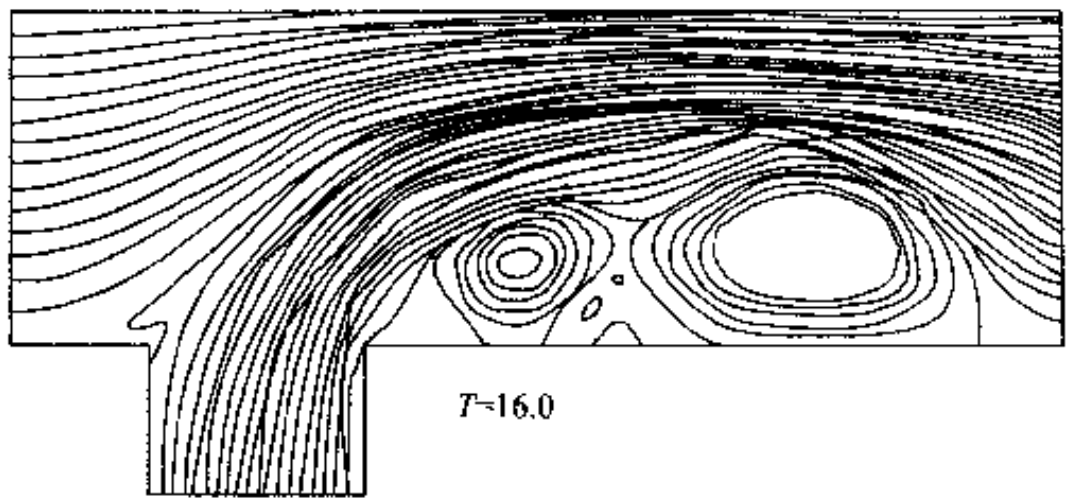
计算方法主要还是差分法和有限元法，依赖于时间问题的发展方程，主要还依赖于差分法，而为数众多的差分格式中将会得到优选格式，而时间差分、空间有限元的混合方法经验表明也是一个有效的途径。质点运动与流场相结合的 Lagrange – Euler 的方法，如 PIC(Particle In Cell)、MAC (Mark And Cell) 格式，用来解波浪爬高、破碎等特殊流动非常生动。但水跃、挑流掺气消能、雾化现象尚缺乏成功有效的模拟实例，其中的关键在于精度。

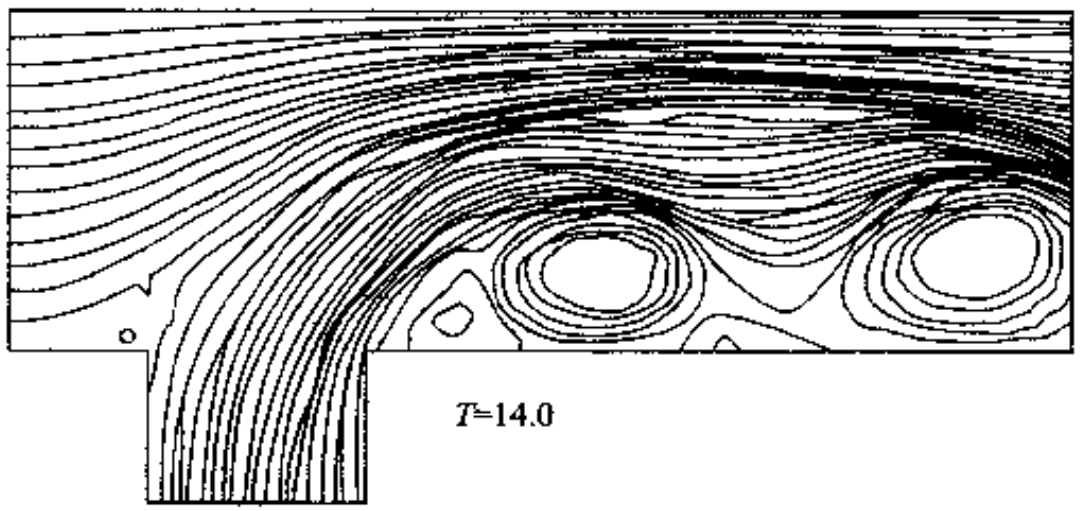
目前，计算机可以动态显示流场图、风险图。图像识别和流动显示技术在计算结果的可视性方面将有较快的发展。与此同时预测性也将有进一步的提高，ACD 在枢纽水力设计方面尚待进一步展开。

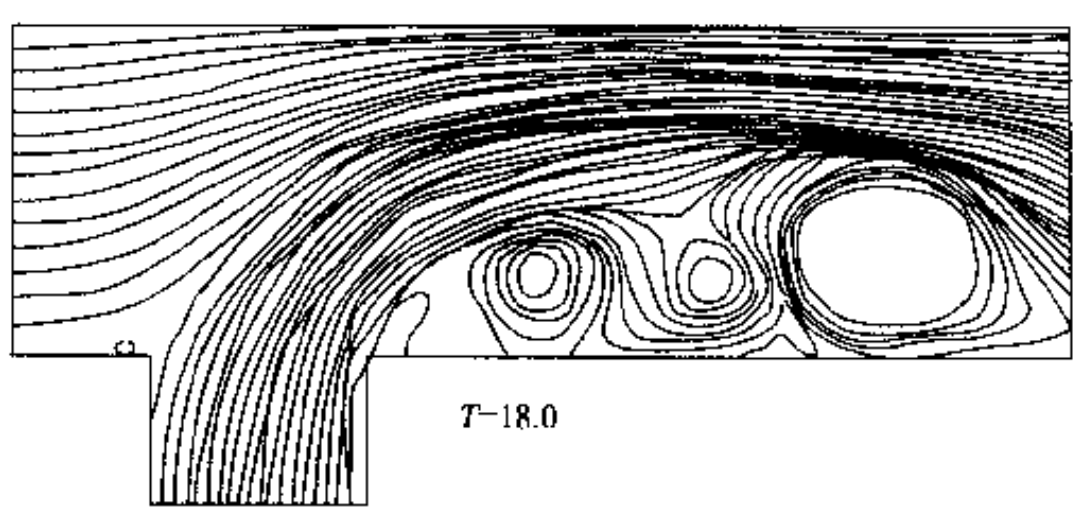
数值计算与物理分析和实验是相辅相成的。空气动力学关于波动的理论分析与计算经验是可借鉴的。而对紊流内部结构与扩散性质的物理实验，有助于进一步建立有效的数学模型。

到目前为止，国内计算流体力学会与流体力学数值方法会议都已开了多届，全国计算水力学会议 1991 年 10 月举行了第一次会议。水利学报、力学学报、水动力学研究与进展、水科学进展等有关刊物、杂志每期均有计算水力学论文刊出。可以预见，处于初创阶段的水力



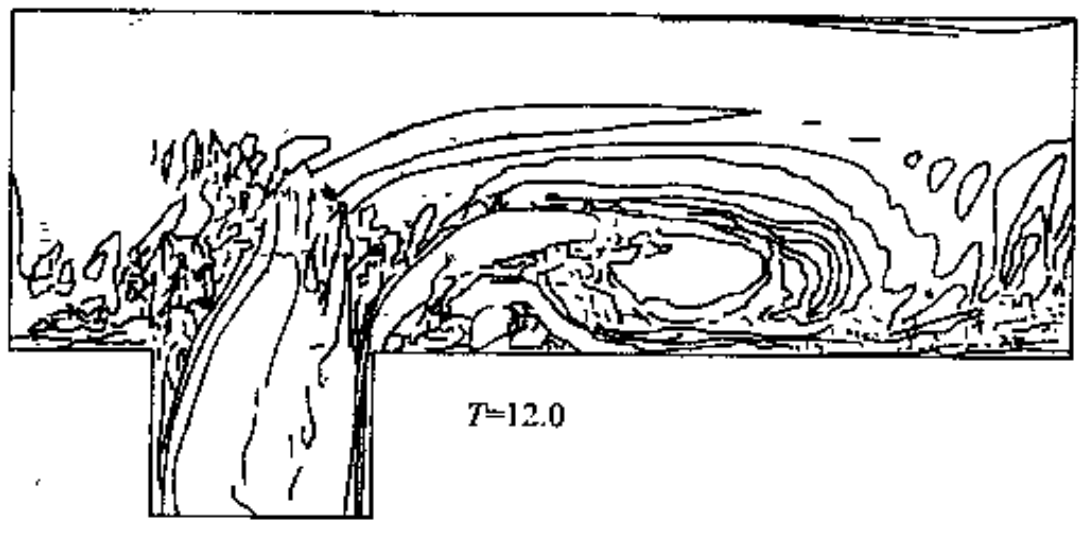


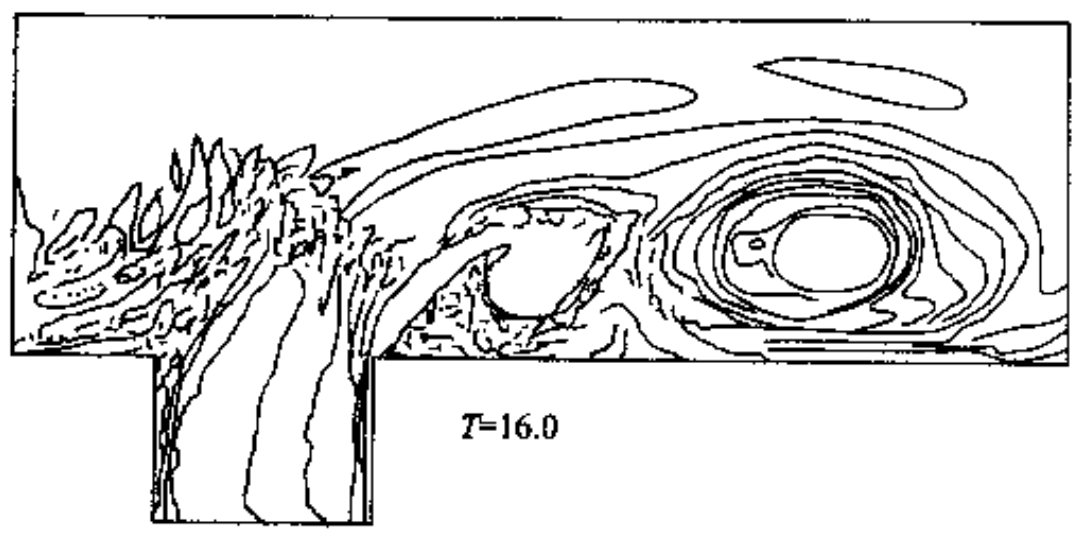


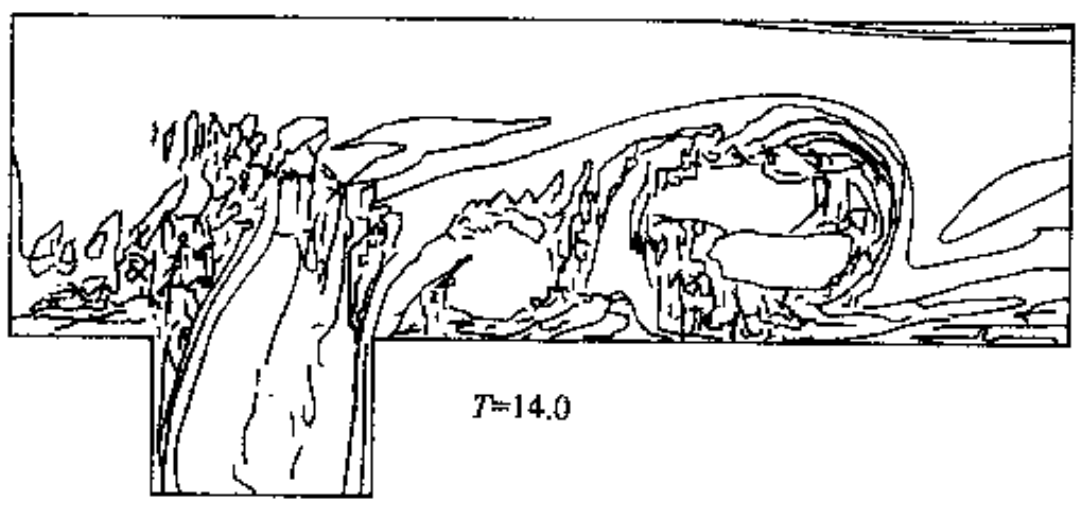


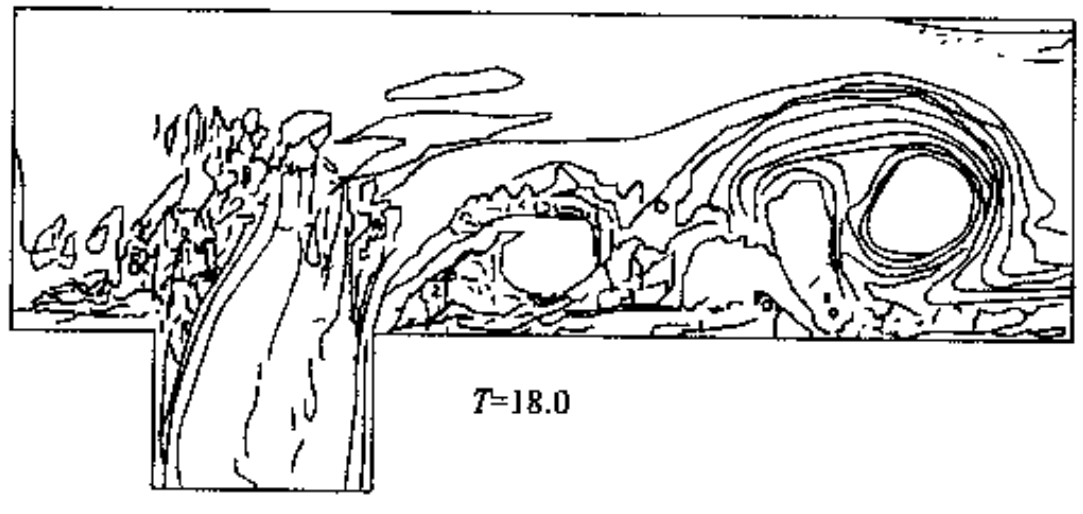
(a) 流线分布图

图1.6(a)　素流旋涡









(b) 涡量分布图

图1.6(b)　素流旋涡

学的一个新分支的计算水动力学，应用领域将越来越广泛，理论与方法将更趋成熟、完善，在不断总结经验的基础上将取得进一步的发展。

§1.2 计算水动力学的原理与方法

流体力学中的解析方法有两个基本困难，一是流体力学基本方程的非线性性质。由于对流速项的存在，方程是非线性的，对于非线性方程，目前难于找到它的分析解。二是几何形状的不规则，实际的流体力学问题其流动区域的形状都是不规则的。对微分方程的分析解，一般对简单的几何形状如圆形、矩形才可方便求解，不规则形状是难于求得分析解的，即使是级数解。因此，工程上对于实际的流体力学问题大多求它们的数值解以满足实际工程上的需要。

电子计算机的出现给各个力学分支的原有理论，方法和计算带来了新的突破。古典的流体力学中的许多方法如保角变换、特殊函数等均已渐渐地被适用于电子计算机的各种离散化的数值方法，如有限差分法、有限元法、边界积分方程法、快速 Fourier 变换、统计试验法等所代替或推向次要地位。

用电子计算机数值地求解流体流动，必须将描述流动的基本方程离散化为代数方程才可求得解答。这里就存在一个用怎样的近似来逼近并正确地反映原来方程的流动的问题。

如果对总体区域作近似 (Global Approximation) 给出一个分布（类似于分离变量法），称谱方法 (Spectral Method)。谱方法固然可以采用总体近似的正交试函数以获得较高的精度，但对于实际工程问题不规则区域与复杂形式的边界，很难找到简单的便于计算的逼近函数。在实际问题中，人们关心往往不是因变量在整个区域内的分布，而是未知量在空间若干特定位置的数值。在这一点上有限差分法具有优势。而有限元法，边界元法、有限解析法等则是对子区域（或称为单元）求近似，这时近似的试解函数就比较容易找到，这种近似称为局部近似 (Local Approximation)。

目前，计算水动力学所常用的方法，有有限差分法和有限元法两大类，其它方法可以归并在这两类中。

1.2.1 有限差分法

它是数值计算解微分方法古老的方法之一，也是系统化地、数值地求解数学物理方法的方程。其中控制方程的导数用差商所代替。用求网格点上的函数值来解定流体的性质，如图 1.7 所示。它的存在性与收敛性很早就有人研究，有不少成功的经验，在流体力学数值计算方面许多人沿用这一方法。随着电子计算机的应用，差分法也在向前发展，有为数众多的差分格式。近年来在收敛性、稳定性、数值奇异性方面又不断地出现新的问题。

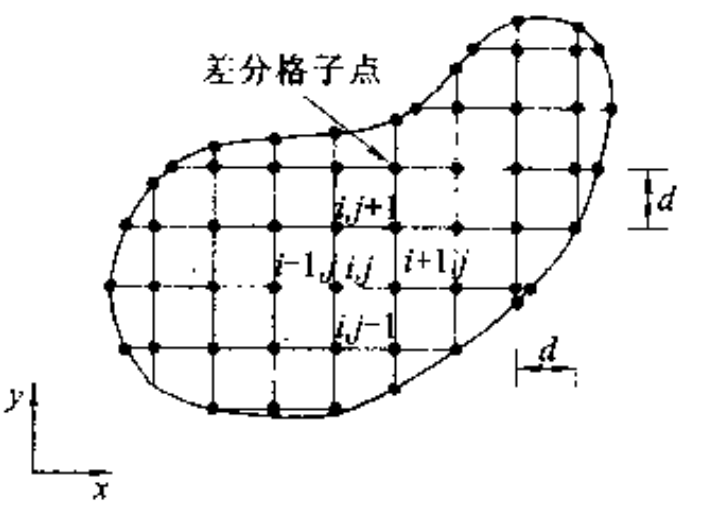


图1.7 差分法网格

后来在差分格式的基础上又出现了所谓“格子”(Cell) 法或叫“细胞”法，如 PIC (Partical - In - Cell) 法，MAC (Mark - And - Cell) 法等，也就是拉格朗日观点与欧拉观点联合应用来描述流体运动的一种方法。

该方法是构造一个格子系，再在格子中安排一定数目的可动质点或标记点，计算时分两步：第一步用差分法求流场，第二步根据流场的对流性质，确定质点运动，这样反复交替进行，直至满足实际边界条件为止。这一方法在模拟溃坝波、水跃、旋涡等平常流体动力学难以描述的现象方面，取得可喜成果，它描述图像十分生动、清楚、并且能够看到流体运动整个时间历程，但在精度方面尚存在着不足。

1.2.2 有限元法

有限元法是求工程中数学物理的微分方程组，初边值问题的系统化的数值方法。

它的数学物理基础是能量极值原理和分段逼近思想，早在18世纪欧拉首创了变分方法，而后里兹和伽辽金应用变分原理求微分方程近似解。但由于在整体区域上选择试解函数的困难和计算工作量大，这一方法未能得到进一步的发展。

近年来由于高速电子计算机的出现，在选择基函数技巧方面，插值理论方面研究的最新进展，又使这一方法重新焕发了青春。

有限元法在西方约开始于20世纪50年代中期，我国约在60年代初独立创立了有限元法，并提出了一套理论和实际相结合的实用方法。

在流体方面有限元法应用较晚，近年来实践表明，有限元法解题能力强，效率高，适合计算机规格化形式，因此，在计算水动力学各个领域都得到了广泛的应用。

有限元的基本思想归纳起来，可以说有：剖分、插值、求权三点。

1.2.2.1 单元剖分

令 R^n 为 n 维欧氏空间，中有开区域 $\Omega \in R^n$。而区域的边界 $\partial\Omega$ 是逐段光滑的，即有 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 为闭区域，流动区域 Ω 可分为有限个子区域 $\bar{\Omega}^{(e)}$，这有限个子区域，我们称之为单元。

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{I} \bar{\Omega}^{(e)} \tag{1.2.1}$$

而

$$\bar{\Omega}^{(e)} = \Omega^{(e)} \cup \partial\Omega^{(e)} \tag{1.2.2}$$

指每一个闭区域 $\bar{\Omega}^{(e)}$ 为开区域 $\Omega^{(e)}$ 的闭包，即开区域 $\Omega^{(e)}$ 为有限个，它们是不重合的，$\partial\Omega^{(e)}$ 是它的边界。这样一来，总的区域 Ω 可以分割为互不相交的有限个单元 $\Omega^{(e)}$，而各个单元的内点之间互不联系，即

$$\Omega_e^{(e)} \cap \Omega_f^{(e)} = \theta \qquad \text{当 } e \neq f \tag{1.2.3}$$

单元剖分是有限元的第一个基本思想，它把整个区域 $\bar{\Omega}$ 上的求解问题，化为有限个子区域 $\bar{\Omega}^{(e)}$ 上的求解问题，见图1.8。

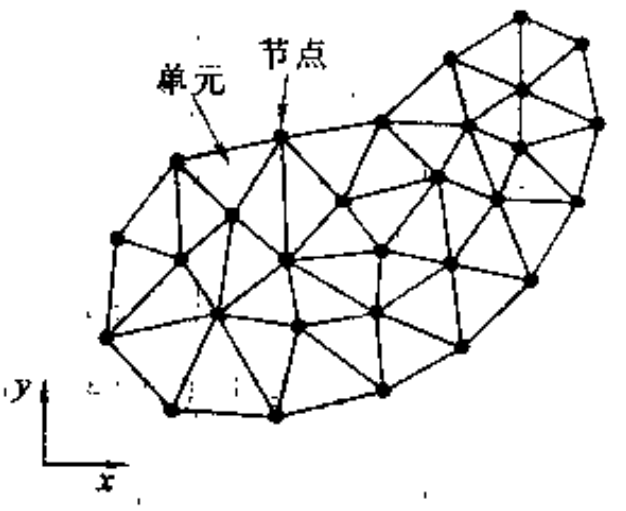


图1.8 有限元法网格

1.2.2.2 插值逼近

如果我们在一定的区域上求解变量场 $u(P)$，它是空间点 P 的函数，也就是说它是空间点 P 的坐标 x_i 的函数，而 $x_i \in \bar{\Omega}$，如果我们找的是近似解，它可以分片地在每个单元内用近似公式来表示。

$$u(x_i)=\begin{cases}u^{(1)}(x_i), & x_i\in\Omega^{(1)}\\ u^{(2)}(x_i), & x_i\in\overline{\Omega}^{(2)}\\ \cdots\cdots\\ u^{(e)}(x_i), & x_i\in\overline{\Omega}^{(e)}\\ \cdots\cdots\\ u^{(E)}(x_i), & x_i\in\Omega^{(E)}\end{cases}\tag{1.2.4}$$

或者开拓为：

$$u(x_i)=\begin{cases}u^{(e)}(x_i), & \text{当 } x_i\in\Omega^{(e)}\text{时}\\ 0, & \text{当 } x_i\notin\Omega^{(e)}\text{时}\end{cases}\tag{1.2.5}$$

或

$$u(x_i)=\bigcup_{e=1}^{E}u^{(e)}(x_i),\quad x_i\in\overline{\Omega}\tag{1.2.6}$$

如果单元有 m 个结点，则单元上各点的函数值 $u^{(e)}$ 可用结点上的函数为 $u_m^{(e)}$ 的插值关系来近似地表示，一般地用结点上的函数值的线性组合来逼近，即

$$u^{(e)}(x_i)=\begin{cases}\sum_{m=1}^{M}u_m^{(e)}\Phi_m^{(e)}(x_i), & \text{当 } x_i\in\overline{\Omega}\text{时}\\ 0, & \text{当 } x_i\notin\overline{\Omega}^{(e)}\text{时}\end{cases}\tag{1.2.7}$$

式中：$\Phi_m^{(e)}(x_i)$ 称为插值基函数，它有如下的性质

$$\Phi_m^{(e)}(p)=\begin{cases}1, & \text{当 } m=p \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } m\neq p \text{ 时}\end{cases}\tag{1.2.8}$$

当 p 为区域内点时，则按插值公式 (1.2.7) 进行插值。

通过插值把原来求 $u(x_i)$ 的精确解化为求其近似解，也就是把原来在无穷维空间求解 $u(P)$ 的问题，化为在有限个结点上，即有限维空间上求解问题，并且试解函数 $u_m^{(e)}$，只需要在子区域上找取即可，这样显然要容易得多，这就是有限元第二个基本思想。

1.2.2.3 总体求权

剩下的问题就是单元之间，各个结点之间的函数值在插值过程中是否相互影响，相互影响的量如何计算的问题。这也就是如何形成单元的影响系数矩阵及如何通过一定的逻辑关系叠加组合成为总体的影响系数矩阵，以得到离散化的有限元代数方程组的问题。

问题的回答是：只有相邻单元其结点之间才有影响，不相邻的单元结点之间则没有影响，对于相互有关系的结点计算的影响大小通常称之为“贡献”的大小，实际上就是“求权”的问题。这一问题因为有限元网格是不规则的，较之有限差分法的规则网络，求结点间影响系数矩阵要困难些。

这也就是有限元法中的第三个基本思想。

1.2.3 边界积分方程法或边界元法

边界元法或边界积分方程法，是近十几年发展起来的，利用原来微分方程理论中格林函数。基本解理论结合单元离散以求方程数值解的一种方法。

通常在边界上布置一些基本流子（如源、汇、涡等），对它们的分布进行区域积分，利用流体力学的基本解化为边界积分，这样一来，原来三维问题可以化为二维。二维问题可以化为一维，得到降维的效果。当边界上几何形状复杂，积分不能直接得出时，与有限元法类似，也将边界剖分为有限元以求数值积分，这一方法称为边界单元法。它也是加权余量法的一种形式，在求内积时，其权函数为基本解。

边界积分方程法或边界元法，如图 1.9 所示，用在流体力学问题有基本解的情况，也就是线性方程的情况，对于非线性方程不存在基本解，不可能将区域积分简化为边界积分的简单公式，边界元法的优点与特色就利用不上了。

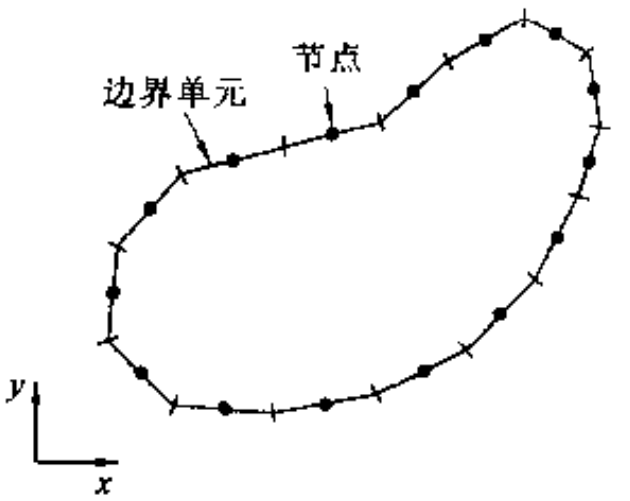


图1.9　边界元法网格

描述流体运动既可用 Euler 法（场的方法）也可以用 Lagrange 法（质点法），随着电子计算机的飞速发展，计算水动力学中采用 Lagrange 法也日益展示出其特色。目前，用计算机描述上百、上千个质点的上下、上方步的运动也并非难事，不仅描述质点，点涡、涡团、随机涡亦有应用。

Monte - Carlo 法或称为随机流动（统计试验）法，不仅可以用来模拟随机性问题与物质质点扩散运动，也可以用来解确定性微分方程，有解对流扩散方程的模型与实际算例。

波尔斯曼方法或格子气方法用来模拟流体运动，关键问题在于给出一种符合物理实质的分布函数，我们在做 Monte - Carlo 方法时，把随机游动模型与物理方程的参数联系起来。

计算水动力学是边缘学科交叉的新的学科分支，在计算水动力学中需要流体力学物理本质的深刻理解与现代计算技术与有效算法和电子计算机应用的熟练技术三方面知识与技能，才可能成为计算水动力学的“里手”，并不断改进工作效率与不断提高水平，推动其发展。

第二章　流体流动的有限元法与边界元法

有限单元法 (Finite Element Method)，简称有限元法 (FEM)，20 世纪 70~80 年代移植到流体力学中。有限元法将流动区域分为许多三角形、矩形或曲边形等各种形状的单元，利用变分原理或加权余量法建立结点函数值的矩阵方程组。与差分法相比，有限元法的优点是：能够适应边界形状不规则的区域，便于处理自然边界条件。有限元法比较适应求解椭圆型方程和扩散方程的数值解，计算程序虽然比较复杂，但比较标准规范，便于使用。

边界元法来自于边界积分方程法，也可以认为是加权余量法的一个特例，最先应用于拉普拉斯方程和泊松方程的求解，近年来逐步应用于各种流动问题的求解。

§2.1　变分原理与加权余量法

2.1.1 泛函极值与变分原理

有限元方法在数学上的理论基础之一是变分原理。变分原理将微分方程与一个泛函极值问题联系起来，在一定条件下，利用变分原理可以将一个微分方程的求解变成一个变分形式的积分方程的近似解的求解问题，不仅可以避开微分方程求解的困难，对近似解的可微性要求也可以降低。

2.1.1.1 泛函极值与变分

所谓泛函 (Functional)，就是函数的函数，如

$$J(u) = \int_a^b u(x)\mathrm{d}x$$

不同的函数 u 对应不同的 J 值。若要寻求某函数 u，使泛函取极值，这就是泛函的极值问题。下面举一个简单的例子。

例 2.1　求过(x_1, y_1)、(x_2, y_2)两点，长度最短的曲线 $y(x)$ 如图 2.1 所示。

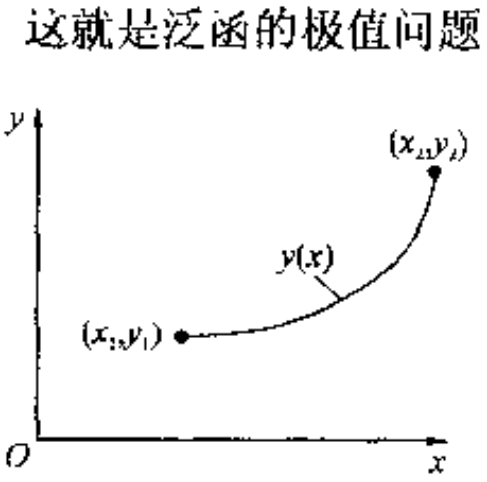


图2.1　例2-1示意图

曲线长度　　$$L = J(y) = \int_x^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

就是一个以 y 为自变量的泛函，y 满足边界条件 $y(x_1) = y_1$，$y(x_2) = y_2$。

设 $y = y_0(x)$ 时 J 值为最小，则其它曲线 $y(x)$ 的泛函值 $J(y) \geqslant J(y_0)$。令

$$y(x) = y_0(x) + \alpha\eta(x)$$

α 为小参数，$\eta(x)$ 为任意的给定函数，满足 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$。则

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y'_0+\alpha\eta')^2}\,dx=\phi(\alpha)$$

取极值

$$\phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{y'_0}{\sqrt{1+y'^2_0}}\eta'dx=\left(\frac{\eta y'_0}{\sqrt{1+y'^2_0}}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_0}{\sqrt{1+y'^2_0}}\right)\eta dx=0$$

显然右边第一项等于 0，则

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_0}{\sqrt{1+y'^2_0}}\right)\eta dx=0$$

因为 $\eta(x)$ 任意，所以有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_0}{\sqrt{1+y'^2_0}}\right)=0$$

这是一个微分方程。积分得$y'_0=$常数，所以过两点、长度最短的曲线是直线。

该例题的分析还可以有另一种表述方式。令

$$y(x)=y_0(x)+\delta y$$

δy 为 y 的增量函数，满足$\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$，则

$$\delta J=J(y)-J(y_0)=\int_{x_1}^{x_2}\delta y'\frac{y'_0}{\sqrt{1+y'^2_0}}dx=-\int_{x_1}^{x_2}\delta y\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_0}{\sqrt{1+y'^2_0}}\right)dx$$

称为泛函的变分。由于y_0为J的极小值点，应有$\delta J\geqslant 0$，而积分式中δy可正可负，所以只可能$\delta J=0$。这说明，要使泛函取极值的必要条件是它的变分$\delta J=0$。本例中，由δy的任意性，也得到微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_0}{\sqrt{1+y'^2_0}}\right)=0$$

再考虑更具一般的情况：求泛函

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,\ y,\ y')dx \tag{2.1.1}$$

的极值。当y有增量δy时，泛函的变分

$$\delta J=J(y_0+\delta y)-J(y_0)$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y'\right]_{y=y(x)}dx=\cdots=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]_{y=y(x)}\delta y dx$$

当$\delta J=0$时泛函取极值，即

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]_{y=y(x)}\delta y dx=0 \tag{2.1.2}$$

由δy的任意性，得

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \tag{2.1.3}$$

且 $$y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2$$

式 (2.1.3) 称为欧拉方程。因此，一个泛函极值的变分问题，又可以归结为一个微分方程的解。

2.1.1.2 变分原理

反过来，在一定条件下，一个微分方程的解也能转换成形如式 (2.1.2) 的泛函变分的积分方程，这一性质可以用来求解微分方程的近似解，这就是所谓**变分原理**。

定理：设有微分方程 $L(u)=f$（在区域Ω中） (2.1.4)

若算子 L 为对称正定的线性算子，u、$f\in$Hilbert 空间 H，则 u_n 为方程 (2.1.4) 的解的充分必要条件是：

泛函 $$J(u)=\frac{1}{2}<u,\ L(u)>-<u,\ f> \tag{2.1.5}$$

在 $u=u_n$ 处取最小值。

式 (2.1.5) 中：<>代表两个函数的内积，这里可以定义

$$<u,\ v>=\int_{\Omega} uv\mathrm{d}\Omega \tag{2.1.6}$$

若 L 为对称算子，则 $$<u,\ L(v)>=<v,\ L(u)> \tag{2.1.7}$$

正定算子满足 $$<u,\ L(u)>\geqslant 0 \tag{2.1.8}$$

在上述条件下，式 (2.1.5) 定义的泛函的变分为

$$\delta J=\frac{1}{2}\int_{\Omega}[\delta uL(u)+uL(\delta u)-2f\delta u]\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}[L(u)-f]\delta u\mathrm{d}\Omega$$

当 J 取极小值时，有 $\delta J=0$，即

$$\int_{\Omega}[L(u)-f]\delta u\mathrm{d}\Omega=0 \tag{2.1.9}$$

由δu的任意性可知方程 (2.1.4) 满足。

以泊松方程为例 $$\nabla^2 u=-f \tag{2.1.10}$$

可改写成 $$-\nabla^2 u=f \tag{2.1.11}$$

因为 $$\nabla(v\nabla u)=\nabla v\cdot\nabla u+v\nabla^2 u$$

所以 $$\int_{\Omega} v(-\nabla^2 u)\mathrm{d}\Omega=-\int_{\Omega}\nabla(v\nabla u)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\Omega$$

根据奥－高公式，有

$$\int_{\Omega} \nabla (v\nabla u)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

所以 $$<v,\ -\nabla^2 u>=\int_{\Omega} v(-\nabla^2 u)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{2.1.12}$$

当 u、v 均满足齐次边界条件 $$u\big|_{\Gamma}=0 \tag{2.1.13}$$

和 $$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\Big|_{\Gamma_2}=0 \tag{2.1.14}$$

时，算子$-\nabla^2$为对称正定的。根据式 (2.1.9)

$$\delta J=\int_{\Omega}[-\nabla^2 u-f]\ \delta u\mathrm{d}\Omega=0$$

式 (2.1.12) 中取 $v=\delta u$，代入上式有

$$\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla\delta u\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}\delta u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega} f\,\delta u\mathrm{d}\Omega \tag{2.1.15}$$

对于满足齐次边界条件 (2.1.13)、(2.1.14) 的边值问题，方程右边的边界积分项为零。

泊松方程的非齐次边值问题的边界条件如下

第一类边界条件（又称本质边界条件） $$u\big|_{\Gamma_1}=\bar{u} \tag{2.1.16}$$

第二、三类边界条件（又称自然边界条件） $$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\Big|_{\Gamma_2}=\beta \tag{2.1.17}$$

可以证明，通过适当的变换，仍然可以应用变分原理和式 (2.1.15)。又因为在 Γ_1 上 u 给定，$\delta u=0$，所以有

$$\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla\delta u\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}\delta u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega} f\,\delta u\mathrm{d}\Omega \tag{2.1.18}$$

二维问题时 $$u=u(x,\ y),\quad \nabla u\cdot\nabla\delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\delta u}{\partial y}$$

有 $$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}\delta u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega} f\,\delta u\mathrm{d}\Omega \tag{2.1.19}$$

其中，在边界积分里可将已知的自然边界条件 (2.1.17) 代入，所以应用变分原理便于处理自然边界条件问题。

2.1.1.3 Ritz 法

应用变分原理得到的积分式 (2.1.9) 或 (2.1.18)、(2.1.19) 等可以求微分方程的近似解，这种方法称为 Ritz 法，求解过程如下。

设微分方程　　$L(u)=f$　（在区域Ω中）

的满足第一类边界条件的近似解为

$$u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi_i \tag{2.1.20}$$

ϕ_i、α_i $(i=1, \cdots, n)$为一组线性无关的基函数和相应的待定系数。因此

$$\delta u=\sum_{i=1}^{n}\delta\alpha_i\phi_i, \quad L(u)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L(\phi_i)$$

代入式 (2.1.9)，得　　$$\delta J=\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L(\phi_i)-f\right]\sum_{i=1}^{n}\delta\alpha_i\phi_i\mathrm{d}\Omega=0$$

由于$\delta\alpha_i$是任意的，则

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L(\phi_i)-f\right]\phi_i\mathrm{d}\Omega=0$$

或　　$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{\Omega}\phi_i L(\phi_i)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\phi_i f\,\mathrm{d}\Omega$$

这就得到一组代数方程　　$a_{ij}\alpha_j=b_i$　　$(i, j=1, \cdots, n)$ (2.1.21)

其中　　$$a_{ij}=\int_{\Omega}\phi_i L(\phi_j)\mathrm{d}\Omega, \quad b_i=\int_{\Omega}\phi_i f\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.1.22}$$

求解可得系数α_i $(i=1, \cdots, n)$的值，便得到微分方程 (2.1.4) 的近似解。

又以二维区域中的泊松方程为例

$$u(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi_i(x, y), \qquad \delta u=\sum_{i=1}^{n}\delta\alpha_i\phi_i(x, y)$$

代入式 (2.1.19)，考虑到$\delta\alpha_i$可任意取值，得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_i}{\partial x}+\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega\right]=\int_{\Gamma}\phi_i\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}f\phi_i\mathrm{d}\Omega \tag{2.1.23}$$

代数方程组的系数等项为

$$a_{ij}=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega \qquad b_i=\int_{\Gamma}\phi_i\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}f\phi_i\mathrm{d}\Omega \tag{2.1.24}$$

在应用 Ritz 法求解微分方程时存在的主要困难是：变分原理要求算子L为对称正定的线性算子，这在流体流动的问题中常常难以满足；此外，在复杂边界形状的区域寻找满足第一类边界条件的基函数更是十分困难。

解决第一个困难可以通过应用加权余量法将变分原理加以扩展；对第二个问题可在求解

区域上进行分片插值，这样就引出了有限单元法的思想。

2.1.2 加权余量法

2.1.2.1 加权余量法

加权余量法是求解微分方程近似解的一类方法，其基本思想是：

（1）对微分方程 (2.1.4) 式

$$L(u)=f \quad (\text{在区域 } \Omega \text{ 中})$$

取近似解

$$\tilde{u}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\phi_i \tag{2.1.25}$$

ϕ_i、α_i $(i=1, \cdots, n)$为一组线性无关的基函数和相应的待定系数。显然近似解一般并不完全满足原方程，所以存在有误差 $\varepsilon=L(\tilde{u})-f$，又称为余量。

（2）我们希望余量尽可能小，使其在区域 Ω 中在平均意义下为零，为此取内积

$$<\varepsilon,\ W_i>=\int_{\Omega}[L(\tilde{u})-f]\,W_i\,\mathrm{d}\Omega=0 \tag{2.1.26}$$

W_i $(i=1, \cdots, n)$为一组权函数。因此便得到求解待定系数的一组代数方程组

$$a_{ij}\alpha_j=b_i \quad (i, j=1, \cdots, n)$$

当 L 为线性算子时

$$a_{ij}=\int_{\Omega}W_iL(\phi_j)\mathrm{d}\Omega, \qquad b_i=\int_{\Omega}W_i f\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.1.27}$$

求解该方程组便可以确定近似解 (2.1.25) 的待定系数。

根据所采用的权函数 W_i 的不同，有多种不同的加权余量法。如：

①配置法。取设在空间点(x_i, y_i, z_i)处的狄拉克函数为权函数，即

$$W_i=\delta(x-x_i,\ y-y_i,\ z-z_i)$$

则

$$<\varepsilon,\ W_i>=\int_{\Omega}\varepsilon\,\delta(x-x_i,\ y-y_i,\ z-z_i)\mathrm{d}\Omega=\varepsilon\,(x_i,\ y_i,\ z_i)=0$$

即强制在该点上余量为零，使得到代数方程组

$$L\left(\tilde{u}\,(x_i,\ y_i,\ z_i)\right)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,L\left[\phi_j\,(x_i,\ y_i,\ z_i)\right]=f\,(x_i,\ y_i,\ z_i) \quad (i=1,\ \cdots,\ n)$$

②最小二乘法。对余量自身的内积取极值，即

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}<\varepsilon,\ \varepsilon>=2\int_{\Omega}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_i}\mathrm{d}\Omega=0$$

这相当于取权函数 $W_i=\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_i}$。当 L 为线性算子时，$W_i=L(\phi_i)$

便得到方程组

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_jL(\phi_j)-f\right]L(\phi_i)\mathrm{d}\Omega=0\ (i=1,\ \cdots,\ n)$$

(3)伽辽金法。这是用得最多的一种方法，在下面详细介绍。

2.1.2.2 伽辽金法 (Галёркин, Galerkin)

伽辽金法取基函数本身为权函数，即

$$W_i = \phi_i \ (i = 1, \cdots, n) \tag{2.1.28}$$

则
$$<\varepsilon, \phi_i> = \int_{\Omega} \left[L(\tilde{u}) - f \right] \phi_i \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \left[L\left(\sum_{j}^{n} a_j \phi_j \right) - f \right] \phi_i \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.1.29}$$

考虑到可取 $\delta u = \sum_{i=1}^{n} \delta a_i \phi_i$ 和 δa_i 的任意性，式 (2.1.29) 也可写成

$$\int_{\Omega} \left[L(\tilde{u}) - f \right] \delta u \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.1.30}$$

这与从变分原理得到的式 (2.1.9) 相同。当 L 为线性算子时，

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \int_{\Omega} \phi_i L(\phi_j) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \phi_i f \, \mathrm{d}\Omega$$

这与用 Ritz 法推导的关系式相同。

伽辽金法可以认为是变分原理的扩展，也就是广义变分原理的一种形式，在力学中相当于虚功原理。例如，一个系统上所有作用力（主动力、约束力和惯性力）应满足方程

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0$$

设 $\delta \boldsymbol{u}_i$ 为 $\boldsymbol{F}_i$ 作用点处的虚位移，则虚功之和满足

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{u}_i = 0$$

在流体力学里伽辽金法则对应于虚功率原理。流体力学运动方程为

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.1.31}$$

式中：u_i 为速度分量，f_i 为质量力分量，应力张量 $p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$，$\tau_{ij}$ 为切应力张量。

对方程 (2.1.31) 应用伽辽金法，以虚速度 δu_i 乘式 (2.1.31)，在区域 Ω 上积分得

$$\int_{\Omega} \rho \frac{Du_i}{Dt} \delta u_i \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \rho f_i \delta u_i \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.1.32}$$

边界条件有：应力边界条件

$$n_j p_{ij} \Big|_{\Gamma_p} = \bar{p}_i$$

和速度边界条件

$$u_i \Big|_{\Gamma_u} = \bar{u}_i \quad (\text{此时 } \delta u_i = 0)$$

式 (2.1.32) 右端第二项中

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}\delta u_i) - p_{ij}\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}\delta u_i) - p_{ij}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

应用奥－高定理并引入边界条件有

$$\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}\delta u_i)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} n_j p_{ij}\delta u_i \mathrm{d}S = \int_{\Gamma_p} p_i \delta u_i \mathrm{d}S$$

而

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \mathrm{e}_{ij} + \omega_{ij}$$

且

$$p_{ij}\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(p_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = 0,\quad p_{ij}\mathrm{e}_{ij} = (-p\delta_{ij}+\tau_{ij})\mathrm{e}_{ij} = -p\mathrm{e}_{ii} + \tau_{ij}\mathrm{e}_{ij}$$

所以

$$\int_{\Omega}\rho\left(f_i - \frac{Du_i}{Dt}\right)\delta u_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_p}\bar{p}_i\,\delta u_i \mathrm{d}S = \int_{\Omega}(-p\delta\mathrm{e}_{ii} + \tau_{ij}\delta\mathrm{e}_{ij})\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.1.33}$$

这就是虚功率原理的表达式，左边体积分两项分别为质量力和惯性力的虚功率，边界积分为边界上表面力的虚功率，右边两项为流体内部应力的虚功率。

与 Ritz 法相比，伽辽金法并不要求算子 L 是对称正定的，因而更便于应用在流动问题的计算中，但在解的收敛性方面的理论研究还不如 Ritz 法完善。在对称正定线性算子方程的情况下，Ritz 法与伽辽金法完全等价。

2.1.2.3 强解与弱解

根据伽辽金法对解的可微、可积性质的要求不同，得到的解有强解和弱解两种情况。

(1) 弱解

以泊松方程 $\nabla^2 u = -f$ 为例，由

$$\int_{\Omega}[-\nabla^2 u - f]\ \delta u \mathrm{d}\Omega = 0$$

我们已经推导出 (2.1.15) 式

$$\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla\delta u\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma}\delta u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} f\,\delta u\mathrm{d}\Omega$$

二维情况有 (2.1.19) 式

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \delta u}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma}\delta u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} f\,\delta u\mathrm{d}\Omega$$

或 (2.1.23) 式

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[\int_{\Omega}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_i}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega\right] = \int_{\Gamma}\phi_i\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} f\,\phi_i\mathrm{d}\Omega$$

这里积分方程对基函数的要求仅仅是一阶导数平方可积，这种解称为弱解。注意在以上各式的推导中并没有直接用到自然边界条件，但自然边界条件在推导出的表达式中可以自动满足。

(2) 强解

还是以泊松方程为例

$$\begin{cases} \nabla^2 u+f=0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}-\mathrm{g}=0 \end{cases} \tag{2.1.34}$$

我们希望在构造加权余量方程时能够用上自然边界条件，为此分别对微分方程和自然边界条件取余量

$$\varepsilon_1=\nabla^2\tilde{u}+f\ , \qquad \varepsilon_2=\left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}-\mathrm{g}$$

令 $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，应用伽辽金法

$$<\varepsilon,\ \phi_i>=\int_{\Omega}(\nabla^2\tilde{u}+f)\,\phi_i\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_2}\left(\left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}-\mathrm{g}\right)\phi_i\mathrm{d}S=0$$

或

$$\int_{\Omega}(a_i\nabla^2\phi_i+f)\,\phi_i\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_2}\left(a_i\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\mathrm{g}\right)\phi_i\mathrm{d}S=0 \tag{2.1.35}$$

这要求基函数的二阶导数可积，这种解称为强解。

不论强解或弱解，自然边界条件都能自动满足，但弱解对近似解的可微性要求较低，便于在有限元法中构造分片插值的近似解基函数。

§2.2 有限元法及其插值函数

应用伽辽金法和 Ritz 法时所面临的一个共同问题是：在复杂边界形状的区域寻找满足第一类边界条件的基函数十分困难，甚至根本不可能。解决办法是将区域划分为若干形状规则的子区域，称为单元，在每个单元上构造分片插值函数，这就是有限单元法。

2.2.1 有限元法解题步骤

用有限元法求解一个微分方程的近似解的过程可分为下面几个步骤。

2.2.1.1 区域剖分

将区域 Ω 分为互不重叠、且无间隙的有限个子区域（单元）$\Omega^{(e)}$（单元编号 $e=1,\cdots,E$），即：

$$\Omega=\bigcup_{e=1}^{E}\Omega^{(e)}$$

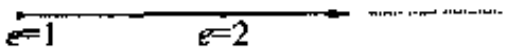
对于一维问题，单元为一段段的线段；二维问题，单元可以是三角形、矩形或者曲边四边形乃至其它多边形（见图 2.2）；三维问题常用的单元形状有四面体、六面体等。

区域中划分单元的数目和尺寸大小要根据对解的精度及计算稳定性的要求来决定，同时也要兼顾计算量的大小和计算机性能的限制。根据问题的物理性质，单元在区域中分布的疏密程度可以是变化的。一般来说，物理量变化剧烈的地方，单元的分布要密一些，尺寸相对要小些。

2.2.1.2 分片插值

在每个单元上选 M 个插值结点，对方程的解进行插值逼近，即

一维问题：



二维问题：

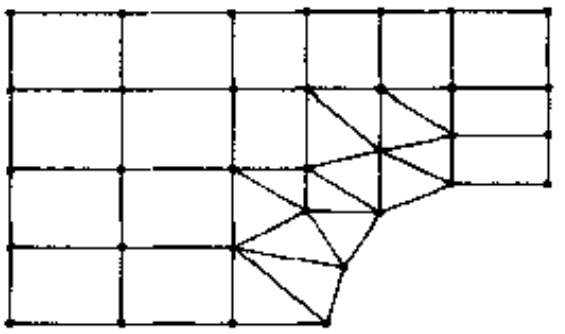


图2.2　有限元法区域剖分示意图

在 $\Omega^{(e)}$ 上

$$\tilde{u} = u^{(e)} = \sum_{m=1}^{M} u_m^{(e)} \Phi_m^{(e)} \tag{2.2.1}$$

$u_m^{(e)}$ 和 $\Phi_m^{(e)}$ ($m = 1,2, \cdots, M$)分别为结点函数值和插值基函数（又称为形函数）。这样就在整个区域上构造出分片插值的近似解。这里结点函数值取代了待定系数 α_i，由于单元形状规则，便于构造插值基函数。

以 x_i 代表空间点的坐标（一维问题，$k=1$；二维问题，$k=1,2$；三维问题，$k=1,2,3$），形函数在插值结点上满足

$$\Phi_m^{(e)}(x_{kn}) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{2.2.2}$$

根据对近似解的插值精度和可微性的要求可以选择插值函数的阶数，这就决定了单元中插值结点的数目。图 2.2 中的一维单元有两个结点，三角形单元有三个结点，矩形单元有四个结点，可以构造单元上的线性拉格朗日插值函数，但是当选用更高次的插值函数时，就可能需要更多的插值结点。除了优先选择单元界面上的角点作为插值结点外，在单元的界面和内部均可布置更多的结点。相邻的单元共享位于界面上的结点，这就保证了分片插值函数的连续性。

整个区域 Ω 中的结点按一定顺序编号，$i = 1, \cdots, P$ (P 为结点总数)，称为总体编号。此外，每个结点在其所属的每个单元还有局部编号，$m = 1, \cdots, M$。设某变量 Z 在某结点上的值为 $Z_m^{(e)}$（局部编号下），或 Z_i（总体编号下），两者的关系为

$$Z_m^{(e)} = \Delta_{mi}^{(e)} Z_i \tag{2.2.3}$$

其中

$$\Delta_{mi}^{(e)} = \begin{cases} 1 & x_{km}^{(e)} = x_{ki} \\ 0 & x_{km}^{(e)} \neq x_{ki} \end{cases} \tag{2.2.4}$$

称为布尔矩阵，为 $M \times P$ 阶的矩阵，在下面的推导中它被用来确定结点总体编号与局部编号之间的关系。

2.2.1.3　形成单元方程

在每个单元上应用 Ritz 法或伽辽金法的积分方程

$$\int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} L\left(\sum_{n=1}^{M} u_n^{(e)} \Phi_n^{(e)}\right) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} f \, \mathrm{d}\Omega$$

即
$$\sum_{m=1}^{M} u_n^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} \, L(\Phi_n^{(e)}) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} f \, \mathrm{d}\Omega$$

便得到单元上的局部有限元方程组

$$A_{mn}^{(e)} u_n^{(e)} = F_m^{(e)} \qquad (m, n = 1, \cdots, M) \tag{2.2.5}$$

或

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(e)} & \cdots & A_{1M}^{(e)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M1}^{(e)} & \cdots & A_{MM}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ \vdots \\ u_M^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(e)} \\ \vdots \\ F_M^{(e)} \end{Bmatrix}$$

其中二阶张量
$$A_{mn}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} \, L(\Phi_n^{(e)}) \mathrm{d}\Omega \tag{2.2.6}$$

又称为单元刚度矩阵。右端项
$$F_m^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} f \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.2.7}$$

当然，积分方程若是采用如式 (2.1.23) 那样降阶的弱解形式，局部方程的计算式就会与式 (2.2.6)、(2.2.7) 有所不同。此外，当函数f比较复杂时，可用数值积分，令$f=f_n^{(e)}\Phi_n^{(e)}$，则

$$F_m^{(e)} = f_n^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} \Phi_n^{(e)} \mathrm{d}\Omega \tag{2.2.8}$$

2.2.1.4　合成总体方程

在整个区域上应用 Ritz 法或伽辽金法，对 δu 也应用分片插值，有

$$\int_{\Omega} \left[L(\tilde{u}) - f \right] \delta u \mathrm{d}\Omega = \sum_{e=1}^{P} \left\{ \int_{\Omega^{(e)}} \left[L(u^{(e)}) - f \right] \delta u^{(e)} \mathrm{d}\Omega \right\} = 0$$

其中，在单元 $\Omega^{(e)}$ 上，$\delta u = \delta u^{(e)} = \delta u_m^{(e)} \Phi_m^{(e)} = \delta u_i \, \Delta_{im}^{(e)} \Phi_m^{(e)}$，且 $u^{(e)} = \Phi_n^{(e)} u_n^{(e)}$，则

$$\sum_{e=1}^{P} \left\{ \int_{\Omega^{(e)}} \left[L(\Phi_n^{(e)}) u_n^{(e)} - f \right] \delta u_i \Delta_{im}^{(e)} \Phi_m^{(e)} \mathrm{d}\Omega \right\} = 0$$

δu_i 为总体编号下的结点 δu 值。由δu_i的任意性，可取$\delta u_i \neq 0$ 和$\delta u_j = 0 (i \neq j)$，且 $u_n^{(e)} = \Delta_{ni}^{(e)} u_i$，得

$$\sum_{e=1}^{P} \left\{ \Delta_{im}^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} L(\Phi_n^{(e)}) u_n^{(e)} \mathrm{d}\Omega \right\} = \sum_{e=1}^{P} \left\{ \Delta_{im}^{(e)} \left[\int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} L(\Phi_n^{(e)}) \mathrm{d}\Omega \right] \Delta_{nj}^{(e)} u_j \right\} = \sum_{e=1}^{P} \left\{ \Delta_{im}^{(e)} \left[\int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m^{(e)} f \, \mathrm{d}\Omega \right] \right\}$$

令
$$A_{ij}^{(e)} = \Delta_{im}^{(e)} A_{mn}^{(e)} \Delta_{nj}^{(e)}, \quad F_i^{(e)} = \Delta_{im}^{(e)} F_m^{(e)} \quad (i, j = 1,2, \cdots, P) \tag{2.2.9}$$

这是用总体编号表示的单元有限元方程的矩阵和右端向量，大小为 $P \times P$ 和$P \times 1$。将各单元方程合并便形成了整个区域上所有结点函数值的线性代数方程组

$$A_{ij} u_i = F_i \tag{2.2.10a}$$

称为总体有限元方程。其中总体刚度矩阵的元素和方程的右端向量为

$$A_{ij}=\sum_{e=1}^{I}A_{ij}^{(e)},\quad F_i=\sum_{e=1}^{I}F_i^{(e)} \tag{2.2.11}$$

有限元的总体刚度矩阵是一个带状的稀疏矩阵，计算程序中可以利用这个性质来压缩数组的大小和减少计算量。

2.2.1.5 引入边界条件

对形成的有限元总体方程组必须通过引入边界条件来予以修正，否则方程组是无解的。从前面介绍的泊松方程的 Ritz 法或伽辽金法可知，自然边界条件出现在边界积分中，积分结果加入到总体方程中相应结点的右端项中。

必须给定至少一个结点上的本质边界条件。设已知位于边界上的某结点 i 上，$u_i=U$，可以通过修改总体方程来引入该边界条件。一种做法是：取 $A_{ii}^*=1$，$F_i^*=U$，且对于所有的 $j\neq i$，取 $F_j^*=F_j-A_{ji}U$，$A_{ji}^*=A_{ij}^*=0$，其余元素不变。修改后的总体方程为

$$A_{ij}^*u_j=F_i^* \tag{2.2.10b}$$

2.2.1.6 方程求解

求解修改过的总体方程 (2.2.10b)，便得到各结点上的函数值 u_i，这就是微分方程的数值解。

已知结点函数值后，便可以利用分片插值式 (2.2.1) 计算区域内部任意一点上的 u 值。还可求导数和积分，如

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u^{(e)}}{\partial x}=\sum_{m=1}^{M}u_m^{(e)}\frac{\partial \Phi_m^{(e)}}{\partial x}\qquad x_i\in\Omega^{(e)}\text{ 时}$$

及

$$\int_{\Omega}u\mathrm{d}\Omega=\sum_{e=1}^{I}\int_{\Omega^{(e)}}u^{(e)}\mathrm{d}\Omega=\sum_{e=1}^{I}\left[\sum_{m=1}^{J}\left(u_m^{(e)}\int_{\Omega^{(e)}}\Phi_m^{(e)}\mathrm{d}\Omega\right)\right]\qquad\text{等。}$$

下面以一维泊松方程为例说明有限元的计算过程。方程为

$$\nabla^2u=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=-f,\quad x\in[a,\ b] \tag{2.2.12}$$

边界条件为：

$$u(a)=u_A,\qquad u'(b)=g_B$$

应用伽辽金法

$$\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+f\right)\delta u\,\mathrm{d}x=0$$

分步积分，不难得到如下弱解的积分式

$$\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\delta u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f\,\delta u\,\mathrm{d}x+\delta u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\bigg|_a^b=\int_a^b f\,\delta u\,\mathrm{d}x+\delta u\,(b)g_B \tag{2.2.13}$$

这样只要求近似解的一阶导数是可积的，可采用两结点单元，分片线性插值。

将区间[a, b]剖分成 3 个两结点单元，共 4 个结点如图 2.3。每个单元局部以从左到右顺

序编号，总体编号与局部编号的关系见表 2.1。

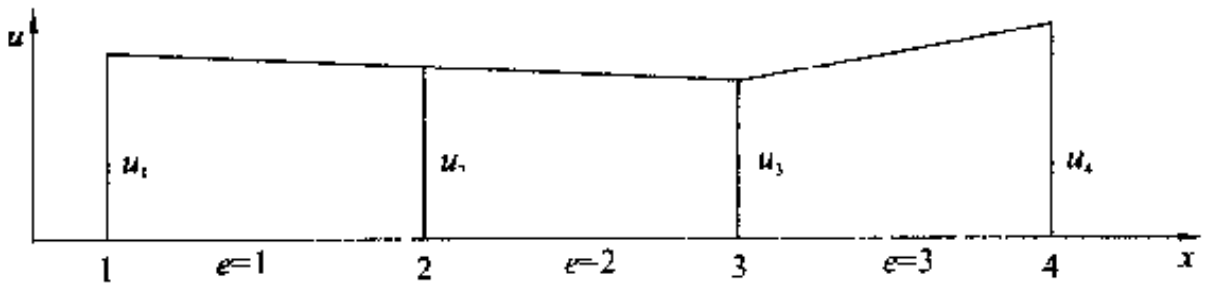


图2.3　分片插值示意图

表 2.1

单元	对应局部编号 1、2 的总体编号
1	1、2
2	2、3
3	3、4

对单元 1，有

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \quad \text{所以布尔矩阵} \quad \Delta_{mn}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同理，单元 2、3 的布尔矩阵为 $\Delta_{mn}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\Delta_{mn}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

结点单元上的插值函数为线性函数，如图 2.4 所示，取无量纲的局部坐标

$$\xi = \frac{(x - x_1^{(e)})}{h}$$

单元长度 $h = x_2^{(e)} - x_1^{(e)}$

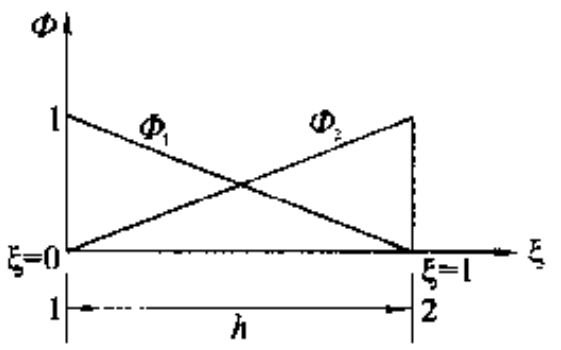


图2.4　一维线性形函数

则形函数为 $\Phi_1^{(e)} = \Phi_1 = 1 - \xi$，$\Phi_2^{(e)} = \Phi_2 = \xi$ (2.2.14)

(去掉了角标(e))，满足 $\Phi_1(0) = 1$，$\Phi_1(1) = 0$；$\Phi_2(1) = 0$，$\Phi_2(1) = 1$。得到的分片插值逼近如图 2.3 所示。形函数的一阶导数

$$\frac{d\Phi_1}{dx} = -\frac{1}{h}, \quad \frac{d\Phi_2}{dx} = \frac{1}{h}$$

应用伽辽金法建立单元方程，将式 (2.2.13) 的积分改在单元 e 上进行，用 Φ_m 代替 δu，暂不考虑自然边界条件，有

$$\left[\int_\Omega \left(\frac{d\Phi_n}{dx} \frac{d\Phi_m}{dx} \right) d\Omega \right] u_n^{(e)} = \int_\Omega f \Phi_m d\Omega$$

且单元积分 $\int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x}\right) \mathrm{d}\Omega = h\int_0^1 \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x}\right)\mathrm{d}\xi$ 则

$$A_{mn}^{(e)} = h\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.15}$$

$$F_m^{(e)} = h\int_0^1 f\Phi_m \mathrm{d}x$$

形成单元方程 $$A_{mn}^{(e)} u_n^{(e)} = F_m^{(e)} \quad (m,\ n = 1,2)$$

或 $$\begin{bmatrix} A_{11}^{(e)} & A_{21}^{(e)} \\ A_{21}^{(e)} & A_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

若在单元上对 f 同样进行插值，$f^{(e)} = f_n^{(e)}\Phi_n$，则

$$F_m^{(e)} = \left(h\int_0^1 \Phi_m\Phi_n \mathrm{d}x\right) f_n^{(e)} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{h}{6}\begin{Bmatrix} 2f_1^{(e)} + f_2^{(e)} \\ f_1^{(e)} + 2f_2^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{2.2.16}$$

当 $f = c$ 为常数时， $$F_m^{(e)} = \frac{hc}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.2.17}$$

为便于将单元方程合成为总体方程，我们先将单元方程变成总体结点编号下的方程组，对单元 1 有

$$A_{ij}^{(1)} u_j = F_i^{(1)} \quad (i,\ j = 1,\ \cdots,\ 4)$$

其中

$$A_{ij}^{(1)} = \Delta_{im}^{(1)} A_{mn}^{(1)} \Delta_{nj}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{21}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{21}^{(1)} & 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_i^{(1)} = \Delta_{im}^{(1)} F_m^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

同理，对单元 2、3 有

$$A_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ F_i^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix};\ A_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} \end{bmatrix},\ F_i^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

将三个扩展的单元矩阵和右端项向量相叠加，得

总体刚度矩阵

$$\boldsymbol{A}_{ij}=\sum_{e=1}^{3}\boldsymbol{A}_{ij}^{(e)}=\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)}+A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)}+A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{2.2.18}$$

右端项向量

$$\boldsymbol{F}_i=\sum_{e=1}^{3}\boldsymbol{F}_i^{(e)}=\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)}+F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)}+F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix} \tag{2.2.19}$$

形成总体方程

$$\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{F}_i \qquad (i,\ j=1,2,3,4)$$

可以看出：由于单元刚度矩阵是对称的，因此形成的总体刚度矩阵也是对称的；因为单元 1、3 不相邻，故结点 1、4 之间、结点 2、4 之间和结点 1、3 之间没有直接关系，总体矩阵中相应的元素为零，当单元数量很多时，有限元的总体矩阵是稀疏矩阵；矩阵中的非零元素呈带状分布。充分利用有限元矩阵的对称、带状性质，采用诸如变带宽等技术，可以压缩矩阵数组的大小，减少对内存的需求和求解代数方程组的计算量。

若 f 等于常数 c，且取三个单元的长度相等，$h=\dfrac{(b-a)}{3}$，则根据式 (2.2.18)、(2.2.19) 叠加得总体方程

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\frac{h^2c}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.2.20}$$

下面引入边界条件。式 (2.2.13) 中，$\delta u(b)g_\beta=\delta u_4 g_\beta$，该项出现在结点 4 的方程中，应将 g_β 叠加到 F_4 上。

为引入结点 1 处的本质边界条件 $u_1=u(a)=u_A$，将矩阵 A_{ij} 和右端向量 F_i 修改为

$$\boldsymbol{A}_{ij}^{*}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_i^{*}=\begin{Bmatrix} u_A \\ F_2-A_{21}u_A \\ F_3-A_{31}u_A \\ F_4+g_\beta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_A \\ F_2-A_{21}u_A \\ F_3 \\ F_4+g_\beta \end{Bmatrix}$$

还有另外一种引入本质边界条件方法，就是将 A_{11} 乘以一个大数，如 10^{10}，则 $A_{11}^{*}=A_{11}\times 10^{10}$，同时取 $F_1^{*}=A_{11}u_A\times 10^{10}$，其余各项不变，则

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix} A_{11}\times 10^{10} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}^{*}=\begin{Bmatrix} A_{11}u_A\times 10^{10} \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4+g_\beta \end{Bmatrix}$$

对角线元素的绝对占优保证了边界条件的成立，同时又不必改动矩阵和右端向量的其它元素，这样在程序中的处理较为简单。

本例中若 $u_A=0$，$g_B=0$，则对式 (2.2.20) 引入边界条件后，方程为

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix}=\frac{h^2c}{2}\begin{Bmatrix}0\\2\\2\\1\end{Bmatrix}$$

求解方程得：$u_1=0$，$u_2=2.5h^2c$，$u_3=4h^2c$，$u_4=4.5h^2c$，与解析解完全相同，尽管有限元的弱解是分段线性函数，而解析解为二次函数。

我们在式 (2.2.18)、(2.2.19) 中看到，为形成总体方程，实际上只需将单元方程中的矩阵元素和右端项依结点局部编号与总体编号之间的关系叠加到总体矩阵A和右端项向量F的相应位置。例如，单元 2 中局部编号为 1、2 的两个结点，总体编号为 2、3，所以$F_1^{(2)}$、$F_2^{(2)}$被叠加到F_2、F_3，而单元矩阵的元素被叠加到总体矩阵中第二、三行和二、三列中相应位置上。

再看一个略为复杂的二维区域问题的例子。设某二维区域被划分为两个三结点三角形单元如图 2.5 所示，单元中结点的局部编号按逆时针方向，单元 1、2 中的结点局部编号与结点总体编号的关系如下表：

表 2.2

单元	局部编号	总体编号
1	1、2、3	1、2、3
2	1、2、3	4、3、2

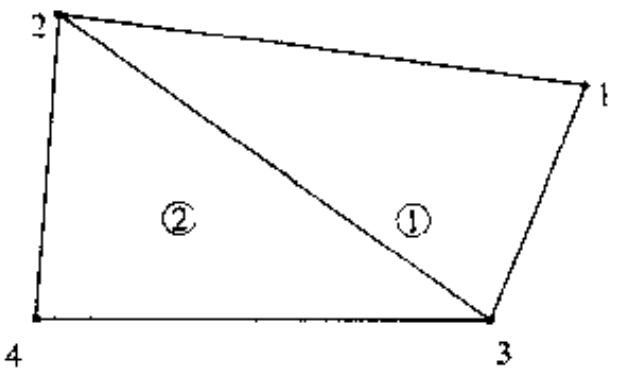


图2.5

因此，两单元的布尔矩阵为

$$\Delta_{mi}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \Delta_{mi}^{(2)}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

将单元刚度矩阵和右端向量扩展为总体结点编号下的矩阵和向量

$$\boldsymbol{A}_{ij}^{(1)}=\begin{bmatrix}A_{11}^{(1)}&A_{12}^{(1)}&A_{13}^{(1)}&0\\A_{21}^{(1)}&A_{22}^{(1)}&A_{23}^{(1)}&0\\A_{31}^{(1)}&A_{32}^{(1)}&A_{33}^{(1)}&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{ij}^{(2)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&A_{33}^{(2)}&A_{32}^{(2)}&A_{31}^{(2)}\\0&A_{23}^{(2)}&A_{22}^{(2)}&A_{21}^{(2)}\\0&A_{13}^{(2)}&A_{12}^{(2)}&A_{11}^{(2)}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_i^{(1)}=\begin{Bmatrix}F_1^{(1)}\\F_2^{(1)}\\F_3^{(1)}\\0\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_i^{(2)}=\begin{Bmatrix}0\\F_3^{(2)}\\F_2^{(2)}\\F_1^{(2)}\end{Bmatrix}$$

叠加形成的总体刚度矩阵和右端项向量为

$$\boldsymbol{A}_{ij}=\begin{bmatrix}A_{11}^{(1)}&A_{12}^{(1)}&A_{13}^{(1)}&0\\A_{21}^{(1)}&A_{22}^{(1)}+A_{33}^{(2)}&A_{23}^{(1)}+A_{32}^{(2)}&A_{31}^{(2)}\\A_{31}^{(1)}&A_{32}^{(1)}+A_{23}^{(2)}&A_{33}^{(1)}+A_{22}^{(2)}&A_{21}^{(2)}\\0&A_{13}^{(2)}&A_{12}^{(2)}&A_{11}^{(2)}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{F}_i=\begin{Bmatrix}F_1^{(1)}\\F_2^{(1)}+F_3^{(2)}\\F_3^{(1)}+F_2^{(2)}\\F_1^{(2)}\end{Bmatrix}$$

这里单元 2 的第 1、2、3 个结点的总体编号分别为 4、3、2，所以$F_1^{(2)}$、$F_2^{(2)}$、$F_3^{(2)}$被分别叠加

到F_4、F_3、F_2，而单元矩阵的元素被分别叠加到总体矩阵中第四、三、二行和四、三、二列中相应位置上。

因此可以总结出在有限元法中由单元方程形成总体方程的规则：设单元 e 中两结点的局部编号和总体编号分别为 m、n 和 i、j，则单元方程的刚度矩阵元素$A_{mm}^{(e)}$、$A_{mn}^{(e)}$ 和右端项$F_m^{(e)}$、$F_n^{(e)}$ 分别叠加到总体方程刚度矩阵元素A_{ii}、A_{ij} 和F_i、F_j 中。按照这个规则可以很方便快捷地形成有限元总体方程，实际程序中不必借助布尔矩阵。

下面是一段 FORTRAN 源程序的用于形成总体方程的程序，其中用到的数组、变量的含义为：

NE = 单元总数 E; NM = 单元中结点总数 M;

数组元素 NDE (ie, m) = 单元 ie 中局部编号为 m 的结点的总体编号；ie 为单元序号 e;（以上为用户输入的数据）

AE(m,n)= 单元 ie 的刚度矩阵元素 $A_{mn}^{(e)}$; FE(m)= 单元方程的右端项 $F_m^{(e)}$;

A(i,j)= 总体刚度矩阵元素 A_{ij}; F(i)= 总体方程的右端项 F_i。

有关程序段如下：

```
      ……
        将数组 A 和 F 的元素置零
    do 100 ie = 1, NE
        形成单元刚度矩阵 AE 和右端向量 FE
    do 110 m = 1, NM
        i = NDE (ie, m)
        F(i)= F(i)+FE(m)
    do 110 n =1, nm
        j = NDE (ie, n)
110   A(i,j)= A(i,j)+ AE(m,n)
100   continue
      ……
```

在上两例中，若结点 1、4 出现在同一单元中会使总体矩阵的带宽增大，所以合理的结点总体编号有助于减少矩阵的带宽和带中的零元素，这就是所谓网格的优化，其原则是使每个单元中结点的总体编号尽可能的接近。

2.2.2 有限元插值函数

下面介绍有限元法中一些常用的单元类型及其插值函数。

2.2.2.1 三角形单元

三角形单元是有限元法中采用最多的一种单元类型，其中最常用的是三结点和六结点两种三角形单元。前者的插值函数为线性函数，故称为线性元；后者为二次元，插值函数为二次函数。

（1） 三结点三角形单元

如图 2.6，三结点三角形的结点按逆时针方向进行局部编号，为方便起见，以下各式中去掉代表单元的角标 (e)。由单元的三个结点可构造线性的插值函数

$$u(x,\ y)=\beta_1+\beta_2 x+\beta_3 y=u_1\Phi_1+u_2\Phi_2+u_3\Phi_3 \qquad (2.2.21)$$

将三个结点值 u_1、u_2、u_3 代入式 (2.2.21) 中得

$$\beta_1+\beta_2 x_1+\beta_3 y_1=u_1$$

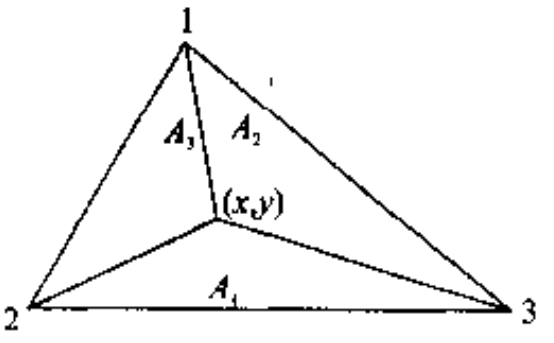


图2.6 三结点三角单元

$$\beta_1+\beta_2 x_2+\beta_3 y_2 = u_2$$

$$\beta_1+\beta_2 x_3+\beta_3 y_3 = u_3$$

写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix}$$

则

$$u(x,\ y) = [1,\ x,\ y] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = [1,\ x,\ y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{2.2.22}$$

令

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

则形函数

$$\Phi_1 = a_1 + b_1 x + c_1 y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{A_1}{A},$$

$$\Phi_2 = a_2 + b_2 x + c_2 y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{A_2}{A},$$

$$\Phi_3 = a_3 + b_3 x + c_3 y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = \frac{A_3}{A} \tag{2.2.23}$$

式中：$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2A$，$A$ 为三角形单元的面积，当结点局部编号方向与坐标系旋转方向不一致时要加一负号；A_m 等于结点 m 的对边与点 $P(x,\ y)$ 之间构成的三角形面积（见图 2.6）。各系数的计算式如下：

$$a_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{D}, \qquad b_1 = \frac{y_2 - y_3}{D}, \qquad c_1 = \frac{x_3 - x_2}{D}$$

$$a_2 = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{D}, \qquad b_2 = \frac{y_3 - y_1}{D}, \qquad c_2 = \frac{x_1 - x_3}{D}$$

$$a_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{D}, \qquad b_3 = \frac{y_1 - y_2}{D}, \qquad c_3 = \frac{x_2 - x_1}{D}$$

即

$$\begin{cases} a_m = \dfrac{x_n y - x_i y_n}{D} \\ b_m = \dfrac{y_n - y}{D} \\ c_m = \dfrac{x_i - x_n}{D} \end{cases} \qquad (m、n、i 按逆时针顺序) \tag{2.2.24}$$

形函数的一阶偏导数 $\dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x} = b_m$，$\dfrac{\partial \Phi_m}{\partial y} = c_m$ $(m = 1,2,3)$ (2.2.25)

则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} = b_m u_m \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial y} = c_m u_m$$

在单元内为常数。用插值函数式 (2.2.21) 求导得到的两个相邻单元的一阶导数在其界面上是不连续的。

三角形单元的插值函数用面积坐标表示更为方便。三角形内任一点$P(x, y)$，为三个内三角形 A_1、A_2、A_3 的顶点。以 A_1 为例，P 位于结点 1 时，$A_1 = A$；若 P 位于结点 1 的对边上，$A_1 = 0$。所以，利用这些内三角形面积可以确定三角形中任意一点的位置。令

$$\xi_m = \frac{A_m}{A} \quad (m = 1,2,3) \tag{2.2.26}$$

称为面积坐标或自然坐标。三个角点的面积坐标分别为 (1,0,0)、(0,1,0) 和 (0,0,1) 如图 2.7 所示，因为 $A_1 + A_2 + A_3 = A$，所以

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{2.2.27}$$

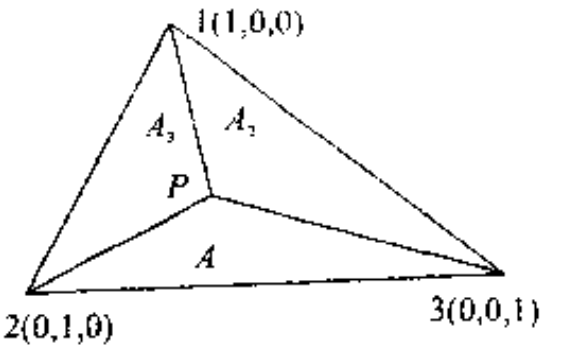


图2.7 三角元面积坐标

根据式 (2.2.23)

$$\xi_m = a_m + b_m x + c_m y \tag{2.2.28}$$

三结点单元的形函数

$$\Phi_m = \xi_m \tag{2.2.29}$$

面积坐标与直角坐标之间的变换关系为

$$x = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 \ , \quad y = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 \tag{2.2.30}$$

在三角形单元上的积分 $\displaystyle\int F \mathrm{d}\Omega = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} F \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2$ (2.2.31)

当被积函数比较复杂时，可以用三角形区域上的数值积分。若被积函数 $F = \xi_1^p \xi_2^q \xi_3^r$，则

$$\int_{\Omega} \xi_1^p \xi_2^q \xi_3^r \mathrm{d}\Omega = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \xi_1^p \xi_2^q \xi_3^r \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 = 2A \frac{p!\, q!\, r!}{(p+q+r+2)!} \tag{2.2.32}$$

(2) 六结点三角形单元

在三角形的三个边的中点各增加一个结点，就构成六结点单元，图 2.8 所示为各结点的局部编号和面积坐标值。插值函数为二次函数，形函数

$$\Phi_1=\xi_1(2\xi_1-1),\quad \Phi_2=\xi_2(2\xi_2-1),\quad \Phi_3=\xi_3(2\xi_3-1),$$

$$\Phi_4=4\xi_1\xi_2,\quad \Phi_5=4\xi_2\xi_3,\quad \Phi_6=4\xi_1\xi_3 \qquad (2.2.33)$$

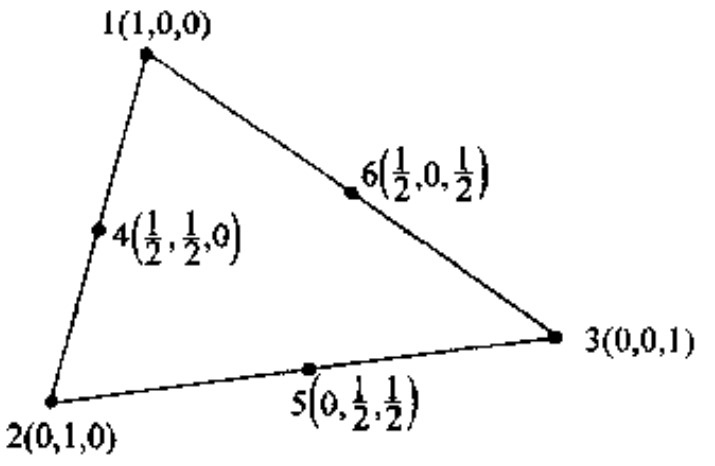


图2.8　六结点三角元

形函数的一阶偏导数

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial x}=\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}+\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_1}b_1+\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_2}b_2+\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_3}b_3,$$

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial y}=\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial y}=\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_1}c_1+\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_2}c_2+\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_3}c_3 \qquad (2.2.34)$$

为线性函数。

2.2.2.2　矩形单元

(1) 四结点矩形单元

结点取在矩形的四个角，令矩形的边长分别为 $2a$ 和 $2b$，定义无量纲局部坐标为

$$\xi=\frac{x-x_c}{a},\quad \eta=\frac{y-y_c}{b} \qquad (2.2.35)$$

局部编号及其局部坐标值如图 2.9 所示。

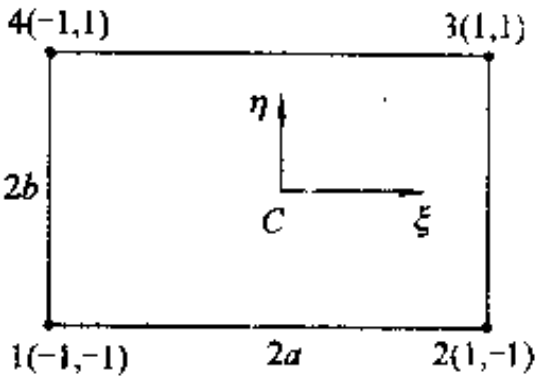


图2.9　四结点矩形单元

形函数应该是如下形式的多项式

$$\Phi_m=a_{1m}+a_{2m}\xi+a_{3m}\eta+a_{4m}\xi\eta$$

并满足

$$\Phi_m(\xi_n,\ \eta_n)=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}(m,\ n=1,2,3,4)$$

可确定系数，得

$$\Phi_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),\quad \Phi_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$\Phi_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),\quad \Phi_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad (2.2.36)$$

在每一方向上是线性的函数，所以四结点矩形单元为线性元。形函数的一阶偏导数

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial x}=\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi},\quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial y}=\frac{1}{b}\frac{\partial \Phi_m}{\partial \eta} \tag{2.2.37}$$

显然两个相邻单元的一阶导数在其界面上是不连续的。

（2）八结点矩形单元

在四边的中点各增加一个结点如图 2.10 所示，就是八结点矩形单元。插值函数多项式应有 8 项

$$\Phi_m=a_{1m}+a_{2m}\xi+a_{3m}\eta+a_{4m}\xi^2+a_{5m}\xi\eta+a_{6m}\eta^2+a_{7m}\xi^2\eta+a_{8m}\xi\eta^2$$

可确定形函数为

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_m=\frac{1}{4}(1-\xi_m\xi)(1-\eta_m\eta)(\xi_m\xi+\eta_m\eta-1),\quad m=1,\ 2,\ 3,\ 4\\
&\Phi_m=\frac{1}{2}(1+\xi_m\xi)(1-\eta^2),\qquad\qquad m=6,\ 8\\
&\Phi_m=\frac{1}{2}(1+\eta_m\eta)(1-\xi^2),\qquad\qquad m=5,\ 7
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.38}$$

在同一方向上是二次函数，所以八结点矩形单元是二次元。

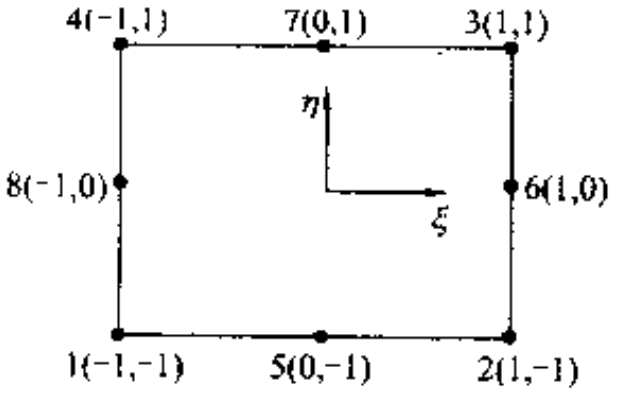


图2.10　八结点矩形元

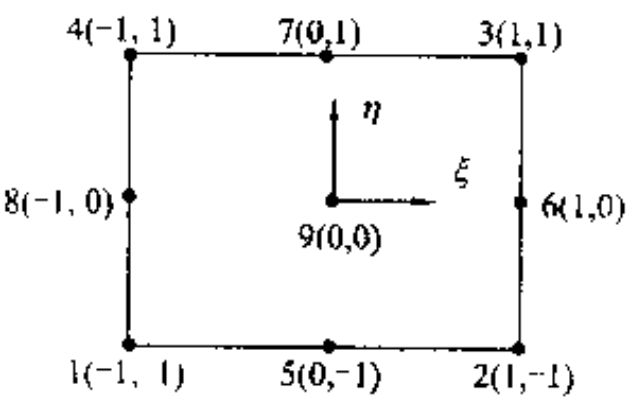


图2.11　矩形元九点插值

（3）九结点矩形单元

在八结点矩形单元的中心再增加一个结点，就是九结点单元，插值多项式应有九项，如图 2.11 所示。

$$\Phi_m=a_{1m}+a_{2m}\xi+a_{3m}\eta+a_{4m}\xi^2+$$

$$a_{5m}\xi\eta+a_{6m}\eta^2+a_{7m}\xi^2\eta+a_{8m}\xi\eta^2+a_{9m}\xi^2\eta^2$$

也是二次元，形函数为

$$\Phi_1=\phi_1(\xi)\phi_1(\eta),\quad \Phi_2=\phi_3(\xi)\phi_1(\eta),\quad \Phi_3=\phi_3(\xi)\phi_3(\eta),$$

$$\Phi_4=\phi_1(\xi)\phi_3(\eta),\quad \Phi_5=\phi_2(\xi)\phi_1(\eta),\quad \Phi_6=\phi_3(\xi)\phi_2(\eta),$$

$$\Phi_7=\phi_2(\xi)\phi_3(\eta),\quad \Phi_8=\phi_1(\xi)\phi_2(\eta),\quad \Phi_9=\phi_2(\xi)\phi_2(\eta) \tag{2.2.39}$$

式中：$\phi_1(s)=\frac{1}{2}s(s-1)$，$\phi_2(s)=1-s^2$，$\phi_3(s)=\frac{1}{2}s(s+1)$。

矩形单元比较规则，可以用在计算区域中的中心区域，与更适应边界形状的三角形单元组成混合型网络（相邻的三角形单元和矩形单元在其界面上的结点数应该相同）。另一方面，矩形单元的插值函数是下面要介绍的曲边四边形等参单元的基础。

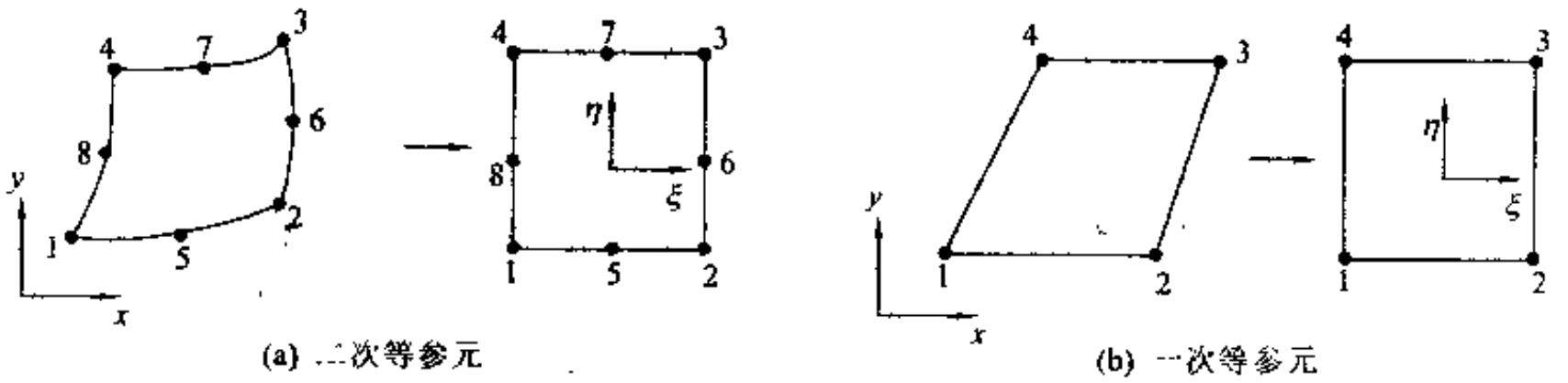
2.2.2.3 等参单元

采用曲边形的单元，如曲边四边形或曲边三角形，可以更好地适应复杂形状的边界。为了便于在曲边形单元上插值、求导和积分，需要利用坐标变换将其变换为新坐标系下形状规则的正方形或直角三角形单元，通常在坐标变换时采用与单元上物理量插值相同的插值函数，称为等参单元。

（1）四边形等参单元

如图 2.12 (a) 所示，欲将(x, y)平面上的曲边四边形变换成(ξ, η)平面上的正方形单元，可以利用单元上的结点来构造变换式

$$x = x_k \Psi_k(\xi, \eta),\ y = y_k \Psi_k(\xi, \eta),\ k = 1, \cdots, N \tag{2.2.40}$$



(a) 二次等参元　　(b) 一次等参元

图2.12　等参单元

如果物理量的插值形函数Φ_m的次数大于坐标变换形函数 Ψ_m 的次数，则称为“超参”，反之为“次参”。当两者次数相同时为“等参”单元，此时 $N = M$，$\Psi_m = \Phi_m$，坐标变换的插值函数就是物理量的插值函数，即

$$u = u_m \Phi_m(\xi, \eta),\ x = x_m \Phi_m(\xi, \eta),\ y = y_m \Phi_m(\xi, \eta),\quad (m = 1, \cdots, M) \tag{2.2.41}$$

图 2.12 (a)、(b) 所示分别为八结点和四结点等参单元。前者的变换函数为二次函数，因而单元形状是曲边形；后者只能是直边四边形，因为四个结点的坐标变换函数为线性函数。

两个坐标系下的偏导数之间有如下关系

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.2.42}$$

所以

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{2.2.43}$$

其中：Jacobi 行列式

$$|J| = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.2.44}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = x_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = x_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = y_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = y_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \eta} \tag{2.2.45}$$

因此可以求出 u 的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial y} \tag{2.2.46}$$

在单元上的积分可以用 Gauss 数值积分

$$\int_{\Omega} F d\Omega = \int_{\Omega} F dx dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi, \eta)|J| d\xi d\eta = 4 \sum_{i=1}^{n} w_i F(\xi_i, \eta_i)|J(\xi_i, \eta_i)| \tag{2.2.47}$$

w_i 为 Gauss 数值积分的权因子。可以适当选择积分点的数目 n，以保证计算精度，同时不至于使计算量太大，计算点坐标(ξ_i, η_i)和权因子 w_i 的大小，可查数学手册或计算数学的教科书。

(2) 三角形等参单元

三角形等参单元至少应有六个结点，否则仍然是直角三角形，与前无异。

图 2.13 所示为一六结点三角形等参单元，曲边三角形变换到坐标系(ξ_1, ξ_2)下，成为一直角等边三角形，六个结点的坐标分别为：1 (1,0)，2 (0,1)，3 (0,0)，$4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$5\left(0, \frac{1}{2}\right)$，$6\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，所以$(\xi_1, \xi_2)$实际上就是该直角三角形的面积坐标。

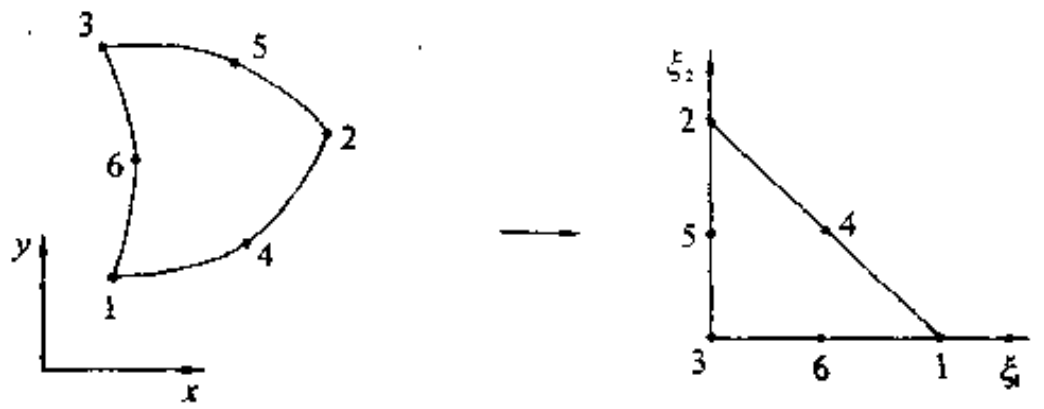


图2.13　三角形等参元

仍按式 (2.2.33) 取插值形函数，且 $\xi_3 = 1-\xi_1-\xi_2$，有

$$\Phi_1 = \xi_1(2\xi_1-1), \quad \Phi_2 = \xi_2(2\xi_2-1), \quad \Phi_3 = (1-\xi_1-\xi_2)(1-2\xi_1-2\xi_2)$$

$$\Phi_4 = 4\xi_1\xi_2, \quad \Phi_5 = 4\xi_2(1-\xi_1-\xi_2), \quad \Phi_6 = 4\xi_1(1-\xi_1-\xi_2) \tag{2.2.48}$$

偏导数的变换式

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} \tag{2.2.49}$$

Jacobi 行列式

$$|J| = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \tag{2.2.50}$$

其中

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = x_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = x_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_1} = y_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = y_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_2} \tag{2.2.51}$$

单元上的积分

$$\int_{\Omega^e} F \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega^e} F \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_0^1 F(\xi_1, \xi_2) |J| \, \mathrm{d}\xi_2 \right] \mathrm{d}\xi_1 \tag{2.2.52}$$

可以采用三角形区域上的 Gauss 数值积分。

2.2.2.4 空间四面体和六面体单元

空间问题的有限元剖分及插值可用四面体单元和六面体单元，下面作一简单的介绍。

(1) 四面体单元

四结点四面体单元结点局部编号如图 2.14(a)所示，若取四面体中某点$P(x, y, z)$与结点 m 的对面构成一小四面体，体积为V_m，可以定义点 P 的体积坐标

$$\xi_m = \frac{V_m}{V} \quad (m = 1,2,3,4) \tag{2.2.53}$$

满足

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4 = 1 \tag{2.2.54}$$

插值形函数

$$\Phi_m = \xi_m \quad (m = 1,2,3,4) \tag{2.2.55}$$

为线性函数。

在四面体的每个棱边的中点再增加一个结点（图 2.14(b)），就成为十结点四面体单元。插值形函数

$$\begin{aligned} &\Phi_m = (2\xi_m - 1)\xi_m \qquad (m = 1,2,3,4) \\ &\Phi_5 = 4\xi_1\xi_2 \qquad \Phi_6 = 4\xi_2\xi_3 \qquad \Phi_7 = 4\xi_3\xi_1 \\ &\Phi_8 = 4\xi_1\xi_4 \qquad \Phi_9 = 4\xi_2\xi_4 \qquad \Phi_{10} = 4\xi_3\xi_4 \end{aligned} \tag{2.2.56}$$

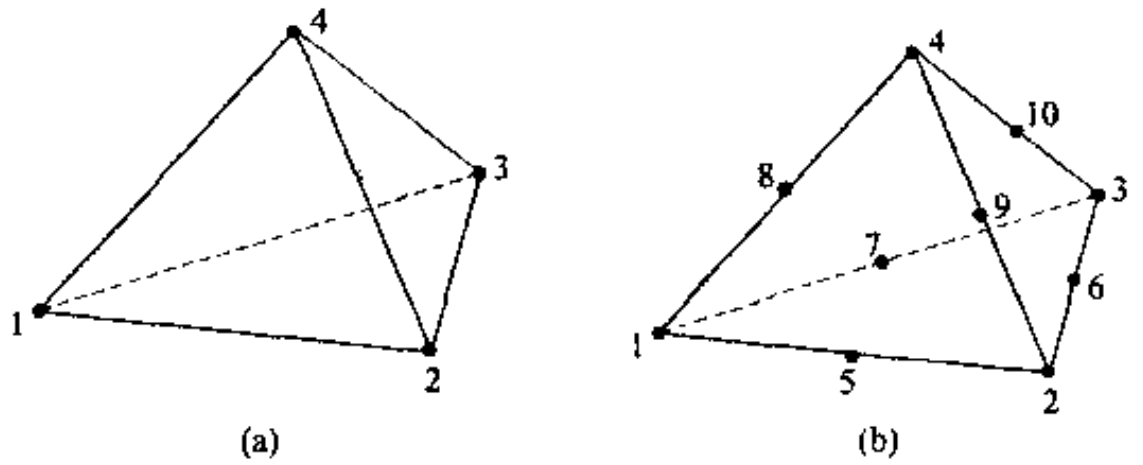


图2.14　四面体单元

(2) 正交六面体单元

八结点正交六面体单元以八个角点为结点如图 2.15(a)。仿照矩形单元的处理方法，增加一个无量纲坐标 $\zeta=\frac{(z-z_c)}{c}$ (c为 z 方向上单元边长的一半)，则插值形函数为线性函数。

$$\Phi_m=\frac{1}{8}(1-\xi_m\xi)(1-\eta_m\eta)(1-\zeta_m\zeta) \qquad (m=1,\ \cdots,\ 8) \tag{2.2.57}$$

在每个棱边的中点再增加一个结点就成为二十个结点正交六面体单元如图 2.15b，插值形函数为二次函数：

$$\Phi_m=\frac{1}{8}(1+\xi_m\xi)(1+\eta_m\eta)(1+\zeta_m\zeta)(\xi_m\xi+\eta_m\eta+\zeta_m\zeta-2) \qquad (m=1,\ \cdots,\ 8)$$

$$\Phi_m=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_m\eta)(1+\zeta_m\zeta) \qquad (m=9,11,17,19)$$

$$\Phi_m=\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi_m\xi)(1+\zeta_m\zeta) \qquad (m=10,12,18,20)$$

$$\Phi_m=\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi_m\xi)(1+\eta_m\eta) \qquad (m=13,14,15,16) \tag{2.2.58}$$

在四面体和正交六面体单元的基础上同样也可以构造曲面形的等参单元，读者可进一步参考其它有限元法的专著，在此就不赘述了。

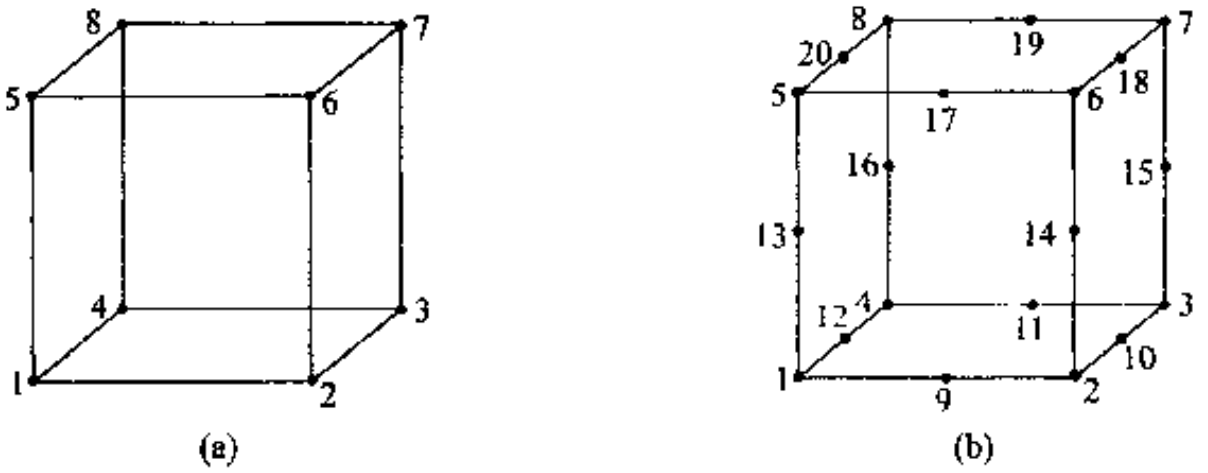


图2.15　正交六面体单元

§2.3　水动力学问题的有限元解

2.3.1　不可压缩流体的有势流动

不可压缩流体有势流动的流速势函数 ϕ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0 \tag{2.3.1}$$

流速分量

$$u_i=\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \tag{2.3.2}$$

边界条件为

$$\phi|_{\Gamma_1}=\overline{\phi},\quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=u_n=q \tag{2.3.3}$$

u_n 为边界上的法向流速分量。

拉普拉斯方程是泊松方程的特例。根据变分原理，由式 (2.1.18) 得积分方程

$$\int_{\Omega}\nabla\phi\cdot\nabla\delta\phi\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma_2}\delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{2.3.4}$$

对区域进行剖分、分片插值后，得单元方程的刚度矩阵为

$$A_{mn}^{(e)}=\int_{\Omega^{(e)}}\frac{\partial\Phi_m^{(e)}}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi_n^{(e)}}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.3.5}$$

单元方程的右端项为

$$F_m^{(e)}=\int_{\Gamma_2^{(e)}}\frac{\partial\phi}{\partial n}\Phi_m^{(e)}\mathrm{d}S=\int_{\Gamma_2^{(e)}}q\Phi_m^{(e)}\mathrm{d}S \tag{2.3.6}$$

式中 $\Gamma_2^{(e)}$ 是自然边界条件边界 Γ_2 中构成单元 e 边界的一段，对于内部单元和只有 Γ_1 边界的单元没有这一项积分，当边界法向流速分量为零时（例如静止壁面处）也不需要计算该项积分。

对于平面势流问题，若单元为四结点矩形单元，根据式 (2.2.37) 可得

$$A_{mn}^{(e)}=ab\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi_n}{\partial\xi}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_n}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\frac{b}{24a}\begin{bmatrix}8&-8&-4&4\\&8&4&-4\\对称&&8&-8\\&&&8\end{bmatrix}+\frac{a}{24b}\begin{bmatrix}8&4&-4&-8\\&8&-8&-4\\对称&&8&4\\&&&8\end{bmatrix} \tag{2.3.7}$$

若单元为三结点三角形单元，则根据式 (2.2.25) 有

$$A_{mn}^{(e)}=\int_{\Omega^{(e)}}\left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial x}\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_m}{\partial y}\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega=A(b_mb_n+c_mc_n)$$

$$=A\begin{vmatrix}b_1^2+c_1^2&b_1b_2+c_1c_2&b_1b_3+c_1c_3\\b_1b_2+c_1c_2&b_2^2+c_2^2&b_2b_3+c_2c_3\\b_1b_2+c_1c_3&b_2b_3+c_2c_3&b_3^2+c_3^2\end{vmatrix} \tag{2.3.8}$$

A 为三角形单元的面积。

边界积分式 (2.3.6) 中，当结点 m 不在 $\Gamma_2^{(e)}$ 上时，$\Phi_m^{(e)}|_{\Gamma_2}=0$，所以只需对边界 $\Gamma_2^{(e)}$ 上的结点引入自然边界条件。以四结点矩形单元和三结点三角形单元为例，每个边上都只有两个结点，插值函数是线性函数，现设某单元的 $\Gamma_2^{(e)}$ 长 h，两个结点的单元局部编号分别为 m、n，总体编号分别为 i、j，如图 2.16 所示，则在 $\Gamma_2^{(e)}$ 上

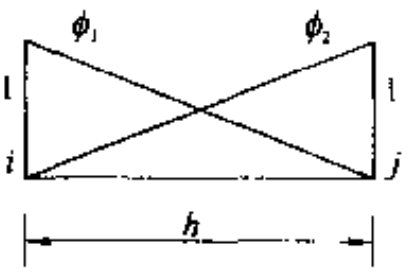


图2.16　边界插值函数

$$\Phi_m^{(e)} = \phi_1 = 1-\zeta,\quad \Phi_n^{(e)} = \phi_2 = \zeta \text{ (其局部坐标 } \zeta \in [0,1])$$

若在 $I^{(e)}$ 上对 q 也取插值

$$q = q_m^{(e)}\phi_1 + q_n^{(e)}\phi_2 = q_1\phi_1 + q_2\phi_2$$

则

$$F_m^{(e)} = \int_{I^{(e)}} q\Phi_m^{(e)}\mathrm{d}S = \int_{I^{(e)}} q\phi_1\mathrm{d}S = h\int_0^1 \phi_1\,(q\phi_1 + q_2\phi_2)\,\mathrm{d}\zeta = \frac{h}{6}(2q_1+q_2) \tag{2.3.9a}$$

$$F_n^{(e)} = \int_{I^{(e)}} q\Phi_n^{(e)}\mathrm{d}S = \int_{I^{(e)}} q\phi_2\mathrm{d}S = h\int_0^1 \phi_2\,(q_1\phi_1 + q\phi_2)\,\mathrm{d}\zeta = \frac{h}{6}(q_1+2q_2) \tag{2.3.9b}$$

分别叠加到总体方程的右端项 F_m、F_n 上。

不可压缩流体的平面流动还存在流函数ψ，与流速分量的关系为

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad u_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.3.10}$$

当流动为势流时，流函数也满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.3.11}$$

所以求平面势流流函数 ψ 的有限元法求解过程与求流速势是基本相同的，也可以应用式 (2.3.5) 形成单元刚度矩阵。在计算单元方程的右端项时，要注意流函数的边界条件为

$$\psi|_\Gamma = \bar{\psi},\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_\Gamma = -u_\tau = u_x\cos(n,\ y) - u_y\cos(n,\ x) \tag{2.3.12}$$

(u 为边界上的切向流速分量)，于是

$$F_m^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \frac{\partial\psi}{\partial n}\Phi_m^{(e)}\mathrm{d}S = -\int_{\Gamma^{(e)}} u_\tau\Phi_m^{(e)}\mathrm{d}S = \int_{\Gamma^{(e)}} [u_x\cos(n,\ y) - u_y\cos(n,\ x)]\Phi_m^{(e)}\mathrm{d}S \tag{2.3.13}$$

只有当边界上给定切向流速分量时才需要计算该项积分。

平面势流问题，无论是求势函数解还是求流函数解，最终都可以求出流速和压强的分布，主要看边界条件是否容易确定。

作为一个算例，我们考虑图 2.17 所示的两无穷长平行平板之间的圆柱绕流问题。若来流的流速为 V_∞，圆柱半径为 R，平板之间的距离为 H，其近似解析解为

$$\psi = V_\infty\left\{y - \frac{H\mathrm{sh}^2\left(\frac{\pi R}{H}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{H}\right)}{2\pi\left[\mathrm{ch}^2\left(\frac{\pi x}{H}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi y}{H}\right)\right]}\right\} \tag{2.3.14}$$

本例中 $V_\infty = 1$ m/s，$R = 1$ m，$H = 4$ m/s。

计算时取有限区域，上游边界距圆柱 2.5m。由于流动是对称的，可以取左上角有限区域 *abcdea* 作为计算区域，边界条件为：

① aed 和 bc 上，势函数边界条件为 $\frac{\partial \phi}{\partial n}=0$；因两者都是流线，两流线之间的流量为 2，所以可取流函数边界条件为 $\psi_{aed}=0$，$\psi_{bc}=2$。

② ab 上，$\frac{\partial \phi}{\partial n}=u_n=-u_x=-1$；根据 $u_x=\frac{\partial \psi}{\partial y}=1\ \mathrm{m/s}$，得第一类边界条件 $\psi=y$，或根据切向流速为零取 $\frac{\partial \psi}{\partial n}=0$，两者只能用一个，本例用前者。

③ cd 上，$\left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_{cd}=0$；作为势函数的参考点，取 $\phi=0$。

由于上述流函数边界条件以第一类边界条件为主，便于提高计算精度，因此本例以求流函数解为好。

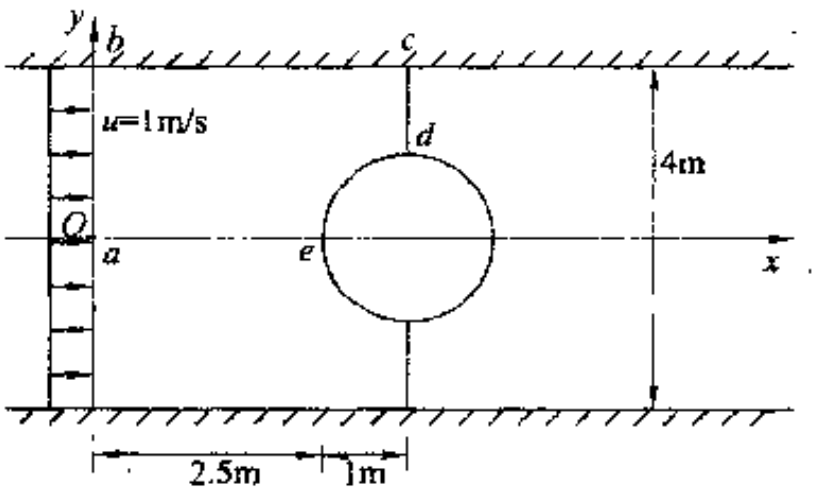


图2.17　平板间圆柱绕流

计算时按图 2.18 所示划分为 110 个三结点三角形单元，共 73 个结点。各单元形成的单元方程经叠加、引入边界条件后形成总体方程，根据拉普拉斯方程的性质，总体方程的矩阵是对称正定的，可采用 LDL^T 分解法求解总体方程，这样可以大大减少计算量。又因为总体矩阵是带状，稀疏的，可以采用等带宽乃至变带宽储存技术，以减少矩阵对内存的占用，同时也减少了对零元素不必要的运算。通过对结点序号的优化编号，可以尽量减少矩阵的带宽。本例中结点序号沿区域短边方向，自上而下逐列编号，可使同一单元内结点的总体编号不致相差太大，从而减少了总体矩阵的带宽。关于 LDL^T 分解法和等带宽、变带宽储存技术，可以参看计算数学和有限元法方面的教科书或专著。

求解总体方程后便得到每个结点的流函数值，据此可画出流线图如图 2.19，与根据解析解式 (2.3.14) 得到的流函数分布基本一致。三结点三角形单元的插值函数是线性的，根据流函数插值函数确定的单元流速分量是常数。

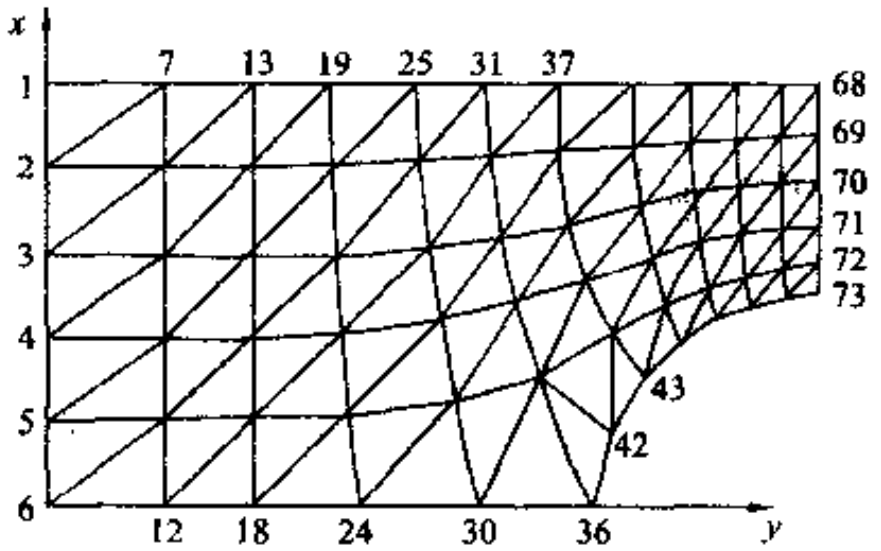


图2.18　圆柱绕流计算区域的有限元网格

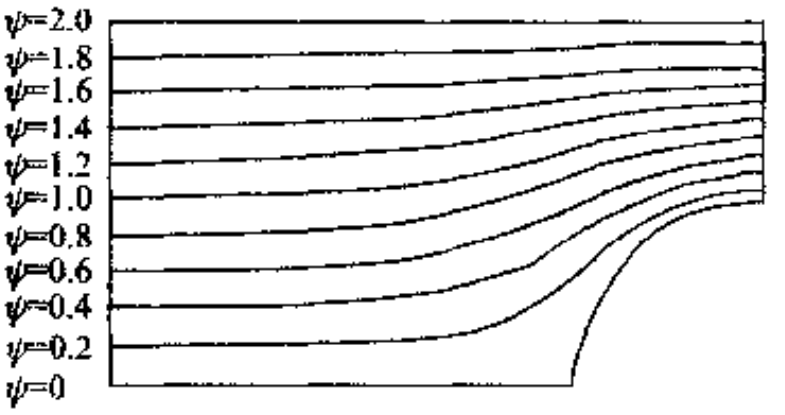


图2.19　圆柱绕流流线图

$$u_x^{(e)}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\psi_m^{(e)}\frac{\partial\Phi_m}{\partial y}=\psi_m^{(e)}c_m,\quad u_z^{(e)}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\psi_m^{(e)}\frac{\partial\Phi_m}{\partial x}=-\psi_m^{(e)}b_m$$

取结点周围各单元流速的加权平均值便得到结点上的流速，进而可计算出结点的压强，压强系数

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{\rho V_\infty^2}{2}}=1-\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2=1-(u_i^2+u_i^2)$$

2.3.2 恒定渗流问题

恒定渗流的基本偏微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[k_{ii}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right]=Q \tag{2.3.15}$$

式中：H 为液体的测压管水头，k_{ii} 是 x_i 方向上的渗透系数，Q 为单位体积介质内部液体的源项。边界条件为

$$H|_{\Gamma_1}=\bar{H},\quad u_n=u_in_i=-k_{ii}\frac{\partial H}{\partial x_i}n_i\Big|_{\Gamma_2}=q \tag{2.3.16}$$

应用伽辽金方法

$$\int_\Omega\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[k_{ii}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right]-Q\right\}\delta H\mathrm{d}\Omega=0$$

推得

$$\int_\Omega k_{ii}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial\delta H}{\partial x_i}\mathrm{d}\Omega=\oint_\Gamma k_{ii}\frac{\partial H}{\partial x_i}n_i\delta H\mathrm{d}S-\int_\Omega Q\delta H\mathrm{d}\Omega$$

引入边界条件后可以导出恒定渗流的伽辽金法弱形式

$$\int_\Omega k_{ii}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial\delta H}{\partial x_i}\mathrm{d}\Omega=-\int_\Gamma q\delta H\mathrm{d}S-\int_\Omega Q\delta H\mathrm{d}\Omega \tag{2.3.17}$$

应用有限元法，区域剖分，分片插值，对每个单元可以形成单元方程，做法与泊松方程的情况类似，可得单元方程的刚度矩阵元素为

$$A_{mn}^{(e)}=\int_\Omega k_{ii}\frac{\partial\Phi_m^{(e)}}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_n^{(e)}}{\partial x_i}\mathrm{d}\Omega \tag{2.3.18}$$

单元方程的右端项

$$F_m^{(e)}=-\int_\Gamma q\Phi_m^{(e)}\mathrm{d}S-\int_\Omega Q\Phi_m^{(e)}\mathrm{d}\Omega \tag{2.3.19}$$

对平面问题

$$A_{mn}^{(e)}=\int_\Omega\left(k_x\frac{\partial\Phi_m^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial\Phi_n^{(e)}}{\partial x}+k_z\frac{\partial\Phi_m^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial\Phi_n^{(e)}}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{2.3.20}$$

单元为四结点矩形单元时，与式 (2.3.7) 类似可得

$$A_{mn}^{(e)}=\frac{k_x b}{24a}\begin{bmatrix} 8 & -8 & -4 & 4 \\ & 8 & 4 & -4 \\ \text{对称} & & 8 & -8 \\ & & & 8 \end{bmatrix}+\frac{k_y a}{24b}\begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 & -8 \\ & 8 & -8 & -4 \\ \text{对称} & & 8 & 4 \\ & & & 8 \end{bmatrix} \tag{2.3.21}$$

单元为三结点三角形单元时，与式 (2.3.8) 类似有

$$A_{mn}^{(e)}=A(k_x b_m b_n+k_y c_m c_n)=Ak_x\begin{vmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{vmatrix}+Ak_y\begin{vmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_1c_2 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 \end{vmatrix} \tag{2.3.22}$$

单元方程右端项中的边界积分可仿照前面在平面势流问题中的式 (2.3.9) 的处理办法；当源项 Q 不是均匀分布时，可以近似在单元内取 Q 为常数或取 Q 的分片插值函数进行源项积分。

图 2.20 所示为一水闸，上下游水位差 $\Delta H=10$ m，均质各向同性透水地基中二维有压渗流的计算区域取为图中所示范围。划分为 77 个三结点三角形单元，共 53 个结点。$k_x=k_y=k$，源项 $Q=0$，结点 46~49 边界条件可取 $H=\Delta H=10$ m，结点 50~53 取 $H=0$ m，其余边界上 $u_n=q=0$。表 2.3 为结点 1~45 的测压管水头计算结果与水电比拟法实验值的比较（结点 46~53 测压管水头已知）。

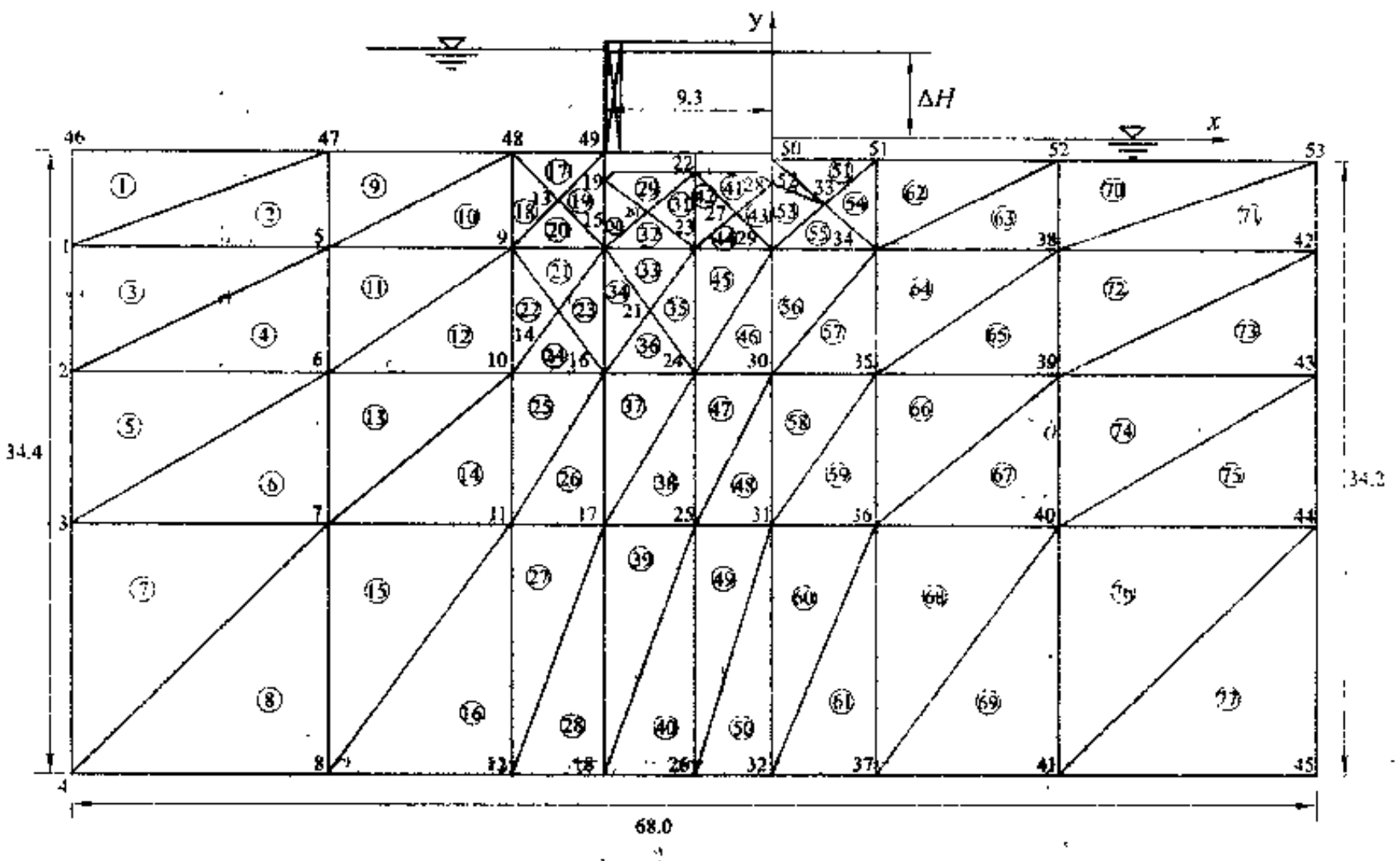


图2.20　闸下渗流有限元计算网格

根据计算出的结点水头可以得到结点的渗透压强 $p=\gamma(H-y)$。本例中紧挨着闸底板的几个结点计算误差较大，形状较为复杂的边界附近单元划分应该更加密一些。

由各结点的水头值可以计算出各单元的流速分量

$$u_x^{(e)}=-k_x\frac{\partial H}{\partial x}=-k_x H_m^{(e)}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x}=-k_x H_m^{(e)} b_m \tag{2.3.23a}$$

$$u_y^{(e)} = -k_y \frac{\partial H}{\partial y} = -k_y H_m^{(e)} \frac{\partial \Phi_m}{\partial y} = -k_1 H_m^{(e)} c_m \tag{2.3.23b}$$

进而可计算出单宽渗透流量。

在无压渗流的情况下还存在确定浸润面位置的问题。图 2.21 所示土坝二维渗流问题中，边界 CD 上 $H=y$；浸润面 BC 和逸出点 C 位置待定。计算时先要假定 BC 的位置、划分单元，边界条件 $u_n|_{BC}=0$，求解出各点的水头 H 后，要校核 BC 上是否满足 $H=y$，若不满足则要修改 BC 位置，一部分结点的坐标要随之变动，如此迭代直至收敛。

表 2.3

结点编号	计算值	实验值	结点编号	计算值	实验值	结点编号	计算值	实验值
1	9.3	9.3	16	5.7	5.6	31	4.0	4.0
2	8.4	8.4	17	5.4	5.4	32	4.2	4.2
3	7.7	7.7	18	5.3	5.3	33	1.1	1.1
4	7.2	7.2	19	5.1	4.4	34	1.4	1.5
5	9.0	9.0	20	4.8	5.0	35	2.6	2.6
6	8.0	8.0	21	5.2	5.0	36	3.2	3.3
7	7.2	7.2	22	3.9	3.6	37	3.6	3.6
8	6.8	6.7	23	4.0	3.9	38	0.8	0.8
9	8.2	8.2	24	4.6	4.5	39	1.7	1.7
10	6.8	6.8	25	4.7	4.6	40	2.3	2.4
11	6.2	6.2	26	4.7	4.7	41	2.8	2.8
12	5.9	5.7	27	2.8	3.0	42	0.6	0.6
13	8.6	8.8	28	1.3	2.0	43	1.3	1.4
14	6.8	6.7	29	2.6	2.6	44	1.9	1.9
15	6.4	6.4	30	3.6	3.5	45	2.3	2.4

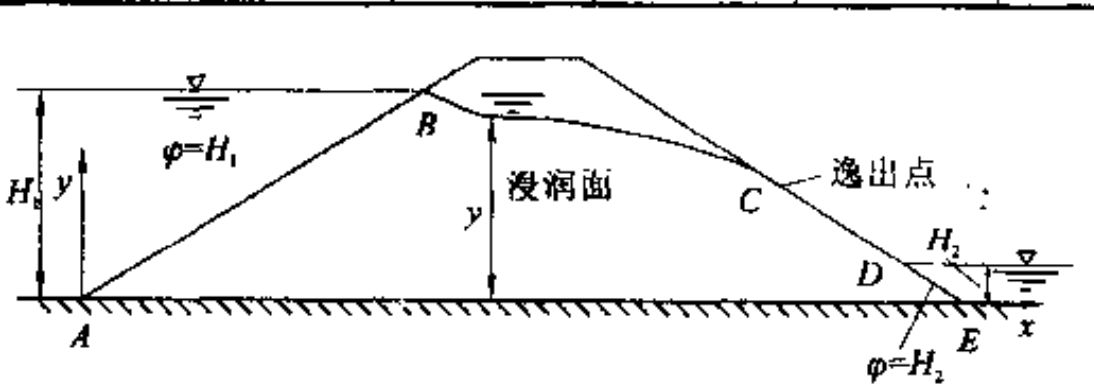


图2.21　土坝渗流

2.3.3　浅水环流中的热扩散问题

本问题的背景是研究火电厂的冷却水向江河、湖泊和海湾中排放对环境产生的影响，需要计算水体中水温的分布，所用的计算方法也可用于计算其它污染物的浓度分布。由于有限元法的单元剖分方式能够适应天然水体曲折的边界和水下地形，具有一定的优点。

所谓“浅水”是指水体的水深较浅，垂直方向上的水流运动和密度分层可以忽略，在对

物理量沿水深方向取平均值后，可以简化为水平面上的二维问题。

定义水的总深度为

$$H = h + \eta \tag{2.3.24}$$

全深度单宽质量流量

$$q_i = \int_{-h}^{\eta} \rho\, u_i \mathrm{d}x_3 \tag{2.3.25}$$

超温

$$\theta = T - T_s \tag{2.3.26}$$

其中，$\eta = \eta(x_1, x_2, t)$为某基准面以上水面的高程，h 为基准面以下的水深，如图 2.22; T 为垂向平均水温，T_s 为水体的自然水温。

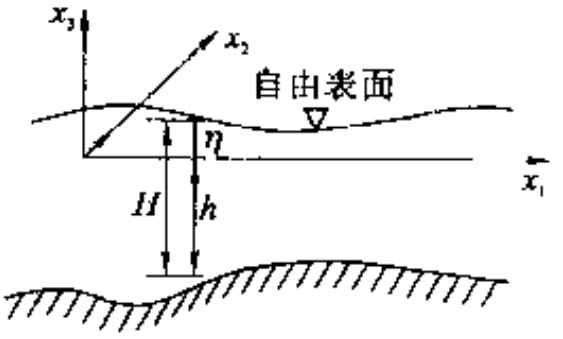


图2.22　浅水流示意图

二维浅水环流和热扩散问题的基本方程组为：

（1）连续性方程

$$\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0 \tag{2.3.27}$$

（2）运动方程

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(v_k q_1) + \rho\, g\, H\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[2\varepsilon\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\varepsilon\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)\right] +$$

$$C_w \rho_a w^2 \cos\beta - \frac{g}{C^2 H}(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} q_1 + 2\omega \sin\psi q_2 \tag{2.3.28}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(v_k q_2) + \rho g\, H\frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\varepsilon\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[2\varepsilon\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right] +$$

$$C_w \rho_a w^2 \sin\beta - \frac{g}{C^2 H}(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} q_2 - 2\omega \sin\psi q_1 \tag{2.3.29}$$

（3）热对流传输方程

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_k\frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(HE\frac{\partial \theta}{\partial x_k}\right) - \frac{K_s}{\rho C_p H}\theta \tag{2.3.30}$$

式中：垂向平均流速分量 $v_i = \frac{q_i}{\rho H}$；ε 为广义紊动运动粘性系数；C 为底部阻力的 Chezy 系数；w、C_w、ρ_a 和 β 分别为风速、风应力系数、空气密度和风速与 x_1 轴向之间的夹角；ω 和 ψ 分别为地球自转角速度和纬度；E、K_s 和 C_p 分别为弥散—扩散系数、水面综合散热系数和水的等压比热。

初始条件：

$$H(x_1, x_2, 0) = H_0(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) + \eta_0(x_1, x_2)$$

$$q_i(x_1, x_2, 0) = q_{i0}(x_1, x_2), \quad \theta(x_1, x_2, 0) = \theta_0(x_1, x_2) \tag{2.3.31}$$

边界条件为：

①陆地边界：$q_n = q_\tau = 0$ (即$q_1 = q_2 = 0$)；$\dfrac{\partial \theta}{\partial n} = 0$ (2.3.32a)

②入流边界：$q_1 = \bar{q}_1$，$q_2 = \bar{q}_2$，$\theta = \bar{\theta}$ (2.3.32b)

③出流边界：$q_1 = \bar{q}_1$，$q_2 = \bar{q}_2$，$\dfrac{\partial \theta}{\partial n} = 0$ (2.3.32c)

④海洋开域边界：$N_{nn} = N_{nn}^*$，$N_{n\tau} = N_{n\tau}^*$，$\dfrac{\partial \theta}{\partial n} = 0$ (2.3.32d)

其中 $\begin{Bmatrix} N_{nn} \\ N_{n\tau} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \\ -\alpha_{n2} & \alpha_{n1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{n1} \\ N_{n2} \end{Bmatrix}$，$\begin{Bmatrix} N_{n1} \\ N_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} - N_p & N_{21} \\ N_{21} & N_{22} - N_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{n1} \\ \alpha_{n2} \end{Bmatrix}$，

$\alpha_m = \cos(n, x_i)$ 为边界外法向与 x_i 坐标轴之间夹角的余弦，

$$N_{ij} = \varepsilon\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right), \quad N_p = \frac{\rho g H^2}{2}$$

对方程 (2.3.27) ~ (2.3.30) 应用伽辽金法，分别乘以 $\delta\eta$、δq_1、δq_2 和 $\delta\theta$，对二阶导数项应用格林公式，得

$$\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right) \delta\eta \mathrm{d}\Omega = 0$$

$$\int_\Omega \left\{\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(v_k q_1) + \rho g H \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right\} \delta q_1 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \left\{\varepsilon\left[2\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial \delta q_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \delta q_1}{\partial x_2}\right]\right\} \mathrm{d}\Omega$$

$$= \int_\Omega \left\{C_n \rho_a w^2 \cos\beta - \frac{g}{C^2 H}(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} q_1 + 2\omega \sin\psi q_2\right\} \delta q_1 \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \varepsilon\left[2\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\alpha_{n1} + \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)\alpha_{n2}\right] \delta q_1 \mathrm{d}S$$

$$\int_\Omega \left\{\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(v_k q_2) + \rho g H \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right\} \delta q_2 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \left\{\varepsilon\left[2\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\frac{\partial \delta q_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \delta q_2}{\partial x_1}\right]\right\} \mathrm{d}\Omega$$

$$= \int_\Omega \left\{C_n \rho_a w^2 \sin\beta - \frac{g}{C^2 H}(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}} q_2 - 2\omega \sin\psi q_1\right\} \delta q_2 \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \varepsilon\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial q_2}{\partial x_1}\right)\alpha_{n1} + 2\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\alpha_{n2}\right] \delta q_2 \mathrm{d}S$$

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(v_k - \frac{E}{H}\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \frac{K_s}{\rho C_p H}\theta\right] \delta\theta \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega E \frac{\partial \theta}{\partial x_k}\frac{\partial \delta\theta}{\partial x_k} \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma E \frac{\partial \theta}{\partial n} \delta\theta \mathrm{d}S$$

计算区域剖分为单元，对各变量和时间偏导数取分片插值，用插值基函数 Φ_m 取代 $\delta\eta$ 等，在单元上利用以上积分各式可构造出单元有限元方程。

$$M_{mn}^{(e)} \dot{\eta}_n^{(e)} = -B_{kmn}^{(e)} q_{kn}^{(e)} \tag{2.3.33}$$

$$M_{mn}^{(e)} \dot{q}_{kn}^{(e)} = -C_{kmn}^{(e)} \eta_n^{(e)} - D_{kmn}^{(e)} q_{kn}^{(e)} - E_{kmn}^{(e)} q_{2n}^{(e)} + F_{km}^{(e)} \quad k = 1,2 \tag{2.3.34}$$

$$M_{mn}^{(e)}\dot{\theta}_n^{(e)} = -(A_{1mn}^{(e)}+A_{2mn}^{(e)})\theta_n^{(e)} + G_m^{(e)} \tag{2.3.35}$$

其中 $$\dot{\eta}_n^{(e)} = \frac{d\eta_n^{(e)}}{\mathrm{d}t},\quad \dot{q}_{1n}^{(e)} = \frac{dq_{1n}^{(e)}}{dt},\quad \cdots$$

$$M_{mn}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m \Phi_n \mathrm{d}\Omega \tag{2.3.36}$$

称为质量矩阵。其它矩阵元素分别为

$$B_{lmn}^{(e)} = \frac{1}{\rho}\int_{\Omega^{(e)}} \Phi_m \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_l}\mathrm{d}\Omega,\qquad C_{kmn}^{(e)} = \rho g \int_{\Omega^{(e)}} H\Phi_m \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}\mathrm{d}\Omega$$

$$D_{lmn}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left\{\left[\nu_l \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_l} + \frac{g}{C^2 H}(v_1^2+v_2^2)^{\frac{1}{2}}\right]\Phi_m + \varepsilon\left(2\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2}\right)\right\}\mathrm{d}\Omega$$

$$E_{1mn}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_l}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2} - 2\omega\sin\psi\Phi_m\right)\mathrm{d}\Omega,\quad D_{2mn}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2} + 2\omega\sin\psi\Phi_m\right)\mathrm{d}\Omega$$

$$E_{2mn}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left\{\left[\nu_l \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_l} + \frac{g}{C^2 H}(v_1^2+v_2^2)^{\frac{1}{2}}\right]\Phi_m + \varepsilon\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} + 2\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2}\right)\right\}\mathrm{d}\Omega$$

$$A_{1mn}^{(e)} = \int_{\Omega_1^{(e)}} \left(E\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_l}\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_l} + \frac{K_s}{\rho C_p H}\Phi_m\Phi_n\right)\mathrm{d}\Omega,\qquad A_{2mn}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\nu_l - \frac{E}{H}\frac{\partial H}{\partial x_l}\right)\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_l}\Phi_m\,\mathrm{d}\Omega$$

向量$G_m^{(e)}$为θ方程中的边界积分项，根据前面给出的边界条件，该项为零；$F_{lm}^{(e)}$为q_l方程中的风应力项与Φ_m乘积的积分，它还应包括边界积分项，但在内陆水域中若不考虑开域边界，边界积分项为零。

将单元方程组叠加并引入边界条件后形成总体方程如下：

$$M_{ij}\dot{\eta}_j = -B_{kij}q_{kj} = P_{Hi}\ (t,\ \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2) \tag{2.3.37}$$

$$M_{ij}\dot{q}_{kj} = -C_{kij}\eta_j - D_{kij}q_{1j} - E_{kij}q_{2j} + F_{ki} = P_{Qki}\ (t,\ \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2,\ \boldsymbol{\eta}) \tag{2.3.38}$$

$$M_{ij}\dot{\theta}_j = -(A_{1ij}+A_{2ij})\theta_j + G_i = P_{\theta i}\ (t,\ \boldsymbol{\theta}) \tag{2.3.39}$$

这些都是结点未知量的常微分方程组，方程组右端的P_{Hi}、P_{Qki}和$P_{\theta i}$为非线性关系式组成的向量，式中$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{\eta}$和$\boldsymbol{\theta}$是计算区域内各结点函数值所构成的向量。如果$\boldsymbol{\theta}$变化不大，超温对浅水运动基本没有影响，每一时间步长可以先求$\boldsymbol{\eta}$和$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$，再求$\boldsymbol{\theta}^n$。

$\boldsymbol{\eta}$和$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$的方程相互耦合，必须联立求解。后者的单元方程系数矩阵元素积分式中含有待求的未知量(v_1, v_2, H等)，常微分方程组 (2.3.38) 是非线性的。计算时常采用分数步长法，将$\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{\eta}$的计算错开半个时间步长，即：

$$M_{ij}\eta_j^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t P_{Hi}\ (t_n,\ \boldsymbol{q}_1^n,\ \boldsymbol{q}_2^n) + M_{ij}\eta_j^{n-\frac{1}{2}}$$

$$M_{ij}q_{kj}^{n+1} = \Delta t P_{Qki}\ (t_{n+\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{q}_1^n,\ \boldsymbol{q}_2^n,\ \boldsymbol{\eta}^{n+\frac{1}{2}}) + M_{ij}q_{kj}^n$$

因此在计算系数矩阵时对涉及到的未知量可用前一步的计算值。

如果采用九结点四边形等参单元，且在单元上积分计算各矩阵元素时采用 Simpson 数值积分，在单元上对任一给定函数F的积分为

$$\int_{\Omega} F\mathrm{d}\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\ \eta)|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_{p=1}^{9} w_p F(\xi_p,\ \eta_p)|J(\xi_p,\ \eta_p)| \tag{2.3.40}$$

其积分基点就是单元的九个结点，积分权系数

$$w_p = \begin{cases} \dfrac{16}{9} & p=9(\text{中心结点}) \\ \dfrac{4}{9} & p=5,\ 6,\ 7,\ 8(\text{边中点}) \\ \dfrac{1}{9} & p=1,\ 2,\ 3,\ 4(\text{角点}) \end{cases} \tag{2.3.41}$$

这样做的最大好处是最终形成的总体质量矩阵 M_{ij} 是一个对角阵，于是

$$\eta_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t P_{hi}(t_n,\ \boldsymbol{q}_1^n,\ \boldsymbol{q}_2^n)}{M_{ii}} + \eta_i^{n-\frac{1}{2}} \tag{2.3.42}$$

$$q_{2i}^{n+1} = \frac{\Delta t P_{qi}(t_{n+\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{q}_1^n,\ \boldsymbol{q}_2^n,\ \boldsymbol{\eta}^{n+\frac{1}{2}})}{M_{ii}} + q_{2i}^n \tag{2.3.43}$$

不必都求解线性代数方程组。其它系数矩阵的计算仍可采用精度较高的 Gauss 积分。时间步长Δt应满足 Courant 条件：

$$|U\pm\sqrt{gH}|\frac{\Delta t}{\Delta s}\leqslant 1 \tag{2.3.44}$$

式中：Δs为网格尺寸，U为流速。

已知流场和水深，可以求解温度场θ。当温度场为恒定时，

$$A_{ij}\theta_j = (A_{1ij}+A_{2ij})\theta = G_i \tag{2.3.45}$$

由于矩阵 A_{2ij} 是非对称的，故不能用LDL^{t}分解法求解，不妨直接用消去法求解。

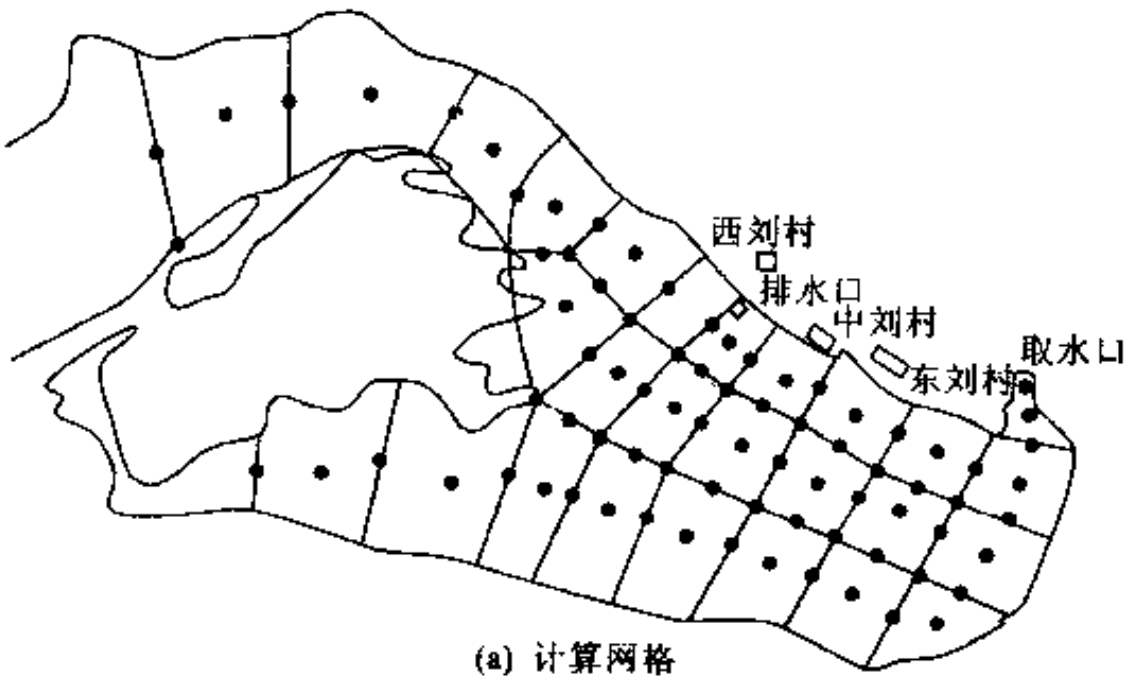
当温度场为非恒定时，仍然采用 9 结点等参单元和 Simpson 数值积分，有

$$\dot{\theta}_i = \frac{P_{\theta i}(t,\ \theta)}{M_{ii}} = F_i(t,\ \theta_j) \tag{2.3.46}$$

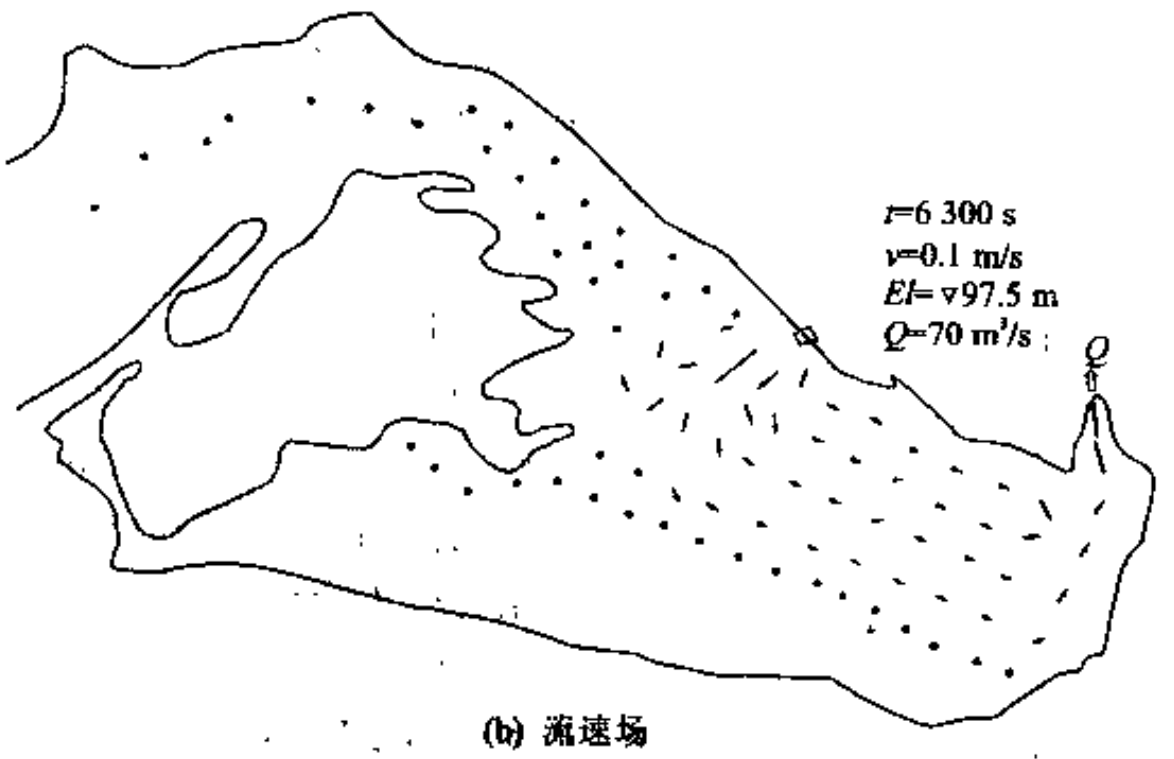
求解这个常微分方程组时若用隐格式固然精度和稳定性均好，但同时也就不能利用 Simpson 积分所带来的好处了。在显格式中 Runge-Kutta 法精度和稳定性较好，经比较采用如下的三阶 Runge-Kutta 格式

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \frac{\Delta t}{6}(K_{1i} + 4K_{2i} + K_{3i})$$

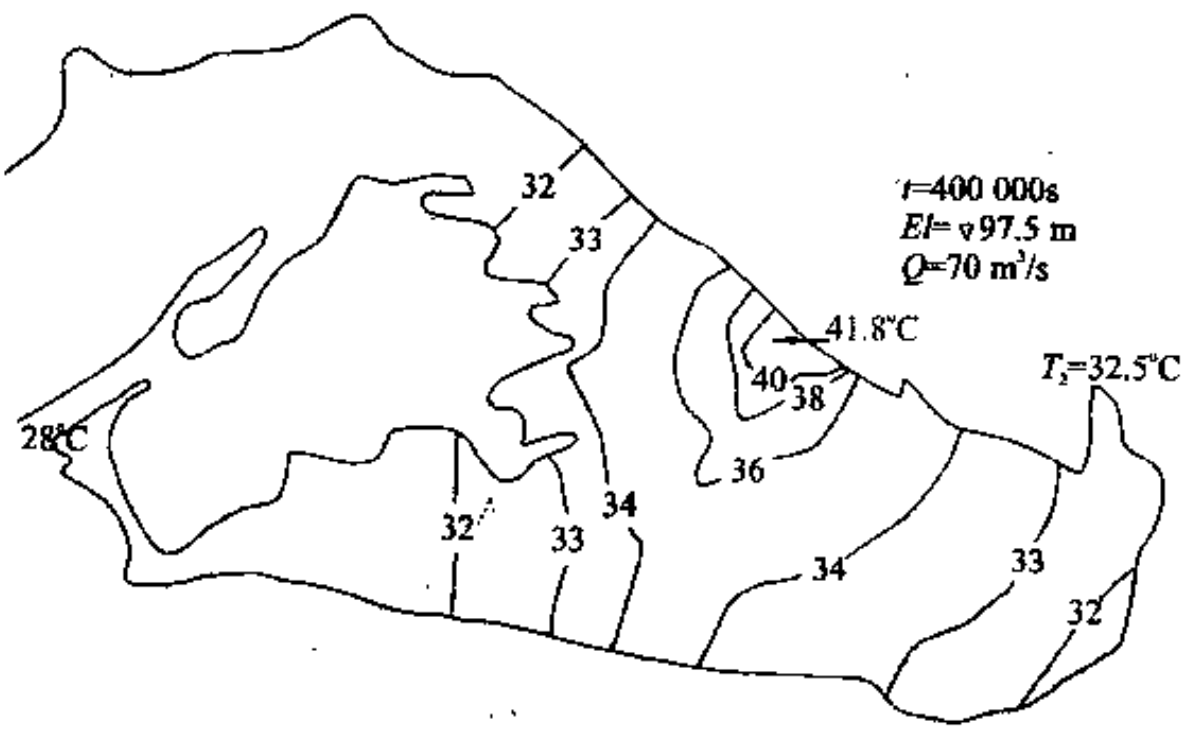
$$K_{1i} = F_i(t_n,\ \theta_j^n),\quad K_{2i} = F_i\left(t_n+\frac{\Delta t}{2},\ \theta_j^n+\frac{\Delta K_{1i}}{2}\right)$$



(a) 计算网格



(b) 流速场



(c) 温度场

图2.23　白龟山水库冷却池计算实例

$$K_3 = F_i(t_i+\Delta t,\ \theta^n+2\Delta tK_2-\Delta tK_1) \tag{2.3.47}$$

精度和稳定性比 Euler 格式好得多，而与四阶 Runge-Kutta 格式基本一致，但计算量比后者少。

当贝克莱数$\mathrm{Pe}=\frac{U\Delta s}{E}$远大于 2 时，由于扩散方程中对流项的影响，温度场的计算值出现波动，当温度扩散逆流进行时波动尤其显著。为消除波动可用“人工光滑”，即

$$\theta_{i,\text{光滑}} = \alpha\theta_i + \frac{(1-\alpha)}{M}\sum_{e\in E_i}\left[\frac{\sum_{j=1}^{3}(\partial J/\partial w)_j^e\theta_j^{n+1}}{\sum_{j=1}^{3}(\partial J/\partial w)_j^e}\right] \tag{2.3.48}$$

式中：M 是包含有结点 i 的单元的个数，它们构成集合 E_i；光滑因子 α 的值在 0.9 左右。人工光滑可有效地消除波动，但也会夸大扩散效应，抹杀一些解的细节。

出现波动的原因是有限元法没有考虑到流动影响所造成的“迎风”效应。为了弥补这一缺陷而提出了一些所谓“迎风有限元”的改进方案，如 Petrov-Galerkin 有限元法和“流线迎风”有限元等，但还有待进一步改进，这方面的工作仍在进行中。

当计恒定温度场的计算值最终达到稳定解时也可以得到恒定温度场，不过这样所需的计算时间要多得多。

这里介绍的一个实际算例是河南平顶山市姚孟电厂的冷却池温度流计算，如图 2.23 所示。姚孟电厂以白龟山水库作为排放电厂冷却系统温排水的冷却池，排水冷却降温后循环使用。水库总面积 32 km²，低水位时水库基本上被一半岛分隔成两部分，作为冷却池的下游库区面积约 16 km²，其中有效散热面积约 8 km²，水深 1~7 m，平均水深 3 m，为浅水湖泊。按装机容量 120 万 kW 计，需要取、排水流量 70 m³/s，排水口温度为 41.8℃，要求取水口（在水库的东北角）水温不超过 33℃，数值计算的结果可以为合理选择排水口的位置提供依据，排水口位置距离取水口太远将增加排水渠的长度和工程造价。

图 2.23(a)为库区平面及计算网格剖分图，共划分为 27 个单元，141 个结点。有关参数为：自然水温 $T_a=29.4$℃，$E=0.1$ m²/s，$\varepsilon=10$ m²/s，$C'=30$ m$^{\frac{1}{2}}$/s，$\frac{K_s}{\rho C_p}=0.824$ m/d℃，不计风力影响。图 2.23 (b)、(c) 所示为当排水口位于申刘村和西刘村之间时计算得到的流场和温度分布，取水口水温为 32.5℃，可以满足要求。计算流场时，时间步长取为 30 s，经过 210 步流场基本稳定；计算温度场时，时间步长为 200 s，经过 1 800 步（100 h）达到稳定。

§2.4 边界元法

边界元法 (Boundary Element Method，简称 BEM) 将微分方程的求解问题归结为一个沿区域边界积分的边界积分方程的求解，离散化后的插值结点在边界上，不必在区域内部进行类似有限元那样的区域划分和插值，未知量的个数大大减少，应用于三维问题更具优越性。

有两种类型的边界元法，一种是所谓“间接边界元法”，在边界上或区域内部配置一些点源、偶极子等基本解，然后根据边界条件求出这些基本解的强度，将基本解叠加便得到确定整个区域上的物理量分布，这种方法可以用来求解势流问题。另一种类型的边界元法是所谓“直接边界元法”，其思路是在加权余量法中利用微分方程的基本解作为权函数，可以导出区

域中任一点上物理量的表达式，具有边界积分的形式；引入边界条件后得到一边界积分方程，再经离散化、求解后便可确定表达式中包含的未知边界参数，从而确定整个区域上的物理量分布。

本节以势流问题为例介绍基于加权余量法的直接边界元法，它除了用于求解势流问题外，现已经推广用于求解泊松方程、热传导方程、波动方程乃至粘性流动问题，比间接边界元法更具有广泛性。

2.4.1 势流问题的边界元法

2.4.1.1 边界积分方程

常见的势流边值问题如下

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = 0 \\ \varphi|_{\Gamma_1} = \bar{\varphi},\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = \bar{q} \end{cases} \tag{2.4.1}$$

取权函数 w，应用加权余量法，有 $\int_\Omega w\nabla^2\varphi d\Omega = 0$

根据格林公式 $$\int_\Omega (w\nabla^2\varphi + \nabla w\cdot\nabla\varphi)\, d\Omega = \int_\Omega \nabla\cdot(w\nabla\varphi)d\Omega = \int_\Gamma w\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$$

若将 w 与 φ 交换位置，同样可得

$$\int_\Omega (\varphi\nabla^2 w + \nabla w\cdot\nabla\varphi)\, d\Omega = \int_\Gamma \varphi\frac{\partial w}{\partial n}dS$$

上两式相减得 $$\int_\Omega w\nabla^2\varphi d\Omega = \int_\Omega \varphi\nabla^2 w d\Omega + \int_\Gamma w\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \int_\Gamma \varphi\frac{\partial w}{\partial n}dS = 0$$

推导出

$$\int_\Omega \varphi\nabla^2 w d\Omega = \int_\Gamma \varphi\frac{\partial w}{\partial n}dS - \int_\Gamma w\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \tag{2.4.2}$$

根据边界上各段给定的边界条件的不同，该式又可写成

$$\int_\Omega \varphi\nabla^2 w d\Omega = \int_{\Gamma_1} \bar{\varphi}\frac{\partial w}{\partial n}dS + \int_{\Gamma_2} \varphi\frac{\partial w}{\partial n}dS - \int_{\Gamma_1} w\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \int_{\Gamma_2} w\bar{q}dS \tag{2.4.3}$$

在式（2.4.2）或（2.4.3）中若以拉普拉斯方程的基本解 p 作为权函数便可导出边界元法的基本方程。

二维势流问题的基本解

$$p = \frac{1}{2\pi}\ln r \tag{2.4.4}$$

其中 $r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2$，这是一个位于点$(\xi, \eta)$的单位强度平面点源的流速势函数。

三维势流问题的基本解 $$p = -\frac{1}{4\pi r} \tag{2.4.5}$$

$r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$，这是一个位于点$(\xi, \eta, \zeta)$的单位强度空间点源的流速势函数。

不难证明，上述基本解满足方程

$$\nabla^2 p = \delta(\boldsymbol{x}-\xi) \tag{2.4.6}$$

式中：$\boldsymbol{x}=(x, y)$或(x, y, z)，$\xi=(\xi, \eta)$或(ξ, η, ζ)；狄拉克函数

$$\delta(\boldsymbol{x}-\xi)=\begin{cases}\infty & \boldsymbol{x}=\xi \\ 0 & \boldsymbol{x}\neq\xi\end{cases} \tag{2.4.7}$$

且对于 Ω 内部的点 ξ，有

$$\int_{\Omega}\delta(\boldsymbol{x}-\xi)\,\mathrm{d}\Omega=1, \quad \int_{\Omega}f(x)\delta(\boldsymbol{x}-\xi)\mathrm{d}\Omega=f(\xi) \tag{2.4.8}$$

若 ξ 为区域 Ω 的内点，取权函数 $w=$ 基本解 p，式 (2.4.2) 的左边为

$$\int_{\Omega}\varphi\nabla^2 p\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\varphi\delta(\boldsymbol{x}-\xi)\mathrm{d}\Omega=\varphi(\xi) \tag{2.4.9}$$

所以

$$\varphi(\xi)=\int_{\Gamma}\left(\varphi\frac{\partial p}{\partial n}-p\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{2.4.10}$$

若已知 φ 及其法向导数在整个边界上的分布，利用边界积分式 (2.4.10) 可以求得区域Ω内任一点上的 φ 值。然而在同一边界点上 φ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 的边界条件一般不会同时给出，缺少的另一半条件需要利用对边界点的边界积分式来确定。

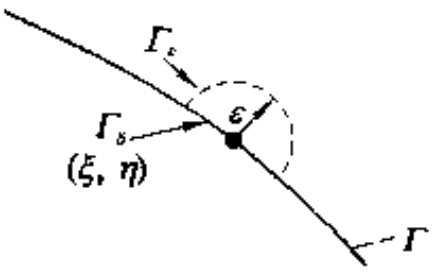


图2.24　边界计算

在边界点 ξ 附近以新的边界 Γ_ε 替代原来的边界段 Γ_ε，使该点成为新区域的内点如图 2.24 所示，这样便可以利用式 (2.4.10) 得

$$\varphi(\xi)=\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon}\varphi\frac{\partial p}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon}p\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S+\int_{\Gamma}\left(\varphi\frac{\partial p}{\partial n}-p\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

图 2.24 所示的二维光滑边界上，Γ_ε 可取为以(ξ, η)为圆心，半径为 ε 的微小半圆，则

$$\int_{\Gamma}\left(\varphi\frac{\partial p}{\partial n}-p\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[\varphi(\xi, \eta)\frac{1}{2\pi\varepsilon}-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon\right]\mathrm{d}S=\left[\varphi(\xi, \eta)\frac{1}{2\pi\varepsilon}-\frac{\partial p}{\partial r}\frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon\right]\pi\varepsilon$$

$$=\frac{1}{2}\varphi(\xi, \eta)-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\varepsilon\ln\varepsilon$$

当$\varepsilon\to 0$ 时，$\varepsilon\ln\varepsilon\to 0$，且$\Gamma-\Gamma_\varepsilon\to\Gamma$，所以有

$$\frac{1}{2}\varphi(\xi, \eta)=\int_{\Gamma}\varphi\frac{\partial p}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_{\Gamma}p\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{2.4.11}$$

由于边界上的 φ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 值已知其中一个，而基本解已知，所以利用式 (2.4.11) 便可确定剩下的边界未知条件。

三维问题光滑边界上，Γ_ε 可取为以(ξ, η, ζ)为球心，半径为 ε 的微小半球面，同样可以推

导得

$$\frac{1}{2}\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\int_{\Gamma}\varphi\frac{\partial p}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_{\Gamma}p\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{2.4.12}$$

综上所述，对于区域Ω内部以及边界上的任何一点ξ，有

$$C\varphi(\xi)=\int_{\Gamma}\varphi\frac{\partial p}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_{\Gamma}p\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{2.4.13}$$

区域内点，系数$C=1$；光滑边界上的点，$C=\frac{1}{2}$；边界转折处的点，若边界外侧的夹角为α，则$C=\frac{\alpha}{(2^{n-1}\pi)}$（平面角$n=2$，立体角$n=3$）。注意式中的$p$是位于点$\xi$的基本解。

2.4.1.2 边界元离散化方法

无论是利用边界积分方程 (2.4.13) 来确定边界上未知的φ或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$值，或者是计算区域内部各点上的$\varphi$值，求解和计算过程都必须离散化，这就是边界元方法，其做法与有限元法有许多类似的地方。

边界元法的第一步是要将区域的边界剖分成有限个互不重叠、且无间隙的边界单元$\Gamma^{(e)}$$(e=1,\ \cdots,\ E)$，则

$$\Gamma=\bigcup_{e=1}^{E}\Gamma^{(e)}$$

然后在每个单元上根据具体情况选M个插值终点，对φ或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$进行插值逼近。令$q=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，在$\Gamma^{(e)}$上

$$\varphi=\sum_{m=1}^{M}\varphi_m^{(e)}\Phi_m,\qquad q=\sum_{m=1}^{M}q_m^{(e)}\Phi_m \tag{2.4.14}$$

m为结点在单元上的局部编号，与结点在整个边界上的总体编号$(i=1,\ \cdots,\ p)$之间的关系为

$$\varphi_m^{(e)}=\Delta_{mi}^{(e)}\varphi_i,\quad q_m^{(e)}=\Delta_{mi}^{(e)}q_i \tag{2.4.15}$$

式中：$\Delta_{mi}^{(e)}$为与有限元法类似的布尔矩阵。

式 (2.4.13) 中的边界积分可以分单元近似计算，然后叠加

$$C\varphi(\xi)=\int_{\Gamma}\varphi\frac{\partial p(\xi,\ x)}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_{\Gamma}p(\xi,\ x)q\mathrm{d}S=\sum_{e=1}^{E}\int_{\Gamma^{(e)}}\varphi\frac{\partial p}{\partial n}\mathrm{d}S-\sum_{e=1}^{E}\int_{\Gamma^{(e)}}pq\mathrm{d}S$$

$$=\sum_{e=1}^{E}\int_{\Gamma^{(e)}}\varphi_m^{(e)}\frac{\partial p}{\partial n}\Phi_m\mathrm{d}S-\sum_{e=1}^{E}\int_{\Gamma^{(e)}}q_m^{(e)}p\Phi_m\mathrm{d}S$$

$$=H_i(\xi)\varphi_i-G_i(\xi)q_i \tag{2.4.16}$$

便得到一个各边界结点上φ、q值的线性关系式，其中

$$H_i(\xi)=\sum_{e=1}^{E}\left[\Delta_{mi}^{(e)}\int_{\Gamma^{(e)}}\frac{\partial p(\xi,\ x)}{\partial n}\Phi_m\mathrm{d}S\right],\quad G_i(\xi)=\sum_{e=1}^{E}\left[\Delta_{mi}^{(e)}\int_{\Gamma^{(e)}}p(\xi,\ x)\Phi_m\mathrm{d}S\right] \tag{2.4.17}$$

与有限元法一样，实际计算中不须用布尔矩阵，而是根据结点的局部编号与总体编号之间的对应关系进行叠加。积分式中的基本解 p 及其法向导数，根据情况也可以取类似的插值逼近式。

如果对边界结点 i 应用式 (2.4.16)、(2.4.17)，则

$$C\varphi_i = H_{ij}\varphi_j - G_{ij}q_j \quad (i, j = 1, \cdots, P) \tag{2.4.18}$$

这就构成了一个有关各边界结点上 φ 和 q 值的线性方程组，系数为

$$H_{ij} = \sum_{m=1}^{P}\left[\Delta_{mj}^{(e)}\int_{\Gamma_m}\frac{\partial p_i}{\partial n}\Phi_m \mathrm{d}S\right],\quad G_{ij} = \sum_{m=1}^{P}\left[\Delta_{mj}^{(e)}\int_{\Gamma_m} p_i\Phi_m \mathrm{d}S\right] \tag{2.4.19}$$

共 P 个方程和 P 个未知量，可以求解。

与有限元不同的是，边界元总体方程组的矩阵是一个满阵，这增加了内存的占用和方程组求解的计算量。但在同样的计算精度要求下，边界元法的结点数远少于有限元法，又弥补了这一不足。尤其在无穷大区域问题和三维问题的情况下，边界元法的优势更为显著。

求出边界上各结点的 φ 和 q 值后，便可用式 (2.4.17) 计算出区域内部各点的 φ 值。内点上的流速分量为

$$u_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i} = \frac{\partial H_j}{\partial\xi_i}\varphi_j - \frac{\partial G_j}{\partial\xi_i}q_j \tag{2.4.20}$$

其中

$$\frac{\partial H_j}{\partial\xi_i} = \sum_{m=1}^{P}\left[\Delta_{mj}^{(e)}\int_{\Gamma_m}\Phi_m\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\right],\quad \frac{\partial G_j}{\partial\xi_i} = \sum_{m=1}^{P}\left[\Delta_{mj}^{(e)}\int_{\Gamma_m}\Phi_m\frac{\partial p}{\partial\xi_i}\mathrm{d}S\right] \tag{2.4.21}$$

边界上的法向流速 $u_n = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = q$ 已知；切向流速可以由相邻结点 φ 值的差商求得。

下面介绍二维势流问题中常用的两种边界元离散化格式。

平面问题的边界单元可以近似看成一段直线，只有一个结点的单元为常数元，有两个结点的单元为线性单元。单元上还可以有三个乃至更多的结点，为二次乃至高次单元，但以常数元和线性单元用得较多，如图 2.25 所示。

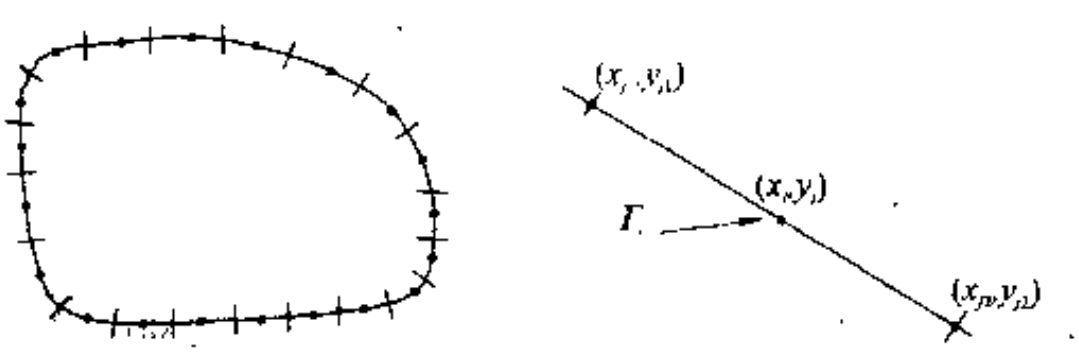


图2.25　边界元法结点与单元(常数元)

常数元只有一个结点(x_j, y_j)，因结点与单元一一对应，可以 j 作为单元编号，单元总数等于结点总数 $E = P$。单元内取 $\varphi = \varphi_j$、$q = q_j$为常数，插值形函数 $\Phi_j = 1$，系数为

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j}\frac{\partial p_i}{\partial n}\,\mathrm{d}S,\quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} p_i \mathrm{d}S$$

其中

$$p_i = \frac{1}{2\pi}\ln r_i,\quad r_i = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

设单元$\Gamma^{(j)}$的两端点分别为$(x_{j1},\ y_{j1})$和$(x_{j2},\ y_{j2})$，直线方程为

$$y = k(x-x_{j1}) + y_{j1}, \qquad k = \frac{y_{j2}-y_{j1}}{x_{j2}-x_{j1}}$$

因而 $$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} = \sqrt{cx^2+2bx+a}$$

其中 $$a = x_i^2 + (y_{j1}-y_i+kx_{j1})^2,\quad b = k(y_{j1}-y_i-kx_{j1})-x_i,\quad c = k^2+1$$

而 $$\frac{\partial p_i}{\partial n} = \frac{\partial p_i}{\partial x}\cos(n,\ x) + \frac{\partial p_i}{\partial y}\cos(n,\ y) = \frac{1}{2\pi r_i^2}[k(x_{j1}-x_i)-(y_{j1}-y_i)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S}$$

得

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_{(j)}} \frac{\partial p_i}{\partial n}\mathrm{d}S = \frac{1}{2\pi}\int_{x_{j1}}^{x_{j2}} \frac{k(x_{j1}-x_i)-(y_{j1}-y_i)}{r_i^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{k(x_{j1}-x_i)-(y_{j1}-y_i)}{2\pi\sqrt{ac-b^2}}\arctan\frac{cx+b}{\sqrt{ac-b^2}}\Bigg|_{x_{j1}}^{x_{j2}} \tag{2.4.22a}$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_{(j)}} p_i\mathrm{d}S = \int_{\Gamma_{(j)}} \frac{1}{2\pi}\ln r_i\mathrm{d}S = \int_{x_{j1}}^{x_{j2}} \frac{1}{4\pi}\ln(cx^2+2bx+a)\sqrt{k^2+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{k^2+1}}{4\pi}\left[\left(x+\frac{b}{c}\right)\ln r_i^2 + \frac{2\sqrt{ac-b^2}}{c}\arctan\frac{(x+b)}{\sqrt{ac-b^2}} - 2x\right]\Bigg|_{x_{j1}}^{x_{j2}} \tag{2.4.23a}$$

当 $i=j$ 时，$x_i = \frac{x_{j1}+x_{j2}}{2}$，$y_i = \frac{y_{j1}+y_{j2}}{2}$

则 $$k(x_{j1}-x_i)-(y_{j1}-x_i) = 0,\qquad ac-b^2 = 0$$

可得 $$H_{ii} = 0 \tag{2.4.22b}$$

$$G_{ii} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{4\pi}\left(x+\frac{b}{c}\right)\ln r_i^2\Bigg|_{x_{j1}}^{x_{j2}} - \frac{\sqrt{k^2+1}}{2\pi}(x_{j2}-x_{j1}) \tag{2.4.23b}$$

区域内部任一点

$$\varphi(\xi,\ \eta) = H_j\varphi_j - G_jq_j \tag{2.4.24}$$

式中H_j、G_j的计算式仍可用H_{ij}、G_{ij}的计算式 (2.4.22a) 和 (2.4.23a)，只需将式中的x_i、y_i改为ξ、η，同时在 a、b、c 的计算式中也应作类似修正。

线性单元以相邻的两个结点为端点，单元总数E也等于结点总数P。设单元$\Gamma^{(j)}$的端点为$(x_{j1},\ y_{j1})$和$(x_{j2},\ y_{j2})$，可取

$$(x_{j1},\ y_{j1}) = (x_j,\ y_j),\quad (x_{j2},\ y_{j2}) = (x_{j+1},\ y_{j+1}),\quad (j\neq P)$$

$$(x_{P1},\ y_{P1})=(x_P,\ y_P),\quad (x_{P2},\ y_{P2})=(x_1,\ y_1)$$

单元长度 $$l_j=\sqrt{(x_{j2}-x_{j1})+(y_{j2}-y_{j1})^2}$$

在单元上对φ、q取线性插值函数，插值形函数为

$$\Phi_1=1-\frac{S}{l_j},\quad \Phi_2=\frac{S}{l_j},\quad S\in[0,\ l_j]$$

积分得到

$$\begin{cases}H_{ij}=a_{ij2}+a_{i,j+1,1},\quad G_{ij}=b_{ij2}+b_{i,j+1,1} & (j\neq 1,\ P)\\ H_{i1}=a_{i11},\qquad G_{i1}=b_{i11},\qquad G_{iP}=b_{iP2},\quad H_{iP}=a_{iP2}\end{cases}\tag{2.4.25}$$

式中 $$a_{ijm}=\int_0^{l_j}\Phi_m\frac{\partial p_i}{\partial n}\mathrm{d}S,\quad b_{ijm}=\int_0^{l_j}\Phi_m p_i\mathrm{d}S\qquad (m=1,2)$$

计算时可以用数值积分。

2.4.2 坝面三维流动的边界元解法

图 2.26 所示坝面三维有势流动。要求根据已知的上游来流总水头 E_0，计算出流速和流量，因而可以确定坝面溢流的流量系数。

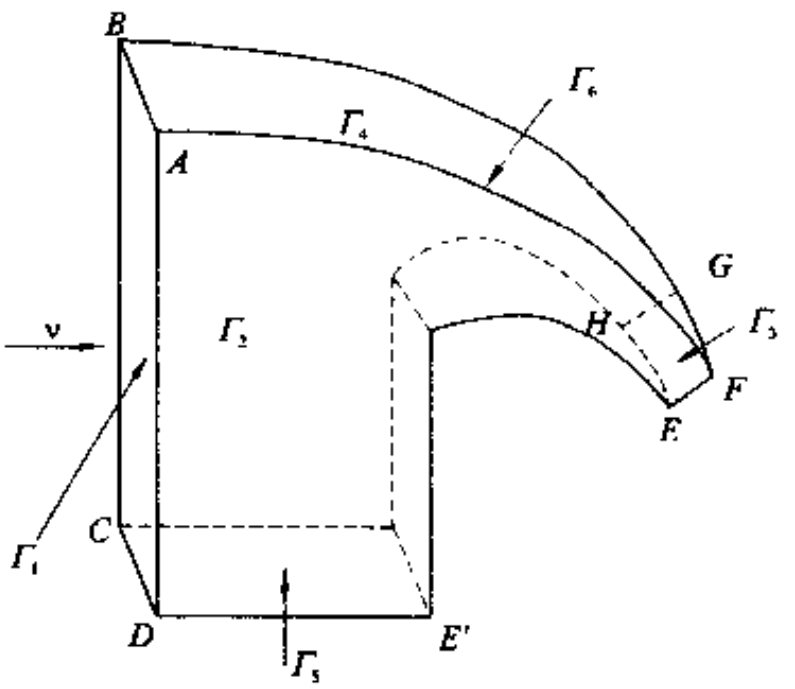


图2.26 三维坝面边界元流动

若已知自由面位置，边界条件为

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=-\frac{Q}{A}=-v=-\sqrt{2g(E_0-z_A)}\tag{2.4.26}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_5}=0\tag{2.4.27}$$

$$\varphi|_{\Gamma_4}=0\tag{2.4.28}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_6}=0\tag{2.4.29}$$

(z 为垂直方向的坐标)，无论用有限元法还是用边界元法都可以求出流速势 φ 和流速。用边界元法求解时，边界单元可用三角形等参单元，单元积分可用数值积分。

若自由面形状、位置待定，需要在自由面上补充一个边界条件。已知自由面上法向流速为零，自由面上的流速等于切向流速，根据 Bernoulli 方程

$$v|_{\Gamma_f} = v_t|_{\Gamma_f} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right|_{\Gamma_f} = \sqrt{2g(E_0 - z)}|_{\Gamma_f} \tag{2.4.30}$$

在满足该式的条件下得到的自由面和流速势才是我们所要求的解。该式又可以写成

$$F = [v^2 - 2g(E_0 - z)]_{\Gamma_f} = 0 \tag{2.4.31}$$

计算时先要假定自由面的位置，用边界元法求出流速势和流速；如果假定的自由面和相应的计算结果能够满足式 (2.4.30) 则是真解，否则要对自由面位置进行调整，重新计算流速势和流速；如此迭代计算直至收敛。

设自由面的形状、位置可以用一组参数 $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{ms}]^T$ 惟一确定（例如 λ 可以是自由面各结点的 z 坐标值），则流速势和流速是 λ 的函数

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\lambda, x, y, z)$$

对自由面上的结点 i

$$F_i = v_i^2 - 2g(E_0 - Z_i),\ v_i = v\ (\lambda, x_i, y_i, z_i)\ (i = 1, \cdots, ms)$$

若 $F \neq 0$，需要调整自由面的位置。根据水流是急流还是缓流，自由面位置调整的方向是相反的，例如当 $F_i > 0$ 时，流态为缓流的情况下 $\left(\frac{\partial F_i}{\partial z_i} > 0\right)$ 应调低自由面结点的高度，急流时则反之。然而坝面溢流的流态从缓流过渡到急流，其流态转换的地点（即临界流发生的位置）不易确定，三维流动时情况尤其复杂。事实上，对每个结点孤立地调整其位置，迭代收敛速度会很慢。下面给出的自由面调整方法考虑到相邻结点之间的影响。

用牛顿迭代法调整参数 λ

$$\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} - \left\{\left[\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_j}\right]^{-1} F_i\right\}^{(k)} \tag{2.4.32}$$

如果自由面结点的 x、y 坐标固定不变，则牛顿矩阵的系数

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_j} = 2g\frac{\partial z_i}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial v_i^2}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial v_i^2}{\partial \lambda_j}\frac{\partial z_i}{\partial \lambda_j} \quad (i, j = 1,2, \cdots, ms) \tag{2.4.33}$$

如果 $\lambda_i = z_i$，则 $\frac{\partial z_i}{\partial \lambda_j} = \delta_{ij}$ 而

$$\frac{\partial v_i^2}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial(u_{si}^2 + u_{ni}^2)}{\partial \lambda_j} = 2u_{si}\frac{\partial u_{si}}{\partial \lambda_j} + 2u_{ni}\frac{\partial u_{ni}}{\partial \lambda_j} \tag{2.4.34}$$

u_{si} 和 u_{ni} 是自由面结点的两个切向流速分量。对 φ 的单元插值函数求偏导，或由结点 φ 值差商，可以计算出 u_{si}、u_{ni} 是相邻结点 φ 值的线性函数。所以求牛顿矩阵的系数最终归结为求结点流速势对 λ_j 的偏导数。

这种自由面位置的调整方法用在有限元法和边界元法中都可以。在边界元法中，为了求

$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_j}$，在式 (2.4.18) 两则对 λ_j 求偏导得

$$C\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_j}=H_{ij}\frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda_j}-G_{ij}\frac{\partial q_j}{\partial \lambda_j}+f_{ij}2 \quad (i,\ j=1,\ \cdots,\ p) \tag{2.4.35}$$

其中

$$f_{ij}=\frac{\partial G_{ij}}{\partial \lambda_j}q_j-\frac{\partial H_{ij}}{\partial \lambda_j}\varphi_j \tag{2.4.36}$$

这是一个求解 $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_j}$ 和 $\frac{\partial q_i}{\partial \lambda_j}$ 的方程组，矩阵系数与式 (2.4.18) 完全相同，在φ、q 已知的结点，$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_j}$ 和 $\frac{\partial q_i}{\partial \lambda_j}$ 分别为零。可以证明，f_{ij} 的值有限，所以该方程组是有解的。如果边界单元为三结点三角形等参单元，有

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial \lambda_j}=\sum_{e=1}^{E}\left[\Delta_{mi}^{(e)}\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\left(\int_{\Gamma_e}\frac{\partial q_i}{\partial n}\Phi_m \mathrm{d}S\right)\right]=\sum_{e=1}^{E}\left[\Delta_{mi}^{(e)}\iint_{\Delta}\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\left(\frac{\partial p_i}{\partial n}|J|\right)^{(e)}\Phi_m \mathrm{d}\xi d\eta\right] \tag{2.3.37a}$$

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial \lambda_j}=\sum_{e=1}^{E}\left[\Delta_{mi}^{(e)}\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\left(\int_{\Gamma_e}p_i\Phi_m \mathrm{d}S\right)\right]=\sum_{e=1}^{E}\left[\Delta_{mi}^{(e)}\iint_{\Delta}\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(p_i|J|)^{(e)}\Phi_m \mathrm{d}\xi d\eta\right] \tag{2.3.37b}$$

ξ和η是三角形单元的两个面积坐标。可以推导出单元积分式中关于λ_j的偏导数的表达式，积分后求得 f_{ij} 的值，求解方程组 (2.4.35) 便可得到 $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_j}$ 值。方程组的矩阵在求边界结点的φ、q 值时已经分解过了，所以只需对不同的右端项再回代 ms 次。

第三章　水动力学中的有限差分法

§3.1　势流有限差分解

流体力学问题数值解中差分法是一种古老的方法，它概念清晰，方法有效适用，程序简单。近年来虽然由于有限元法的出现，一些问题已采用有限元法或边界元法求解，但由于差分法由来已久，关于它的收敛性，误差分析、稳定性理论上研究较多，近年来差分法也有所发展，如兼有欧拉－拉格朗日观点的流体与“格子”，适应不规则区域形状的适体坐标变换等，使差分法如虎添翼又有新的进展。

因此，目前许多流体力学问题仍以差分法为主，尤其是依赖于时间的问题，如发展方程更是如此。

3.1.1　差分、差商与截断误差

解微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$时，我们以下式差分代替：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x_i, y_i),\ i=0,1,2,\ \cdots,\ n \tag{3.1.1}$$

式中$\Delta y=y_{i+1}-y_i$，$\Delta x=x_{i+1}-x_i$

原来要 x 变化在整个区间上成立，而公式 (3.1.1) 只是在x_0，x_1，x_2，…，x_n 这些离散点(结点) 上成立。用差分近似地代替微分的方程叫做差分方程。用差商代替微商求导。

我们称

$$\Delta y=y_{i+1}-y_i,\ \text{为一阶前差分} \tag{3.1.2a}$$

$$\Delta y=y_i-y_{i-1},\ \text{为一阶后差分} \tag{3.1.2b}$$

$$\Delta y=y_{i+1}-y_{i-1},\ \text{为一阶中心差分} \tag{3.1.2c}$$

类似地，我们分别称

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i},\ \text{为一阶向前差商} \tag{3.1.3a}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}},\ \text{为一阶向后差商} \tag{3.1.3b}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}},\ \text{为一阶中心差商} \tag{3.1.3c}$$

我们求得其它差商，如二阶甚至高阶差商（例如二阶中心差商）。令$\Delta x = h$，称为步长。

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cong \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\dfrac{y(x+h)-y(x)}{h} - \dfrac{y(x)-y(x-h)}{h}}{h}$$

$$= \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2} = \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} \tag{3.1.3}$$

用差商代替微商只是近似的，必然会带来误差，我们可以用 Taylor 级数展开来估计一下误差：

$$y(x+h) = y(x)+hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + O(h^4) \tag{3.1.4}$$

$$y(x-h) = y(x)-hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(x) + O(h^4)$$

用差分代替微分引起的误差，它可以在级数展开式的一定的地方截断，这种误差称为截断误差。上面一阶前差商、后差商、中心差商，二阶中心差商的截断误差，分别给出如下：

$$\frac{y(x+h)-y(h)}{h} - y'(x) = \frac{h}{2!}y''(x) = O(h^1) \tag{3.1.4a}$$

$$\frac{y(x-h)-y(h)}{h} - y'(x) = \frac{h}{2!}y''(x) = O(h^1) \tag{3.1.4b}$$

$$\frac{y(x+h)-y(x-h)}{h} - y'(x) = \frac{h^2}{3!}y'''(x) = O(h^2) \tag{3.1.4c}$$

$$\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2} - y''(x) = \frac{h^2}{12}y''''(x) = O(h^2) \tag{3.1.4d}$$

由此可见，所取差商的形式不同，用它代替微商所得的误差也不同。也就是说精度也不同。一阶前差、后差是一阶精度，一阶中心差是二阶精度；而二阶中心差也是二阶精度。因此，我们需要注意地选取差分格式，以提高其计算精度。

偏微分方程亦可写作差分形式，见以后实例。

3.1.2 势流问题差分形式

势流问题如恒定的温度场，渗流场，最终归结为求势函数 φ 或流函数ψ满足的 Laplace 方程。$\nabla^2\varphi = 0$，$\nabla^2\psi = 0$，此方程为椭圆型方程，如图 3.1 所示，它的求解属于边值问题，如$\nabla^2 u = 0$，平面问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ u \in \Omega$$

物理量函数 u 属于区域 Ω。其边界条件为

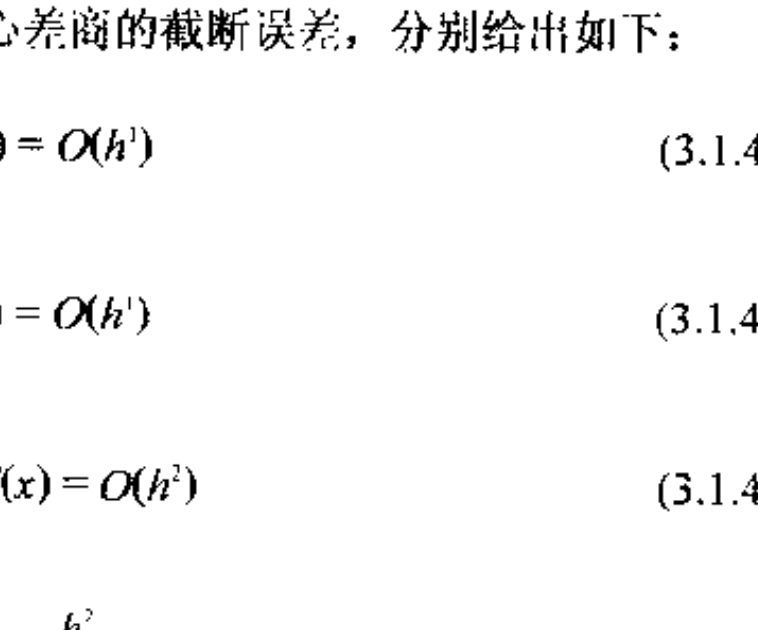


图3.1 差分网格

$$\Gamma_1\text{上，}u|_{\Gamma_1}=b\text{ 为已知，Ⅰ类}$$

$$\Gamma_2\text{上，}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=0\text{ 为已知，Ⅱ类}$$

为了差分求解，我们用平行于坐标轴 x, y 的直线，把区域 Ω 分成网格状、如网格步长在x方向与 y 方向取值相同为 h，则为正方形网格，否则为长方形网格，我们有

$$x=x_i=ih,\ (i=0,1,2,\ \cdots,\ m)$$

$$y=y_j=jh,\ (j=0,1,2,\ \cdots,\ n)$$

网格交点称为结点 (nodes)，即$(x_i,\ y_j)$。取不包含边界点在内的点，连成一个区域 Ω_h，它的边界为 Γ_h，结点的差分解的值为 $u_{i,j}$。

用二阶中心差分格式得到的 Laplace 方程的差分形式为

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}=0$$

因为 $\dfrac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial x^2}=\dfrac{u(x+h,\ y)-2u(x,\ y)+u(x-h,\ y)}{h^2}+O(h^2)$其截断误差为 $O(h^2)$ 的数量级，也称之为二阶精度。上述也可以简化为

$$u_{i,j}=\frac{(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})}{4}\tag{3.1.5}$$

这表示此差分方程计算中，任一内点上的值$u_{i,j}$等于周围四个相邻结点上的平均值，这一格式通常称为 5 点菱形格式，如图 3.2 所示。

对于网格区域边界点就取边界点$(x_i,\ y_j)$上的值，代入即可。其截断误差只是$O(h)$。

3.1.3 势流差分解法

例如，我们解一个矩形块体的恒定温度的 T 的分布问题(u=T)，或矩形土层的渗流问题(u=H)，Γ_1、Γ_2为Ⅰ类边界；Γ_1上，$u=u_1$，Γ_2上，$u=u_2$，Γ_3、Γ_4上为Ⅱ类边界，如图 3.3 所示。

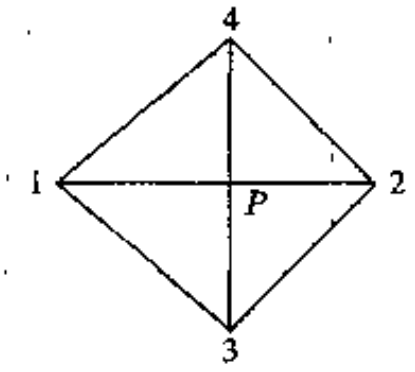


图3.2　网格点

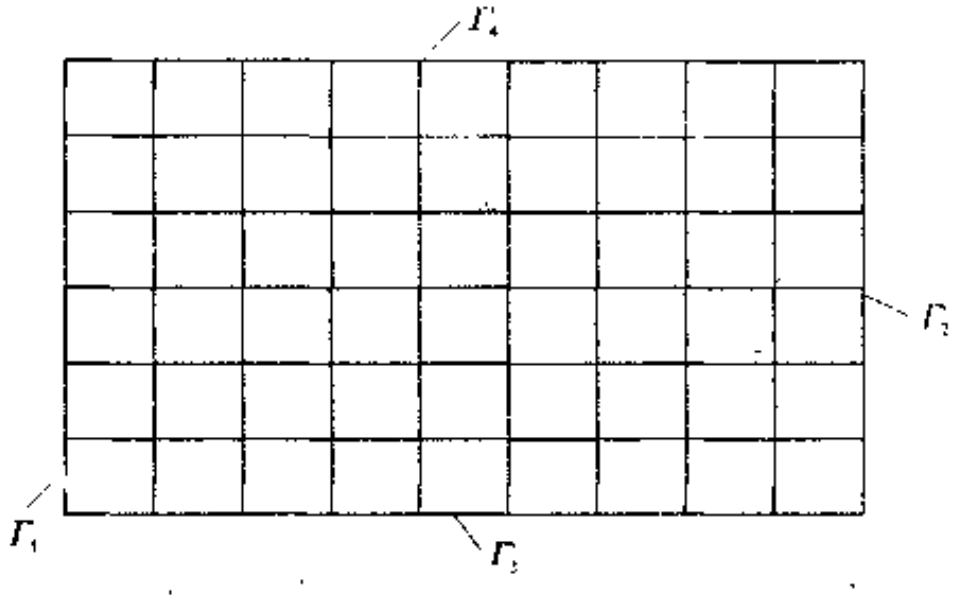


图3.3　矩形网格剖分

x 方向网格点为 $i=1,2,\ \cdots,\ m$，y 方向网格点为 $j=1,2,\ \cdots,\ n$，（此例中$m=10$，$n=7$，$u_4=10$，$u_1=1$，$\Delta x=\Delta y=0.2$）。

迭代法解代数方程：

$$u_p=\frac{(u_1+u_2+u_3+u_4)}{4}$$

采用交替方向，高斯－赛德尔迭代法 (Alterating Direction Gauss-Seidel Iteration Method)

$$u_{i,j}^{n+1}=\frac{(u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n})}{4} \tag{3.1.6}$$

先由 x 方向逐点计算 ($j=1$ 层)，$i=1,2,\cdots,m$。再由 y 方向逐点计算 $j=2,3,\cdots,n$ 层，循环计算一遍。

直到满足误差 $\frac{(u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n})}{u_{i,j}^{n}}<eps$ 要求为止。

计算关于边界条件的处理：当计算区域形状不规则时，如图 3.4 为圆柱绕流。计算边界点可以有不同的方法，我们这里介绍一种简单的办法，如图所示圆柱边界占去了一部网格，在 x 方向边界点不是正常网格点 2 而是圆柱边界点 2'，它距中心 P 点的距离不是 h，而是 $\lambda_2 h$。同样，在 y 方向为 4'点距中心 P 点为 $\lambda_3 h$，$\lambda_2 h$、$\lambda_3 h$ 都小于 h，即 $\lambda_2<1$，$\lambda_3<1$，因此，它们对中心 P 点的“贡献”将加大，对于第一类边界条件的五点菱形格式，可写为

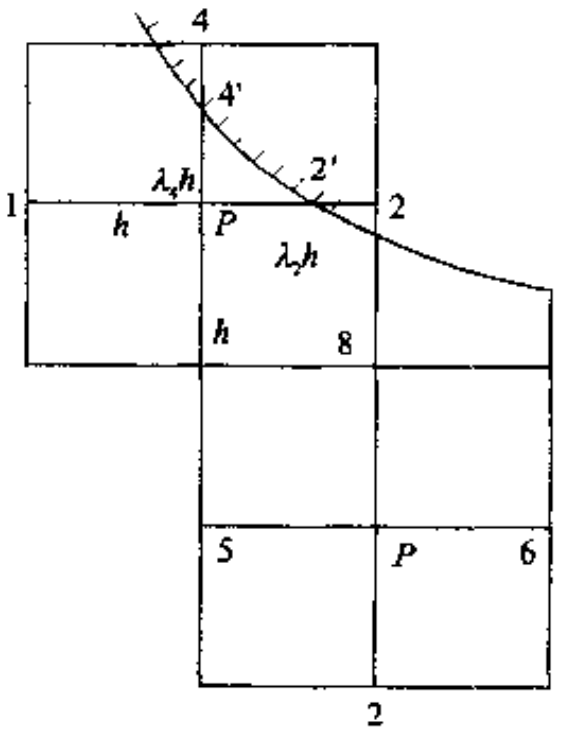


图3.4　差分边界处理

$$u_p=\frac{u_1+\frac{1}{\lambda_2}u_2+u_3+\frac{1}{\lambda_4}u_4}{1+\frac{1}{\lambda_2}+1+\frac{1}{\lambda_4}} \tag{3.1.7}$$

式中：λ_2，λ_4 为权因子。

如果第二类边界条件，有 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$，按此条件 u 在法线方向将无变化，即

$$u_p=\frac{1}{4}(u_5+u_6+u_7+u_8)$$

其中，有 $u_5=u_6$

$$u_p=\frac{1}{4}(2u_5+u_7+u_8)$$

此关系作为 P 点方程并不增加未知数。

可以证明：如果采用 9 点格式如下，可以提高精度至 $O(h^4)$。有人证明这也是 Laplace 方程的最高精度，如图 3.5 所示。

$$u_{i,j}=\frac{1}{5}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1})+$$

$$\frac{1}{20}(u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1})$$

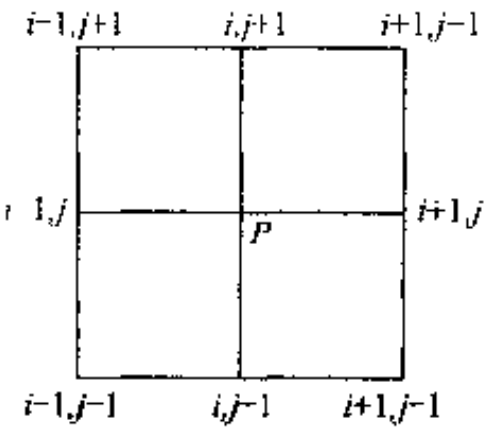


图3.5　差分九点格式

例如图 3.6 为一圆柱绕流问题的势流解，由于对称，我们只取 $\frac{1}{4}$ 流动区域计算之。

我们解流函数 ψ 满足的 Laplace 方程 $\nabla^2\psi=0$，

Γ_1 上，$\psi=0$，包括圆柱面

Γ_2 上，$\psi=q$，为第 I 类边界

Γ_3 上，$\psi=q\left(\frac{y}{L}\right)$

Γ_4 上，为第II类边界条件，$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$。此时边界 Γ_4 上的点为边界点，其值 $\psi_{i,j}=0$，这包括圆柱面的边界点，$\psi'_{i,j}$ 亦为零，Γ_2 上边界点的值为 $\psi=1$，Γ_3 为第 I 类边界，ψ 值亦是已知的，不过它是随 y 直线变化。

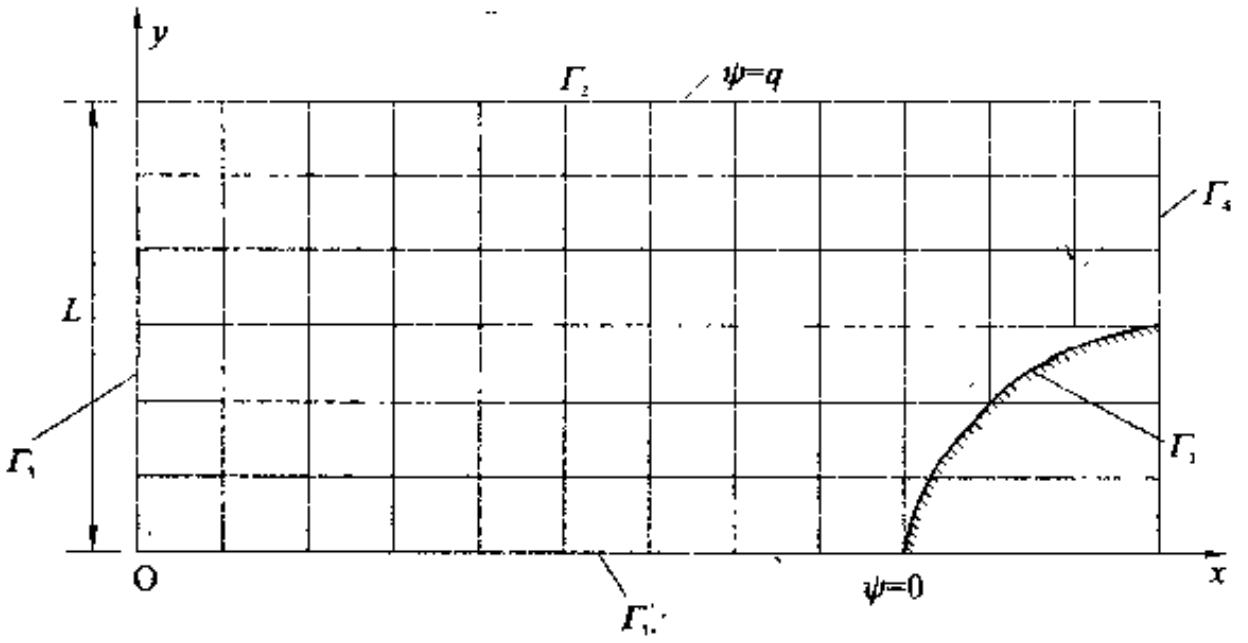


图3.6　圆柱绕流

这里只有 Γ_4 为第II类边界点，它们的值是未知的。

计算只在内点上进行，由于边界是不规则的，计算循环界是变的，例如，$j=1$ 的一层，计算由 $i=2,3,\cdots$ 到 IB，$IB\leqslant IM$，本例 $IM=13$，$JM=7$，现在 $IB(1)=10$，$IB(2)=10$，$IB(3)=11$，$IB(4)=12$，$IB(5)=13$，$IB(6)=IB(7)=13$，而 $JB(1)\sim JB(9)=1$，$JB(10)=2$，$JB(11)=3$，$JB(12)=4$，$JB(13)=4$。

其中不规则边界点上的 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4 亦相应地输入，这样一来，迭代就可以进行了。

3.1.4　练习

计算水动力学的学习关键在于“计算”，要理解原理，熟练的掌握方法必须进行计算与练习。

a. 对于二维 Laplace 方程 $\nabla^2\Phi=0$，设其中心 P 点与周围相邻点的布置如图 3.7(a) 所示。试用三角形有限单元法推求周围 4 点对中心点 P 的“贡献”与有限元法五点菱形格式相同，即

$$\Phi_p=\sum_{m=1}^{4}C_m\Phi_m=\frac{1}{4}(\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4)$$

若如此，则可表明有限元法与有限差分法在某些方面是相通的。

有人说：“有限元是不规则的差分，而差分是规则的有限元”是否如此？

你能以此再推求并证明：周围 8 点对中心点 P 的“贡献”与有限差分法 9 点格式相同

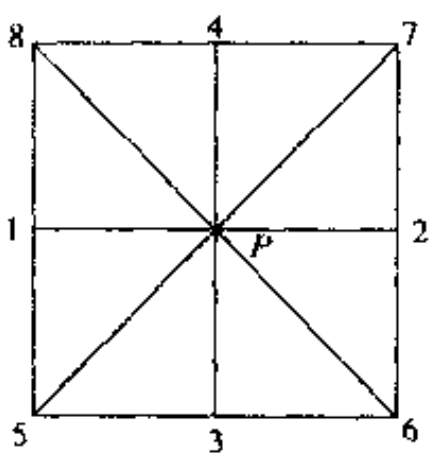
吗？即有

$$\Phi_0 = \sum_{m=1}^{9} C_m \Phi_m = \frac{1}{5}(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) + \frac{1}{20}(\Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_8)$$

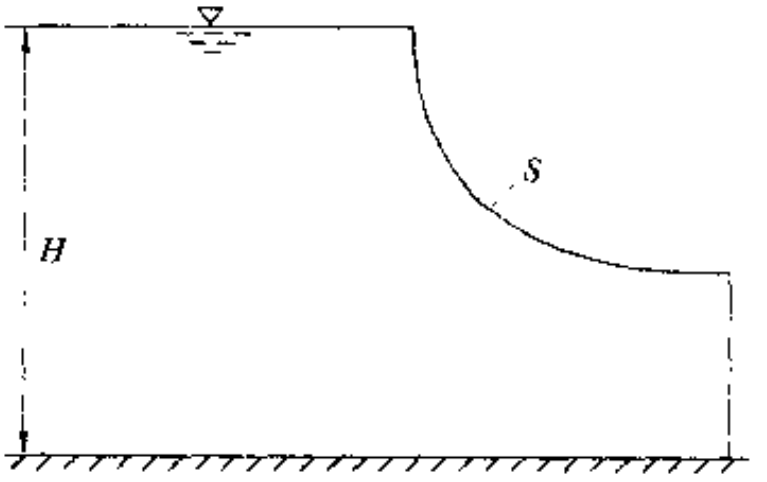
b. 如有一进水口形如图 3.7(b) 所示，如果进口曲线 S 形状尺寸已知，试用有限差分法，得出进水口的流速分布（流速场），上游很远处为均匀流，水流单宽流量 q 为已知。上游水深为 H。流动满足进口收缩段的势流 Laplace 方程。

$$\nabla^2 \psi = 0$$

试编程序用 Gauss – Seidel 迭代法解之。



(a) 差分单元9点



(b) 进水口二维势流

图3.7

§3.2 差分解的基本问题：适定性、相容性、收敛性、稳定性

3.2.1 适定性

在用差分方程作微分方程数值解时，首先，我们要求这一微分方程的问题是适定的 (well posed)。所谓适定性问题是指这一微分方程在一定的初始和边值条件下要有惟一解，并且在初始条件和边界条件稍有改变时，微分方程的解也只是稍有偏离。从数学的角度讲，若微分方程的解存在并且是惟一的，同时连续依赖于数据（初始条件、边界条件），则问题是适定的。

因为初始条件、边界条件是由观测的数据或经验给出的，难免有误差，如果这些误差导致解的严重偏离，那么，这样的结果在物理上就没有意义和不正确。

保证微分方程问题的适定性，要求给出恰当的定解条件。

对椭圆型方程由于它是边值问题，只需要给定适当的边界条件，一般是在边界上给定函数值，或给出函数法向导数值。这时必须有一部分边界函数值是已知的，否则，解是不惟一的。

另外如果是稳态问题，边界值的确定直接影响内点值（边界的变化很快的传到内点上）。

对抛物型方程，例如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \qquad (3.2.1)$$

这是初值问题，要求给出初始条件

$$u|_{t=0} = u_0(x,\ y)$$

并且在区域边界上给出边界条件。

例如，在一维扩散方程中，除了给出 $t=0$ 时的初值 $u(x,\ 0)$外，应在左、右两端边界，即 $x=0$ 及$x=1$，各给定一个边界条件，第一类边界条件 u 的值，或给定第二类边界条件$\frac{\partial u}{\partial n}$的值或给定第Ⅲ类边界条件 u 与$\frac{\partial u}{\partial n}$的组合。

由于抛物型方程具有扩散性质，它往往是随时间扩散的，u值将不断因扩散而衰减，见图 3.8 所示。

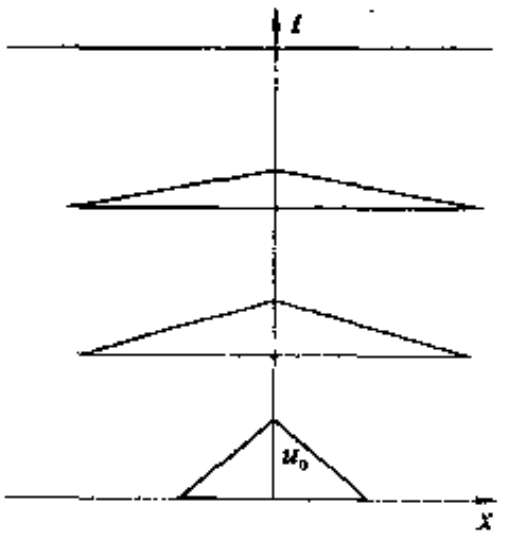


图3.8　扩散液传播

对于双曲型方程，如波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \qquad (3.2.2)$$

这也是一个依赖于时间的问题，它反映了波的传播性质。

对于一阶波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (3.2.3)$$

在波速$c>0$ 的情况下给出初始条件

$$u|_{t=0} = f(x)$$

它的解可表示为

$$u(x,\ t) = f(x-ct)$$

它代表一个波形，它的传播方向是沿着特征线$x-ct=\text{const}$，且在特征线上波形不变，如图 3.9 所示（如果没有其它因素使它衰减）。特征线的概念与物理意义在波动现象中是非常重要的，它决定着波的传播特性。因此，对双曲型方程的计算，要注意波的传播特性，即所谓的“迎风”（up-wind）性质。

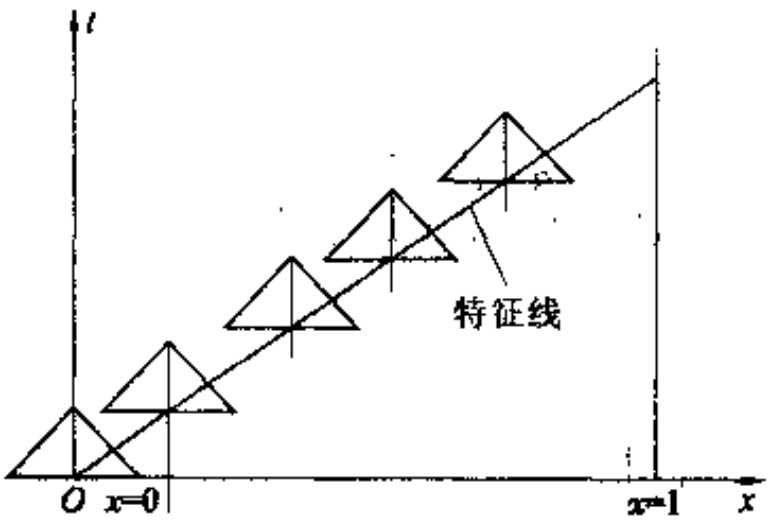


图3.9　波动沿特征线传播

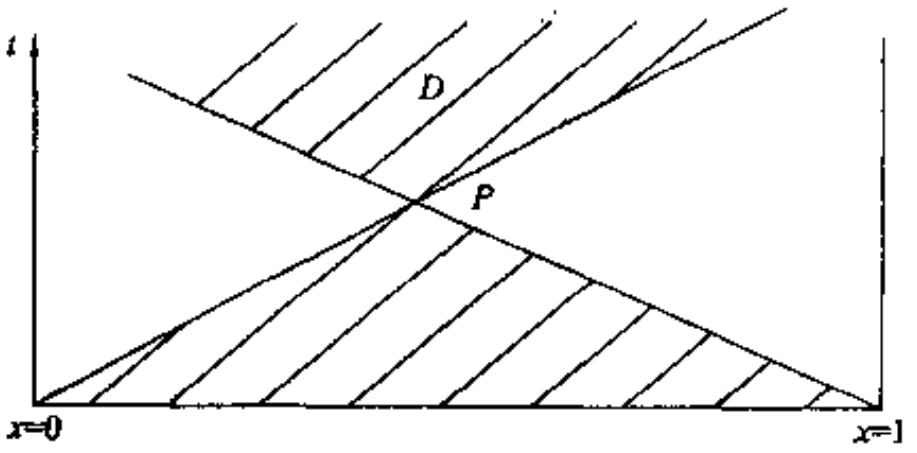


图3.10　影响区域与依赖区域

如图 3.10，我们要求 $t\geqslant 0$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 区域上方程（3.2.2）的解，除了给出 $t=0$ 的边界

条件外，还要给出左边$x=0$ 上的 u 值，它的影响范围如图中阴影线所示，而右边点$x=1$ 的波逆向传播，影响上游，因而存在影响区域 D (Domain of Influence) 与依赖区域 (Interval of Dependence) 问题。

3.2.2 相容性

将一个偏微分方程用差分格式化为相应差分方程，当步长 Δt 与Δx趋近于零时，这个差分方程应当收敛于原微分方程，也就是说，相应的差分方程和微分方程之间的截断误差在任一时刻任一网格点上均应趋近于零，这样的差分方程和微分方程才是相容的，只有相容性得到保证，该差分格式所形成的差分方程才能对所表示的微分方程逼近，才能反映该微分方程的物理实质。

如果差分算子用 A_h 或L_h 表示，微分算子用 d 或L 表示，其中 L 为线性算子，则差分方程写作：$L_h u_i^n=0$，微分方程写作：$Lu=0$，一维波动方程：

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial}=0$$

如果对时间用前差商，空间上采用中心差商，则其对应的差分方程为

$$L_h u_i^n=\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}=0 \tag{3.2.4}$$

而上式的截断误差

$$T_i^n=L_h u_i^n-Lu(t^n,\ x_i)=O\ (\Delta t,\ \Delta x^2) \tag{3.2.5}$$

当$\Delta t\to 0$，$\Delta x\to 0$ 时，T_i^n 趋于零，这表明差分方程逼近微分方程，称此差分方程与相应的微分方程是相容的。

下面让我们看一维扩散方程的一种格式：

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

如果我们采用下面的差分格式，令$\Delta t=\tau$，$\Delta x=h$

$$L_h u_i^n=\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\tau}-\alpha\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^{n-1}-u_{i-1}^{n-1}+u_{i-1}^{n-1}}{h^2}=0$$

用 Taylor 级数展开代入上述差分方程中，则有

$$L_h u_i^n=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n+\alpha\frac{\tau^2}{h^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n+\frac{\tau^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n-\frac{\alpha h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^n+\frac{\alpha}{12}\frac{\tau^4}{h^2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n+O\left(\frac{\tau^6}{h^2},\ h^4,\ \tau^4\right)$$

令 $\frac{\tau}{h}=r$ 为正的常数，当 $\tau\to 0$，$h\to 0$ 时，上式化为

$$L_h u_i^n=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r^2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n=0 \tag{3.2.6}$$

与原来的微分方程相比多了一项，此差分格式所造成的差分方程与原来的微分方程是不相容的，故此格式是不相容格式。

若取 $\tau = rh^{1+n}(n>0)$，则当 $\tau \to 0$，$h \to 0$ 时，上面 $\alpha r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 项 $\to 0$，此时格式相容。

3.2.3 收敛性

如果差分方程的解为 $u_{i,j}$，微分方程的解为 u，那么，差分方程的解是否逼近微分方程的解呢？当 $\Delta t \to 0$，$\Delta x \to 0$，如果差分方程的解与微分方程解之差

$$u_{i,j} - u(x_i, y_j) = \varepsilon \to 0 \tag{3.2.7}$$

称差分格式是收敛的，其解之差 ε 称离散化误差。

我们以菱形五点格式解 Laplace 方程为例，采用 Seidel 迭代法证明它的收敛性。我们把 N 个内点上的解，写成解向量的形式 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_N)$，其中下标是按照它们迭代计算中的先后次序排列的，按 5 点格式某一内点 i 上的值可用下式求得：

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{4}(u_k^{n+1} + u_{k'}^{n+1} + u_k^n + u_{k'}^n) + f_i \tag{3.2.8}$$

下标 k 与 k' 为 u_i 的下层、上层周围点，Seidel 迭代在计算中如果由左向右扫描 (Sweep)，由下层向上层扫描，则 u_k^{n+1}，$u_{k'}^{n+1}$ 为 $n+1$ 次迭代中已计算出的新值，未算到的点沿用旧值。

我们还可以把上式中右端 $n+1$ 次迭代值用第 n 次迭代值代替，写成

$$u_i^{n+1} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} u_j^n + \beta_{ij} f_j \tag{3.2.9}$$

令 u_i 为 $n \to \infty$ 时，u_i^n 的极限，即微分方程的解，由上式可得 $u_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} u_j + \beta_{ij} f_j$ 如果 u_i 是惟一存在的，则两式相减，并利用 $a_{ij} > 0$ 的条件，引进

$$\Theta = \max_i \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \leqslant 1$$

可得

$$|u_{n+1} - u_i| = |\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} u_j^n - u_i| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \max_j |u_j^n - u_j|$$

$$< \Theta \max_j |u_j^n - u_j| < \Theta^2 \max_j |u_j^{n-1} - u_j| \leqslant \Theta^n \max_j |u_j^{(0)} - u_j| \tag{3.2.10}$$

得 $u_i^n \to u_i$，即上述的迭代方法是收敛的。

3.2.4 稳定性

差分方程误差传播性质如何？这属于差分方程稳定性问题，如果在差分方程的计算中，某一点引的误差 $\varepsilon_{i,j}$，那么，它是随着计算时间的增加而增加呢？还是减小或不变？因为计算中有舍入误差，边界误差，这些误差对计算结果会有什么影响？如果增大则计算不稳定，不稳定的格式是不能采用的。如果误差变化是减小的或不变的则是稳定的，计算差分问题须要有稳定的差分格式。

分析差分方程稳定性有不同的方法，如矩阵方法，谐波分析法，下面我们以 Von Neumann

谐波分析法解下面差分方程的稳定性。

一维波动方程如：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{3.2.11}$$

3.2.4.1　中心差分显格式

如果采用时间前差，空间中心差，

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{c}{2h}(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)=0 \tag{3.2.12}$$

如果在计算中某点有误差 ε，则解变为 $u+\varepsilon$ 代入方程之后，由于方程是线性的，使两者相减便得到误差 ε 所满足的方程，它在形式上与上式解 u 所满足的方程一样，即有

$$\frac{\varepsilon_m^{n+1}-\varepsilon_m^n}{\tau}+\frac{c}{2h}(\varepsilon_{m+1}^n-\varepsilon_{m-1}^n)=0 \tag{3.2.13}$$

假设在某一点的误差表示为谐波形式

$$\varepsilon^n=\lambda e^{ikx} \tag{3.2.14}$$

式中 $i=\sqrt{-1}$，$x=mh$，k 为波数，λ 为波幅，又称为误差增长因子。

如 $\|\lambda\|>1$，则误差是增长的，如果 $\|\lambda\|\leqslant 1$ 则误差是衰减或不变的，以此作为稳定性判别准则。将 $\varepsilon_m^n=\lambda^n e^{ikmh}$ 代入 (3.2.13) 式，得

$$(\lambda^{n+1}e^{ikmh}-\lambda^n e^{ikmh})+\frac{c\tau}{2h}(\lambda^n e^{ik(m+1)h}-\lambda^n e^{ik(m-1)h})=0$$

除以 $\lambda^n e^{ikmh}$，得

$$\lambda-1+\frac{c\tau}{2h}(e^{ikh}-e^{-ikh})=0$$

令 $\beta=\frac{c\tau}{h}$，$\theta=kh$，上式写为

$$\lambda=1-i(\sin\theta)\beta \tag{3.2.15}$$

因为不论 τ，h 为何值，$\|\lambda\|=1+\beta^2\sin^2\theta>0$，所以上述中心差分显格式是绝对不稳定的。

3.2.4.2　显式“迎风”差分格式

下面让我们看一看前差商格式

$$u_m^{n+1}-u_m^n+\frac{c\tau}{h}(u_{m+1}^n-u_m^n)=0 \tag{3.2.16}$$

其对应的误差方程为

$$\varepsilon_m^{n+1}-\varepsilon_m^n+\frac{c\tau}{h}(\varepsilon_{m+1}^n-\varepsilon_m^n)=0$$

代入谐波关系 $\varepsilon^n=\lambda^n e^{ikmh}$ 后，我们有

$$\lambda-1+\beta(e^{ikh}-1)=0 \tag{3.2.17}$$

即
$$\lambda = 1+\beta-\beta e^{ikh}$$

我们知道$\|\lambda\|=1$为单位圆，而上式的轨迹为圆心在$1+\beta$，半径为β的周线圆上，如图3.11所示。

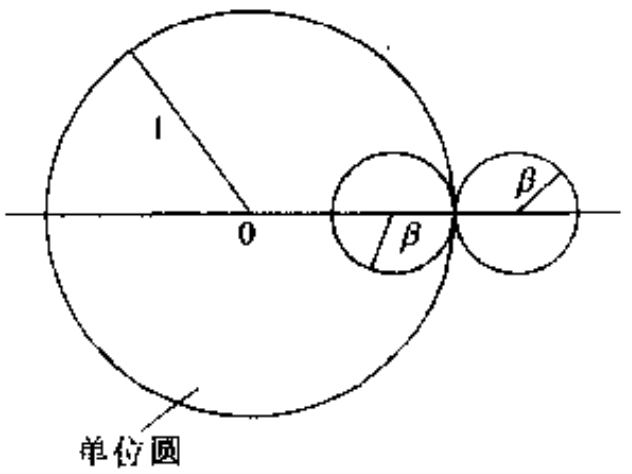


图3.11　波动稳定性分析

当$c>0$，即$\beta>0$时，轨迹在单位圆外，使得$\|\lambda\|>1$。只有当$c<0$，即$\beta<0$，且$|\beta|<1$时，才可能使轨迹在单位圆内，$\|\lambda\|\leqslant 1$，此条件称为courant条件，即

$$|\beta|=\frac{|c|\tau}{h}\leqslant 1 \tag{3.2.18}$$

即
$$\Delta t\leqslant\frac{h}{|c|}$$

这说明前差商适用于$c<0$的情况。

对于后差商格式，可以用类似的方法，得到稳定性条件为

$$\lambda=1-\beta+\beta e^{ikh} \tag{3.2.19}$$

它应用于$c>0$，$\beta\leqslant 1$的情况。

不论$c>0$，还是$c<0$，这种格式称迎风或上风(Up-wind)格式，如图3.12。它形象地表明格子点关系，正迎着流速或波速c的来波方向，格子点受来流方向影响，上风结点的“贡献”比下风点大得多，“权”重得多，这反映在特征线方向上，也是波的传播特性决定的。迎风格式是一阶精度，属条件稳定的。而空间中心差具有二阶精度，但这种一次直接求得$n+1$时刻的u_m^{n+1}值的显式差分格式(Explicit-scheme)，却是绝对不稳定的。

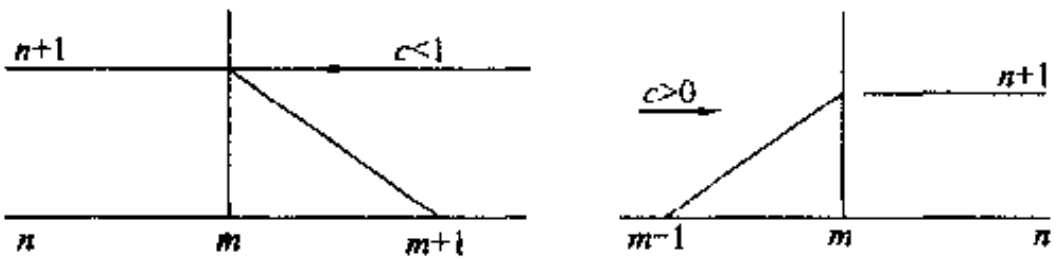


图3.12　迎风格式

3.2.4.3　隐格式

如果，我们空间点中心差分放在$n+1$层上，即

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{c}{2h}(u_{m+1}^{n+1}-u_{m-1}^{n+1})=0 \tag{3.2.20}$$

此时u_m^{n+1}与u_{m+1}^{n+1}，u_{m-1}^{n+1}有联系不能直接求解，必须联解代数方程组，称为隐格式(Implicit-scheme)，误差方程为

$$\varepsilon_m^{n+1}-\varepsilon_m^n+\beta(\varepsilon_{m+1}^{n+1}-\varepsilon_{m-1}^{n+1})=0 \tag{3.2.21}$$

代入误差谐波关系，有　　$\lambda-1+i\beta\lambda\sin\theta=0$

所以 $$\lambda(1+i\beta\sin\theta)=1$$

即 $$\|\lambda\|=\frac{1}{1+\beta^2\sin^2\theta}\leqslant 1 \tag{3.2.22}$$

因而不论β, θ为多少，即波速c，步长τ, h是多少，隐式中心差分格式是无条件稳定的。

关于稳定性可以作如下练习，对于下述扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{3.2.23}$$

式中：α为扩散系数，也可以用谐波分析方法，分析其稳定性，如果我们时间用前差商，空间用中心差商，显格式

$$u_m^{n+1}-u_m^n-\frac{\alpha\tau}{h^2}(u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n)=0 \tag{3.2.24}$$

误差ε所满足的方程亦如是，采用谐波分析方法可得：

$$\lambda-1-\frac{\alpha\tau}{h^2}(e^{ikh}+e^{-ikh}-2)=0 \tag{3.2.25}$$

令 $r=\frac{\alpha\tau}{h^2}$，$\theta=kh$，得

$$\lambda=1-2r(1-\cos\theta) \tag{3.2.26}$$

保持稳定性的条件要求

$$|\lambda|=|1+2r\cos\theta-2r|\leqslant 1$$

即 $$|1-4r|\leqslant 1 \tag{3.2.27}$$

即 $$r\leqslant\frac{1}{2}$$

所以对上述一维扩散方程时间前差，空间中心差的显格式，其稳定性条件为

$$\Delta t\leqslant\frac{1}{2\alpha}(\Delta x)^2 \tag{3.2.28}$$

这就是说在计算中时间步长Δt不能取得太大，要满足上述条件计算才是稳定的，否则不稳定。

对于上述差分方程的隐格式形式如下：

$$u_m^{n+1}-u_m^n-\frac{\alpha\tau}{h^2}(u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1})=0 \tag{3.2.29}$$

仿照上面的分析可得

$$\lambda-1+2\frac{\alpha\tau}{h^2}\lambda(1-\cos kh)=0$$

$$\lambda=\frac{1}{1+2r(1-\cos\theta)}\leqslant 1 \tag{3.2.30}$$

所以不论 τ, h, m 为何值，上述条件均可满足。因而隐格式是无条件稳定的。

关于稳定性，收敛性和相容性之间有一定的联系，称之为 Lax 定理：对于一个适定的线性微分方程的初值问题，以及它的一个相容的差分近似，则稳定性是收敛性的充分和必要条件，这就是说问题适定，格式相容稳定性等价于收敛性，而稳定性比收敛性的研究和证明容易些，所以可通过此定理用稳定性来判定解的收敛性。

以上问题为用差分方法求解流体力学问题数值解必需注意的，这些理论问题对于实际计算有重要意义。但应注意上述稳定性理论分析是对线性问题得出的。实际问题多为非线性方程，而非线性稳定性分析要难得多，目前也不成熟。

§3.3 扩散（抛物型）方程的差分解法

在研究热传导过程、扩散过程、边界层现象时，我们常常遇到抛物型方程，这类方程中最典型、最简单的就是热传导方程。热传导方程中的自变量中包括时间 t，它是描述一种随时间变化的物理过程，即所谓不定常现象。

这类问题的基本定解问题应是初值问题，即在初值时刻($t=0$) 给定解状况，要求确定 $t>0$ 时的解，例如以下的热传导方程

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial T} = K\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \tag{3.3.1}$$

式中 K 为热传导系数，$\bar{U}$ 为温度，令 L 表示杆的长度，在初始时刻沿杆长有一个温度分布，其中温度最大点的值为 $\bar{\bar{U}}_0$。我们可以将上式化为无量纲形式，为此令

$$x = \frac{X}{L},\ u = \frac{\bar{U}}{\bar{\bar{U}}_0}$$

则有

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{L}\cdot \bar{\bar{U}}_0$$

而

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial X}\right) = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bar{\bar{U}}_0$$

原方程化为

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{K}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

令 $t = \frac{KT}{L^2}$，上式变为无量纲形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.3.2}$$

它可以用来分析如扩散问题、传热问题等：

它的定解条件一般如下：

初始条件：

$$u(x,\ 0) = f(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

边界条件：
$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t)&=\psi_1(t)\\ u(1,\ t)&=\psi_2(t)\end{aligned}\right\}\quad t\geqslant 0 \tag{3.3.3}$$

一般我们假定函数 $f(x)$，$\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$ 满足连接条件，即 $f(0)=\psi_1(0)$，$\psi_2(0)=f(1)$。

对于上述简单的一维热传导方程，在 $t>0$，$-\infty<x<\infty$ 的条件有基本解，如果 $f(x)$ 分段连续，有

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[\frac{-(\xi-x)^2/4t}{4t}\right]f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.3.4}$$

由上述公式的解可以看出：温度随距离加大而衰减，如果将 $(x,\ t)$ 平面内温度相等的点连成一条线，则为等温线。可以看出这种等温线随时间增加而向外扩张，它可以称为扩散波的波前。因此，扩散问题可以视为波动问题的极限。但扩散问题是一个衰减的波，而且波前是很模糊的，即所谓的“长波效应”。真正的波有一个有限的周期，而波前是确定而明显的。

扩散问题属于抛物型方程，它介于椭圆型方程与波动方程之间的情形。扩散问题也有依赖区域，它的依赖区域就是 x 轴，$t=0$ 到 $t=t$ 之间的整个狭长条形区域，因为整个 x 轴的初值对任一点的温度都有影响。

椭圆型方程整个区域内点的值都受边界的影响。波动方程依赖区域是有限的，扩散方程的依赖区域是无限的。

从适定性分析看，扩散方程要求在一条开线上定初值，不像椭圆型方程那样在一条封闭曲线上定边值，另外，扩散方程只要求在开直线上定初值，而不像波动方程那样同时给一阶导数（二阶波动方程），从这一点看，扩散方程的适定性又和椭圆型方程类似。

3.3.1 显格式解

时间前差、空间中心差，写作

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta t}+\alpha\frac{(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})}{(\Delta x)^2}=0 \tag{3.3.5}$$

即

$$u_{i,j+1}=u_{i,j}+\gamma(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}) \tag{3.3.6}$$

式中 $\gamma=\frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}$，而 α 为扩散方程中的扩散系数或热传导系数，当无量纲化之后，它是一个无量纲数，视物理性质而定，上式中 $\alpha=1$。

例如下面情况的热传导问题，如图 3.13 所示，初始温度分布为：

$$\begin{aligned} u&=2x, \qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ u&=2(1-x),\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

边界条件为：$t>0$ 时，$x=0$ 处，$u=0$，$x=1$ 处，$u=0$。空间步长 $\Delta x=h=\frac{1}{10}$，时间步长 $\Delta t=\frac{1}{1\,000}$，则 $\gamma=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}=\frac{1}{10}$，上面差分方程可写为：

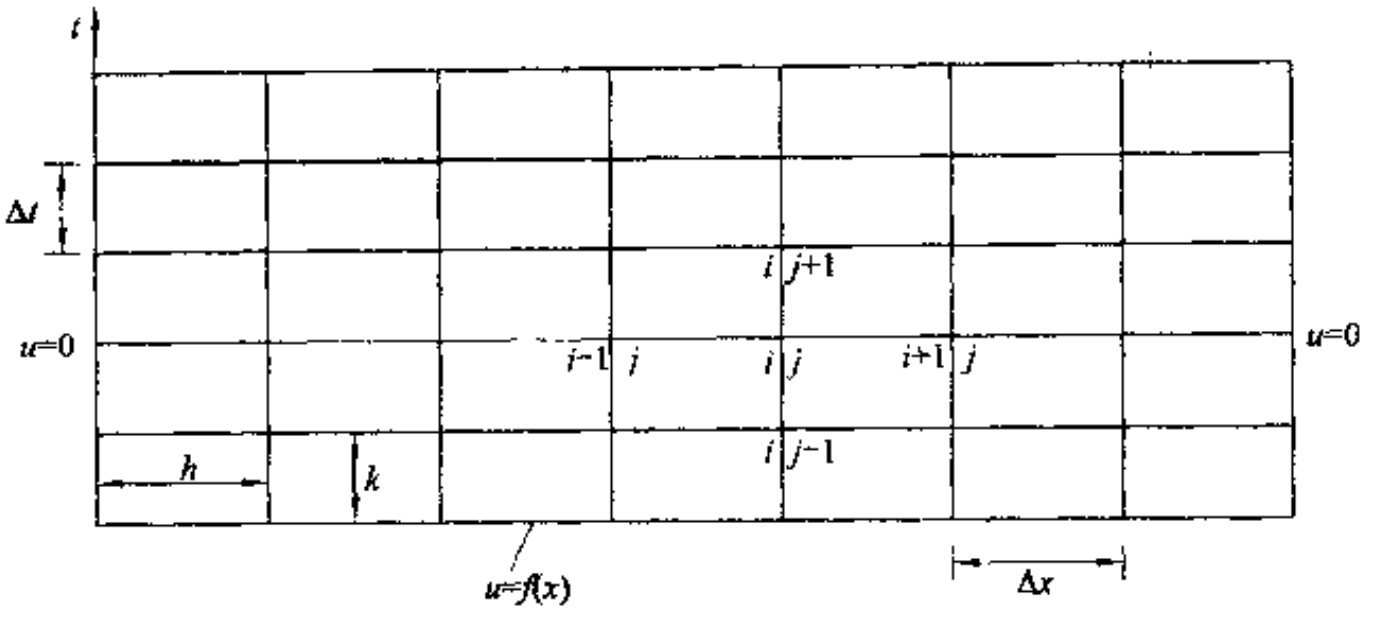


图3.13　二维差分网格

$$u_{i,j+1}=\frac{1}{10}u_{i-1,j}+\frac{8}{10}u_{i,j}+\frac{1}{10}u_{i+1,j}$$

用此式计算结果列表如下，例如

$$u_{3,1}=\frac{1}{10}\ [0.8+8\times1+0.8]\ =0.960\ 0$$

$$u_{4,2}=\frac{1}{10}\ [0.6+\ (8\times0.80)\ \ +0.96]\ =0.796\ 0$$

这一问题的分析解为

$$u=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{2}n\pi\right)(\sin\pi n)\exp(-n^2\pi^2t) \tag{3.3.8}$$

比较 $x=0.3$ 处的分析解与差分解如表 3.1

表 3.1

	差分解	分析解	相差值	误差%
$t=0.005$	0.597 1	0.596 6	0.000 5	0.08
$t=0.01$	0.582 2	0.579 9	0.002 3	0.40
$t=0.1$	0.247 2	0.244 4	0.002 8	0.10

如果我们改变步长，令 $\Delta x=\frac{1}{10}$，$\Delta t=\frac{5}{1\,000}$，则 $\gamma=\frac{1}{2}$，则误差百分比的最大值为 3.5%。

如果我们取 $\Delta x=\frac{1}{20}$，$\Delta t=\frac{1}{880}$ 则 $\gamma=\frac{5}{11}<\frac{1}{2}$，所得结果，分析解与差分解两者是符合的。而当 $\Delta x=\frac{1}{20}$，$\Delta t=\frac{1}{720}$，$\gamma=\frac{5}{9}$ 时，计算结果两者差别很大，而且当 j 越大时，差别就越大。

可见 γ 值之不同，得出的结果两者差别很大，当 $\gamma=\frac{5}{11}<\frac{1}{2}$ 时，计算结果是合用的，$\gamma=\frac{5}{9}>\frac{1}{2}$ 时，结果完全没有用，而且当 Δx 取得越小情况就越坏。

差分格式的近似值 $\tilde{u}_{i,j}$ 与差分格式理论值 $u_{i,j}$ 是有差别的，与微分方程的解 $u(x, t)$ 之间也是有差别的。我们先研究 $|u_{i,j}-\tilde{u}_{i,j}|$ 的差别，也就是稳定性问题。

下面采用误差 ε 图的方法，我们在某一个结点引入一个误差 ε，当我们用差分格式计算以后各排 $u_{i,j}$ 时，就会受其影响，为了研究其发展情况，假定在某固定点 $(i_0, 0)$ 上引入一个误差 ε，把 $u_{i_0,0}$ 改成了 $\tilde{u}_{i_0,0}=u_{i_0,0}+\varepsilon$，但在第一层其它点上初值还是 $u_{i,0}$ 不变，则有

$$\tilde{u}_{i,j+1}=\tilde{u}_{i,j}+\gamma(\tilde{u}_{i-1,j}+\tilde{u}_{i+1,j}-2\tilde{u}_{i,j})$$

$\gamma=1$ 时的 ε 图如表 3.2 所示。

表 3.2

$j=5$	-5ε	15ε	-30ε	45ε	-51ε	45ε	-30ε	15ε	-5ε
4	ε	-4ε	10ε	-16ε	19ε	-16ε	10ε	-4ε	ε
3		ε	-3ε	6ε	-7ε	6ε	-3ε	ε	
2			ε	-2ε	3ε	-2ε	ε		
1				ε	$-\varepsilon$	ε			
0					ε				
$i=$	i_0-4	i_0-3	i_0-2	i_0-1	i_0	i_0+1	i_0+2	i_0+3	i_0+4

用 ε 图方法讨论稳定性虽然直观，但有很大的局限性，只能对具体数值的 γ 来议论，它给不出 γ 的最大范围，对于一般差分也不好用，所以我们说 ε 图还不能解决稳定性问题的实质。下面我们用矩阵方法来分析此问题。

显式差分格式可以写成向量形式

$$\boldsymbol{u}_{j+1}=A\boldsymbol{u}_j+\boldsymbol{f}_j \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{3.3.9}$$

$$\boldsymbol{u}_j=\begin{Bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{n-1,j} \end{Bmatrix},\quad A=\begin{Bmatrix} 1-2\gamma, & \gamma, & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma, & 1-2\gamma, & \gamma, & \cdots & \cdots & 0 \\ 0, & \gamma, & 1-2\gamma, & \gamma & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma, & 1-2\gamma \end{Bmatrix}$$

而 $-\boldsymbol{f}_j=(\gamma u_{0,j},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \gamma u_{n,j})^{\mathrm{T}}=\gamma[\psi_1(j\Delta t),\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \psi_2(j\Delta t)]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{f}(f(h),\ f(2h)),\ \cdots,\ f(h(n-1)^{\mathrm{T}})$，而对差分方程 (3.3.9) 的近似值 $\tilde{u}_{j+1}$ 有

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{j+1}=A\tilde{\boldsymbol{u}}_j+\tilde{\boldsymbol{f}}_j,\ j=0,1,2,\ \cdots,\ N \tag{3.3.10}$$

令 $\boldsymbol{\rho}_j=\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_j$，可得

$$\boldsymbol{\rho}_{j+1}=A\boldsymbol{\rho}_j \tag{3.3.11}$$

若 $\boldsymbol{\rho}_0$ 是初始条件的误差，显然有

$$\boldsymbol{\rho}_j = A^{j-1}\boldsymbol{\rho}_0$$

因此，若$\|A\| \leqslant 1$，则各排结点上的误差$\boldsymbol{\rho}_j$ 的范数，不会超过初始误差 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的范数，即

$$\|\boldsymbol{\rho}_j\| \leqslant \|\boldsymbol{\rho}_0\|$$

此时差分格式是稳定的。

实际上，矩阵A 的特征值为 λ_i, i=1, 2, …, $n-1$,即增长因子(λ_i 的求法见专著)，数学上证明矩阵 A 的特征值 λ的绝对值都不超过 1，是稳定性的充分必要条件。

显格式
$$\lambda_i = 1-4\gamma\sin^2\frac{i\pi}{2n},\ i = 1,2,\ \cdots,\ n-1 \tag{3.3.12}$$

由此可见，$\gamma \leqslant \frac{1}{2}$是显格式的稳定条件。

3.3.2 全隐格式

对于下面的隐格式

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \gamma(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \tag{3.3.13}$$

其向量公式为：

$$B\boldsymbol{u}_{j+1} = \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{f}_{j+1} \tag{3.3.14}$$

其误差方程为

$$B\boldsymbol{\rho}_{j+1} = \boldsymbol{\rho}_j$$

所以
$$\boldsymbol{\rho}_j = B^{-1}\boldsymbol{\rho}_{j+1}$$

矩阵B与矩阵A之不同在于用前者的γ 代替后的$-\gamma$，因此B 之特征值为

$$\lambda_i = 1+4\gamma\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right) \tag{3.3.15}$$

因为B的征特值都不为零，所以其行列式不为零，故 $\boldsymbol{B}^{-1}$存在，而 $\boldsymbol{\rho}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\rho}_{j+1}$，$B^{-1}$特征值

$$\mu_i^{-1} = \frac{1}{1+4\gamma\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)} \tag{3.3.16}$$

它们都是正数，且都小于 1，其中 γ 取任何正数都可以，于是隐式差分格式对于任何步长Δt、Δx 的值都是稳定的。

3.3.3 一维扩散差分格式比较

在采用某种差分格式，时间步长与空间步长的选择，应受到精度（截断误差）和稳定性方面的制约。

例如，若采用简单显格式，我们要求的精度的量级为$\frac{1}{10^2}$，对于简单显式截断误差$E_i=O(k+h^2)$如所有的量均为无量纲的，这时 x、t 变化从 0~1，按精度要求空间步长 n 应为$\frac{1}{10}$，对于稳定要求其时间步长 $\tau=\frac{h^2}{2}$，即 $\tau=\frac{1}{200}$，所以当时间由 0~1 时需要运算 200 个时段。

对于简单隐式，稳定性不存在问题，为了满足精度要求，这时的时间步长 τ，按截断误差所控制为 $\tau=\frac{1}{10^2}$，即需要计算 100 个时段，但须解联立代数方程组。

究竟哪种格式的计算工作量小将取决于每算一个Δt所需的时间，如果隐式能够减少解代数方程组的时间，例如在一维情况，当系数矩阵为三对角阵时，使每步计算与显式相近，于是上面全隐格式总工作量接近显式的一半(因计算时段少一半左右)，相反，如果算一步隐式所需工作量比显式大得多，例如四倍，则全隐式的总工作量将为显式的一倍。

因为全隐式的截断误差E_i也只对空间步长有二阶精度，对时间步长为一阶精度，下面六点时空差分格式比全隐式精度为高，它具有更小的误差逼近。用图中带“○”号的六个点的差商来代替⊗点上的偏导数值，如图 3.14 所示，用 Taylor 级数不难验证：

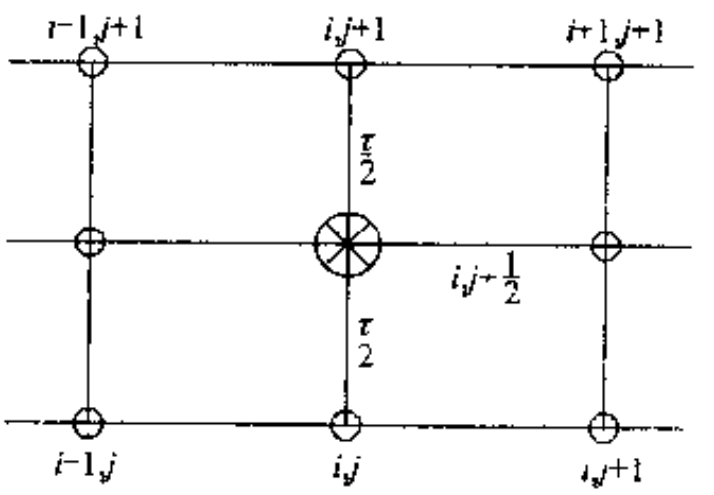


图3.14　一维扩散差分格式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\otimes=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau}+O(\tau^2) \tag{3.3.17}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\otimes=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}+O(\tau^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}+\frac{u_{i-1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}}{h^2}\right)+O(\tau)^2+O(h^2)$$

用上式代替扩散方程中的偏导数，忽略掉$O(\tau^2+h^2)$的无穷小量，我们得到差分格式如下：

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau}=\frac{1}{2}\left[\frac{(u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j})}{h^2}+\frac{(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1})}{h^2}\right] \tag{3.3.18}$$

式中：$i=1,2,\cdots,n-1$，$j=0,1,2,\cdots,m-1$

初始条件　　$u_{i,0}=f(ih)$，$i=0,1,2,\cdots,n$

边界条件　　$u_{0,j}=\psi_1(jh)$，$u_{N,j}=\psi_2(j\tau)$，$j=0,1,2,\cdots,m$

上述差分格式也是一种隐格式，称为六点格式，常称为 Crank - Nicolson 格式，它有二阶精度，从它的稳定性分析，可以得到其特征值为

$$\mu_i=\frac{1-\gamma\sin^2\left(-\frac{i\pi}{2n}\right)}{1+2\gamma\sin^2\frac{i\pi}{2n}},\quad i=1,2,\cdots,n-1 \tag{3.3.19}$$

μ_i 的绝对值当γ>0时恒小于 1，所以六点格式是绝对稳定的。

有时采用下面加权六点格式，形式如下：

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau}=\theta\frac{(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1})}{h^2}+(1-\theta)\frac{(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})}{h^2}$$

当 $\theta=0$ 时，即为显式差分

当 $\theta=1$ 时，即为隐式差分

当 $\theta=\frac{1}{2}$，即为 Crank - Nicolson 六点格式

易知当 $\tau\to0$，$h\to0$ 时，差分方程逼近扩散方程，其截断误差，当 $\theta=\frac{1}{2}$时为$O(\tau^2+h^2)$，当 $\theta\neq\frac{1}{2}$时，为$O(\tau+h^2)$。

关于扩散方程、波动方程、对流扩散方程众多格式及它们的稳定性条件有专著给出，可以查阅，这里就不再详述。

3.3.4 解多维扩散方程的差分法

二维或三维扩散方程的微分方程的形式如

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\nabla^2u=q \tag{3.3.20}$$

其中 a 为扩散系数，q 为源项。

二维差分，对时间偏导数取前差$\frac{(u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^n)}{\tau}$；对空间偏导数用中心差，显格式时

$$\begin{aligned}\delta_{xx}u_{i,j}^n&=u_{i-1,j}^n-2u_{i,j}^n+u_{i+1,j}^n\\ \delta_{yy}u_{i,j}^n&=u_{i,j-1}^n-2u_{i,j}^n+u_{i,j+1}^n\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

令 $$r_1=\frac{\partial\tau}{h_1^2},\quad r_2=\frac{\partial\tau}{h_2^2}\qquad(h_1=\Delta x,\ h_2=\Delta y)$$

我们有加权平均差分格式如下：

$$u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^n=\theta(r_1\delta_{xx}u_{i,j}^{n+1}+r_2\delta_{yy}u_{ij}^{n+1})+(1-\theta)(r_1\delta_{xx}u_{i,j}^n+r_2\delta_{yy}u_{i,j}^n) \tag{3.3.22}$$

不难看出，当 $\theta=0$ 时格式为显式，当$\theta\neq0$ 时格式是隐式的。隐格式求解需要解代数方程组所形成的大型稀疏矩阵 (Sparse martix)。

与以前类似用谐波分析法，设 $e_{ml}^n=\lambda^n e^{i(mh_1+lh_2)}$ 代入误差方程中去得放大因子

$$G=\frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n}=1-4(1-\theta)\frac{\left[r_1\sin^2\left(\frac{mh_1}{2}\right)+r_2\sin^2\left(\frac{lh_2}{2}\right)\right]}{1+4\theta\left[r_1\sin^2\left(\frac{mh_1}{2}\right)+r_2\sin^2\left(\frac{lh_2}{2}\right)\right]} \tag{3.3.23}$$

令 $\beta=r_1\sin^2\left(\frac{mh_1}{2}\right)+r_2\sin^2\left(\frac{lh_2}{2}\right)$，有

$$G=\frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n}=\frac{1-4(1-\theta)\beta}{4\theta\beta+1} \tag{3.3.24}$$

当 $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ 时，记 $\theta = \frac{1}{2} + H$，$0 \leqslant H \leqslant \frac{1}{2}$，于是有

$$G = \frac{1-4\left(1-\frac{1}{2}-H\right)\beta}{1+4\left(\frac{1}{2}+\theta\right)\beta} = \frac{1+4\beta H-2\beta}{1+4\beta H+2\beta} \leqslant 1 \tag{3.3.25}$$

故当 $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ 时，是无条件稳定的。

当 $\theta < \frac{1}{2}$ 时，记 $\theta = \frac{1}{2} - H$，$0 < H \leqslant \frac{1}{2}$，于是有

表 3.3　二维扩散方程的差分格式

名　称	格式与截断误差	增长因子与稳定性条件
显式	$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + r_1\delta_x^2 u_{i,j}^{n} + r_2\delta_y^2 u_{i,j}^{n} + q_{i,j}^{n}$，$E_I = O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$	$\lambda = 1-4\left(r_1\sin^2\frac{\theta_1}{2} + r_2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right)$，$(\theta_1 = mh_1,\ \theta_2 = lh_2)$；$\tau \leqslant \left[2\alpha\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)\right]^{-1}$
全隐式	$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + r_1\delta_x^2 u_{i,j}^{n+1} + r_2\delta_y^2 u_{i,j}^{n+1} + q_{i,j}^{n+1}$，$E_I = O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$	$\lambda = \left[1+4\left(r_1\sin^2\frac{\theta}{2} + r_2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right)\right]^{-1}$；恒　稳
平均隐式	$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \frac{1}{2}[r_1\delta_x^2 u_{i,j}^{n} + r_2\delta_y^2 u_{i,j}^{n}] + \frac{1}{2}[r_1\delta_x^2 u_{i,j}^{n+1} + r_2\delta_y^2 u_{i,j}^{n+1}] - \frac{1}{2}[q_{i,j}^{n+1} + q_{i,j}^{n}]$，$E_I = O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$	$\lambda = \left[1-2\left(r_1\sin^2\frac{\theta_2}{2} + r_2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right)\right]\left[1+2\left(r_1\sin^2\frac{\theta_1}{2} + r_2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right)\right]^{-1}$；恒　稳
菱形	$u_{i,j}^{n+2} = u_{i,j}^{n} + r_1(u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+2} - u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n+1}) + r_2(u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+2} - u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n+1}) + q_{i,j}^{n+1}$，$E_I = O\left(\frac{\tau^2}{h_1^2}+\frac{\tau^2}{h_2^2}\right) + O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$	恒　稳
跳点	$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + r_1\delta_x^2 u_{i,j}^{n} + r_2\delta_y^2 u_{i,j}^{n} + q_{i,j}^{n}$，$n+1+i+j$ = 偶数；$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + r_1\delta_x^2 u_{i,j}^{n+1} + r_2\delta_y^2 u_{i,j}^{n+1} + q_{i,j}^{n+1}$，$n+1+i+j$ = 奇数；$E_I = O\left(\frac{\tau^2}{h_1^2}+\frac{\tau^2}{h_2^2}\right) + (\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$	恒　稳
交替方向	$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^{n} + \frac{1}{2}[r_1\delta_x^2 u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + r_2\delta_y^2 u_{i,j}^{n} + q_{i,j}^{n}]$，$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}[r_1\delta_x^2 u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + r_2\delta_y^2 u_{i,j}^{n+1} + q_{i,j}^{n+1}]$，$E_I = O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$	$\lambda_1 = \left(1 - r\sin^2\frac{\theta_1}{2}\left(1+r_2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right)^{-1}\right)$，$\lambda_2 = \left(1-r_1\sin^2\frac{\theta_1}{2}\right)\left(1+r_2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\right)^{-1}$，$\lambda = \lambda_1\lambda_2$，恒稳

$$G=\frac{(1-4\beta H-2\beta)}{1-4\beta H+2\beta} \tag{3.3.26}$$

当 $1-4\beta H\geqslant 0$ 时，$\|G\|\leqslant 1$，当 $1-4\beta H<0$ 时，$\|G\|>1$，因此，$\theta<\frac{1}{2}$时，稳定性条件为 $1-4\beta H\geqslant 0$ 或

$$\beta\leqslant\frac{1}{2(1-2\theta)}$$

或

$$\alpha\tau\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)\leqslant\frac{1}{2(1-2\theta)} \tag{3.3.27}$$

关于格式的相容性和精度读者可以自行讨论，在二维，三维计算上常采用交替方向法进行。

§3.4 变换函数交替方向解非线性边界自由面流动

具有自由面重力流动以往大都依靠实验进行研究，因为水流自由面带来边界条件的不固定性。而且由于明流中的重力流要考虑 $\frac{V^2}{2g}$ 项，这又带来边界的非线性性质。因此，以往的解析解很难做出，20 世纪 50 年代有人用差分格式松弛法做，需要对自由面做一些人为的假定。例如，假定为三次抛物线等。70 年代中期，我国有人开始用有限元法解此问题，用泛函求极值也好，用加权余量法中的Галёркин法也好，关键在于可动边界的自由面需要调整，到目前为止，调整方案要么不够理想，要么费时较多。

由于这一问题对于堰、闸水流、溢洪道流动经常遇到，目前已有可能通过计算水动力学的办法对坝面设计，闸孔出流、溢洪道泄流流态设计提供有力依据。

此处提出一种解具有非线性边界自由面问题的新办法，通过电子计算机计算表明：此法比有限元法简单，计算快、内存少。

这一原理不仅可用于自由面流动，也可用于解边界层等其它问题。

3.4.1 基本原理

考虑如图 3.15 所示一个溢流堰的流动。表面为自由流线，上游无穷远处为等速流，下游也为等速流。底部高程曲线为 $x_2=f(x_1)$ 是已知的，自由表面也是一条流线，但其位置是待定的。

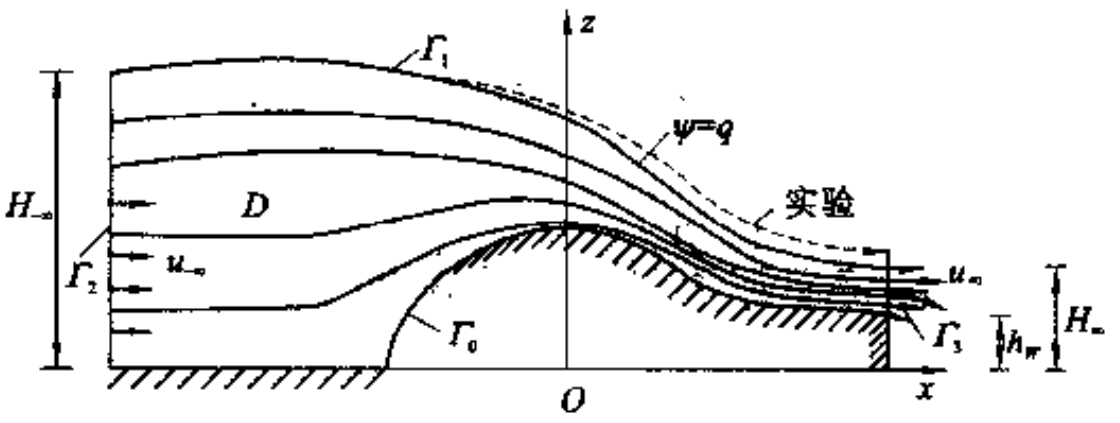


图3.15 有自由面的溢流

假设流动为势流，流函数 $\psi(x_1, x_2)$满足方程

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = 0 \tag{3.4.1}$$

其边界条件如下：

上游来流边界Γ_2上　　$u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = u_\infty$，　$u_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0$，　当$x_1 = -\infty$，　$0 \leqslant x_2 \leqslant H_\infty$

下游边界Γ_3上　　$u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = u_\infty$，　$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0$，　当$x_1 = +\infty$，　$h_\infty \leqslant x_2 \leqslant H_\infty$

固定边界Γ_0上

$$\psi = 0\ ,\qquad (x_1,\ x_2) \in \Gamma_0$$

自由表面，Γ_1上

$$\psi = q\ ,\qquad (x_1,\ x_2) \in \Gamma_1$$

并且满足Bernoulli方程：

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2\right] + \frac{p_0}{\rho} + gx_2 = gE_0 \tag{3.4.2}$$

其中q是单宽流量，E_0为上游能头，p_0是表面压力。

按照连续性条件

$$u_\infty H_\infty = u_\infty(H_\infty - h_\infty) \tag{3.4.3a}$$

对于下游断面能量关系也应满足

$$gE = gH_\infty + \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}u_\infty^2 \tag{3.4.3b}$$

自由表面x_2是未知的，但它与x_1及ψ有关，我们把原来关于$\psi = \psi(x_1, x_2)$的关系，改换为$x_2 = f(x_1, \psi)$的关系。进行这样的变数变换最适宜于解自由面问题。令$x_1 = x$，$x_2 = z$，$\psi = y$，

因为

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial\psi}} = -\frac{z_x}{z_y}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\frac{1}{z_y}\frac{\partial}{\partial x}(z_x) - z_x\frac{\partial}{\partial x}(z_y^{-1})$$

$$= -\frac{1}{z_y}\frac{\partial}{\partial x}(z_x) + \frac{z_x}{z_y^2}\frac{\partial}{\partial x}(z_y)$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial x}(z_x) = \frac{\partial z_x}{\partial x} + \frac{\partial z_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= z_{xx} + z_{xy}\frac{\partial y}{\partial x} = z_{xx} - \frac{z_x}{z_y} z_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z_y) = \frac{\partial (z_y)}{\partial x} + \frac{\partial (z_y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = z_{xy} - \frac{z_x}{z_y} z_{yy}$$

代入上式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{z_y}\left(z_{xx} - \frac{z_x}{z_y} z_{xy}\right) + \frac{z_x}{z_y^2}\left(z_{xy} - \frac{z_y}{z_y} z_{yy}\right)$$

$$= \frac{-z_y^2 z_{xx} + 2 z_x z_y z_{xy} - z_x^2 z_{yy}}{z_y^3}$$

又因为

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{\dfrac{\partial z}{\partial \psi}} = \frac{1}{z_y} = \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{z_y^2}\frac{\partial}{\partial z}(z_y) = -\frac{1}{z_y^2}\frac{\partial}{\partial y}(z_y)\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{z_y^3} z_{yy}$$

故 Laplace 方程 $\nabla^2 \psi = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$，变为

$$z_y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 z_x z_y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \psi} + (1 + z_x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = 0 \tag{3.4.4}$$

方程变为非线性的。但是变数 (x, ψ) 的区域却变成矩形的了。这样一来，对计算带来不少方便，可以用各种差分格式进行处理。

此时边界条件也相应地变成以下形式

上游边界 Γ_2 上，

$$z = \frac{\psi}{u_\infty},\quad 0 \leqslant \psi \leqslant q,\quad x = -c \tag{3.4.5a}$$

下游边界 Γ_3 上，

$$z = \frac{\psi}{u_\infty} + h_\infty,\quad 0 \leqslant \psi \leqslant q,\quad x = +c \tag{3.4.5b}$$

底部固定边界 Γ_0 上，

$$z = f(x),\qquad -c \leqslant x \leqslant c,\ \psi = 0 \tag{3.4.5c}$$

自由表面 Γ 上，

$$z_x^2 + 2 z_\psi^2 \left[\frac{p_0}{\rho} + \mathrm{g}\ (z - E_0)\right] + 1 = 0,\qquad -c \leqslant x \leqslant c,\ \psi = q \tag{3.4.6}$$

在 (x, ψ) 平面，(我们称为计算平面) 上的积分区域如图 3.16。

可以看出，积分边界 Γ_0，Γ_1，Γ_2，Γ_3此时都由直线组成。换句话说，经过变数变换 $z =$

$f(x, \psi)$之后，原来在物理平面上的不规则域D，如图 3.15 所示，变成了规则的矩形域，方程虽变得复杂了——变成了非线性的，但积分区域变得很简单，便利于采用差分方法。

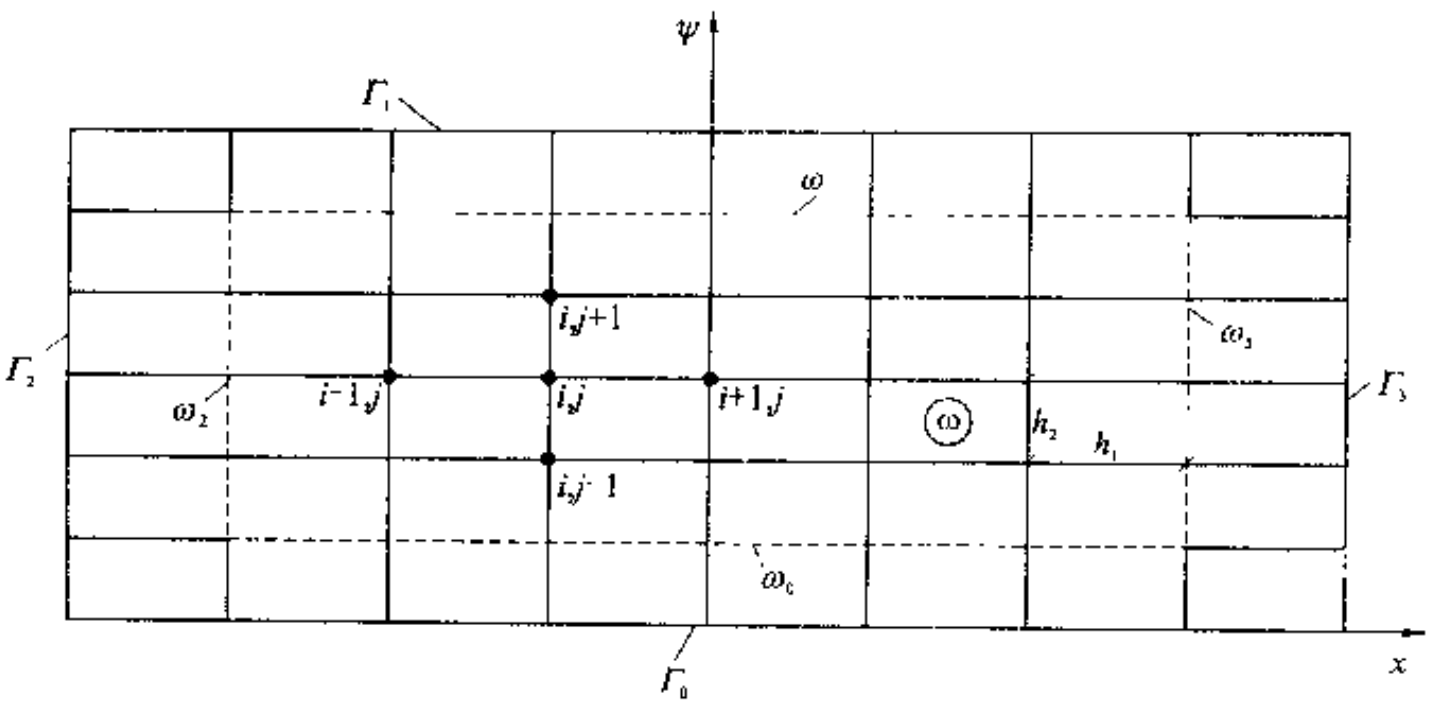


图3.16　坐标变换计算网格区域及边界

3.4.2　计算方法

对上述的方程和边界条件，我们采用某种交替方向格式，有时也叫做分数步长法 (The Method of Fractional Steps) 进行计算。其迭代形式如下：

$$\frac{z^{n+\frac{1}{2}}-z^{n}}{\tau}=(z_{\psi}^{2})^{n}\frac{\Delta_{1}\Delta_{-1}}{h_{1}^{2}}z^{n+\frac{1}{2}}-(zz_{\psi})^{n}\left[\left(\frac{\Delta_{1}+\Delta_{-1}}{2h_{1}}\right)\left(\frac{\Delta_{2}+\Delta_{-2}}{2h_{2}}\right)z^{n}\right] \tag{3.4.7}$$

$$\frac{z^{n+1}-z^{n+\frac{1}{2}}}{\tau}=-(zz_{\psi})^{n}\left[\left(\frac{\Delta_{1}+\Delta_{-1}}{2h_{1}}\right)\left(\frac{\Delta_{2}+\Delta_{-2}}{2h_{2}}\right)z^{n+\frac{1}{2}}\right]+(1+z_{x}^{2})^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta_{2}\Delta_{-2}}{h_{2}^{2}}\right)z^{n+1} \tag{3.4.8}$$

注意以下的差分表示：（前差，后差，中心差，二维中心差等表示如下）

$$\Delta_{i}f=f_{i+1}-f_{i},\ \Delta_{-i}=f_{i}-f_{i-1}$$

$$\Delta_{2}f=f_{j+1}-f_{j},\ \Delta_{-2}=f_{j}-f_{j-1}$$

$$\Delta_{1}\Delta_{-1}f=\Delta_{1}(f_{i}-f_{i-1})=f_{i+1}-2f_{i}+f_{i-1}$$

$$\Delta_{1}+\Delta_{-1}=f_{i+1}-f_{i}+f_{i}-f_{i-1}=f_{i+1}-f_{i-1}$$

其余仿此方法。

其中τ为迭代因子，应考虑选取适当，可上机试算。

自由面边界条件方程差分化之后，得到

$$\frac{z^{k+1}-z^{k}}{\tau}=(z_{x})^{k}\left(\frac{\Delta_{1}+\Delta_{-1}}{2h_{1}}\right)z^{k+1}+2\left[\left(\frac{p_{0}}{\rho}+gz-gE_{0}\right)z_{\psi}\right]^{k}\frac{z^{k+1}-z^{n}(\omega_{1})}{h_{2}}+1 \tag{3.4.9}$$

对 z_x 采用中心差商

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z_{i+1}-z_i+z_i-z_{i-1}}{2h_1}=\frac{z_{i+1}-z_{i-1}}{2h_1}=\frac{\Delta_1+\Delta_{-1}}{2h_1}z^{j+1}$$

对 z_ψ 采用前差商

$$z_\psi=\frac{\partial z}{\partial \psi}=\frac{\Delta_2 z}{h_2}=\frac{z^{j+1}-z^j(\omega_1)}{h_2}$$

注意边界迭代因子 τ 与方程迭代因子可以取不同值，式中 $z^j(\omega)$指的是内部区域 ω 第 n 次迭代值。而对于 Γ_1 边界而言与内部边界ω_1 有联系，因此它只用到 ω_1 的 z 值。

计算步骤：

①在区域内点给出 z、z_x、z_ψ 的初值，在 Γ_1 边界上也给出 z、z_x、z_ψ 的初值。

②按 (3.4.7)、(3.4.8) 式迭代，求出内部区域 ω 内点上的 z 及 z_x、z_ψ 的值。

此时在边界 Γ_0 的 E_0，Γ_3 上的 z 值是已知的，而 Γ_1 在假设的情况下可求出各内点值。

③按 (3.4.9) 式迭代边界 Γ_1 上各点 z 及z_x、z_ψ 值。

如果求出的自由表面边界上的 z 值 z_i 满足 $\frac{|z_i^{j+1}-z_i^j|}{z_i^j}<er$，其中 er为允许误差，此时边界迭代结束，但由于此时修改了边界点，内点又受到了影响。

④再转回到②重新迭代计算内点。

⑤重复②、③、④步直到所有点上误差均满足。

$$\left|\frac{z^{n+1}-z^n}{z^n}\right|<er \tag{3.4.9a}$$

$$\left|\frac{z_i^{j+1}-z_i^j}{z_i^j}\right|<er \tag{3.4.9b}$$

为止。

具体计算是按交替方向进行的。

先沿 x 方向，一行一行地算，计算公式为

$$\frac{z_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-z_{i,j}^n}{\tau}=(z_\psi^2)_{i,j}^n\frac{z_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2z_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+z_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1^2}-(z_x z_\psi)_{i,j}^n\frac{z_{i+1,j+1}^n-z_{i+1,j-1}^n-z_{i-1,j+1}^n+z_{i-1,j-1}^n}{4h_1h_2} \tag{3.4.10}$$

如令

$$a_i=-(z_\psi^2)_{i,j}^n\frac{\tau}{h_1^2}$$

$$b_i=1+2(z_1^2)_{i,j}\frac{\tau}{h_1^2}$$

$$c_i=-(z_\psi^2)_{i,j}^n\frac{\tau}{h_1^2}$$

$$d_i=z_{i,j}^n-(z_x z_\psi)_{i,j}^n(z_{i-1,j+1}^n-z_{i+1,j-1}^n-z_{i-1,j+1}^n+z_{i-1,j-1}^n)\frac{\tau}{4h_1h_2}$$

最后得

$$a z_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + b z_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + c z_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = d_i \tag{3.4.11}$$

每一行的计算 i = const；i 从 1 至 N，解一个 j 矩阵——三对角阵，可用追赶法。

再沿 y 方向进行一列一列地计算，计算公式为

$$\frac{z_{i,j}^{n+1}-z_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{-(z_x z_w)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\left(z_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}}-z_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}-z_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}}+z_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}\right)}{4h_1h_2}+$$

$$\frac{(1+z_x^2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\left(z_{i,j+1}^{n+1}-2z_{i,j}^{n+1}+z_{i,j-1}^{n+1}\right)}{h_2^2}$$

令

$$a_i = -\left[1+(z_x^2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]\frac{\tau}{h_2^2}$$

$$b_i = 1+2\left[1+(z_x^2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]\frac{\tau}{h_2^2}$$

$$c_i = -\left[1+(z_x^2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\right]\frac{\tau}{h_2^2}$$

$$d_i = z_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-(z_x)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(z_w)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\left(z_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}}-z_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}}-z_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}+z_{i-\frac{1}{2},j-1}^{n+\frac{1}{2}}\right)\frac{\tau}{4h_1h_2}$$

最后，得

$$a_i z_{i,j-1}^{n+1} + b_i z_{i,j}^{n+1} + c_i z_{i,j+1}^{n+1} = d_i \tag{3.4.12}$$

每一列的计算 j = const，j 从 1 至 N，解一个 i 矩阵，同样是追赶法解三对角阵。

边界的计算式为

$$z_{i,j}^{n+1}-z_{i,j}^{n} = (z_x)_{i,j}^{n}\frac{(z_{i-1,j}^{n+1}-z_{i-1,j}^{n+1})\tau}{2h_1}+2\left[\frac{p_0}{\rho}+g(z_{i,j}^{n}-E_0)\right](z_w)_{i,j}^{n}\left[z_{i,j}^{n+1}-z(\omega_1)_i^n\right]\frac{\tau}{h_2}+\tau$$

令

$$a_i = (z_x)_{i,j}^{n}\frac{\tau}{2h_1}$$

$$b_i = 1-2\left[p_0\rho+g(z_{i,j}^{n}-E_0)\right](z_w)_{i,j}^{n}\frac{\tau}{h_2}$$

$$c_i = -(z_x)_{i,j}^{n}\frac{\tau}{2h_1}$$

$$d_i = z_{i,j}^{n}-2\left[\frac{p_0}{\rho}+g(z_{i,j}^{n}-E_0)\,(z_w)_{i,j}^{n}\,z(\omega_1)_i^n\right]\frac{\tau}{h_2}+\tau$$

最后有

$$a_i z_{i-1,j}^{n+1} + b_i z_{i,j}^{n+1} + c_i z_{i+1,j}^{n+1} = d_i \tag{3.4.13}$$

以上的计算是对一定的流量 q 或一定的能头 E_0 已给出的情况。但当流量 q 一定时，E_0 与自由表面 z_s 有关，尤其是与上游断面水面高程有关，为了计算方便，把计算公式无量纲化。令单宽流量 q_s 为ψ的特性值，E_0 为特性长度。取无量纲形式变量 z'、ψ'、x'、h_p 如下：

$$z = E_0 z',\ \psi = q_s \psi',\ \frac{p_0}{\gamma} = h_p E_0,\ x = E_0 x'$$

代入 Laplace 方程 (3.4.1)，去掉撇号，得

$$\frac{q_s}{E_0}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) = 0$$

即

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

这说明 Laplace 方程，因为是线性齐次方程，有没有量纲对结果并无影响。

代入自由面上 Bernoulli 方程中。得无量纲形式：

$$1 = z + h_p + \frac{q_s^2}{2gE_0}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right]$$

令

$$F_r = \frac{q_s^2}{2gE_0^3}$$

则

$$1 = z + h_p + F_r\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right]$$

即

$$1 = z + h_p + F_r\left[\left(\frac{z_s}{z_w}\right)^2 + \left(\frac{1}{z_w}\right)^2\right]$$

自由表面，一般$h_p = 0$，所以

$$z = 1 - \frac{F_r[(z_s)^2 + 1]}{z_w^2}$$

计算格式可用

$$\frac{z_i^{k+1} - z_i}{\tau} = z_i^2(1 - z) + 1 - F_r[(z_s)^2 + 1] \tag{3.4.14}$$

3.4.3 本法特点

本法特点首先是把 $\psi = \psi(x, z)$的函数关系变换为 $z = (x, \psi)$的函数关系，这样就很有利于求自由表面位置 $z_s = z_s(x, q_s)$，它给出以各点纵坐标 z_s 为差分方程的未知数，而以 x, ψ为已知数，与此同时原来不规则区改变为有利于差分格式的矩形区域。

在此基础上我们再进一步使计算简单化，而采用交替方向法——即分数步长法。如果原来内点有$(m \times n)$个，若用通常的差分法，需要解 $m \times n$ 阶矩阵，用有限元法也是如此，虽然矩阵为稀疏的，但大型稀疏矩阵的解也较烦而费时，由于我们采用了交替方向格式，如果每行计算 $i = 1,2, \cdots, m$，每列计算 $j = 1,2, \cdots, n$，则交替方向只需解 j 矩阵，其中最大阶数为 $\max[m, n]$，并且矩阵为三对角阵，解起来既容易且快捷。

计算结果表明：对上述形状溢流坝流动比原来我们用有限元Галёркин法要简单要快。为达

到同样的精度，迭代计算所需时间仅为有限元法的六分之一左右。

自由水面曲线迭代完成之后，流场各点 $u_x=\frac{\partial \psi}{\partial y}$，$u_z=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$，压强 p 可由 Bernoulli 方程求出。这一计算结果与有限元法和普通差分法一样。

第四章　对流扩散方程的数值解

对流扩散是流体中物质输运的普遍形式。

二维定常 Navier - Stokes 方程：

$$L(\boldsymbol{U})=Re\,(U\boldsymbol{U}_x+V\boldsymbol{U}_y)-(\boldsymbol{U}_{xx}+\boldsymbol{U}_{yy})-\boldsymbol{G}=0 \tag{4.0.1}$$

其中L表示算子，$\boldsymbol{G}$表示重力或压力项等在内的源项。

二维定常对流传热方程其能量形式为：

$$L(T)=UT_x+VT_y-\frac{1}{\mathrm{Pe}}(T_{xx}-T_{yy})-G=0 \tag{4.0.2}$$

它们都是典型的对流扩散方程，除此之外，还有边界层方程和涡量传输方程也具有类似形式，它们包含着未知函数的二阶导数项——扩散项，也包含着未知函数的一阶导数项，这一项与流场速度大小和方向有关——对流项。对于 Navier-Stokes 方程，由于速度是未知量，而对流项包括了速度一阶导数及速度本身的系数，因而是拟线性 (Quasi-Linear) 方程，它具有非线性性质。传热方程中虽然以温度为未知数，但作为对流项系数的速度仍是未知的，必须先通过流场计算求得，因此，不论动量方程或能量方程作为非线性方程解未知变量流速是不可避免的。

上面方程中的 Reynolds 数 Re 或 Peclet 数 Pe 越大，对流项和扩散项相比它占的比重也越大，也就是说对流作用越大。经验表明当 Re 或 Pe 小时上述对流扩散方程计算易于保持稳定，而当 Re 或 Pe 增大时，要保持计算稳定则十分困难，必须选择适当的计算格式和有效的计算方法，即找寻一种适应各种 Re 范围的计算方法是求解对流扩散方程的一项重要任务。

§4.1　流函数——涡量法解二维对流扩散

4.1.1　对流扩散方程差分解

引进符号如下：

微分　　$D=\dfrac{\partial}{\partial x}$

前差　　$\Delta f=f(x+h)-f(x)$

后差　　$\nabla f=f(x)-f(x-h)$

中心差　　$\delta f=f\left(x+\dfrac{h}{2}\right)-f\left(x-\dfrac{h}{2}\right)$

平均差 $$\mu f=\frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right)+f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]$$

其中 $h=\Delta x$为步长，D，Δ，∇，δ，μ 分别称为微分，前差、后差、中心差、平均差分算子。按 Taylor 级数展开式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

$$=(1+hD+\frac{h^2}{2!}D^2+\frac{h^3}{3!}D^3+\cdots)\ f=e^{hD}f$$

代入差分公式后，于是有

$$\Delta f=(e^{hD}-1)f,\quad \nabla f=(1-e^{-hD})f$$

$$\mu f=\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}hD}+e^{-\frac{1}{2}hD})\ f,\quad \delta f=(e^{\frac{1}{2}hD}-e^{-\frac{1}{2}hD})\ f$$

从而可得

$$\Delta=(e^{hD}-1),\quad \nabla=(1-e^{-hD}),\quad \mu=\cos h\left(\frac{1}{2}hD\right),\quad \delta=2\sin h\left(\frac{1}{2}hD\right)$$

这样一来，偏微分算子D，可以用Δ，∇，δ，μ 来表示，例如

$$hD=2\sin^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)=2\ln\left[\left(1+\frac{1}{2}\delta^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\delta\right]$$

$$hD=\delta-\frac{\delta^2}{24}+\frac{1\times3}{2\times4\times5}\frac{\delta^5}{2^4}+\cdots$$

$$hD=-\ln(1-\nabla)$$

$$hD=\ln\ (1+\Delta)\ =\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-\frac{\Delta^4}{4}+\cdots$$

利用以上关系，可以建立各种差分格式，例如向前差商

$$\frac{\partial f}{\partial x}=Df=\frac{1}{h}\left(\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-\frac{\Delta^4}{4}+\cdots\right)f$$

若取一阶近似，则有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\approx\frac{\Delta f}{h}$$

或 $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{h}(f_{i+1}-f_i)+O(h)$$

若保留级数的前两项，则有

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} f\right)$$

或
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2h}\left[-f_{i-2} + 4f_{i-1} - 3f_i\right] + O(h^2)$$

这称为二阶前差商，类似地，二阶中心差商的二阶与四阶精度格式为

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{\delta f}{h} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{(\delta - \delta^3) f}{h} = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{24} f_{i+\frac{3}{2}} + \frac{9}{8} f_{i+\frac{1}{2}} - \frac{9}{8} f_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} f_{i-\frac{3}{2}}\right] + O(h^4)$$

4.1.2 流函数涡量法二维定常流解

流函数ψ——涡量Ω方程：已知二维不可压缩流体定常流基本方程组

$$U_x + V_y = 0 \tag{4.1.1}$$

$$UU_x + VU_y = -P_x + \frac{1}{\mathrm{Re}}(U_{xx} + U_{yy}) \tag{4.1.2a}$$

$$UV_x + VV_y = -P_y + \frac{1}{\mathrm{Re}}(V_{xx} + V_{yy}) \tag{4.1.2b}$$

引进流函数ψ和涡量Ω，满足

$$U = \psi_y, \quad V = -\psi_x \quad \Omega = V_x - U_y \tag{4.1.3}$$

连续性方程自动满足，运动方程消去了压力项得涡量方程

$$\mathrm{Re}\,(U\Omega_x + V\Omega_y) = \Omega_{xx} + \Omega_{yy} \tag{4.1.4}$$

流函数与涡量关系，有流函数方程

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\Omega \tag{4.1.5}$$

下面我们以图 4.1 所示门槽流动为例，求解其$\psi-\Omega$解。

对以上方程可以采用有限差分法，也可采用有限元或其它方法，我们用有限差分法离散上述微分方程，对流函数方程和涡量传输方程分别采用中心差格式，令步长$\Delta x = \Delta y = h$，代入

流函数方程为

$$\frac{(\psi_E + \psi_W + \psi_N + \psi_S)}{h^2} + \Omega_P - 4\psi_P = 0$$

涡量方程为

$$\frac{\Omega_E + \Omega_W + \Omega_N + \Omega_S - 4\Omega_P}{h^2} + \mathrm{Re}\,\frac{[(\psi_E - \psi_W)(\Omega_N - \Omega_S) - (\psi_N - \psi_S)(\Omega_E - \Omega_W)]}{4h^2} = 0$$

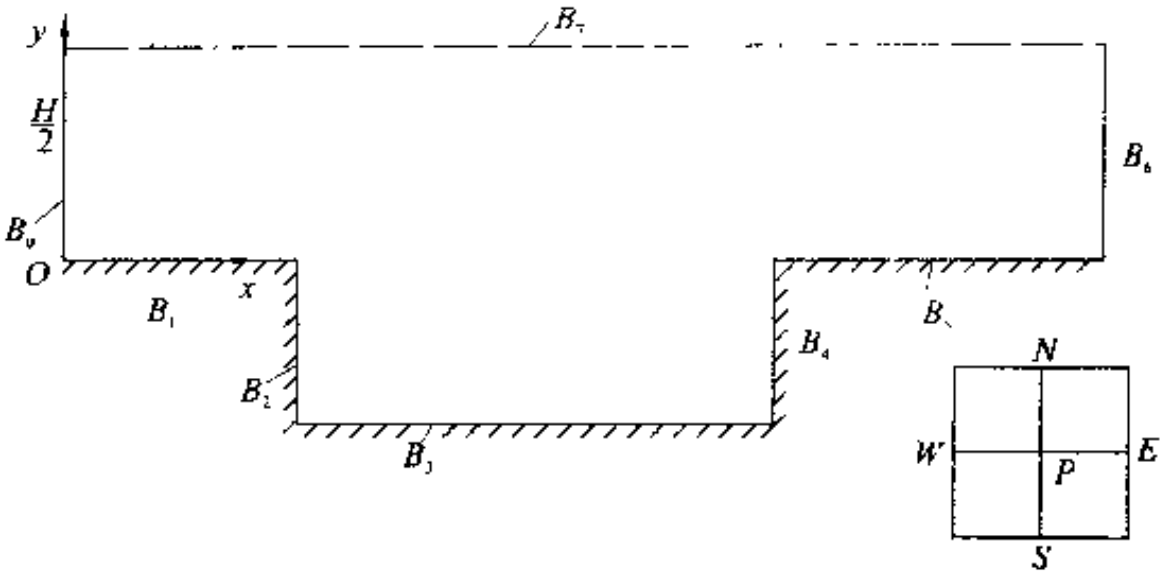


图4.1　台阶流动

解以上代数方程可以采用直接法，也可以采用迭代法，由于涡量方程的非线性性质，采用迭代法比较方便，因此把上两式先改写为：

$$\begin{cases} \psi_P = \dfrac{1}{4}(\psi_E + \psi_W + \psi_N + \psi_S) + \dfrac{h^2}{4}\Omega_P & (4.1.6) \\ \Omega_P = \dfrac{1}{4}(\Omega_E + \Omega_W + \Omega_N + \Omega_S) + \dfrac{\mathrm{Re}}{16}[-(\psi_N - \psi_S)(\Omega_E - \Omega_W) + (\psi_E - \psi_W)(\Omega_N - \Omega_S)] & (4.1.7) \end{cases}$$

为了改善迭代性质，采用松弛法形式，即

$$\psi_{i,j}^{n+1} = (1-\theta_1)\psi_{i,j}^{n} + \theta_1\left[\frac{(\psi_{i+1,j}^{n} + \psi_{i-1,j}^{n+1} + \psi_{i,j+1}^{n} + \psi_{i,j-1}^{n+1})}{4} + \frac{h^2}{4}\Omega_{i,j}^{n}\right] \tag{4.1.8}$$

$$\Omega_{i,j}^{n+1} = (1-\theta_2)\Omega_{i,j}^{n} + \theta_2\{(\Omega_{i+1,j}^{n} + \Omega_{i-1,j}^{n+1} + \Omega_{i,j+1}^{n} +$$

$$\Omega_{i,j-1}^{n+1})\frac{1}{4} + \frac{\mathrm{Re}}{16}[(\psi_{i+1,j}^{n} - \psi_{i-1,j}^{n+1})(\Omega_{i,j+1}^{n} - \Omega_{i,j-1}^{n+1}) -$$

$$(\psi_{i,j+1}^{n} - \psi_{i,j-1}^{n+1})(\Omega_{i+1,j}^{n} - \Omega_{i-1,j}^{n+1})]\} \tag{4.1.9}$$

其中θ_1，θ_2为松弛因子。

最后，我们把以上方程组写成矩阵形式

$$\boldsymbol{X}^{n+1} = (1-\theta)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F} \tag{4.1.10}$$

其中非线性性质的项放在$\boldsymbol{F}$中，在迭代时不断改正之。

下面是对适定性、相容性、稳定性的分析

(1) 适定性

以上流函数方程和涡量方程可以看作椭圆型的泊松方程，可以在Ⅰ类边界上给定函数值，Ⅱ类边界上给定其导数值，则方程的解是存在的且惟一，并且参数连续地依赖于数据。

边界条件确定如下：

上游B_0入口边界为粘性均匀流，设其流速分布为抛物线分布

$$U=4U_m\left(\frac{y}{H}-\frac{y^2}{H^2}\right)$$

当 $y=0$ 时，$U=0$，$y=H$时，$U=0$，当 $y=\frac{1}{2}H$ 时，$U=\bar{U}m$，为极大值。

进流量：$q=\int_0^H U\mathrm{d}y=4\int_0^H U_m\left(\frac{y}{H}-\frac{y^2}{H^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}U_mH$，进口平均流速$U=\frac{q}{H}=\frac{2}{3}U_m$，因此流速分布又可以写为 $U=6\bar{U}\left(\frac{y}{H}-\frac{y^2}{H^2}\right)$

边界 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5 上，流函数$\psi=0$

B_0 处：$\psi=\int_0^y U\mathrm{d}y=\bar{U}\left(3\frac{y^2}{H^2}-2\frac{y^3}{H^3}\right)$

B_6 处：$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$，为下游开边界。它也可按上游入口边界$B_0$确定。

B_7 处：$\psi=\frac{q}{2}$。

困难的是涡量Ω的边界条件的确定：上游B_0边界上（下游也可按此处理）：

$$-\Omega=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=6\bar{U}\left(\frac{1}{H}-\frac{2y}{H^2}\right)$$

在B_1，B_2，B_3，B_4，B_5上，可用涡量和流函数在法向展开式表示，按 Taylor 级数展开式

$$\psi_{B+h}=\psi_B+h\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\Big|_B+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right)\Big|_B h^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial n^3}\right)\Big|_B h^3+\cdots$$

此时ψ_B为边界点的流函数，ψ_{B+h}为垂直于边界内部第一层的流函数。则

$$\Omega_B=-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right)\Big|_B=\frac{2(\psi_B-\psi_{B+h})}{h^2}+O(h) \tag{4.1.11}$$

在B_7边界上，$\frac{\partial\Omega}{\partial n}=0$

(2) 相容性

相容性反映离散化的差分方程与所描述的物理现象的微分方程的一致性：

对于流函数方程

$$L\psi=\nabla^2\psi+\Omega=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\Omega=0$$

其差分方程为

$$L_h\psi_{i,j}=\frac{1}{h^2}(\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}+\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}-4\psi_{i,j})+\Omega_{i,j}$$

用 Taylor 级数展开各项

$$\psi_{i+1,j}=\psi_{i,j}+h\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i,j}+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{i,j}+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right)_{i,j}+O(h^4)$$

$$\psi_{i-1,j}=\psi_{i,j}-h\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i,j}+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{i,j}-\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right)_{i,j}+O(h^4)$$

$$\psi_{i,j+1}=\psi_{i,j}+h\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,j}+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j}+\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)_{i,j}+O(h^4)$$

$$\psi_{i,j-1}=\psi_{i,j}-h\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,j}+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j}-\frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)_{i,j}+O(h^4)$$

当$\Delta x=\Delta y\to 0$ 时

$$L_h\psi_{i,j}-L\psi_{i,j}=O(h^2)\to 0$$

同理可证明涡量方程的截断误差为

$$L_h\Omega_{i,j}-L\Omega_{i,j}=O(h^2)$$

上式说明：上述流函数方程与涡量方程都是相容的，精度均为$O(h^2)$。

(3) 稳定性

稳定性是指计算中的舍入误差、边界误差、参数误差等是否会随着时间的推移而增大。利用 Von Neumann 的 Fourier 分析法进行分析。

将流函数方程写作误差方程为：

$$\varepsilon_{i,j}^{n+1}=(1-\theta_1)\varepsilon_{i,j}^{n}+\frac{\theta_1[\varepsilon_{i+1,j}^{n}+\varepsilon_{i-1,j}^{n+1}+\varepsilon_{i,j+1}^{n}+\varepsilon_{i,j-1}^{n+1}]}{4}$$

用 m 代替上式的i，令$\varepsilon_{m,j}^{n}=\lambda^n e^{ik(mh+jh)}$ 代入上式($i=\sqrt{-1}$)，我们有

即
$$\lambda=(1-\theta_1)+\frac{\theta_1}{4}(e^{ikh}+\lambda e^{-ikh}+\lambda e^{ikh}+e^{ikh})$$

$$=(1-\theta_1)+\frac{\theta_1}{2}(e^{ikh}+\lambda e^{-ikh})$$

因为
$$\lambda=\frac{1-\theta_1+\frac{\theta_1}{2}e^{ikh}}{1-\frac{\theta_1}{2}e^{-ikh}} \tag{4.1.12}$$

当 $0\leqslant\theta_1\leqslant 2$ 时，可使$\|\lambda\|<1$，这给出松弛因子θ_1 之范围。同理，可以分析涡量方程的稳定性

$$\varepsilon_{i,j}^{n+1}=(1-\theta_2)\varepsilon_{i,j}^{n}+\theta_2\{(\varepsilon_{i+1,j}^{n}+\varepsilon_{i-1,j}^{n+1}+\varepsilon_{i,j+1}^{n}+$$

$$\varepsilon_{i,j-1}^{n+1})\frac{1}{4}+\frac{\mathrm{Re}}{16}[(\psi_{i+1,j}^{n}-\psi_{i-1,j}^{n})(\varepsilon_{i,j+1}^{n}-\varepsilon_{i,j-1}^{n+1})-$$

$$(\psi_{i,j+1}^{n}-\psi_{i,j-1}^{n})(\varepsilon_{i+1,j}^{n}-\varepsilon_{i-1,j}^{n+1})]\}$$

所以
$$\lambda=(1-\theta_2)+\theta_2\{(e^{ikh}+\lambda e^{-ikh}+e^{ikh}+\lambda e^{-ikh})\frac{1}{4}$$

$$+\frac{\mathrm{Re}}{16}[(\psi_{i+1,j}^{n}-\psi_{i-1,j}^{n})(e^{ikh}-\lambda e^{-ikh})-(\psi_{i,j+1}^{n}-\psi_{i,j-1}^{n})(e^{ikh}-\lambda e^{-ikh})]\}$$

$$\lambda=(1-\theta_2)+\theta_2\left[(e^{ikh}+\lambda e^{-ikh})\frac{1}{2}+\frac{Re}{16}(\psi^n_{i+1,j}-\psi^n_{i-1,j}-\psi^n_{i,j+1}+\psi^n_{i,j-1})(e^{ikh}-\lambda e^{-ikh})\right] \quad (4.1.13)$$

由上式可以求得放大因子变化范围。

经验表明：当$Re=\frac{u\Delta x}{\nu}\leqslant 2$，$\frac{u\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$ 时，计算是稳定的。具体计算中试验处理。

4.1.3 流函数涡量差分解法实例及应用

(1) 槽穴流数值解

对于上述方程组 (4.1.6) 与 (4.1.7)，由于非线性性质采用迭代法比较方便，步骤如下：

①给定 U，V 的初值 $U^{(0)}$，$V^{(0)}$，由涡量方程解出涡量Ω。

②将此涡量 Ω 代入流函数方程，从而解出 ψ。

③将此流函数 ψ，按流函数与流速的关系，计算出新的 U，V 值。

④重复①至③步，直至

$$|\psi^{(n)}-\psi^{(n-1)}|<\varepsilon\,,\ |\Omega^{(n)}-\Omega^{(n-1)}|<\varepsilon \quad (4.1.14)$$

为止，其中 ε 为收敛控制误差，可取 $\varepsilon=10^{-3}$，n 为迭代次数。

对于图 4.2 中槽穴流采用 30×30 有限差分网格，Re = 100 时，计算流线与涡线分布，见图 4.3 (a) (b)，在高雷诺数Re > 400 或大伯克莱数Pe 的流动计算为不稳定。可以由方程 (4.1.7) 看出，当网格雷诺数Re ≫1 时，扩散项变得很小，可以忽略不计，而对流项影响为主，由于中心差分形式不包括 P 点的涡量Ω_P值，换言之，在高雷诺数时，Ω_P 的系数变得非常小，这类代数方程形成的矩阵带有奇异性，解是不稳定的。因此，在计算涡量方程时，离散化格式应当很好地选择。

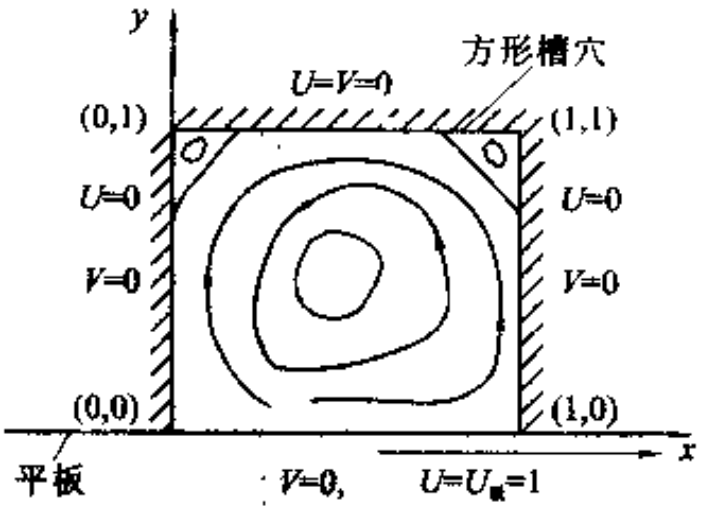
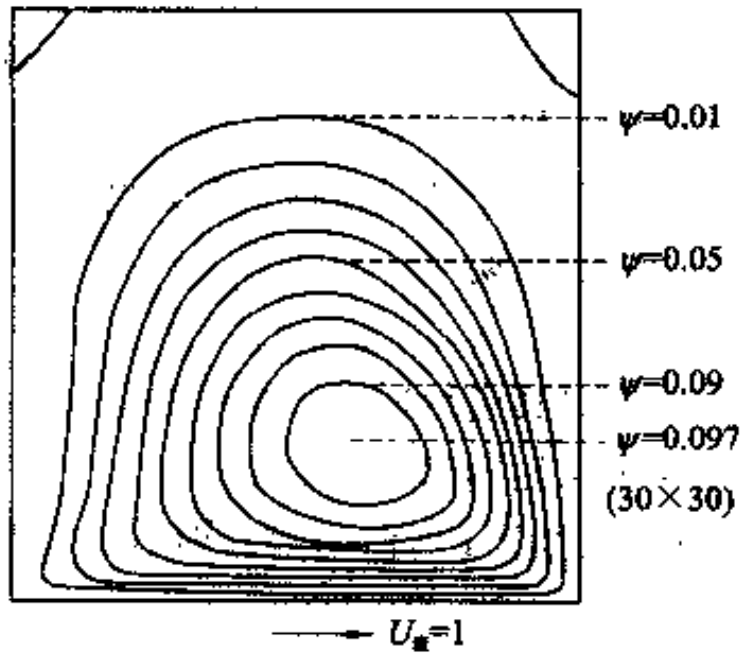
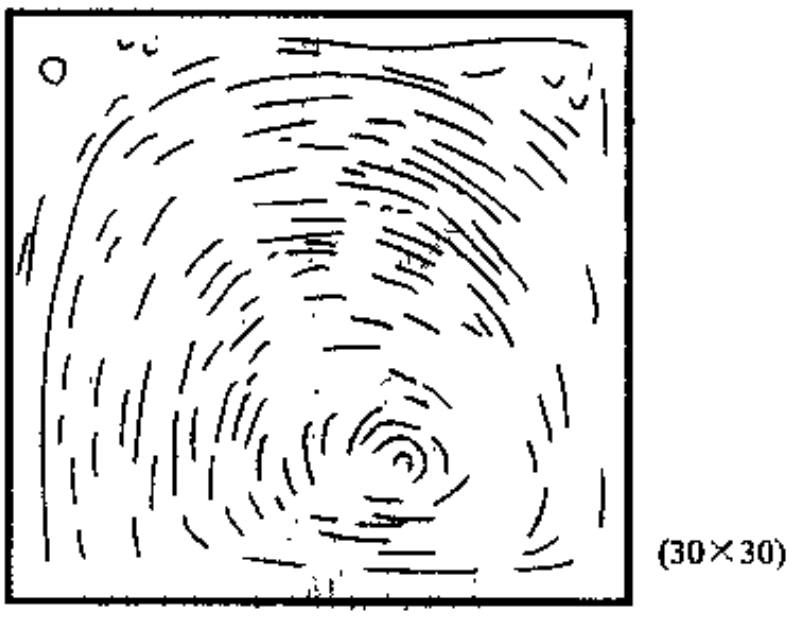


图4.2 方形槽穴内的流动



(a) 流函数等值线(Re=100)

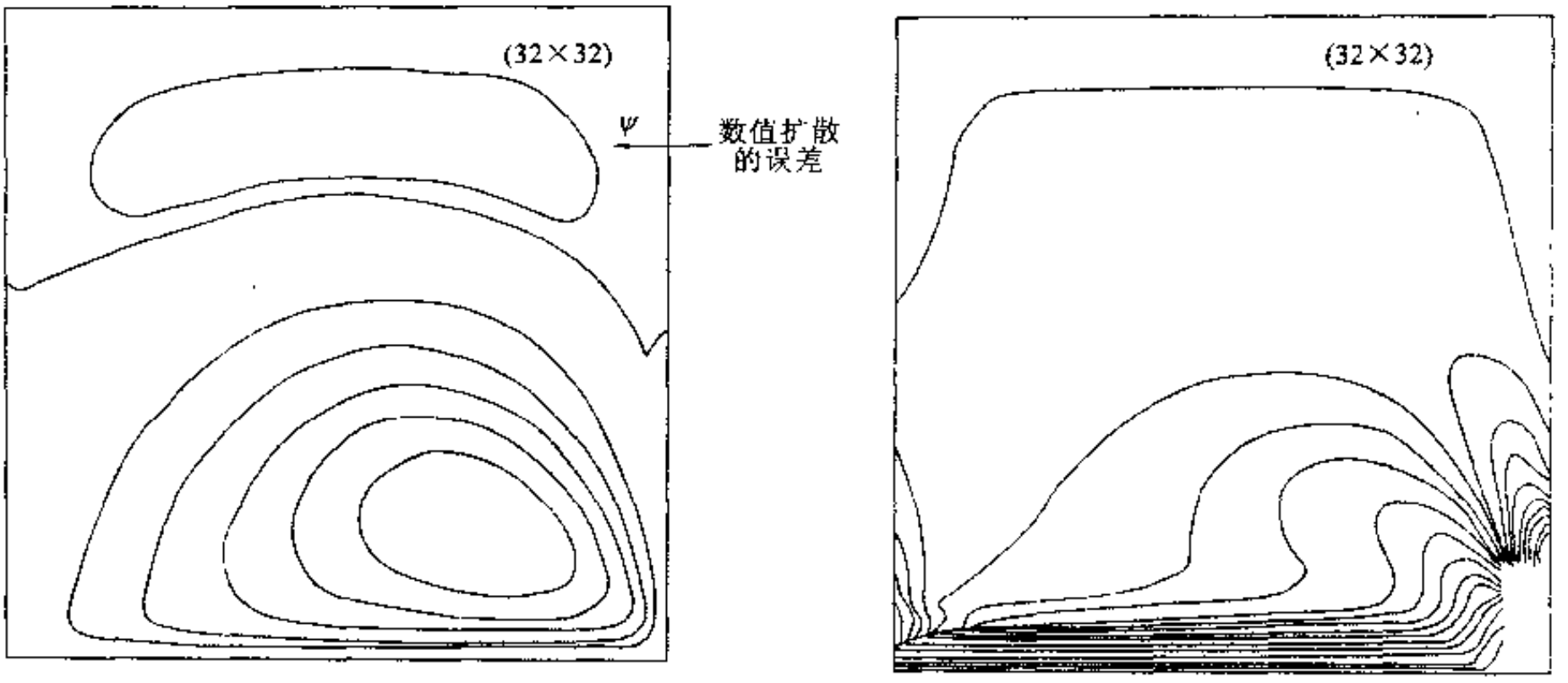


(b) 涡量等值线(Re=100)

图4.3 流线与等涡线

为了克服这一缺点，必须考虑“迎风”效应，图 4.4 (a) (b)，为迎风格式计算的结果，

解是稳定的，比中心差分有所改善，但在真实流动的情况下，高雷诺数Re时，其上部仍有两个小旋涡，而现在由于数值扩散连起来了，这就是“迎风”格式带来的虚假数值扩散，且“迎风”格式只具有一阶精度。



(a) 流线(Re=1 000)　　(b) 等涡线(Re=1 000)

图4.4　上风差分格式流线与等涡线计算结果

槽穴流或叫空腔流动，由于它形状上四四方方很适合于差分网格解，它在实际工程中如门槽，盲肠河道，前后台阶流动中均有应用。因此，人们常常喜欢用它来作教学和应用的范例。如上所述，它在涡量边界条件的确定上和简单保持计算的稳定与精度方面，对格式的选择和计算方法技巧的处理方面，有许多研究。诸如：a. 对于流函数方程与涡量方程采用不同的松弛因子，流函数为线性方程，采用超松弛加快迭代速度，对于涡量方程因它是非线性方程，采用次松弛以保持计算的稳定性；b. 针对固壁附近涡量变化大的区域，采用不均匀网格加密；c. 为了加快迭代速度并使计算稳定，采用分块矩阵迭代，减小网格雷诺数 Re_Δ，或采用并行算法等。目前，槽穴流已经可以算到雷诺数$Re=4\times10^7$。

以上改善的途径与算法由于本书篇幅限制，不能在此一一列举。读者如有兴趣，不妨一试。

流函数涡量法或叫做流函数涡度法是流体力学中的一种基本解法，对二维流动方程概念明确，求解较容易，广泛地应用于粘性不可压缩流动问题，尤其是那些具有分离流和次生回流的流动。下面介绍我们所做的流函数涡量法模拟丁坝的流动。

(2) 丁坝绕流的流函数涡量解

实际河道中的丁坝绕流虽然具有较强的三维性，但对其进行平面二维流的数值计算，已能反映其主要流动特性，更何况它也是三维流函数涡量法先期的准备工作。

计算方法对涡量方程用交替方向(*ADI*)追赶法解三对角阵，对流函数方程用超松弛迭代。

对固壁涡量边界条件的确定用下式

$$\Omega_w=-\frac{2(\psi_{w+1}-\psi_w)}{(\Delta n)^2}+O(\Delta n) \tag{4.1.15}$$

对于雷诺数的选取，先取小的雷诺数Re，算出流场，作为初始流场；然后逐步降低粘性系数ν，即增大Re继续算向高雷诺数，直至达到真实粘性系数，从而得到反映真实流动情况。

涡量方程与流函数方程的求解是耦合的。涡量以源项的形成出现在流函数方程中，而涡量方程中的对流项的速度U与V则要由流函数的导数定出，两者需彼此迭代耦合求解。如果对定常问题采用时间推进法求解，则问题类似于非定常问题，具体步骤见以下的计算程序框图，如图 4.5 (a) 所示。

定解条件由初始条件和边界条件组成。

计算初始条件在计算开始时设定，也可在计算中不断更新，把上一次的计算结果作为下一次计算的初始条件。

该计算河段的计算区域如图 4.5 (b) 所示，包括进口断面、出口断面、中心对称线及固体边界。

①进口断面B_0

假定断面B_0的流速分布为 $U=U_m\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$，其中$n=7$，$U_m$为最大流速，$B$为河宽的一半。通过平面流场中任意两点 A、B 的流函数分别为 ψ_A、ψ_B，通过 A、B 两点连线间单位深度的流量为 q_{AB}，而

$$q_{AB}=\int_A^B \mathrm{d}\psi=\psi_B-\psi_A=\int_A^B U\mathrm{d}y-V\mathrm{d}x \tag{4.1.16}$$

故边界B_0的流函数为

$$\psi(0,\ y)=\int_0^y u\mathrm{d}y=\int_0^y u_m\cdot\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}y=\frac{n}{n+1}U_m B\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{n+1}{n}} \tag{4.1.17}$$

则

半河宽的流量
$$q=\frac{n}{n+1}U_m B \tag{4.1.18}$$

若q一定，则U_m可由式 (4.1.18) 求出，把U_m代入 (4.1.17) 式即可确定进口断面 ψ 值。

而B_0上的涡量值

$$\Omega(p,\ y)\approx-\frac{\partial\overline{U}}{\partial y}=\frac{\overline{U}_m}{nB}\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1}{n}-1} \tag{4.1.19}$$

②出口断面B_6

出口断面采用第二类边界条件，$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$，$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=0$，在循环计算中$\psi$、$\Omega$值须不断更新。

③固体边界

取固体边界 B_1~B_5 的流函数为 0，涡度采用壁面涡度计算式，其值必须在循环计算中不断更新。

④中心对称线B_7

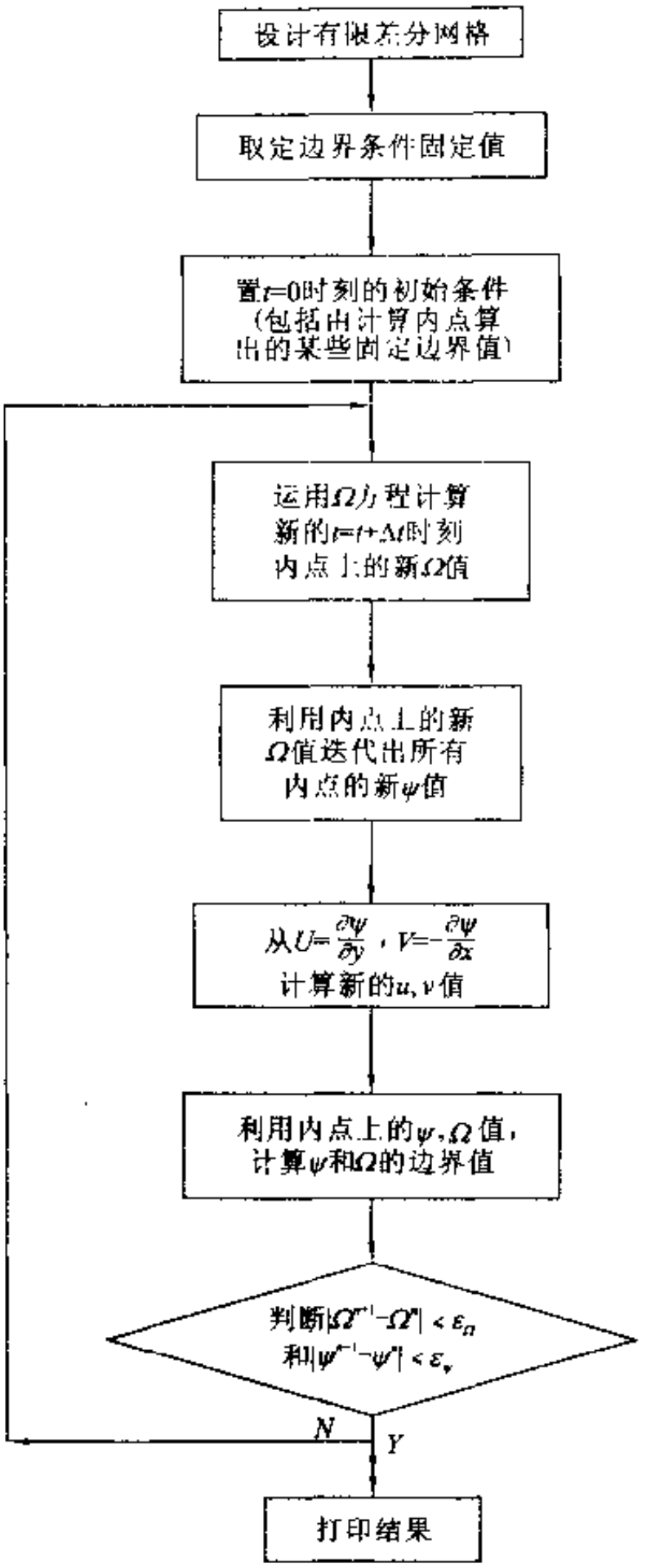
中心对称线B_7的度值$\Omega_R=0$，流函数值$\psi_R=0$。

⑤拐点

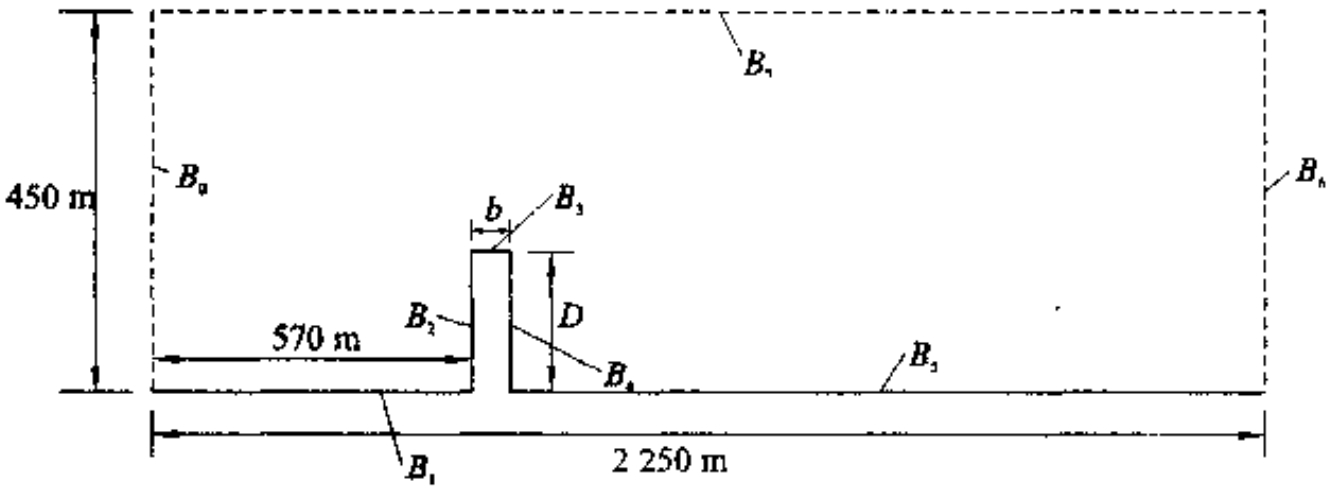
凹拐点、凸拐点的涡量采用二个壁面的平均值，并在循环计算中不断更新。

计算方案的选取：

为了更好地模拟丁坝的流动，分别计算了流量为 2 000 m^3/s 时长、中、短三种不同长度的丁坝，及中等长度丁坝在不同流量下的流动，具体计算方案见表 4.1（√表示计算工况）。



(a) 计算程序框图



(b) 计算区域

图4.5　计算程序框图与计算区域

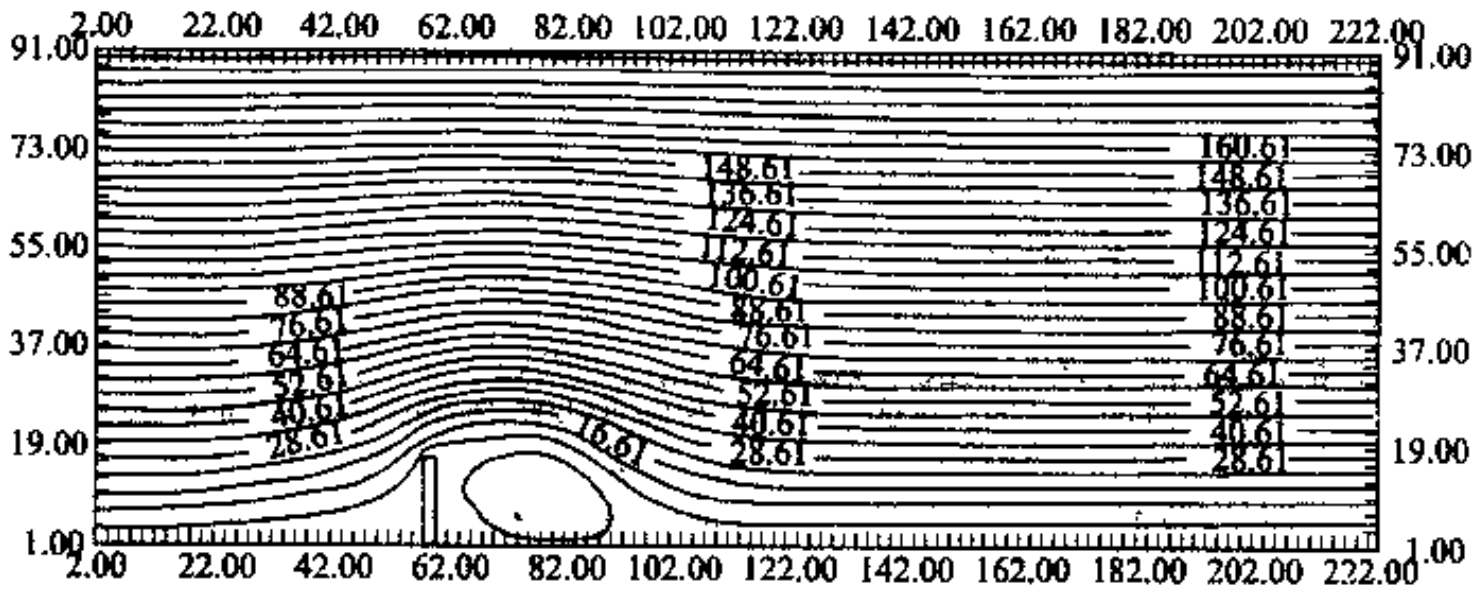
表 4.1　计算方案

丁坝 ($D\times b$)	流量 (m^3/s)		
	1 500	2 000	2 500
80 m×20 m	√	√	√
120 m×20 m	√	√	√
150 m×20 m	√	√	√

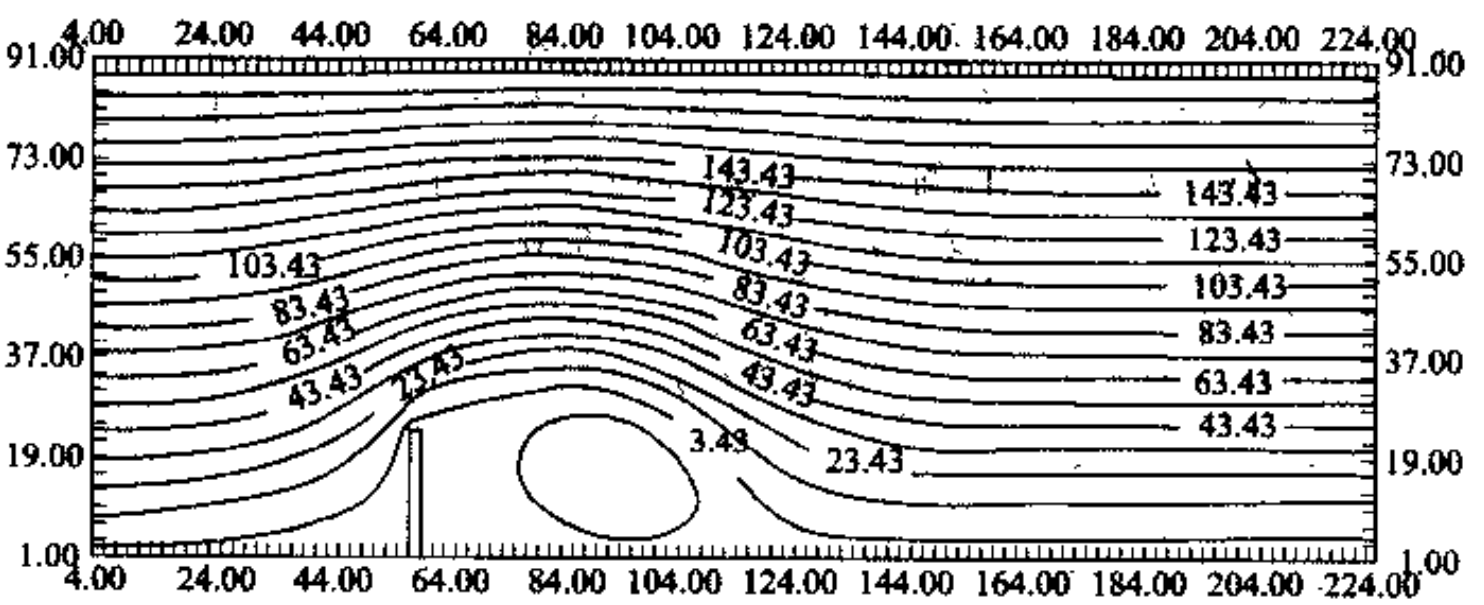
计算结果及分析

计算结果是以图形形式给出的。利用离散网格点的速度、流函数值、涡量值分别绘制流场图、流场的断面流速分布图、流函数图和涡量图。

在流量为 2 000 m^3/s 时，长、中、短三种长度丁坝的流函数图见图 4.6 (a)、(b)；涡量图见图 4.7 (a)、(b)；流场图见图 4.8 (a)、(b)；断面流速分布图见图 4.9 (a)、(b)。

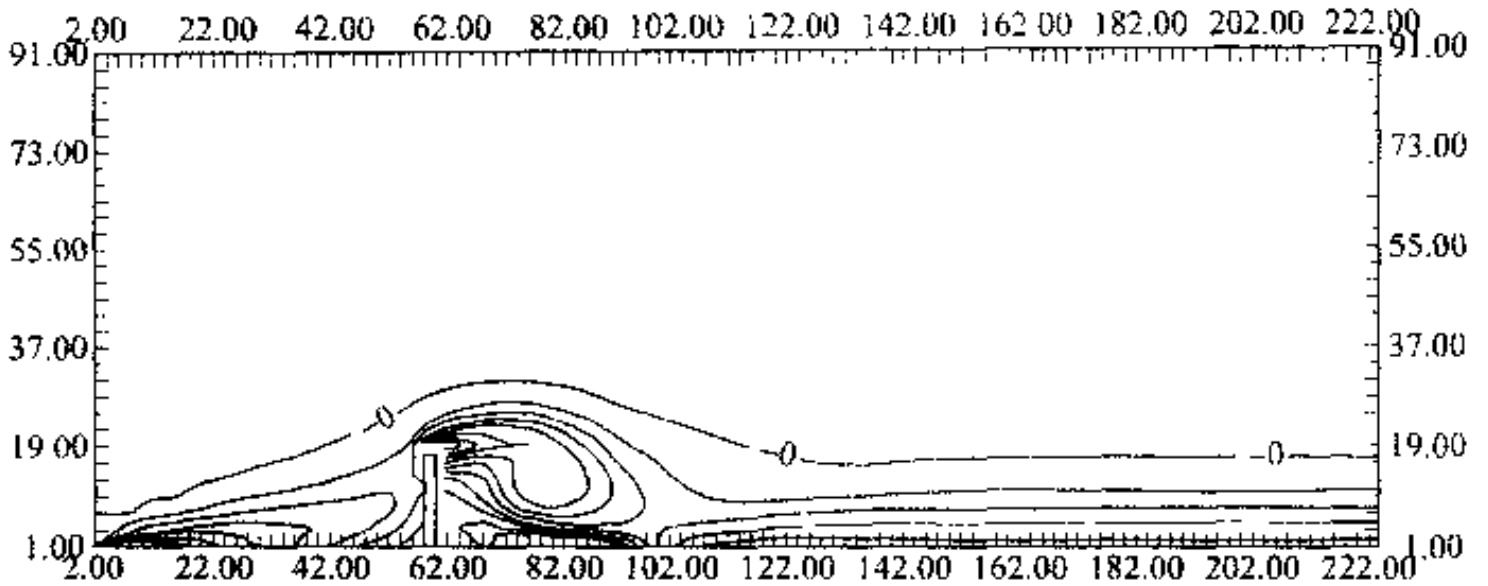


(a) 丁坝流场流线分布
(Q=2 000 m^3/s，丁坝长×宽=80 m×20 m，流场长×宽=2 250 m×450 m)

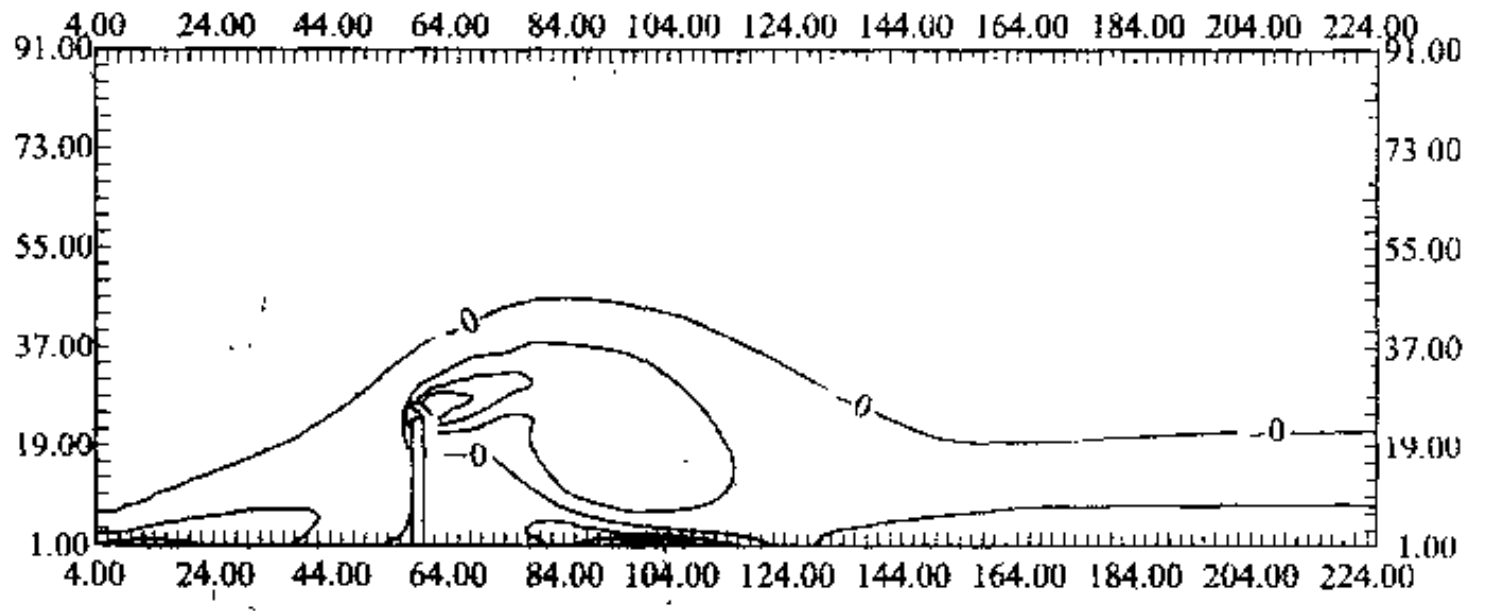


(b) 丁坝流场流线分布
(Q=2 000 m^3/s，丁坝长×宽=120 m×20 m，流场长×宽=2 250 m×450 m)

图4.6　丁坝流场流线分布



(a) 丁坝流场涡度分布
(Q=2 000 m³/s，丁坝长×宽=80 m×20 m，流场长×宽=2 250 m×450 m)



(b) 丁坝流场涡度分布
(Q=2 000 m³/s，丁坝长×宽=120 m×20 m，流场长×宽=2 250 m×450 m)

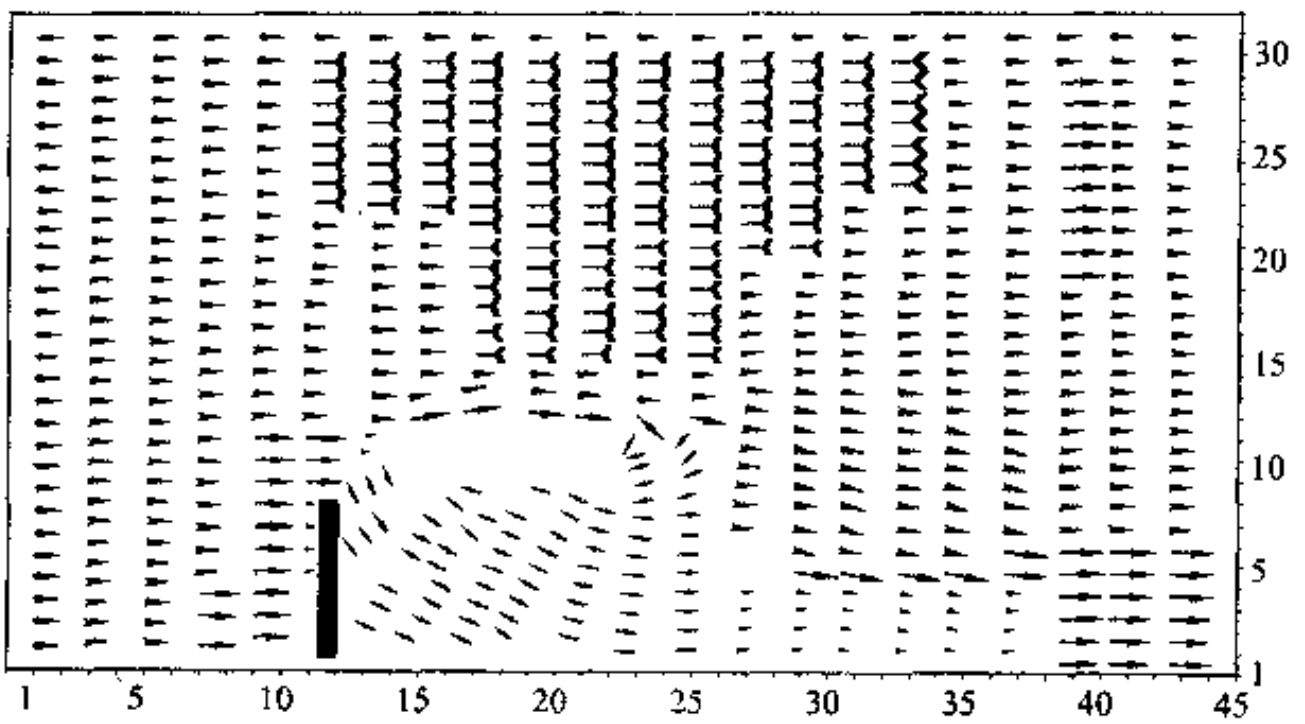
图4.7　涡量等值线图

如图所示，水流行近丁坝，因丁坝的阻流作用，主流收缩，水流偏向对岸，在水流绕过坝头后，由于惯性作用，主流宽度继续收缩，形成主流最窄，回流最宽的收缩断面，随后主流沿程扩散，在离坝头有一定距离后，主流重新靠岸，水流逐渐恢复正常。从图 4.6 能更清楚地看到水流的分离、断面束窄及重新靠岸的现象。以上现象与试验结果基本吻合。在流量为 2 000 m³/s，几种不同长度丁坝回流及最窄收缩断面的特征值见表 4.2。

表 4.2　丁坝回流区特征值

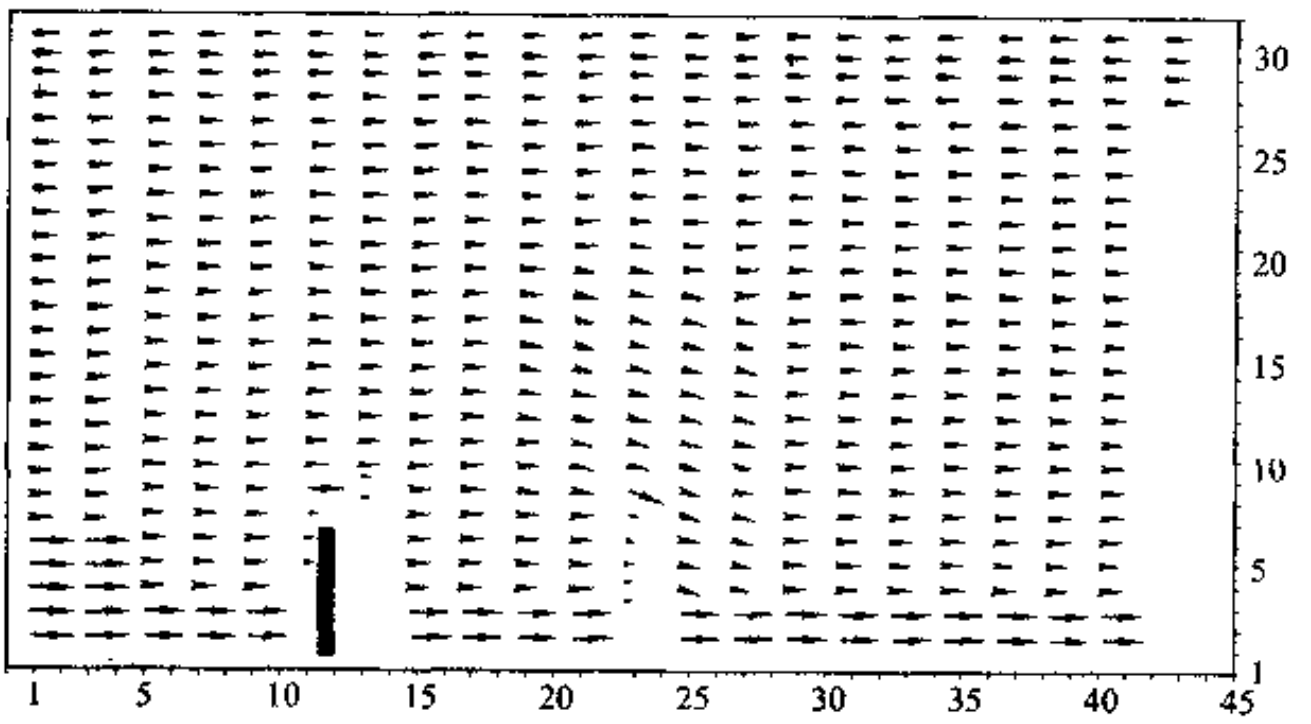
丁坝长度 D (m)	回流区长度 L (m)	$\frac{L}{D}$	收缩断面到丁坝的距离LL (m)	$\frac{LL}{D}$	收缩断面宽度 BB (m)	$\frac{BB}{D}$
80	420	5.3	160	2.0	90	1.10
120	680	5.6	300	2.5	150	1.25
150	1 420	9.4	780	5.0	190	1.25

从表中可以看出：随着丁坝长度的增加，坝后的回流区长度加大，最窄收缩断面距离丁



(a) 丁坝流场

(Q=2 000 m³/s，丁坝长×宽=150 m×20 m，流场长×宽=2 250 m×450 m)



(b) 丁坝流场

(Q=1 500 m³/s，丁坝长×宽=120 m×20 m，流场长×宽=2 250 m×450 m)

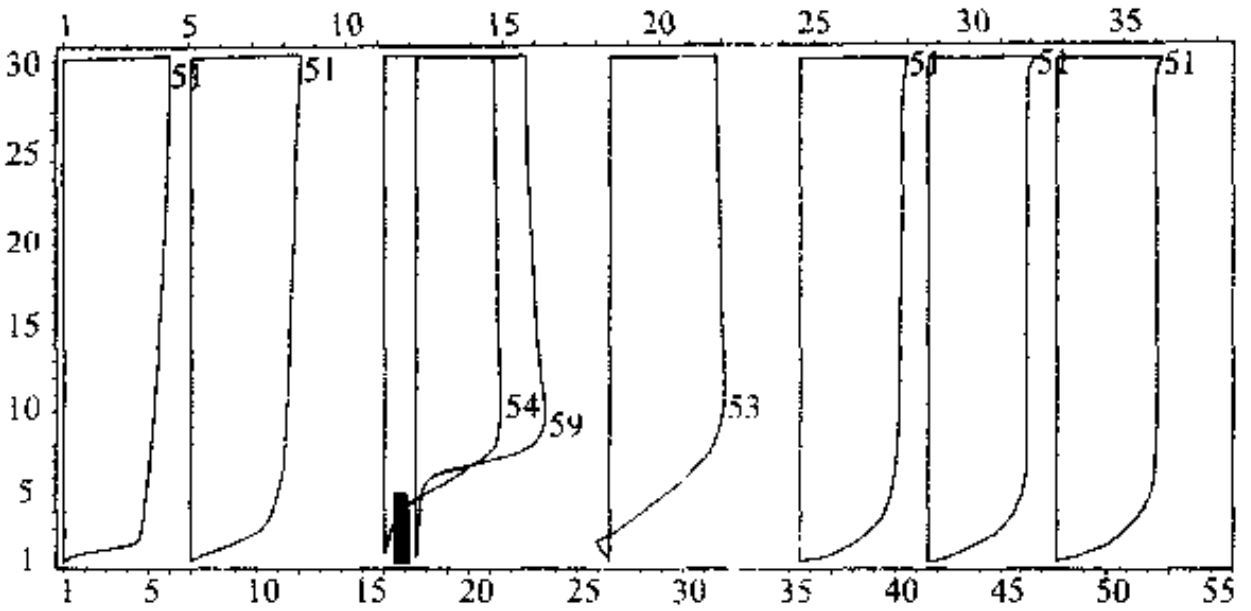
图4.8　丁坝流场图

坝变远，且其宽度也相应增加，回流区长度增加迅速，最窄收缩断面离丁坝的距离也增加较快，但其宽度增加并不快。河海大学任佐皋等对坝长D=0.75 m、速度u=0.1 m/s 的正交丁坝绕流进行试验，得出坝后回流区的长度与坝长的比值$\frac{L}{D}\approx 7.0$，最窄收缩断面离丁坝的距离与坝长的比值$\frac{LL}{D}\approx 3.5$，最窄收缩断面宽度与坝长的比值$\frac{BB}{D}\approx 1.20$，计算结果与试验结果比较接近，但由于坝长及流量不同，因此特征值也是稍有变化的，并非固定值。试验结果如图 4.10 (a)、(b) 所示。

从流场图可以看出：在流量一定时，丁坝越长，挑流越明显，靠近丁坝的流速方向改变也越大，流速方向恢复到与进口方向一致，需要越来越长的距离。从图 4.9 (b) 能更清楚地看到水流流速方向的变化过程。

将不同流量级的结果图比较，可以看出，在丁坝长度不变时，流量增大，流速也增大，但回流区的范围并未明显扩大。

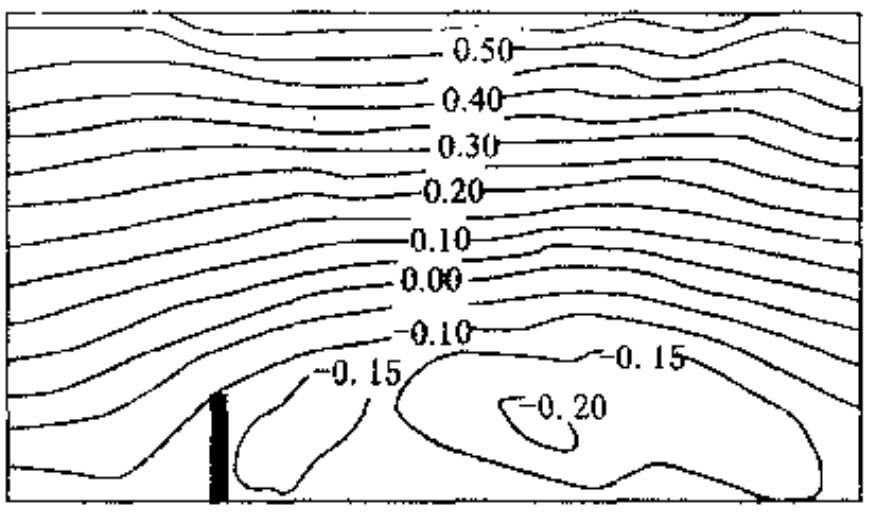
从断面流速分布图，可以看到水流的速度分布情况。水流最大流速一般发生在坝头处，



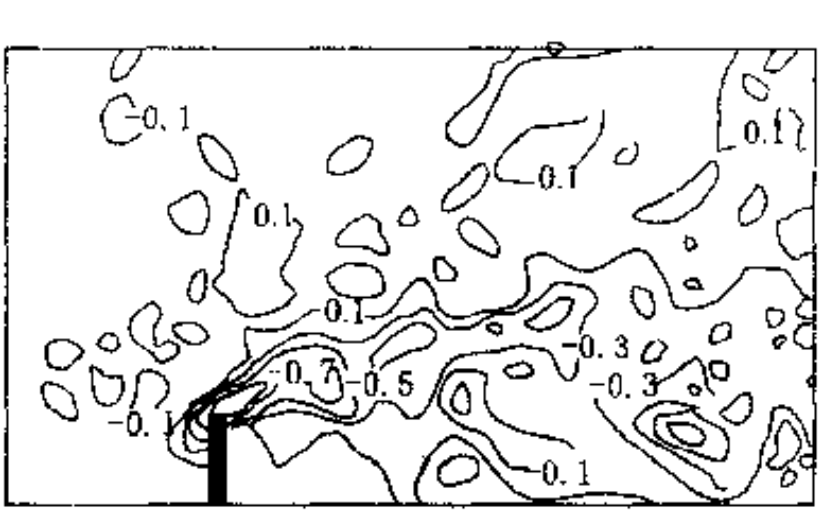
(a) 丁坝流场断面流速分布
(Q=2 000 m³/s，丁坝长×宽=80 m×20 m，流场长×宽=2 250 m×450 m)

(b) 丁坝流场断面流速分布
(Q=2 000 m³/s，丁坝长×宽=120 m×20 m，流场长×宽=2 250 m×450 m)

图4.9　丁坝流场断面流速分布图



(a) 丁坝流场流线分布图
(丁坝长D=0.75 m，u=0.1 m/s)



(b) 丁坝流场涡量分布图
(丁坝长D=0.75 m，u=0.1 m/s)

图4.10　丁坝流线、涡量分布图

次最大流速发生在坝头下游不远处，比如在流量为 2 000 m³/s 时，短丁坝的最大流速为 0.59；中等丁坝的最大流速为坝头的 0.75 (图上未标明)，次最大流速为坝后 2 倍坝长距离处其值为 0.72；长丁坝的最大流速为 0.82 (图上未标明)，次最大流速为坝后 3.5 倍坝长距离处其值为

0.81，这些较大流速是形成坝头及坝头稍后冲刷坑的主要原因；而坝后回流的流速均较小，丁坝越大，回流流速越大，最大回流点的位置也越靠后。比如短丁坝的最大回流是坝后 1.5 倍坝长距离其值为 0.10 m/s，中等丁坝的是坝后 2.5 倍坝长距离其值为 0.18 m/s，长丁坝的是坝后 4.5 倍坝长距离值为 0.25 m/s，这些回流是形成坝后泥沙淤积的主要原因。从室内试验的结果可知，在坝头及坝头以下不远处的确存在着两个不同深度的冲刷坑，其中靠近坝头的较深，另一个则较浅，在坝后回流区存在一个泥沙淤积区，这些都说明了计算结果基本反映丁坝的流动特征。

水流绕过丁坝头部时，其流线曲率、旋转角速度及应力梯度均很大，因此，水流绕过坝头后边界层即发生分离，分离点以下形成旋转角速度较大的旋涡，但范围较小，在向下游移动的过程中，旋涡区范围逐渐扩大，其强度随之减小。旋涡移动的路径及它们在平面上的分布是随机的，但基本上集中在所谓混掺区，其间它们也可侵入回流区或主流区，但强度很快减弱。坝头处涡度最强，强度（单位为 1/T）达−0.25 左右（顺时针计），涡线很密，即涡度梯度很大，涡旋随水流并向两侧扩散。在回流区和主流区之间的混掺区，基本上呈喇叭形向下游和两侧扩散，涡度在向下游混掺时逐渐衰减。还可从图中看出以下规律：随着丁坝变长，坝头处的涡量增加，从短丁坝的−0.15 到长丁坝的−0.28；涡量的扩散距离变长，一般是丁坝长度的 4.5~5.5 倍。同样在任佐皋等的流场显示试验中，坝长$D=0.75$ m，速度$u=0.1$ m/s 的正交丁坝的坝头涡度达−0.90，且涡线很密，涡旋随流并呈喇叭形向两侧扩散，大约在坝后 5.0 倍于坝长的距离时衰减到−0.1 左右，基本恢复常态，如图 4.10 (b) 所示。

为了解决实际问题，我们对丁坝坝头局部冲刷坑进行了初步计算。

在计算丁坝绕流流场后，就可以利用流场中每一点的流速矢量值，初步计算丁坝坝头的冲刷坑。根据泥沙起动流速公式，无论对粘性泥沙还是散体泥沙，其起动流速$U_c=f[\frac{\rho_s-\rho}{\rho}, d, h]$有一定的函数关系，对于一定粒径$d$的泥沙颗粒，当其$\frac{\rho_s-\rho}{\rho}$一定时，其起动流速$U_c$只与水深$h$有关。

对于一定的泥沙颗粒，是否冲刷与实际流速U和起动流速U_c之差有关，$U>U_c$时发生冲刷，否则不发生冲刷，而

$$(U-U_c)\sim(h-h_c) \tag{4.1.20}$$

当床沙粒径已知时，可以确定U_c，h_c为起动流速U_c对应的水深，h为流速U对应的水深。进一步还可看到：

$$\frac{U-U_c}{U_c}=\alpha\left(\frac{h-h_c}{h_c}\right) \tag{4.1.21}$$

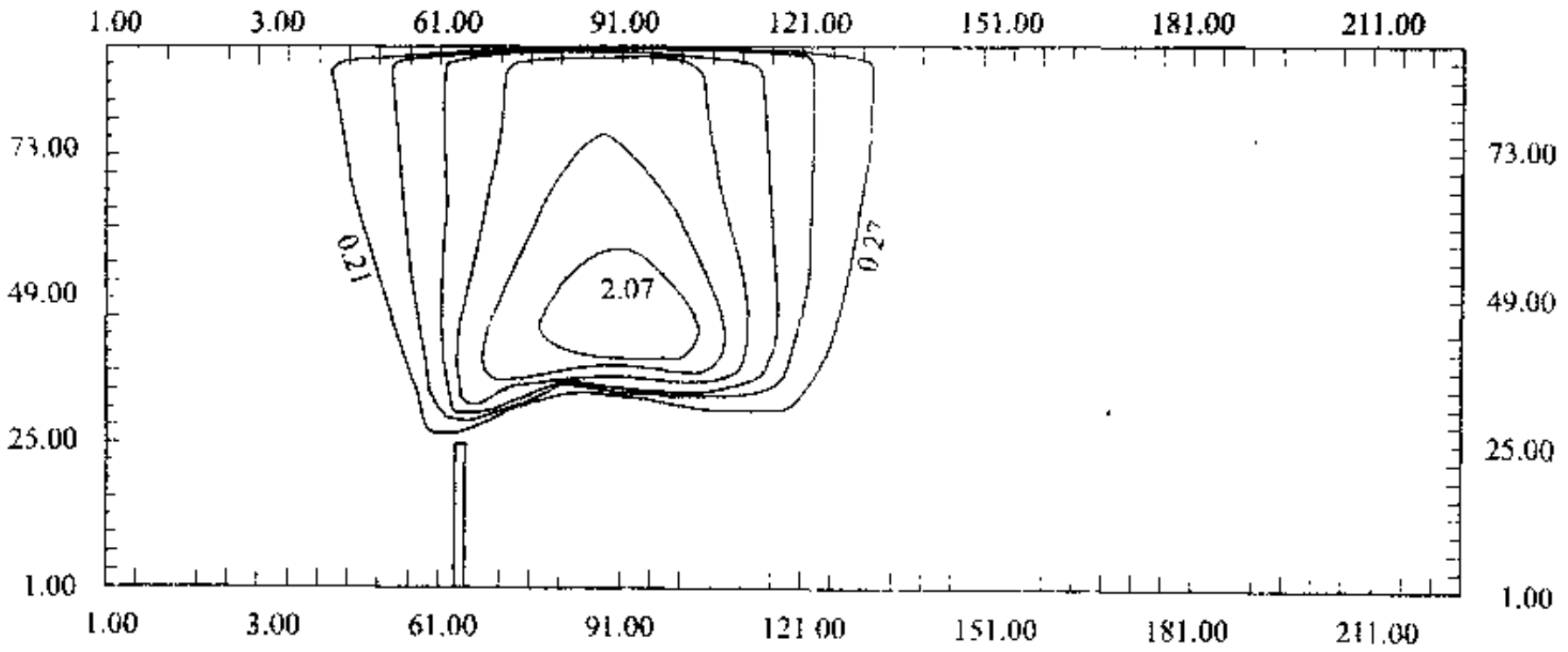
式中α为某一修正系数，取决于水流模拟的准确程度。同样淤积水深亦可仿此处理，但此时应考虑水流含沙量是否饱和等问题。

利用此原理和方法，对流量为 2 000 m^3/s 中等长度丁坝进行坝头冲刷坑的计算。泥沙起动流速公式采用沙玉清公式：

$$U_c=0.43\,d^{\frac{3}{7}}h^{\frac{1}{7}} \tag{4.1.22}$$

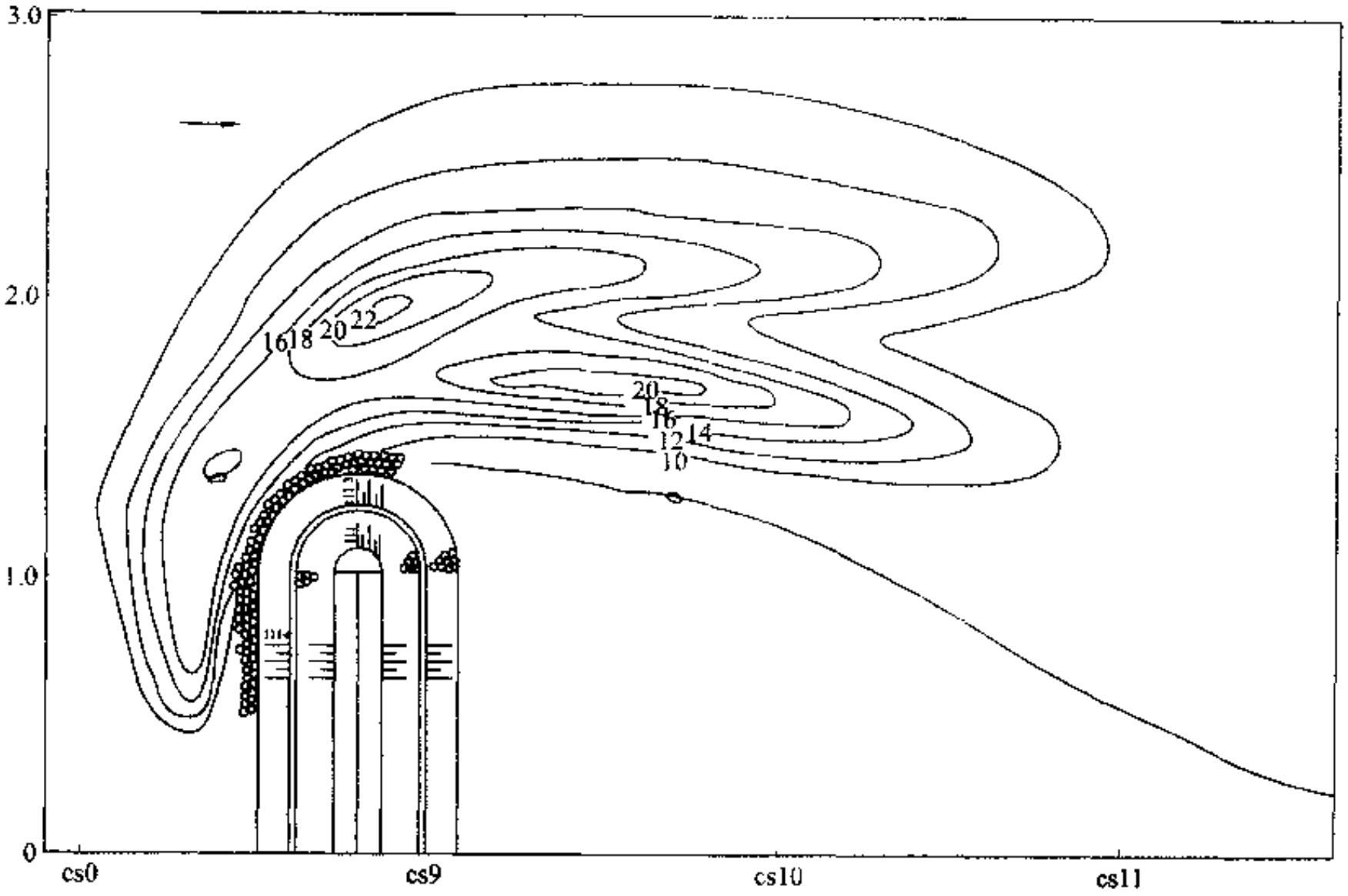
设床沙为均匀沙，其粒径为 0.8 mm，利用 (4.1.22)，则泥沙起动流速为 0.5 m/s，相应的h_c为

5 m。利用式 (4.1.21)，即可得到所有冲刷点的水深。用以上各点的水深绘制水下地形等值线图，如图 4.11 所示 (设不冲刷时水下地形高程 0，负值表示冲刷)。从图可以看到在丁坝坝头处存在两个冲刷坑，第一个靠近坝头，范围较小，第二个在坝头下游，范围较大。图 4.12 为张红武室内丁坝试验结果，比较两个图可见，冲刷坑的个数和位置均基本相同，因此计算结



(Q=2 000 m³/s，丁坝长 120 m)

图4.11　丁坝坝头局部冲刷坑



θ=90°时的坝前冲坑等深线图(单位:cm)

(V_0=26.1 cm/s,h_0=6.8 cm)

图4.12　丁坝坝头局部冲刷坑试验结果

果尚能符合实际。两图差异的地方主要原因是计算中B_1边界为对称中心线，而试验中相应于此边界为水槽子固壁。因此，看来计算与试验趋势很相近的。

丁坝绕流流场计算，以往有多种做法，势流是不合乎实际的，并且算不出涡游区，紊流模型 u、v、p 原参数解比较麻烦，由于冲刷坑紊动性质而不一定准确，另外，对于丁坝这样复杂的绕流边界条件，没有所谓壁函数可以遵循，因此计算起来也是不精确的；而控制体积法、有限分析法计算结果旋涡区范围偏小，达不到实际观测到的高雷诺数的要求；也有人采用大涡模拟丁坝，也较烦难。

流函数涡量法中涡量边界条件虽然也比较难定，但毕竟有理论公式$\nabla^2\psi+\Omega=0$可制约，有一定的理论依据，而不象壁函数公式只是经验公式，其计算精度到10^{-2}之后就再也算不下去了，流函数涡量法实际计算精度需达到10^{-4}才好。

§4.2 有限分析法 (Finite Analytic Metlood) 解水动力学问题

4.2.1 数学模型

令算子方程

$$L\Phi=G(x,\ y)$$

L 为偏微分算子，Φ 为待求的解，$G(x,\ y)$ 为偏微分方程的非齐次项。当Φ 表示速度U或涡量Ω时，则上述控制方程可以写成：

$$\mathrm{Re}(U\Phi_x+V\Phi_y)=\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+G$$

如果Φ表示温度T，则有：

$$\mathrm{Pe}(UT_x+VT_y)=T_{xx}+T_{yy}+G$$

它们归结为统一的形式

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=2A\Phi_x+2B\Phi_y+G$$

其中A，B与U及Re，Pe反映对流项的性质，G为源项，也可一般地写为以下形式

$$\Phi_{,jj}=2A_j\Phi_{,j}+G \tag{4.2.1}$$

$\Phi_{,jj}$为扩散项，$2A_j\Phi_{,j}$为对流项，对流项的大小与A_j有关，它包含了Re及流场性质。

二维单元与结点，如为9点写作如图4.13，根据假设在单元内将控制方程作线性化，单元内取$A_j=\mathrm{const}$，而把其非线性的影响放在源项中去。即$A_j=A_j(p)+A'_j$，A'_j归入G中。

边界条件$\Phi_N(x)$，$\Phi_S(x)$，$\Phi_W(y)$，$\Phi_E(y)$，作近似处

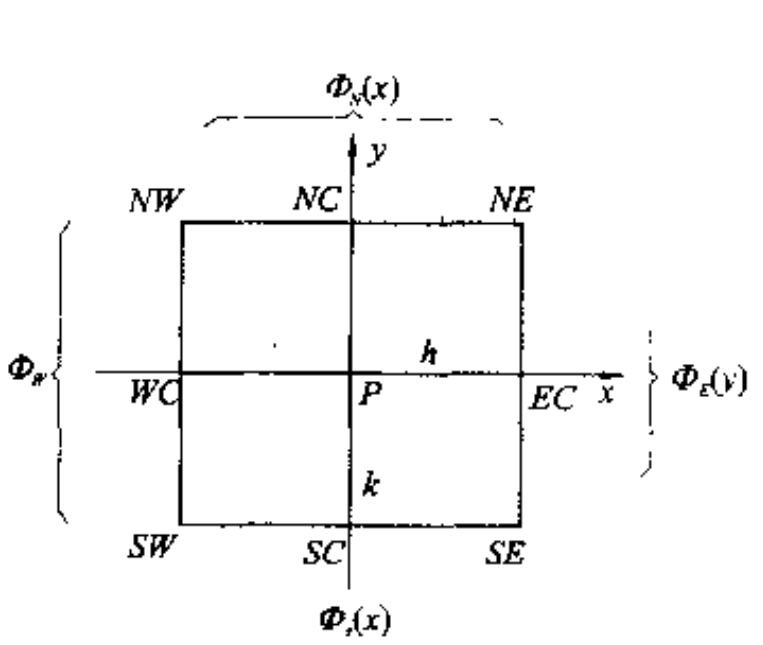


图4.13 有限分析法单元与结点分布

理，其中

$$\Phi_I(y)=\alpha_0+\alpha_1 y+\alpha_2 y^2 \tag{4.2.2a}$$

或

$$\Phi_I(y)=\alpha_0+\alpha_1 y+\alpha_2 e^{2\beta y} \tag{4.2.2b}$$

式中 $2B=V_P\mathrm{Re}$；a_0，a_1，a_2 由东边三个结点 NE，EC，SE 插值确定。

内部点函数可用分析解得出，用分离变量法解对流扩散方程，得其解如下形式

$$\Phi(x,\ y)=f(\Phi_I(y),\ \Phi_M(y),\ \Phi_N(x),\ \Phi_S(x),\ x,\ y,\ h,\ k,\ G)$$

上述解析解是在一个单元内满足的，若以中心结点 $P(i,\ j)$ 为未知量，可以写出周围相邻 8 点对它的“贡献”，即

$$\Phi_P=C_{EE}\Phi_{EE}+C_{NE}\Phi_{NE}+C_{SE}\Phi_{SE}+C_{NE}+\Phi_{NE}C_{NW}\Phi_{NW}$$

$$+C_{WE}\Phi_{WE}+C_{SW}\Phi_{SW}+C_{SE}\Phi_{SE}+C_PG$$

$$=\sum_{m=1}^{8}C_m\Phi_m+C_PG \tag{4.2.3}$$

式中C_m，C_P 称为有限分析系数，可以由分析法求得，这种单元内部分析解，边界点近似的做法，就称为有限分析法。

4.2.2 有限分析(*FA*)系数

a. Laplace 方程：

$$\psi_{xx}+\psi_{yy}=0$$

边界条件由下列函数决定

$$\psi_E(y),\ \psi_W(y),\ \psi_N(x),\ \psi_S(x)$$

设 $\psi_I=a_0+a_1y+a_2y^2$，为二次多项式，由东边边界上三个结点$NE\ (h,\ k)$，$EC\ (h,\ 0)$，$SE\ (h,\ -k)$定出

$$\alpha_0=\psi_{EC},\quad \alpha_1=\frac{1}{2k}(\psi_{EE}-\psi_{SE}),\ \alpha_2=\frac{1}{2k^2}(\psi_{NE}-2\psi_{EC}+\psi_{SE}) \tag{4.2.4}$$

类似地可以得到其它边界关系，分离变量法得 Laplace 方程分析解为

$$\psi(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_{1n}\sin\mathrm{h}(\lambda_n x)+A_{2n}\cos\mathrm{h}(\lambda_n x)]\sin\lambda_n(x+h)+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}[B_{1m}\sin\mathrm{h}\ (\lambda_m y)+B_{2M}\cos\mathrm{h}\ (\lambda_m y)\sin\lambda_m\ (y+h) \tag{4.2.5}$$

式中 $\lambda_m=\dfrac{m\pi}{2k}$，$\lambda_n=\dfrac{n\pi}{2h}$

系数A_{1n}，A_{2n}，B_{1m}，B_{2m} 可由边界条件定出。

当 $h=k$ 时，方形网格中心

$$\psi_P = \sum_{m=1}^{8} C_m \psi_m$$

式中

$$C_N = C_W = C_E = C_S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n h)[1-(-1)^2]}{(\lambda_n h)^3 \cos(\lambda_n h)} = 0.205\ 35$$

$$C_M = C_{SW} = C_{NW} = C_{NE} = 0.044\ 685 \tag{4.2.6}$$

非常接近我们以前所用的 9 点格式。

有限分析法的优点之一是它可以直接对之求导，因为它有分析式，这样就避免数值差分求导的误差，如中心点

$$(\psi_x)_P = \begin{bmatrix} 0.075 & 0 & -0.075 \\ 0.350 & & -0.350 \\ 0.075 & 0 & -0.075 \end{bmatrix} \frac{\psi_n}{h}$$

$$(\psi_x)EC = \begin{bmatrix} -0.017\,5 & -0.325 & -0.333\,4 \\ -0.140 & & 1.490\,7 \\ -0.017\,5 & -0.325 & -0.333\,4 \end{bmatrix} \frac{\psi_n}{h}$$

ψ_n 代表 P 点周围 8 个邻点的 ψ 值

b. 泊松方程有限分析解

$$\nabla^2 \psi + \Omega = 0$$

边界条件类似，如

$$\psi_A(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$$

涡量Ω项的处理，由 9 点系数定出：

$$\Omega_P = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 y^2 + b_6 x y +$$

$$b_7 x^2 y + b_8 x y^2 + b_9 x^2 y^2 \tag{4.2.7}$$

系数$b_i(i=1, 2, \cdots, 9)$，P为中心点，定出

$$b_1 = \Omega_P, \quad b_2 = \frac{1}{2h}(\Omega_{EC} - \Omega_{WC})$$

$$b_3 = \frac{1}{2k}(\Omega_{NC} - \Omega_{SC}), \quad \cdots$$

$$\psi_P = \sum_{m=1}^{8} C_m \psi_m + \sum_{n=1}^{9} B_n \Omega_n \tag{4.2.8}$$

其中C_m，B_n为系数：

$$\Phi_P=\begin{bmatrix}0.045 & 0.225 & 0.045\\ 0.205 & & 0.205\\ 0.045 & 0.205 & 0.045\end{bmatrix}\psi_m+h^2\begin{bmatrix}0.00184 & 0.0085 & 0.00189\\ 0.00185 & 0.21289 & 0.00185\\ 0.00189 & 0.0185 & 0.00189\end{bmatrix}\Omega_n$$

通解　　特解

4.2.3　对流扩散方程有限分析解

关于Laplace方程和Poisson方程我们有前述的9点格式可以简单地满意地求解其精度较高$O(h^6)$的数值解。我们采用有限分析法的真正意义在于求解对流扩散问题，而在雷诺数Re变化的情况下，由于FA系数中包含着Re的变化，可以自动地适应于高、中、低雷诺数，因而FA方法解对流扩散问题是一个有效的方法，如下的对流扩散方程（恒定）

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=2A\Phi_x+2B\Phi_y \tag{4.2.9}$$

如果$\Phi=\Omega$，则$2A=\mathrm{Re}\,U_P$，$2B=\mathrm{Re}V_P$。

边界条件如仍按以前方式处理，则

$$\Phi(x,\ y)=f(A,\ B,\ h,\ k,\ x,\ y,\ \Phi_L(y),\ \Phi_M(y),\ \Phi_N(x)\Phi_M(x))$$

原点在中心点P的解为：

$$\Phi_P=\sum_{m=1}^{8}C_m\Phi_m$$

如果边界条件按$\Phi_l(y)=a_0+a_1y+a_2e^{2By}$确定，

$$C_{WC}=\frac{e^{Ah}}{2\cosh(Ah)}P_B$$

$$C_{EC}=e^{-2Ah}C_{WC}$$

$$C_{SW}=\frac{e^{Ah-Bk}}{4\cosh(Ah)\cosh(Bk)}(1-P_A-P_B)$$

$$C_{NE}=e^{-2Ah-2Bk}C_{SW}$$

其中　$P_A=4E_2Ah\cosh(Ah)\cosh(Bk)\coth(Ah)$，而$P_B=1+\dfrac{Bh\coth(Bk)}{Ak\coth(Ah)}(P_A-1)$

$$E_2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(\lambda_mh)}{[(Ah)^2+(\lambda_mh)^2]\cosh\sqrt{(A^2+B^2+\lambda_m^2)k}}$$

$$\lambda_mh=\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi$$

其余系数类推，所有系数只需求一个级数和。

下面列出各种A，B变化时对C_m的影响。上面可以看出FA系数值A，B及雷诺数变化的自动迎风特性。

一个单元解的代数方程可写为如下形式：

$$\Phi_p = \sum_{n=1}^{8} C_n \Phi_n \tag{4.2.10}$$

现取 $h=k=\frac{1}{20}$

(1) $A\neq 0$，$B=0$

如为涡量方程，$2A=\mathrm{Re}\,U_p$，而$2B=\mathrm{Re}\,V_p=0$，即$V_p=0$，风向平行于x轴，A表示雷诺数或速度对系数C_n之影响，也反映粘性扩散作用，且$\sum_{n=1}^{8} C_n=1$对不同A值及系数C_n的变化，列表如下：

$2Ah=0.1$

$\Phi_p=$

0.046 9	0.205 1	0.042 5
0.215 68		0.196 1
0.046 9	0.205 1	0.042 2

$\times\Phi_n$

$A=2$

$2Ah=10$

$\Phi_p=$

0.081 43	0.018 6	-26×10^{-3}
0.805 2		3.6×10^{-4}
0.081 43	0.018 6	2.6×10^{-3}

$\times\Phi_n$

$A=200$

$2Ah=100$

$\Phi_p=$

0.01	10^{-10}	10^{-11}
0.98		10^{-43}
0.01	10^{-10}	10^{-11}

$\times\Phi_n$

$A=2\,000$

可以看到，随着A值的增大，上风影响增加，上游点系数增大，下游点影响减弱。

(2) $A\neq 0$，$B\neq 0$

这表示流速与坐标轴有一夹角，

$A=20$，　$B=20$

$\Phi_p=$

0.035 47	0.109 8	0.012 86
0.298 7		0.109 8
0.099	0.298 7	0.035 47

$\times\Phi_n$

$2Ah=1.0$

$2Bh=1.0$

A = 200, B = 200

$$\Phi_p = \begin{array}{c|ccc} & -0.043 & 10^{-1} & 10^{-5} \\ & 0.324 & & 10^{-4} \\ 2Ah=10 & 0.436 & 0.324 & -0.043 \end{array} \times \Phi_n$$

$2Bh = 10$

$$\Phi_p = \begin{array}{c|ccc} & 10^{-4} & 10^{-43} & 10^{-15} \\ & 3.8\times10^{-4} & & 10^{-25} \\ 2Ah=50 & 0.287\,05 & 0.725 & -0.112\,5 \\ A=1\,000 & & & \end{array} \times \Phi_n$$

$2Bh = 100, \quad B = 2\,000$

$A = 4\,000, \qquad B = 4\,000$

$$\Phi_p = \begin{array}{c|ccc} & -0.023\,4 & 0 & 0 \\ & 0.103\,05 & & 0 \\ & 0.840\,842 & 0.103\,05 & -0.023\,4 \end{array} \times \Phi_n$$

$2Ah = 2Bh = 200$

从上面算例的系数值来看，有限分析法比较好地反映了邻近点对中心点的影响。

在$A\neq0$，$B\neq0$ 情况下，有限分析解很像上风差分计算结果。第一、二、四种的 A、B 值分别都是相等的，速度方向和x 轴夹角是 45°，系数沿速度方向是对称的。随着速度的增大(即 A、B 值增大)，下游点的影响逐渐减弱直至为零，而迎风点(SW)的影响逐渐增强。第三种情况下速度方向与x 轴夹角几乎呈 60°，迎风点是SW 和SC，这两个结点对P 点的影响系数之和几乎等于一。

有限分析法中，系数C_n 是A，B 值的函数，即$C_n = f(Ah, Bk)$，它自动地较好地反映了邻近接点对中心结点迎风效应的影响。

4.2.4 槽穴流的有限分析解

用流函数 ψ 涡量 Ω 解二维恒定槽穴流，如图 4.14 所示。

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\Omega$$

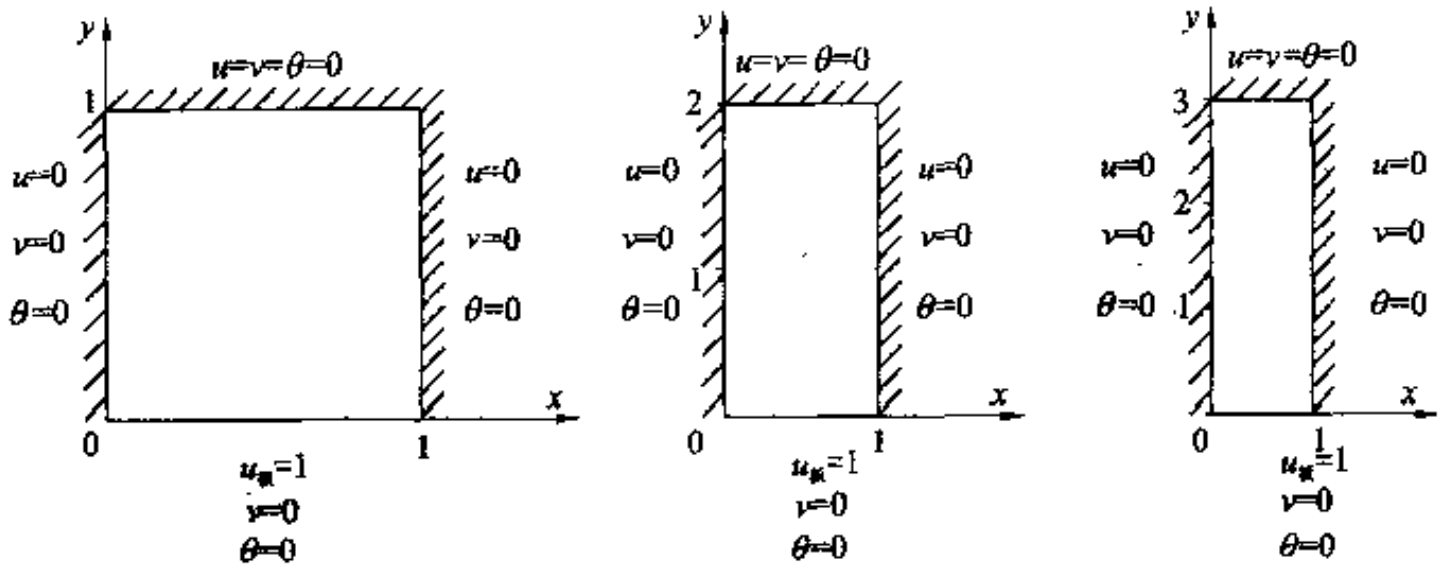


图4.14　二维恒定槽穴流

$$Re\,(u\Omega_x + v\Omega_y) = \Omega_{xx} + \Omega_{yy}$$

而　　$u = \psi_y$，　　$v = -\psi_x$

温差θ所满足的能量方程为

$$Pe(u\theta_x + v\theta_y) = \theta_{xx} + \theta_{yy}$$

Re = 100 情况下与用有限差分法得到的结果差不多，计算雷诺数Re = 1 000，流线图与试验观察结果一样，随着雷诺数的增大，两拐角处的分离区扩大，如图 4.15 所示。与此相比，同样当Re = 1 000 时，使用中心差分格式的有限差分法的计算就出现不稳定。图 4.16 计算雷诺数 Re = 2 000；图 4.17 计算雷诺数Re = 5 000 (试验表明当Re > 5 000 流动将变为紊流)，可以看出，随着Re 数增大，流线中心更趋近于槽穴的中心，流线形状愈趋近于圆，且粘性愈难以往槽内扩张，这些结果都和试验观察所得一致。可见，有限分析解的计算方法经得起大雷诺数的考验，流动部分计算结果比较好，图中还给出了Re = 2 000 时，对于不同普朗特数(P_r = 0.1，1，10) 槽穴内的温度分布。P_r小，传热快；P_r大，热量只是由对流带过去，因此等温圈大起来。

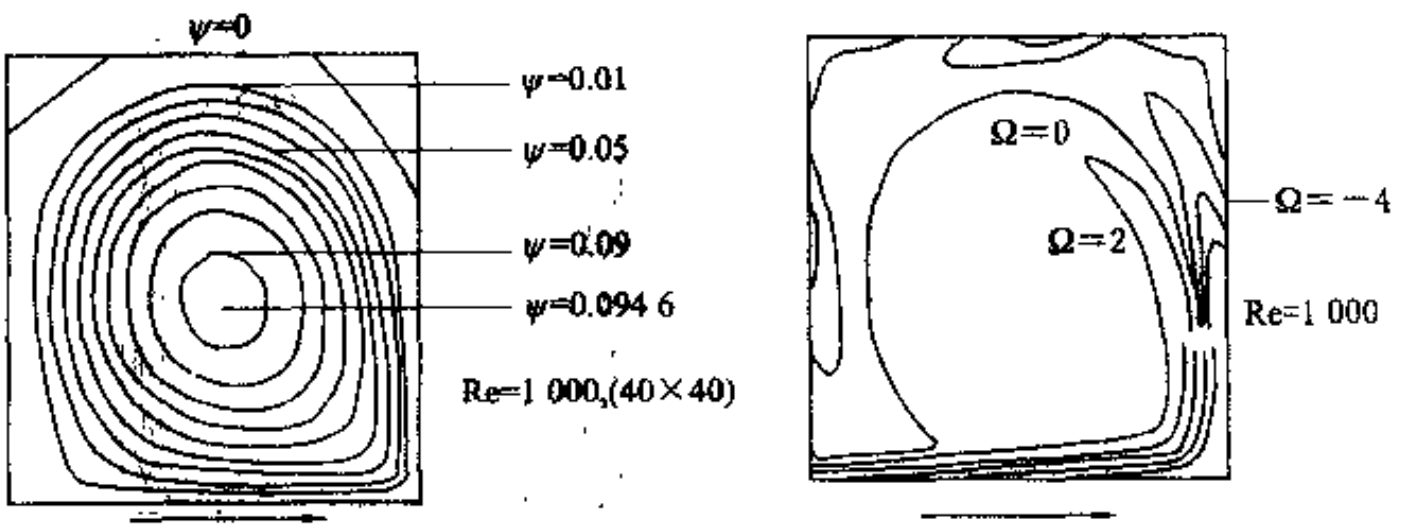
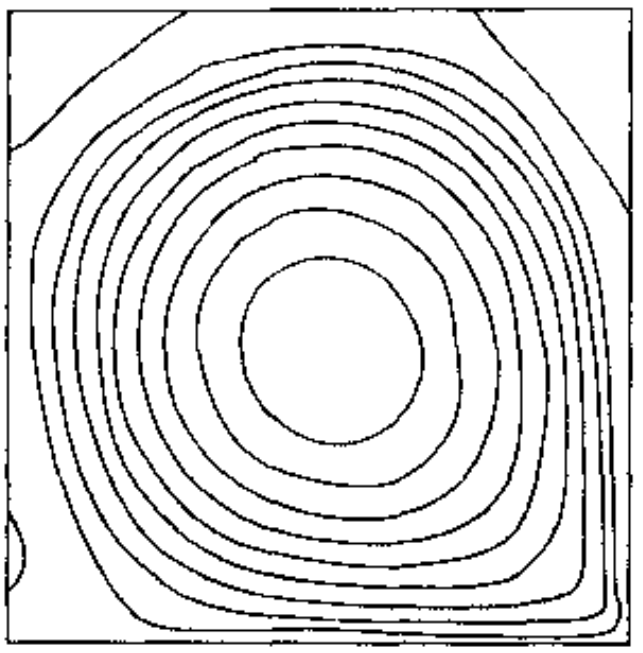


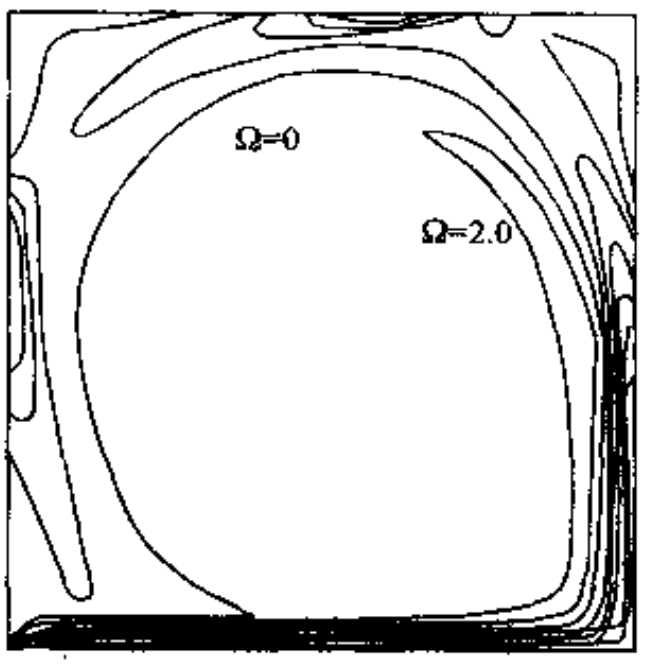
图4.15　方形槽穴流动的有限分析计算结果(Re=1 000)

宽深比为 1:2 的方槽穴计算结果示于图 4.18，从流线圈可以看到，外面的旋涡与里面旋涡方向相反，且转动的速度几乎快 10 倍。宽深比为 1:3 长方槽穴计算结果示于图 4.19，第三

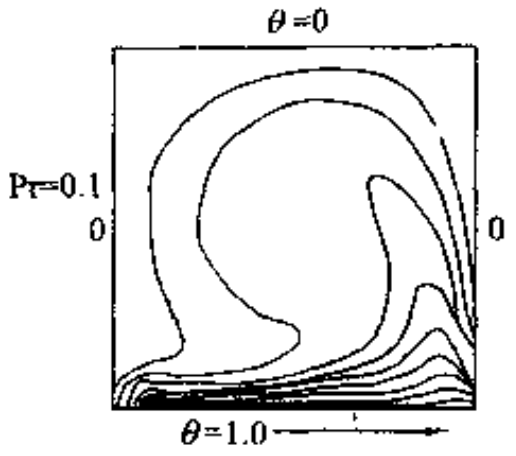
个旋涡的转动速度几乎趋近于零。

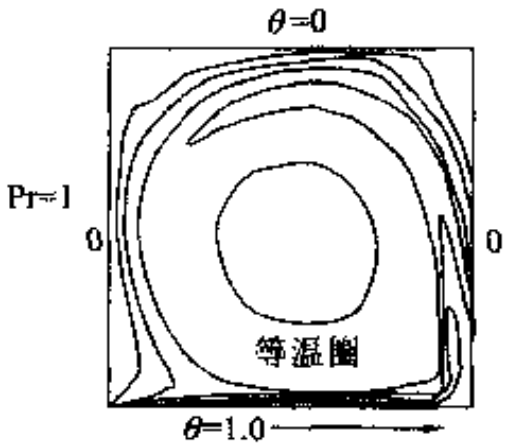


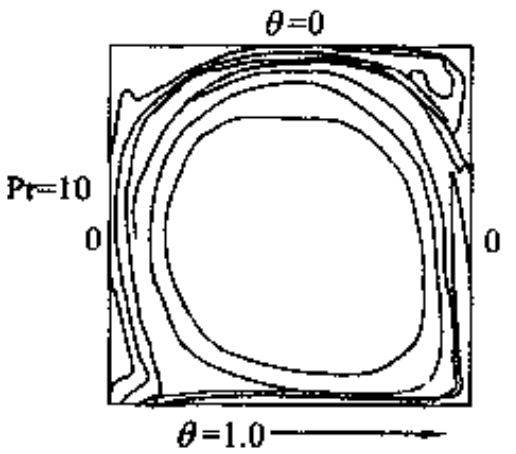
(a)等流线



(b)等涡线







(c)等温线

图4.16　方形槽穴流动的有限分析计算结果(Re=2 000)

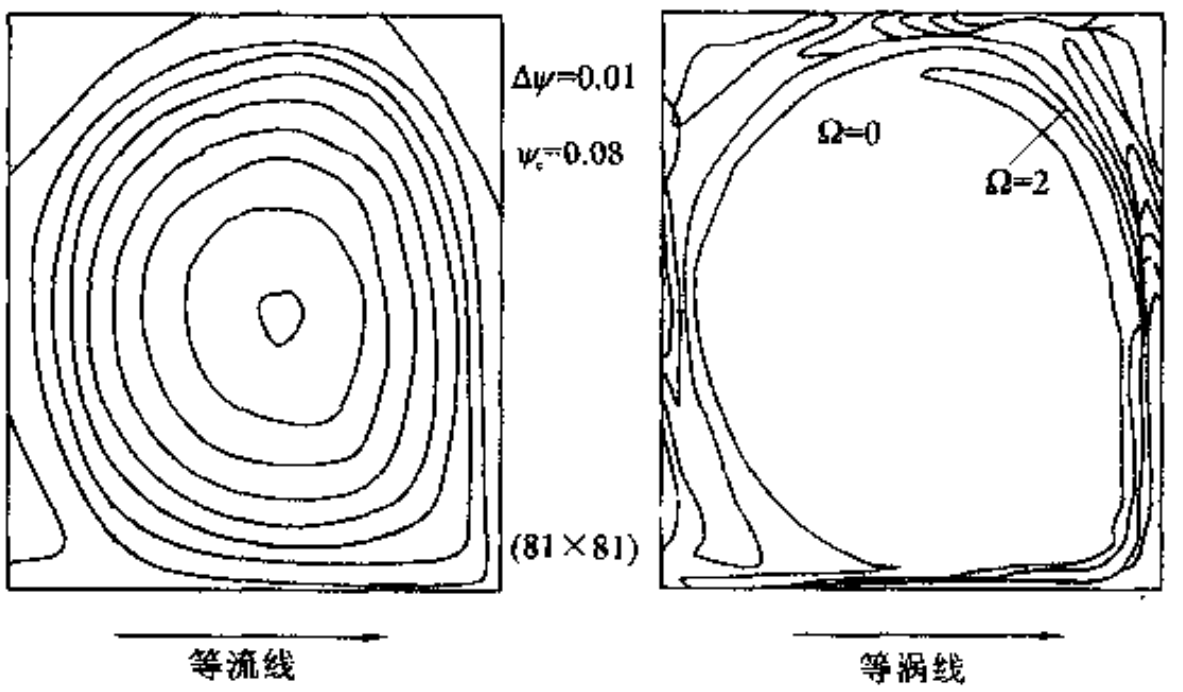


图4.17　方形槽穴流动的有限分析计算结果（Re=5 000）

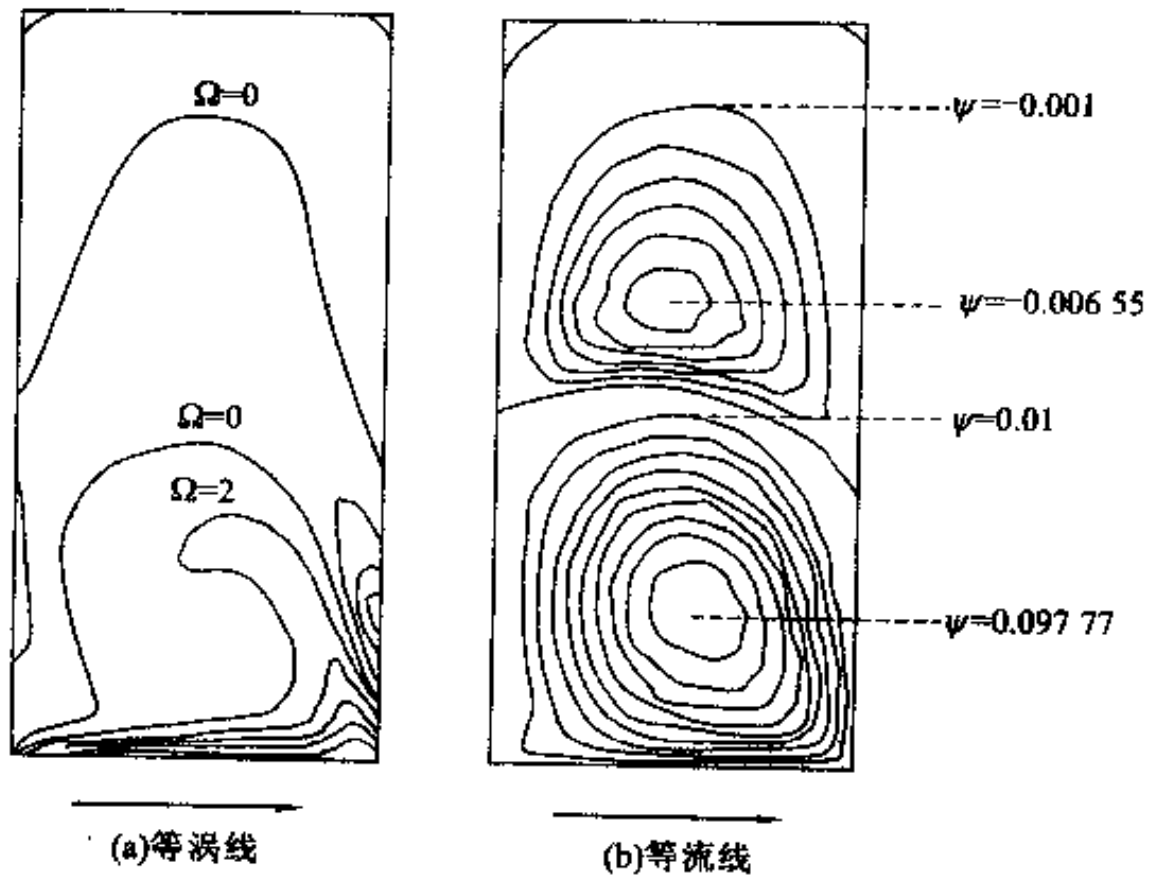


图4.18　1:2长方形槽穴流动的有限分析计算结果（Re=400）(31×61)

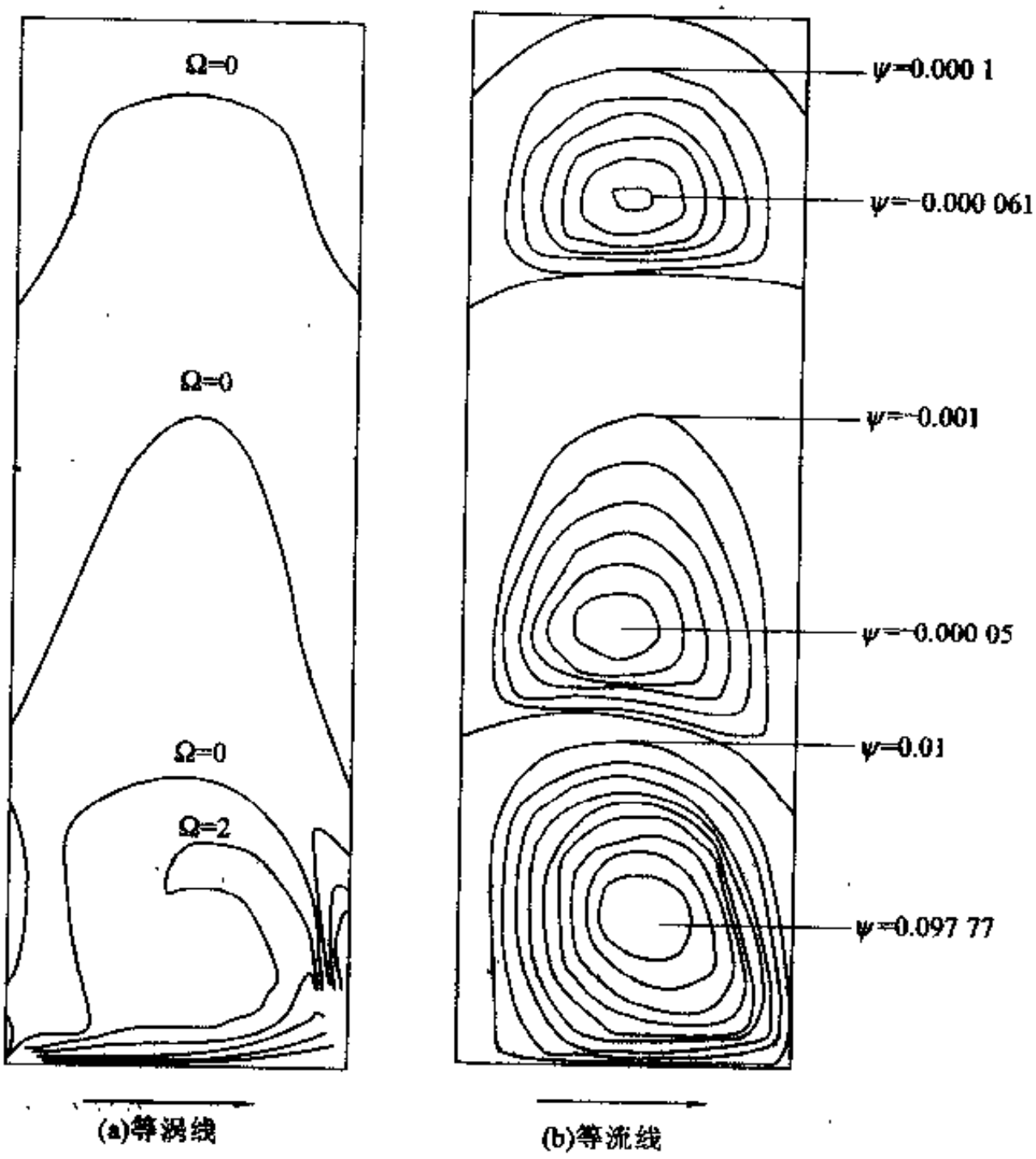
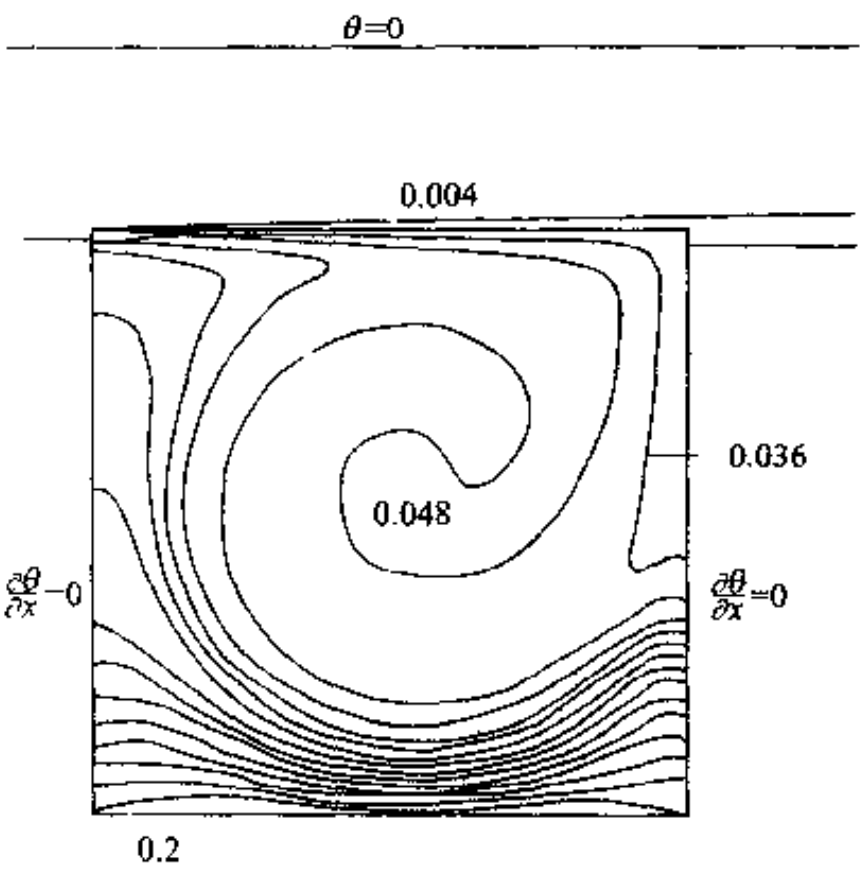
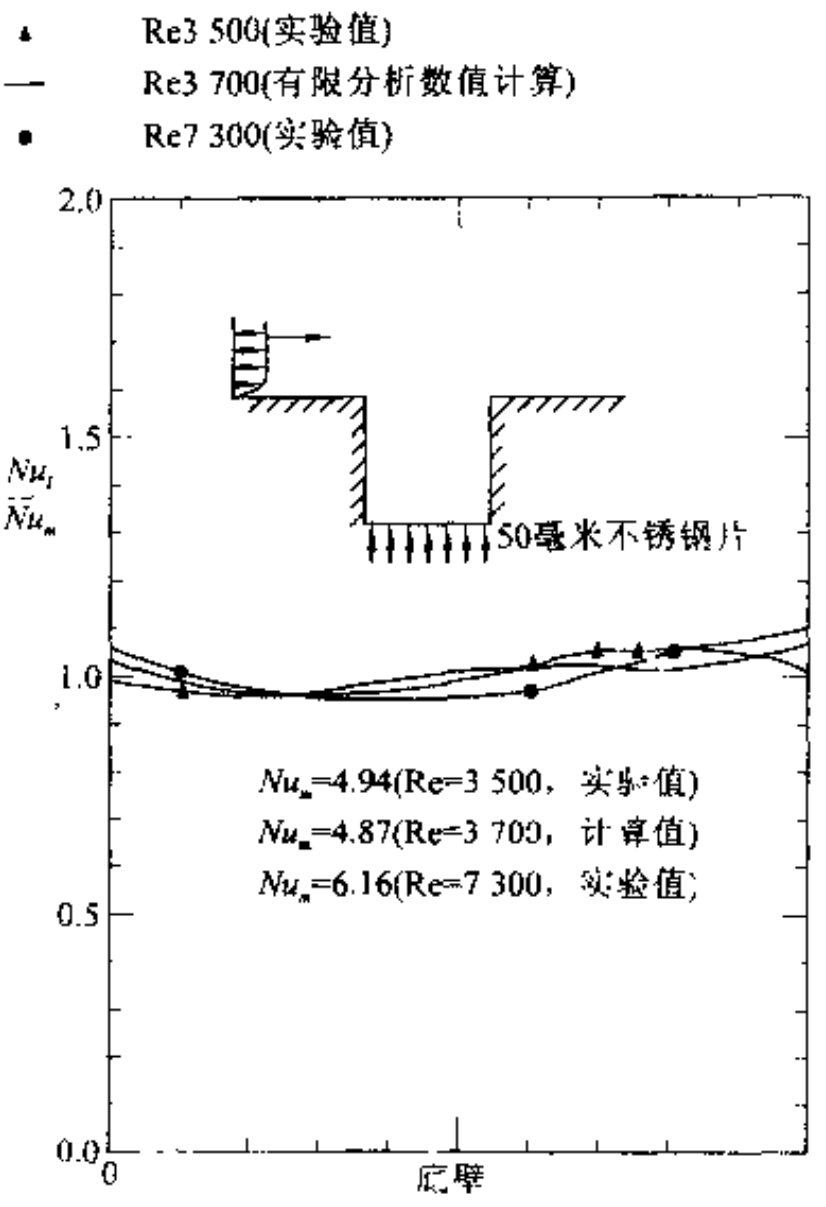


图4.19　1:3长方形槽穴流动的有限分析计算结果(Re=400) (31×91)

这些计算结果与试验结果一致，见图 4.20 中曲线比较。



(a)边界层流过方形槽穴的有限分析计算结果
(等热流图，Re=3 700，Pr=0.7，ΔQ=0.012)



(b)边界层流过方形槽穴的有限分析计算结果
和风洞试验的比较(沿底壁的热传分布)
Nu_l—当地努塞尔特数；Nu_m—平均努塞尔特数

图4.20　边界层流动方形槽穴的有限分析计算结果和风洞试验的比较（沿底壁的热传分布）

为了验证有限分析法，可选用有实验结果的例子进行计算，以便有数值量的比较。图 4.20 是日本北海道大学在低速风洞边界层流过方形槽穴实验的示意图，穴的两侧是绝热壁，底部垫有 50 μm 的不锈钢薄片给予定常加热。

有限分析法可以进一步应用于抛物型不定常方程

$$\Phi_t + u\Phi_x + v\Phi_y = \frac{1}{\mathrm{Re}}(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) + G$$

三维问题

$$\Phi_t + u\Phi_x + v\Phi_y + w\Phi_z = \frac{1}{\mathrm{Re}}(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) + G$$

这里一些成果有待不断的改进，详细结果可以参看有关论文。

4.2.5　有限分析法 (F. A. M) 的发展特色及问题

陈景仁教授 (C. J. Chen) 在 1977 年提出有限分析法，在单元内控制方程局部分析解，单元边界的近似解组成整体数值解，是对于差分法与有限元法的一种改进，以达到比较好的保持原有问题的物理特性的目的。有限分析法得到的有限分析解是可微的。它具有自动迎风

效应，稳定性好，精度高等特点，在发展有限分析法的研究中，许多人都作出了贡献，就目前情况而言大部分成功算例还局限于二维情况。

任何一种新方法的出现都会导致领域的拓宽和发展，但同时，也带来新的困难和麻烦，若处理不当，其有效性和适应能力就会降低，甚至还不如原有方法有效，我们和国内其他用有限分析的人一样，有十多年的历史，在使用过程中发现有以下问题求证于国内同行们。

a. 从 FA 方法应用的类型看，最早有限分析法着手处理是 Laplace 方程与 Poisson 方程，即二阶偏微分算子∇^2，有人证明，*FA* 方法与差分 9 点格式一样，可以达到六阶精度即$O(h^6)$，这也可能是 Laplace 算子的最高精度了。但对$\nabla^2\Phi=0$与$\nabla^2\Phi=f$这类方程，除了差分法 9 点格式可用外，对于椭圆型方程如势流等边值问题，有限元法已研究得很充分并特别有效。用 FA 方法必要性不大。

对于波动方程（双曲型方程）由于它有特征线方向“迎风”效应和间断面问题，虽然 FA 方法曾企图跨入波动问题，但一直没有奏效，到现在为止，还没有在波动问题上 FA 方法的成功算例。

FA 方法由二阶椭圆算子推广到抛物型方程跨进了一步，比较多的成熟的算例在对流扩散方程，$\Phi_{yy}+2A_y\Phi_y=G$。它试图适应高、中、低雷诺数Re 的计算而保持自动迎风特点。它对扩散的表达，采用反映长波效应的指数衰减逼近，即 FA 系数中包含e^{-Ah}的因子。

b. 关于 FA 法自动迎风问题，在单元中边界近似方面，有人采用直线分段逼近，或二次多项式$\Phi_i(y)=a_0+a_1y+a_2y^2$逼近，C. J. Chen 最后选定$\Phi_i(y)=a_0+a_1y+a_2e^{-2Ay}$近似，其中因子$e^{-2Ay}$体现了扩散的物理性质，即所谓长波效应。虽然分段线性分布，二次多项式和指数线性分布，都可作为对流扩散方程特解，但二次式会出现负系数，指数线性分布在*Re* 较大时，二维 $Ah\geqslant 50$，三维 $Ah\geqslant 30$时，FA 系数就会从自动迎风，很快地变为简单迎风，即迎风点的系数为 1，其余为 0，如果是简单迎风格式也就失去了 FA 法的优越性。

c. 关于 FA 系数的计算，对二维问题要求周围 8 个点的 FA 系数，这些系数计算时要求交错级数和，二维要保证精度至少要求到 10 项至 12 项，三维 27 点格式则要求周围 26 点的 FA 系数，而要求双重交错级数就要更加烦难。当$Ah=Bk=CL=20$时，8 位有效字长，准确值还有两位，而当$Ah=Bk=CL=30$时，4 位有效数值不再是准确的了，计算结果将失真。有人采用加长计算有效字长的办法，造成插值表，二维要 500 字的表，三维则需 4 万字的表，或者加大交错级数的计算项数，而这将大大地增加计算时间，就三维而言，这是很不经济也不现实的办法。实际上 FA 法已经比较慢了，二维紊流$k-\varepsilon$模型计算差分法要 1 小时，FA 法要 4 小时才可达到同样的精度。

d. FA 网格点布置：通常 FA 法二维问题为 9 点格式，三维为 27 点格式，如为不定常流须再加两至三个时间差分离散点。能不能二维不用 9 点，减少一些点而用 5 点，这样算起来不是简单一点吗？这里要十分注意斜迎风 (Skew - up - Wind) 问题。在斜迎风情况角点 FA 系数值最大，这只有 9 点能反映这一情况，五点格式则不能，所以算旋涡回流老是不理想。能否在空间点的计算上用 FA 法与差分点结合也存在这个问题，在 FA 法的应用与改进方面既要有严格的数学基础作指导，又要有深刻的流体流动的物理背景为依托，才能使 FA 法获得实质性的进展。

e. FA 法的收敛性、稳定性的数学证明，除 Laplace 算子外，对流扩散方程由于它的非线性并没有真正求得，有些已被发现是站不住脚的。计算稳定与否也是依赖数值实验的检验，精度也只是满足一定的工程要求而已。

关于FA法在紊流模型方面的应用及三维FA法的某些探索与改进，将在后面章节去介绍。

§4.3 水动力学N−S方程原参数解

4.3.1 概述

随着现代计算机技术和数值计算理论的高度发展，越来越多的流体力学问题都可以用数值方法成功地进行模拟，数模和物模的比重已由20世纪60年代后期3:7提高到目前的7:3。流体力学中很多数学模型的建立常常从N−S方程入手，但是动量方程中含有压力梯度项，在不可压缩流 N−S 方程中没有可以单独直接求解压力的方程。在二维问题中，通过交叉微分两个动量方程来消去压力，导出一个涡量输运方程，形成流函数涡量法。但壁面上的涡量常常难以给定。此外，由涡量求出压力所付出的代价也很大，并且流函数涡量法不能方便地推广到三维问题。

目前压力场的求解方法很多，常用的有求解压力泊松方程法和压力修正法。数值模拟时，计算网格的生成也是一个重要环节，对于复杂区域的求解，可以先采用坐标变换变成在规则区域内求解，也可以根据需要选择均匀网格、非均匀网格、矩形网格、三角形网格，正常网格和非正常网格等不同方案。采用交错网格计算可以避免出现与实际物理意义相悖的锯齿形压力场和波形速度场。迭代方法也很多，一般采用SIMPLE系列以及其它在此基础上改进的迭代方法。下面分别用正常网格和交错网格，逐点法和逐行法对平板泊肃叶流动进行了有限分析计算，并对边界条件处理、压力迭代技术、收敛速度以及速度压力收敛的同步性等方面结合算例作了探讨。

4.3.2 数学模型及计算方法

(1) 控制方程

恒定不可压缩流体层流运动的流体力学控制方程为

连续方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{4.3.1}$$

动量方程

$$u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \tag{4.3.2}$$

(2) 速度有限分析公式

将动量方程写成如下形式

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}=2A_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+g \tag{4.3.3}$$

$$2A_i=\mathrm{Re}\cdot u_i \tag{4.3.4}$$

$$g=\mathrm{Re}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.3.5}$$

由有限分析法可得

$$(u_i)_p=\sum_{n=1}^{m} C_n(u_i)_n-\mathrm{Re}C_p\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.3.6}$$

(3) 压力有限分析公式

引入试速度 $\hat{u}$，将速度 u 分解成试速度和压力梯度两项，则有

$$(u_i)_p=(\hat{u})_p-G_p\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.3.7}$$

其中

$$G_p=\mathrm{Re}\cdot C_p \tag{4.3.8}$$

$$(\hat{u}_i)_p=\sum_{n=1}^{m} C_n\cdot(u_i)_n \tag{4.3.9}$$

将 (4.3.7) 式用于整个求解区域并代入连续方程得到对流扩散方程形式的压力方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}=2A_i'\frac{\partial p}{\partial x_i}+g' \tag{4.3.10}$$

$$2A_i'=-\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial x_i} \tag{4.3.11}$$

$$g'=\frac{1}{G}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} \tag{4.3.12}$$

由有限分析法可得压力 p 的有限分析公式

$$p_p=\sum_{n=1}^{m} C_n'p_n-Cp\,g_p' \tag{4.3.13}$$

一般来讲，并非一次迭代就可以得到 u_i，p 的精确解，我们把由公式 (4.3.6) 和 (4.3.13) 求出 u_i，p 当作一个中间过程的近似值，相应记为 u_i^*，p^*，且有以下关系

$$u_i^*=\hat{u}_i^*-G\frac{\partial p^*}{\partial x_i} \tag{4.3.14}$$

u_i^* 并不满足连续方程，必须找到压力和速度的修正公式，在迭代过程中修正速度和压力，使得求出的速度满足连续方程，设 p' 和 u' 分别为压力修正和速度修正，p 为修正后的压力，且 $p=p^*+p'$，$u=u^*+u'$，由 p 求出的速度场 u 是满足连续方程的，这时有

$$u_i=\hat{u}_i-G\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.3.15}$$

由 (4.3.15) − (4.3.14) 式有

$$u_i' = \hat{u}_i - G\frac{\partial p'}{\partial x_i} \tag{4.3.16}$$

将 (4.3.16) 式代入连续方程可得出与压力方程类似的压力修正方程

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 2A_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i} + g' \tag{4.3.17}$$

其中

$$2A_i' = -\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial x_i} \tag{4.3.18}$$

$$g' = \frac{1}{G}\frac{\partial \hat{u}_i'}{\partial x_i} \tag{4.3.19}$$

压力修正的有限分析公式为

$$p_p' = \sum_{n=1}^{m} C_n' p_n' - C_p' g_p' \tag{4.3.20}$$

(4) 压力及压力修正的另一种方法

这种压力求解方法常在交错网格下运用，交错网格中 U，V，P 位置如图 4.21 所示，速度U 的位置落在 x 方向连接两相邻网格点的联线上，V 的位置落在 y 轴方向连续两相邻网格点的联线上 (不一定为中心)。

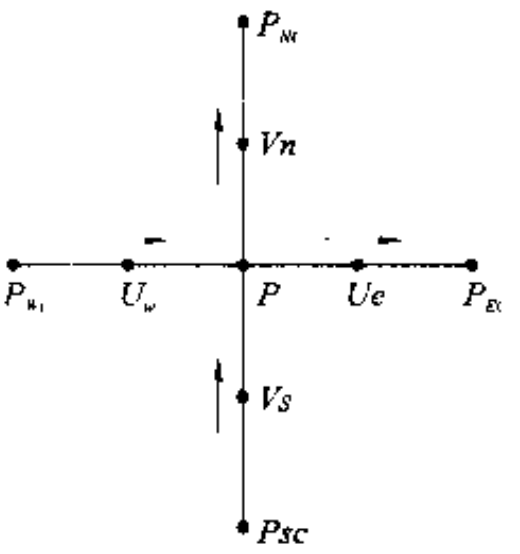


图4.21　交错网格中U、V、p量示意图

对 (4.3.7) 式离散化得

$$U_e = \hat{u}_e + \frac{G}{hx}(P_{ie} - P) \tag{4.3.21}$$

在点 n，w，s 也得到相应 U_w、V_n、V_s，代入下列离散化的连续方程

$$\frac{U_e - U_w}{hx} + \frac{V_n - V_s}{hy} = 0 \tag{4.3.22}$$

可以得到压力公式

$$a_p P_p = a_e P_{ie} + a_n P_{ne} + a_w P_{iw} + a_s P_{se} - D \tag{4.3.23}$$

其中

$$a_e = \frac{G_e}{hx^2}, \qquad a_i = \frac{G_n}{hy^2}$$

$$a_s = \frac{G_s}{hy^2}, \qquad a_w = \frac{G_w}{hx^2}$$

$$a_P = a_s + a_n + a_e + a_w \tag{4.3.24}$$

$$\hat{D} = \frac{\hat{U}_e - \hat{U}_w}{hx} + \frac{\hat{V}_n - \hat{V}_s}{hy} \tag{4.3.25}$$

同理，将 (4.3.16) 式中的$\frac{\partial p}{\partial x_i}$离散化，代入离散化的连续方程，得到压力修正公式

$$a_P P'_P = a_e P'_E + a_w P'_W + a_n P_N + a_s P'_S - D' \tag{4.3.26}$$

其中 a_P、a_e、a_w、a_n、a_s 与 (4.3.24) 式相同

$$D' = \frac{U'_e - U'_w}{hx} + \frac{V'_n - V'_s}{hy} \tag{4.3.27}$$

(5) 求解压力、速度的迭代步骤

①由一个估计的速度场开始。

②计算有限分析系数，同时求出试速度 $\hat{U}$, $\hat{V}$。

③计算压力场，在正常网格时，用有限分析公式 (4.3.13) 求解，在交错网格时用压力公式 (4.3.23) 求解。

④把这个压力场当作试算的压力场 p' (不精确的压力场)，用动量方程求出相应的速度场 U', V'。

⑤计算质量源，按相应的公式求出压力修正 p'。

⑥用压力修正 p' 修正速度，但不修正压力。

⑦返回第②步，并重复②~⑥步，直到收敛为止。

4.3.3 算例及结果分析

(1) 算例

以平板间的泊肃叶流动为例，在正常网格和交错网格下进行有限分析计算，如图 4.22 所示，由于是对称流动，取下半部分来计算。

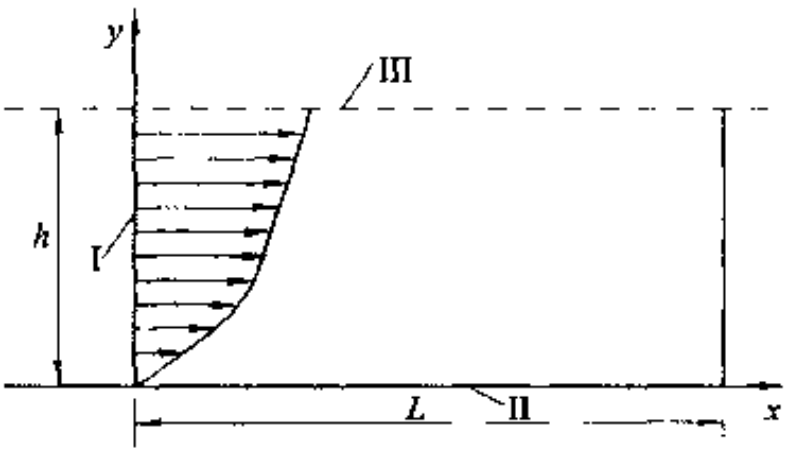


图4.22 Poiseuille流动示意图

(2) 边界条件及其离散化格式

边界 I：

给定流速U和压力梯度 p_x，令 $p_x = \frac{-12}{R_e}$。

$$V = 0$$

边界 II：

$$\overline{U} = V = 0$$

由动量方程推导出 $p_y = \frac{1}{\mathrm{Re}} V_w$

由泰勒展开公式可以得到下列离散化后压力公式：

$$p_{i,1} = \frac{1}{3}(4p_{i,2} - p_{i,3}) + \frac{2}{3h_x \mathrm{Re}}(2V_{i,2} - V_{i,3}) \tag{4.3.28}$$

边界III：

$$p_x=\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot V_x$$

压力推导 (4.3.28) 式同样地离散化，这是对称面边界，应有

$$\frac{\partial U}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial V}{\partial y}=0 \tag{4.3.29}$$

当网格划分不是很密时，(4.3.29) 式离散后就不能精确，误差较大，对速度 U 宜采用由离散的连续方程推导得来的公式

$$U_{i,j}=\frac{1}{2}(U_{i+1,j}+U_{i-1,j})+\frac{hy}{4hx}(V_{i+1,j-1}-V_{i-1,j-1}) \tag{4.3.30}$$

(3) 计算结果

采用正常网格和交错网格都能得到收敛结果，并且都与理论解非常吻合，结果如下所示。

(4) 分析和比较

a. 交错网格下压力方程及压力修正方程的边界条件

在边界上给定法向速度时，如图 4.23 所示，边界上速度 U_w 已知。在推导 p 或 p' 方程时，边界上的速度是用 U_w 本身表示而不是用 U_w 表示，p 或 p' 方程中将不出现 p_w 或 p'_w，公式中的 a_w 将为 0，我们就不需要有关 p_w 或 p'_w 的任何信息了。

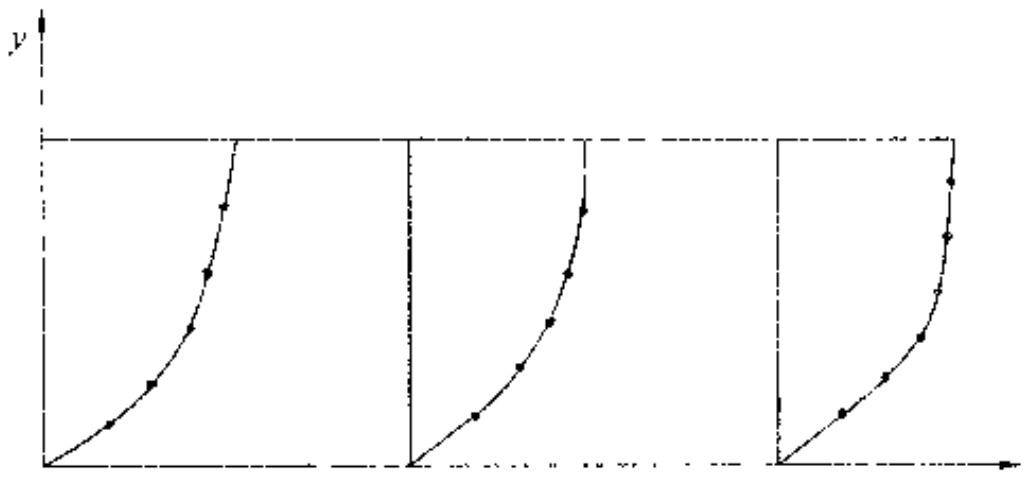


图4.23　Poiseuille流动速度分布图

b. 迭代过程中压力场的处理

从压力修正方程 (4.3.27) 式可以看出，p' 与 $p'+c$ (c为某一常数) 都满足 p' 方程，因的压力修正是一个相对变量，而不是一个绝对变量。取某点的压力值作为参考值，再计算各点压力对该考点的相对压力修正，每次迭代求 p' 前，把 $p'=0$ 作为所有点上的估计值，这样处理使 p' 的绝对值不会很大，减小误差积累，增加求解的稳定性。对压力场也作了类似的处理。数值计算表明，未作如上处理时，当迭代到速度压力收敛后，速度仍在精确度范围内有微小变化，从而引起压力的变化，虽然压力也可以是收敛的，但压力迭代误差会随迭代次数增加出现振荡现象，并且整个压力场在压力和速度都收敛后仍会向同时增大或同时减小的方向变化。利用压力及压力修正的相对性作如上处理后可以避免压力不收敛于某一固定压力现象，并且加快了速度收敛，如图 4.24 和 4.25 所示。

c. 两种压力求解方法的比较

两种方法都是将速度分解成试速度和压力梯度两项得到 (4.3.9) 式，再代入连续方程得

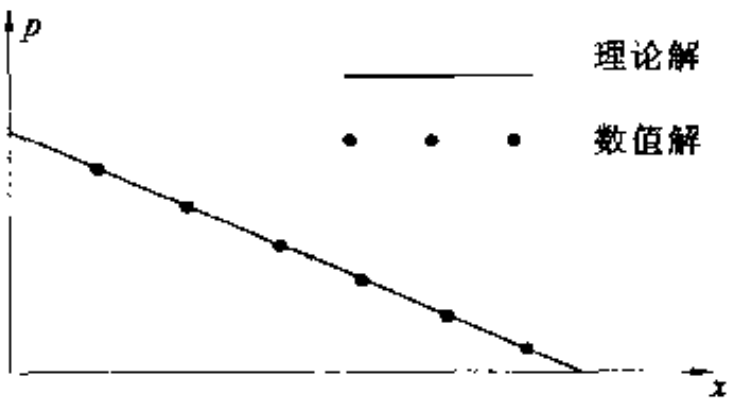


图4.24　Poiseuille流动压力分布图

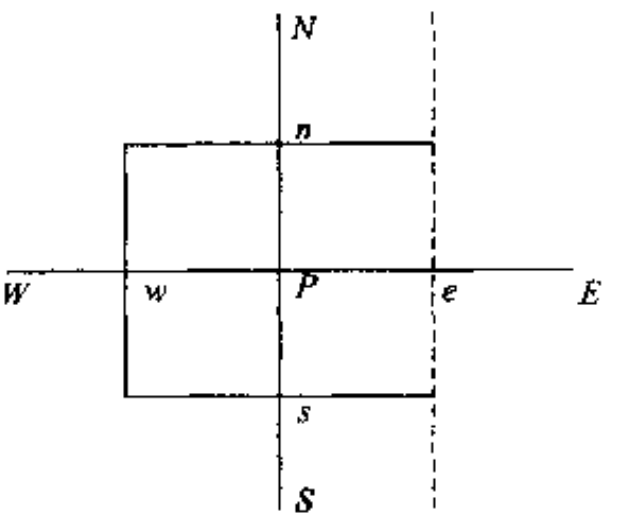


图4.25　压力方程边界条件

到相应的公式。第一种方法是直接将 (4.3.9) 式代入连续方程得到关于 p 的对流扩散方程，再求解压力的有限分析公式；第二种方法先将 (4.3.9) 式中的压力梯度项离散后代入连续方程直接得到压力公式 (4.3.23)。第一种压力求解方法用的是有限分析法，考虑了所求压力点周围 8 个网格上的压力对该点的影响。但是在迭代过程中需求有限分析系数，从而增加了计算量，影响了计算速度。第二种方法只考虑了所求压力点周围 4 个网格点上的压力对该点的影响，但不需求有限分析系数，很容易用逐行法求解。这两种方法建立的基础是相同的。

d. 逐点法与逐行法的比较

逐点法比较简单明了，而逐行法计算格式复杂些，但它的收敛速度比逐点法快，因为不论沿追赶行有多少个结点，在追赶行两个端点的边界条件信息可以立即传送到计算区域的内部。对于需要利用边界条件信息的问题采用逐行法，对于不需要利用边界条件信息，例如压力修正方程，使用逐行法则意义不大，使用逐点法反而更明了一些。

e. 正常网格下与交错网格下有限分析法比较

一个以交错网格为基础的程序必须提供有关速度分量位置的全部指示值与几何信息，有时还要进行相当繁琐的内插，正常网格则节省了这部分工作量，并且简单明了；采用正常网格计算理论上有可能产生不合理的锯齿形压力场和波形速度场，采用交错网格后可以完全避免这种情形的发生，并且两相邻网格点之间的压力差成了位于这两个网格之间的速度分量的自然驱动力，迭代收敛的结果不会是锯齿形压力场和波形速度场；很多问题边界上压力难以给定或难以估计，一旦给定的边界压力不合理，会对整个计算的稳定性和收敛性产生很大影响，采用交错网格后，不必提供边界上的压力信息使得计算简单而准确。

通过上述分析和数值计算，可以得出如下结论：

①采用有限分析法在正常网格和交错网格下，对于 N−S 方程进行数值计算，方法都是可行的，结果是可靠的，数值解与理论解吻合得非常好。正常网格和交错网格各有优缺点，交错网格比正常网格复杂，但在计算速度压力耦合方程时无须给出边界压力，可以避免生产满足连续方程而又不合理的速度场与压力场，因而现在求解 N−S 方程和 $K-\varepsilon$ 模型时，常采用交错网格。

②两种求解压力及压力修正方法建立的基础相同，但分别是从有限分析法 (FA) 和差分方法 (FD) 的角度来求解，分别称作 FA 压力法和 FD 压力法。这两种方法和压力计算结果比较接近，但 FA 压力法需先求 FA 系数，因而比 FD 压力法的计算量大，计算速度稍慢。

③利用压力及压力修正的相对性，对压力及压力修正迭代作了适当处理后，避免了压力振荡，使压力收敛于一稳定的压力场，并且加快了收敛速度，从而使速度与压力几乎是同步

收敛。

④当初始速度估计值与收敛的速度场偏离很远时，正常网格下逐点法求解比交错网格下逐行求解收敛得慢。因此对初始迭代的速度场不易估计的问题，采用逐行法求解，可以更快更有效地利用边界条件值，从而大大提高收敛速度。

§4.4 流场中适体坐标变换与网格生成

为了适应河流、水库等流动区域的不规则形状，我们采用曲线坐标 $\xi^i(\xi, \eta)$，代替笛卡尔坐标 $x^i=(x, y)$。

4.4.1 坐标变换

x^i 为物理空间的坐标系（一般为笛卡尔坐标），其坐标基向量为 $\boldsymbol{e}_i$，而 ξ^i 为计算空间的坐标系（一般为曲线坐标），其坐标基向量为 $\boldsymbol{g}_i$，如果两者存在着对应关系，

$$\xi^i=\xi^i(x^j),\quad x^i=x^i(\xi^j) \tag{4.4.1}$$

$i, j=1, 2, 3$，为上指标，不是方次，空间一点的位置，以向径表示

$$\bar{r}=\bar{r}(\xi^i)=\bar{r}(x^j)$$

$\boldsymbol{e}_i$ 为单位正交基，有 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{g}_j=\delta_{ij}$ 的关系，$\boldsymbol{g}_i$ 则一般为非单位、非正交基。

$$\mathrm{d}\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j=\beta_j^i\mathrm{d}x^j \tag{4.4.2a}$$

$$\mathrm{d}x^i=\frac{\partial x^i}{\partial\xi^j}\mathrm{d}\xi^j=\alpha_j^i\mathrm{d}\xi^j \tag{4.4.2b}$$

其中 ∂_j^i，β_j^i 称为正、逆变换系数，写作

$$\alpha_j^i=\begin{bmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2\\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_\xi & x_\eta & x_\zeta\\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta\\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta\end{bmatrix} \tag{4.4.3}$$

而坐标基的变换为：

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi^i}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial\xi^i}=\alpha_i^j;\quad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^j}=\alpha_i^j\boldsymbol{e}_j \tag{4.4.4a}$$

$$\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^j}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi^i}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}=\beta_j^i\boldsymbol{g}_i \tag{4.4.4b}$$

其中 α_j^i 是由旧坐标基 $\boldsymbol{e}_j$ 到新坐标基 $\boldsymbol{g}_i$ 的变换系数，故称为正变换系数。

按照空间微元弧长作为度量空间两点间的距离。

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = dx^k dx^k = d\xi^i \boldsymbol{g}_i \cdot d\xi^j \boldsymbol{g}_j$$

$$= d\xi^i d\xi^j \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \tag{4.4.5}$$

其中$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j$，称为度量张量 (Metric Tensor) 的协变分量。它是二阶对称张量。

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \xi^j} = \alpha_i^k \alpha_j^k \tag{4.4.6}$$

即

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2$$

$$g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2$$

$$g_{33} = x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2$$

$$g_{12} = g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi x_\eta + z_\xi x_\eta$$

$$g_{23} = g_{32} = x_\eta x_\zeta + y_\eta x_\zeta + z_\eta x_\zeta$$

$$g_{31} = g_{13} = x_\zeta x_\xi + y_\zeta y_\xi + z_\zeta z_\xi$$

4.4.2 网格生成

为了利用适体坐标数值地生成网格，可以在一般曲线坐标ξ^i下解泊松方程$\nabla^2 \Phi^k = f^k$，令$\Phi^k = x^k$，求等坐标线ξ^i上的x^k值，形成网格线。

曲线坐标下

$$\Delta^2 \Phi^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\sqrt{\partial \zeta^j}} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial \Phi^k}{\partial \xi^j} \right) = f^k \tag{4.4.7}$$

式中g^{ij}为度量张量的逆变分量，$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \frac{G^{ij}}{g}$而$g = |g_{ij}|$为度量张量$g_{ij}$的行列式值。$G_{ij}$为$g_{ij}$的代数余子式组成的矩阵，$J = \sqrt{g}$，在数值计算中，

$$G^{11} = gg^{11} = g_{22}g_{33} - (g_{23})^2,$$

$$G^{22} = gg^{22} = g_{11}g_{33} - (g_{13})^2,$$

$$G^{33} = gg^{33} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2,$$

$$G^{12} = gg^{12} = g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33}$$

$$G^{13} = gg^{13} = g_{12}g_{23} - g_{12}g_{22}$$

$$G^{23}=gg^{23}=g_{12}g_{13}-g_{23}g_{12}$$

$$g=g_{11}g_{22}g_{33}+2g_{12}g_{13}g_{23}-g_{11}(g_{23})^2-g_{22}(g_{13})^2-g_{33}(g_{12})^2 \tag{4.4.8}$$

当$\Phi^l=x^l$时方程 (4.4.7) 可写成

$$y^{ll}\frac{\partial^2 x^k}{\partial\xi^l\partial\xi^l}+F^l\frac{\partial x^k}{\partial\xi^l}=R^k \tag{4.4.9}$$

式中$F^l=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi^l}(Jg^{ll})$，而$R^k$为控制网格疏密程度的参数。

坐标变换与网格生成一般地说不限于正交，如果ξ^l是正交的或者是近似正交的，则上式的计算较为简单，因为此时$g_{ij}\approx 0$，$(i\neq j)$，由于此时的正交性是因数值而生成，只是近似而非解析的，在一些奇异点上做不到完全正交。

在二维情况下

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix},\qquad g^{ij}=\begin{bmatrix}g_{22} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{11}\end{bmatrix}\frac{1}{g} \tag{4.4.10}$$

其中$g_{11}=x_\xi^2+y_\xi^2$，$g_{12}=g_{21}=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta$，$g_{22}=x_\eta^2+y_\eta^2$，

对于正交曲线坐标，$g_{12}=g_{21}=0$，$g=g_{11}g_{22}$

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}g_{11} & 0\\ 0 & g_{22}\end{bmatrix},\qquad g^{ij}=\begin{bmatrix}g_{22} & 0\\ 0 & g_{11}\end{bmatrix}\frac{1}{g}=\begin{bmatrix}\frac{1}{g_{11}} & 0\\ 0 & \frac{1}{g_{22}}\end{bmatrix}$$

正交曲线坐标的变换也可以采用 Lame 系数形式H_1，H_2，H_3代入，简化书写形式。

如果函数Φ^l是几何坐标x_k，则对正交曲线坐标看来，有

$$gg^{ll}\frac{\partial^2 x_k}{\partial\xi^{l2}}+\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial\xi^l}(\sqrt{g}\,g^{ll})\frac{\partial x_k}{\partial\xi^l}=P_k g$$

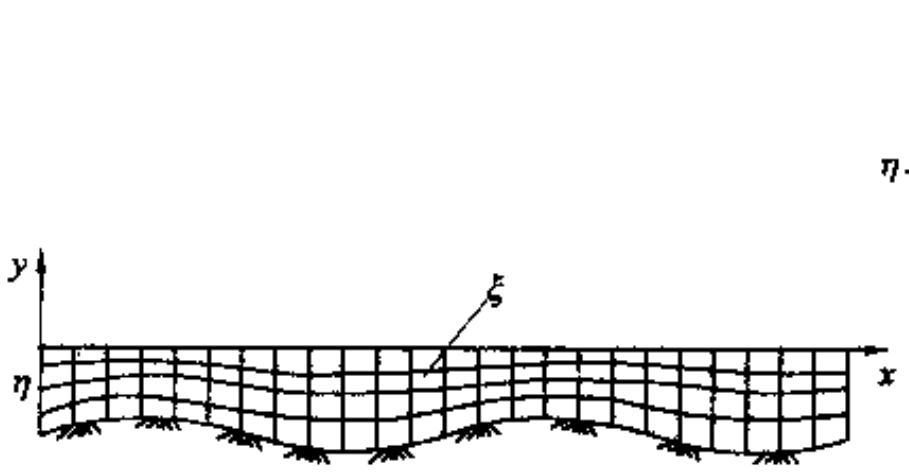
或
$$g_{22}x_{\xi\xi}+g_{11}x_{\eta\eta}+\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\right)x_\xi+\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\right)x_\eta=gP \tag{4.4.11a}$$

$$g_{22}y_{\xi\xi}+g_{11}y_{\eta\eta}+\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\right)y_\xi+\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\right)y_\eta=gQ \tag{4.4.11b}$$

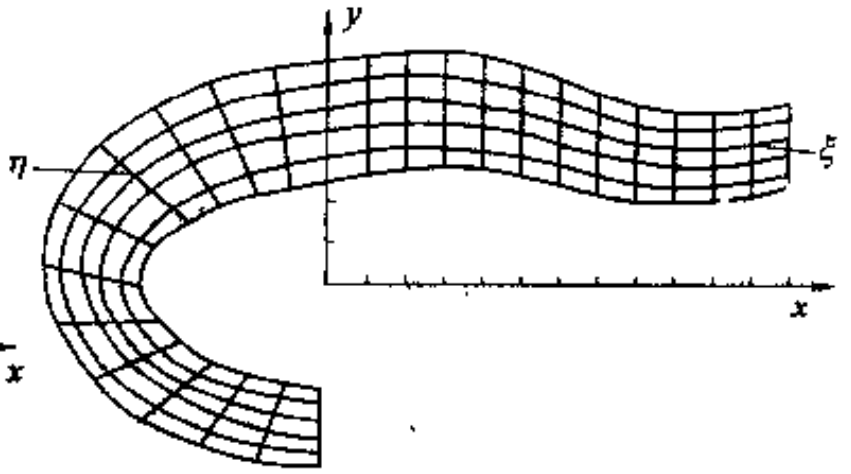
以ξ^l为自变量，就可以用上式算出正交曲线网格上的x_k值，x_k为适体 (body-fitted) 坐标，P，Q为适体坐标疏密控制函数，图 4.26 给出适体坐标变换的例子。

一般曲线坐标变换把流场中实际不规则的物理空间区域变换为计算空间上规则的矩阵形网格上进行，如果ξ^l为正交的所计算出的网格即成为势流流网，它在网格生成的同时，也解决了势流计算问题。而在此基础上解 N. S 方程则需要对场中梯度、散度、旋度等算子运算，变换成一般曲线坐标形式。

梯度：



(a) 三维河道纵剖面的二维及网格



(b) 三维河道水平剖面的二维及网格

图4.26　三维河道纵横剖面的二维及网格

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_j=g^{ij}\frac{\partial f}{\partial \xi^i}\boldsymbol{g}_j=\frac{G^{ij}}{g}\frac{\partial f}{\partial \xi^i}\boldsymbol{g}_j=\frac{1}{J}b_j^i\frac{\partial f}{\partial \xi^i}\boldsymbol{e}_j$$

式中$(\alpha_i^j)^{-1}=(\beta_i^j)=\frac{1}{J}b_i^j$，$b_i^j$为$\alpha_i^j$的代数余子式的元素所组成的矩阵的转置阵。

$$b_1^1=y_\eta z_\zeta-y_\zeta z_\eta\,,\quad b_2^1=y_\eta z_\zeta-y_\zeta z_\eta$$

$$b_1^2=z_\eta x_\zeta-x_\eta z_\zeta\cdots$$

N. S 方程写作：

$$\nabla_i U^i=0$$

$$\frac{\partial U^i}{\partial t}+U^j\nabla_j U^i=B^i=\frac{1}{\rho}g^{ij}P_{,j}+\nu g^{jk}\nabla_j\nabla_k U^i$$

式中∇_j为协变导数，U^i为速度的逆变分量，具体的表述相当繁琐这里不再列出。

对于二维流函数、涡量方程可写之如下：

$$\alpha\psi_{\zeta\zeta}-2\beta\psi_{\zeta\eta}+\gamma\psi_{\eta\eta}+\varphi\varphi_\zeta+\sigma\psi_\eta+\Omega J^2=0$$

$$J^2 Re\omega_t+(JRe\psi_\eta-\tau)\Omega_\zeta+(-JRe\psi_\zeta-\sigma)\Omega_\eta-\alpha\Omega_{\zeta\zeta}-\gamma\Omega_{\eta\eta}=-2\beta\Omega_{\zeta\eta}$$

式中

$$\alpha=x_\eta^2+y_\eta^2\,,\quad \beta=x_\zeta x_\eta+y_\zeta y_\eta\,,\quad \gamma=x_\zeta^2+y_\zeta^2$$

$$\sigma=(y_\zeta Lx-x_\zeta Ly)\frac{1}{J},\qquad \tau=(x_\eta Ly-Y_\eta Lx)\frac{1}{J}$$

$$Lx=\alpha x_{\zeta\zeta}-2\beta x_{\zeta\eta}+\gamma x_{\eta\eta}\,,\qquad Ly=\alpha y_{\zeta\zeta}-2\beta y_{\zeta\eta}+y_{\eta\eta}$$

由此可以得到计算二维流函数、涡量的经几何坐标变换后的方程。

§4.5 有限体积法

有限体积法 (Finite Volume Method，简称 FVM)，又称为有限容积法或控制体积法，其基本思想是：围绕每个网格结点取一系列互不重复的控制体，在每个控制体上利用物理量的守恒关系建立结点的离散方程，其中为了得到界面上通量的离散关系式，必须假设物理量在结点间的近似变化规律 (局部近似)。所以有限体积法兼有限元法和差分法特点，其网格划分与差分法类似，而从取控制体和局部近似看又类似有限元法。

有限体积法的最突出的优点是：物理概念清晰，离散化方程就是物理量在控制体上的守恒关系式；又由于在每个控制体乃至整个区域上保证满足了守恒关系，因而即使在网格划分较粗的情况下也可以得到符合物理规律的解。

物理量在流体中的输移应满足以下守恒型控制方程

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{J}=S\text{，或}\qquad\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}+\frac{\partial J_i}{\partial x_i}=S \tag{4.5.1}$$

其中：ϕ 为单位质量流体中所含的某物理量 (如：质量、动量或能量等) 的大小；源项 S 为单位体积流体中该物理量的产生速率。$\boldsymbol{J}$ 为通量矢量，在 x_i 方向上的分量 J_i 是单位时间内通过垂直于 x_i 轴的单位面积的该物理量的流量，表达式可写成

$$J_i=\rho u_i\phi-\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{4.5.2}$$

右端第一项为对流项，是随流动输移的物理量通量，其方向取决于流动方向，下游对上游没有影响；后一项为扩散项，是物理量由于粘性、分子扩散或紊动等原因而产生的扩散通量，其方向指向ϕ 小的一侧，Γ 为扩散系数，与动力粘性系数 μ 具有同样的量纲。

将式 (4.5.2) 代入方程 (4.5.1) 中得

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)+S \tag{4.5.3}$$

为各种物理量在流体中随流输移和扩散过程所遵循的通用形式基本微分方程，它在不同的具体问题中表现为不同的具体形式。当物理量为流体自身质量时，$\phi=1$，$\Gamma=0$，$S=0$ (不存在质量源项时)，得到连续性方程 (4.5.47)；若物理量为不可压缩流体的动量时，在 x_i 方向上 $\phi=u_i$，$\Gamma=\mu$，源项 $S=\rho g_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}$，便得到 Navier - Stokes 方程 (4.5.48)；若混合在单位体积的不可压缩流体中的某种物质的含量 (浓度) 为 c，则 $\phi=\frac{c}{\rho}$，$\Gamma=\rho D$ (D为分子扩散系数或紊动扩散系数)，便得到该物质在流体中的对流扩散方程。

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial(u_i c)}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)+S$$

物理量的守恒律有时采用如下积分方程形式更为方便：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\phi\,\mathrm{d}V+\int_{cs}\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int_{cv}S\,\mathrm{d}V \tag{4.5.4}$$

其中 cv 为所取的某一充满流体的空间体积，称为控制体，其边界界面为控制面 cs，而

$$\boldsymbol{J}\mathrm{d}\boldsymbol{A}=J\cos(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}A=J_x\cos(n,\ x)\,\mathrm{d}A=J_n\mathrm{d}A \tag{4.5.5}$$

$\boldsymbol{n}$ 为控制面的外法向单位矢量，$\boldsymbol{J}_n$ 为 $\boldsymbol{J}$ 在 n 方向的分量，则积分方程又可写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\phi\,\mathrm{d}V+\int_{cs}J_n\,\mathrm{d}A=\int_{cv}S\,\mathrm{d}V \tag{4.5.6}$$

其物理意义是：单位时间内，控制体内某物理量总量的增加与控制面上该物理量的净输出量之和等于控制体内部源项所产生的增量。

4.5.1 一维问题的有限体积法

首先以一维问题为例来说明有限体积法的基本思想和步骤。一维问题各要素为时间 t 和坐标 x 的函数，通量形式的守恒型方程为

$$\frac{\partial\rho\phi}{\partial t}+\frac{\partial J}{\partial x}=S \tag{4.5.7}$$

流速为 u，通量

$$J=J_x=\rho u\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{4.5.8}$$

利用有限体积法的求解方程 (4.5.7) 的步骤如下：

①划分网格，取结点 $x_{i+1}=x_i+\delta x_i$ $(i=0,\ 1,\ 2,\cdots)$，δx_i 为结点间距。网格可以是均匀的，也可以是不均匀的。

②利用守恒型方程 (4.5.7) 的积分对任一内部结点P 构造离散化的代数方程。

③根据边界条件构造边界结点的离散方程，从而得到一封闭的代数方程组。

④求解方程组得到各结点上的ϕ 值。

以上步骤与差分法的主要区别在于其离散化方程的构造，具体介绍如下。

4.5.1.1 离散格式

在内部结点P 上构造方程式 (4.5.7) 的有限体积法离散格式时，先要以P 为中心取有限大小的控制体见图 4.27，体积为 $1\times1\times\Delta x$，这就是所谓“有限体积”，w、e 分别表示控制体的左、右界面。

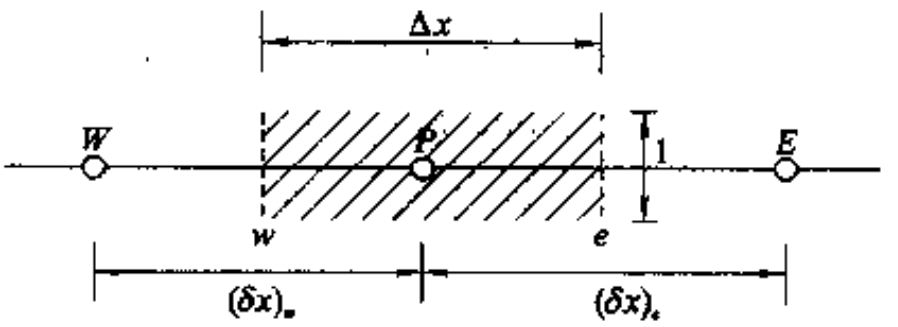


图4.27 网格与控制体示意图

在控制体上对方程 (4.5.7) 式积分 $1\times1\times\int_w^e\left(\frac{\partial\rho\phi}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}x}-S\right)\mathrm{d}x=0$ (这实际上相当于权函数$w=1$ 的加权余量法)，得

$$J_e-J_w+\int_w^e\left(\frac{\partial\rho\phi}{\partial t}-S\right)\mathrm{d}x=J_e-J_w+\left(\frac{\partial\rho\phi}{\partial t}-\bar{S}\right)\Delta x=0$$

该式也可以从积分方程 (4.5.6) 直接得到。

源项本身可能是 ϕ 的函数，为使问题简化起见，对控制体上的源项平均值 $\overline{S}$ 作线性化处理，即

$$\overline{S} = S_C + S_P \phi_P \tag{4.5.9}$$

时间偏导数项 $$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} \approx \frac{\rho_P \phi_P - \rho_P^0 \phi_P^0}{\Delta t}$$

ϕ_P、ϕ_P^0 和 ρ_P、ρ_P^0 分别表示 $t+\Delta t$ 和 t 时刻结点 P 处的 ϕ 和 ρ 值。得

$$\frac{\rho_P \phi_P - \rho_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} \Delta x + J_e - J_w = (S_C + S_P \phi_P)\Delta x \tag{4.5.10}$$

当 $\phi = 1$、$J = \rho u$ 时式 (4.5.10) 为连续性方程，不考虑质量的源项有

$$\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t} \Delta x + F_e - F_w = 0 \tag{4.5.11}$$

其中 $$F_e = (\rho u)_e, \quad F_w = (\rho u)_w \tag{4.5.12}$$

式 (4.5.10) 减[式 (4.5.11) $\times \phi_P$]得到

$$e_P^0 \frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} \Delta x + J_e - J_w - (F_e - F_w)\phi_P = (S_C + S_P \phi_P)\Delta x \tag{4.5.13}$$

构造通量的离散格式是关系计算成败的一个关键，为此要假设 ϕ 在结点之间的近似分布规律。已知当 u、Γ 为常数，且 $S=0$ 时，恒定问题有解析解，在区间[x_P，x_E]上

$$\frac{\phi - \phi_P}{\phi_E - \phi_P} = \frac{\exp\left[\frac{Pe\, x}{\delta(x)_e}\right]}{\exp(Pe) - 1} \tag{4.5.14}$$

见图 4.28，其中 $P_e = \frac{(\rho u \delta x)_e}{\Gamma_e}$。从图中可以看到，当 $|Pe| \gg 1$ 时，以线性函数作为 ϕ 的近似分布式会产生很大的误差。将式 (4.5.14) 代入通量式 (4.5.8) 中，得

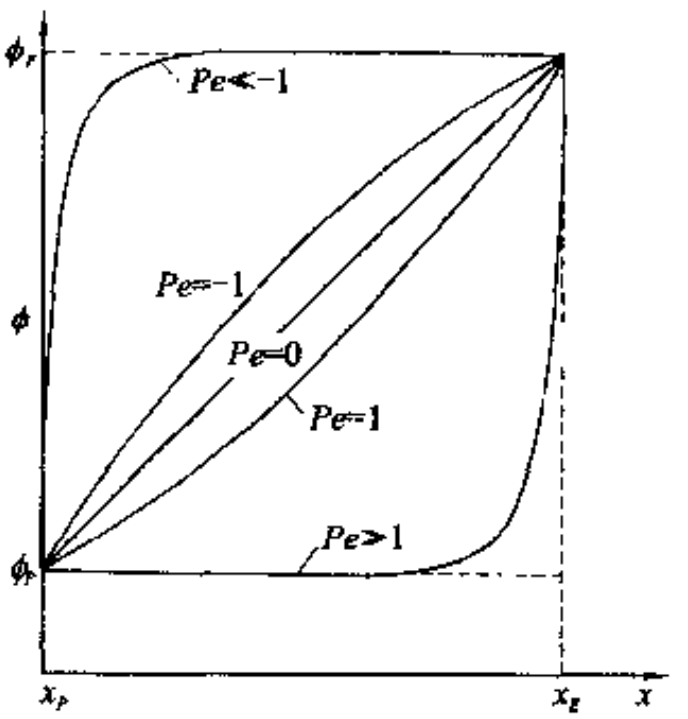


图4.28　一维无源恒定问题解析解

$$J_e = F_e\left[\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(Pe) - 1}\right] = F_e\left[\phi_E + (\phi_P - \phi_E)\frac{\exp(Pe)}{\exp(Pe) - 1}\right] \tag{4.5.15a}$$

分析该式可知：$Pe \gg 1$ 时，$J_e \approx F_e \phi_P = (\rho u)_e \phi_P$；$Pe \ll -1$ 时，$J_e \approx F_e \phi_E = (\rho u)_e \phi_E$，此时通量中上游来流的对流输移项占上风，扩散项可以忽略。

类似地可以导出界面 w 上的通量离散式

$$J_w = F_w\left[\phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\exp(P_w) - 1}\right] = F_w\left[\phi_P + (\phi_W - \phi_P)\frac{\exp(P_w)}{\exp(P_w) - 1}\right] \tag{4.5.15b}$$

式中$P_e=\frac{(\rho u\delta x)_e}{\Gamma_e}$。以上两个通量式可以改写成

$$J_e=F_e\phi_P+[D_eA(|Pe|)+\max(-F_e,\ 0)](\phi_P-\phi_E) \tag{4.5.16a}$$

$$J_w=F_w\phi_P+[D_wA(|P_w|)+\max(F_w,\ 0)](\phi_W-\phi_P) \tag{4.5.16b}$$

其中

$$D_e=\frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e},\ D_w=\frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \tag{4.5.17}$$

函数

$$A(|P|)=\frac{(|P|)}{[\exp(|P|)-1]} \tag{4.5.18}$$

显然有$A(0)=1$，$A(\infty)=0$。其中$P=\frac{\rho u\delta x}{\Gamma}=\frac{F}{D}$称为 Peclet 数，代表了对流项与扩散项之间的比值。按该式计算函数A，指数函数的计算量比较大，且P较大时容易发生计算溢出，为此可用较简单的关系式来逼近式 (4.5.18)，比较理想的有乘方律公式

$$A(|P|)=\begin{cases}(1-0.1|P|)^5 & |P|\leqslant 10\\ 0 & |P|\geqslant 10\end{cases} \tag{4.5.19}$$

当$|P|>10$时扩散项可以不计。

在有源的非恒定一维对流扩散问题的情况下，近似采用通量离散式 (4.5.16)，代入式 (4.5.13) 便得到有限体积法的离散格式。为保证计算精度和稳定性，采用全隐格式，各项取$t+\Delta t$时刻的值，得到代数方程

$$a_P\phi_P=a_E\phi_E+a_W\phi_W+b \tag{4.5.20}$$

其中

$$a_E=D_eA(|P_e|)+\max(-F_e,\ 0),\ a_W=D_wA(|P_w|)+\max(F_w,\ 0)$$

$$a_P=a_E+a_W+a_P^0-S_P\Delta x,\ a_P^0=\rho_P^0\frac{\Delta x}{\Delta t},\ b=a_P^0\phi_P^0+S_C\Delta x \tag{4.5.21}$$

不可压缩流体$\rho_P^0=\rho=$常数；恒定问题，$a_P^0=0$。

要指出的是，如果对ϕ取线性的近似分布式，相当于在差分格式中对对流项取中心差商，当 Peclet 数较大时计算结果会出现不合理的振荡；迎风差分格式则相当于在式 (4.5.21) 中取$A(|Pe|)=A(|P_e|)=A(0)=1$，将高估扩散通量，产生虚假扩散。

4.5.1.2 边界条件的处理

计算中常常遇到的区域边界有：出、入流边界 (有法向流速分量)，固体边界和没有法向流速分量的水域边界，等。

设P为出流边界结点，且流速$u>0$，则当 Peclet 数 Pe 足够大时，根据式 (4.5.21) 计算得到的系数$a_E=0$，也就是说结点P的离散方程中不包括位于区域之外的下游结点E的影响，这是因为此时该区域具有局部单通道性质，信息来自上游，与下游无关。由此可以得出结论：对于出流边界结点可以同内部结点一样建立离散方程，而不必特地给定边界条件。

同样道理，入流边界的ϕ值应该给定，否则问题不适定。在ϕ值已知的水域或固体边界

结点B上，$\phi_B=\phi$ 就是结点B 的方程。

在其它无法向流动的固体或水域边界上，常给定穿越边界的扩散通量作为边界条件。设已知结点B 的通量$J_B=q_B$，可取控制体如图 4.29，积分得

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}\Delta x=J_B-J_e+\bar{S}\Delta x=q_B-J_e+(S_C+S_P\phi_B)\Delta x$$

仿照前面处理时间偏导数项的做法，并对 J_e 应用通量计算式 (4.5.16)，得到边界结点的离散格式为

$$a_B\phi_B=a_P\phi_P+b$$

$$a_P=D_eA(|P_e|)+\max(-F_e,\ 0),$$

$$a_B=a_E+a_B^0-S_P\Delta x,\quad a_B^0=\rho_B^0\frac{\Delta x}{\Delta t},\quad b=a_B^0\phi_B^0+S_C\Delta x+q_B \tag{4.5.22}$$

亦可取控制体如图 4.30，这时结点P 在边界之内，离散格式为

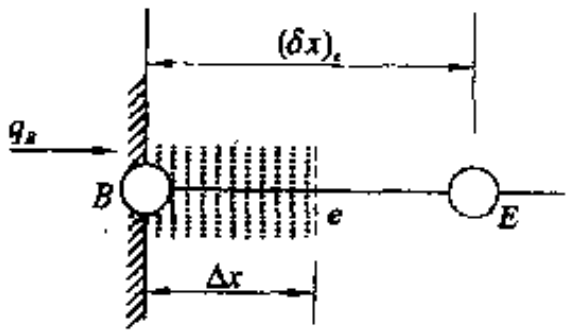


图4.29　边界结点的控制体

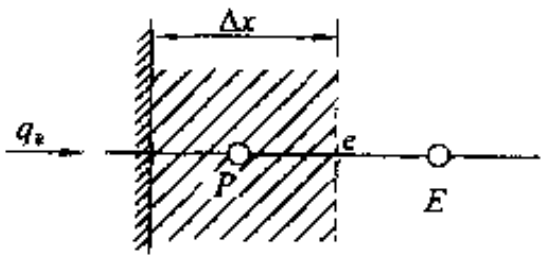


图4.30　结点在边界内展时的控制体

$$a_P\phi_P=a_E\phi_E+b,\quad a_P=a_E+a_P^0-S_P\Delta x$$

$$a_E=D_eA(|Pe|)+\max(-F_e,\ 0)$$

$$b=a_P^0\phi_P^0+S_C\Delta x+q_B,$$

$$a_P^0=\rho_P^0\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{4.5.23}$$

4.5.1.3　方程组求解

以上各内部和边界结点的离散方程中均只涉及结点P 和左右两个相邻结点，所有结点的离散方程一起构成一个三对角方程组，可以用追赶法求解。

当扩散系数Γ和源项系数 S_P、S_C 与 ϕ 有关时，方程组是非线性的，需要用迭代法求解。以简单迭代法为例，从假定的ϕ 的初值出发，每步迭代用上一步的迭代值计算出各系数，得到一三对角线性方程组，用追赶法求解得到该步的迭代值，然后再进行下一步迭代，直到收敛。

为改变迭代的进度可采用松弛技术。结点P 的方程改写成

$$\frac{a_P}{\alpha}\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b+(1-\alpha)\frac{a_P}{\alpha}\phi_P^* \tag{4.5.24}$$

或
$$\phi_P=\phi_P^*+\alpha\left[\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb}+b}{a_P}-\phi_P^*\right]$$

其中 ϕ_P^* 为 ϕ_P 的上一步的迭代值，下标 nb 代表与 P 相邻的结点，α 为松弛因子。$\alpha=1$时没有松弛；$\alpha>1$时迭代进度加快，称为超松弛；$\alpha<1$时迭代进度放慢，称为欠松弛。许多非线性问题的迭代求解过程都需要用欠松弛，以避免出现不稳定现象而导致发散。

对于非恒定问题，应从给定的初始条件出发，逐个时间步长地求解下一时刻区域上各结点的 ϕ 值。每一步均要按照上面介绍的方法和关系式形成并求解离散化的代数方程组。非线性的代数方程组还要用迭代法来求解。

常常将某些非线性的恒定问题的求解转化为非恒定问题的求解，当计算结果不再随时间而变化时就得到恒定问题的解。每一时段的计算均用上一时刻的解来计算系数，从而使方程得以线性化。这一过程实际上相当于非线性方程的欠松弛迭代求解过程，时间步长越小，松弛因子越小，迭代收敛的进度越慢；时间步长为负值时则相当于超松弛迭代。

4.5.1.4 构造离散格式的四项原则

在构造有限体积法的离散化格式时，为保证满足守恒律和确保计算的精度与稳定性，应注意遵循以下四项原则。

原则 1 界面的一致性原则。在两个相邻的控制体的离散方程中，对两者之间界面上的通量所取的表达式应相同。

遵循该原则可保证界面左、右的通量相等，否则不能满足守恒律。例如，对图 4.31 中相邻的两结点 P_1、P_2，分别取控制体，用式 (4.5.16) 计算两侧控制体在界面 m 上的通量时。

左侧控制体的 $J_m=F_m\phi_{P_1}+D_mA(|P_m|)(\phi_{P_1}-\phi_{P_2})=J_m=$
右侧控制体的 $J_m=J_m^*$
满足原则 1。显然两侧通量关系式中 Γ 值应相同。

原则 2 正系数原则。要求离散化的方程中各项的系数 (包括 a_P、a_E、a_W 和 ϕ_P^0 的系数 a_P^0 等) 为正，或者同号。

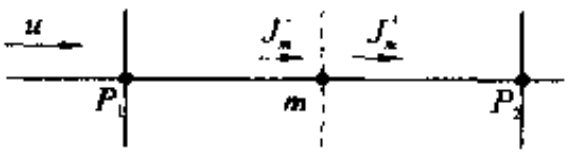


图4.31 两相邻控制体界面上的通量

违背这一原则，将会出现某结点 ϕ 值的增加却使得相邻结点 ϕ 值的减少这种违背对流扩散规律的现象，从而得到物理上不真实的解，甚至破坏计算的稳定性。前面介绍的对对流项用中心差商格式就可能出现这种情况。

原则 3 在源项的线性化处理表达式 (4.5.9) 中，应取系数 $S_P\leqslant 0$。

遵循这一原则就形成一种负反馈机制，避免使计算过程中产生的 ϕ_P 的误差愈来愈大，有助于保持计算的稳定性，同时确保 $a_P>0$。例如，设有源项 $S=3+7\phi$，若取 $S_C=3$，$S_P=7>0$，不能满足原则 3，在迭代计算时会发散。为此可取 $S_C=3+7\phi_P^*$，$S_P=0$；甚至可取 $S_C=3+10\phi_P^*$，$S_P=-3$，ϕ_P^* 为上一步迭代值。

原则 4 对于无源的恒定问题，系数 $a_P=\sum a_{nb}$，下标 nb 代表与 P 相邻的结点。

例如，在一维问题中，$a_P=a_E+a_W$。这样在 $\phi=$常数时，才能使代数方程 (4.5.20) 成立。$a_P^0=0$，$S_P=0$时，系数计算式 (4.5.21) 满足这一原则。

以上四个原则在构造二、三维对流扩散问题的有限体积法离散格式时也是适用的。

4.5.2 二维和三维问题的有限体积法

4.5.2.1 二维问题离散格式（直角坐标）

二维问题通量形式的守恒方程为

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}+\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}=S \tag{4.5.25}$$

其中

$$J_x=\rho u\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad J_y=\rho v\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{4.5.26}$$

u、v 分别为 x 和 y 方向的流速分量。

在求解区域上划分矩形网格，围绕每个内部结点 P 取控制体如图 4.32 所示，大小为 $1\times\Delta x\times\Delta y$，四个界面分别为 e、w、n、s，在控制体上对方程 (4.5.25) 积分，并且对源项线性化处理，得

$$\frac{\rho_P\phi_P-\rho_P^0\phi_P^0}{\Delta t}\Delta x\Delta y+J_e-J_w+J_n-J_s=(S_C+S_P\phi_P)\Delta x\Delta y \tag{4.5.27}$$

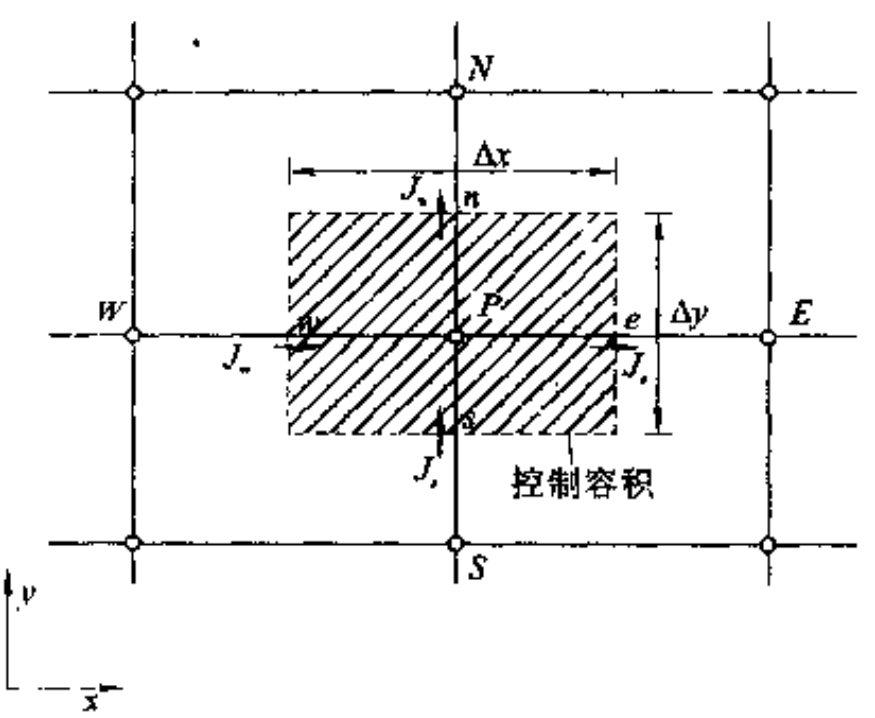


图4.32　二维有限体积网格图

其中 $J_e=(J_x)_e\Delta y$，$J_w=(J_x)_w\Delta y$，

$$J_n=(J_y)_n\Delta x,\quad J_s=(J_y)_s\Delta x \tag{4.5.28}$$

对连续性方程，式 (4.5.27) 变为

$$\frac{\rho_P-\rho_P^0}{\Delta t}\Delta x\Delta y+F_e-F_w+F_n-F_s=0 \tag{4.5.29}$$

其中

$$F_e=(\rho u)_e\Delta y,\quad F_w=(\rho u)_w\Delta y,\quad F_n=(\rho v)_n\Delta x,\quad F_s=(\rho v)_s\Delta x \tag{4.5.30}$$

式 (4.5.27) 减[式 (4.5.29) $\times\phi_P$]得到

$$\rho_P^0\frac{\phi_P-\phi_P^0}{\Delta t}\Delta x\Delta y+(J_e-F_e\phi_P)-(J_w-F_w\phi_P)+(J_n-F_n\phi_P)-(J_s-F_s\phi_P)$$

$$=(S_C+S_P\phi_P)\Delta x\Delta y \tag{4.5.31}$$

通量项的离散化可依照一维问题中的方法，在 x、y 方向上分别处理。例如

$$(J_x)_e=(\rho u)_e\phi_P+\left\{\frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}A(|P_e|)+\max[-(\rho u)_e,\ 0]\right\}(\phi_P-\phi_E)$$

则

$$J_e-F_e\phi_P=[D_eA(|P_e|)+\max(-F_e,\ 0)\ ](\phi_P-\phi_E) \tag{4.5.32a}$$

类似可得

$$J_w - F_w \phi_P = [D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0)](\phi_W - \phi_P) \tag{4.5.32b}$$

$$J_e - F_e \phi_P = [D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)](\phi_E - \phi_P) \tag{4.5.32c}$$

$$J_s - F_s \phi_P = [D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)](\phi_S - \phi_P) \tag{4.5.32d}$$

其中

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}, \quad P_e = \frac{F_e}{D_e} = \frac{(\rho u)_e (\delta x)_e}{\Gamma_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}, \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w (\delta x)_w}{\Gamma_w}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n}, \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} = \frac{(\rho v)_n (\delta y)_n}{\Gamma_n}, \quad D = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s}, \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} = \frac{(\rho u)_s (\delta y)_s}{\Gamma_s} \tag{4.5.33}$$

函数 A 可用公式 (4.5.18) 或 (4.5.19) 求得。

将式 (4.5.32) 等代入方程 (4.5.31)，得结点P 上的离散化代数方程

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \tag{4.5.34}$$

其中，

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0), \quad a_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0), \quad a_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y$$

$$b = a_P^0 \phi_P^0 + S_C \Delta x \Delta y, \quad a_P^0 = \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} \tag{4.5.35}$$

上面对通量的离散化是在 x、y 方向上分别按一维格式处理 (即所谓“局部一维处理”)，这在流动方向与网格线一致时可以得到不错的结果，但是当流动方向与网格线成一夹角时，计算结果会呈现垂直于流动方向的横向虚假扩散，原因是在构造通量的离散式时对迎风效应的处理没有考虑来自角点的影响 (即所谓“斜迎风”)。网格划分时尽可能使网格线与流动方向一致，或者取较小的空间步长，有助于减少横向虚假扩散。从根本上消除虚假扩散的办法是对离散格式加以改进，使之能够适应流动的方向，读者可参考有关文献。

4.5.2.2 边界条件处理与方程组求解

矩形网格时，二维对流扩散问题的边界条件的离散化方法基本与前面介绍的一维问题类似，要注意水域边界应尽量远离回流，否则不便确定边界条件。

二维区域边界形状常常不规则，当空间步长足够小时，用矩形网格所形成的阶梯状边界来逼近实际边界，也常常可以得到令人满意的计算结果，只是边界条件的处理较为麻烦。

还可以通过坐标变换，将非矩形区域里的适应边界形状的曲线坐标 (贴体坐标) 变换为矩形区域里的直角坐标，这样原来 Oxy 坐标系下的非矩形网格 (通常希望取成正交网格) 就被变换成新坐标系下的矩形网络，同时原来微分方程的各项也改变了。

也可以考虑采用非结构网络（如三角形网格等），以更好的适应边界的形状，但这时控制体的划分较为复杂。读者可参考有关文献。

二维问题的代数方程组虽不是三对角方程组，但结点P的方程只与四个相邻的结点有关，方程组的矩阵是稀疏矩阵，可以用迭代法迭代，常用的是交替方向隐式迭代法，收敛速度较快，其迭代步骤是：

①假设各结点上的初始值。

②横向扫描，对每一竖向网格线取隐格式方程，即

$$a_P\phi_P=a_N\phi_N+a_S\phi_S+a_E\phi_E^*+a_W\phi_W^*+b$$

其中ϕ^*为前面迭代过程最新的计算结果。每一方程中只有P、N、S三个结点的未知量，构成y方向的三对角方程组，用追赶法求解。扫描的方向（从左到右或从右至左）可以交替改变以便尽快将边界条件信息带到区域内部，有流动时最好从上游扫描到下游。

③再改为竖向扫描，对每一横向网格线取隐格式方程，即

$$a_P\phi_P=a_E\phi_E+a_W\phi_W+a_N\phi_N^*+a_S\phi_S^*+b$$

构成x方向的三对角方程，用追赶法求解。

④回到步骤②重新开始新的一轮迭代，直到迭代收敛。

如果代数方程组本身非线性，也需要进行迭代求解，每一步迭代都得到一个线性方程组，以上一步的迭代结果作为初始值用交替方向隐式迭代法求解该线性方程组，这时后一个迭代过程可以只进行若干步，因为这只是非线性方程组迭代求解过程的中间结果。

4.5.2.3 极坐标系下的二维离散格式

极坐标系下的对流扩散通用形式方程写成通量形式为

$$\frac{\partial\rho\phi}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(rJ_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial J_\theta}{\partial\theta}=S \tag{4.5.36}$$

其中
$$J_r=\rho u_r\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial r},\qquad J_\theta=\rho u_\theta\phi-\frac{\Gamma}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{4.5.37}$$

分别为在径向和周向的通量分量，u_r和u_θ为相应方向上的速度分量。

如图 4.33 所示划分网格并取控制体，大小为$\Delta V=\frac{1}{2}(r_n+r_s)\Delta r\Delta\theta\times1$。想象坐标系$Or\theta$为一直角坐标系，控制方程为

$$\frac{\partial\rho r\phi}{\partial t}+\frac{\partial(rJ_r)}{\partial r}+\frac{\partial J_\theta}{\partial\theta}=rS \tag{4.5.38}$$

相当于对其密度、流速分量、扩散系数和源项作相应改变，这时控制体为矩形网格中的矩形控制体，在控制体上对方程积分，引用直角坐标系的通量、源项等离散格式，得

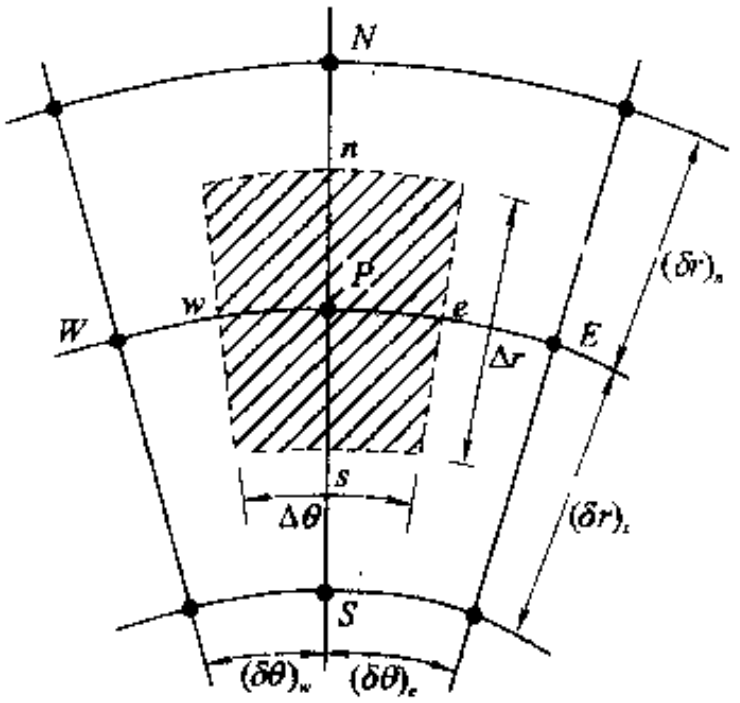


图4.33 极坐标系中的控制体积

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b \tag{4.5.39}$$

其中 $a_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$，$a_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0)$

$a_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$，$a_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta V$$

$$b = a_P^0\phi_P^0 + S_c \Delta V，\quad a_P^0 = \frac{\rho_P^0 \Delta V}{\Delta t} \tag{4.5.40}$$

其中 $F_e = (\rho u_\theta)_e \Delta r$，$D_e = \dfrac{\Gamma_e \Delta r}{(r\delta\theta)_e}$，$P_e = \dfrac{F_e}{D_e} = \dfrac{(\rho u_\theta)_e (r\delta\theta)_e}{\Gamma_e}$

$F_w = (\rho u_\theta)_w \Delta r$，$D_w = \dfrac{\Gamma_w \Delta r}{(r\delta\theta)_w}$，$P_w = \dfrac{F_w}{D_w} = \dfrac{(\rho u_\theta)_w (r\delta\theta)_w}{\Gamma_w}$

$F_n = (\rho r u_r)_n \Delta\theta$，$D_n = \dfrac{\Gamma_n (r\Delta\theta)_n}{(\delta r)_n}$，$P_n = \dfrac{F_n}{D_n} = \dfrac{(\rho u_r)_n (\delta r)_n}{\Gamma_n}$

$F_s = (\rho r u_r)_s \Delta\theta$，$D_s = \dfrac{\Gamma_s (r\Delta\theta)_s}{(\delta r)_s}$，$P_s = \dfrac{F_s}{D_s} = \dfrac{(\rho u_r)_s (\delta r)_s}{\Gamma_s}$ (4.5.41)

4.5.2.4 三维问题离散格式

三维问题的通量形式守恒方程为

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S \tag{4.5.42}$$

其中 $J_x = \rho u\phi - \Gamma \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$，$J_y = \rho v\phi - \Gamma \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$，$J_z = \rho w\phi - \Gamma \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$ (4.5.43)

u、v 和w分别为 x、y 和 z 方向的流速分量。

在结点P周围所取的控制体大小为$\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$；在$z$方向上的两个相邻结点为$T$和$B$（表示“顶”和“底”的意思），界面为 t 和b。离散化方程的推导与二维问题时完全类似，得

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + a_T\phi_T + a_B\phi_B + b \tag{4.5.44}$$

其中 $a_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$　$a_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0)$

$a_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$　$a_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$

$a_T = D_t A(|P_t|) + \max(-F_t, 0)$　$a_B = D_b A(|P_b|) + \max(F_b, 0)$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^0 - S\ \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$b = a_P^0 \phi_P^0 + S_c\ \Delta x \Delta y \Delta z \qquad a_P^0 = \rho_P \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \tag{4.5.45}$$

其中 $F_e = (\rho u)_e\ \Delta y \Delta z$，$D_e = \dfrac{\Gamma_e \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}$，$P_e = \dfrac{F_e}{D_e} = \dfrac{(\rho u)_e (\delta x)_e}{\Gamma_e}$；

$F_w = (\rho u)_w\ \Delta y \Delta z$，$D_w = \dfrac{\Gamma_w \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}$，$P_w = \dfrac{F_w}{D_w} = \dfrac{(\rho u)_w (\delta x)_w}{\Gamma_w}$；

$F_n = (\rho v)_n\ \Delta x \Delta z$，$D_n = \dfrac{\Gamma_n \Delta x \Delta z}{(\delta y)_n}$，$P_n = \dfrac{F_n}{D_n} = \dfrac{(\rho v)_n (\delta y)_n}{\Gamma_n}$；

$F_s = (\rho v)_s\ \Delta x \Delta z$，$D_s = \dfrac{\Gamma_s \Delta x \Delta z}{(\delta y)_s}$，$P_s = \dfrac{F_s}{D_s} = \dfrac{(\rho v)_s (\delta y)_s}{\Gamma_s}$；

$F_t = (\rho w)_t\ \Delta x \Delta y$，$D_t = \dfrac{\Gamma_t \Delta x \Delta y}{(\delta z)_t}$，$P_t = \dfrac{F_t}{D_t} = \dfrac{(\rho w)_t (\delta z)_t}{\Gamma_t}$；

$F_b = (\rho w)_b\ \Delta x \Delta y$，$D_b = \dfrac{\Gamma_b \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b}$，$P_b = \dfrac{F_b}{D_b} = \dfrac{(\rho w)_b (\delta z)_b}{\Gamma_b}$； (4.5.46)

4.5.3 有限体积法求解 Navier-Stokes 方程组

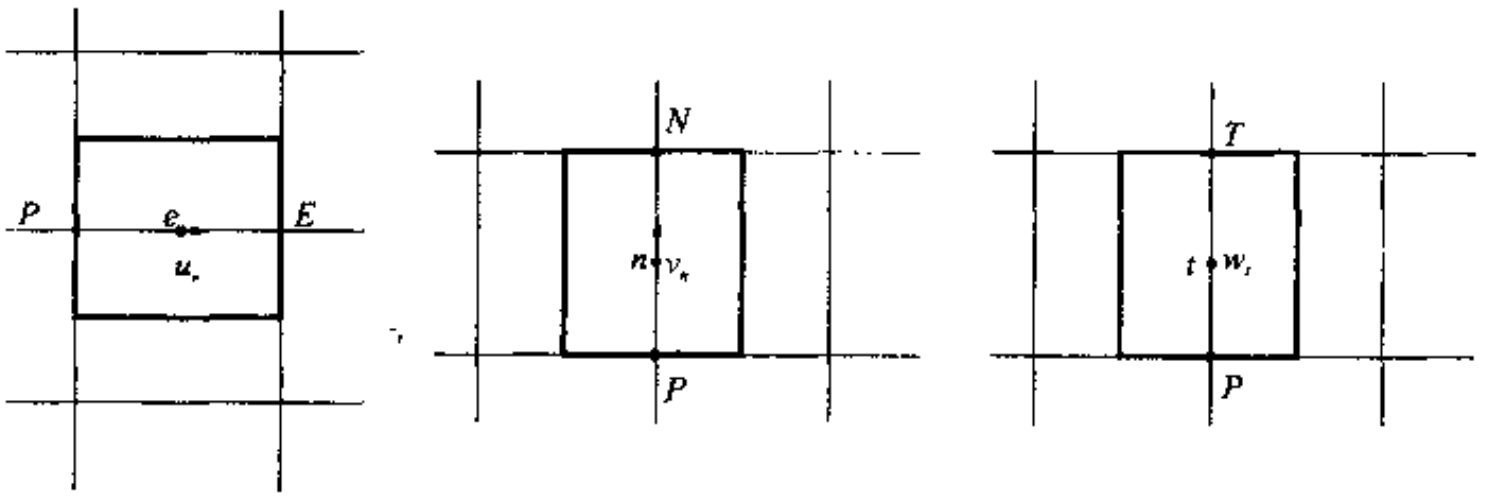
连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{4.5.47}$$

Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \tag{4.5.48}$$

经验表明，在以流速和压强为未知量计算流场时，应该将计算流速的网格与计算压强的网格错开半格，称为**“交错网格”**，否则将计算出畸形的流速和压强分布。具体地说，如果对结点P取控制体求p，求流速分量时就要以该控制体的界面点w、e、s、n、b、t为中心分别取各自的控制体。例如对u_e、v_n和w_t的控制体如图 4.34 所示，相应的离散格式为



u_e的控制体　　v_n的控制体　　w_t的控制体

图4.34　交错网格和流速分量的控制体

$$\begin{cases} a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b_e + (p_P - p_I) A_e \\ a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b_n + (p_P - p_N) A_n \\ a_t w_t = \sum a_{nb} w_{nb} + b_t + (p_P - p_T) A_t \end{cases} \tag{4.5.49}$$

式中：下标“*nb*”表示相邻的节点；$A_e = \Delta y \Delta z$，$A_n = \Delta x \Delta z$，$A_t = \Delta x \Delta y$；压强梯度项从源项中分离了出来。点 *d*、*w*、*s* 上的方程与之类似。

由于对压强不存在守恒形式的方程，*p* 只出现在动量方程的源项中，求解这样的流动问题常采用压力和速度校正的迭代方法：在迭代过程中先假定一试探的压强分布 p^*，根据动量方程的离散方程式 (4.5.49) 可求出速度 u_e^*、v_n^* 和 w_t^* 等；又设真实的压强和速度为

$$p = p^* + p', \quad u = u^* + u', \quad v = v^* + v', \quad w = w^* + w' \tag{4.5.50}$$

p'、u'、v' 和 w' 分别称为压力校正和速度校正，忽略邻近节点速度校正的影响，得到简化的速度校正公式

$$\begin{cases} u_e' = d_e \left(p_P' - p_E' \right), & d_e = \dfrac{A_e}{a_e} \\ v_n' = d_n \left(p_P' - p_N' \right), & d_n = \dfrac{A_n}{a_n} \\ w_t' = d_t \left(p_P' - p_T' \right), & d_t = \dfrac{A_t}{a_t} \quad \text{等} \end{cases} \tag{4.5.51}$$

在以节点*P* 为中心的控制体上对连续性方程积分，其中流速用式 (4.5.50)，流速校正用式 (4.5.51) 等代入，得到压力校正方程如下：

$$a_P p_P' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + a_T p_T' + a_B p_B' + b \tag{4.5.52}$$

其中

$$a_E = \rho_e d_e A_e, \quad a_W = \rho_w d_w A_w, \quad a_N = \rho_n d_n A_n$$

$$a_S = \rho_s d_s A_s, \quad a_T = \rho_t d_t A_t, \quad a_B = \rho_b d_b A_b$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B$$

$$b = \frac{(\rho_P^0 - \rho_P)\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + \rho_w u_w^* A_w - \rho_e u_e^* A_e + \rho_n v_n^* A_n - \rho_s v_s^* A_s + \rho_b w_b^* A_b - \rho_t w_t^* A_t \tag{4.5.53}$$

求解压力校正方程得 p'，然后利用式 (4.5.50)、(4.5.51) 校正流速和压强。$b=0$ 时求得 $p'=0$，此时流速场满足连续性方程，迭代收敛，所以压力校正方程的源项值可以作为迭代是否收敛的判据。

上述迭代计算方法被称为 SIMPLE 算法 (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations)，它的执行步骤如下：

①试取压强场 p^*；

②求解动量方程得 u^*、v^*、w^*；

③求解压力校正方程得 p'，利用式 (4.5.50)、(4.5.51) 校正流速和压强得 u、v、w 和 p；

④如有必要，求解温度或其它对流动有影响的参数的离散化方程组；

⑤把校正过的压强场 p 作为新的试探压强 p^*，回到第二步，重复整个过程，直到迭代收敛为止。

SIMPLE 算法的缺点是压力校正误差较大，计算时尽管使用欠松弛，压强场的收敛还是要进行许多次迭代，哪怕给定的初始速度场本身是正确的。SIMPLER 算法 (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations，Reuised) 正是为克服这一弊病而提出来的。将 (4.5.49) 改为

$$\begin{cases} u_e = \hat{u}_e + d_e(p_P - p_E) \\ v_n = \hat{v}_n + d_n(p_P - p_N) \\ w_t = \hat{w}_t + d_t(p_P - p_T) \end{cases} \tag{4.5.54}$$

其中 $\hat{u}_e = \dfrac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_e}{a_e}$，其余类推。该式代入连续性方程中得到压力方程

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + a_T p_T + a_B p_B + b \tag{4.5.55}$$

系数与压力校正方程相同，源项为

$$b = \frac{(\rho_P^0 - \rho_P)\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + \rho_w \hat{u}_w A_w - \rho_e \hat{u}_e A_e + \rho_s \hat{v}_s A_s - \rho_n \hat{v}_n A_n + \rho_b \hat{w}_b A_b - \rho_t \hat{w}_t A_t \tag{4.5.56}$$

与SIMPLE算法相比，SIMPLER算法的步骤有两点改变：①在求解动量方程得到 u^*、v^*、w^* 之前，先要计算 $\hat{u}$，$\hat{v}$，$\hat{w}$，求解压力方程得到 p，并将其作为 p^*；②只需校正流速，而不需校正压强。虽然每步的计算量更大，但总的迭代次数更少。

对 SIMPLE 算法的另一种改进是所谓 SIMPLEC 算法，做法是在式 (4.5.51) 中考虑相邻结点的影响，取 $d_e = \dfrac{A_e}{(a_e - \sum a_{nb})}$，其余类推，可减少迭代次数。

4.5.4 弯道水流的三维数值解

下面用有限体积法求梯形断面渠道中恒定弯道流动的三维数值解。为充分考虑紊动结构的影响，采用三维 $k-\varepsilon$ 紊流模型作为基本方程组，有六个偏微分方程，分别求解三个流速分量以及压强 p、紊动动能 k 和紊动耗散率 ε。有关紊流模型的详细内容可参看第六章的第一节。

在弯道上、下游的顺直渠段，可采用直角坐标下的基本方程组，x、y、z，分别为纵向、横向和垂直于渠底的方向的坐标，相应的流速分量为 u、v、w。

在弯道渠段中，如果弯道纵轴线为一半径为 R 的圆弧，采用柱坐标更方便，即：将横向和纵向坐标改为极坐标(r, θ)，垂向坐标 z 不变。弯道平面及横断面如图 4.35 所示，为了计算方便起见，另取一个原点在渠道底部中心的横向坐标

$$y = r - R \tag{4.5.57}$$

代替 r 作为自变量。三个方向的流速分量仍用 u、v、w 表示。

在恒定流时基本方程组的各个方程式可以统一写成以下通用的守恒形式：

直角坐标系下 $$\frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} + \frac{\partial(w\Phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + S \tag{4.5.58a}$$

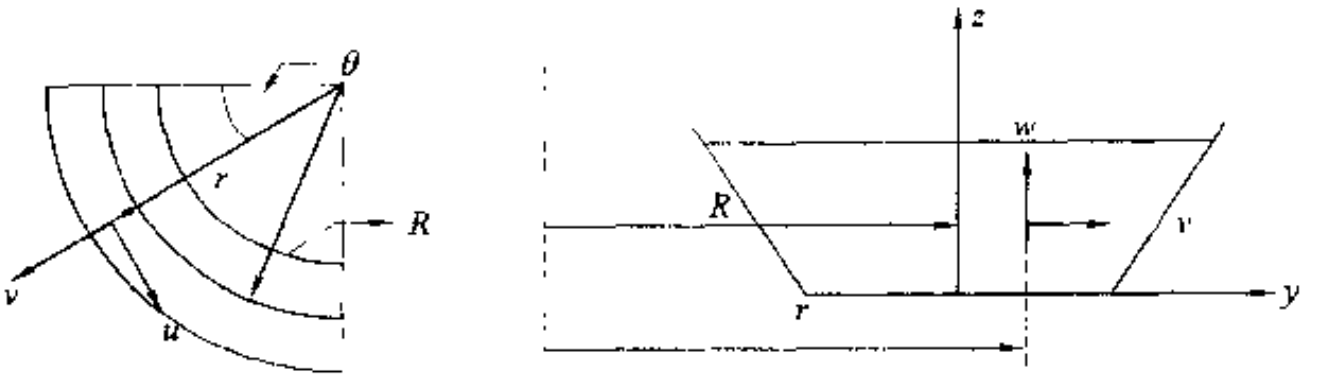


图4.35　弯道平面及横断面

柱坐标系下

$$\frac{\partial(u\Phi)}{\partial\theta}+\frac{\partial(rv\Phi)}{\partial y}+\frac{\partial(rw\Phi)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(r\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+rS \tag{4.5.58b}$$

当Φ取不同参量时，相应的扩散系数Γ和源项S的表达式列于表 4.3 之中。与式(4.5.3)、(4.5.37)和 (4.5.38) 相比，以上两个方程中除了没有时间偏导数项外，各项都除去了密度，Γ和S的量纲也因此随之改变。

表 4.3

	Φ	Γ	S（直角坐标）	S（柱坐标）
连续性方程	1	0	0	0
u方程	u	ν_t	$gi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$gi-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\nu_t}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial(\nu_t u)}{\partial y}-\frac{uv}{r}$
v方程	v	ν_t	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial w}{\partial y}\right)$	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}\left(r\nu_t\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(r\nu_t\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{u}{r}-\frac{2\nu_t v}{r^2}$
w方程	w	ν_t	$g\sqrt{1-i^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial w}{\partial z}\right)$	$g\sqrt{1-i^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}\left(r\nu_t\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(r\nu_t\frac{\partial w}{\partial z}\right)$
k方程	k	$\frac{\nu_t}{\sigma_k}$	$P-\varepsilon$	$P-\varepsilon$
ε方程	ε	$\frac{\nu_t}{\sigma}$	$\frac{\varepsilon}{k}(C_1P-C_2\varepsilon)$	$\frac{\varepsilon}{k}(C_1P-C_2\varepsilon)$

表中 i 为渠道的底坡；紊动运动粘性系数

$$\nu_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{4.5.59}$$

紊动动能

$$k=\frac{1}{2}\overline{u^2} \tag{4.5.60}$$

紊动动能的耗散率 $$\varepsilon=\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} \tag{4.5.61}$$

k 方程中的产生项P 在直角坐标系下为

$$P=\nu_t\left\{2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \tag{4.5.62a}$$

在柱坐标系下为

$$P=\nu_t\left\{2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{v}{r}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left[r\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{r}\right)\right]^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \tag{4.5.62b}$$

方程组中用到的各常数取值为：

$$C_\mu=0.09,\ \sigma_k=1.0,\ \sigma_\varepsilon=1.33,\ C_1=1.44,\ C_2=1.92$$

考虑到在纵向上水流的对流传输作用远大于紊动扩散作用，且在紊动曲率半径不是十分小的情况下不会发生竖轴环流，以上各方程和表达式中略去了纵向紊动扩散项，这样简化之后的流动称为“**部分抛物型**”流动。

弯道流动计算时所用到的边界条件如下：

入口断面的流动参量为已知的边界条件，可根据实测数据或均匀流时的断面流动参量分布作为入口断面条件。若出口断面距离弯道出口足够远，可取出口断面条件为$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0$。

固壁边界条件用“**壁函数**”方法给出，若边界网格点P 距离实际边界Y_P，取

$$u_P=\begin{cases}\dfrac{u_*}{\kappa}\ln(EY_P^+), & Y_P^+>11.63,\\ u_*Y_P^+, & Y_P^+\leqslant 11.63,\end{cases}\qquad \left(Y_P^+=\frac{u_*Y_P}{\nu}\right)$$

$$k_P=\frac{u_*^2}{C_\mu^{\frac{1}{2}}},\qquad \varepsilon_P=\frac{u_*^3}{(\kappa Y_P)} \tag{4.5.63}$$

$u_*=\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ 为壁面摩阻流速。水力光滑壁面$E=9.0$；若考虑壁面粗糙度Δ 影响时

$$E=9.0\frac{\left[1+\dfrac{20}{\left(\dfrac{u_*\Delta}{\nu}\right)}\right]}{\left(1+0.3\dfrac{u_*\Delta}{\nu}\right)},\qquad \left(\frac{u_*\Delta}{\nu}>5\right) \tag{4.5.64}$$

自由表面条件

当渠道底坡缓、水深变化缓慢时，可对自由水面应用“**刚盖**”假定，即假定水面为一固定平面。计算时在水面上应用对称条件：

$$\text{当 } z=H \text{ 时，}\ w=0,\qquad \text{其他参数}\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0 \tag{4.5.65}$$

该方法在水深变化不超过总水深的 10%时，不会产生很大误差。实际的**水面比降**可根据计算出的“刚盖”上的压强梯度换算出来：

$$\text{纵向比降} i_x=\frac{1}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{z=H}, \qquad \text{横向比降 } i_z=\frac{1}{\rho g}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{z=H} \tag{4.5.66}$$

根据明渠流动的特点以及对弯道流动计算的需要，我们将结点P 的邻点和界面点的规定作些改动，即：P 在横断面上的横向（速度分量 v 的方向）上左右邻点为 E、W，垂向上(w 的方向) 的上下邻点为 N、S，纵向(u的方向) 的邻点为U、D（上游和下游），相应的界面点分别为 w、e、n、s、u、d。对结点P 取控制体求 p、k 和ε，以界面点为中心分别取各自的控制体求流速分量。例如以点 u 为中心取 u_u 的控制体，以点e为中心取 v_e 的控制体，点 n 为中心取 w_n 的控制体等。式 (4.5.49) ~ (4.5.56) 和图 (4.34) 中的下标和字符要作相应的改变。

在弯道流动的情况下可利用部分抛物型流动的性质简化 SIMPLE 算法，将整个三维区域上求解离散化方程变为在一个断面上求解二维问题的离散化方程。因为忽略了纵向扩散，动量方程和 k、ε 方程的离散格式中对应于下游结点的系数为零，计算可以从流动参数为已知的弯道入口断面出发逐个断面地向下游进行，每个断面上各结点的方程中可略去下游结点相关项，而将上游结点相关项作为已知量放到源项中，这样方程的求解就成为一个二维问题。其次，可以将断面上的压力校正与纵向上的压力校正分开进行，先设 $p'_U=p'_D=0$，则断面压力校正方程为

$$a_P p'_P=a_E p'_E+a_W p'_W+a_N p'_N+a_S p'_S+b \tag{4.5.67}$$

$$a_E=d_e A_e,\quad a_W=d_w A_w,\quad a_N=d_n A_n,\quad a_S=d_s A_s$$

$$a_P=a_E+a_W+a_N+a_S,\quad b=u^*_u A_u-u^*_d A_d+v^*_n A_n-v^*_s A_s+w^*_e A_e-w^*_n A_n$$

其中：在直角坐标下$A_e=\Delta x\Delta z$，$A_n=\Delta x\Delta y$，在柱坐标下$A_e=r_e\Delta\theta\Delta z$，$A_n=r_n\Delta\theta\Delta y$；$A_u=\Delta y\Delta z$；其余类推。求解这个二维方程组得到断面上各节点的 p'。若给定入口断面压强，纵向压力校正自上而下地进行，假设在整个断面上 $p'_U-p'_D$ 值相同，在断面 d 上对 u_d 积分，总流量应等于已知的渠道来流流量 Q，得

$$p'_U=p'_D+\frac{Q-\sum u^*_d A_d}{\sum d_d A_d} \tag{4.5.68}$$

根据以上思路得到由 Pratap 修正的 SIMPLE 方法：

①给出各参量在入口断面的值，初估整个流动区域上的压强、流速和 k、ε 分布。

②从入口断面开始，向下游逐个断面进行如下计算：

a. 求解下一个断面上的速度；

b. 对该断面进行横向、纵向压力校正和速度校正；

c. 求解该断面的k 和ε。

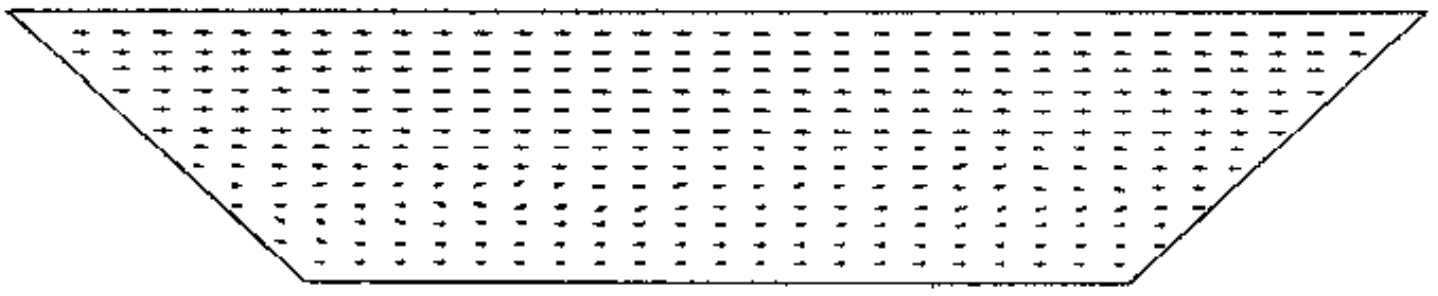
③当上述计算进行到出口断面后，返回入口断面重复以上运算，直至迭代收敛。

下面介绍在以南水北调工程中线总干渠的弯道水流数值模拟中的部分计算结果，表 4.4

中列出 12 个算例，取 300~1 000 m 四种弯道半径，弯道中心角范围 20°~90°；梯形断面：底宽b=40 m，边坡系数 m = 2；底坡为 $\frac{1}{25\,000}$；取糙率 n=0.015，流量Q =500 m^3/s 时，水深 H=7.1 m。

网格划分：纵向（包括弯道段和上、下游的部分直线段）视计算渠段的长度取 15~20 个断面；断面上采用矩形网格，虽然对斜边坡的处理不够方便，但对计算精度没有产生很大影响；每个断面横向取 35 个节点，垂向取 15 个节点。

根据计算结果，主流先在弯道入口处略为偏向凸岸，然后逐渐偏向凹岸，在弯道出口断面偏离轴线最远；图 4.36 所示为弯道顶点断面的横向环流，横向流速在渠底最大，其量级为 10 cm/s，图中渠道断面的垂向比例适当放大了。



(R=500 m，弯道中心角φ=70°)

图4.36　弯道顶点断面横向环流示意图

图 4.37 为弯道水面相对于均匀流水面的变化（超高）的等值线图(R=500 m、中心角为 70°)。在凹岸一侧超高为正，先升后降，在凸岸一侧超高迅速降为负值，最小值在接近弯道出口处，约 0.9 cm，随后回升接近均匀流水深。水面横向比降在弯道入口处剧增，以后变化缓慢，在接近弯道段出口处剧降，最大水面横向比降约为 0.32‰，相应的横向水位差 $\Delta z \approx$2.2 cm。这些规律与物理模型试验的结果基本吻合。

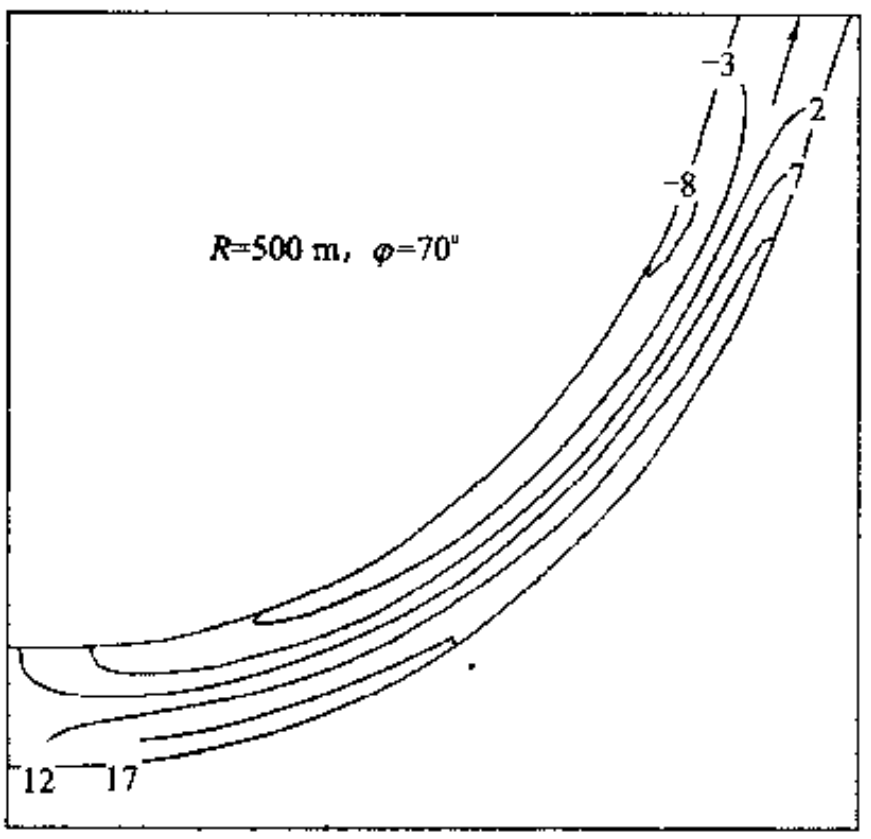


图4.37　弯道水面超高等值线图(单位：mm)

根据表 4.4 中 12 个算例得到的局部水头损失值可归纳出结论：弯道局部水头损失随着弯道中心角 φ 的增大而增大，随弯道半径 R 的增大而减小。图 4.38 为弯道中心角为 70°时数值计算结果和物理模型试验结果，两者基本相符。

表 4.4　计算方案与局部水头损失计算值

弯道半径 (m)	300	500				750				1 000		
弯道中心角 (°)	70	20	50	70	90	30	50	70	80	20	40	70
局部水头损失 h_j (mm)	13.9	2.68	6.34	9.17	12.2	2.85	4.84	7.09	8.29	1.59	3.23	6.15
$\frac{h_j}{h_f}$ (%)	94.7	38.3	36.3	37.5	39.0	18.1	18.5	19.3	19.8	11.4	11.6	12.6

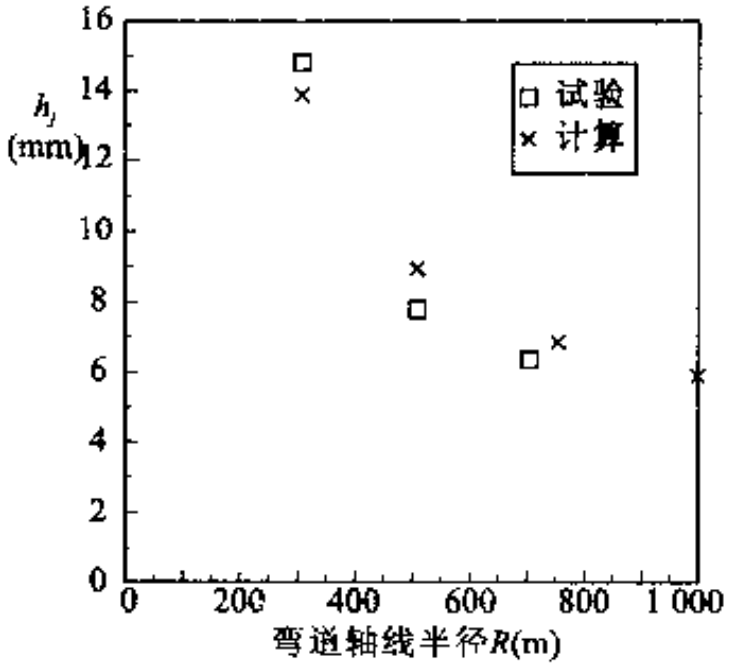


图4.38　弯道局部水头损失 (φ=70°)

第五章　河道水流的数值模拟

河道水流的数值模拟对水利、环境、航运、交通、港口建设、引水供水等经济开发有重要意义。

河道水流的计算问题包括渠道与天然河道，恒定流与非恒定流，其重点在天然河道的非恒定流，这一领域也许是最适宜于电子计算机应用。在电子计算机未出现之前，关于长河段、长时段、多河段的河网非恒定流计算是非常烦难的甚至是不可能。20 世纪 50 年代计算巴拿马运河两端潮汐影响就需要 2~3 个高级技术人员用手摇计算机算 1~2 个月。我们编的水力学书中非恒定流例子用“瞬态法”简化计算也算了一个多月。早在 80 年代计算机应用于水利工程的初期，由于当时运算速度较慢，计算月江口下游汉江的洪水演进，一场 12 个小时的洪峰过程，计算机计算也得 12~14 小时，这对预报而言是不适用的。随着计算机不断更新换代，我们在“黄河北金堤分滞洪区的快速预报模型”的一维非恒定流计算中，采用微机一场十多天的洪水过程，计算需时由最初的 3~4 小时，减到 50 分钟，现在只需 15 分钟。

天然河道几何上（沿纵向、横向，平面上、剖面上）不规则的特点也给计算带来困难，主槽和滩地流速也阻力不同，要作不同的处理。这在洪水演进，河道整治方面是非常重要的。

计算包括一维、二维与三维。目前一维中简单的单一河道数值计算方面解决得好一些，但即使按一维计算，河网尤其中大型多段的河网，大到包括几十条甚至几百条的河段，河网计算中在解大型稀疏矩阵方面仍存在着困难，其计算精度也有待改进与提高，探索新的方法。二维恒定与非恒定流问题对天然河道、河口的数值模拟应用也刚刚起步。

实际工程应用中还有一些特殊问题与特殊要求，如溃坝洪水，溃坝波的计算可能出现激波——间断波，有急流也有缓流的过渡，需要采用特殊的方法，水质水环境涉及生物化学性质，物质扩散中的一些系数确定需另作考虑。

以下我们分别讨论这些问题，除理论、方法外，更着力于一些应用实例。

河渠非恒定流数值模拟是一门结合具体工程的新型实用科学，它以数学、力学理论为基础建立数学模型，通过电子计算机用数值计算进行近似求解，以复演或预测河道中水体运动。同时它也属于边缘学科，它的理论是流体力学，并与基础数学、应用数学及计算数学密切相关。为了解决某些难度更大的问题又涉及一些新的数学分支，如非线性数学力学，拓朴学，谱论、图论和小波分析与随机理论。再者，它所利用的技术手段涉及各种计算机硬件设备和软件工具，如地理信息系统、图像处理、模式识别以至人工智能。

数值模拟具有适应性强、应用面广的优点，不仅成功的取代了以往水力学中的瞬态法、图解法等大量手工劳动，而且可以选择不同参数作计算机试验。其次，它不受模型比尺限制，不占用实验场地。第三，其试验费用少，周期短，模型建成后保存方便，并可随时调用，修改方案也比较容易。

但数值模拟也有其局限性，它取决于基本方程的可靠程度，不能提供解析表达式，由于一方面存在一定的计算误差，其次是不如物理模型形象直观，而且是必须依赖物理实验提供某些流动参数，此外所依据的实际观测资料的精确程度不一，所以需要对数学模型进行验证、

河渠非恒定流数值计算常用的方法为基于特征线理论的有限差分法，有限元法虽然理论上可行但用得较少，差分法有各式各样的格式。可分为显式与隐式两大类。

一维非恒定流基本方程为连续性方程、动量方程组成的圣—维南 (Saint - Venant) 方程：棱柱体渠道，以水深h、流速u为变量有：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=v_l\end{cases} \tag{5.0.1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}=g(S_0-S_f)\end{cases} \tag{5.0.2}$$

天然河道，以水位Z与流量Q为变量有：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Z}{\partial t}+\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{q_l}{B}\end{cases} \tag{5.0.3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q^2}{A}\right)+gA\dfrac{\partial Z}{\partial x}+gAS_f=0\end{cases} \tag{5.0.4}$$

式中A，B为过水断面面积与水面宽度，v_l，q_l为侧入流单位宽度的流速与流量，x，t为自变量的距离与时间，S_0，S_f为底坡与阻力坡度。

河渠不恒定流数值计算中，人们对有限差分格式研究最多，解决的实际问题也最多。一维问题，有显式差分、隐式差分，而对多维问题有 ADI 法、破开算子法等。

显式差分是最早应用的一种方法，这种方法简单、易理解，是其它各种计算方法的基础。我们以一维圣维南连续性方程为例进行说明。根据显式差分的取值原则，任一网格节点上的待求因变量在新的时间层的值可以通过已知时间层上变量值显式解出，即未知量可以由已知量显式表示。就如图 5.1 的网格来说。

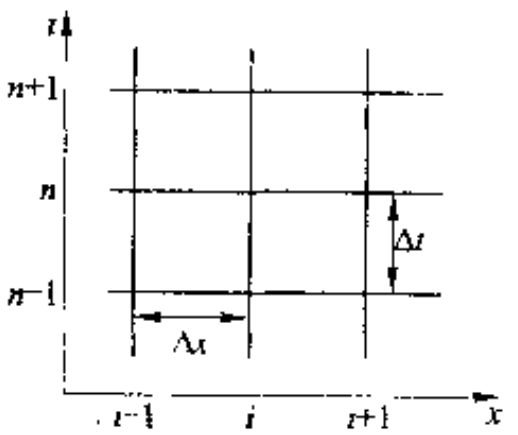


图5.1　差分法网格图

有

$$\frac{A_i^{n+1}-A_i^n}{\Delta t}+\frac{Q_{i+1}^n-Q_{i-1}^n}{2\Delta x}=q_l$$

如此，可以直接求出断面A在各网点上的值，不需联立求解。但显式差分格式收敛性和稳定性较差，为了保持其稳定性，需严格遵守柯朗条件$\left(c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1,c\text{为小扰动波的波速},c=\sqrt{gh}+u\right)$，时间步长和空间步长受到限制，不能放得很大。

隐式差分是在显式差分的基础上发展起来的，它用$(n+1)$层的未知数代替显式差分中第n层已知值，不能由已知时间层的函数值直接求出，必需通过联立求解方程组才能求得$(n+1)$时刻未知量的解。隐式差分克服了显式差分稳定性差、时间步长受到限制、精度差的缺点。在一维河渠非恒定流计算中，现在广泛应用的有三种格式，即 Lax-Wendroff 格式、Abbott 格式和 Preissmann 格式。实践证明隐式差分格式在一维河网计算或洪水演进计算中是一种行之有效的方法，一般均可获得较满意的结果，但解多维问题时，显得繁琐，一般不采用这种方法。

ADI 法 (Alternating Direction Implicit) 又称交替方程隐式格式，是由 Peaceman-Rachfore 和 Douglas (1955) 同时提出的一种专解二维问题的特殊分步法。其实质是把时间步长分两个

半步，前半步仅对一个空间方向用隐格式（如笛卡尔坐标系中的x方向），对另一个空间方向用显格式（y方向）；后半步则相反，y方向用隐格式，在x方向用显格式。如此就可以把原来较大的系数矩阵化为两个三对角系数矩阵，可以用追赶法求解也可以用迭代法求解。此格式无条件稳定（对线性方程而言），计算效率较高，实际中应用较多，也比较成熟。其局限性在于不太适用于解三维问题，也不适于解微分方程中含有两阶混合导数的二维问题。

§5.1 一维非恒定流数值计算特征线法及其它格式

一维非恒定流数值模拟已有较长的历史，发展较为成熟，在实际生产中应用也最为广泛。现今在计算溃坝、电站压力管的水击、管网供排水、河道洪水演进、河网水力计算、泥沙输移及水质、潮汐计算中仍占主要地位。对于不同事物的任务要求，数值模拟的方法也不相同，因为此中牵扯到了有压流、无压流，急变流、缓变流，单一河道（管道）、复杂河网（管网），单相流、二相流甚至多相流等等，因此，掌握好一维非恒定流数值模拟技术，也并非易事。本章结合一个简单工程实例，讨论明渠非恒定流中常用的一些格式。

5.1.1 一维非恒定流计算的几种常用格式

天然河渠中水流是非常复杂的，根据水流的特点，我们相应的采取不同的计算方法以满足工程需要。本节重点介绍工程实践中计算缓、急流最常用的Preissmann格式、特征格式和扩散格式，并介绍移植于气体动力学的通量向量分裂法。

5.1.1.1 Preissmann隐格式

差分方程：

此格式的网格形式如图5.2所示，在每一个结点上同时求出流量和水位，因变量及其导函数差分形式为

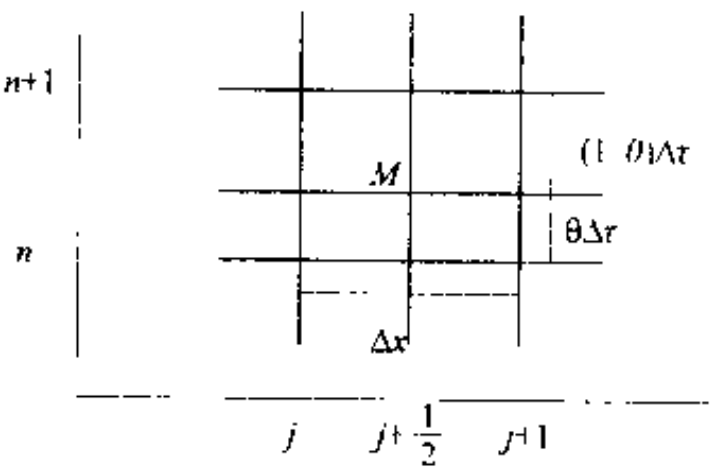


图5.2 Preissmann隐格式网格图

$$f(x,t)=\frac{\theta}{2}(f_{j+1}^{n+1}+f_j^{n+1})+\frac{1-\theta}{2}(f_{j+1}^{n}+f_j^{n})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\approx\frac{\theta}{\Delta x}(f_{j+1}^{n+1}-f_j^{n+1})+\frac{1-\theta}{\Delta x}(f_{j+1}^{n}-f_j^{n}) \tag{5.1.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}\approx\frac{(f_{j+1}^{n+1}+f_j^{n+1})-(f_{j+1}^{n}+f_j^{n})}{2\Delta t}$$

基本方程及差分方程

$$\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{5.1.2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\left(gA-\frac{BQ^2}{A^2}\right)\frac{\partial Z}{\partial x}+2\frac{Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{Q^2}{A^2}\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_z-\frac{g|Q|Q}{AC^2R} \tag{5.1.3}$$

以曼宁公式代入式中阻力项，$\frac{g|Q|Q}{AC^2R}=\frac{n^2g|Q|QB}{A^2\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{3}}}$

把上式代入整理后得：

$$\left.\begin{aligned} aA_{1j}Z_j^{n+1}-C_{1j}Q_j^{n+1}+A_{1j}Z_{j-1}^{n+1}+C_{1j}Q_{j-1}^{n+1}=E_{1j}\\ A_{2j}Z_j^{n+1}-C_{2j}Q_j^{n+1}-A_{2j}Z_{j-1}^{n+1}+D_{2j}Q_{j-1}^{n+1}=E_{2j}\end{aligned}\right\} \tag{5.1.4}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} &A_{1j}=1,\ C_{1j}=2\theta\frac{\Delta t}{\Delta x_j}\frac{1}{B_j^{n+\theta_1}}\\ &E_{1j}=Z_j^n+Z_{j-1}^n+\frac{1-\theta}{\theta}C_{1j}(Q_j^n-Q_{j-1}^n)\\ &A_{2j}=2\theta\frac{\Delta t}{\Delta x_j}\left[\left(\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}{A_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}\right)^2B_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}-gA_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}\right]\\ &C_{2j}=1-4\theta\frac{\Delta t}{\Delta x_j}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}{A_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}};\\ &D_{2j}=1+4\theta\frac{\Delta t}{\Delta x_j}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}{A_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}};\\ &E_{2j}=\frac{1-\theta}{\theta}A_{2j}(Z_{j-1}^n-Z_j^n)+\left[1-4(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x_j}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}{A_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}\right]Q_{j-1}^n+\\ &\left[1+(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x_j}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}{A_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}\right]Q_j^n+2\Delta t\left(\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}{A_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}\right)^2\frac{A_{j-1}(Z_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1})-A_j(Z_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1})}{\Delta x_j}\\ &-2\Delta t\frac{gn^2Q_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}|Q_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}|B_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}{(A_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1})^2\left[\frac{A_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}{B_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}}\right]^{\frac{1}{3}}}\end{aligned}\right\} \tag{5.1.5}$$

式中形如$f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}$的各项可由式 (5.1.1) 中等一式确定，$E_{2j}$计算式中$A_{j-1}(Z_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1})$及$A_j(Z_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1})$分别表示为相应于水位$Z_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}$的$j+1$断面面积及$j$断面面积。求解时，初始条件$Z_j^n$，$Q_j^n$为已知。因此可假定$n$层的参量$Z_j^n$，$Q_j^n$等是已知的，而$j+1$层未知，由上式不能直接明显地解出$Z_j^{n+1}$，$Q_j^{n+1}$，所以在每一时间步长计算时，先取$f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\theta_1}\approx\frac{1}{2}(f_j^n+f_{j-1}^n)$试算的初值，进行迭代求解。

方程组式 (5.1.4) 中含两个非线性代数方程，共有四个未知数Z_j^{n+1}，Q_j^{n+1}，Z_{j-1}^{n+1}，Q_{j-1}^{n+1}，对一个网格而言，方程是不封闭的，但就全河段而言，共N个断面，$2N$个未知数，$N-1$个网格可建立$2(N-1)$个方程，再由上下游边界条件补充两个方程，就可构成封闭方程组，联立求解。求解可用较为有效的双消去法 (追赶法)。

5.1.1.2　扩散格式

差分方法：

该格式的特点是：对距离用中心差分，对时间用带权前差，对系数及不含微商项用$(x, t)_j$上的值。即：

$$\frac{\partial f}{\partial x}\approx\frac{f_{j+1}^n-f_j^n}{2\Delta x}\qquad(\text{如不等间距则 } 2\Delta x \text{ 改为}\Delta x_{j+1}+\Delta x_j) \tag{5.1.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\approx f_j^{n+1}\frac{-\tilde{f}_j^n}{\Delta t} \tag{5.1.7}$$

其中$\tilde{f}_j^n=\alpha f_j^n+\frac{1-\alpha}{2}(f_{j+1}^n+f_{j-1}^n)$

把 (5.1.6)、(5.1.7) 代入基本方程 (5.1.2)、(5.1.3) 则得差分方程：

$$Z_j^{n+1}=\alpha Z_j^n+\frac{1-\alpha}{2}(Z_{j+1}^n+Z_{j-1}^n)-\frac{\Delta t}{2B_j^n\Delta x}(Q_{j+1}^n-Q_{j-1}^n) \tag{5.1.8}$$

$$Q_j^{n+1}=\alpha Q_j^n+\frac{1-\alpha}{2}(Q_{j+1}^n+Q_{j-1}^n)-\left(\frac{Q}{A}\right)_j^n\frac{\Delta t}{\Delta x}(Q_{j+1}^n-Q_{j-1}^n)-$$

$$\left(gA-\frac{BQ^2}{A^2}\right)_j^n\frac{\Delta t}{2\Delta x}(Z_{j+1}^n-Z_{j-1}^n)+$$

$$\left[\left(\frac{Q}{A}\right)_j^n\right]^2\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[A_{j+1}(Z_j^n)-A_{j-1}(Z_j^n)\right]-g\Delta t\left(\frac{|Q|Q}{AC^2R}\right)_j^n \tag{5.1.9}$$

式中$A_{j+1}(Z_j^n)$、$A_{j-1}(Z_j^n)$ 分别表示水位为 Z_j^n 时$j+1$断面及$j-1$断面上的过水断面面积，如图 5.3 所示。

方程式 (5.1.8)、(5.1.9) 是针对内点而言的，但边界点不一样，多了一个表达边界条件的方程式，形成方程式多于未知数的矛盾。一种解决方法是将连续性方程和动量方程综合为一个偏微方程，并推导出边界点条件方程式 (Stoker 等人曾利用这种方法)；另一种考虑是在边界上不建立连续性方程和动量方程而引入特征方程，如上游引入逆特征方程，下游引入顺特征方程，问题得以解决。

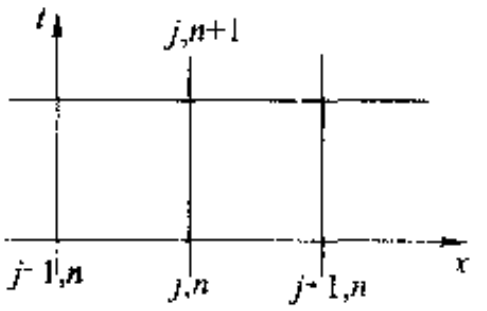


图5.3　扩散格式网格图

5.1.1.3　柯朗格式

柯朗格式的特点是以已知点M的特征方向代替待求点P的特征方向并以M点的已知量计算特征方程的系数及非导数项，所得一种线性逼近格式，如图 5.4 (a)、(b) 所示。

基本方程：

将方程 (5.1.2)、(5.1.3) 稍作变形得：

$$B\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{5.1.10}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+2\frac{Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}+\left[gA-B\left(\frac{Q}{A}\right)^2\right]\frac{\partial Z}{\partial x}=N \tag{5.1.11}$$

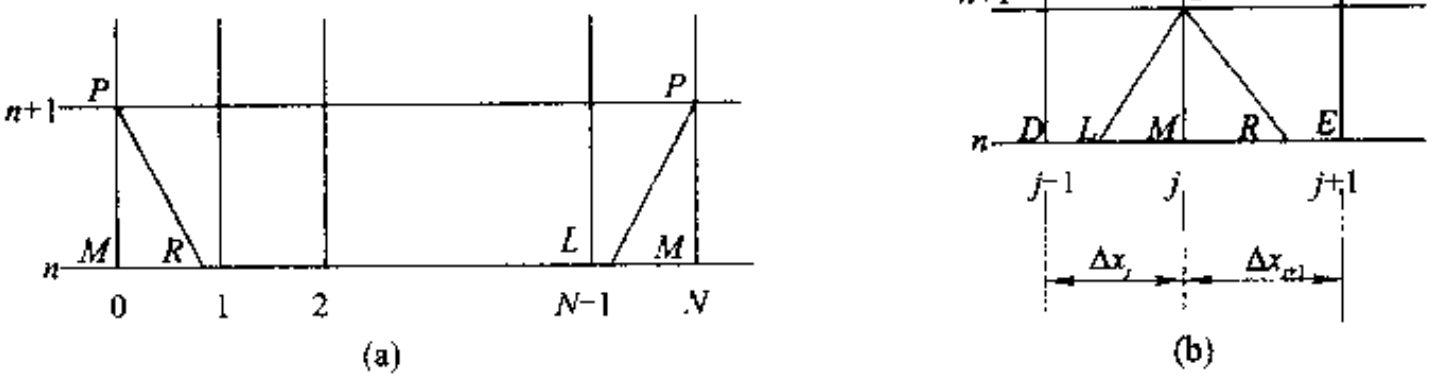


图5.4　柯朗格式示意图

其中
$$N=B\left(\frac{Q}{A}\right)^2 i-\frac{gQ^2}{AC^2R}=B\left(\frac{Q}{A}\right)^2 i-\frac{gQ^2n^2P^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{7}{3}}}$$

i 为底坡，P 为断面湿周。

特征关系：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=W_{\pm}=u\pm\sqrt{g\frac{A}{B}} \tag{5.1.12}$$

$$(BW_{-})\mathrm{d}Z-\mathrm{d}Q=-N\mathrm{d}t$$

差分方程与内点计算公式：

$$Z_I=Z_M+\frac{(W_{+})_M\Delta t}{\Delta x_j}(Z_D-Z_M)\ ;\qquad Q_I=Q_M+\frac{(W_{+})_M\Delta t}{\Delta x_j}(Q_D-Q_M)\ ;$$

$$Z_R=Z_M+\frac{(W_{-})_M\Delta t}{\Delta x_{j+1}}(Z_M-Z_I)\ ;\qquad Q_R=Q_M+\frac{(W_{-})_M\Delta t}{\Delta x_{j+1}}(Q_M-Q_I)\ ;$$

$$(BW_{+})_M(Z_P-Z_I)-Q_P+Q_I=-(N)_M\Delta t$$

$$(BW_{-})_M(Z_P-Z_R)-Q_P+Q_R=-(N)_M\Delta t \tag{5.1.13}$$

由上式解得Z_P 和Q_P，即

$$Z_P=\frac{1}{(BW_{-})_M-(BW_{+})_M}[Q_R-Q_I+(BW_{-})_MZ_I-(BW_{+})_MZ_R]$$

$$Q_P=Q_R+(BW_{+})_M(Z_P-Z_R)+(N)_M\Delta t$$

边界点计算

根据边界（上、下游）条件，如已知水位或流量过程，即可利用特征关系求出相应的流量（或水位）。

柯朗格式的稳定性条件

柯朗显格式的稳定性条件即柯朗条件

$$\left|W_+\right| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$$

需要说明的是隐格式是无条件稳定的，其步长比可以不受柯朗条件的限制，但对非线性方程而言时间步长虽可适当加大，但也不能太大， 般经验柯朗数小于 10，为工程界所常用。

5.1.1.4 通量向量分裂法 (FVS)

首先考虑一维气体动力学和守恒律方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})}{\partial x} = 0 \tag{5.1.14}$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0$$

式中 $\boldsymbol{U}$ 为物理守恒量组成的 N 阶向量，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})$ 为物理通量，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ 是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 的 Jacobi 矩阵，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})=\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})}{\partial \boldsymbol{U}}$。令 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ 的特征值及相应的左、右特征向量为 $\boldsymbol{a}_K(u)$，$\boldsymbol{l}_K(u)$，$\boldsymbol{r}_K(u)$，$K=1, 2, \cdots N$。左、右特征向量组成 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})$、$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})$ 且 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})$ 互为对方的逆矩阵。于是可以先将 $A(u)$ 分裂成两部分

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{U})$$

式中：

$$\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) + |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})|) = \boldsymbol{R}^{+}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})$$

$$\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) - |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})|) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{L}(\boldsymbol{U})$$

$$\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{U}) = \mathrm{diag}(\boldsymbol{a}_1^{+}(\boldsymbol{U}),\ \boldsymbol{a}_2^{+}(\boldsymbol{U}),\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_N^{+}(\boldsymbol{U}))$$

$$\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{U}) = \mathrm{diag}(\boldsymbol{a}_1^{-}(\boldsymbol{U}),\ \boldsymbol{a}_2^{-}(\boldsymbol{U}),\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_N^{-}(\boldsymbol{U})) \tag{5.1.15}$$

$$\boldsymbol{a}_K^{+}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_K(\boldsymbol{U}) + |\boldsymbol{a}_K(\boldsymbol{U})|) \geqslant 0$$

$$\boldsymbol{a}_K^{-}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_K(\boldsymbol{U}) - |\boldsymbol{a}_K(\boldsymbol{U})|) \leqslant 0\ ,\ K=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

即把矩阵分裂成只含非负特征值的矩阵 $\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{u})$ 与只含非正特征值的矩阵 $\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{u})$ 之和。接着再把通量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 也分裂成两部分

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{f}^{+}(\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{f}^{-}(\boldsymbol{U}) \tag{5.1.16}$$

$$\boldsymbol{f}^{+}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U} = \sum_{K=1}^{N} \boldsymbol{a}_K^{+}(\boldsymbol{U})[\boldsymbol{l}_K(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}]\boldsymbol{r}_K(\boldsymbol{U})$$

式中
$$\boldsymbol{f}^{-}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}=\sum_{K=1}^{N}\boldsymbol{a}_K(\boldsymbol{U})[1_K(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}]\boldsymbol{r}_K(\boldsymbol{U}) \tag{5.1.17}$$

已不再是 $\boldsymbol{U}$ 的一次齐次函数。

守恒律方程组 (5.1.14) 的通量分裂法的差分格式具有以下形式：

$$\boldsymbol{U}_i^{n}=\boldsymbol{U}_i^{n}-\lambda[\boldsymbol{f}^{-}(\boldsymbol{U}_i^{n})-\boldsymbol{f}^{-}(\boldsymbol{U}_{i-1}^{n})]-\lambda[\boldsymbol{f}^{-}(\boldsymbol{U}_{i+1}^{n}-\boldsymbol{f}^{-}(\boldsymbol{U}_i^{n})]$$

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1}=\boldsymbol{U}_i^{n}-\lambda(\hat{\boldsymbol{f}}_{i+\frac{1}{2}}-\hat{\boldsymbol{f}}_{i-\frac{1}{2}}),\quad \lambda=\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\boldsymbol{f}_{i-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{f}^{-}(\boldsymbol{U}_i^{n})+\boldsymbol{f}^{+}(\boldsymbol{U}_{i-1}^{n}) \tag{5.1.18}$$

显然当通量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$退化到线性函数时 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{A}$ = 常数矩阵，通量分裂格式 (5.1.18) 也就成了迎风格式。因此，通量分裂格式 (5.1.18) 也是一种迎风格式。但是对圣维南方程组（或浅水方程组），$\boldsymbol{f}$ 并不具有齐次性，即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})\neq\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}$，从而不能直接由 $\boldsymbol{A}$ 的分裂导出 $\boldsymbol{f}$ 的分裂。因此需要采取特殊处理。

先列出一维非棱柱形河道的守恒型连续方程及动量方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x}=\boldsymbol{G} \tag{5.1.19}$$

式中
$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}A\\Q\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}Q\\\dfrac{Q^2}{A+P}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0\\gA(S_0-S_f)+R\end{pmatrix} \tag{5.1.20}$$

其中$\boldsymbol{G}$ 为非齐次项向量；A 为过水断面面积；Q 为流量；S_0 和S_f 分别为河底比降和摩阻比降；g 为重力加速度；t 为 x 沿河距离；ρP 为作用在断面上的静水总压力，$P=\mathrm{g}Ah_c$，h_c 为断面形心与水面的高差；ρR 表示由于断面沿程变化而形成的单位长度的反作用力在 x 方向的投影。

$$R=\mathrm{g}\int_0^{h(x,\,t)}[h(x,\,t)-\xi]\left.\frac{\partial b}{\partial x}\right|_{\xi}\mathrm{d}\,\xi=\frac{\partial P}{\partial x}-gA\frac{\partial A}{\partial x}$$

其中 h 为水深；b 为相应于水深哑变量ξ 的端面宽。对棱柱形河道有$R=0$。

第一种处理方法：利用气体动力学的比拟，给圣维南方程组增加一个能量方程：

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(E+P)\frac{m}{\rho}\right]=0 \tag{5.1.21}$$

式中密度 ρ、动量 m 和内能E，形式上分别相应于A，Q 和$P+\dfrac{Q^2}{2A}$由此得到如下方程组的形式，且

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}A\\Q\\E\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})=\begin{pmatrix}Q\\E+\dfrac{Q^2}{2A}\\\dfrac{2EQ}{A}-\dfrac{Q^3}{2A^2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})=\begin{pmatrix}0\\gA(S_0-S_f)+R\\0\end{pmatrix} \tag{5.1.22}$$

然后求出 Jacobi 阵进行分裂，但推导较为繁杂，不再赘述。

第二种处理方法系移植自实际的气体动力学计算，在该情形中通量$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}$。关键是寻找矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}$满足$\boldsymbol{F}=\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{U}$，但此时$\overline{\boldsymbol{A}}\neq\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}$，不难验证，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ gh-u^2 & \frac{Q}{A}\end{pmatrix} \tag{5.1.23}$$

特征值 $\bar{\lambda}_1=\frac{u+\sqrt{u^2+4gh}}{2}$，$\bar{\lambda}_2=\frac{u-\sqrt{u^2+4gh}}{2}$ $(u=\frac{Q}{A})$

显然 $\bar{\lambda}_1>0$，$\bar{\lambda}_2<0$，故

$$\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^+=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{\Lambda}}^-=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \bar{\lambda}_2\end{pmatrix} \tag{5.1.24}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{L}=R^{-1}=\frac{1}{\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1}\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_2 & -1\\ -\bar{\lambda}_1 & 1\end{pmatrix} \tag{5.1.25}$$

则

$$\boldsymbol{A}^-=\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}^-\boldsymbol{L}=\frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1}\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_2 & -1\\ \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 & -\bar{\lambda}_1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}^+\boldsymbol{L}=\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1}\begin{pmatrix}-\bar{\lambda}_1 & 1\\ -\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}^+=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{U}=\frac{\bar{\lambda}_1(\bar{\lambda}_2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q})}{\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1}\begin{pmatrix}1\\ \bar{\lambda}_1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}^-=\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{U}=\frac{\bar{\lambda}_2(\boldsymbol{Q}-\bar{\lambda}_1\boldsymbol{A})}{\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1}\begin{pmatrix}1\\ \bar{\lambda}_2\end{pmatrix}$$

此时代入公式 (5.1.18) 并代入非齐次向量$\boldsymbol{G}$，即可完成内点计算。边界点计算可直接引入上下游特征方程进行计算。

例 5.1 某电站由引水渠道从水库引水。引水渠长 5 089.2 m，底坡$i=0.000\,2$，糙率$n=0.013$。渠道断面为梯形，底宽$b=5$ m，边坡系数$m=3$。今在$s=5\,089.2$ m 处取水供水轮机发电用，开机过程其流量变化规律是在 20 分钟内从$Q_0=30\ \mathrm{m^3/s}$，直线增至 $150\ \mathrm{m^3/s}$；关机过程是等待完全稳定后，在 20 分钟内流量再由 $150\ \mathrm{m^3/s}$ 直线下降到 $30\ \mathrm{m^3/s}$。由于水库库容极大，在渠道的起始断面 (进水口) 上的水位可认为保持不变，该处水深$h=4.5$ m 也可看作是常数，不随流量而变化。恒定流时，渠道最下游端断面 (取水处) 水深 $h=5.5$ m。经过恒定流水面曲线计算，求得初始条件如表 5.1。

要求计算：①渠道起始断面的流量过程线，②最终断面的水位过程线，③开启与关闭稳定后的水面线及各断面的流量。

下面即为按照前一节介绍的四种方法 Preissmann 隐格式、扩散显格式、特征线显格式、

表 5.1　恒定流水面曲线计算所得初始条件

断面	0	1	2	3	4	
上下断面间距 (m)	0	513.4	512.1	510.9	509.9	
底面高程Z_0 (m)	11.018	10.915	10.81	10.71	10.61	
水面高程Z (m)	15.518	15.515	15.51	15.51	15.51	
流量 (m^3/s)	30	30	30	30	30	
断面	5	6	7	8	9	10
上下断面间距 (m)	509.0	508.1	507.4	506.7	506.1	505.5
底面高程Z_0 (m)	10.51	10.41	10.3	10.2	10.1	10.0
水面高程Z (m)	15.51	15.51	15.5	15.5	15.5	15.5
流量 (m^3/s)	30	30	30	30	30	30

通量向量分裂显格式，进行计算所得到的结果 (四种格式计算成果比较见表 5.2 及图 5.5、图 5.6 和图 5.7)。

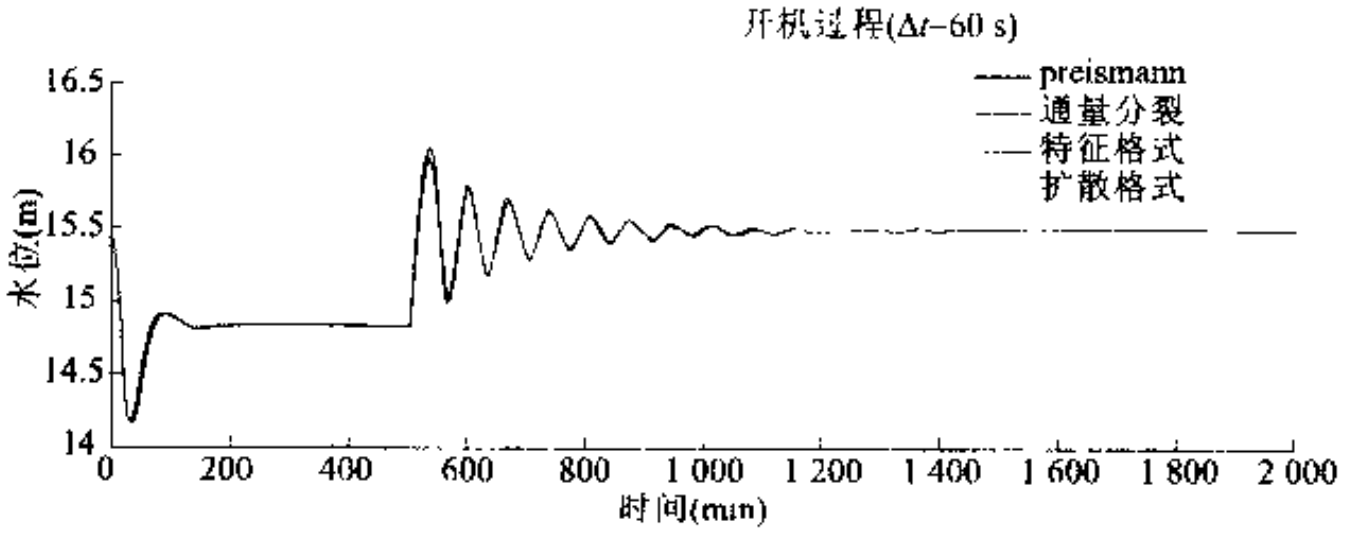


图5.5　四种格式计算末断面水位过程线比较

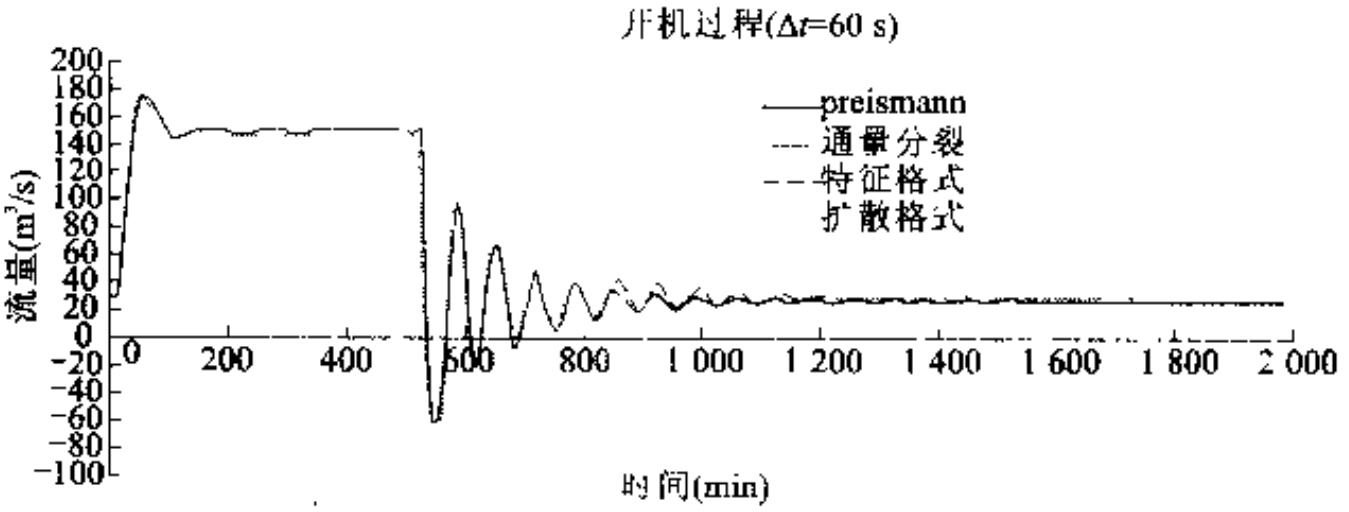
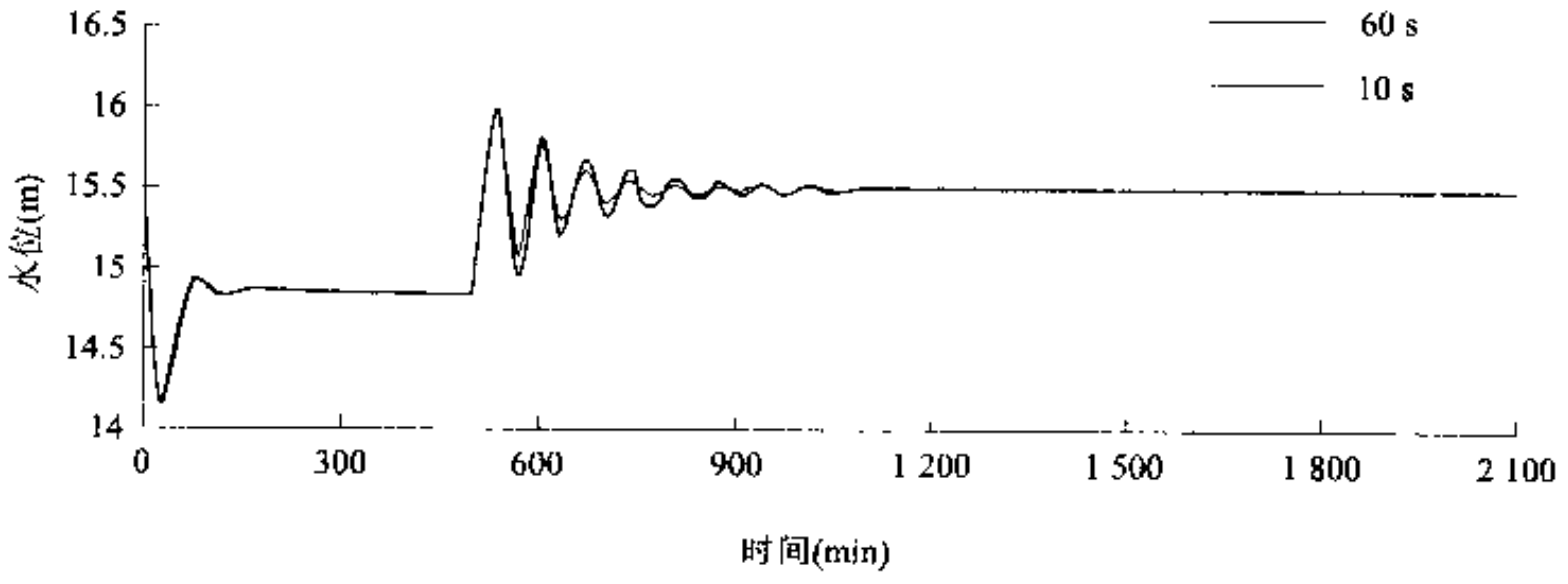
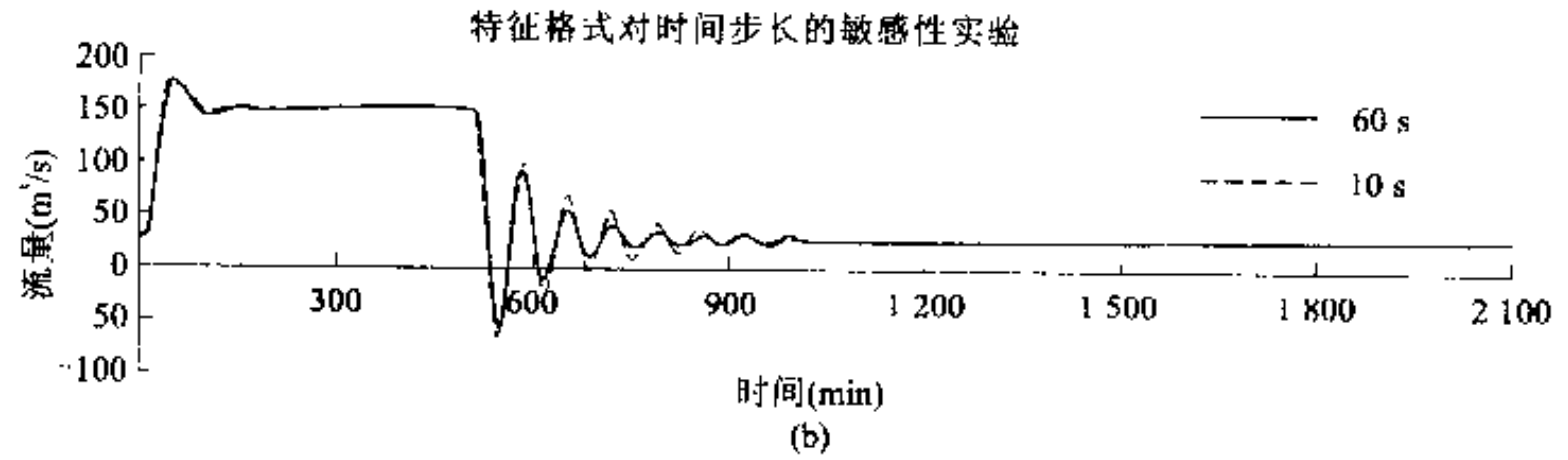


图5.6　四种格式计算进口断面流量过程比较

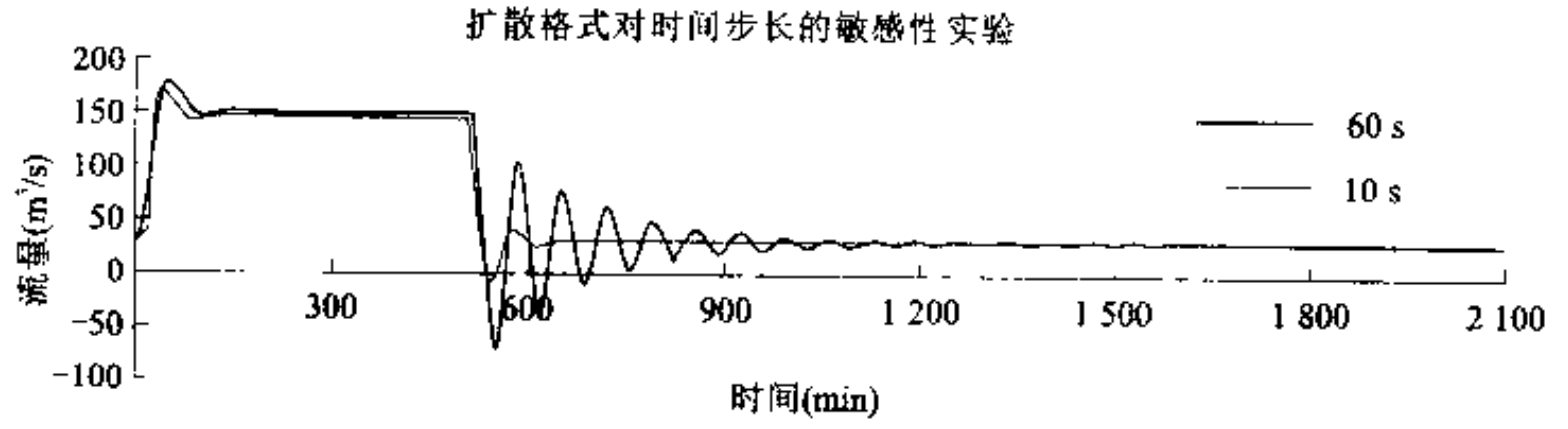
由表中可见，在显格式计算过程中将空间分为 10 段，每段约 500 米，由已知条件可知：最大流速约为 0.35 m/s，根据柯朗条件得：


特征格式对时间步长的敏感性实验
16.5
16
15.5
15
14.5
14
水位(m)
0
300
600
900
1 200
1 500
1 800
2 100
60 s
10 s
时间(min)

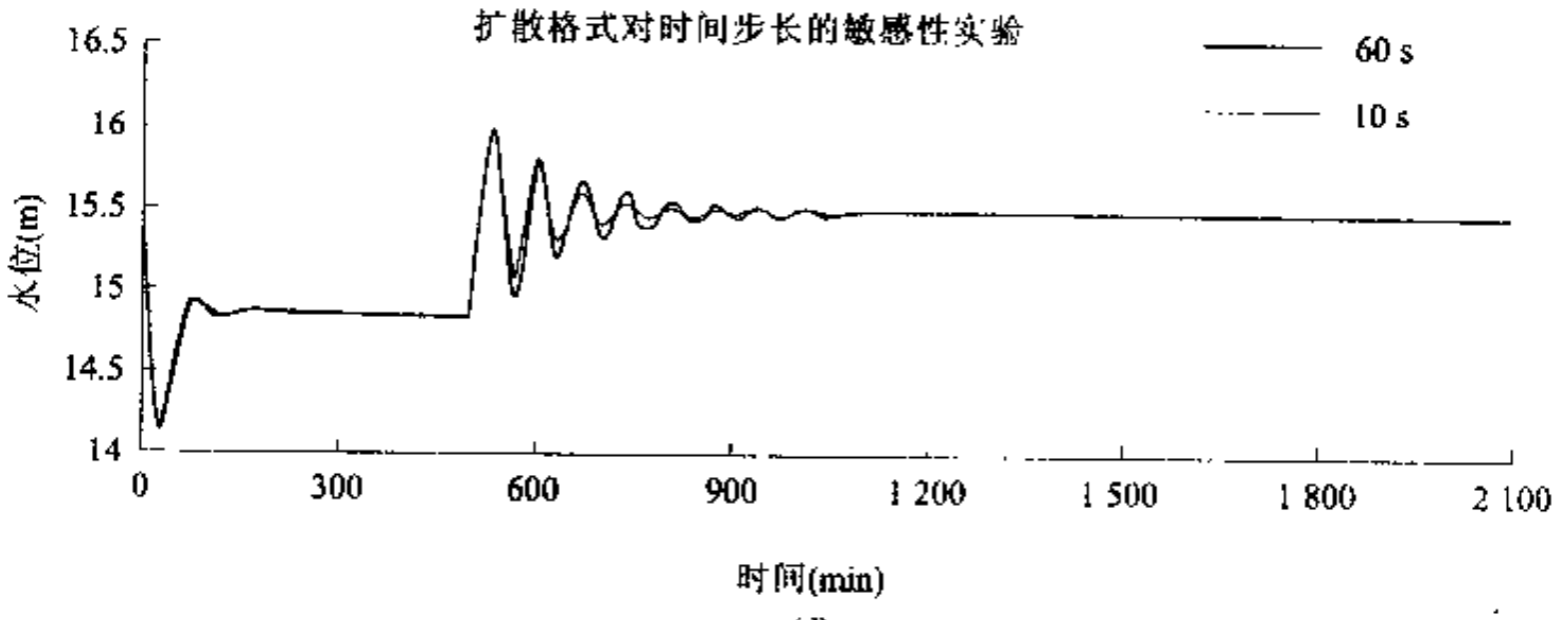
(a)


特征格式对时间步长的敏感性实验
200
150
100
50
0
50
-100
流量(m³/s)
300
600
900
1 200
1 500
1 800
2 100
60 s
10 s
时间(min)

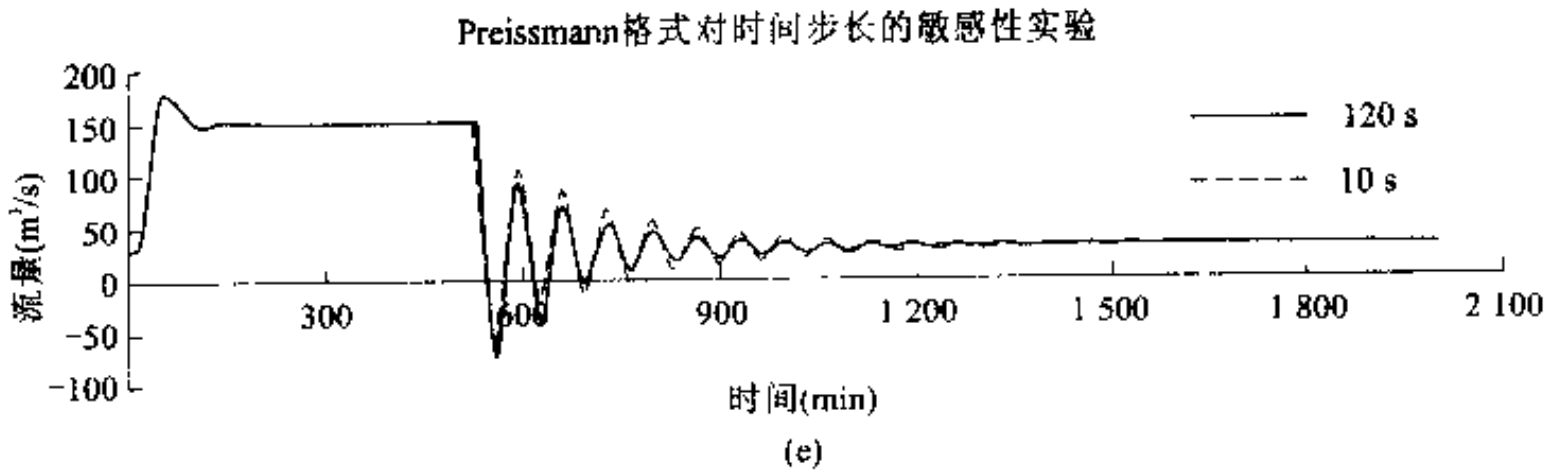
(b)


扩散格式对时间步长的敏感性实验
200
150
100
50
0
-50
-100
流量(m³/s)
300
600
900
1 200
1 500
1 800
2 100
60 s
10 s
时间(min)

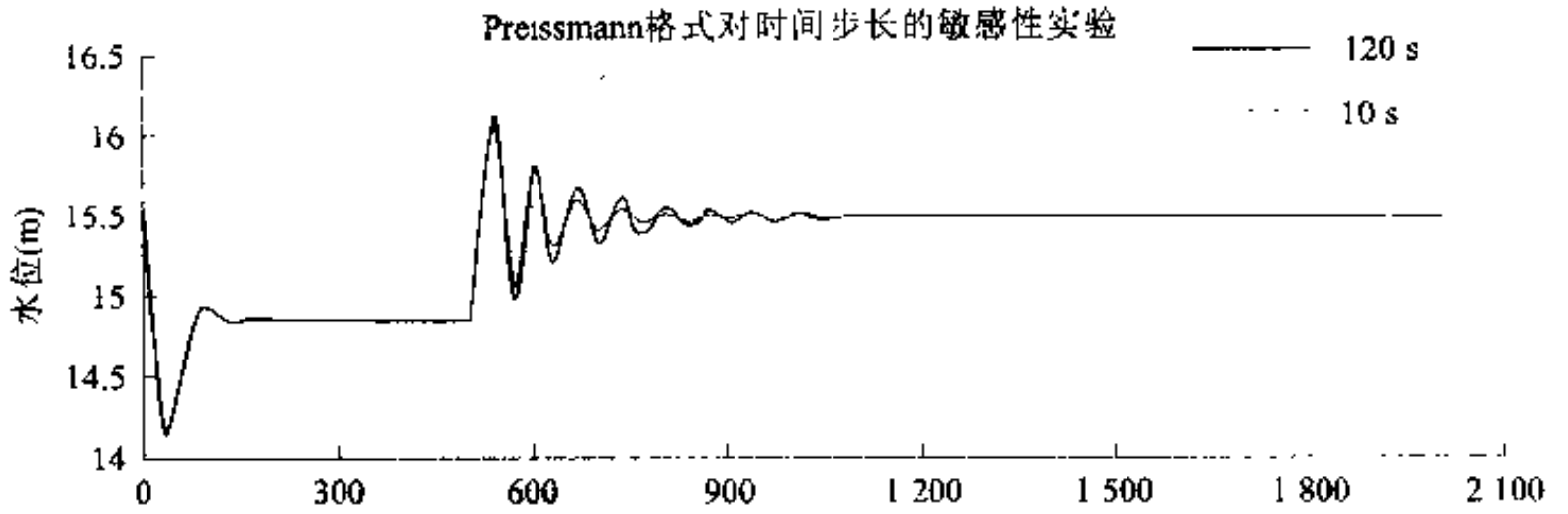
(c)


扩散格式对时间步长的敏感性实验
16.5
16
15.5
15
14.5
14
水位(m)
0
300
600
900
1 200
1 500
1 800
2 100
60 s
10 s
时间(min)

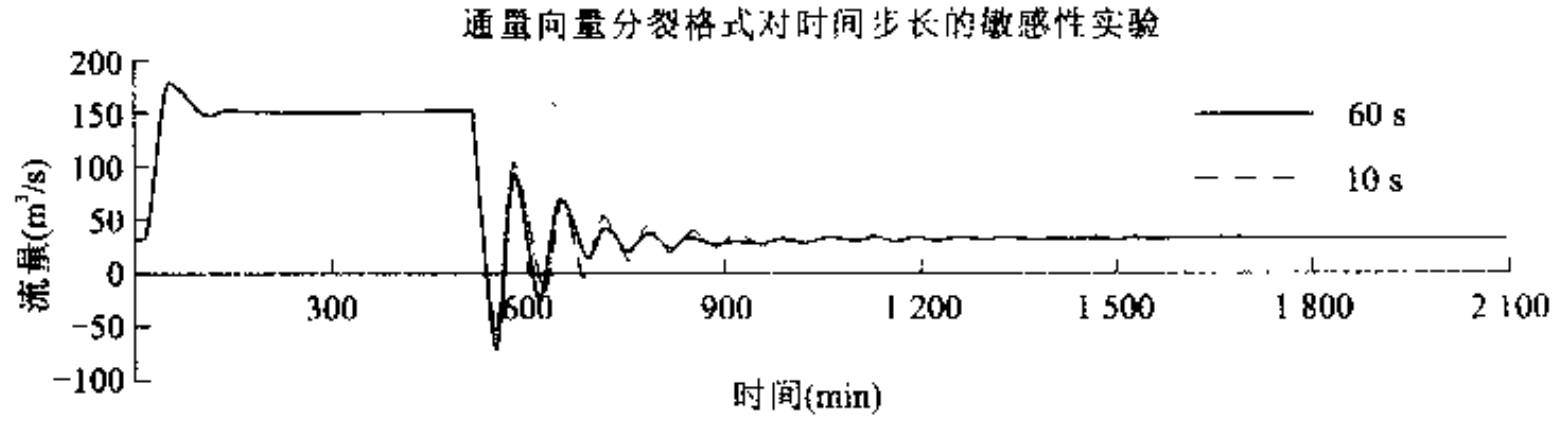
(d)



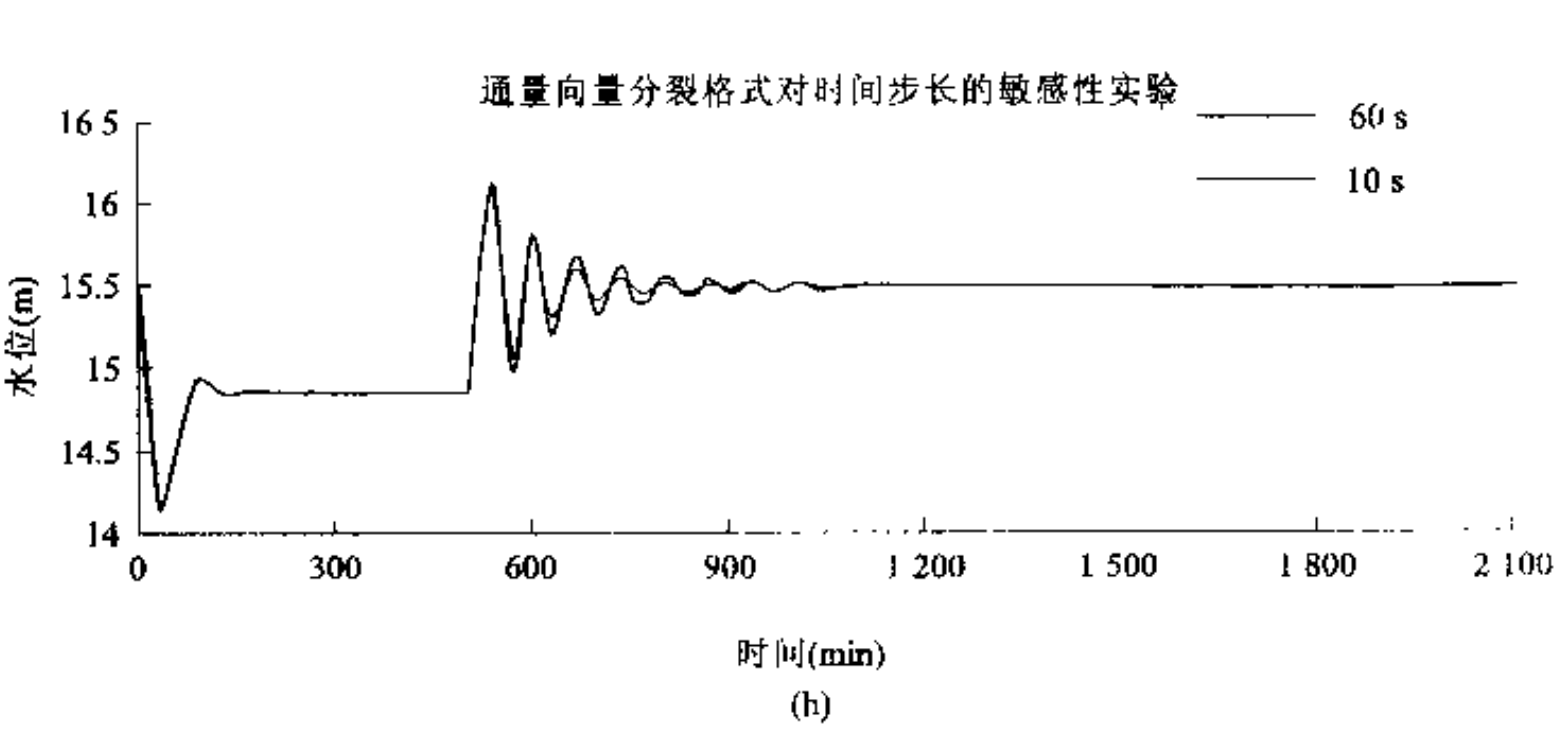
(e)



(f)



(g)



(h)

图5.7　四种格式对时间步长的敏感性实验结果

表 5.2　四种格式计算成果比较　　(开机过程Δ t =60 s)

时间 (min)	计算进口断面的流量过程 (m³/s)				计算末断面的水位过程 (m)			
	Preissmann 隐格式	通量分裂格式	特征格式	扩散格式	Preissmann 隐格式	通量分裂格式	特征格式	扩散格式
4	29.72	30.34	30.15	30.17	15.38	15.40	15.37	15.37
8	29.20	29.73	29.68	29.66	15.23	15.26	15.23	15.23
12	29.26	30.20	30.24	30.10	15.06	15.09	15.04	15.04
16	38.77	30.61	38.37	36.81	14.83	14.88	14.81	14.82
20	61.16	48.56	60.31	58.63	14.51	14.59	14.49	14.50
24	88.27	75.38	87.82	87.02	14.35	14.40	14.33	14.34
28	114.41	110.57	114.22	114.03	14.22	14.25	14.19	14.19
32	137.29	124.50	137.04	137.36	14.17	14.16	14.14	14.12
36	155.08	141.57	155.08	155.60	14.21	14.17	14.18	14.17
40	166.58	157.19	167.09	167.36	14.29	14.23	14.27	14.26
44	172.92	168.14	173.75	173.85	14.39	14.31	14.37	14.37
48	175.75	173.11	176.78	176.81	14.50	14.39	14.48	14.49
52	176.21	175.50	177.48	177.29	14.59	14.49	14.58	14.59
56	174.99	176.96	176.56	175.97	14.68	14.58	14.67	14.68
60	172.50	177.11	174.38	173.37	14.75	14.65	14.74	14.75
64	169.08	175.86	171.18	169.82	14.81	14.72	14.80	14.81
72	160.78	170.56	162.83	161.29	14.89	14.82	14.89	14.89
96	143.86	149.31	143.98	143.89	14.90	14.91	14.91	14.90
120	146.06	145.60	145.86	146.32	14.83	14.84	14.84	14.83
160	148.58	151.12	149.02	148.91	14.85	14.83	14.85	14.85
196	147.80	149.91	148.02	148.08	14.85	14.84	14.85	14.85
240	148.01	149.99	148.30	148.32	14.85	14.84	14.85	14.84
300	147.97	150.00	148.24	148.27	14.85	14.84	14.85	14.84
360	147.98	150.01	148.25	148.28	14.85	14.84	14.85	14.84
500	147.98	150.00	148.25	148.28	14.85	14.84	14.85	14.84
504	147.98	149.97	148.25	148.28	15.04	14.99	15.05	15.04
512	147.92	150.51	148.23	148.24	15.44	15.38	15.44	15.44
528	84.51	121.10	95.53	93.66	15.97	15.93	15.96	15.96
532	37.86	68.69	49.71	49.19	16.01	16.01	16.01	16.01
536	−8.09	5.91	−0.01	−2.15	16.01	16.09	16.02	16.02
544	−56.84	−44.66	−51.32	−53.49	15.79	15.94	15.81	15.82
548	−67.43	−60.13	−64.29	−66.83	15.60	15.72	15.61	15.62
560	−24.73	−38.74	−28.29	−32.58	15.10	15.20	15.10	15.08

续表

时间 (min)	计算进口断面的流量过程 (m^3/s)				计算末断面的水位过程 (m)			
	Preissmann 隐格式	通量分裂格式	特征格式	扩散格式	Preissmann 隐格式	通量分裂格式	特征格式	扩散格式
568	39.08	26.53	38.88	39.54	14.98	15.03	14.97	14.94
576	82.89	71.30	83.64	86.59	15.18	15.11	15.16	15.12
588	92.72	99.09	98.26	102.20	15.62	15.56	15.62	15.63
604	12.37	27.06	17.41	15.68	15.80	15.83	15.82	15.85
612	−19.85	−7.62	−17.16	−20.72	15.67	15.74	15.68	15.71
616	−26.53	−21.04	−25.81	−31.08	15.57	15.63	15.57	15.58
628	−2.09	13.34	−3.99	−9.25	15.28	15.33	15.28	15.25
632	15.07	4.08	13.97	11.73	15.23	15.26	15.22	15.19
640	47.54	38.87	48.20	50.10	15.26	15.20	15.24	15.19
652	68.30	72.98	72.44	78.25	15.49	15.43	15.49	15.49
656	64.87	76.10	70.02	76.62	15.57	15.52	15.57	15.57
672	18.90	31.88	22.57	22.13	15.68	15.72	15.69	15.73
684	−3.22	−3.80	−3.04	−9.31	15.54	15.60	15.54	15.56
692	2.80	−6.61	1.87	−4.95	15.42	15.46	15.42	15.41
696	10.87	0.47	10.15	5.09	15.38	15.39	15.37	15.34
720	51.27	59.71	55.15	61.33	15.50	15.44	15.49	15.49
724	49.04	61.24	53.32	59.76	15.54	15.50	15.54	15.55
748	11.81	13.70	12.86	8.60	15.56	15.61	15.5	15.59
752	9.98	7.16	10.37	4.65	15.52	15.57	15.52	15.54
760	13.66	5.17	13.58	7.84	15.45	15.48	15.45	15.44
788	41.44	50.14	44.86	50.23	15.50	15.46	15.50	15.49
792	40.01	51.17	43.59	49.00	15.53	15.50	15.53	15.53
820	17.55	14.68	18.28	13.61	15.51	15.55	15.51	15.52
824	18.05	12.60	18.59	13.60	15.49	15.52	15.49	15.49
860	34.83	44.47	37.89	42.16	15.52	15.50	15.52	15.52
912	30.50	30.41	32.57	33.55	15.48	15.44	15.47	15.45
1 200	28.35	32.20	30.39	31.22	15.50	15.50	15.50	15.50
1 500	27.89	29.71	29.79	29.66	15.50	15.50	15.50	15.50
1 600	27.96	30.13	29.88	29.98	15.50	15.50	15.50	15.50
1 820	27.94	30.07	29.85	29.88	15.50	15.50	15.50	15.50
2 000	27.94	29.99	29.85	29.88	15.50	15.50	15.50	15.50

$$\Delta t \leqslant \left[\frac{\Delta s}{v+\sqrt{g\frac{A}{B}}}\right]_{\max} \approx \frac{500}{0.36+\sqrt{9.8\times\frac{118.25}{38}}} \approx 85\ \text{s}$$ 这里取为 60 s。

上面介绍了一维非恒定流计算中的四种常用格式，并结合工程实例具体讨论其运用情况，由数值实验可知，在步长适当的前提下，四种格式计算所得结果都非常接近，成果可以互相验证。观察数值实验结果可得出如下结论：

①Preissmann 隐格式对时间步长变化最不敏感，而且不受柯朗条件限制（本例计算中取Δt=120 s>85 s，计算仍然稳定，成果合理），是一种较经济的格式。

②扩散格式对时间步长变化反应非常敏感，当步长过小时，结果会出现失真，精度比较差。

③特征格式和通量向量分裂格式在满足柯朗条件的前提下具有计算稳定，程序简单，计算速度快，结果可靠的特点。

④同样的边界条件在涨水和落水的情况下(相当于本例计算中水轮机的开启和关闭过程)，非恒定流计算结果并不对称。因此，在非恒定流计算中，对于涨水和落水过程要区别对待。

§5.2 水网数值计算特点分析及其应用

水网包括管网与河网，内容有恒定流与非恒定流，它在实际工程中有重要应用，虽然目前的计算尚属一维范畴，但对于大型管网与河网的实际问题，远未达到成熟程度，我们这里先叙述其数值计算特点再列举若干算例供参考。

5.2.1 管网计算

水网计算的基本方程为质量守恒的连续性方程、能量守恒的伯努利方程，有时对于非恒定流也用动量方程，这在管网与河网都是一致的。所不同的是管网与河网在几何条件上的差别，管网在断面方面对某一段管网而言往往是不变的，而河网的河渠断面几何形状在非均匀流与非恒定的情况下是不断变化的，在这方面管网计算较河网计算容易些。

本书对管网与河网的计算将采取综合统一论述的办法，加强其概括性并节省篇幅。

通常水网分枝状网与环状网。

管道恒定流对单一管段，沿管段流量Q守恒，以A表示管道断面面积，v为断面平均流速，则有

$$Q=Av \tag{5.2.1}$$

对管网中任一结点上的流量应平衡，其代数和应为零：即

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{ij} Q_i = 0 \tag{5.2.2}$$

式中Q_i为沿支管i，汇入j结点的流量，ε_{ij}为流量正负号信息，$\varepsilon_{ij}=+1$，为流入j点，$\varepsilon_{ij}=-1$为流出j点。

通过单一管段的能量损失与管道两端点水压之间的沿程损失h_f与局部损失h_j有关

$$\Delta h=\lambda\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}+\varsigma\frac{v^2}{2g}+\Delta h_{水轮机}-\Delta h_{泵} \tag{5.2.3}$$

沿程水头损失：$\lambda\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}=r\,Q^2=\Delta h$

其中$r=\frac{8\lambda L}{g\pi^2D^5}$，为管道阻力系数，局部阻力也可加进$r$中，泵的水头差用：$\Delta h_{泵}=\frac{P\eta}{\rho gQ}$计，式中$P$为泵的功率；$\eta$为效率系数；$\rho g$为容重($\gamma=\rho g=9.8\ \mathrm{kN/m^3}$)。

不论对于枝状网或环状网，我们有

$$\sum_{l=1}^{l}\Delta h_l=\sum_{l=1}^{l}r_l|Q_l|Q_l \tag{5.2.4}$$

式中l为管段号，L为连续一个支段或一个环路上管段总数，所不同的是对于环路水头损失的代数和应该为零，即$\sum_{l=1}^{L}\Delta h_l=0$。

管网计算问题大体上有两大类：①已知管道材料、长度和管径，计算通过管道的流量及结点水头；②设计管道，确定管径，此时管道供水流量往往是已知的。

不论哪种情形，可以用以上公式，反复计算直至满足要求。

在第一次初步计算时，由于方程是非线性的，并且要求是多方面的，最先的结果并不能完全地马上就满足流量平衡与能量守恒条件。须逐步迭代逼近，早期采用的是 Hardy-Cross 平差的办法。目前已有改进的方案。

如果环路水头损失不为零，而有误差

$$R=\sum_{l=1}^{l}r_l|Q_l|Q_l$$

要使R为0，修改的办法是按下式取环路修正流量（顺时针方向为正）

$$\Delta Q=\frac{-\sum r_lQ_l^2}{2\sum r_lQ_l} \tag{5.2.5}$$

对闭合环路上各管段流量进行若干次修正，直到收敛于最终流量连续性与能量守恒为止。管段流量改正值Q_l'，可按以下简式计算

$$Q_l'=Q_l+A_{lj}\Delta Q_j \tag{5.2.6}$$

j环路顺时针方向与Q_l一致时，$A_{lj}=1$，否则$A_{lj}=-1$。

下面的例子介绍 Hardy-Cross 方程的计算步骤和程序。

例 5.2 在图 (5.8) 所示的环状管网中，各管段长及管径见表 5.3，糙率均采用$n=0.012\ 5$，各节点供水流量，分别为$Q_a=80\ \mathrm{L/s}$，$Q_b=10\ \mathrm{L/s}$，$Q_c=15\ \mathrm{L/s}$，$Q_d=55\ \mathrm{L/s}$。试确定各管段的流量及水头损失。

解：①在各环中先设定水流方向，环路按顺时针为正；

②初步分配流量，计算管段水头损失；

③对管段流量进行修正，重新分配，流量校正式按 (5.2.6) 式计算；

④按修正后的流量分配，重新计算水头损失；

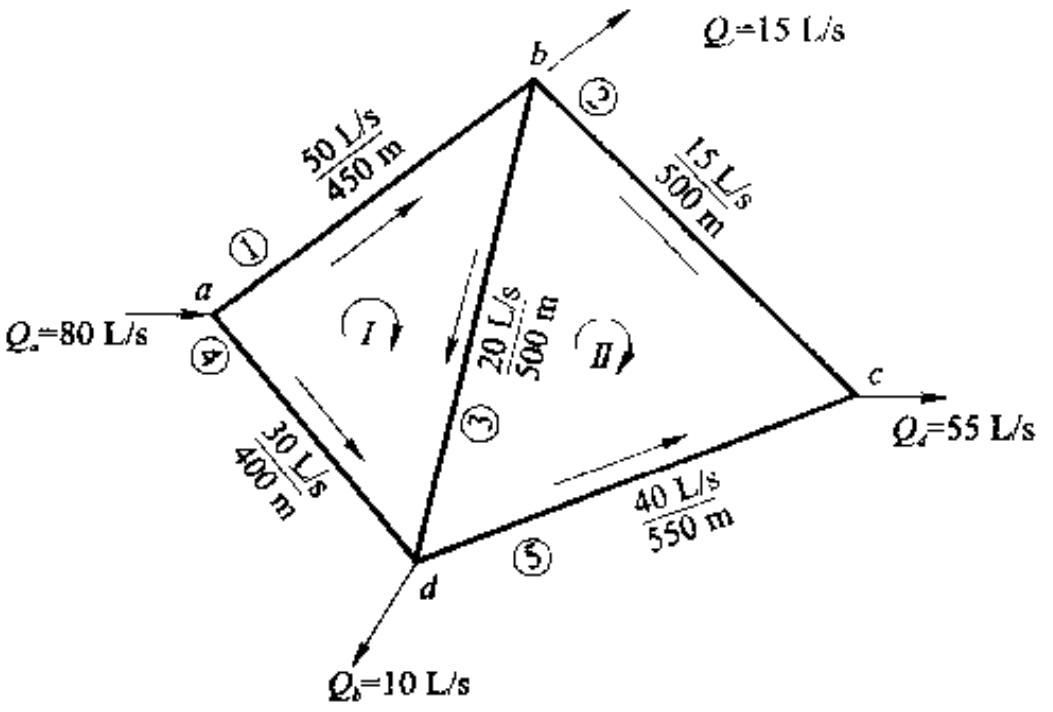


图5.8　环状管网示意图

表 5.3　环状管网各管段长及计算结果

编号	环号	$j=1$			$j=2$			1
	管段号	$i=1$	$i=3$	$i=4$	$i=2$	$i=3$	$i=5$	2
已知参数	l_i (m)	450	500	400	500	500	550	3
	d_i (mm)	250	200	200	150	200	250	4
	A_{ij}	1	1	−1	1	−1	−1	5
初设值	Q_i (l/s)	50	20	30	15	20	40	6
	h_i (m)	2.944	1.721	3.097	4.489	1.720	2.303	7
第一次修正计算	$\sum h_i$ (m)	1.568			0.465			8
	ΔQ_j (l/s)	3.168			0.525			9
	Q_i (l/s)	46.84	17.37	33.16	14.47	17.37	40.53	10
	h_i (m)	2.584	1.297	3.784	4.180	1.297	2.364	11
第二次修正计算	$\sum h_i$ (m)	0.098			0.519			12
	ΔQ_j (l/s)	0.200			0.615			13
	Q_i (l/s)	46.64	17.78	33.36	13.86	17.78	41.14	14
	h_i (m)	2.562	1.360	3.829	3.832	1.360	2.436	15
第三次修正计算	$\sum h_i$ (m)	0.092			0.036			16
	ΔQ_j (l/s)	0.188			0.044			17
	Q_i (l/s)	46.45	17.64	33.55	13.82	17.64	41.18	18
	h_i (m)	2.541	1.338	3.873	3.808	1.338	2.441	19
电算结果	Q_i (l/s)	46.43	17.65	33.57	13.78	17.65	41.22	20
	h_i (m)	2.538	1.340	3.879	3.786	1.340	2.446	21

⑤重复校正，直到闭合误差满足要求为止。

计算程序

```
PARAMETER(Im=5, Jm=2)                                    \管段数和环路数
```

```
      DIMENSION Q(Im),D(Im),RL(Im),Hf(Im),Rn(Im),A(Im,Jm)
      DIMENSION DQ(Jm),SHF(Jm),SHFQ(Jm),S₀(Im),f1(Im),f2(Im)
      DATA D/0.25,0.15,0.20,0.20,0.25/                          \输入管段直径
      DATA RL/450,500,500,400,550/                              \输入管段长度
      DATA Rn/Im*0.0125/                                        \输入管段糙率
      DATA Q/0.01,0.02,-0.025,0.07,0.035/                       \输入管段流量
      DATA A/1,0,1,-1,0,0,1,-1,0,-1/                            \输入系数Aᵢⱼ
c     data f1/1,2,1,-1,-2/,f2/0,0,-2,0,0/                       \当环路较多时
c     do 84 i=1,im                                              \先输入 f1,f2
c     a(i,abS(f1(i)))=Sign(1.0,f1(i))                           \再分解为A.
c     a(i,abS(f2(i)))=Sign(1.0,f2(i))
9     DO 18 J=1,Jm                                              \环路循环计算
      SHf(J)=0                                                  \求和变量初值置 0
      SHfQ(J)=0                                                 \求和变量初值置 0
      DO16I=1,Im                                                \管段循环计算
      S (I)=4**(10/3.0)/3.14**2*Rn(I)**2/D(I)**(16/3.0)         \计算比阻 S
      Hf(I)=S₀(I)*RL(I)*Q(I)*abs(Q(i))                          \计算水头损失 hᵢ
      SHf(J)=SHf(J)+A(I,J)*Hf(I)                                \计算水头损失闭和差
16    SHfQ(J)=SHfQ(J)+ABS(A(I,J)*Hf(I)/Q(I)
      DQ(J)= SHf(J)/2/SHfQ(J)                                   \计算修正流量ΔQ
18    WRITE(*,*)J,SHf(J),DQ(J)                                  \输出中间结果
      DO 21 J=1,Jm
      DO 21 I=1,Im
21    Q(I)=Q(I)+A(I,J)*DQ(J)                                    \修正流量 Q
      DO 23 J=1,Jm
23    IF(ABS(SHf(J)).GE.0.001)GOTO 9                            \判断精度
      WRITE(*,*)"管段号  管径  管段长  比阻  流量  水头损失"
      DO 26 I=1,Im
26    WRITE(*,27)I,D(I),RL(I),S₀(I),Q(I),Hf(I)\输出结果
27    FORMAT(1X,I4,F9.4,F7.1,3F9.5)
      END
```

例 5.3 试用 Harody-Cross 法求解如图 5.9(a)所示管网的流量分配及未知的结点水头，已知管径、管长、水头损失系数 λ，及 r 系数 $\left(r=\frac{8\lambda L}{g\pi^2 D^5},\ h_f=rQ^2\right)$，见表 5.4。已知各结点取水流量，设管网入口处 E 点压头为 40 m，试求其余各结点压头是多少？

各支管最终流量值 C 误差为 0.11 及求得的结点压头值，如图 5.9 (b) 所示。

求解步骤如下：

(1) 计算管网各支管阻力系数 r_i。

(2) 任意选定流量初始值，以满足结点质量连续为条件。按照确定的绕各闭合环路正方向给定正负号。

5.2.2 管道中的水击

当泵或水轮机在运行启闭阀门时，将会在管道中引起一种特殊的非恒定流——水击，水击的要害在于要考虑水的压缩性与管壁弹性，用动量方程分析，阀门突然关闭引起的压力增高为

表 5.4

l	l (m)	D_i (m)	λ	r
1	600	0.4	0.02	96.83
2	600	0.4	0.02	96.83
3	300	0.3	0.03	306.00
4	300	0.3	0 03	306.00
5	300	0.3	0.03	306.00
6	300	0.2	0.04	3 098.00
7	300	0.2	0.04	3 098.00
8	300	0 2	0.04	3 098.00
9	300	0.3	0.03	306.00
10	600	0.3	0.03	612 00
11	300	0.3	0.03	306 00
12	900	0.2	0.04	9 295.50
13	300	0.2	0 04	3 098.00

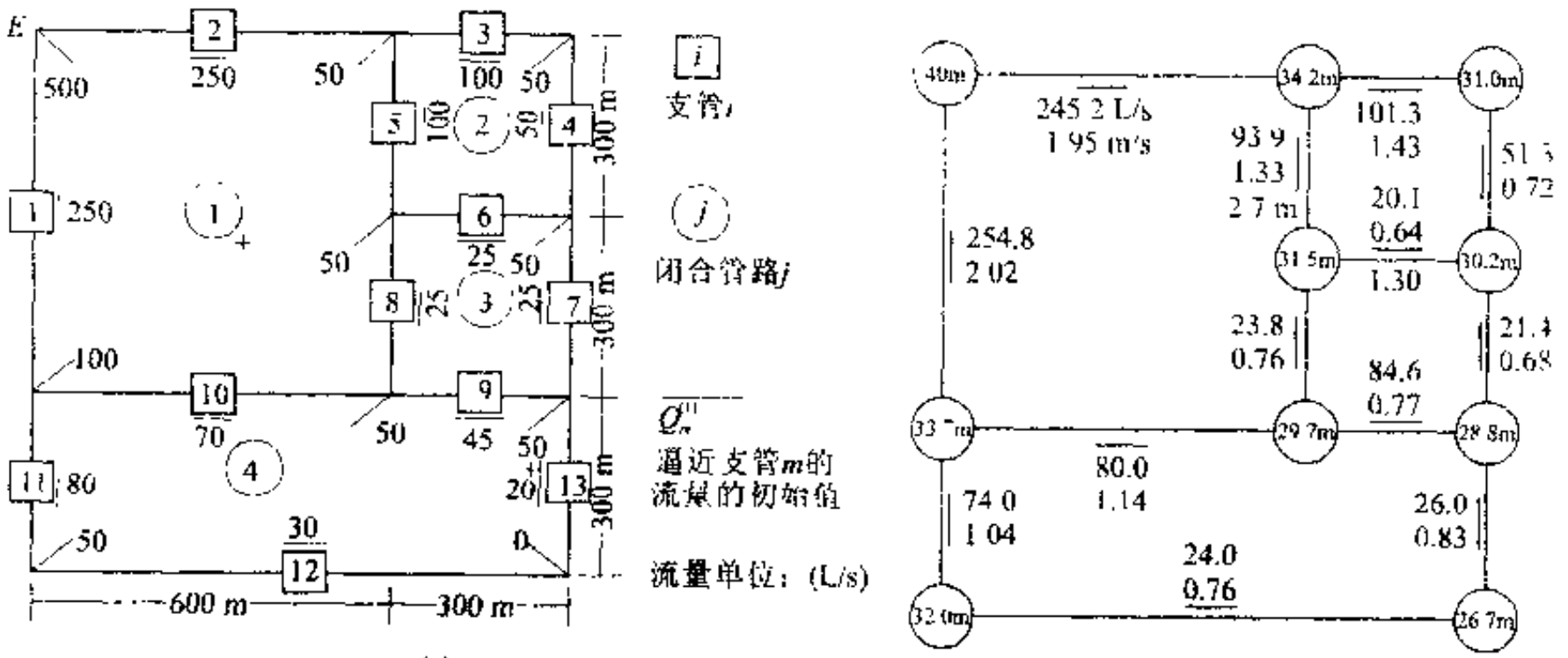


图5.9　闭合环路管网示意图

$$\Delta p = \rho c \Delta v \text{，或用水头表示为} \Delta h = c\Delta v/g$$

如果认为水是不可压缩的，则水中弹性波传播的速度$c = \frac{ds}{dt} = \infty$，实际上，即使 c 很快，达到 1 000 m/s 左右，但也是一个有限的数值。考虑水的压缩性与管壁弹性，水击波之传播速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{E}\frac{D}{e}}} \tag{5.2.7}$$

式中ρ 为水之密度；K 为水的弹性模量$K = 2\times10^9\ \mathrm{N/m^2}$；$E$ 为管壁材料的弹性模量（如：钢管

$E=2\times10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$)；$D$为管径；$e$为管壁厚度。

以压头H、流速v为未知函数，写出水击基本方程：

$$\frac{\partial H}{\partial t}+v\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{c^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{5.2.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial H}{\partial x}=-gS_f \tag{5.2.9}$$

因为水击是短时间的瞬变现象，且流速远小于波速，上式简化为线性方程形式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial t}+\dfrac{c^2}{g}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 & \text{(5.2.10a)}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t}+g\dfrac{\partial H}{\partial x}=0 & \text{(5.2.10b)}\end{cases}$$

可看出公式 (5.2.8)、(5.2.9) 和简化式 (5.2.10 (a)、(b)) 皆与河渠非恒定流的圣-维南方程属于同一类型，也可以用特性线法求解或用差分数值解，关于原理与解法，这里不再重复，只将简单算例与程序，列出如下：

例 5.4 基本数据如下：已知管道径$D=4.6$ m，管壁厚度$e=0.02$ m，管道长度$L=316$ m，钢管$\frac{K}{E}=0.01$，管道沿程损失系数$\lambda=0.025$，作用水头$h_0=38.8$ m，最大流量$Q=40\ \mathrm{m^3/s}$，阀门关闭时间$T_s=6$ s，阀门关闭规律为$\tau=(1-\frac{t}{T_s})^m$，线性关闭$m=1$，总计算时间$T_m=16$ s，管道水平放置，把管道沿长度方向分为 4 段，则有 5 个结点。

用特征线法求解各结点压力水头与流速，考虑阻力损失，也不会增加多少难度，上游水库水头$h=h_0$不变，计算程序框图如图 5.10 所示。

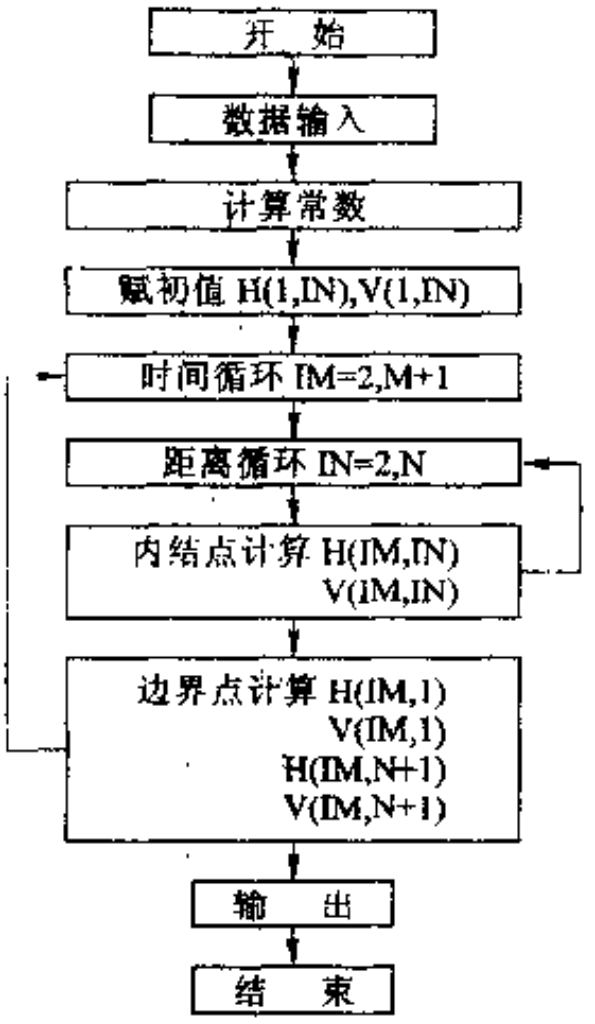


图5.10　程序框图

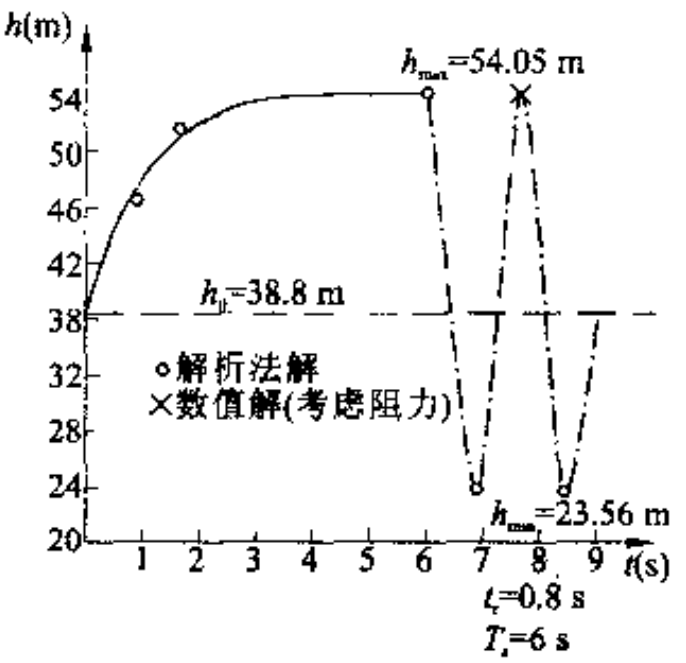


图5.11　水击计算结果比较

变量说明见下表：

D——管道直径

e——管壁厚度

L——管道长度

T_s——阀门关闭时间

T_t——总计算时间

H_0——上游水头

Q——最大流量

λ——沿程水头损失系数

g——9.81 m/s^2

$H(im,\ in)$——结点水头

$V(im,\ in)$——结点流速

$\tau_{va}(in)$——阀门开度

im——时间迭代次数

in——管段数

计算结果简示于图 5.11。与解析法计算结果相比较，其最高值相差不大，表明在一般水电站引水系统的水击计算中，可以忽略阻力对最高水击压强值的影响。但对复杂管道、及复杂的边界条件，用特征线法并借助计算机计算，其优点是明显的，尤其对于必须计入阻力的管道更是如此。

计算结果列于表 5.5。

表 5.5　水击计算结果

t	0	0.25L	0.5L	0.75L	L	TAU（开度）
0	38.8	38.673 2	38.546 4	38.419 7	38.292 9	1
0.8	38.8	40.774 1	42.751 2	44.733 8	47.085 8	0.866 654
1.6	38.8	41.894 8	44.989 4	48.083 5	51.293 4	0 733 313
2.4	38.8	42.363 0	45.934 2	49.497 8	53.083 0	0.599 971
3.2	38.8	42.529 4	46.257 7	49.983 9	53.710 3	0.466 626
4.0	38.8	42.579 6	46.358 7	50.137 2	53.914 5	0.333 284
4.8	38.8	42.601 3	46.402 3	50.203 0	54.003 1	0.199 941
5.6	38.8	42.612 7	46.425 1	50.237 3	54.049 0	0.066 598
6.0	38.8	42.614 5	46.428 7	50.242 7	54.039 1	0
6.8	38.8	34.985 9	31.172 2	27.358 7	23.563 1	0
7.6	38.8	42.613 7	46.426 9	50.239 9	54.034 7	0
8.4	38.8	34.986 7	31.174	27.361 5	23.567 4	0
9.2	38.8	42.612 9	46.425 1	50.237 1	54.030 4	0

附 FORTRAN 语言水击计算简单管道程序

```
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
the Program of water hammer
        removed by zheng Bang - min 2 000.1.26.
dimension h(200,5),v(200,5),tau(200)
data D,e,L,N,ts,tol/4.6,0.02,316,4,6.0,16.0/
data Ho, Q,f,g/38.8,40.0,0.025,9.81/
open(2,FILE='WAHA.OUT')
c=1 435.0/SQRT(1+0.01*D/e)
t=L/(N*c)
m=tol/t+1
vo=Q/(0.785 4*D*D)
write(*,*)m,t,c
pause' m,t,c'
c1=c/g
c2=(f*t)/(2.0*D)
c4=f*L/(2.0*g*D*N)

do 10 in=1,N+1
h(1,in)=Ho-(in-1)*c4*vo*vo
v(1,in)=vo
tau(1)=1.0
do 40 im=2,m+1
do 30 in=2,N
tau(im)=1.0-(im-1)*t/ts
if (tau(im).le.0.0)tau(im)=0.0
a=h(im-1,in-1)+h(im-1,in+1)+c1*(v(im-1,in-1)-v(im-1,in+1)
b=-c4*(v(im-1,in-1)*abs(v(im-1,in-1))-v(im-1,in+1)
*abs(v(im-1,in+1)))
h(im,in)=0.5*(a+b)
cc=(h(im-1,in-1)-h(im-1,in+1))/c1*(v(im-1,in-1)+v(im-1,in+1))
d=-c2*(v(im-1,in-1)*abs(v(im-1,in-1)+v(im-1,in+1)
*abs(v(im-1,in+1))
h(im,1)=Ho
cm=h(im-1,2)-v(im-1,2)*(c1-c4*abs(v(im-1,2)))
v(im,1)=(Ho-cm)/c1
cp=h(im-1,N)+v(im-1,N)*(c1-c4*abs(v(im-1,N)))
d1=vo*vo*tau(im)*tau(im)/Ho
v(im,N+1)=-d1*c1/2.0+sqrt((d1*c1/2.0)*(d1*c1/2.0)+d1*cp)
h(im,N+1)=cp-c1*v(im,N+1)
do 50 im=1,m+1
tt=(im-1)*t
write(2,*)'  tt      h              t       au       '
write(2,*) tt,(h(im,in),in=1,5),tau(im)
write(*,*)'  tt      h              t       au       '
write(*,*)tt,(h(im,in),in=1,5),tau(im)
```

```
d0  55 im=1,m
t=1./N/c
tt=(im-1)*t
write(2,*)tt,h(im,N+1),tau(im)
continue
format (2x,f5.2,6(4x,f7.4))
close(2)
stop
end
```

5.2.3 河网计算

长江荆江江湖连接，太湖、苏北地区、珠江三角洲等地处下游冲积平原地区，河网纵横，水道复杂。它们的治理和开发，涉及到网河河道的洪水与枯水水面线的分析与计算。虽然可按一维总流做，但作为网络计算不像简单河渠那样，而是非常复杂的。而江湖连接与河口计算既有一维特点也有二维特点，一维与二维之间信息的传递，都是计算水动力学中的新问题，需要进一步研究。

5.2.3.1 河网计算原理

河网计算在实际工程中有重要意义。其计算原理、原则依据连续性方程（质量守恒），与动力方程（动量原理或能量守恒）。计算分非恒定流问题与恒定流问题。一般采用一维总流方程，连续性条件

$$Q=AV \tag{5.2.11}$$

非恒定流对任意两个断面1，2，有

$$Z_1+\frac{Q_1^2}{2gA_1^2}=Z_2+\frac{Q_2^2}{2gA_2^2}+h_{w_{1-2}}+\int_1^2\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s \tag{5.2.12}$$

恒定流有

$$Z_1+\frac{Q^2}{2gA_1^2}=Z_2+\frac{Q^2}{2gA_2^2}+h_{w_{1-2}} \tag{5.2.13}$$

式中Z为水位、Q为流量，A为断面面积，V为断面平均流速，$h_{w_{1-2}}$为1—2两断面间水头损失，而$h_u=\int_1^2\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s$，为惯性水头。

下面我们先分析恒定流，再分析非恒定流。

以如图5.12中河网为例，进行分析说明。

该河网中有五个直河段（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ），（Ⅴ），共划分有1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14个断面，其中直支河段（Ⅰ），包含有1，2，3，4四个断面，直支河段（Ⅱ）包含有5，6两个断面……

该河段有（一）、（二）两个汊口（汊点）。

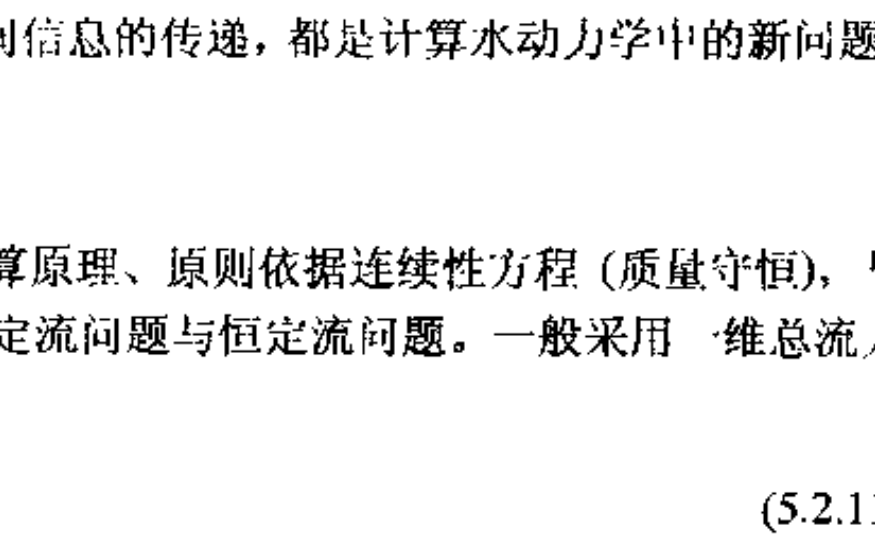


图5.12 河网计算简图

第（一）个汊口，在4，5，7断面点分别与（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）三个直支河段相连接。第（二）个汊口，在8，11，12断面点分别与（Ⅲ），（Ⅳ）（Ⅴ）三个直支河段相连接。其中未知量为（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ），（Ⅴ）的五个流量$Q_{Ⅰ}$，$Q_{Ⅱ}$，$Q_{Ⅲ}$，$Q_{Ⅳ}$，$Q_{Ⅴ}$和14个断面的水头。

有4个外边界点①，②，③，④，它们分别对应于1，6，9，14断面。

任意两个断面的水位差ΔZ_{1-2}可写作

$$\Delta Z_{1-2}=Z_1-Z_2=\left[\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{A_2^2}-\frac{1}{A_1^2}\right)+\frac{S_{1-2}}{\overline{K}_{1-2}^2}\right]\left|Q_{1-2}\right|Q_{1-2}$$

或写作

$$\Delta Z_e=r_e\left|Q_e\right|Q_e \tag{5.2.14}$$

其中 $r_e=\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{A_2^2}-\frac{1}{A_1^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_2^2}+\frac{1}{K_1^2}\right)S_{1-2}$，称为阻力系数，即支直河段平均计算的阻力系数。1—2河段沿程阻力系数，可按下式平均计算

$$\frac{S_{1-2}}{\overline{K}_{1-2}^2}=\frac{\left(\frac{1}{K_1^2}+\frac{1}{K_2^2}\right)S_{1-2}}{2}$$

对一个子河段C的两端断面i，j，可写为

$$\Delta Z_i=Z_i-Z_j=\left[\frac{1}{2g}\left(\frac{1^2}{A_i^2}-\frac{1^2}{A_j^2}\right)+\frac{S_{i-j}}{2}\left(\frac{1}{K_i^2}+\frac{1}{K_j^2}\right)\right]\left|Q_i\right|Q_i=r_i\left|Q_i\right|Q_i$$

对顺直河段，其阻力损失计算中有平均的意思，如何平均往往有不同的做法，有断面中水力要素的平均，流量模数的平均，能坡的平均等等。

反之，若以水位差ΔZ表示流量Q，则有

$$Q_I=Y_I\Delta Z_I \tag{5.2.15}$$

式中 $Y_I=\frac{1}{\sqrt{r_I\left|\Delta Z_I\right|}}$，称之为$I$直支河段传导系数，或称之为虚流量系数。

①，②，③，④，（一）（二）的6个水位未知数，5个流量未知数，共11个，而有五个河段水头损失方程及2个交汇汊点流量方程共有七个方程。还要加上四个边界条件才可使本例方程封闭。这四个方程是存在的，上游已知流量一个，下游三个水位已知，共4个。方程与未知数是封闭的，因而问题是可解的。

五个河段流量如下：以水位表示之，虚流量系数为Y_{km}

$Q_{①-(一)}=Y_{①-(一)}\Delta Z_{①-(一)}$，$Q_{②-(一)}=Y_{②-(一)}\Delta Z_{②-(一)}$

$Q_{(一)-(二)}=Y_{(一)-(二)}\Delta Z_{(一)-(二)}$，$Q_{(一)-③}=Y_{(一)-③}\Delta Z_{(一)-③}$

$Q_{(二)-④}=Y_{(二)-④}\Delta Z_{(二)-④}$

虽然其中Y_{km}只包含了大量几何参数，但也包括顺直河段各小段所有断面参数信息与糙率变化。由于水位差与流量是非线性关系，Y_{km}还包含ΔZ_{km}在内。

对于两汊点支河段进出流量代数和为零，进流量为正，出流量为负。

汊点（一）：$Q_{①-(一)}-Q_{②-(一)}-Q_{(一)-(二)}=0$

汊点（二）：$Q_{(一)-(二)}+Q_{③-(二)}-Q_{(二)-④}=0$

顺直河段及汉点图，如图 5.13 所示，图中经简化把所有河段断面 14 个，简化为只有五个直河段与三个汉点连结的单直河网图，这就意谓着，由原来矩阵阶数由 14×14，降为 7×7。

这一类计算问题不论从矩阵的角度或者从图论的角度看来，都是求解大型稀疏矩阵方程组，而其中求逆或消去，不仅费时，多占内存，且误差精度不易控制，易于失稳。

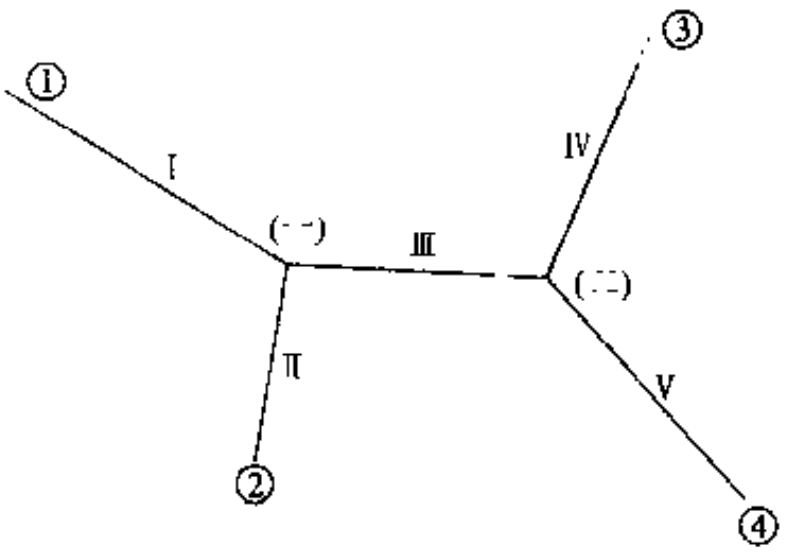


图5.13　汉点连接图

我们下面采用的 Monte-Carlo 法中的随机游动 (Random Walk) 用随机方法解确定性问题，是我们 20 世纪 80 年代以来发展起来的，应用于水利工程中的各种问题，现应用于河网。

根据汉点连续性条件，将汉点流量关系以水位差表示，有

汉点 (一)：$Y_{③(一)}\Delta Z_{①(一)}-Y_{(一)2}\Delta Z_{(一)2}-Y_{(一)(二)}\Delta Z_{(一)(二)}=0$

汉点 (二)：$Y_{(一)(二)}\Delta Z_{(一)(二)}+Y_{④(二)}\Delta Z_{④(二)}-Y_{(二)5}\Delta Z_{(二)5}=0$

汉点 (一) 中以 $Z_{(一)}$ 为未知数。

$$Y_{③(一)}(Z_{①}-Z_{(一)})-Y_{(一)②}(Z_{(一)}-Z_{②})-Y_{(一)(二)}(Z_{(一)}-Z_{(二)})=0$$

所以　　$Y_{①(一)}Z_{①}+Y_{(一)②}Z_{②}+Y_{(一)(二)}Z_{(一)}=(Y_{①(一)}+Y_{(一)②}+Y_{(一)(二)})Z_{(一)}$

式中令 $Y_m=Y_{①(一)}+Y_{(一)②}+Y_{(一)(二)}$

而有：$$Z_{(一)}=\frac{(Y_{(一)①}Z_{①}+Y_{(一)②}Z_{②}+Y_{(一)(二)}Z_{(一)})}{Y_m}$$

令　　$$P_{①(一)}=\frac{Y_{①(一)}}{Y_m},\quad P_{(一)②}=\frac{Y_{(一)②}}{Y_m},\quad P_{(一)(一)}=\frac{Y_{(一)(一)}}{Y_m}$$

为转移概率 (Transport probability)。$P_{①(一)}$ 为①点向 (一) 点的转移概率，而 $P_{(一)①}$ 则是由 (一) 点向①点的转移概率，它们在数值上是相等的，在计算数学中如有限元或差分中称之为“贡献 (Contribution)”，有了这些“贡献”或“转移概率”，我们有了周围点对于 (一) 点的影响，或者说，由 (一) 点以什么概率向周围转移。

这样一来，我们得到如下的代数方程

$$Z_{(一)}=P_{(一)①}Z_{①}+P_{(一)②}Z_{②}+P_{(一)(一)}Z_{(一)}$$

同理得：$Z_{④(二)}=P''_{(二)④}Z_{(二)}+P_{③(二)}Z_{③}+P_{(二)⑤}Z_{⑤}$

我们在计算中解代数方程组，如上所示。不论是用有限元法还是差分法或其它方法都需要知道周围相邻结点对该结点的影响，或称之为“贡献”(Contribution)。这些在上式中转移

概率$P_{①(\ )}$，$P_{②(\ )}$…等等，可称之为影响系数$P_{\prime\prime}$。它有如下特性：

$$\sum_{\prime=1}^{nb} P_{\prime\prime}=1\ ,\ 0\leqslant P_{\prime\prime}\leqslant 1, \tag{5.2.16}$$

即在j点周围各相邻点$i=1$，nb. (neighbour nodes)“贡献”对每一个点而言应小于1，而它们之和应等于1 (100%)，并且“贡献”最好为正值。这在我们作随机游动时会带来方便。

转移概率$P_{\prime\prime}$包含了直支河段的阻力及在汊口各支的权值大小。因此，我们可以把上式简单地写作：

$$Z(k)=P(j,\ k)Z(j) \tag{5.2.17}$$

这样规范的形式，适合于电子计算机语言和程序求解。

对于这一简单例子，可以将Z (二) 代入Z (一) 式

即有：
$$Z_{\prime\ (\ )}=\frac{[P_{①(\ )}Z_{①}+P_{\prime\ ②}Z_{②}+P_{\prime①(\ )}P'_{\prime\ (\ )}Z_{③}+P'_{\prime\ (\ )}Z_{④}+P_{\prime\ (\ )④}Z_{④}]}{(1-P'_{\prime\ (\ )})(P''_{\prime\ (\ )})}$$

式中汊口 (一) 与汊口 (二) 之间两个转移概率$P'_{\prime\ (\ )}$，$P''_{\prime\ (\ )}$是有区别的，因为两个汊点计算转移概率时用到

$$Y_m(一)=Y(\mathrm{I})+Y(\mathrm{II})+Y(\mathrm{III})$$

$$Y_m(二)=Y(\mathrm{III})+Y(\mathrm{IV})+Y(\mathrm{V})$$

它们是不同的。

此时，$Z_{①}$，$Z_{②}$，$Z_{③}$，$Z_{④}$为外边界点，当外边界点①，②，③，④水位 (或流量) 已知及各转移概率已知时，内部汊点的$Z_{\prime\ (\ )}$是可以直接求出的。有了$Z_{\prime\ (\ )}$之后，$Z_{\prime\ (\ )}$也可以求得。

有了$Z_{\prime\ (\ )}$，$Z_{\prime\ (\ )}$之后，连接 (一)，(二) 各个支直河段水位$Z_4=Z_5=Z_7=Z_{\prime\ (\ )}$，$Z_8=Z_{11}=Z_{12}=Z_{\prime\ (\ )}$。

各支直河段流量$Q_{\prime}(j_{\prime})$，也不难按下式求出：

$$Q_{\prime}=r_{\prime}\Delta Z_{\prime}$$

有了支直河段流量之后，就可以推求得支直河段中，各个子断面的水位。经过这一过程，就求得各个断面的流量、水位值。得到第一次迭代的结果。

由于河流中各个断面不断变化，糙率也难于事先确定得很准确，计算过程需要反复多次迭代试算，才可能满足边界条件 (水位、流量) 要求。只是有了计算程序，大量的、繁琐的计算变得快捷罢了，满足多种方案要求，也不那样烦难了。

上述简单例子，只有两个汊口，直接解$Z_{\prime\ (\ )}$，$Z_{\prime\ (\ )}$有简单公式可用，解的步骤也方便和明晰，但是，对于大型复杂河网，如何使计算规范化就显得十分重要，上述公式推广于大型河网，例如，如果有几十个相连的汊口，上面代入方法就不合用了。

这里在计算水力学中告诉我们一个事实，计算往往随着“数量”的增加，将会引起计算方法上“质”的变化与更新。这在初学者来说往往难以体会到的。下面我们从此简例推广到河网一般程序结构说明。

5.2.3.2　恒定河网计算程序结构及其说明

首先，需要把河网信息存放于电子计算机中。这需要人的智能，对大型河网的计算运行，进行事先的逻辑判断，预先估计到各种可能发生的情况。

（1）河网基本信息

首先需要对河网中的所有断面、支直河段和汊点编号。用传统的计算方法时，为减少稀疏矩阵的带宽，断面编号需要按大小顺序排定；而用 Monte-Carlo 法的随机游动方法则对编号顺序没有要求。

下面是河网的一些基本参数，并以图 5.12 所示河网为例给出其数值。

断面总数	ND=14
直河段总数	JE=5
汊口总数	KE=2
外边界点总数	KB=4
断面插值总点数	KD=8
汊口所连接的河段数最大值	IS=3
断面流量进入、流出的标记号	KS
边界点的序号数组	KBD= (1,6,9,14)
边界点流量初值	QB0= (400,100,200,500)
边界点水位初值	ZB0= (6.0,5.0,5.5,4.5)

等。

（2）断面数据

以数组 Q、Z、Zb、h、A 分别表示各断面的流量、水位、河底高程、水深和过水断面面积，数组 S 为各断面距断面所在河段起始断面的距离。其中数组 S 和 Zb 应作为计算所必须的参数事先给定，此外还应给定断面所在河段的糙率和反映断面几何形状大小的数据（如按宽矩形断面处理，可给定断面宽度B；梯形断面可给定底宽b和边坡系数m）。水位 Z 也可初步给定，因为河网计算中水位变化一般不大。

（3）支直河段信息

jds（j）=j 河段上的断面总数（j = 1, …, JE）；jp（j, 1）、jp（j, 2）=j 河段上、下游端点，这规定了河段的流向；jdh（i, j）=j 河段第 i 个断面的断面序号，它是将河段与断面总体序号联系起来的重要信息。

本例中，jds = (4,2,2,3,3)；jp = {(1,4), (5,6), (7,8), (9,11), (12,14)}；jdh = {(1,2,3,4), (5,6), (7,8), (9,10,11), (12,13,14)}。

Zu（j）、Zd（j）、dzc（j）=j 河段上、下游水位及水位差，一开始只是作为初值给出，在计算中再经反复迭代修改。有些边界断面上是已知流量，要确定水位；有些边界断面上则是给定水位。

（4）汊点信息

KO（k）=汊点 k 连接的支直河段数（k = 1, …, KE）；Keh(k, i)、Kkd(k, i)、Kcd(k, i)=汊点 k 连接的第 i 个支直河段的序号及其两个端点的断面号。这些信息用于计算转移概率以得到影响矩阵、确定汊口水位和进行汊口流量分配。

本例中，KO = (3,3)；Keh = {(1,2,3), (3,4,5)}，这里 1~5 分别代表 1~ V 河段；Kkd –

{(4,5,7), (8,11,12)}; Kcb = {(1,6,8), (7,9,14)}。

（5）分级算法与支直河段的计算

我们所用的算法以支直河道河段为单位进行计算，相当于通常的分级算法，而不是直接解原始的各个子断面，这样可以大大降低矩阵的阶数。本例中按支直河段计算矩阵阶数为5×5，而按断面计算则矩阵为14×14阶。

支直河段上的流量$Q_i = Y_i \Delta Z_i$，水位差$\Delta Z_j = r_j |Q_j| Q_j$，$j = 1, \cdots, JE$。注意虚流量系数$Y = 1\sqrt{r|\Delta Z|}$，包含水位差，在迭代计算时必须给定$\Delta Z$，并控制$\Delta Z \neq 0$。

按非棱柱体明渠计算河段的阻力系数时，可取两断面之间为一小段，分别计算其阻力系数，然后在整个河段上求和（假设河段上没有区间出入流）。

两断面之间阻力损失的计算有多种办法，如：取$\overline{A} = \frac{(A_1 + A_2)}{2}$，$\overline{R} = \frac{(R_1 + R_2)}{2}$等平均值，计算流量模数；对流量模数取平均，$\overline{K} = \frac{(K_1 + K_2)}{2}$；对能坡取平均，$\overline{J} = \frac{(J_1 + J_2)}{2}$，等。

将河段流量计算式代入汊点流量平衡关系式中，再加上边界条件，就得到整体的方程式。

对于河网解法有各种各样，目前流行的比较实用的是分级解法，这时稀疏矩阵的阶数可以大为减小。但仍避免不了消去或矩阵求逆的过程。我们采取的一种全新的方法，用随机方法解确定性问题——河网的随机游动解。并应用了图论（Graph Theory）中一些有用的概念，如有向图、环、树子图等。

随机游动方法或称为 Monte-Carlo 法。不需要断面顺序排列。这对于增加新的支河，引水口、取水口，堰闸工程都非常方便，它只需给定联接信息（Incidence Tensor），即顶点（vertex）与顶点，顶点与边（edge）的联接关系。

5.2.3.3 非恒定流河网计算

河网非恒定流计算是水利、航运等部门经常需要进行的工作，其计算问题归结为一维各一维南方程组的求解。由于隐式差分格式具有稳定性好、可加大时间步长提高计算速度等优点，得到广泛的应用，但河网非恒定流计算中，由于各河的不规则纵横交叉连接，所形成的系数矩阵是一种排列不规则的大型稀疏矩阵（Sparse Matrix），具有大量的零元素，非零元素很少，降低了消元速度。这样的矩阵系数如全部储存需要大量的储存单元，计算过程中零元素变为非零元素参加运算使计算次数增加，计算次数越多，引入的舍入误差越大，计算精度难于保证，因而降低了隐格式的使用价值。

多年以来，人们一直在探求如何压缩系数矩阵的储存信息，用较少的单元来储存河网矩阵。用什么方法能够较快地求解河网方程组，一直是河网非恒定流计算中的核心问题。

网河解法中解大型稀疏矩阵求解非恒定流方程组，目前常用的有两种方法：直接解法与分级解法。

直接解法是直接求解由河段内各微小河段及边界断面方程形成的大型稀疏阵，采用消元法、追赶法进行，这类方法我国中山大学提出的较为有效。

分级解法：先将未知数集中到汊点上，然后先解汊点及边界条件满足的方程组，它形成的矩阵也是稀疏阵，但较所有微小河段直接形成的稀疏阵阶数要低很多便于求解，待汊点未知量求出之后再将各河段按单一河道（段）求解。分级解由荷兰水力学家 Dronkers 提出，后经许多学者改进，按照汊点所保留未知数个数划分，若在汊点上保留水位和流量两个未知数，称为二级解法，仅保留水位或流量一个未知数，称为三级解法，若进一步将边界未知点未知

数消去，仅保留河网内部汊点未知数称为四级解法。由此可见，分级解法较直接解法所求解的代数方程组的阶数低得多，前者与河网的汊点数相同，后者则为河网中要计算的断面总数的两倍。一般情况下，一个河网中的汊点数较断面总数少得多，因此，分级解法较直接解更有效、实用、经济些，尽管如此，在汊点较多的河网计算中仍存在很多困难，有待进一步改进。

实际河网有枝状与环状网，实际河网既有枝状连接也有环状连接。长江上中游四川、湖北、湖南水系图，好像树枝状的河网。荆江河段与洞庭湖、四口之间的连接又像环状。珠江口八大口门出海河网的环枝状河网，都给出实际网河分析计算的复杂性，树枝状与环状图形性质与图的性质，联系到数学中图论的分析。在河网的恒定流、非恒定流计算中均可引入图论理论，仅在具体解法上有一些差异。

河网图 5.12 中汊口与边、顶点与边之关系见表 5.6 (a、b、c)。

表 5.6 (a)　汊点、端点连接关系表

汊点	端点		
(一)	①	②	(二)
(二)	(一)	③	④

表 5.6 (b)　邻接矩阵 (Adjacency Matrix) 表 (表中信息为顶点V_i与V_j的连接逻辑关系)

V_1	V_2	V_{11}	V_3	V_5	V_4	
0	0	1	0	0	0	V_1
0	0	1	0	0	0	V_2
1	1	0	1	0	0	V_{11}
0	0	1	0	1	1	V_{12}
0	0	0	1	0	0	V_3
0	0	0	1	0	0	V_4

表 5.6 (c)　关联矩阵 (Incidence Matrix) 表 (表中刻画了顶点V_i与边e_j的关系)

$e_{(1)}$	$e_{(11)}$	$e_{(12)}$	$e_{(3)}$	$e_{(5)}$	
1	0	0	0	0	$V_{(1)}$
0	1	0	0	0	$V_{(2)}$
1	1	1	0	0	$V_{(11)}$
0	0	1	1	1	$V_{(12)}$
0	0	0	1	0	V_3
0	0	0	1	0	V_4

从一维非恒定流基本方程圣维南方程，用加权4点差分隐格式离散化后可以看到 $n+1$ 时刻 Z, Q 方程

$$\begin{cases} a_0 Z_j - a_1 Q_j + a_1 Z_{j+1} + c_1 Q_{j+1} = e_1 & (5.2.18) \\ a_2 Z_j + c_2 Q_j - a_3 Z_{j+1} + d_3 Q_{j+1} = e_2 & (5.2.19) \end{cases}$$

上式中 $a_1 = 1$，$c_2 = 1 - 4\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}}$ 等，$0 < \alpha < 1$ 为权因子。

进一步把上式中消去 Q_j (5.2.19) 式、Z_j (5.2.18) 式，得

$$Z_j + c_1 Z_{j+1} + d_1 Q_{j+1} = e_1 \quad (5.2.20)$$

$$Q_j + c_2 Z_{j+1} + d_2 Q_{j+1} = e_2 \quad (5.2.21)$$

上两式反映了直河段上河段内断面的水位与流量的关系式，显然，对于直河段方程的系数矩阵，它们将形成三对角阵，例如，第（Ⅰ）段直河段的未知数，Z_1，Q_1，其断面排列为：Z_1，Q_1，Z_2，Q_2，Z_3，Q_3，Z_4，Q_4；对于单一河段，其系数矩阵在主对角线附近非零元紧凑地排列成带状，很适合“追赶法”求解，但对于网河，边界断面及汊口断面的非零元，破坏了这种带状排列的特点（见表5.7消元前系数矩阵结构排列示意）。散乱无章，整个网河的系数矩阵为高度稀疏矩阵，直接解它，必须采用大型稀疏矩阵解法，高阶稀疏阵求解像通常所作那样，它只应存储非零元素（也就是说只保留非零元信息），消去及回代过程也仅针对非零元进行（消元过程可能使原来的零元变为新的非零元），以节省机器工作时间。

仔细分析方程及系数矩阵形式，虽然由于边界方程非零元排列散乱，破坏了单一河段方程系数的带状性，但除边界方程以外，直河段内断面方程非零元排列不仅高度规整，而且具有消去法要求的标准形式（如表5.7中所示），主元为1的有一定带宽的上三角阵，所以，使用高斯消去法解是比较方便的。仅有边界方程需要另作消元处理，为了在边界方程消元时，不破坏内点方程的标准形式，使用按行数消元仅使其对边界断面方程进行消元，内断面方程系数所在“行”不动其整齐的排列，为非零存储及将来回代过程提供了方便，这也就是为什么直接解法在点与断面的编排中要采用以前的那些规定的原因。

这一些想法都是通过计算程序，具体安排来实现的，详细情况见计算程序及说明。

汊口连接条件通常为简单计，多采用流量平衡与能量守恒条件即：

①汊口各支河流量代数和为零

$$\sum_{L=1}^{L_k} Q_L = 0 \quad (5.2.22)$$

②汊口各支河于连结汊点的水位（水头）相等

$$z_L + \frac{v_L^2}{2g} = z_k + f\frac{v_k^2}{2g} \quad (5.2.23)$$

式中为 L_k 与 k 汊口连接的支河总数。L 为支河编号，$L = 1, 2, \cdots, L_k$。f 为阻力系数。

从表5.7可以看出，网河方程组的系数矩阵有如下特点：

①高阶。由于珠江网河范围广大，断面多至数百个，因此方程组实际可高达上千阶

表 5.7　系数矩阵结构示意 (消元前)

未知量 / 矩阵结构 / 方程序号	Z_1	Q_1	Z_2	Q_2	Z_3	Q_3	Z_4	Q_4	Z_5	Q_5	Z_6	Q_6	Z_7	Q_7	Z_8	Q_8	Z_9	Q_9	Z_{10}	Q_{10}	Z_{11}	Q_{11}	Z_{12}	Q_{12}	Z_{13}	Q_{13}	Z_{14}	Q_{14}
1	1		*	*																								
2		1	*	*																								
3			1		*	*																						
4				1	*	*																						
5					1		*	*																				
6						1	*	*																				
7	1																											
8						1		−1				−1																
9							1		*	*																		
10								1	*	*																		
11					−1		1																					
12								1																				
13											1		*	*														
14												1	*	*														
15							−1				1																	
16															1						1		−1					
17																	1		*	*								
18																		1	*	*								
19																			1		*	*						
20																				1	*	*						
21																	1											
22														−1							1							
23																						1	*	*				
24																							1	*	*			
25																									1		*	*
26																										1	*	*
27																				−1		1						
28																											1	

*非 0 元，设边界断面都给 Z 值；空格：0 元。

②非零系数极为稀疏，稀疏率（非零元素在系数矩阵中所占的百分比）随着网河范围的增大而减少。例如，对于一个具有31个汊口，53条直河段，167个断面的河网，稀疏率约为0.8%。

③内断面方程的非零系数都位于系数矩阵主对角线的右边，且非零系数的列标将被该内断面方程的序号所确定。例如，第J个方程是内断面方程，令

$$K=\begin{cases}1 & \text{当 } J \text{ 为奇数时}\\ 0 & \text{当 } J \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

则第J个方程的非零系数在系数矩阵中的列标为J，$J+K+1$，$J+K+2$，且第J列（主对角线）元素为1。

④边界方程的非零系数在系数矩阵中比较分散，没有带状的性质。

根据网河方程组系数矩阵的特点，我们进一步来讨论在电子计算机上采用仅存储非零系数的解法。解法的基本思想还是高斯消去法，即把位于系数矩阵主对角线以下的元素变为零（消元），并使主对角线元素为1，然后进行回代。

由于内断面方程已经是主对角线左边为零，且主对角线为1的形式，我们又希望在消元过程中，内断面方程的非零系数的列序号数值保持不变；因此，我们采用行消去法，对边界方程进行消元。其步骤如下：

①首先确定消元后每个边界方程可能出现的位于系数矩阵主对角右边的非零系数的列序号。例如，从表中可以看出，第Ⅰ河段上游边界方程，消元后可能出现的位于系数矩阵主对角线右边的非零系数的列序号为8；而第Ⅰ河段下游边界方程，消元后系数矩阵主对角线右边的非零系数的列标是10，14。第2河段上、下游边界方程，消元后可能出现的位于系数矩阵主对角右边的非零系数的列序号分别为12，14和14。按方程序号划块包括所有行上的非零系数。

②消元的次序是先对第Ⅰ（Ⅰ=1，2，3…）河段上游边界方程进行消元，然后对第Ⅰ河段的下游边界方程进行消元。

③在对某个边界方程进行消元时，首先确定一个数组，它的下界是消元前边界方程第1个非零系数的列序号，而上界是消元后可能出现的非零系数的最大列序号。这个数组我们称为边界方程消元时的动态数组。

其次，用这个数组代替系数矩阵中与该边界方程对应的那一行。把该边界方程的非零系数记入这个数组的相应位值中去，即在这个数组中形成该边界方程的左边。

然后在这个数组中进行消元，把主对角线左边的非零系数都变为零，且主对角线元素为1。

最后，把消元后的非零系数记入系数矩阵的相应位置中如表5.8。

整个消元过程完毕之后，得到与原方程组同解的方程组，它的系数矩阵如表5.8所示。

为了在电子计算机上实现仅存储系数矩阵的非零元素的直接解法。所需的存储量及解法要点是：

①提供确定网河的基本信息，这些信息主要有：汊口总数，直河段总数，每条直河段的断面数，每个汊口的分汊数，每个汊口所联系的直河段序号及汊口的流向（流入汊口还是流出汊口），给定边界值的断面（即网河边界断面）的断面序号，每个给定边界值是水位或流量的特征等。

②使用一个数组，按从上到下，从左到右的次序，存储表中除主对角线外的非零元素

表 5.8　系数矩阵结构示意（消元后）

未知量 / 矩阵结构 / 方程序号	Z_1	Q_1	Z_2	Q_2	Z_3	Q_3	Z_4	Q_4	Z_5	Q_5	Z_6	Q_6	Z_7	Q_7	Z_8	Q_8	Z_9	Q_9	Z_{10}	Q_{10}	Z_{11}	Q_{11}	Z_{12}	Q_{12}	Z_{13}	Q_{13}	Z_{14}	Q_{14}
1	1		*	*																								
2		1	*	*																								
3			1		*	*																						
4				1	*	*																						
5					1		*	*																				
6						1	*	*																				
7							1	Δ																				
8								1		Δ				Δ														
9									1		*	*																
10										1	*	*																
11											1	Δ		Δ														
12												1		Δ														
13													1		*	*												
14														1	*	*												
15															1	Δ												
16																1					Δ		Δ					
17																	1		*	*								
18																		1	*	*								
19																			1		*	*						
20																				1	*	*						
21																					1	Δ		Δ				
22																						1		Δ				
23																							1		*	*		
24																								1	*	*		
25																									1		*	*
26																										1	*	*
27																											1	Δ
28																												1

*非零元，设边界断面都给 Z 值；Δ消元时增加的非零元。

(即*和Δ所表示的元素)。这个数组，我们称为紧凑存储数组。

③形成一个信息数组，以确定消元后每个方程在主对角线右边的第1个非零元素在紧凑存储数组中的位置；同时，既能区别这个方程是内断面方程还是边界方程，又能区别这个方程的序号是奇数还是偶数。这样，内断面方程就可以通过这个信息数组和紧凑存储数组表示出来。

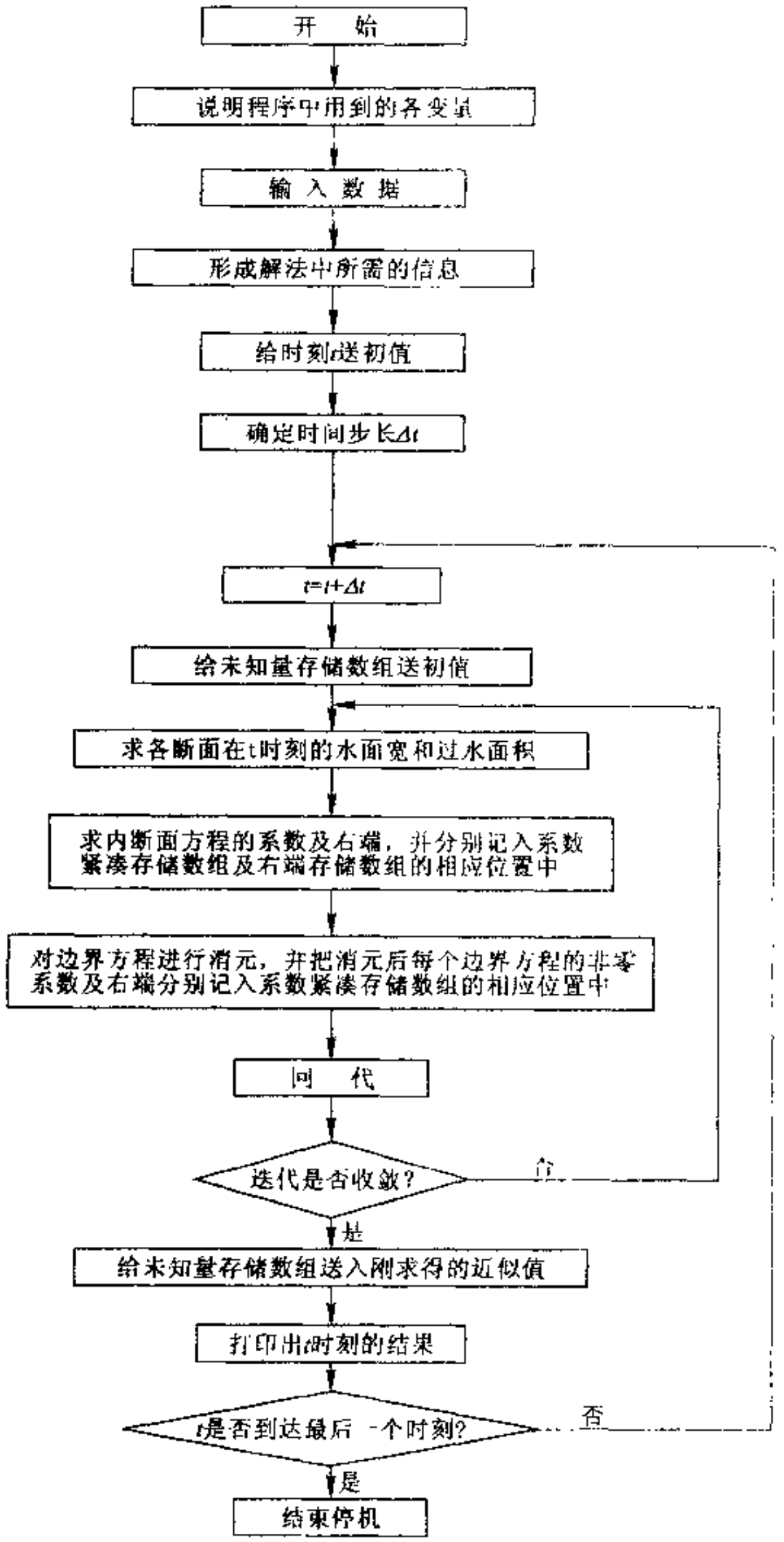


图5.14　计算程序框图

④形成消元后边界方程，我们用两个信息数组，分别确定消元后每个边界方程除主对角线外的非零系数（即表 5.8 中的Δ所表示的元素）的个数及其列序号。这样，消元后的每个边界方程就可以通过这两个信息数组和以上③项中所讲的信息数组和紧凑存储数组表示出来。

⑤形成消元前边界方程，我们也用两个信息数组，分别确定消元前每个边界方程的非零系数的个数及其列序号。由于消元前边界方程的非零系数不是 1 就是−1，所以，我们还可以对这些非零系数的列序号加上正负号来区别该系数是 1 还是−1。这样，消元前的每个边界方程就可以通过这两个信息数组表示出来。

在③、④、⑤中所述的信息数组可通过已经提供的确定网河的基本信息来形成。

⑥确定边界方程消元时的动态数组。这个数组的上、下界不是固定的，而是在消元过程中形成的，因而叫做动态数组。它的上、下界分别由④、⑤中所述的信息数组所确定。

由于消元前后的方程组都可用上述的信息数组及紧凑存储数组表示出来。因此，所述的解法，在计算机上就可以实现了，计算机计算程序框图，如图 5.14 所示。

根据规划计算任务的要求和具备的地形和水文资料情况，首先按照工程措施的可能影响范围适当地确定网河计算的范围，并根据防洪、排涝和灌溉等不同要求，考虑上游丰、平、枯不同来水量与下游大、中、小潮型的遭遇情况选定计算年型和计算时段，然后准备有关的基本资料。对于基本资料的处理，主要是根据现有资料条件，考虑不同处理方法，通过精度或误差影响等分析，选用适当的处理办法。

§5.3 二维河渠非恒定流数值计算

天然河道蜿蜒曲折，洪水流量往往很大，漫出河槽，行洪于滩地。滩地范围数延至上十公里，分洪区，蓄洪区如果处于平原地带，则可能有几十公里宽上百公里长，洪水漫溢的路线都不易确定。而且即使在边界比较规则的河道里，在曲率较大的河段，水面的横向坡降通常也较大，一维模型就不能满足计算要求，此时往往要进行二维以至三维计算。

平面二维计算中，由于河道本身蜿蜒曲折或计算区域复杂的几何边界，使通常使用的矩形网格难以取得良好的效果。目前人们常采用的处理措施有两种，一是采用无结构网格，这种网格由不规则的四边形或三角形构成，可以很好的适应复杂边界，近年来已开发研制出若干通用程序可以自动完成网格的划分，包含的网格可多达上百万个，靠人工难以实现。但浅水计算网格常需与水下地形拟合，必须加以人工判断，故很多情况下仍需在地图上眼观手工绘制网格，工作量也比较繁重。另一种是采用贴体曲线网格，通过坐标变换转化为矩形网格，但通常我们所见的坐标变换大都只是几何意义上的变换，即只是从 $x-y$ 平面变换到了 $\xi-\eta$ 平面，而计算过程中在 $\xi-\eta$ 平面所用的物理参数（变量）却仍是原 $x-y$ 平面的物理参数，这种变换我们称之为非完全变换，如图 5.15 所示。本章将从张量分析的角度，将原始卡儿坐标系下控制方程化为正交曲线坐标系下的表达形式，并把基本方程所包含的所有参数全部变换为正交曲线坐标系下的形式，然后进行计算，这种变换为完全意义上的坐标变换，更加符合实际。

5.3.1 正交曲线坐标下基本方程

本节将推导出正交曲线坐标下的沿水深平均的平面二维非恒定流的浅水方程表达式。沿水深平均的平面二维非恒定流的浅水方程向量式为：

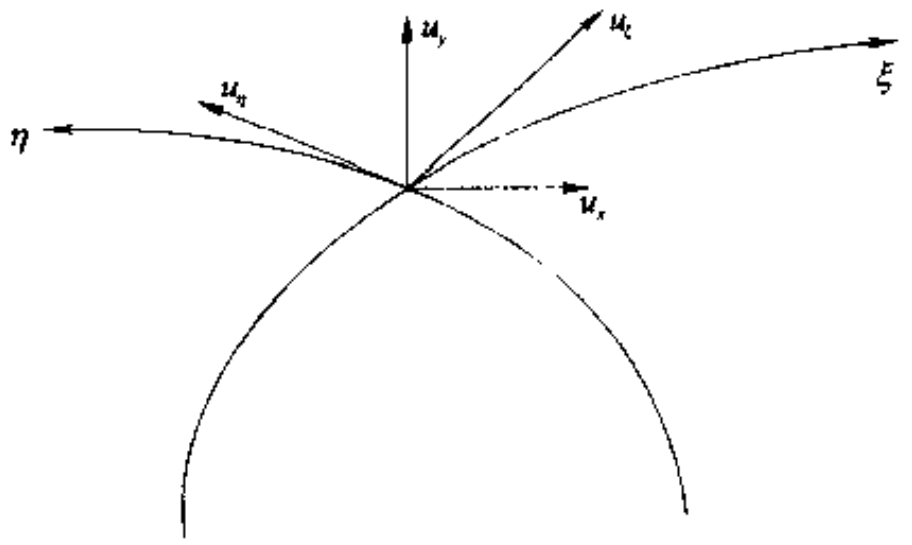


图5.15　曲线坐标系中的流速分量

连续方程：
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho z)+\nabla\cdot(\rho\, h\boldsymbol{u})=0 \tag{5.3.1}$$

运动方程：
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)(\rho\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{X}+\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{5.3.2}$$

展开 (5.3.1) 式得一般曲线坐标系下非恒定流连续方程 (二维)：

$$\frac{\partial \rho z}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\sqrt{g}\rho h\frac{u_1}{H_1}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\sqrt{g}\rho h\frac{u_2}{H_2}\right)=0 \tag{5.3.3}$$

式中：$\sqrt{g}=H_1H_2$；$\xi_1=\xi$；$\xi_2=\eta$；$u_1=u$；$u_2=v$；为正交曲线坐标情况的切向流速的物理分量。结合 (5.3.2) 式即可得出动量方程展开式：

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{u_j}{H_{(j)}}\frac{\partial \rho u_i}{\partial \xi_j}+\frac{\rho u_i u_j}{\sqrt{g}}\frac{\partial H_{(i)}}{\partial \xi_j}-\frac{\rho u_j u_j}{\sqrt{g}}\frac{\partial H_{(j)}}{\partial \xi_i}+\frac{9.81}{H_{(i)}}\frac{\partial \rho z}{\partial \xi_i}+9.81\rho\frac{n^2|\boldsymbol{u}|}{h^{4/3}}u_i$$

$$=\Omega\rho\varepsilon_{ij}u_j+\lambda_\sigma(\rho u_\sigma)_i+\rho\nu_t\left[\frac{1}{H_{(i)}^2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_j^2}+\frac{1}{H_{(i)}^2}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial \ln H_{(i)}}{\partial \xi_j}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial \ln H_{(i)}}{\partial \xi_j}\right. \tag{5.3.4}$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial \ln H_{(j)}}{\partial \xi_i}+\frac{u_i}{H_{(j)}^2}\frac{\partial^2 \ln H_{(i)}}{\partial \xi_j^2}+\frac{u_j}{\sqrt{g}}\frac{\partial^2}{\partial \xi_i\partial \xi_j}\ln\frac{H_{(i)}}{H_{(j)}}\right]$$

如$\rho=const$，则为单相水流。否则，对于浑水有$\rho=\rho_1c_1+\rho_2c_2$，其中c_1、c_2为体积比浓度。对清水控制方程在全变换的正交曲线坐标系下的张量表达形式为：

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\sqrt{g}h\frac{u_i}{H_{(i)}}\right)=0 \tag{5.3.5}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{u_j}{H_{(j)}}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}+\frac{u_iu_j}{\sqrt{g}}\frac{\partial H_{(i)}}{\partial \xi_j}-\frac{u_ju_j}{\sqrt{g}}\frac{\partial H_{(j)}}{\partial \xi_i}+\frac{9.81}{H_{(i)}}\frac{\partial z}{\partial \xi_i}+9.81\frac{n^2|\boldsymbol{u}|}{h^{\frac{4}{3}}}u_i$$

$$=\Omega\,\varepsilon_{ij}u_j+\lambda_\sigma(u_\sigma)_i+\nu_t\left[\frac{1}{H_{(i)}^2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_j^2}+\frac{1}{H_{(i)}^2}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial \ln H_{(i)}}{\partial \xi_j}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\ln H_{(i)}}{}\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\frac{\partial \ln H_{(j)}}{\partial \xi_i}+\frac{u_i}{H_{(j)}^2}\frac{\partial^2 \ln H_{(j)}}{\partial \xi_i^2}+\frac{u_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\ln\frac{H_{(j)}}{H_{(j)}}\Bigg] \tag{5.3.6}$$

将式 (5.3.5)、(5.3.6) 进一步写为正交曲线坐标 $\xi-\eta$ 平面上的二维水流运动的控制方程：

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{1}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial}{\partial \xi}(huC_\eta)+\frac{1}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}(hvC_\xi)=0 \tag{5.3.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{C_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{v}{C_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{u}{C_\xi}\frac{v}{C_\eta}\frac{\partial C_\xi}{\partial \eta}-\frac{v^2}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial C_\eta}{\partial \xi}+g\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{C^2 h}u+\frac{g}{C_\xi}\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$=fv+\lambda_u u_a+\nu_t\left[\frac{1}{C_\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{C_\eta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+A_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+A_2\frac{\partial u}{\partial \eta}+Bu+C_1\frac{\partial v}{\partial \xi}+C_2\frac{\partial v}{\partial \eta}+Dv\right] \tag{5.3.8a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u}{C_\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{v}{C_\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{u}{C_\xi}\frac{v}{C_\eta}\frac{\partial C_\eta}{\partial \xi}-\frac{u^2}{C_\xi C_\eta}\frac{\partial C_\xi}{\partial \eta}+g\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{C^2 h}v+\frac{g}{C_\eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$=-fu+\lambda_v v_a+\rho\nu_t\left[\frac{1}{C_\xi^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{1}{C_\eta^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+A_1\frac{\partial v}{\partial \xi}+A_2\frac{\partial v}{\partial \eta}+Bv-C_1\frac{\partial u}{\partial \xi}-C_2\frac{\partial u}{\partial \eta}-Du\right] \tag{5.3.8b}$$

其中：$C_\xi=\sqrt{x_\xi^2+y_\xi^2}=H_1$，$C_\eta=\sqrt{x_\eta^2+y_\eta^2}=H_2$；

$$A_1=\frac{1}{C_\xi^2 C_\eta}\frac{\partial C_\eta}{\partial \xi},\ A_2=\frac{1}{C_\xi C_\eta^2}\frac{\partial C_\xi}{\partial \eta},\ C_1=\frac{1}{C_\xi^2 C_\eta}\frac{\partial C_\xi}{\partial \eta},\quad C_2=\frac{1}{C_\xi C_\eta^2}\frac{\partial C_\eta}{\partial \xi},$$

$$B=\frac{1}{C_\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\ln C_\eta)+\frac{1}{C_\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\ln C_\xi),\ D=\frac{1}{C_\xi C_\eta}\left(\frac{\partial^2 \ln C_\xi}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{\partial^2 \ln C_\eta}{\partial \xi \partial \eta}\right)$$

5.3.2 方程的离散和求解过程

我们发现在曲线坐标系下方程较直角坐标系下控制方程要复杂得多。为了书写方便，把控制方程中每一项的受几何因素制约的部分及部分已知时段的计算变量均纳入系数中去，这样一来控制方程化为：

$$\frac{\partial z}{\partial t}+a_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+a_2 u+a_3\frac{\partial v}{\partial \eta}+a_4 v=0 \tag{5.3.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+b_2\frac{\partial u}{\partial \eta}+b_3 uv-b_4 v^2+b_5\frac{\partial z}{\partial \xi}+b_6 u=fv+\lambda_u u_a+$$

$$\nu_t\left[c_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+c_2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+c_3\frac{\partial u}{\partial \xi}+c_4\frac{\partial u}{\partial \eta}+c_5 u+c_6\frac{\partial v}{\partial \xi}+c_7\frac{\partial v}{\partial \eta}+c_8 v\right] \tag{5.3.10a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+b_1\frac{\partial v}{\partial \xi}+b_2\frac{\partial v}{\partial \eta}+b_4 uv-b_3 u^2+b_7\frac{\partial z}{\partial \eta}+b_6 v=-fu+\lambda_v u_a+$$

$$v_t\left[c_1\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+c_2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+c_3\frac{\partial v}{\partial \xi}+c_4\frac{\partial v}{\partial \eta}+c_5 v-c_6\frac{\partial u}{\partial \xi}-c_7\frac{\partial u}{\partial \eta}-c_8 u\right] \tag{5.3.10b}$$

为了保证计算的稳定性，减小波动，采用交错网格上的剖开算子法对方程(5.3.9)、(5.3.10a)、(5.3.10b) 按 ξ、η 方向进行离散，分解成两组方程。

沿ξ 方向：

$$\frac{\partial z}{\partial t}+a_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+a_2 u=0 \tag{5.3.11a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b_1\frac{\partial u}{\partial \xi}-b_4 v^2+b_5\frac{\partial z}{\partial \xi}+b_6 u=v_t\left[c_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+c_3\frac{\partial u}{\partial \xi}+c_5 u+c_6\frac{\partial v}{\partial \xi}\right] \tag{5.3.12a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+b_1\frac{\partial v}{\partial \xi}+b_4 uv=v_t\left[c_1\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+c_3\frac{\partial v}{\partial \xi}-c_6\frac{\partial u}{\partial \xi}\right]-c_8 u \tag{5.3.13a}$$

沿 η 方向的方程为：

$$\frac{\partial z}{\partial t}+a_3\frac{\partial v}{\partial \eta}+a_4 v=0 \tag{5.3.11b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b_2\frac{\partial u}{\partial \eta}+b_3 uv=v_t\left[c_7\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+c_4\frac{\partial u}{\partial \eta}+c_7\frac{\partial v}{\partial \eta}+c_8 v\right] \tag{5.3.12b}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+b_2\frac{\partial v}{\partial \eta}-b_3 u^2+b_7\frac{\partial z}{\partial \eta}+b_8 v=v_t\left[c_2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+c_4\frac{\partial v}{\partial \eta}+c_8 v-c_7\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] \tag{5.3.13b}$$

上面两个方程组在推导过程中，忽略了水面风对水流的作用力及地球自身旋转造成的影响——哥氏力的作用。下边对方程组进行离散时，为了保持计算的稳定性，采用交替网格。求解过程由以下四个分步完成：在时间 t 由$n\to n+\frac{1}{2}$前半个时间步内，在ξ方向：(1) 用隐格式差分离散方程 (5.3.11a)、(5.3.12a)，求解 $z^{n+\frac{1}{2}}$、$u^{n+\frac{1}{2}}$；(2) 用对流迎风显格式离散方程 (5.3.13a)，求解 $v^{n+\frac{1}{2}}$；在时间 t 由$n+\frac{1}{2}\to n+1$后半个时间步内，在 η 方向：(3) 用隐格式差分离散方程式 (5.3.11b)、(5.3.12b)，求解 z^{n+1}、v^{n+1}；(4) 用对流迎风显格式离散方程式 (5.3.13b)，求解 u^{n+1}。联系边界条件，即可完成平面二维非恒定流计算。

为了验证模型，本文采用如图 5.16 所示一典型弯道水流进行平面二维计算。上游进口边界条件为流速过程，下游出口为水位过程 (本例取为固定水位)，全长约 450 m (中心线长)，坡度约为 0.002。弯道平面俯视图如图 5.17 所示。计算区域如图 5.16 所示划分为 49×7 的网格，按照本文模型计算成果如表 5.9。

表 5.9

1	99.540	99.535	99.524	99.471	99.450	99.445	99.441	99.434	99.435	99.462	99.
2	99.540	99.535	99.527	99.474	99.453	99.448	99.444	99.437	99.438	99.461	99.
3	99.540	99.532	99.545	99.491	99.471	99.465	99.461	99.453	99.456	99.459	99
4	99.539	99.529	99.574	99.523	99.503	99.497	99.494	99.484	99.487	99.456	99.

续表

5	99.539	99.531	99.594	99 548	99.528	99.523	99.519	99.508	99.509	99.457	99.
6	99.540	99.534	99 611	99.567	99.548	99.543	99.538	99.527	99.526	99.460	99.
7	99 540	99.535	99.613	99.569	99.550	99.545	99.541	99.529	99.527	99.461	99
水位差	0.0	过渡段	8.9 cm	9.9cm	10.0cm	10.0cm	9.9cm	9.5cm	9.3cm	过渡段	0.0

进口边界条件（流速过程）如图 5.18 所示。

计算结果及有关断面纵向、横向流速分布如图 5.19~5.26 所示。网格加密为 97×13 的成果如图 5.27 所示。

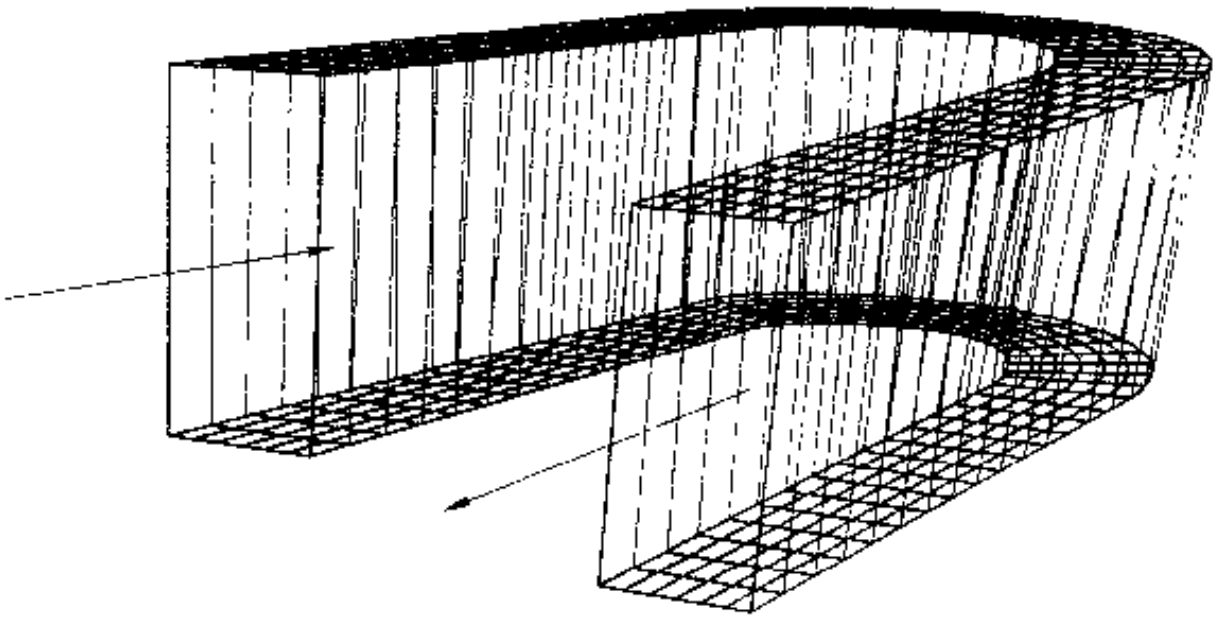


图5.16　弯道水流平面二维计算图

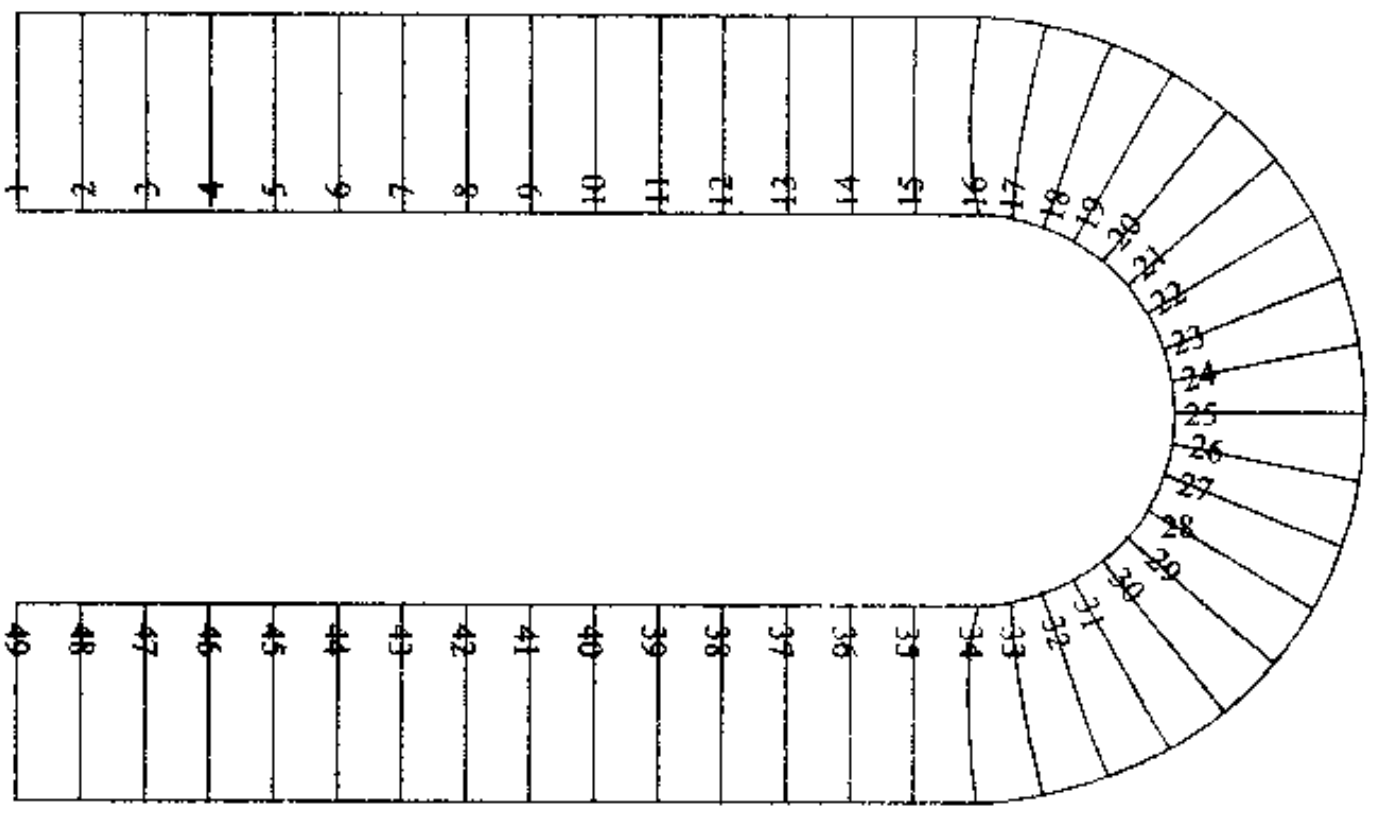


图5 17　弯道平面俯视图

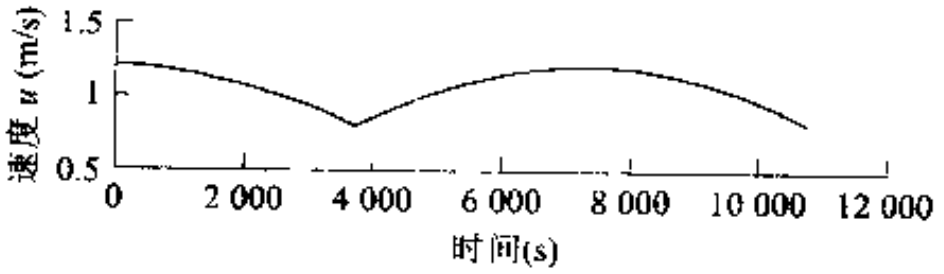


图5.18　进口流速过程

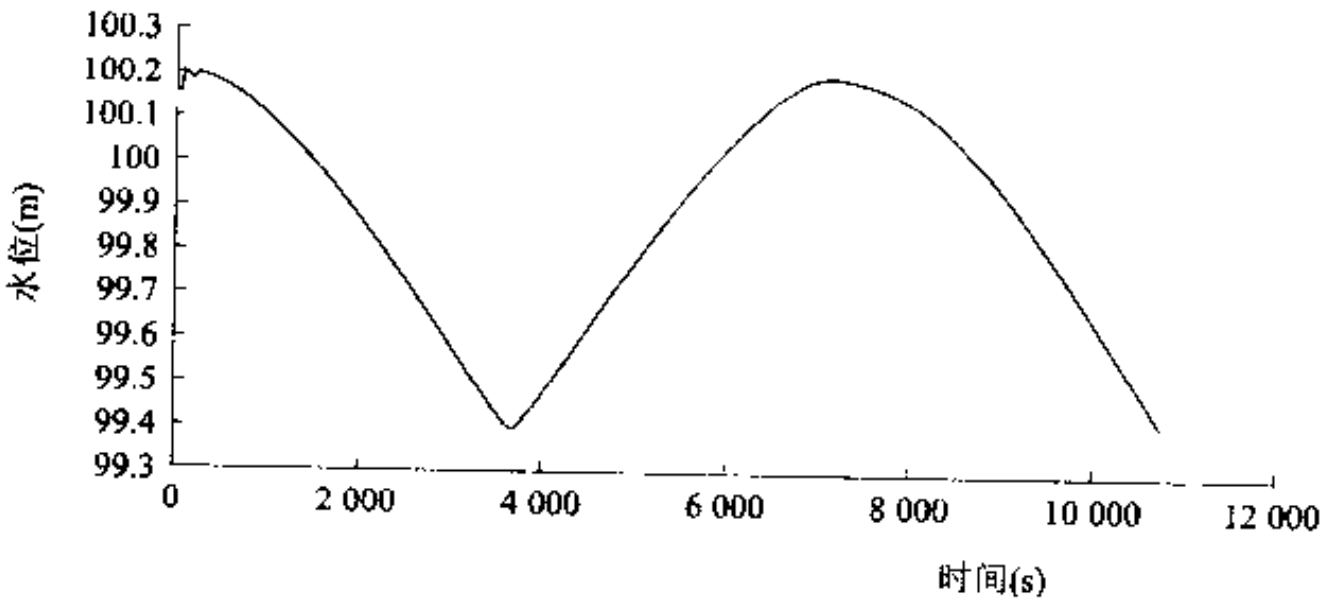


图5.19　进口水位过程计算结果

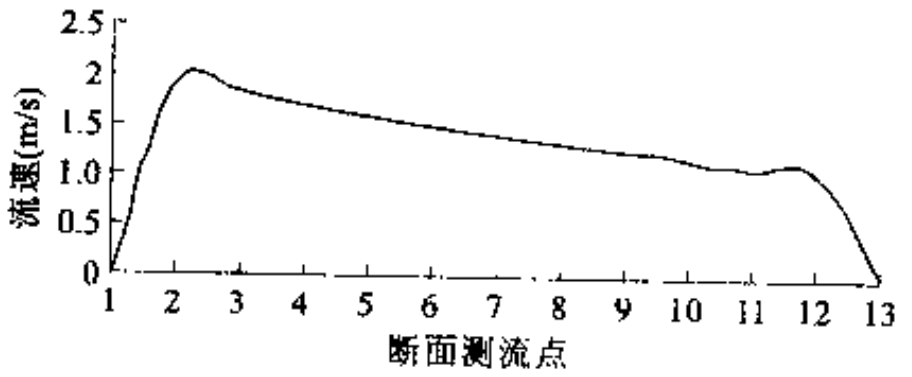


图5.20　20断面纵向流速分布(t=50h)

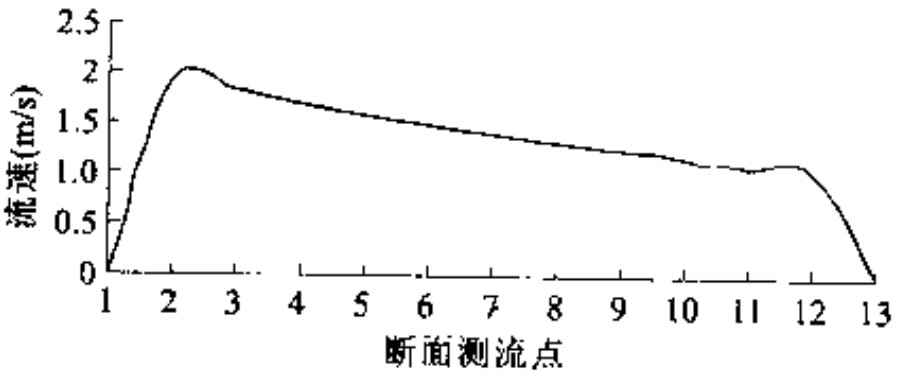


图5.21　25断面(弯道)纵向流速分布

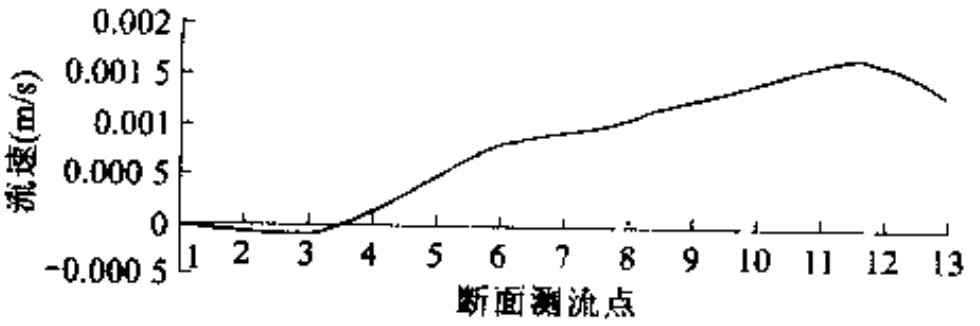


图5.22　20断面横向流速v的分布

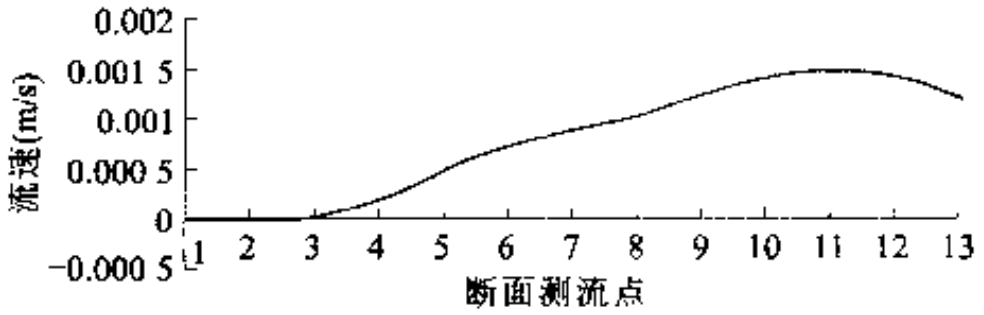


图5.23　25 断面横向流速v分布(t=50n)

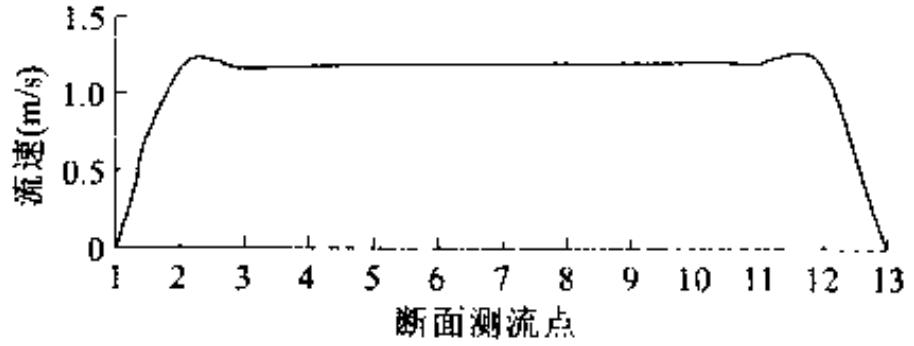


图5.24　42 断面纵向流速u分布

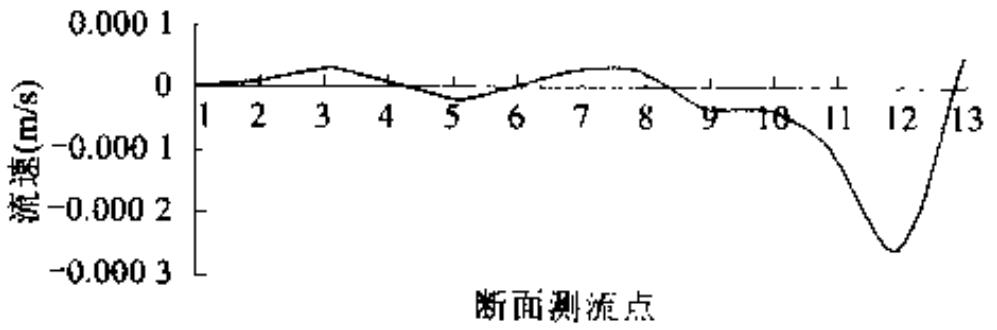


图5.25　42 断面横向流速v分布

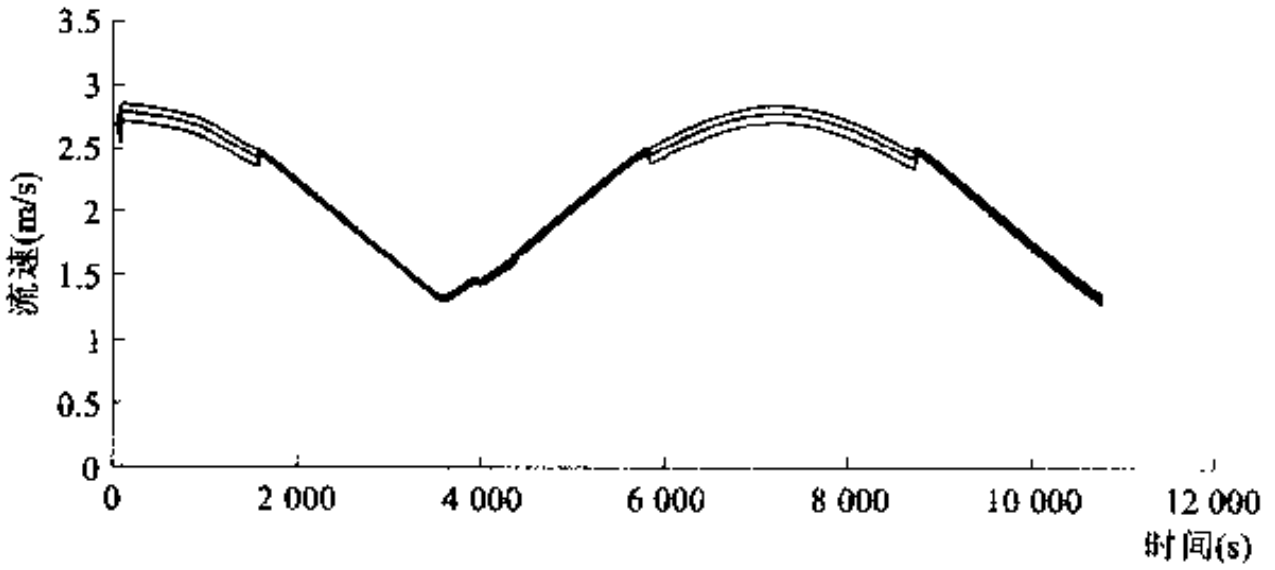


图5.26　末端面流速变化过程

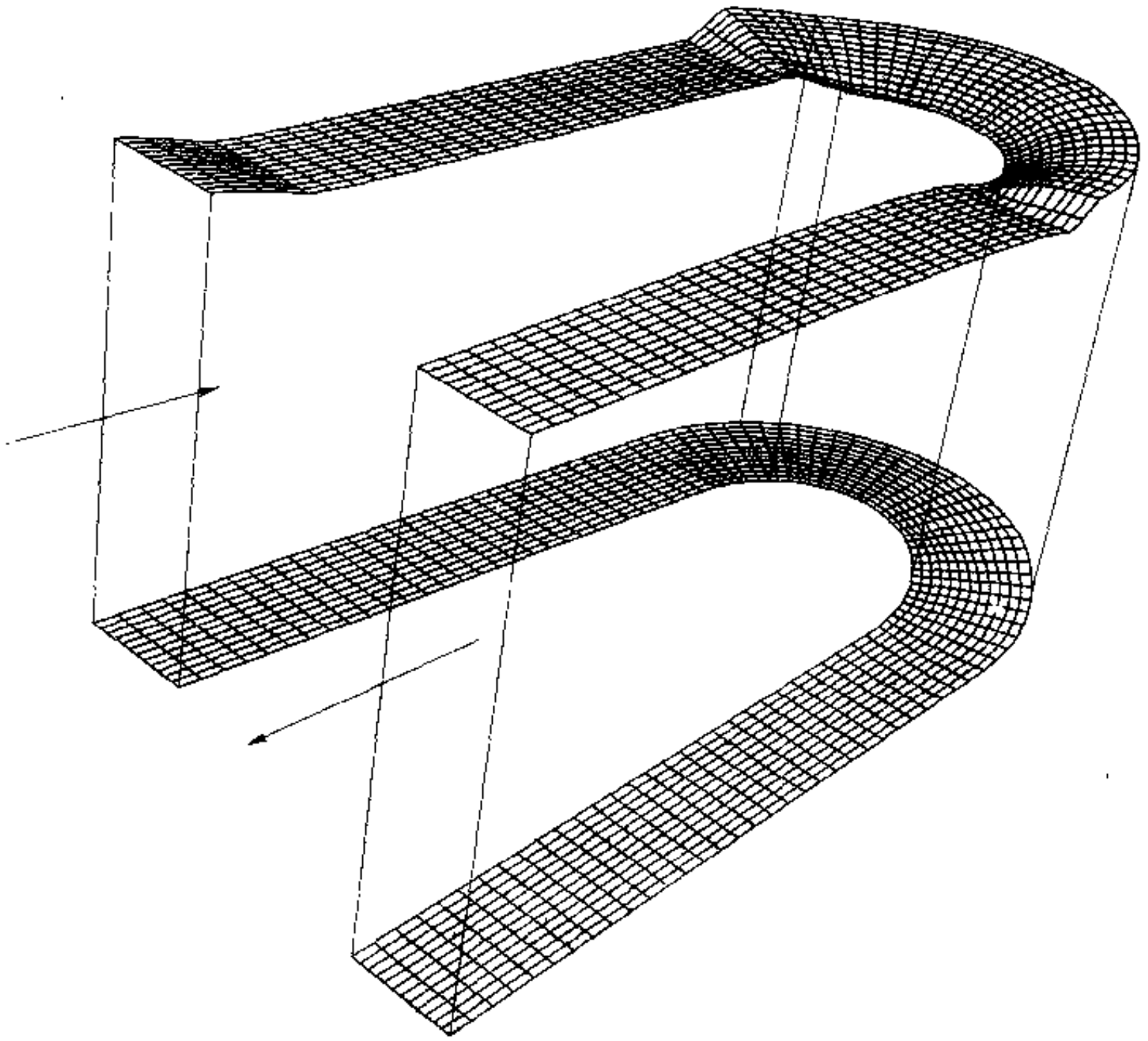


图5.27　网格为97×13弯道水面计算成果图

§5.4　溃坝水流数值分析

国内外对溃坝问题进行过专门的研究，许多国家都通过立法，要求采取预防措施，规定的合理调度方案，模拟过坝洪水，进行各种溃决方式下的溃坝洪水分析和计算，以确定溃坝洪水对库区及下游影响，采取相应的防洪减灾决策。

溃坝理论解只限于简单棱柱体渠道，平底、无阻力情况。物理模型试验，国外做过几个，据所知因人防需要曾在蒲圻做一个三峡溃坝物理模型，因受当时条件限制，库区未模拟，只做下游模型已占地很大，模型长 200 多米，宽 20 米，溃口用翻板也过于简单，只能测水位，不能测流量，现在国际上溃坝物理也只能做到水位跟踪，不能测非恒定流流量。

目前溃坝分析主要依靠数值模拟。

坝并不总是由于自然的原因，失误的设计或结构不良造成溃决，有时是故意破坏，如战争。目前坝越修越高，位能增加到从未有过的程度，对下游可能造成突发的损失，需要估计溃坝洪水大小及其变化过程，洪水波传播的速度，到达重要地点的水位，滞留时间等必要的数据。

5.4.1 明渠特征线基本方程

对溃坝问题多用特征线法解明渠非恒定流的 Saint-Venant 方程，因为它可以用小的时变步长适应波的上下游传播计算，虽然在突然局部溃决时的急变流动，断面压力不是静水压强分布而略有误差。

(1) 对人工渠道以水深 h，流速 u 为变量

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 & (5.4.1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}=g(S_0-S_f) & (5.4.2) \end{cases}$$

以上方程不考虑侧入流，它可以容易地推广于二维浅流流动。

其特征线方程为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\pm c,\quad \text{而}\quad c=\sqrt{gh} \tag{5.4.3}$$

特征方程或叫特征关系式为：

$$\mathrm{d}(u\pm c)=g(S_0-S_f)\mathrm{d}t \tag{5.4.4}$$

(5.4.3)、(5.4.4) 组成顺波、逆波特征线与顺波逆波特征关系式，(5.4.4) 式也可写为

$$\mathrm{d}u\pm\frac{\mathrm{d}h}{h}=g(S_0-S_f)\mathrm{d}t \tag{5.4.5}$$

用特征线方程得 x~t 平面上的波前位置之后，用 (5.4.5) 式求得 h~u 平面上该点的水力要素 u, h 值。

其解法、程序、实例另见后文。

上式对间断波不好用，必须另加上间断波的上下游守恒性条件。另外，圣－维南方程前提假设为压力呈直线分布的渐变流，对急变流另作研究。

(2) 天然河道以水位 z 与流量 Q 为变量，考虑有侧面的出入流，其侧入流单宽流量为 q_l。基本方程形式为：

$$B\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q_l=S_1 \tag{5.4.6}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+2u\frac{\partial Q}{\partial x}+(gA-Bu^2)\frac{\partial z}{\partial x}=u^2\left(BS_0+\frac{\partial A}{\partial X}\Big|_{h=\mathrm{const}}\right)-gAS_f-q_l\frac{Q}{A}=S_2 \tag{5.4.7}$$

(5.4.6)、(5.4.7) 两式量纲不同，以入乘 (5.4.6) 式加 (5.4.7) 式，而有

$$\lambda\left(B\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\frac{\partial Q}{\partial t}+2u\frac{\partial Q}{\partial x}+(gA-Bu^2)\frac{\partial z}{\partial x}=\lambda S_1+S_2 \tag{5.4.8}$$

其中 S_1、S_2 为源项，分别为质量式与动量式之源，整理后得

$$\lambda B\left(\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{gA-Bu^2}{\lambda B}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial Q}{\partial t}+(2u+\lambda)\frac{\partial Q}{\partial x}=\lambda S_1+S_2 \tag{5.4.9}$$

令 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{gA-Bu^2}{\lambda B}=2u+\lambda$$

代入 (5.4.9) 式得

$$\lambda B\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\lambda S_1+S_2$$

由上式得： $$\lambda^2+2v\lambda-\frac{(gA-Bu^2)}{B}=0$$

$$\lambda_{1,2}=-u\pm\sqrt{g\frac{A}{B}},\qquad 令\quad c=\sqrt{g\frac{A}{B}}\quad 为波速$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{1,2}=u\pm\sqrt{g\frac{A}{B}}=u\pm c \tag{5.4.10}$$

此为特征线方程。对于缓流，一条顺波特征线传向下游，另一条逆波特征线则传向上游。对于急流，由于$u>c$，两条特征线均向下游区域传播。将$\lambda_{1,2}=-(u\mp c)$的关系式代回 (5.4.9) 式，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(u\mp c)B=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+(u\mp c)S_1-S_2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{(u\mp c)B}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{S_1}{B}-\frac{S_2}{(u\mp c)B}$$

分开写成两式

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{(u-c)B}\mathrm{d}Q+\left[\frac{S_1}{B}-\frac{S_2}{(u-c)B}\right]\mathrm{d}t \tag{5.4.10a}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{(u+c)B}\mathrm{d}Q+\left[\frac{S_1}{B}-\frac{S_2}{(u+c)B}\right]\mathrm{d}t \tag{5.4.10b}$$

(5.4.10a)、(5.4.10b) 式为顺波特征关系式与逆波特征关系式的两组常微分方程。它们与特征线联解，可以求出 x~t 平面上波的位置（波前）与波的水力要素z，Q 值。

下面通过一些实例，进行它们的计算。

基本方程

$$\begin{cases}B\dfrac{\partial z}{\partial t}+\dfrac{\partial Q}{\partial x}=q_L=S_1\\[2ex]\dfrac{\partial Q}{\partial t}-2u\dfrac{\partial Q}{\partial x}+(Bu^2-gA)\dfrac{\partial z}{\partial x}=u^2\left.\dfrac{\partial A}{\partial x}\right|_{z=\mathrm{const}}-gAS_f=S_2\end{cases}$$

同样得 $$\lambda_{1,2}=-u\pm\sqrt{g\frac{A}{B}}=-u\pm c$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\pm c=u\pm\sqrt{g\frac{A}{B}}$$

仍然有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{(u\pm c)B}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{S_1}{B}-\frac{S_0}{(u\mp c)B} \tag{5.4.11}$$

所得特征关系式形如 (5.4.10) 式，但此时，$S_1=q_l$，而$S_2=u^2\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{Z=\mathrm{CONST}}-gAS_f$，其中$S_0$不出现，便于对天然河道进行计算。

5.4.2 溃坝洪水需计算的问题及实际算例

溃坝洪水计算分瞬间溃与逐渐溃两种情况，如拱坝，砼支墩坝往往属于瞬间溃决，法国马尔帕斯拱坝 1959 年突然“砰”的一声，瞬间溃决。我国上滩、小湾拱坝溃坝洪水都按瞬间溃决考虑。如土坝、堆石坝，土堤的溃决往往先形成一定的决口，然后掏刷冲决逐渐扩大以致于全坝溃决，所谓逐渐溃时间也是很短的，一般十几分钟到半个钟头，最多一个钟头就全溃了。如我国板桥 1975 年溃坝。1995 年青海某土石坝就属这种情况。

溃坝首先要决定溃坝坝址处最大溃口流量$Q_{\max}$，对此如果是矩形断面，上下游渠道无限长，水库水头为H_0，渠道平底无摩阻，可以由理论分析得出，瞬间全溃的结果：

溃口流速 $$U_0=\frac{2}{3}\sqrt{gH_0}$$

溃口水深 $$h=\frac{4}{9}H_0$$

这样一来溃口最大单宽流量$q_{\max}=\frac{8}{27}\sqrt{g}H_0^{\frac{3}{2}}$。它也可以用特征线法解特征线 (5.4.10) 与特征关系式 (5.4.11) 数值地求得。

由于此问题的重要，后经许多人研究有以下的经验公式：

$$q_{\max}=\lambda\sqrt{g}H_0^{\frac{3}{2}} \tag{5.4.12}$$

系数λ见表 5.10

表 5.10 瞬间全溃溃口最大流量的流量系数表（$Q_{\max}=\lambda B\sqrt{g}H_0^{\frac{3}{2}}$）

溃口形状	矩 形	四次抛线	二次抛物线	三角形
λ	$0.296=\frac{8}{27}$	0.220	0.172	0.115

瞬间溃坝如果属于部分溃决，局部溃决，又有不少经验公式，其中有铁道部科研院，黄委会及美国 WES 公式，下面只介绍 WES 公式

$$Q_{\max}=\frac{8}{27}W_s\left(\frac{W_d}{W_b}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{h_0}{D}\right)^{\frac{1}{2}}(gD^5)^{\frac{1}{2}} \tag{5.4.13}$$

式中 W_s、W_b分别为缺口宽度与坝宽；D、h_0分别为缺口在水面下深度与坝上游水头。

对于逐渐溃决，它与筑坝当地材料粘结性质有关，需另行分析。

有人提到溃坝流量是按波流还是按堰流分析，由于溃坝是急骤变化的流动，一部分势能除转化动能之外，还要变为惯性水头$\frac{\partial Q}{\partial t}$，$\frac{\partial V}{\partial t}$，因此，按波流算得的系数$\lambda$值，较堰流流量系数 m 小。当溃决为逐渐溃时，它们将接近些。总之，溃坝流动是非恒定性很强的波流而非接近于恒定流的堰流。

下面简述一实例：

有一坝高$H=20$ m，坝宽$B=76$ m，分析其溃决坝址流量过程。

我们用特征线法进行了计算，其溃坝坝址处溃口流量过程线如图5.28，将计算结果与经验公式计算得（按四次方曲线）图中点子，作出图中曲线进行对比，可以看出两者是很接近的，且与泄空总库容6.4万方计算亦很一致。

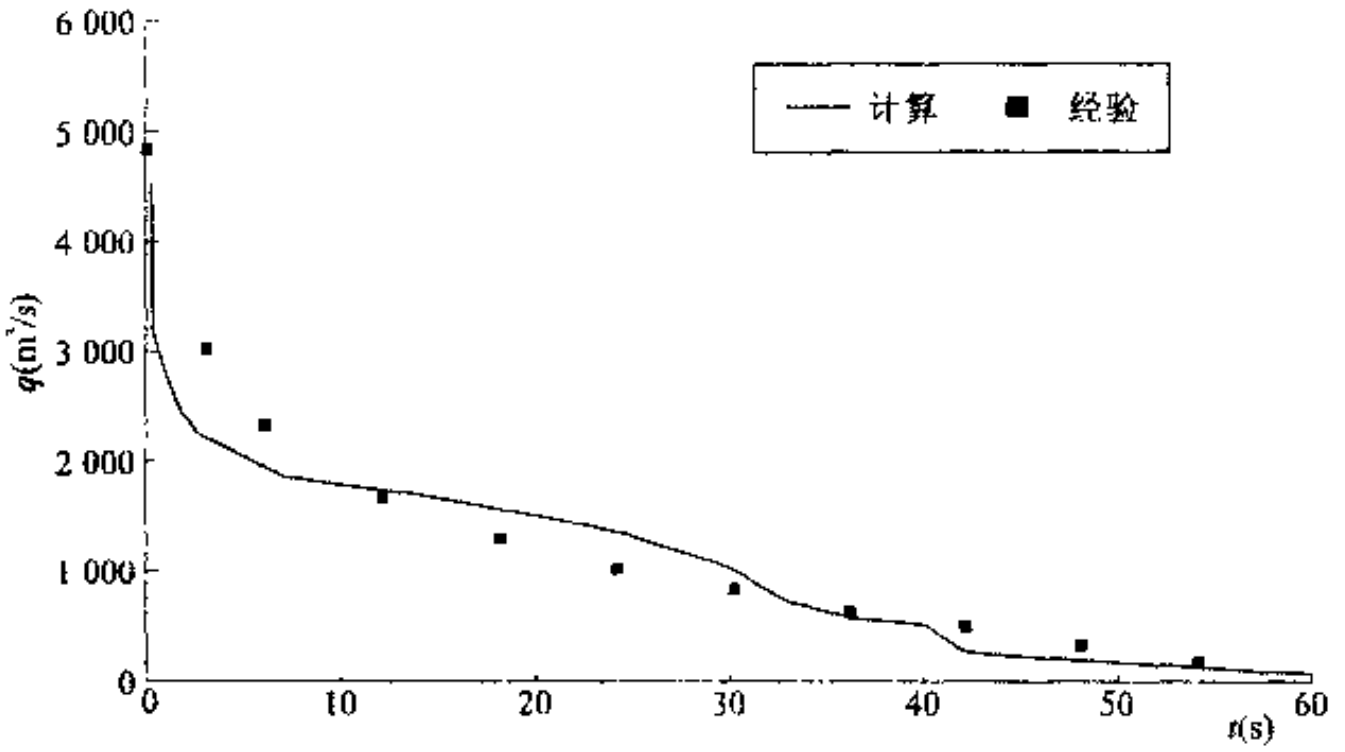


图5.28　溃口流量过程图

以上计算结果表明：①用特征线方法，可以计算瞬间溃坝（取$\Delta t=0.2$ s）坝址流量过程线。②这一计算的同时也给出了溃口最大流量$Q_{max}=4\ 560$m³/s。③特征线法可以同时计算坝址上游水库中的逆行波传播过程和坝下游顺行波传播过程。

第六章　水沙两相流数值模拟

近来水沙两相流数值模拟也逐渐兴起，应用于河床变形、河口治理、港口建设。人们很早就开始研究水沙运行，但认识其科学规律仍是最近的事。严格地说，水沙运动应该从多相流基本理论出发进行研究，但鉴于问题的复杂性，目前多采用拟流体假设，从统计平均的总流角度、建立守恒方程，如输沙方程，河床变形方程等，认为泥沙颗粒对水有良好的跟随性，相间作用力的考虑作一定假设。

§6.1　变形河床冲淤计算

二维的河床冲淤计算所用到的基本方程组中，包括水深平均化的二维水流连续性方程、运动方程，此外还要补充平面二维泥沙对流扩散方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(HS_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_jHS_i)=\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(HS_i)+\alpha\omega_i(S_i^*-S_i) \tag{6.1.1}$$

以及河床变形方程

$$\rho'\frac{\partial Z_b}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\alpha\omega_i(S_i-S_i^*) \tag{6.1.2}$$

其中H为水深；S_i为第i个泥沙粒径组($i=1, \cdots, n$)的垂线平均含沙量（单位：kg/m^3），ω_i和S_i^*为相应的泥沙沉速和水流挟沙力；水深平均流速$u_j=(u, v)$；α为恢复饱和系数，ρ'为泥沙干密度；ε为泥沙的紊动扩散系数；Z_b为河床高程。

水中的含沙量也可以用泥沙的体积浓度C来表示，则

$$S=\rho_s C \tag{6.1.3}$$

ρ_s为泥沙的固体物质密度。

水流挟沙力指的是水流在一定的床沙组成下挟带悬移质中床沙质的能力。当$S_i=S_i^*$时，水流中该粒径组的床沙质处于饱和状态，方程(6.1.1)右边第二项（即源项）和方程式（6.1.2）右边为零，此时水流中的悬移质总量不变，河床亦不冲不淤。$S_i<S_i^*$时为非饱和状态，方程(6.1.2)右边小于零，即河床将发生冲刷，冲刷起的床沙质成为水流中悬移质的来源，因此方程（6.1.1）中的源项大于零。$S_i>S_i^*$时为过饱和状态，水流中的悬移质将会淤积在河床上，使河床高程增加。

实际计算时可能需要划分许多粒径组，对每个粒径组求解相应的泥沙对流扩散方程。方程中还需要补充水流挟沙力、泥沙扩散系数和泥沙沉速的计算公式。

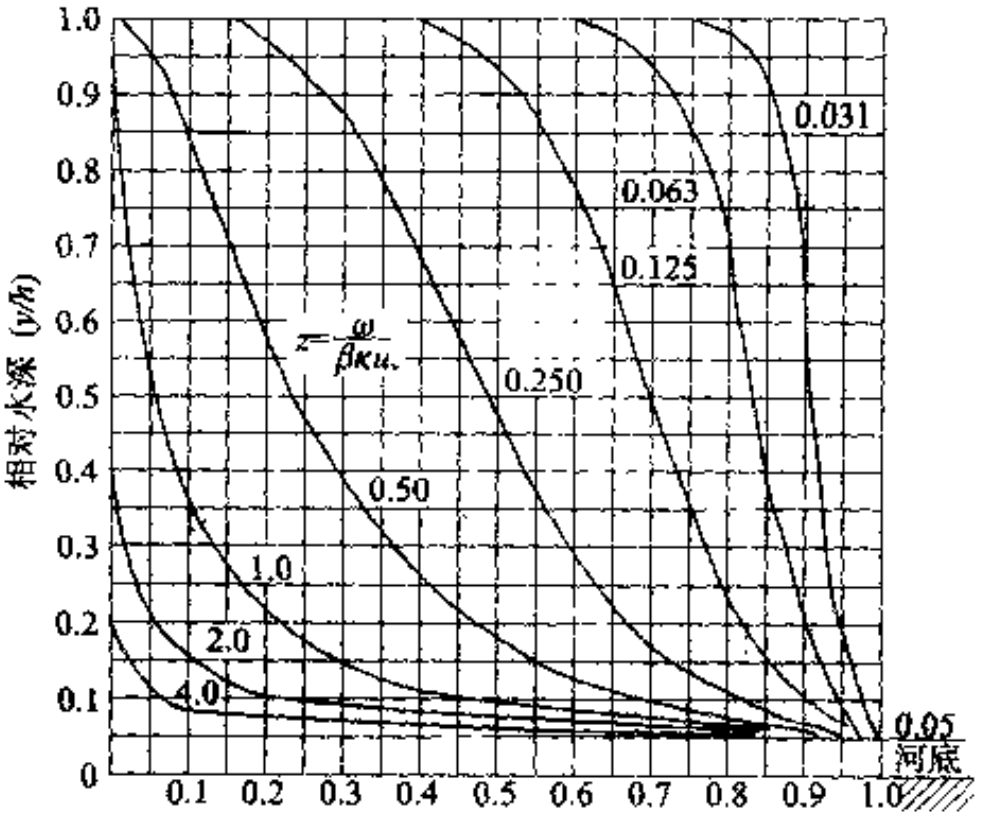
（1）水流挟沙力的计算

有经验公式

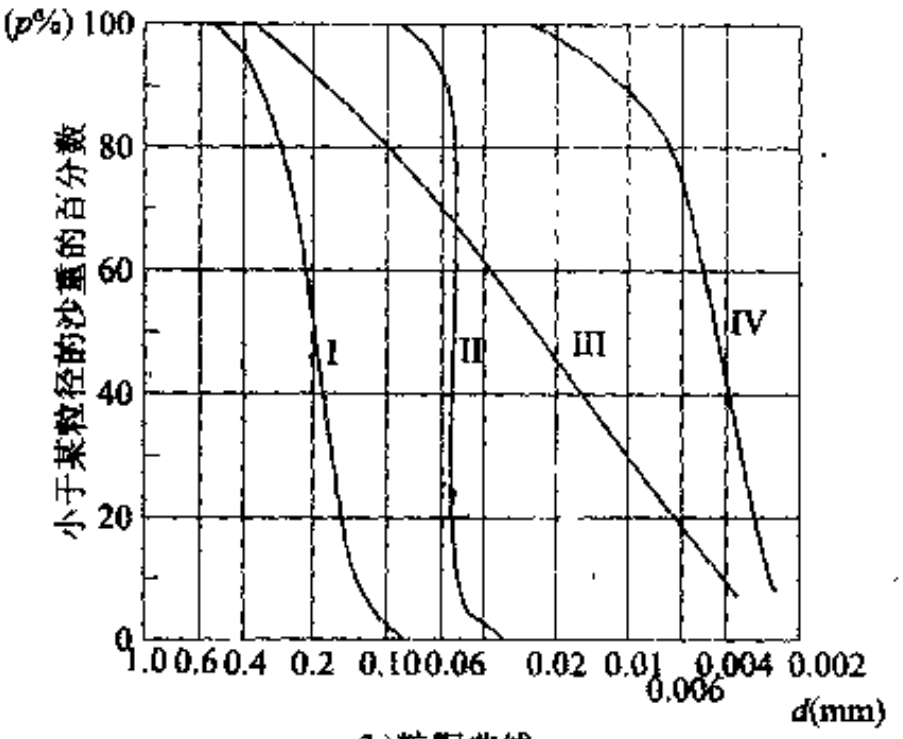
$$S_i^*=\kappa\left(\frac{U^3}{gR\omega}\right)^m \tag{6.1.4}$$

式中R为断面的水力半径，$U=\sqrt{u^2+v^2}$，k、m为与$\frac{U}{gR\omega}$有关的经验系数和指数。但水流挟沙力的影响因素众多，简单的经验公式难以全面反映，$\frac{U}{gR\omega}$越大，用式（6.1.4）计算的结果误差越大，甚至可以相差10倍。此时恢复饱和系数α的选定就有较大的任意性。

α在理论上应为邻近底层含沙量与垂线平均含沙量（相当于水流挟沙力S_*）的比值，图6.1 (a)为均质沙的垂向含沙量分布。对于非均质沙，根据其粒径曲线$d\sim p\%$ (图6.1 (b))，在d_m以下之1%也相当于α的概率。如图6.1 (a)、(b)所示。



(a)相对含沙量 (S/S_b)



(b)粒配曲线

图6.1　粒配曲线与相对含沙量

另外，对于高含沙水流的黄河等多沙河流，水流挟沙力要经过修正，加上高含浓度的影响，如张红武公式

$$S_* = 2.5\left[\ln\left(\frac{H}{d_{50}}\right)\frac{(0.0022+S_v)U^3}{\kappa\frac{\rho_s-\rho_m}{\rho_m}gh\omega_*}\right]^{1.62} \tag{6.1.5}$$

其中d_{50}为中值粒径，S_v为体积含沙量，κ为卡门常数，ω_s为浑水中群体沉速，ρ_s，ρ_m为泥沙密度与浑水密度。

此外还有费祥俊对高含沙水流得到的公式等。

(2) 泥沙扩散系数

水流紊动扩散系数ε，是紊流理论中的要害问题，对紊流模型与紊流计算是关键性难题，有的计算中认为ε是常数，或沿水深为 Gauss 分布，按理论分析，紊动扩散系数，在河床应为零，水面变小而不为零，最大值在相对水深的 0.13~0.26 范围内变化，接近于河床分布曲线是不对称的，因为它受到河底与水面有限空间的约束，通过理论分析我们得出

$$\varepsilon = A\zeta \exp(-\lambda\zeta^2) \tag{6.1.6}$$

式中A、λ为某一系数；ζ为相对水深或相对宽度。上式与实验资料比较一致，(按郑邦民等人分析，水利学报 1998 年 12 期)。泥沙扩散系数$\varepsilon_s = \beta\varepsilon$。

(3) 群体沉速

单颗粒泥沙沉速，用张瑞瑾公式

$$\omega_0 = \sqrt{\left(13.95\frac{\nu}{\alpha}\right)^2 + 1.09\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}gd} - 13.95\frac{\nu}{\alpha} \tag{6.1.7}$$

但高含沙浓度情况的群体沉速与它相差甚远，有时有 10 倍之差，随着浓度C的增加，浑水粘性μ_m将大于清水粘性μ_0，浑水中群体沉速ω比清水中单个颗粒速ω_0小得多，对黄河泥沙可用张红武公式

$$\omega_s = \omega_0\left[\left(1-\frac{C}{2.25\sqrt{d_{50}}}\right)^{3.4}(1-1.25C)\right] \tag{6.1.8a}$$

和沙玉清公式

$$\omega_s = \omega_0\left(1-\frac{C}{2\sqrt{d}}\right)^3 \tag{6.1.8b}$$

群体沉速公式应尽可能有两相流体力学依据，量纲应和谐且与实测资料一致，郑邦民等通过对浑水中泥沙颗粒受力分析，认为泥沙沉降时对单颗粒符合 Stokos 公式，多颗粒在散粒体条件下也应该是线性可叠加的。在计算机上做出 10^{12}~10^{15} 有限多个泥沙颗粒 (d = 0.01~0.1 mm) 受力作用，得到泥沙下沉对周围流场干扰和周围回流影响，并利用 Batchelor 等得到的μ_m浓度影响的二阶近似理论结果，得出

$$\omega_s = \omega_0\frac{1-\dfrac{C}{C_m}}{1+2.5C+7.6C^2}\frac{d_{50}}{\sqrt{d_{25}\,d_{75}}} \tag{6.1.9}$$

式中极限体积比浓度C_m采用方红卫 (1996 年) 黄河资料，取为 0.561 2，该式量纲和谐且C不超过C_m，并与黄河实测资料一致，如图 6.2 所示。

例 6.1 计算实例：用以上水沙数学模型对芜湖长江段河床变形进行了计算，计算以推移质为主。

根据资料，芜湖河段从 50 年代至 90 年代，其最大流量为 92 600 m^3/s，最小流量为 4 200

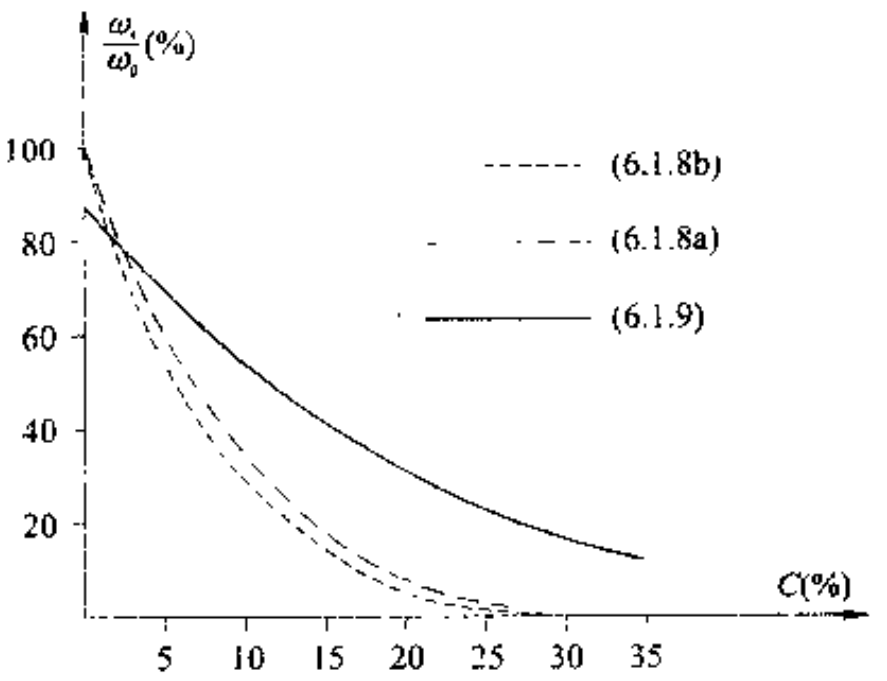


图6.2　相对沉速 $\frac{\omega_s}{\omega_0}$ 与浓度C关系图

m³/s。多年平均流量为 28 900 m³/s，含沙量历年最大 3.24 kg/m³，最小 0.022 kg/m³，多年平均 0.516 kg/m³，悬移质输沙量历年最大 6.78 亿吨，最小 3.11 亿吨，多年平均 4.61 亿吨，推移质输沙量约 300~400 万吨。另外一些水、沙特征见表 6.2。

表 6.2　广福矶、裕溪口、四合山实测水沙记录 (1993 年)

时　间	断面	Q (m³/s)	U (m/s)	$\bar{h}$ (m)	S (kg/m³)	G_s (kg/s)	悬移质d_{50} (mm)	河床质d_{50} (mm)
1 月	广福矶	9 650	0.47	10.4	0.006	168	0.006	0.177
	裕溪口	1 070	0.26	4.2	0.007	36.4	0 007	0.072
	四合山	7 900	0.49	15.9	0.005	177	0.005	0.223
2 月	广福矶	15 300	0.70	11.0	0.066	1 020	0.006	0.20
	裕溪口	2 040	0.40	4.9	0.064	130	0.005	0.085
	四合山	12 600	0.72	16.9	0.005 9	734	0.006	0.24
3 月	广福矶	52 300	1.62	17.1	0.563	28 000	0.014	0.30
	裕溪口	17 100	1.50	9.3	0.741	12 700	0.016	0.10
	四合山	33 600	1.39	22.2	0.576	19 300	0.012	0.26

(4) 河道自然变形计算

计算按不同系列年来水来沙条件下冲淤组合进行。

1954 年　　1955 年　　1963 年　　1964 年　　1965 年

丰水中沙　　中水中沙　　枯水丰沙　　丰水丰沙　　中水丰沙

计算过程中将大通站水位流量过程换算为东梁山水位流量过程，按大通站流量~沙质推

移质输沙率考虑来沙量并按 1993 年 1 月、3 月、7 月实测泥沙资料的粒径组成计算其悬移质挟沙力及推移质输沙率。

泥沙特性中芜福矶桥位按芜主 1 资料考虑，四合由桥位分别按芜左 1 与芜右 1 资料，分别考虑裕溪口水道与西华水道分汊河道情况，进行泥沙冲淤能力计算。

实测资料中 1993 年 1 月、3 月、7 月，来水流量分别为 9 650 m^3/s、15 500 m^3/s、52 300 m^3/s 并有三组相应的悬移质输沙量与河床质组成资料。由资料分析看来，河床质组成随流量变化不大，而中间各级流量及大洪水的流量及悬移质输沙量，按插值及延伸法处理。

推移质的单宽输沙能力按河流动力学中张瑞瑾公式计算

$$g_b = 0.001\,24\,\frac{\alpha\gamma' U^3}{g^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{4}} d^{\frac{1}{4}}} \quad t/m\cdot s \tag{6.1.10}$$

式中：α 为体积系数，约为 0.4~0.5；U 为流速；h 为水深；d 为泥沙粒径；干容重γ'，取为 1.6~1.8 t/m^3。$Q = 52\,300\ m^3/s$ 时，按一维平均估算其推移质输沙率为 $q_b = 0.494\ kg/m\cdot s$。

如果泥沙粒径是不均匀的，则其推移质输沙率也有变化。

实际来沙量G_s按大通站流量与推移质输沙率关系曲线，分别由少沙、中沙、多沙情况查得，再与推移质输沙率（能力）G_b比较，可得到河床变形定性情况，如果$G_s<G_b$，河床可能淤积；反之，如果$G_s<G_b$，河床可能冲刷。

河道各断面的流速、水深不同，不同流量下来沙量也不同，推移质与悬移质组成也不同。按流量$Q = 52\,300\ m^3/s$ 时，其输沙率查得为：

	少沙	中沙	多沙
G_s	36 kg/s	105 kg/s	280 kg/s

对于含沙量大的浑水水流，计算中还需要考虑悬移质情况，悬移质挟沙能力公式按 (6.1.4) 计算，宽浅河道$R \approx$平均水深$\bar{h}$。

水流挟沙能力不论是推移质或是悬移质公式都可以看出与流速有密切关系，它们分别与流速的四次方或三次方成正比，也就是说流速的大小对挟沙力影响十分敏感，在一年内的枯水期与洪水期，水流挟沙力有很大的变化，在分汊河道中冲淤也不同，挟沙能力与水深h及粒径d的大小也有关系。

各家用水流挟沙力计算公式计算结果与来沙量比较，以确定其输沙量。以Q为 52 300 m^3/s，平面二维计算结果列于下表 6.3 说明如下：

I为沿流程横断面号，I=1~35，36~50，J为沿河宽方向点号J=1~7。

S为来流含沙量 (kg/m^3)；GS为水流挟沙能力 (kg/m^3)，其中MY为梅叶——彼得公式，ZH为张瑞瑾公式，SM为沙莫夫公式，LW为列维公式，分别计算所得的水流挟沙能力，可以看出它们之间差别较大，相差可达 10 倍以上。

$WS2$为平面二维计算所得断面来流含沙总量 (10^4 吨)

根据 1993 年 7 月，芜主 1 (芜福矶) 实测资料其流量为$Q = 52\,300\ m^3/s$ 时，悬移质粒径$d_{50} = 0.014$ mm，$\omega = 0.015$ cm/s，河床质粒径$d_{50} = 0.30$ mm，$\omega = 3.96$ cm/s。其悬移质挟沙力计算值，分别为$S^* = 17\ kg/m^3$与$S^* = 0.03\ kg/m^3$，说明水流输运细粒泥沙能力较大，而输运粗颗粒泥沙能力较小，芜湖河段的泥沙在计算中需要考虑各年情况及其组合。

与一维计算不同的是，沿河宽方向上阻力、糙率、含沙量、推移质单宽输沙率和水流挟沙力是变化的。根据公式（6.1.4）计算S^*时U为某点的垂线平均流速分量u、v的合流速，水

表 6.3　各家水流挟沙力公式比较与总输沙量二维计算结果

I	*J*	*S*	*GS*1－*MY*	*GS*2－*ZH*	*GS*3－*SM*	*GS*4－*LW*	*WS*2 (10⁴t)
1	1	0.044 3	0.198 3	0.884 2	0.078 5	1.198 4	431.995
1	2	0.022 4	0.103 2	0.222 9	0.022 9	0.302 1	108.888
1	3	0.110 2	0.262 1	1.875 9	0.205 5	2.542 6	916.565
1	4	0.153 6	0.343 1	3.476 8	0.353 5	4.712 3	1 698.714
1	5	0.044 1	0.194 2	0.848 2	0.076 4	1.149 7	414.439
1	6	0.024 3	0.107 4	0.578 0	0.043 0	0.783 4	282.405
1	7	0.019 7	0.174 3	0.576 3	0.037 9	0.781 1	281.590
2	1	0.580 0	0.141 6	0.996 0	0.133 1	1.349 9	482.622
2	2	0.101 4	0.059 7	0.120 1	0.014 3	0.162 7	58.663
2	3	0.559 4	0.138 7	0.945 9	0.126 6	1.282 1	462.168
2	4	0.713 5	0.164 5	1.420 7	0.183 1	1.925 6	694.150
2	5	0.680 8	0.173 9	1.579 3	0.189 3	2.140 5	771.613
2	6	0.737 9	0.183 6	1.798 0	0.213 2	2.437 0	878.496
2	7	0.612 3	0.159 8	1.294 3	0.159 3	1.754 3	632.390
3	1	0.024 4	0.149 9	0.465 3	0.034 3	0.630 7	227.340
3	2	0.044 0	0.139 1	0.458 5	0.457 9	0.621 5	224.027
3	3	0.030 4	0.137 4	0.412 5	0.036 2	0.559 1	201.549
3	4	0.012 5	0.098 4	0.182 4	0.013 0	0.247 2	89.118
3	5	0.028 8	0.174 1	0.645 1	0.045 9	0.874 3	315.188
3	6	0.025 7	0.185 6	0.713 6	0.045 6	0.967 2	348.654

力半径R可取成水深h，系数k值也与一维有所不同，可取为$\kappa'=\kappa\left(0.1+90\frac{\omega}{U}\right)$。

计算步骤：

①选定一典型计算年，根据流量、水位过程，确定其流量、水位级。

②根据流量、水位，计算各断面水深，流速分布（二维情况）。

③根据水深，流速分布，悬移质粒径，推移质粒径，计算悬移质挟沙力S^*及推移质（单宽）输沙率q^*，并考虑平面二维情况不同分布。

④比较实际流量、水位情况下的来沙量、判断其中冲淤情况，按泥沙连续性方程与河床变形方程计算河床变形，确定Z_b。

1993年1月~7月计算结果见图6.3~图6.6。1993年来沙量资料见表6.4。

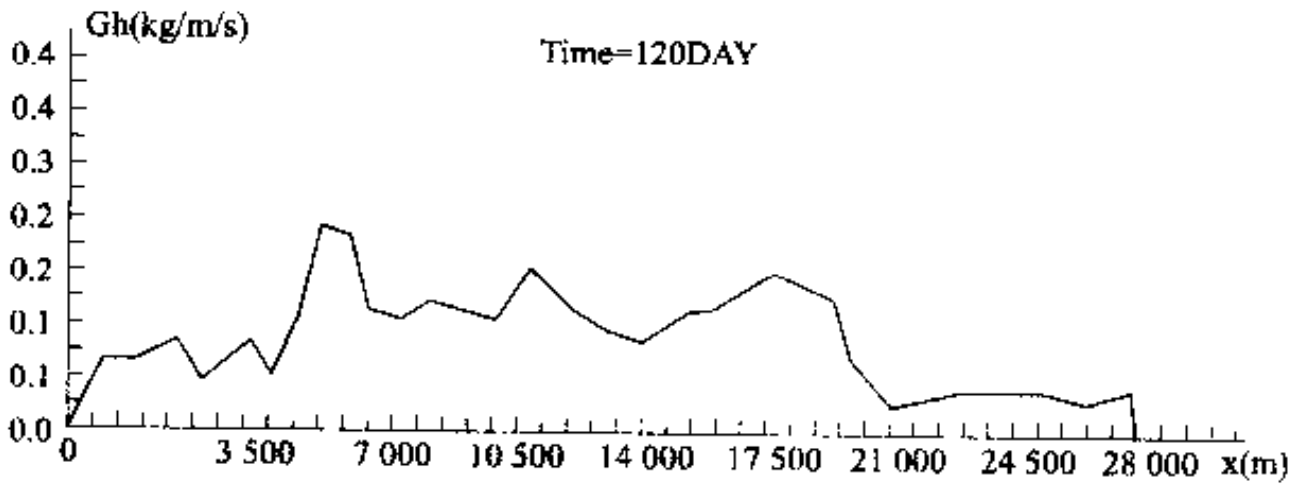
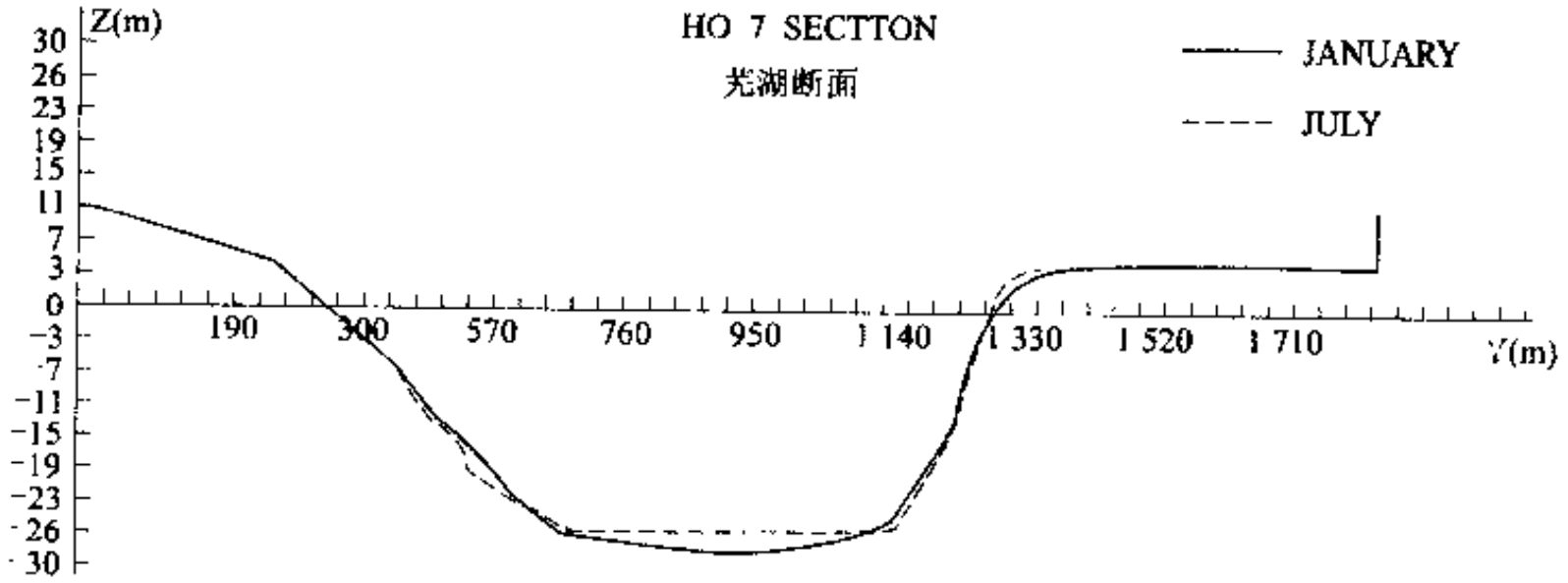


图6.3　推移质输沙率沿程变化

表6.4　1993年来沙量与水流挟沙力比较

时间	断面	G_s	G_b			G_s'	G_b'	G_T'	G_t		
			少沙	中沙	多沙				少沙	中沙	多沙
1月	广福矶	168	1.2	3.5	7.5	19.3	16.2	35.5	169.2	171.5	175.5
	裕溪口	36.4				5.35	1.24	6.59		36.4	
	四合山	177				79.0	16.93	95.93		177	
3月	广福矶	1 020	3.6	7.5	8.5	76.5	76.73	153.23	1 024	1 028	1 029
	裕溪口	130				14.2	6.59	20.79		137.5	
	四合山	734				25.2	39.44	64.64		741.5	
7月	广福矶	28 000	42	120	330	3 600	1 731	5 331	28 042	28 120	28 330
	裕溪口	12 700				20 520	1 261	21 736		12 820	
	四合山	19 300				6 048	527	6 575		19 420	



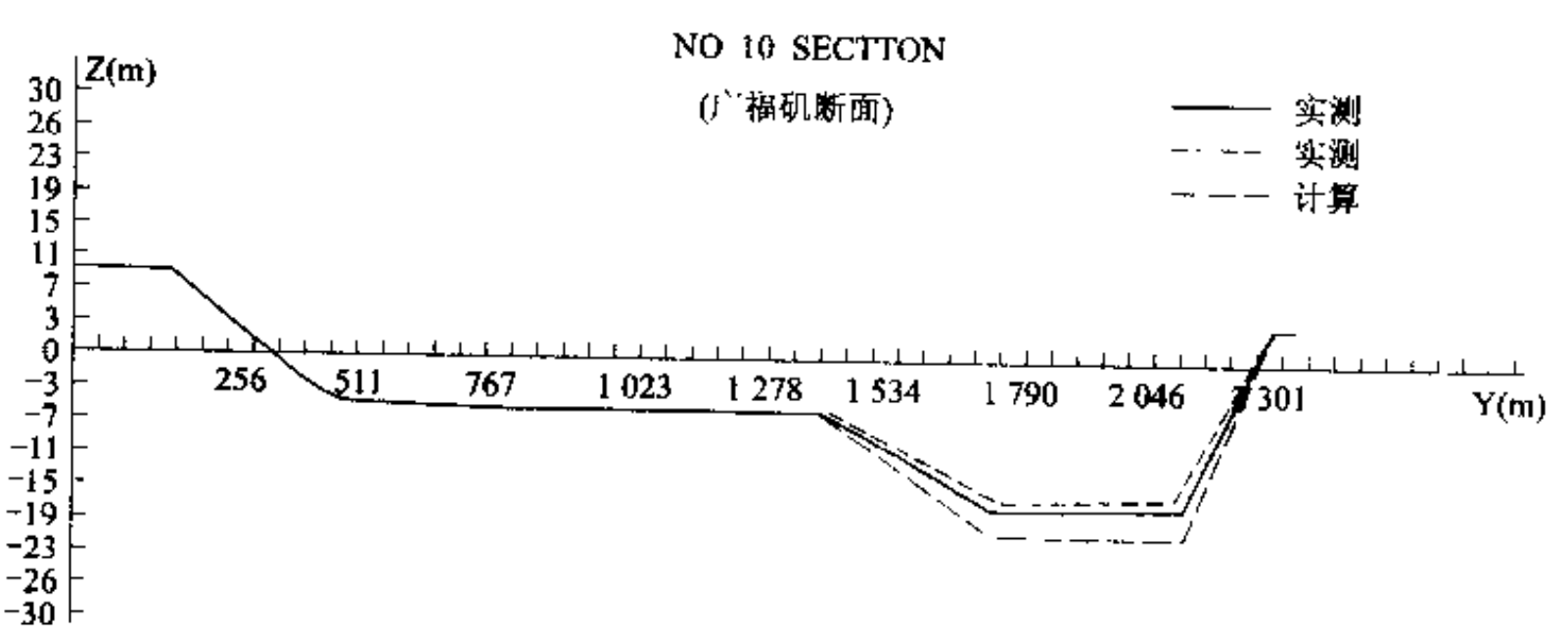


图6.4　1993年1月~7月河床变形计算

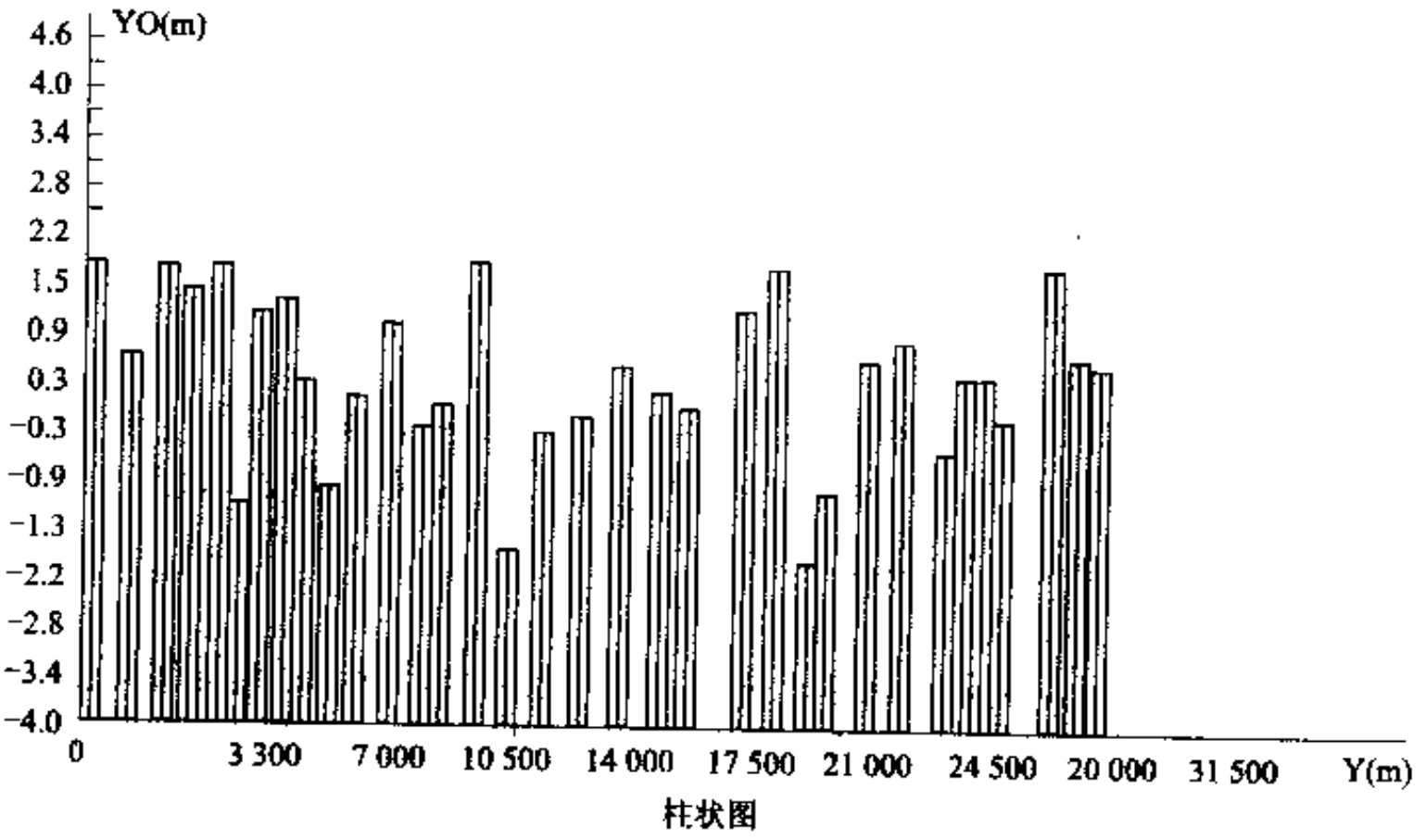


图6.5　1993年1月~7月各断面冲淤厚度

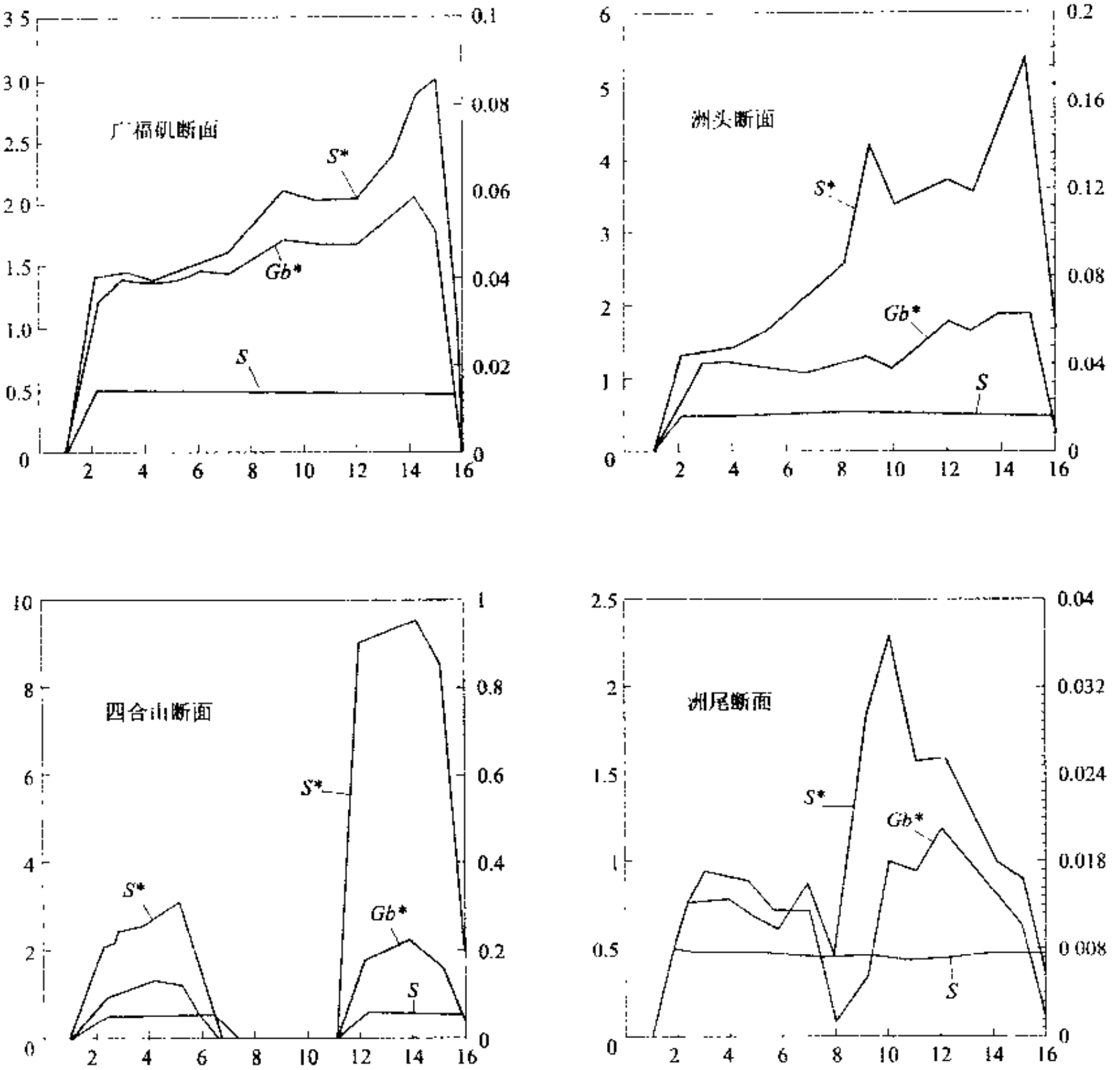


图6.6　断面内含沙量、悬移质挟沙力、推移质输沙率沿河宽方向分布

由上面计算结果，分析得知：

①1993 年 1 月至 7 月这一过程中总的水沙情况是来沙量大于该河段水流挟沙能力，河段变形总趋势是淤积，淤积总量的计算见地形剖面图。

②从时间上看枯水期 1 月为冲刷，7 月洪水期大多为淤积，中水期 3 月有冲有淤。

③从部位上看广福矶，四合山西华水道有冲有淤，四合山桥位裕溪口汊道上主要为淤积，这表明了曹姑洲、陈家洲头有淤积发展现象。

(5) 建桥前后冲淤计算结果

1954 年为丰水中沙年，现分别计算建桥前后的冲淤变化情况。通过计算可知，建桥后河道断面的冲淤与建桥前差别很小。建桥后河道断面淤积稍微减少，冲刷也稍微减少。现把建桥前后各主要断面的计算结果比较如表 6.5 (a)、(b)。

根据典型年资料计算芜湖河段冲淤变化与河床变形的结果见表 6.6、6.7。

从总的结果看，芜湖江段河床变形基本稳定，而微有淤积。

表 6.5 (a) 7 月份建桥前泥沙冲淤量

断面号	水位 (m)	流量 (m^3/s)	S^* (kg/m^3)	S(kg/m^3)	g_s(kg/ s·)	冲淤厚度 (m)	淤积量 (m^3)
18	11.397	79 989.9	1.119	0.159	0.184 5	0.279 9	547 114.60
19	11.362	79 996.9	1.116	0.134	0.140 2	0.310 2	829 262.30
20	11.317	80 012.4	1.112	0.106	0.101 9	0.396 8	1 152 528.00
21	11.267	80 040.2	1.107	0.099	0.087 6	0.356 3	1 059 531.00
22	11.226	80 032.6	1.102	0.086	0.069 6	0.002 9	17 475.23
23	11.225	53 038.0	1.136	0.077	0.064 8	0.743 8	1 312 390 00
24	11.123	53 063.5	1.134	0.143	0.141 3	0.688 8	1 109 870.00
25	10.994	53 085.3	1.132	0.201	0.237 6	−0.152 4	−136 684.60
26	10.971	53 097.3	1.131	0.124	0.155 5	0.162 6	194 603.90
29	10.916	53 142.6	1.117	0.080	0.063 2	0.244 2	364 522.60
30	10.906	53 148.5	1.115	0.045	0.035 6	0.435 2	655 386.80
31	10.877	53 152.5	1.112	0.044	0.036 9	0.424 6	583 756.30
32	10.863	53 153.8	1.109	0.043	0.032 3	−0.032 0	−118 141.10
33	11.239	27 124.4	1.033	0.098	0.062 0	0.475 0	834 541.60
34	11.194	27 098.6	1.029	0.130	0.092 1	0.287 5	459 888.10
35	11.190	27 079.1	1.023	0.096	0.062 7	0.407 3	545 418.70
36	11.171	27 068.0	1.018	1.111	0.069 4	2.206 8	5 587 152.00
37	10.919	27 050.5	1.020	1.215	1.113 7	−2.457 5	−4 110 669.00
47	10.768	27 034.1	0.981	0.211	0.198 8	−0.043 9	−58 538.93
48	10.804	80 187.9	1.066	0.086	0.086 2	0.770 7	1 233 753.00
49	10.680	80 184.3	1.065	0.144	0.196 9	0.369 8	369 007.60
50	10.657	80 177.4	1.063	0.137	0.17 8 9	0.369 8	369 007.60

淤积体积 (m^3): 3.394 904E+07

冲刷体积 (m^3): −5 385 386.000000

表 6.5 (b)　7 月份建桥后泥沙冲淤量

断面号	水位 (m)	流量 (m^3/s)	S^* (kg/m^3)	S(kg/m^3)	g_s(kg/s·m)	冲淤厚度 (m)	淤积量 (m^3)
18	11.444	80 086.2	1.119	0.162	0.188 9	0.278 9	545 203.40
19	11.408	80 078.8	1.116	0.138	0.144 3	0.309 4	826 960.30
20	11.362	80 087.8	1.112	0.110	0.106 0	0.395 2	1 148 008.00
21	11.311	80 086.3	1.107	0.103	0.090 7	0.349 0	1 037 797.00
22	11.274	80 084.2	1.103	0.085	0.068 5	0.009 2	55 5 42.26
23	11.265	53 415.9	1.137	0.084	0.072 7	0.757 7	1 336 986.00
24	11.159	53 410.4	1.135	0.156	0.156 1	0.661 8	1 066 360.00
25	11.034	53 402.3	1.133	0.200	0.236 9	−0.144 9	−129 914.60
26	11.009	53 395.5	1.132	0.127	0.160 4	0.159 4	190 803.50
27	11.044	53 376.9	1.128	0.069	0.062 0	0.430 8	789 883.50
28	11.009	53 349.0	1.124	0.066	0.056 3	0.483 1	10 066 375.00
29	10.955	53 304.9	1.118	0.082	0.065 4	0.238 6	356 141.20
30	10.946	53 275.3	1.116	0.047	0.037 4	0.434 2	653 980.60
31	11.918	53 241.6	1.113	0.046	0.038 5	0.420 4	578 002.40
32	10.907	53 200.8	1.109	0.042	0.031 9	−0.026 2	−96 778.48
33	11.287	26 668.4	1.034	0.099	0.062 3	0.470 4	826 446.30
34	11.246	26 685.1	1.029	0.127	0.089 3	0.289 3	462 794.70
35	11.241	26 696.4	1.022	0.098	0.063 2	0.494 0	661 966.20
36	11.201	26 701.8	1.018	0.169	0.111 7	1.985 1	5 025 794.00
37	11.010	26 709.8	1.015	0.702	0.610 4	−1.629 0	−2 724 839.00
46	10.841	26 615.3	0.978	0.102	0.109 4	0.703 9	307 265.70
47	10.819	26 602.7	0.975	0.195	0.181 0	−0.036 0	−47 953.85
48	10.845	79 803.4	1.064	0.090	0.090 1	0.768 5	1 230 284.00
49	10.723	79 765.5	1.063	0.144	0.196 7	0.373 1	372 248.20
50	10.698	79 729.4	1.062	0.141	0.184 4	0.373 1	372 248.20

淤积体积 (m^3)：3.321 521E+07

冲刷体积 (m^3)：−3 745 083.000000

表 6.6　一年内冲淤变形计算结果

I	Z (m)	Q (m³/s)	S(kg/m³)	S (kg/m³)	g_s(kg/s·m)	YO (m)	VO (m³)
1	1.643	9 260.0	0.015	0.001	0.001 0	2.820 6	3.02
2	1.638	9 265.3	0.015	0.001	0.002 0	0.683 3	1.49
3	1.633	9 269.9	0.014	0.001	0.001 7	−1.483 2	1.84
4	1.628	9 273.1	0.014	0.001	0.002 0	2.730 5	−18
5	1.628	9 274.6	0.014	0.002	0.000 8	2.502 3	1.19
6	1.625	9 275.5	0.014	0.001	0.001 2	1.714 4	0.89
7	1.623	9 275.9	0.014	0.001	0.001 7	−2.306 8	−1.03
8	1.623	9 276.0	0.014	0.001	0.000 9	3.281 4	2.32
9	1.618	9 275.6	0.014	0.001	0.003 0	3.411 5	4.42
10	1.610	9 274.5	0.014	0.003	0.006 9	0.334 6	0.20
11	1.605	9 272.4	0.014	0.003	0.006 4	−2.103 0	−2.92
12	1.604	9 269.0	0.013	0.001	0.002 8	0.113 6	0.82
13	1.601	9 263.6	0.013	0.001	0.002 6	1.042 3	1.47
14	1.596	9 256.9	0.013	0.002	0.003 3	−0.297 7	0.59
15	1.593	9 248.3	0.013	0.001	0.002 9	−0.047 2	0.85
16	1.590	9 236.5	0.013	0.001	0.002 8	1.837 0	3.13
17	1.583	9 221.0	0.013	0.002	0.004 9	−1.765 7	0.06
18	1.578	9 197.1	0.012	0.002	0.003 9	−0.316 8	0.56
19	1.573	9 165.1	0.012	0.002	0.003 3	−0.132 4	1.89
20	1.565	9 116.0	0.012	0.002	0.003 5	0.502 6	3.63
21	1.55	9 055.7	0.012	0.003	0.004 6	0.183 7	2.47
22	1.545	8 995.0	0.011	0.003	0.005 2	−0.088 5	−3.88
23	1.545	8 540.3	0.011	0.002	0.004 7	2.210 6	2.33
24	1.533	8 512.0	0.011	0.003	0.006 0	1.671 8	−1.24
25	1.526	8 495.5	0.011	0.001	0.003 7	−4.002 5	−5 40

续表

I	Z (m)	Q (m³/s)	S(kg/m³)	S^* (kg/m³)	g(kg/s·m)	YO (m)	VO (m)
26	1.524	8 487.7	0.011	0.001	0.001 8	-1.126 3	0.01
27	1.522	8 475.3	0.011	0.000	0.000 6	0.546 2	0.94
28	1.517	8 467.1	0.011	0.001	0.000 8	0.771 9	1.33
29	1.510	8 461.8	0.011	0.001	0.001 5	−0.572 2	−0.57
30	1.507	8 461.0	0.011	0.001	0.001 5	0.372 9	0.91
31	1.502	8 462.4	0.011	0.001	0.001 6	0.474 6	1.30
32	1.496	8 466.7	0.010	0.001	0.002 0	−0.120 1	−1.11
33	1.525	960.4	0.010	0.001	0.000 2	0.775 1	0.70
34	1.525	981.8	0.010	0.001	0.000 4	−0.016 5	−0.55
35	1.524	1 000.2	0.009	0.001	0.000 4	0.116 9	0.79
36	1.522	1 011.3	0.008	0.001	0.000 9	8.585 9	1.27
37	1.516	1 024.5	0.008	0.002	0.001 9	−4.956 8	−5.00
38	1.516	1 031.9	0.008	0.000	0.000 2	−0.847 2	−0.37
39	1.513	1 038.4	0.008	0.000	0.000 2	-3.448 2	-3.10
40	1.511	1 042.4	0.007	0.001	0.000 4	1.872 5	3.60
41	1.508	1 047.8	0.007	0.001	0.000 4	−1.216 6	−1.20
42	1.505	1 052.4	0.007	0.001	0.000 4	0.552 2	0.17
43	1.503	1 057.0	0.007	0.000	0.000 2	−2.387 9	−0.80
44	1.503	1 061.5	0.006	0.000	0.0000	0.120 4	0.29
45	1.504	1 064.7	0.006	0.000	0.0000	0.170 1	0.13
46	1.503	1 066.3	0.006	0.000	0.0000	1.845 0	1.10
47	1.502	1 067.7	0.006	0.000	0.0000	−0.164 7	−0.32
48	1.498	9 534.4	0.010	0.001	0.000 7	1.686 3	0.49
49	1.495	9 539.4	0.019	0.000	0.000 4	0.549 4	0.65
50	1.491	9 543.8	0.010	0.000	0.000 7	0.549 4	0.65

冲淤体积 (m³): 44 688 060

冲淤体积 (m³): −10.723 630.3 月全 8 月洪水期半年内冲淤变形计算结果。

表 6.7　3 月至 8 月洪水期半年内冲淤变形计算结果

I	z (m)	Q (m³/s)	S (kg/m³)	S^* (kgm³)	g_s (kg/s·m)	YO (m)	VO (m/s)
1	9.353	56 485.2	0.677	0.074	0.0341	1.320 7	776.63
2	9.308	56 497.4	0.674	0.074	0.445 5	0.272 3	293.21
3	9.236	56 509.1	0.671	0.078	0.537 9	−0.601 7	−489.19
4	9.258	56 519.6	0.668	0.023	0.133 4	1.103 0	695.70
5	9.178	56 526.0	0.667	0.069	0.509 7	1.112 6	421.37
6	9.098	56 530.5	0.666	0.089	0.817 4	0.799 6	117.41
7	9.085	56 533.8	0.665	0.120	0.936 4	−1.076 3	−276.73
8	9.078	56 537.9	0.664	0.092	0.669 6	1.558 4	496.02
9	0.009	56 543.0	0 663	0.135	1.007 8	1.702 0	399.22
10	8.942	56 546.9	0.662	0.163	1.278 3	0.115 0	69.66
11	8.886	56 550.4	0.661	0.160	1.302 0	−1.066 1	−40.29
12	8.846	56 556.4	0.658	0.116	1.007 9	0.502 7	120.83
13	8.799	56 558.4	0.657	0.128	1.927	−0.116 5	9.98
14	1.596	9 256.9	0.013	0.002	0.003 3	−0 297 7	59.41
15	8.716	56 559.8	0.656	0.122	0.987 1	−0.006 9	−24.94
16	8.671	56 560.5	0.655	0.113	0.915 9	0.894 5	258.66
17	8.608	56 560.2	0.653	0.139	1.109 9	−0.753 5	−416.78
18	8.585	56 558.9	0.651	0.096	0.609 7	−0.142 5	−90.19
19	8.548	56 552.9	0.649	0.085	0.564 9	−0.037 6	−90.27
20	8.504	56 542.1	0.646	0.072	0.441 0	0.276 8	87.43
21	8.450	56 523.8	0.642	0.074	0.423 6	0.118 1	−68.00
22	8.405	56 497.8	0.639	0.069	0.366 8	−0.064 5	20.37
23	8.390	41 089.5	0.655	0.074	0.441 6	0.834 8	615.37
24	8.296	41 077.6	0.654	0.117	0.823 0	0.632 4	393.70
25	8.197	41 070.2	0.652	0.138	1.139 9	−1.752 6	−403.18

淤积体积 (m³)：9 885.381 000

冲刷体积 (m³)：−5 086.313 000

续表

I	z (m)	Q (m³/s)	S (kg/m²)	S^* (kgm²)	g_s (kg/s·m)	YO (m)	VO (m²)
26	8.203	41 067.7	0.651	0.070	0.579 1	−0.504 8	−172.29
27	8.218	41 068.5	0.647	0 043	0.259 9	−0.504 8	−172.29
28	8.179	41 075.7	0.644	0.044	0.272 5	0.268 3	91.72
29	8.122	41 090.2	0.640	0.061	0.344 9	−0.193 5	−151.21
30	8.122	41 102.1	0.638	0.036	0.207 2	0.173 6	58.06
31	8.097	41 117.4	0.636	0.035	0.204 7	0.239 4	58.95
32	8.077	41 137.7	0.633	0.038	0.204 6	−0.056 5	-56.36
33	8.435	15 407.3	0.595	0.058	0.225 6	0.343 5	155.03
34	8.406	15 407.1	0.591	0.071	0.298 2	0.021 6	−30.68
35	8.397	15 406.2	0.584	0.057	0.221 7	0.122 3	−21.41
36	8.393	15 405.3	0.579	0.047	0.167 4	3.467 1	3 355.56
37	8.249	15 405.4	0.577	0.471	2.3530	−2.109 4	2 034.45
38	8.219	15 407.2	0.573	0 240	1.191 5	−0.2959	--178.27
39	8.179	15 411.4	0.569	0.209	0.970 3	−1.1501	−670 09
40	8.202	15 416.2	0.564	0.094	0.337 3	0.875 7	468.93
41	8.147	15 424.9	0.560	0.133	0.576 9	−0.649 2	−131.02
42	8.134	15 434.1	0.555	0.110	0.433 7	0.2100	133.27
43	8.101	15 444.9	0.551	0.114	0.497 0	−1.075 9	−332.55
44	8.112	15 454.8	0.548	0.041	0.176 4	0.012 2	32.38
45	8.095	15 462.7	0.547	0.034	0.178 7	0.096 9	3.73
46	8.088	15 468.4	0.545	0.027	0.154 3	0.732 4	123.68
47	8.058	15 475.8	0.544	0.071	0.392 0	−0.077 5	−23.49
48	8.054	56 613.6	0.609	0.048	0.309 6	0.646 3	430.68
49	7.981	56 633.1	0.608	0.064	0.550 7	0.296 6	35.22
50	7.959	56 652.1	0.607	0.068	0.549 5	0.296 6	35.22

淤积体积 (m³)：9 885.381 000

冲刷体积 (m³)：−5 086.313 000

§6.2 桥墩局部冲刷的三维计算

6.2.1 建筑物附近水流特点

在河道中由于实际需要，往往建造桥梁或整治建筑物丁坝、顺坝等建筑物，它们的存在在洪水期将影响行洪造成壅水，水流流经此类建筑物由于河道局部束窄处流速加大将形成局部冲刷。

目前国内外对桥墩及丁坝等建筑物附近壅水影响的分析，有总流计算及二、三维计算，也有试验研究。总流计算有不少经验公式，它只能定出平均壅水高度及局部冲刷最大深度，不能给出其变化范围。物理模型实验受比尺影响，不易做得很准确。虽然三维数值计算更切合实际，现有的有限元法、差分方法可以进行数值模拟，但工作量大，自由面位置待定，冲刷坑范围、深度也都是变化的，需要计算定出，壅高值与水深比较很小，计算精度控制，网格处理有不少困难。目前，国内外都在进行探索，尚未有一套成熟的经验可资借鉴。因此，三维桥墩和丁坝阻水数学模型具有一定的开创性，我们曾做过长江一桥沉井在施工期沉降的数值计算及芜湖长江大桥的壅水及局部冲刷及河道变形影响分析，可供实际工程参考。

桥墩附近水流局部变形具有很明显的三维特点。平面水流经绕桥墩形成形体绕流，在水流流向桥墩时，水流动能逐渐转化为势能，在桥墩上游形成驻点，水位有所壅高，向桥上游影响逐渐减弱。桥墩两侧绕流流线加密，流速加大，在一定部位可能形成分离流与桥墩尾部漩涡。

除了这种平面水流结构的改变外，在水深方面也有变化。桥墩前缘水位抬高的同时，水流压力局部增大，产生向河底的流动，如果河底是可冲动的，将在桥墩附近形成局部冲刷，随着冲刷逐渐加深，形成漏斗形冲刷坑，冲刷坑逐渐扩大，坑底流速逐渐减弱，直到流速不再能推动漏斗形坑面的土壤颗粒为止，水流流速达到止冲流速，冲刷才告终止。这时可得到冲刷坑最终形状与尺寸及桥墩局部冲刷的最大冲刷深度。

根据上述物理、力学机理，在做数学模型中，可以先进行桥墩形体绕流的三维计算，算出桥墩附近局部三维流场，根据三维流场可知桥墩附近由于桥墩的存在，流线加密，流速加大；当流速超过土壤的抗冲流速时，土壤颗粒将被冲刷，桥墩附近冲刷深度增加，又反过来形成桥墩附近新的水下地形，有了新的流动区域形状，又可以再一次地计算一个新的流场，再进一步校核流速是否超过土壤坑冲流速值。如果仍大于抗冲流速，则冲刷坑水深将继续加深，冲刷坑范围将继续扩大加深，直到流速达到抗冲流速为止。

计算采用：①流场计算；②流速校核；③模拟形成冲坑深度及形状尺寸，按这一计算过程循环进行。

流场计算采用三维紊流模型，冲刷过程及冲刷坑的形成，有能量交换及转化过程，即水流动能作用下为土壤冲刷提供能量，而实际上土壤被冲刷的能量作用，难于做量上的详细计算。因此，我们只能用流速与抗冲流速直接比较，以确定冲刷的可能与量度，而未能考虑挟沙水流能量关系及水流挟沙能力，而冲刷到达平衡的过程将是一个较长期的变化过程，在含沙量的河流中，水流挟沙力在桥墩局部冲刷也许要加以考虑。

6.2.2 计算数学模型

恒定流清水模型基本方程为：

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \zeta_i^2} = \frac{2A_i}{\sqrt{g^{ii}}} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \zeta_i} + S_{\Phi_k} \tag{6.2.1}$$

局部网格单元尺寸：$\Delta \zeta_i = \Delta\zeta / \sqrt{g^{ii}}$，在上式中

$$2A_i = \frac{R_{eff}}{J} [a_k u_i - \frac{1}{J}(1+\delta_{ik}) b_j^i \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j}] b_j^i - f_i$$

$$S_\Phi^* = S_{\Phi k} - g^{ij} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} (1-\delta_{ij})$$

式中，g^{ij}，b_j^i 为坐标变换系数，f_i 为网格加密函数，且 $\Phi_k = (u,\ v,\ w,\ k,\ \varepsilon)^T$，$a_k = (1,\ 1,\ 1,\ \sigma_k,\ \sigma_\varepsilon)^T$

$$S_{u_i} = R_{eff} \left[\frac{\partial P}{\partial \zeta_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial \zeta_i} - (1-\delta_{ij}) \frac{\partial \gamma_j}{\partial \zeta_j} \frac{\partial U_i}{\partial \zeta_i} \right]$$

$$S_k = -\sigma_k R_{eff} (G_i - \varepsilon)$$

$$S_\varepsilon = -\sigma_k R_{eff} (C_1 G_k - C_2 \varepsilon) \frac{\varepsilon}{K}$$

边界条件为

(1) 上、下游面

$$U = u_0, \quad V = W = 0, \quad \tau = S_0$$

$$\varepsilon = \frac{uJ}{F_r^2}, \quad y_i = 0.076\ 5U_* h_0$$

$$U_* = \sqrt{\frac{J}{F_r^2}}, \quad K = \sqrt{\frac{\nu_\varepsilon}{C_\mu}}$$

(2) 固壁边界

固壁 $$\frac{U_{ns}}{U_*} = \frac{1}{\kappa_*} \ln (EY^+)$$

式中 $Y^+ = \mathrm{Re} U_* Y$，$\kappa_* = 0.42$，$E = 9.0$（水力光滑面），U_{ns} 为平行于固壁的速度

$$K = \frac{U_*^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{U_*}{\kappa_* Y}$$

河床边界除普通固壁之外，还应加上泥沙、抗冲流速条件。

(3) 自由表面

应满足连续性 $\frac{\partial (HU)}{\partial X} + \frac{\partial (HV)}{\partial Y} = 0$

及 $\frac{\partial K}{\partial Z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} = 0$

(4) 对称平面上

$$\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial W}{\partial Y}=\frac{\partial k}{\partial Y}=\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y}=0,\quad V=0$$

6.2.3 数值计算方法与步骤

用三维有限分析方法，对流扩散基本方程 (6.2.1) 进行离散化处理可得网格中心点的ϕ_P值，即有

$$\phi_P=\sum_{m=1}^{2^n} C_m \Phi_m + C_P S_i \tag{6.2.2}$$

由于动量含未知量压力p，而不可压缩流连续性方程没有压力，这在压力、流速迭代求解时，需要给出压力、速度的修正公式。同时为了消除压力跳动而应用交错网格，这样易产生两个问题：(1) 流速在动量方程用有限分析法计算，精度高，收敛快，压力则在连续方程中用差分解收敛慢。(2) 交错网格压力、流速不在同一结点上，计算中需要对许多变量进行平均和插值，使得程序复杂，计算工作量增加。我们比较了交错网格与正常网格。

我们直接对中心点速度求散度得到压力方程求解。

引入虚速度$\hat{U}_i$，将速度U_i分解为虚速度与压力梯度两者之和以推导压力方程，即

$$(U_i)_P=(\hat{U}_i)_P+R_{cli}C_P\frac{\partial p}{\partial X_i} \tag{6.2.3}$$

将上式用于整个区域，并代入连续性方程，得

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i}=\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial X_i}-\frac{\partial}{\partial X_i}\left(R_{cli}C_P\frac{\partial p}{\partial X_i}\right)$$

变换到一般曲线坐标下的方程

$$g^{ij}(C_{Pi}+C_{Pj})\left(1-\frac{1}{2}\delta_{ij}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j}=\frac{-1}{R_{cli}}b_{ij}\frac{\partial R_{cli}C_{Pi}}{\partial\zeta_j}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\zeta_i}\frac{1}{J^2}+\frac{1}{R_{cli}}b_{ij}\frac{\partial\hat{U}_i}{\partial\zeta_j}\frac{1}{J}$$

展开成计算式为

$$C_{P\xi}g^{11}P_{\xi\xi}+C_{P\eta}g^{22}P_{\eta\eta}+C_{P\zeta}g^{33}P_{\zeta\zeta}$$

$$=2A_PP_\xi+2B_PP_\eta+2C_PP_\zeta+S_P$$

式中

$$2A_P=-\frac{1}{J^2}\overline{R_{cli}(b_1^1a_P^1+b_2^1a_P^2+b_3^1a_P^3)};$$

$$2B_P=-\frac{1}{J^2}\overline{R_{cli}(b_1^2a_P^1+b_2^2a_P^2+b_3^2a_P^3)};$$

$$2C_p = \cdots$$

$$a_p^1 = b_1^1 \frac{\partial R_{cell}}{\partial \xi} C_{p\xi} + b_1^1 \frac{\partial R_{cell} C_{p\eta}}{\partial \eta} + b_1^3 \frac{\partial R_{cell} C_{p\zeta}}{\partial \zeta};$$

$$a_p^2 = \cdots, \quad a_p^3 = \cdots$$

$$S_p = \frac{1}{J} R_{cell} (b_1^1 \hat{U}_\xi + b_1^2 \hat{U}_\eta + b_1^3 \hat{U}_\zeta + b_2^1 \hat{V}_\xi + b_2^2 \hat{V}_\eta + b_2^3 \hat{V}_\zeta$$

$$+ b_3^1 \hat{W}_\xi + b_3^2 \hat{W}_\eta + b_3^3 \hat{W}_\zeta) - (C_{p\xi} + C_{p\eta}) g^{12} P_{\xi\eta}$$

$$-(C_{p\eta} + C_{p\zeta}) g^{23} P_{\eta\zeta} - (C_{p\xi} + C_{p\zeta}) g^{31} P_{\zeta\xi}$$

进行缩放变换后，按有限分析法求解，这样就由连续性方程导出压力迭代格式。

实际问题中，压力P、速度U_i都是未知量，迭代过程中是一个不完善的压力和速度场，分别以P^*，U_i^*表示，而需逐步修正。修正压力$P' = P - P^*$，修正速度$U_i' = U_i - U_i^*$，而上式中应以修正压力代入。

至此，已得到变量U，V，W，K，ε，P之求法及其迭代格式、修正压力、速度，可逐步求解。

求解步骤如下：

①对给定桥墩或沉井的流动区域进行拟合曲线坐标变换，生成计算网格。这时可以求得网格点坐标X_i，坐标变换系数b_i^j，b_{ij}，g^{ij}，J等。

②给定计算区域各流速U、V、W、K，ε边界条件及其它内点初次迭代时初始值(可取为0)，以后迭代以前一次计算值为初始值。

③从第二个断面开始计算动量方程中的有限分析系数，并始时动量方程中的源项（不包括压力项)，因而求得的是虚（伪）速度(U_1，V_1，W_1)。

④计及压力项求动量方程源项，再根据三对角矩阵求流速场(U_2，V_2，W_2)。

⑤从第二个断面开始，计算压力修正方程中的质量源项。

⑥在全场计算压力修正方程的有限分析系数，计算源项，用三对角矩阵法解压力修正方程，求得各计算点的压力修正值。

⑦利用速度修正、压力修正关系，求得整个流场U，V，W（其中按边界条件，计算出边界上的流速值)。

⑧计算K，ε有限分析系数，在全场中用三对角矩阵解出，全场各点K，ε。

⑨从最后一个断面向前，计算全场压力方程中的源项。

⑩在全场计算压力方程有限分析系数，用三对角阵解压力，不断修正三维椭圆型压力场，重复9,10步，进行多次扫描。

⑪重复3~10步，直到各变量值都到达允许误差。

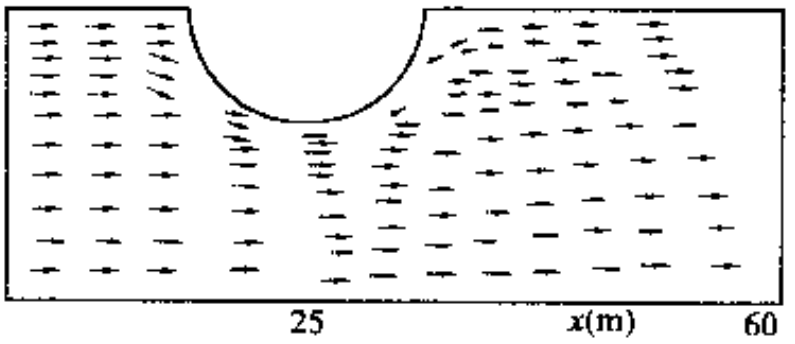
⑫以求得的流速场、压力场，按自由面运行条件对桥墩或沉井水面壅水曲面进行修正。

⑬以求得的流速场、压力场结合床沙组成，用不均匀床沙起动流速公式对河床界面进行

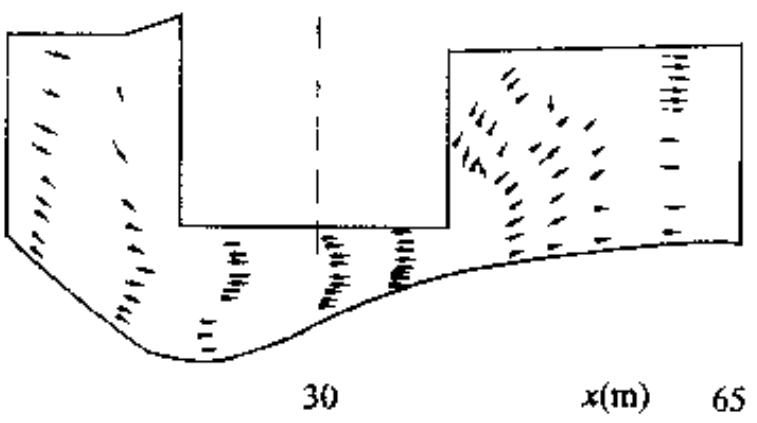
修正和冲刷坑尺寸进行调整计算。

⑭重复 1~13 步，直到河床界面计算所得流速与泥沙抗冲流速一致，达到允许范围，得到最后冲刷范围及冲坑形状、尺寸。

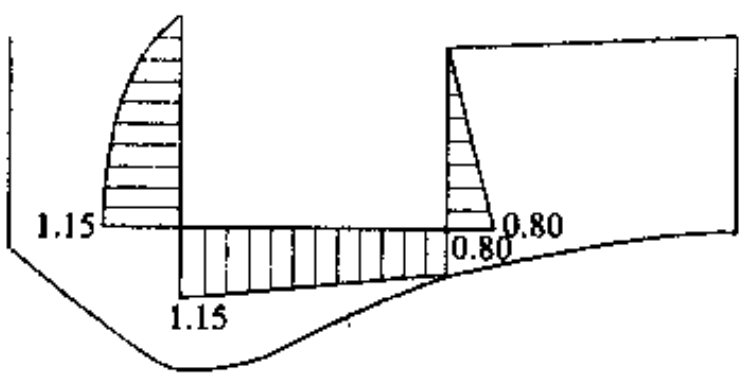
⑮输出计算结果，并绘图，见图 6.7 (a) (b) (c)，图 6.8 (a) (b)，图 6.9 (a) (b)。



(a)沉井下沉10.5 m时xy剖面流速分布图

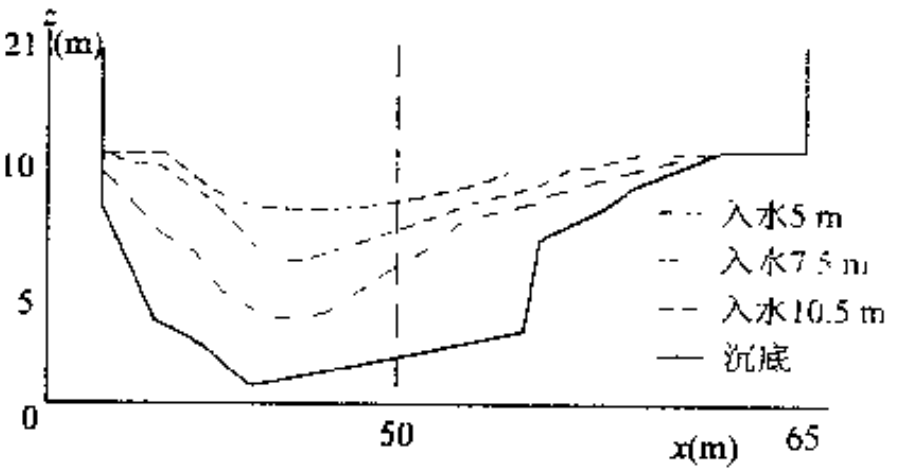


(b)沉井下沉10.5 m时zx剖面流速分布图

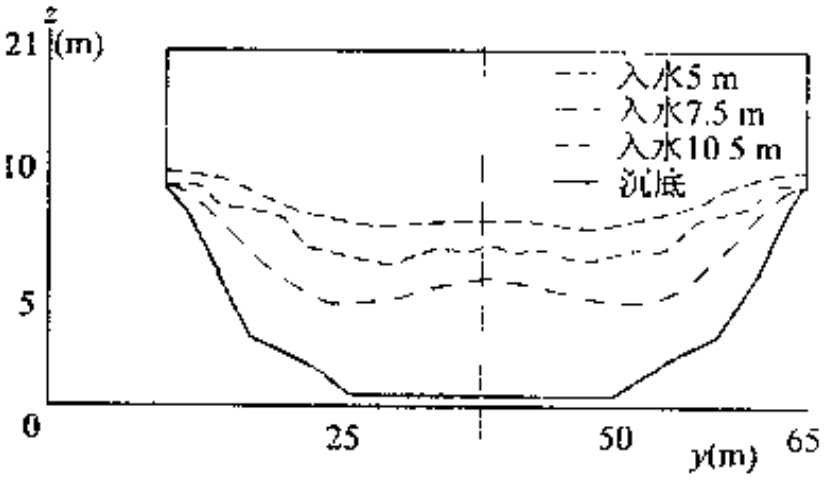


(c)沉井下沉10.5 m时沉井压力分布图

图6.7　沉井周围流速、压力分布图

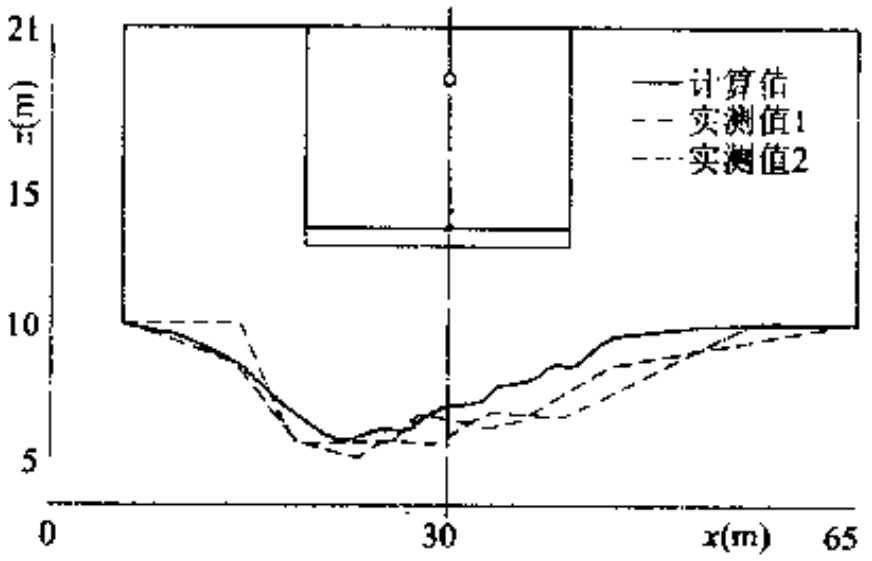


(a)沉井下沉10.5 m时xz剖面地形比较图

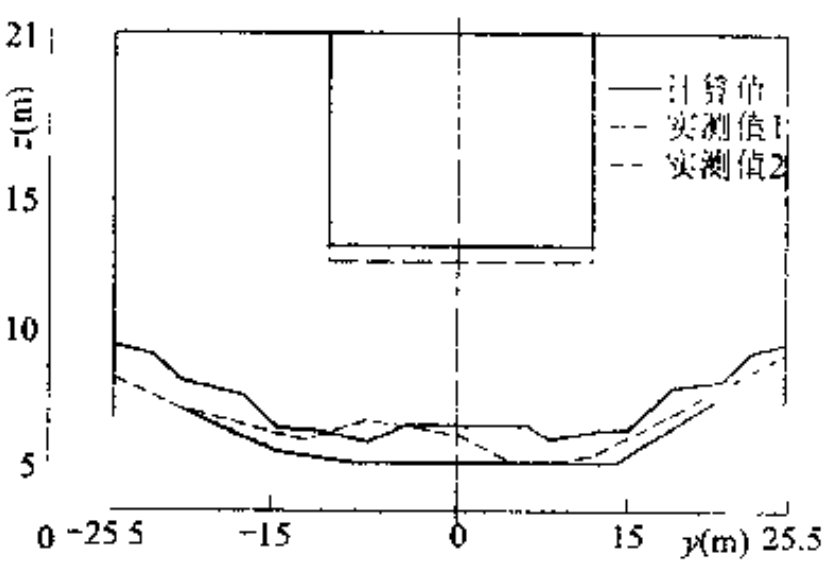


(b)沉井下沉10.5 m时yz剖面地形比较图

图6.8　沉井下10.5m的冲刷地形



(a)沉井下沉7.5 m时xz剖面计算与实测地形比较图



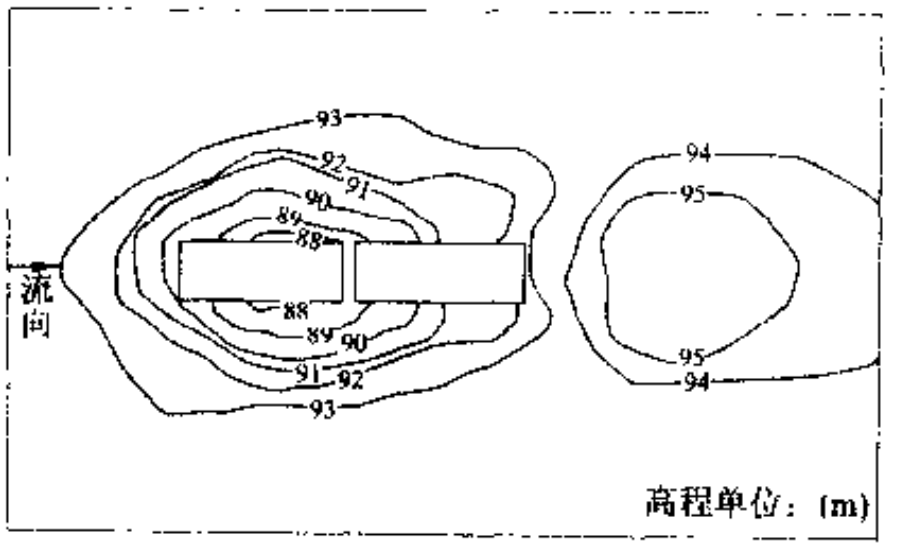
(b)沉井下沉7.5 m时yz剖面计算与实测地形比较图

图6.9　沉井下沉7.5 m的冲刷地形

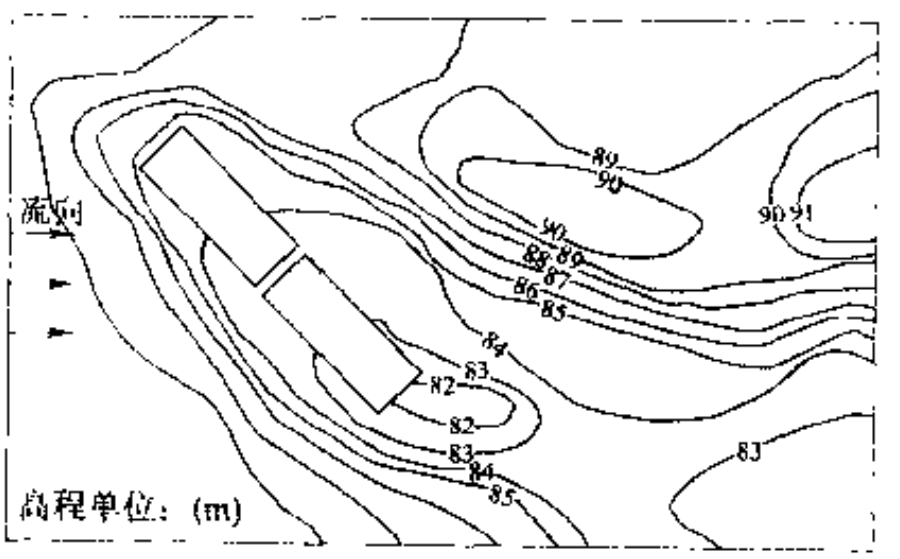
武汉长江二桥桥墩施工沉井局部冲刷计算结果，见图 6.7~6.9。

例 6.2 桥墩的分析计算也可以引用到大型跨河渡槽槽墩(如南水北调工程跨过黄河的渡槽)中去，这种槽墩墩型实际上和桥墩是一致的，它的壅水、阻水行洪与墩子附近的局部冲刷，可以应用此处所提供的方法。

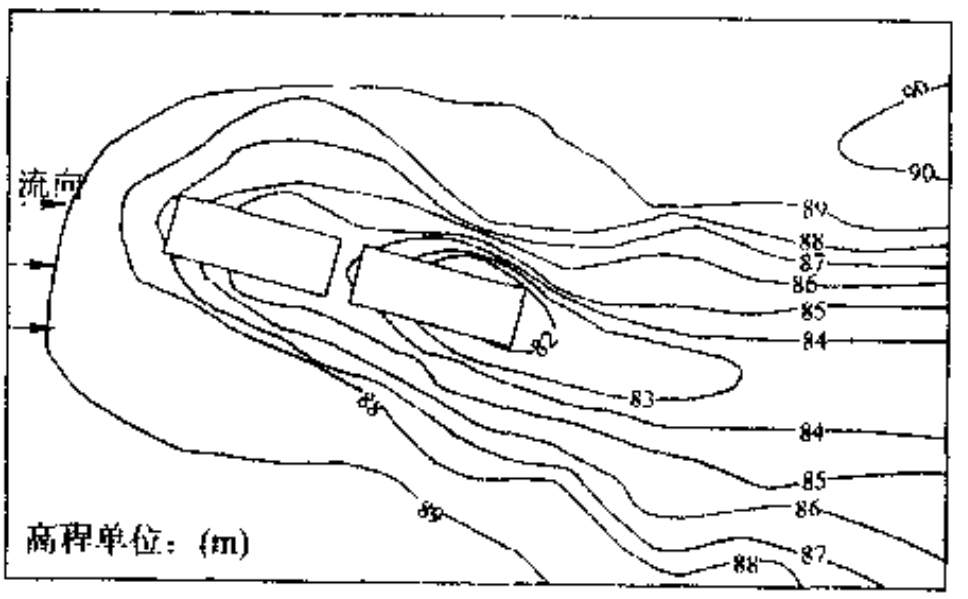
黄河南水北调跨河度槽槽墩厚 2.0 m，半圆形墩头，承台宽 6.0 m，长 18.0 m，黄河水利委员会所做 1/100 比尺，局部冲刷的模型试验结果如图 6.10 (a) (b) (c) 所示。



(a)N-0-35组次试验墩周冲刷坑地形图



(b)N-45 35组次试验墩周冲刷坑地形图



(c)N-15-50组次试验墩周冲刷坑地形图

图6.10 墩周冲刷地形

不同洪水峰型，其局部冲深略有变化，洪峰陡涨陡落冲得较浅，洪峰陡涨慢落冲得较深，差 2~3m，这也是可以理解的。

§6.3 浑水两相流洪水演进数值模拟

中国北方多沙河流，南方山地泥石流，洪水中含大量泥沙，含沙量每立方米几十公斤，上百公斤，甚至可高达 500~600 kg，以至于 900 kg。这样的浑水洪水演进的水位和流量，与清水方程分析的结果有较大差异。一般表现在水位增大，洪水变形及传播时间延长，在干河与滩地上浑水具有“爬高”倾向。

浑水洪水演进的基本方程，应建立在两相流体动力学基本方程的基础之上，用浑水方程分析高含沙水流洪水，计算其在冲积性河道中泥沙运动与河床变形，可能是更接近于实际的。

6.3.1 基本方程的建立

如果两相流中固相体积比浓度为C，两相流中混合流体密度为

$$\rho=\rho_1(1-C)+\rho_2 C \tag{6.3.1}$$

式中：ρ_1、ρ_2分别为液相（水）及固相（泥沙）的密度，即$\rho_2=\rho_s$。

因为我们采用的是拟流体模型，必须重新定义混合流体速度，按朗道（Ландy）的定义为单位质量流体的动量，即

$$\rho u_i=\rho_1(1-C)v_i+\rho_2 C_* \tag{6.3.2}$$

式中，v_i，w_i分别为水与沙的速度。

我们这里应特别指出一个基本的概念：目前水文测验中采用旋桨式流速仪，测得的流速，如果清水中转 10 n 是 1.0 m/s，对于浑水，同样是 10n，其流速是多少，是 1.0m/s，还是随浓度而变呢？换句话说，旋桨所接受测的是流速，还是动量，这一基本问题，值得研究。目前旋桨测速，对浑水是否需要校正，如何改正，都值得我们研究思考。

我们可以建立变密度不可压缩流的连续性方程与动量方程，将紊流平维南方程变为紊流模型方程。平面二维浅水模型方程，非恒定流方程向量形式如下：

连续性方程

$$\partial_t \rho h+\nabla(\rho h\boldsymbol{u})=0 \tag{6.3.3}$$

动量方程

$$\partial_t R\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)R\boldsymbol{u}+Rg\nabla z+gR\boldsymbol{J}=\gamma\nabla^2 R\boldsymbol{u}+fE\cdot R\boldsymbol{u}+\lambda_a R\boldsymbol{u}_a \tag{6.3.4}$$

泥沙运动方程（泥沙对流扩散方程）同前所述

$$\partial_t(hS)+\nabla\cdot(hS\boldsymbol{u})=\varepsilon\nabla^2(hS)+\alpha\omega(S_*-S) \tag{6.3.5}$$

式中：z为水位；h为水深；$z=h+z_b$；z_b为河底高程；$\boldsymbol{u}$为水沙混合流体流速向量。u，v为其在ξ，η方向量分量，水力坡度（梯度）$\boldsymbol{J}=(J_\xi, J_\eta)$表示为向量，其分量为某个方向的值（对于笛卡尔坐标$\boldsymbol{J}=(J_x, J_y)$，通常采用经验公式：$\boldsymbol{J}=\dfrac{|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}}{C^2 h}$，$C$为谢才系数。$\gamma$为运动粘性系数，如果为紊流则为包括分子粘性在内的紊动粘性系数，涡粘性系数γ_t，f为哥氏力系数，E为三阶反对称单位张量，其中$e_{11}=e_{22}=0$，$e_{12}=1$，$e_{21}=-1$，λ_a为风应力系数，$\boldsymbol{u}_a$为风速，∇为向量微分算子。可理解为协变微分。

这里应注意的是在连续性方程中的ρ为混合流体密度，而动量方程中的R，在一般情况下为密度ρ。但对浑水模型而言，①混合流体流速为实测的动量，此处$R\boldsymbol{u}$直接表示动量值；②有的人在浑水模型中连续性方程用浑水质量，动量方程中不用混合流体密度，此时R可以理解为一种权系数，用作动量方程考虑清水动量与浑水动量的比较。上式中用到河床变形关系$\gamma'\partial_t z_b=\alpha\omega(S_*-S)$，$\omega$为泥沙沉速，$S$、$S_*$为垂线平均含沙量及相应的单宽水流挟沙力，$S_*=S_*(h, u, \omega)$，$\varepsilon$为泥沙扩散系数，$\gamma'$为泥沙干容重，$\alpha$为恢复饱和系数。

一般正交曲线坐标下水沙浑水二维浅水方程亦同前。

在公式 (6.3.4 中)，按文献γ_t为F分布形式

$$y_i = Au_* h\zeta \exp(-\lambda\zeta^2) \tag{6.3.6}$$

其中系数A变化于0.32~0.42之间，λ变化于2.8~5.0之间，ζ为纵向或横向扩散相对距离。

采用正交曲线坐标有以下的优点：

①这样的坐标变换是坐标完全变换，几何上由x变到ξ的同时，流速u、v变为正交曲线坐标切线方向的物理分量，而不是x，y方向的流速。

②这种变换可以给出主流方向——纵向，与副流——横向，且计算有了主方向，迭代也容易了。

③这样将主流——纵向，与副流——横向，分开的同时，也把对流项纵向为主，与扩散项横向为主分开了，给算子分裂 (split) 提供了有利条件。

6.3.2 悬移质不平衡输沙

若泥沙为非均匀沙其粒径分为m组，S_l为第l组粒径含沙量，用P_{Sl}表示此粒径悬移质含沙量所占的比值。则

$$S_l = P_{Sl} S, \quad \text{而 } S = \sum_{l=1}^{m} S_l \tag{6.3.7}$$

在二维水沙流动中，先应通过泥沙紊动理论分析，得到泥沙沿垂线含沙量分布，以此单宽含沙量分布为基础，计算平面网格上含沙量在平面分布，从而得总的含沙量大小与水流挟沙力(总流)实测结果比较，以决定饱和与否，平衡与否，以及冲淤关系。

在二维水沙流动中，针对S_l组粒径，输沙关系有

$$\frac{\partial(hS_l)}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(C_\eta h u S_l) + \frac{\partial}{\partial\eta}(C_\xi h v S_l)\right] - \alpha\omega_l(S_l^* - S_l)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varepsilon_\xi}{\sigma_\xi}\frac{C_\eta}{C_\xi}\frac{\partial h S_l}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\varepsilon_\eta}{\sigma_\eta}\frac{C_\xi}{C_\eta}\frac{\partial h S_l}{\partial\eta}\right)\right] \tag{6.3.8}$$

式中S_l^*为第L组泥沙的挟沙能力，$S_l^* = P_{Sl} S^*$，P_{Sl}为第L组泥沙的挟沙能力级配。

$$S^* = \left[\sum_{l=1}^{m}\frac{P_{Sl}}{S_{*l}}\right]^{-1} = k_0\left[\frac{|u|^3}{gh}\right]^m \left(\sum_{l=1}^{m} P_{Sl}\omega_l^m\right)^{-1} \tag{6.3.9}$$

式中m_0，k_0为挟沙力公式中的系数，各家公式取值不同，对于荆江段平衡输沙，取k_0 = 0.015~0.017，m_0取为0.92，α为恢复饱和系数，由冲刷淤积不同而定。也有人无论冲淤均取α = 1.0，σ为水流扩散与泥沙扩散之比，在无实际资料时，采用σ = 1.0。

对于黄河挟沙力公式和采用另外形式，上述计算将有所改动。

$$S_* = 2.5\left[\ln\frac{H}{6d_{50}}\frac{(0.0022+C)U}{K\sqrt{\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma m}gh\omega}}\right]$$

式中K为卡门常数。

上述群体沿速ω_l的计算公式应尽可能有两相流体动力学依据，量纲应和谐且与实测资料

一致。因为它可能对挟沙能力有 10 倍的误差。郑邦民等通过对浑水中泥沙颗粒的受力分析，认为泥沙沉降时单个细颗粒阻力符合 Stokes 公式，多个颗粒阻力在散粒体条件下也应该是可以叠加的。在计算机上做出(10^{12}~10^{15})泥沙颗粒 (0.01~0.1 mm) 受力的作用，得到由泥沙下沉对周围流场的干扰和颗粒对周围回流的影响，并利用 Batchlor 等得到的 μ_m 中浓度 C 影响的一阶近似结果，提出

$$\omega_s=\omega_m\frac{2.0\left(1-\frac{C}{C_m}\right)}{1+2.5C+7.6C^2}\frac{d_{sv}}{\sqrt{d_{sh}d_{sv}}}$$

式中 C_m 为极限含沙浓度，采用方红卫黄河资料，取为 0.561 2。ω_m 为单个颗粒之沉速，d_{sh}，d_{sv}，d_m 考虑了非均匀沙，该式量纲和谐且 C 不超过 C_m，并与黄河实测资料较一致。

以上基本方程的离散化可以参照以往方法去做，因为太烦，为节省篇幅起见，略去。有兴趣的读者可参看有关文献。

6.3.3 计算实例与计算结果

下面用两个算例说明有关问题。

例 6.3 有一天然河道，河段长 34 km，水面宽 B = 850~1 200 m，平均水深 $\bar{h}$= 6.5~10.20 m，断面平均流速，v = 1.15~2.50 m/s，计算非恒定流洪水演进，流量在 26h 内，由 Q = 9 200~13 000~8 500 m³/s，有涨水与落水整个过程。含沙浓度变化于 C = 0.01，0.05，0.10，0.20，0.30，按二维计算网格为：$I\times J$=171×17 。计算结果见下表 6.8。

表 6.8 不同含沙浓度 C 的浑水水位、流量与清水结果比较

	C	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30
$\frac{\Delta z}{z_0}$	$t=100\Delta t$	0.004	0.015	0.037	0.072	0.107
	$t=1\,000\Delta t$	0.009	0.053	0.102	0.205	0.325
	$t=1\,300\Delta t$	0.002	0.018	0.021	0.027	0.031
$\frac{u}{u_0}$	$t=100\Delta t$	0.996	0.948 7	0.895 3	0.817 3	0.752 5
	$t=1\,000\Delta t$	0.995 6	0.983 8	0.957 9	0.918 8	0.888 3
	$t=1\,300\Delta t$	0.986 7	0.939 5	0.878 1	0.818 8	0.999 4

计算结果表明：

(1) 浑水计算的水位明显高于清水计算的水位，浓度 C 越大，其差别也越大。

(2) 浑水流速小于清水计算的流速，含沙量越大，二者差别越大。

至于流量之比，取决于 $\frac{Q}{Q_0}=\frac{Bh\rho u}{B_0h_0u_0}=\left(\frac{B}{B_0}\right)\left(1+\frac{\Delta h}{h_0}\right)\left(\frac{\rho u}{u_0}\right)$，其中 $\frac{B}{B_0}>1$，$\left(1+\frac{\Delta h}{h}\right)>1$，$\left(\frac{u}{u_0}\right)<1$，而 $\frac{B}{B_0}$ 与漫滩或不漫滩有很大关系。

例 6.4 黄河北金堤滞洪区洪水演进

关于清水洪水演进的详细内容，可参考有关报告“八五”国家重点科技攻关项目，北金

堤滞洪区二维不恒定流洪水演进快速计算模型，这里重点放在清水与挟沙水流作为两相混合流体浑水洪水演进非恒定流计算之差异比较。

计算表明：如果含沙量小于$S=5\ \mathrm{kg/m^3}$，沙对水的反馈作用，无论对流量，对重力项，对惯性项的影响，均小于0.2%，属于少沙情况的两相流，沙对水的影响可以忽略，洪水演进按浑水与清水计算无多大分别。而当含沙量$S=100\sim300\ \mathrm{k/m^3}$，则$\frac{\Delta Q}{Q}=5\%\sim15\%$，而当含沙量高达$S=600\sim900\ \mathrm{kg/m^3}$时，则$\frac{\Delta Q}{Q}>34\%$，如黄河洪水高含沙情况，按浑水计算与清水计算有较大差异，沙对水的反馈作用不容忽视，必须如实按两相流体考虑。见表6.9。

表6.9　含沙量变化与流量重力项关系表

含沙量 S (kg/m³)	流量入 $\frac{\Delta Q}{Q}$ (%)	重力项 B_L (%)	惯性项 ρu	浑水情况	沙对水的作用
1，2，5	0.037，0.076，0.19	0.06，0.1，0.3	1.001 6，1.001 2，1.003	少沙	可以忽略
10，34	0.377，1.28	0.6，1.7	1.006 2，1.021	中沙	可以考虑
100，200，500，600，900	3.77，7.55，11.3，18.52，34.00	6.1，12.5，18.6，37.2，56.0	1 000 2，1 124 5，1.186，1.372，1.560	高含沙	必须考虑

黄河泥沙组成，北金堤高村至艾山上游30 km张庄闸，河道淤积粒径，上游段比下游段粗，深层比表层粗，主槽比滩地粗，小于0.025 mm的冲泻质，淤积量占15%~35%，大于0.025 mm的床沙质，淤在主河槽占50%。

我们采用黄河泥沙粒径，悬移质$d=0.025\sim0.05$ mm，多年平均含沙量35 kg/m³，洪水期含沙量$S=100\sim300\ \mathrm{kg/m^3}$。最大900 kg/m³，河床质0.10~0.30 mm范围内变化，与分洪区地面土壤组成可冲刷粒径按河床质考虑。

计算发现随着浓度C的加大，洪水位有所增加，洪水滞留时间延长，冲槽淤滩，洪水漫滩机会增加，在中等洪水时也表现浑水横向扩散与“爬高”现象。

分洪时由于进流流速大，开始在分洪口下游附近冲成一个冲刷坑，随后水流扩散，流速很快减小，挟沙能力随之很快降低，而形成一个扇形的淤积丘。

浑水计算结果含沙浑水密度增加，流量、洪量将相应增加，其水位、流量过程不同于清水，水位与流速相应变化，考虑河床冲淤变形将带来与清水单相流不同的复杂情况。

计算中也发现糙率减少时，使洪水演进速度在主槽中加快，但滩地上阻力影响取决于其他因素。糙率处于阻力项中是对于时间的长期项，在进洪的初期影响小，对进洪的后期影响大些。进洪初期仍是重力、惯性力为主的流动，如图6.11~6.13所示。

二维浑水模型对多沙、高含沙水流有广泛的应用。清水非恒定流为其特例，我们将其改进可用于干河、可动边界、滩槽变化情况，并可预测黄河这类高含沙水流的河床变形情况。

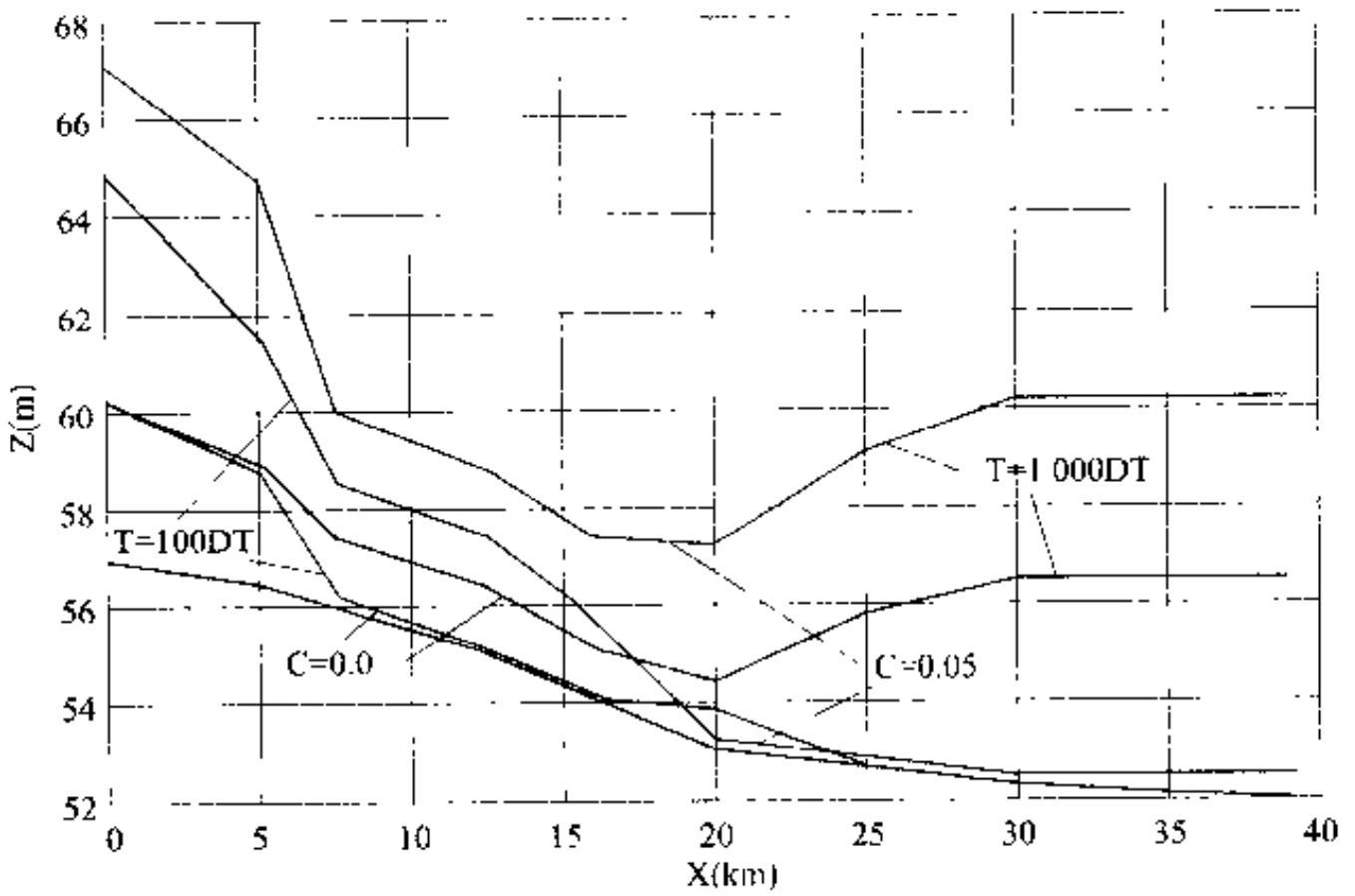


图6 11　黄河浑水洪水演进

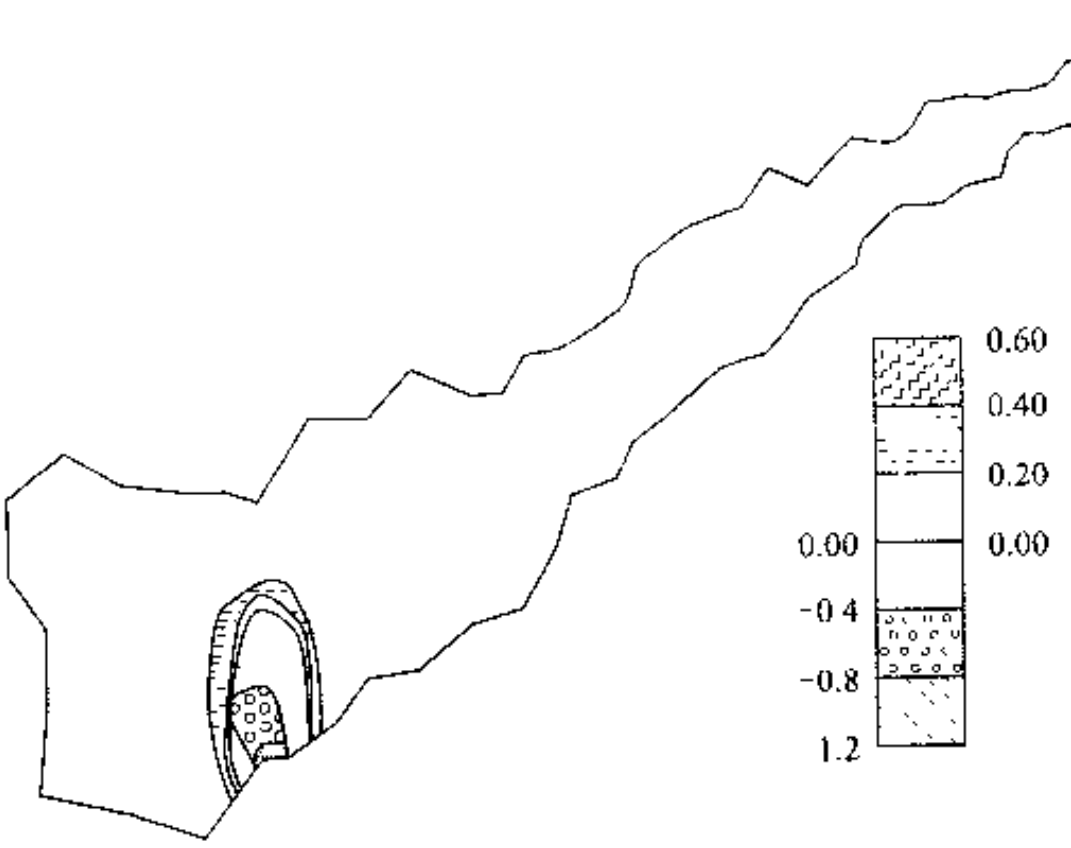


图6. 12　分洪区进口冲淤

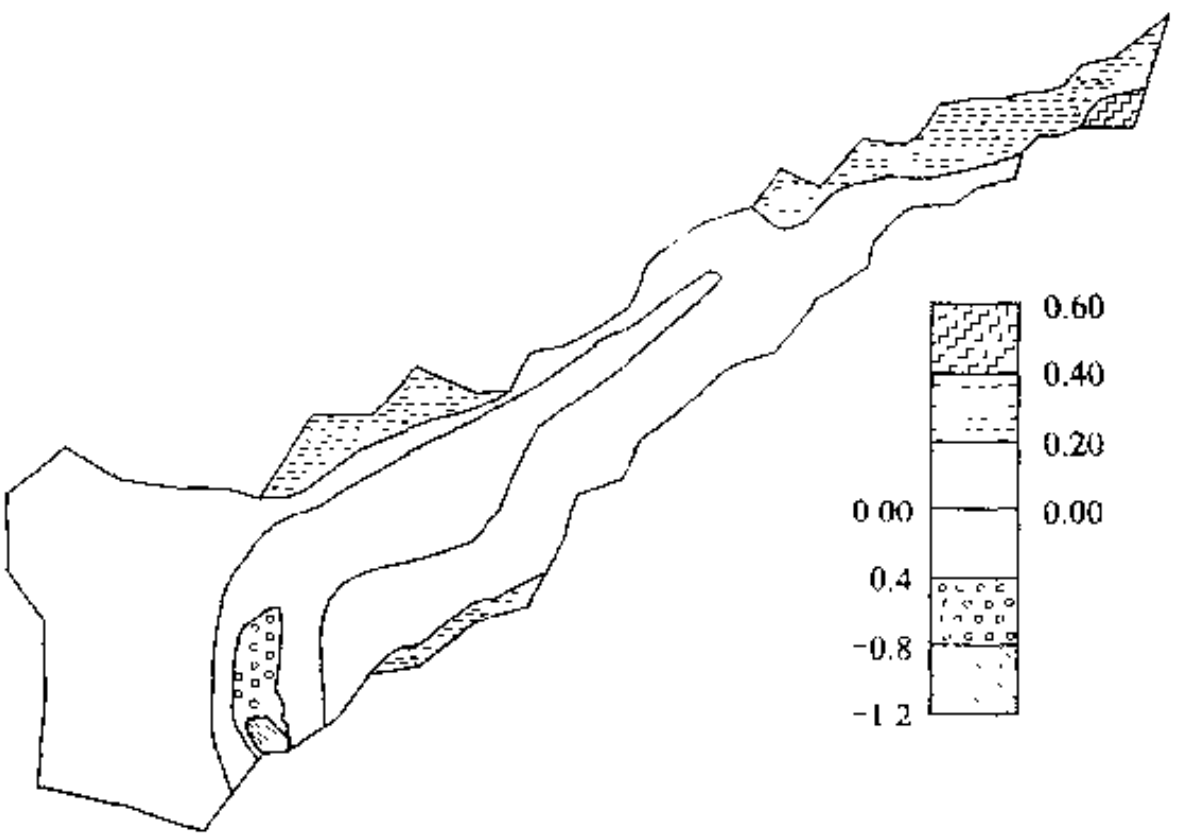


图6.13　分洪区冲淤(T=100Hrs)

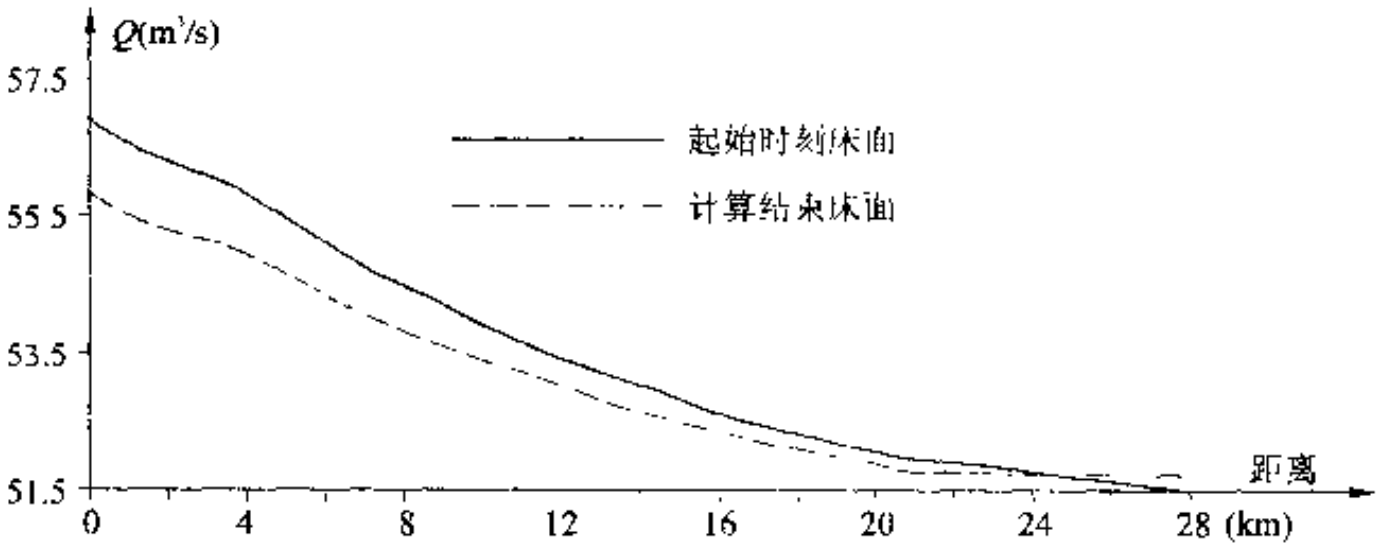


图6.14　渠村闸前断面横向冲淤(i=15)

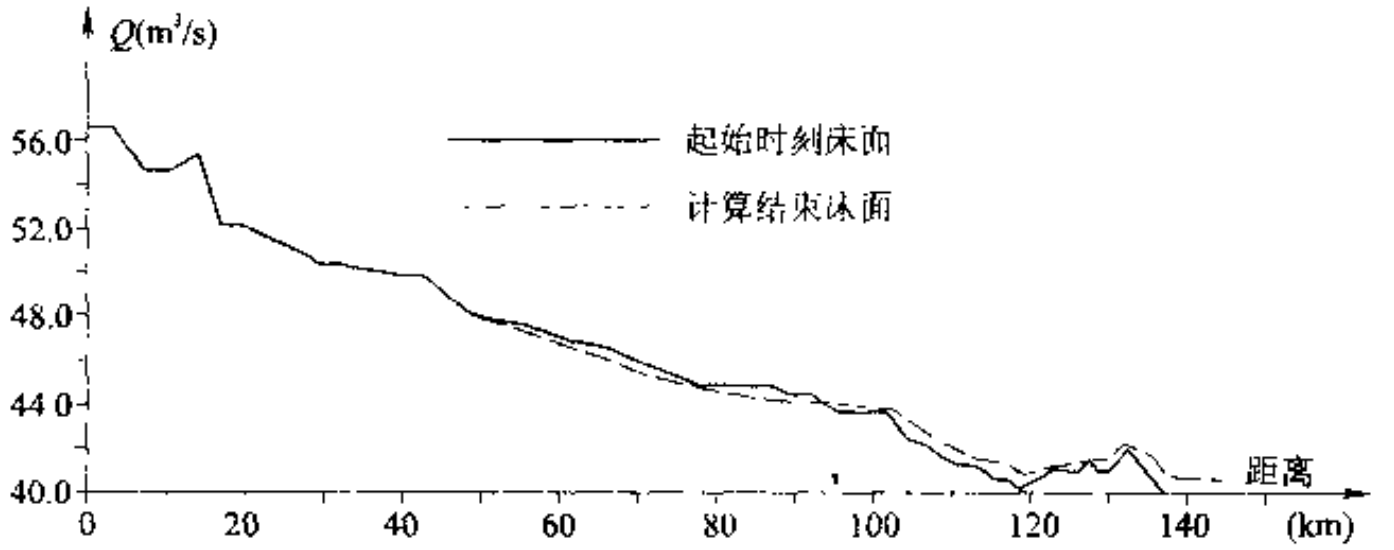


图6.15　(j=15)断面纵向冲淤

第七章　边界层计算及紊流预测

§7.1　紊 流 模 型

紊流模型的实质是用各种方式封闭时均雷诺方程组，所给出的结果只能是时均流信息。本节介绍工程紊流计算中所常用的几种紊流模型方程组。

7.1.1　紊流时均流动基本方程组

不可压缩流体瞬时流动的基本方程为：

连续性方程
$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0 \tag{7.1.1}$$

动量方程
$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x_j}\frac{U_i}{\partial x_j}+g_i\frac{\rho-\rho_r}{\rho_r} \tag{7.1.2}$$

随流扩散方程
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+U_i\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=\lambda\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\partial x_i}+S_\Phi \tag{7.1.3}$$

式中，U_i 是 x_i 方向的瞬时流速分量，P 为扣除了静水压强后的瞬时动水压强；Φ 可以是温度或某种物质浓度 (如盐分)，源项 S_Φ 是单位体积水体内部 Φ 的产生速率；ν 和 λ 分别为水的运动粘性系数和 Φ 的分子扩散系数。由于温差或浓度变化会在水体中产生密度差异，方程 (7.1.2) 中采用 **Boussinesq** 近似，密度变化只出现在浮力项 (方程右端最末一项) 中，ρ_r 为环境水体的密度，根据密度与温度或浓度的关系可以确定水的密度。

紊流流动参数的时均值
$$\overline{f}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f\,dt \tag{7.1.4}$$

瞬时值
$$U_i=\overline{U}_i+u_i,\ P=\overline{P}+p,\ \Phi=\overline{\Phi}+\varphi,\ \rho=\overline{\rho}+\rho' \tag{7.1.5}$$

u_i 等为脉动值。将 (7.1.5) 式代入，对方程 (7.1.1) 式~ (7.1.3) 式时均化得时均量方程组

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i}=0 \tag{7.1.6}$$

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t}+\overline{U}_i\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\nu\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i}-\overline{u_i u_j}\right]+g_i\frac{\overline{\rho}-\rho_r}{\rho_r} \tag{7.1.7}$$

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t}+\overline{U}_i\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\lambda\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x_i}-\overline{u_i\varphi}\right]+S_\Phi \tag{7.1.8}$$

瞬时量方程减去时均量方程得脉动量方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{7.1.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_i\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i}+U_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\gamma\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-u_i u+\overline{u_i u_i}\right]+g_i\frac{\rho'-\rho_i}{\rho_i} \tag{7.1.10}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+u_i\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}+U_i\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}-u_i\varphi+u_i\varphi\right] \tag{7.1.11}$$

密度的变化来自温度或浓度的变化，近似取

$$g_i\frac{\rho-\rho_i}{\rho_i}=-g_i\beta\Phi \tag{7.1.12}$$

β 为系数（如热膨胀系数）。下面将 ρ_i 写成 ρ，则方程 (7.1.10) 可写成

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_i\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i}+\bar{U}_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\gamma\frac{\partial u_i}{\partial x}-u_i u+u_i u_i\right]-\beta g_i\varphi \tag{7.1.13}$$

时均量方程中除相关项外，去掉时均量的上横线，得到

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0 \tag{7.1.14}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_i\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\gamma\frac{\partial U_i}{\partial x_i}-\overline{u_i u_i}\right]-\beta g_i\Phi \tag{7.1.15}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+U_i\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\lambda\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}-\overline{u_i\varphi}\right]+S_\Phi \tag{7.1.16}$$

这就是我们计算时均流场以及时均温度场或时均浓度场时所用的基本方程组。方程中存在六个独立的脉动速度相关项 $\overline{u_i u_i}$（雷诺应力项）和三个速度－浓度相关项 $\overline{u\varphi}$，因而方程组是不封闭的。

所谓紊流模型，就是为使上述基本方程组封闭而补充的微分方程或关系式。根据补充的微分方程的数目，有所谓“零方程模型”、“单方程模型”、“两方程模型”乃至“多方程模型”。

7.1.2 零方程和单方程模型

大多数紊流模型都采用 Boussinesq 提出的雷诺应力的关系式

$$-\overline{u_i u_i}=\gamma_t\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right]-\frac{2}{3}\kappa\delta_{ij} \tag{7.1.17}$$

其中 γ_t 为紊动运动粘性系数，紊动动能

$$\kappa=\frac{1}{2}\overline{u_i^2} \tag{7.1.18}$$

速度浓度相关项代表了物质的紊动扩散通量，仿照分子扩散给出如下关系式

$$-u_i\varphi=\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \tag{7.1.19}$$

式中 Γ 为紊动扩散系数，与 ν_t 有关系

$$\Gamma=\frac{\nu_t}{\sigma_t} \tag{7.1.20}$$

σ_t 称为紊动 Prandtl 数（传热问题）或紊动 Schmidt 数（质量输运问题），常取为常数，但是当存在浮力影响时，σ_t 的值与没有浮力影响时的 σ_{t0} 之比为

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_{t0}}=\frac{(1+3.33R_i)^{1.5}}{(1+10R_i)^{1.5}} \tag{7.1.21}$$

梯度 Richardson 数

$$R_i=-\frac{g}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\Big/\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \tag{7.1.22}$$

ν_t 和 Γ 都与紊动状态有关，对于比较简单的流动，根据实验数据结合理论分析给出其经验或半经验关系式，而不用补充微分方程，这就是**零方程模型**。如果使用得当，常常可以得到比较好的结果，但通用性较差。最著名的零方程模型是**普朗特混合长模型**：

$$\nu_t=l_m^2\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \tag{7.1.23}$$

有许多混合长度 l_m 的经验公式可资利用，在此不赘述。

进一步的研究将 ν_t 与紊动动能 k 联系起来，如柯尔莫戈洛夫—普朗特公式

$$\nu_t=C_\mu'\sqrt{k}L \tag{7.1.24}$$

L 为一特征长度。为此要补充一个 k 的微分方程，这就得到了**单方程模型**。

将脉动速度方程 (7.1.13) 各项同乘 u_i，再进行时均化，得到 k 的输运方程

$$\frac{\partial k}{\partial t}+U_j\frac{\partial k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\frac{\partial k}{\partial x_j}-\overline{u_j\left(\frac{u_iu_i}{2}+\frac{p}{\rho}\right)}\right]+P_k+G-\varepsilon \tag{7.1.25}$$

其中浮力产生项

$$G=-\beta g_i\overline{u_i\varphi} \tag{7.1.26}$$

剪切产生项

$$P_k=-\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{7.1.27}$$

紊动动能的耗散率

$$\varepsilon=\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \tag{7.1.28}$$

仿照紊动扩散式给出 k 的紊动扩散通量的模拟式

$$-\overline{u_j\left(\frac{u_iu_i}{2}+\frac{p}{\rho}\right)}=-\nu_t\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k+\frac{p}{\rho}\right)=\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j} \tag{7.1.29}$$

经验常数 $\sigma_t=1.0$。将 (7.1.17)、(7.1.19) 式代入 P_t、G 式中，得

$$P_t=\nu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j},\quad G=\beta g\,\frac{\nu_t}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{7.1.30}$$

所以 k 方程为

$$\frac{\partial k}{\partial t}+U_i\frac{\partial k}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right]+\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\beta g_i\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}-\varepsilon \tag{7.1.31}$$

在单方程模型中可取

$$\varepsilon=C_D\frac{k^{\frac{3}{2}}}{L} \tag{7.1.32}$$

C_D 为常数，还必须给出特征长度 L 的经验或半经验关系式。

7.1.3 $k-\varepsilon$ 模型

如果为了确定特征长度 L 而再增加一个微分方程，就得到**两方程模型**。应用最为广泛的两方程模型是 $k-\varepsilon$ **模型**。根据式 (7.1.32)，特征长度 L 与 ε 有关，因而有

$$\nu_t=\frac{C_\mu k^2}{\varepsilon} \tag{7.1.33}$$

为此要补充一个求解 ε 的微分方程。对方程 (7.1.13) 关于 x_i 求导，乘以 $2\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$，再进行时均化，得到 ε 的输运方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+U_i\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}=&\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\nu\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}u_i}-\frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}+\nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right]}_{\text{扩散项}}-\underbrace{2\nu\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\left[\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}+\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}\right]}_{\text{产生项}}\\&\underbrace{+2\nu\frac{\partial p}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}-2\nu\overline{u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\partial x_k}-2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}-2\beta g_i\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}}_{\text{产生项}}-\underbrace{2\overline{\left(\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}\right)^2}}_{\text{粘性衰减项}}\end{aligned} \tag{7.1.34}$$

目前对 ε 方程的产生项和衰减项的处理还不够完善，多假定在高雷诺数的情况下水流为局部各向同性的，且

$$\text{产生项}-\text{衰减项}=(C_1\times k\text{ 方程的产生项}-C_2\varepsilon)\frac{\varepsilon}{k}$$

$$=C_{1t}\frac{\varepsilon}{k}(P_t+G)(1+C_3R_f)-C_{2t}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{7.1.35}$$

其中，P_t、G 可按 (7.1.30) 式计算，通量 Richardson 数 $R_f=-\dfrac{G}{(P_t+G)}$。再对紊动扩散项引入梯度假设

$$-\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_i}-\frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}=\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \tag{7.1.36}$$

得到 ε 方程

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+U_i\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}+\nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right]+C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}(P_k+G)(1+C_{\varepsilon 3}R_f)-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{7.1.37}$$

(7.1.31)、(7.1.37) 就是 $k-\varepsilon$ 模型的补充微分方程，其中各常数通常取为：$C_\mu=0.09$，$C_{\varepsilon 1}=1.44$，$C_{\varepsilon 2}=1.92$，$C_{\varepsilon 3}=0.8$，$\sigma_k=1.0$，$\sigma_\varepsilon=1.33$，可以适用于管流、平面射流、平壁边界层以及弱旋的回流等。

在针对强旋流、各向异性等情况下已经提出许多修正的 $k-\varepsilon$ 模型，在此就不介绍了。

7.1.4 雷诺应力模型与代数应力模型

多方程模型直接针对雷诺应力等相关项提出补充微分方程，能够更好地反映流动的各向异性特点，这方面的工作是周培源首先开创的。下面介绍目前常用的**雷诺应力模型**（又称微分应力模型，DSM）。

将脉动速度 u_i 的方程（(式 7.1.13)，原下标 j 换成 l）各项乘以 u_j，再将 u_j 的方程乘以 u_i，两者相加后予以时均化，得 $\overline{u_iu_j}$ 的输运方程

$$\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial t}+U_l\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}\underbrace{\left[-\overline{u_iu_ju_l}-\frac{1}{\rho}(\overline{u_i p}\,\delta_{jl}+\overline{u_j p}\,\delta_{il})+\nu\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial x_l}\right]}_{\text{紊动扩散项}}\underbrace{-\overline{u_iu_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}-\overline{u_ju_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}}_{\text{应力产生项 } P_{ij}}$$

$$\underbrace{-\beta(g_i\overline{u_j\varphi}+g_j\overline{u_i\varphi})}_{\text{浮力产生项 } G_{ij}}\underbrace{+\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}_{\text{压力应变项 }\Pi_{ij}}\underbrace{-2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}}_{\text{粘性耗散项 }\varepsilon_{ij}} \tag{7.1.38}$$

式中的紊动扩散项可模化成

$$-\overline{u_iu_ju_l}-\frac{1}{\rho}(\overline{u_jp}\,\delta_{il}+\overline{u_ip}\,\delta_{jl})=C_s\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_mu_l}\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial x_m} \tag{7.1.39}$$

粘性耗散主要由小尺度涡产生，因而可以认为是各向同性的，所以

$$\varepsilon_{ij}=\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \tag{7.1.40}$$

$\overline{u_iu_j}$ 方程为

$$\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial t}+U_l\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[C_s\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_mu_l}\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial x_m}+\nu\frac{\partial \overline{u_iu_j}}{\partial x_l}\right]-\overline{u_iu_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}-\overline{u_ju_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}$$

$$-\beta(g_i\overline{u_j\varphi}+g_j\overline{u_i\varphi})+\Pi_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \tag{7.1.41}$$

压力应变项 Π_{ij} 的模化还不够完善，存在一些争议，较典型的做法是将其分成三部分

$$\Pi_{ij}=\Pi_{ij,1}+\Pi_{ij,2}+\Pi_{ij,3} \tag{7.1.42}$$

第一项为各脉动速度分量之间的相互作用项

$$\Pi_{ij,1}=-C_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k\right) \tag{7.1.43}$$

第二项为平均应变与脉动速度间的相互作用项，Rodi 等人建议

$$\Pi_{ij,2}=-\frac{C_2+8}{11}\left(P_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}P_{mm}\right)-\frac{30C_2-2}{55}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)k-\frac{8C_2-2}{11}\left(D_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}D_{mm}\right) \tag{7.1.44}$$

其中

$$D_{ij}=-\overline{u_i u_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}-\overline{u_j u_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l} \tag{7.1.45}$$

Launder 等人又给出一个简化的式子

$$\Pi_{ij,2}=-\gamma\left(P_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}P_{mm}\right) \tag{7.1.46}$$

第三项为浮力作用部分

$$\Pi_{ij,3}=-C_3\left(G_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}G_{mm}\right) \tag{7.1.47}$$

对于方程的浮力产生项 G_{ij} 中的脉动速度—浓度相关项也可以推导出输运方程

$$\frac{\partial\overline{u_i\varphi}}{\partial t}+U_l\frac{\partial\overline{u_i\varphi}}{\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left(-\overline{u_i u_l\varphi}-\frac{\overline{p\varphi}}{\rho}\delta_{il}+\lambda\overline{u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}}+\nu\overline{\varphi\frac{\partial u_i}{\partial x_l}}\right)-\overline{u_i u_l}\frac{\partial\Phi}{\partial x_l}-\overline{u_l\varphi}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}$$

$$\underbrace{-\beta g_i\overline{\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\overline{p\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}}_{\Pi_{i\varphi}}\underbrace{-(\lambda+\nu)\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}}}_{\text{粘性耗散项}} \tag{7.1.48}$$

其中，对紊动扩散项的模化可用

$$-\overline{u_i u_l u_l\varphi}-\frac{\overline{p\varphi}}{\rho}\delta_{il}=C_{s\varphi}\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_m u_l}\frac{\partial\overline{u_i\varphi}}{\partial x_m}+\overline{u_m u_i}\frac{\partial\overline{u_l\varphi}}{\partial x_m}\right) \tag{7.1.49}$$

对分子扩散项的模化

$$\lambda\overline{u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}}+\nu\overline{\varphi\frac{\partial u_i}{\partial x_l}}=\lambda\frac{\partial\overline{u_i\varphi}}{\partial x_l} \tag{7.1.50}$$

各向同性的小尺度涡体所产生的粘性耗散项为零。得到 $\overline{u_i\varphi}$ 方程如下

$$\frac{\partial\overline{u_i\varphi}}{\partial t}+U_l\frac{\partial\overline{u_i\varphi}}{\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[C_{s\varphi}\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_m u_l}\frac{\partial\overline{u_i\varphi}}{\partial x_m}+\overline{u_m u_i}\frac{\partial\overline{u_l\varphi}}{\partial x_m}\right)+\lambda\frac{\partial\overline{u_i\varphi}}{\partial x_l}\right]$$

$$-\overline{u_i u_l}\frac{\partial\Phi}{\partial x_l}-\overline{u_l\varphi}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}-\beta g_i\overline{\varphi^2}+\Pi_{i\varphi} \tag{7.1.51}$$

其中压力脉动—浓度梯度相关项

$$\Pi_{i\varphi}=-C_{1\varphi}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i\varphi}+C_{2\varphi}\,u_i\varphi\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+C_{3\varphi}\beta g_i\overline{\varphi^2} \tag{7.1.52}$$

对方程中的 $\overline{\varphi^2}$ 也可以得到类似的方程

$$\frac{\partial\overline{\varphi^2}}{\partial t}+U_j\frac{\partial\overline{\varphi^2}}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_\varphi\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_iu_m}\frac{\partial\overline{\varphi^2}}{\partial x_m}\right)-2\,u_i\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}-\frac{\overline{\varphi^2}}{kR}\varepsilon \tag{7.1.53}$$

常数 R 代表 φ 的脉动时间比尺与速度脉动时间比尺的比值。

方程 (7.1.41)、(7.1.51) 和 (7.1.53)，再加上 k 方程 (7.1.31) 和 ε 方程 (7.1.37) 就构成了雷诺应力模型的基本方程组，共 12 个偏微分方程。若考虑紊动扩散的各向异性，k 和 ε 方程还可以改写成

$$\frac{\partial k}{\partial t}+U_j\frac{\partial k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_s\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ju_l}\frac{\partial k}{\partial x_l}+\nu\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)-\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\beta g_i\overline{u_i\varphi}-\varepsilon \tag{7.1.54}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+U_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_\varepsilon\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_ju_l}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}+\nu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right)+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}(P_k+G)(1+C_{3\varepsilon}R_f)-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{7.1.55}$$

G、P_k 表达式应取 (7.1.26)、(7.1.27)，与方程 (7.1.31) 和 (7.1.37) 对比看出，紊动运动粘性系数变成一个二阶张量，因而能够更好地反映流动的各向异性性质。

一些文献中介绍的雷诺应力模型经验常数的取值范围为 $C_s=0.22\sim0.25$，$C_1=1.5\sim2.2$，$C_2=0.4\sim0.6$，$C_3=0.5\sim0.55$，$\gamma=0.55\sim0.6$；$C_{s\varphi}=0.11$，$C_{1\varphi}=3.0\sim3.2$，$C_{2\varphi}=0.33\sim0.5$，$C_{3\varphi}=0.33\sim0.5$；$C_\varphi=0.13$，$R=0.8$；$C_1=0.15$，其余常数与 $k-\varepsilon$ 模型相同。

应用雷诺应力模型进行工程中的紊流流场及能量或物质传输计算时，包括时均量方程 (7.1.14) ~ (7.1.16) 在内，需要联立求解多达 17 个偏微分方程。为了减少计算量同时又保持 DSM 的优点，设法将各相关量的微分方程简化成代数关系式，这就是**代数应力模型** (ASM)。

Rodi 假设雷诺应力方程中的对流项与扩散项之差正比于 k 方程的对流项与扩散项之差，也就是说两者的产生项与耗散项之差成正比，经量纲分析后得到

$$\overline{u_iu_j}=k\left[\frac{2}{3}\delta_{ij}+\frac{(1-\gamma)\left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{P_k}{\varepsilon}\right)(1-C_3)\left(\frac{G_{ij}}{\varepsilon}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{G}{\varepsilon}\right)}{C_1+\frac{P_k+G}{\varepsilon}-1}\right] \tag{7.1.56}$$

类似思路可以推导出

$$\overline{u_i\varphi}=\frac{k\left[\overline{u_iu_l}\frac{\partial\Phi}{\partial x_l}+(1-C_{2\varphi})\left(\overline{u_i\varphi}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}+\beta g_i\overline{\varphi^2}\right)\right]}{C_{1\varphi}+\frac{1}{2}\left(\frac{P_k+G}{\varepsilon}-1\right)} \tag{7.1.57}$$

和

$$\varphi^2 = -2R\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_i}\overline{\varphi}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{7.1.58}$$

代数应力模型只需补充 k 方程 (7.1.53) 和 ε 方程 (7.1.55) 两个微分方程，以及式 (7.1.56) ~ (7.1.58) 共十个关系式，故又被称为 $k-\varepsilon-a$ 模型或两个半方程模型。在很多情况下 ASM 的计算结果与 DSM 没有明显差异。

7.1.5 紊流模式计算实例

(1) 采用雷诺应力代数模式，基本方程如下：

$$\overline{v^2} = \frac{k}{C_1 + 2C_3 f_2}\left[\frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta + C_1 - 1\right) + \frac{\beta}{\varepsilon}\left(\overline{uv}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - \overline{uw}\right) - \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right] - 2\gamma_t\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \tag{7.1.59}$$

$$\overline{w^2} = \frac{k}{C_1}\left[\frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta + C_1 - 1\right) + C_3 f_2\frac{\overline{U}^2}{k} + \frac{\beta}{\varepsilon}\left(\overline{uw}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - \overline{uv}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right)\right] - 2\gamma_t\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} \tag{7.1.60}$$

$$\overline{vw} = \frac{k}{C_1 + \frac{3}{2}C_3 f_2}\frac{\beta}{\varepsilon}\left(\overline{uw}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{uv}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right) - \overline{\gamma_t}\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y}\right) \tag{7.1.61}$$

而

$\gamma_t = C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$，其中 $C_\mu = 0.09$，

$$-\overline{uy} = \gamma_{ty}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y},\ \nu_{ty} = C_{\mu y}\frac{k^2}{\varepsilon},\ C_{\mu y} = \frac{C}{C_1 + \frac{3}{2}C_3 f_2}\cdot\left(\frac{C}{C_1 + 2C_3 f_2}\right) \tag{7.1.62}$$

$$-\overline{uw} = \gamma_{t\delta}\frac{\partial \overline{U}}{\partial \delta},\ \gamma_{t\delta} = C_{\mu\delta}\frac{k^2}{\varepsilon},\ C_{\mu\delta} = \frac{C_1 + \frac{5}{2}C_3 f_2}{C_1 + 2C_3 f_2}C_\mu \tag{7.1.63}$$

按 Boussinesq 假定

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}k \tag{7.1.64}$$

(2) 采用控制体积法

迭代：
$$\Phi_2^{k+1} - 2\Phi_2^{k+1} + (1-2)\Phi_i^k \tag{7.1.65}$$

α 是松弛因子，次松弛一般采用 $\alpha = 0.4$。

主雷诺应力与二次流雷诺应力表示如上。

$$\alpha = 0.7\,636 - 0.06 f_1,\ \beta = 0.109\,1 - 0.06 f_1,\ d = 0.182,\ c_1 = 1.5 \sim 0.5 f_t,$$

实际上 γ_t 的选取可以参照以往分析考虑、如 F 分布。

图 7.1 ~ 图 7.8 为应力模型计算结果。

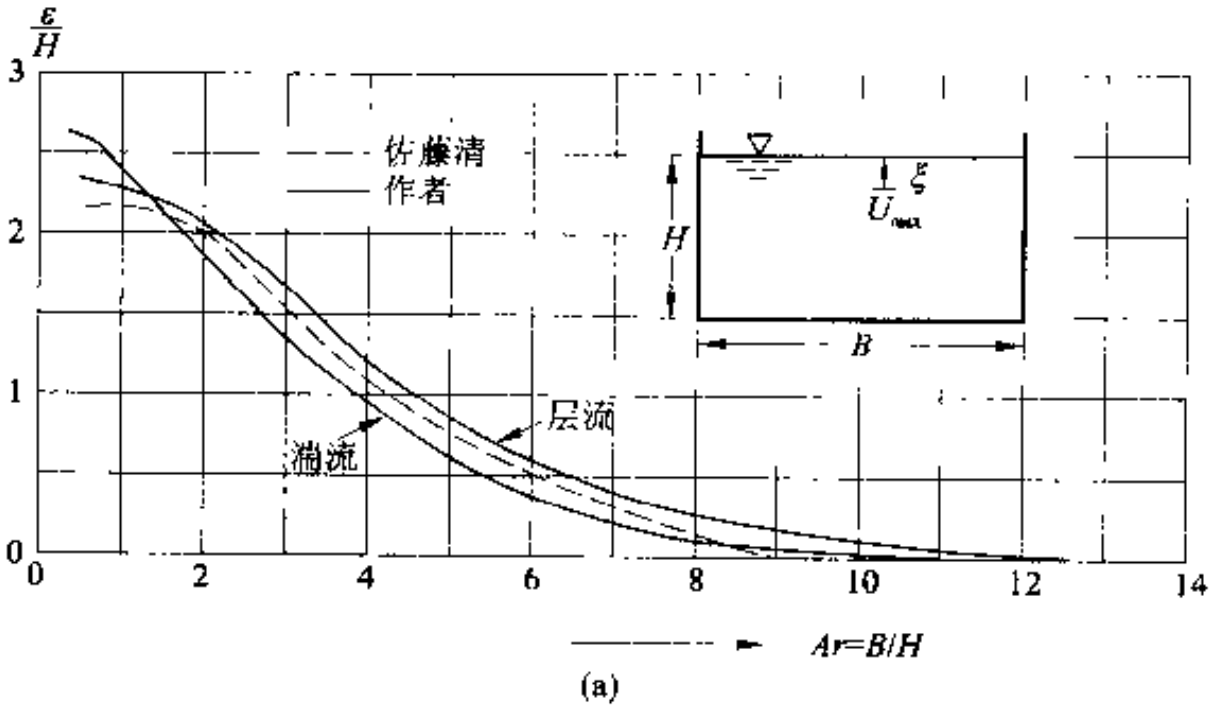


图7.1 $\frac{\xi}{H}$~Ar 关系曲线

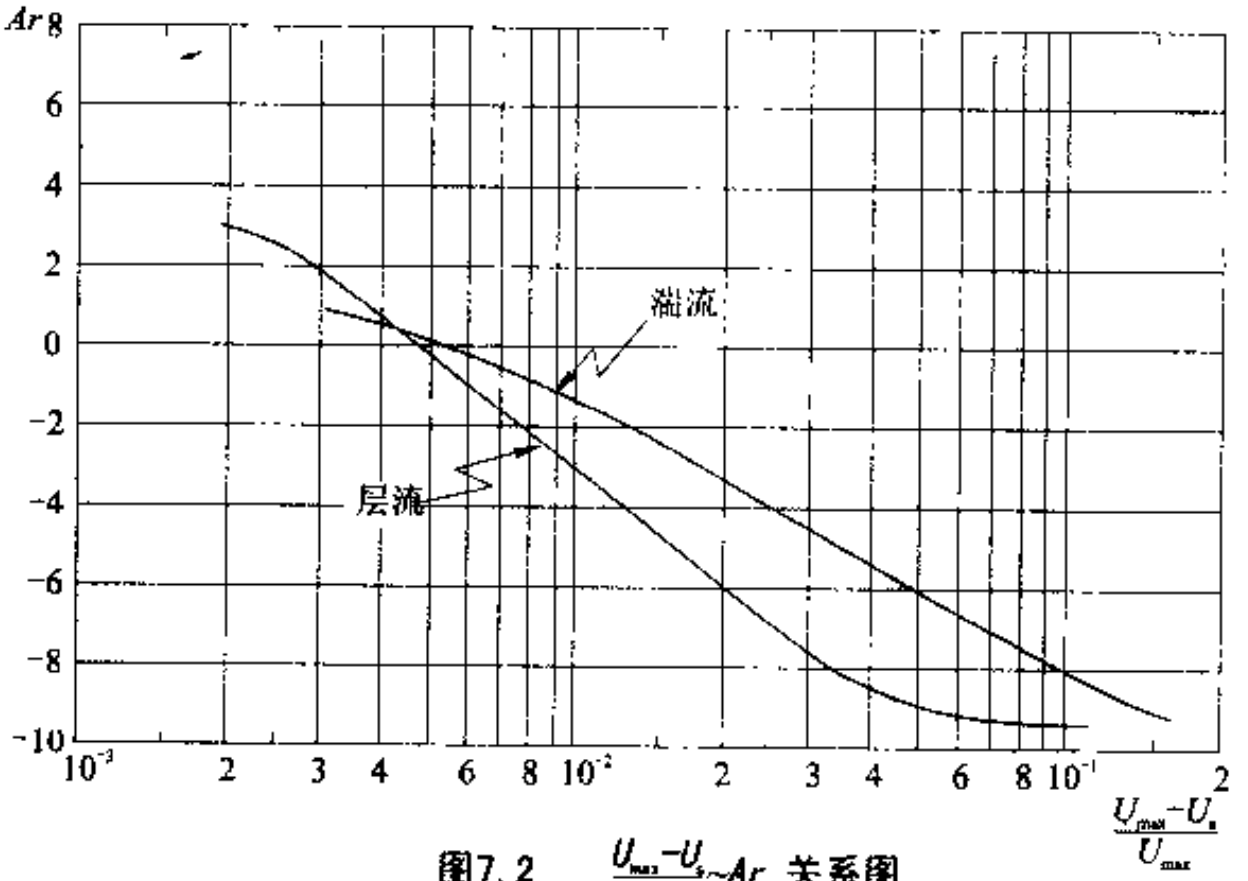


图7.2 $\frac{U_{max}-U_s}{U_{max}}$~$Ar$ 关系图

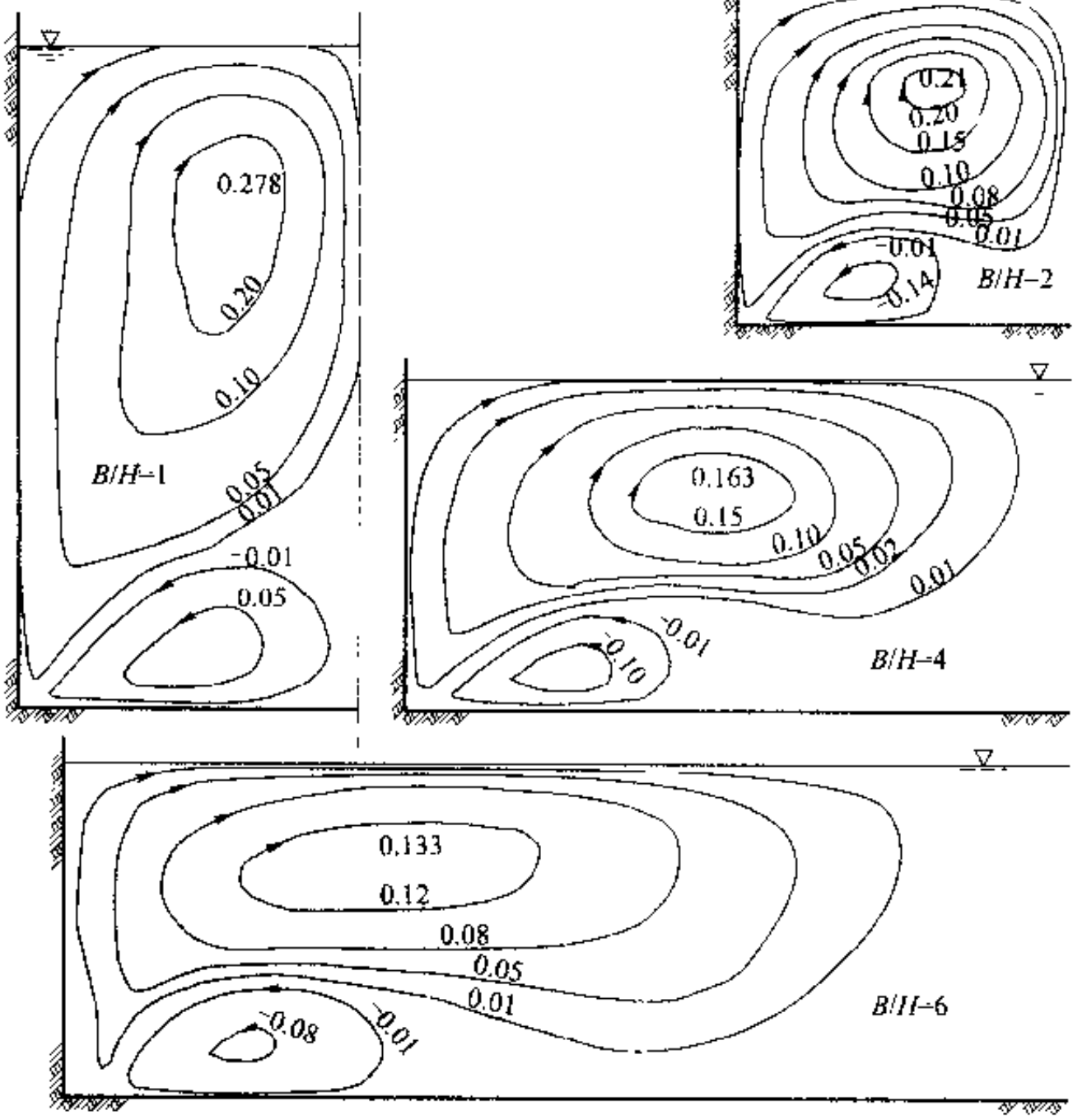


图7.3 满流场流函数等值图($\frac{\psi\nu}{u_*^2}$)

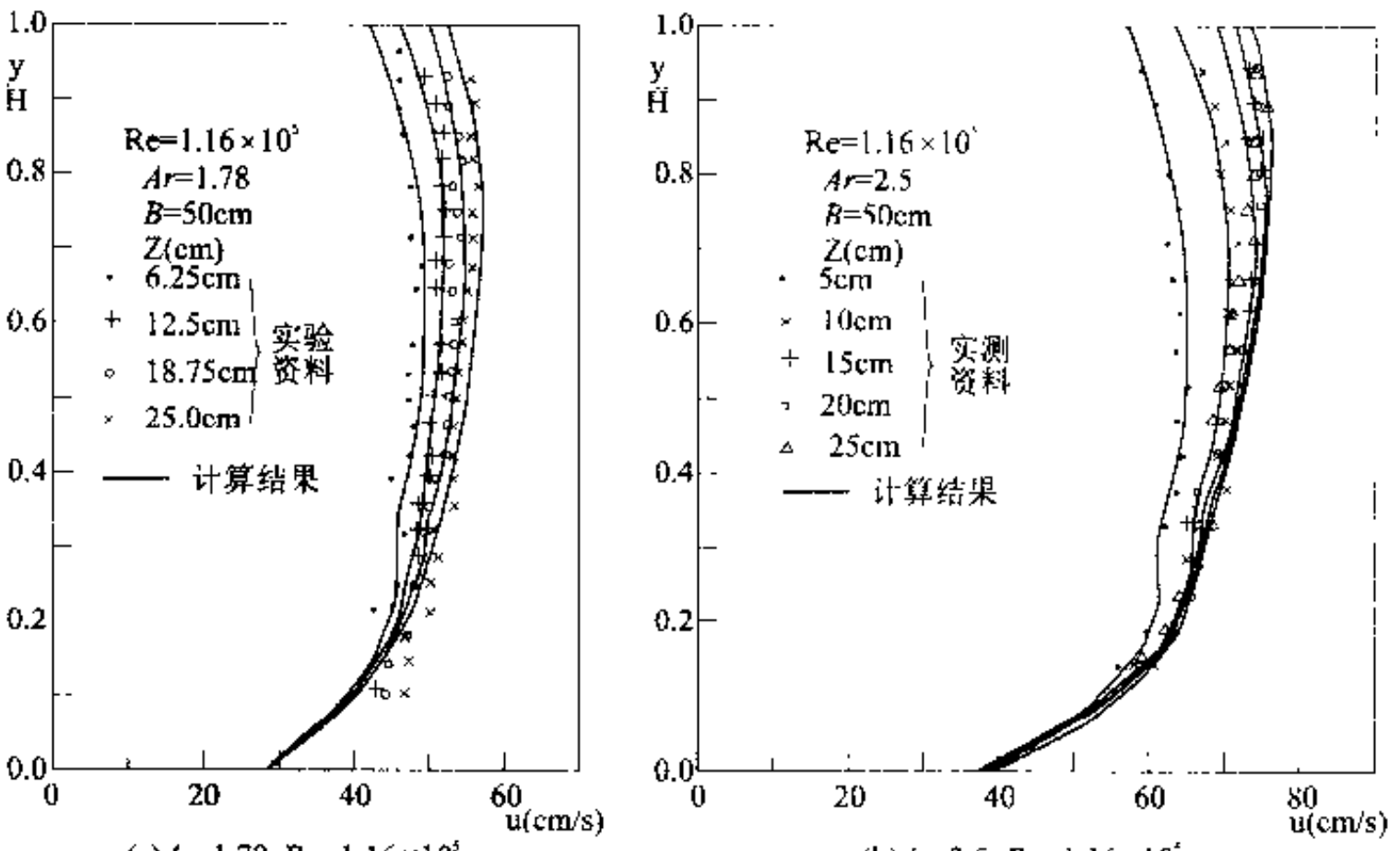


图7.4 相同宽深比条件下不同垂线上速度分布(满流状态)

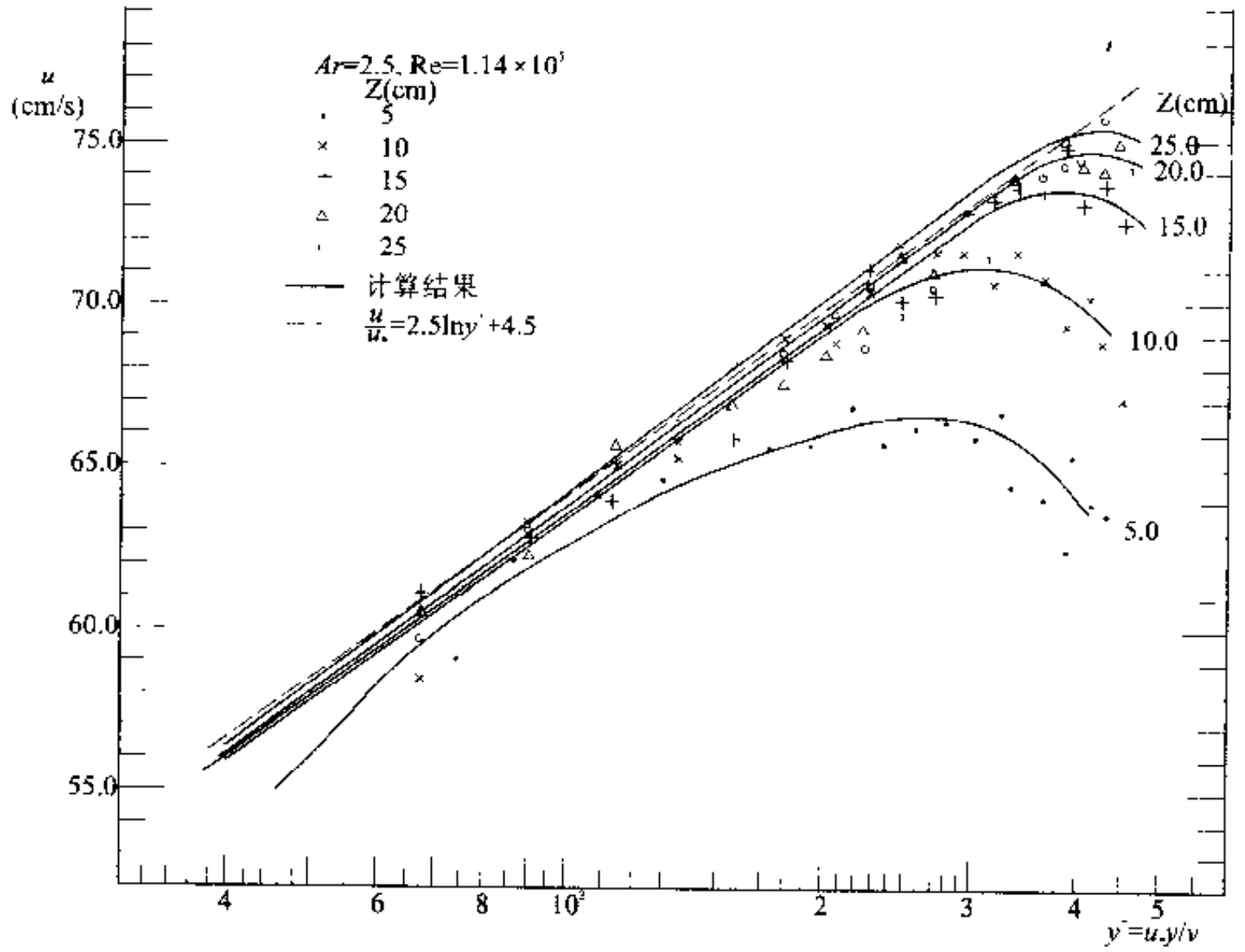


图7.5　宽深比一定的不同垂线上湍流速度分布 (Ar=2.5, Re=1.14×10⁵)

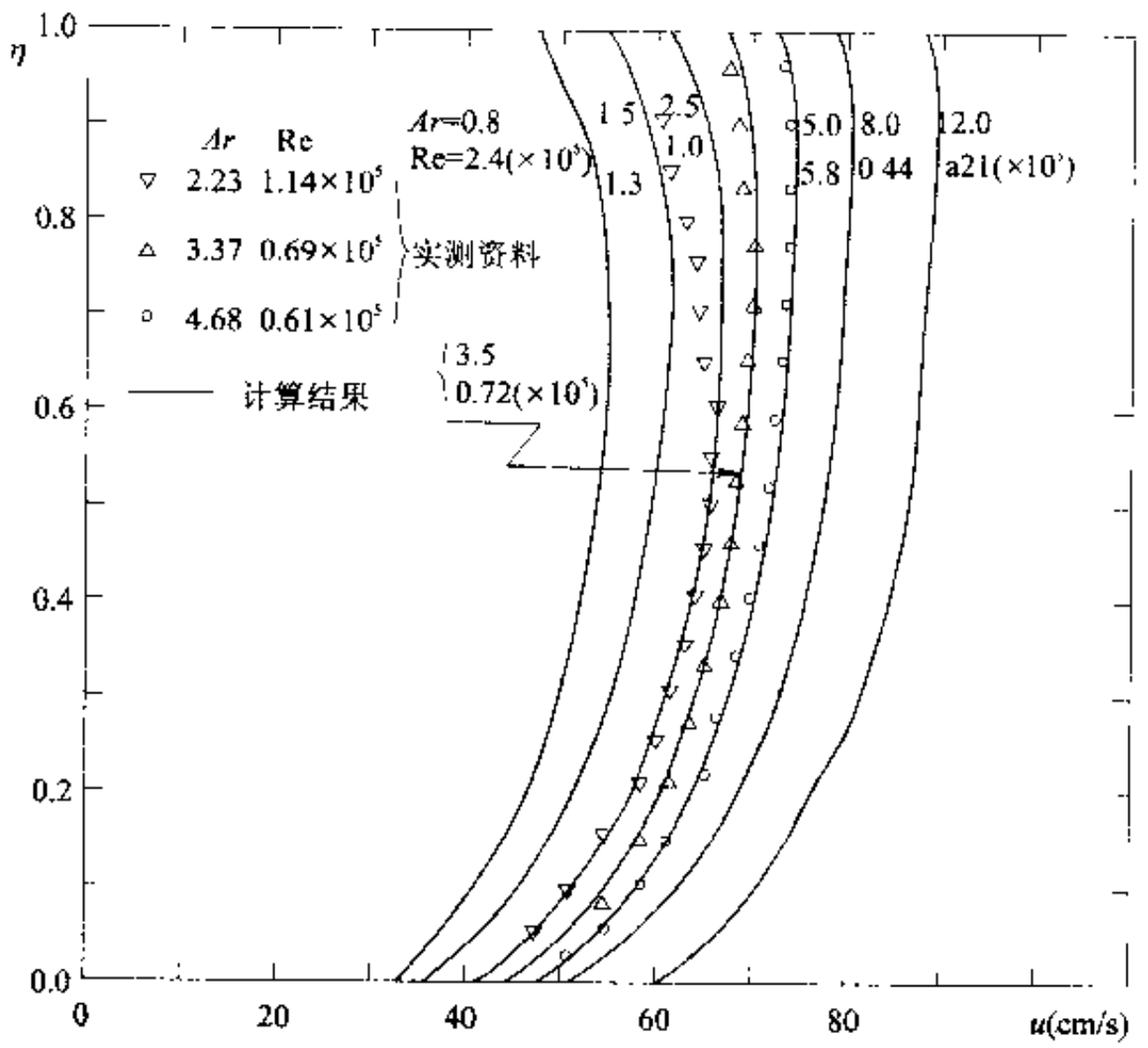


图7.6　不同宽深比条件下的中垂线流速分布

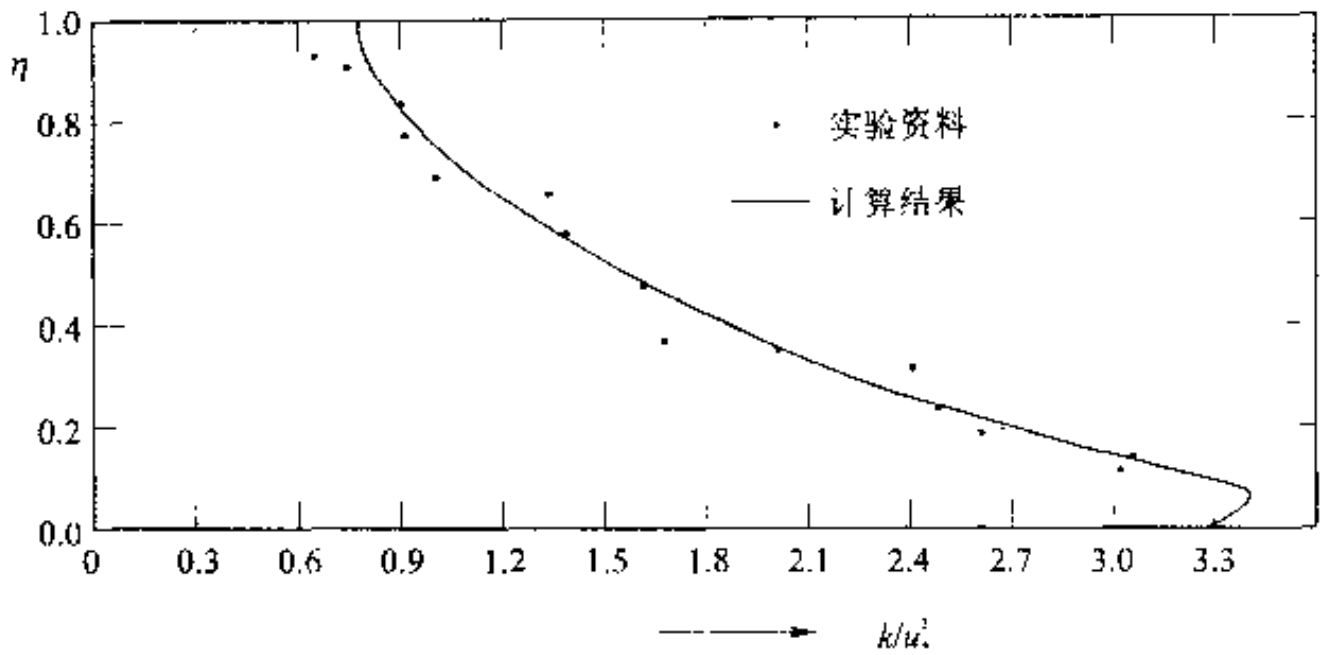


图7.7　湍动能k分布图

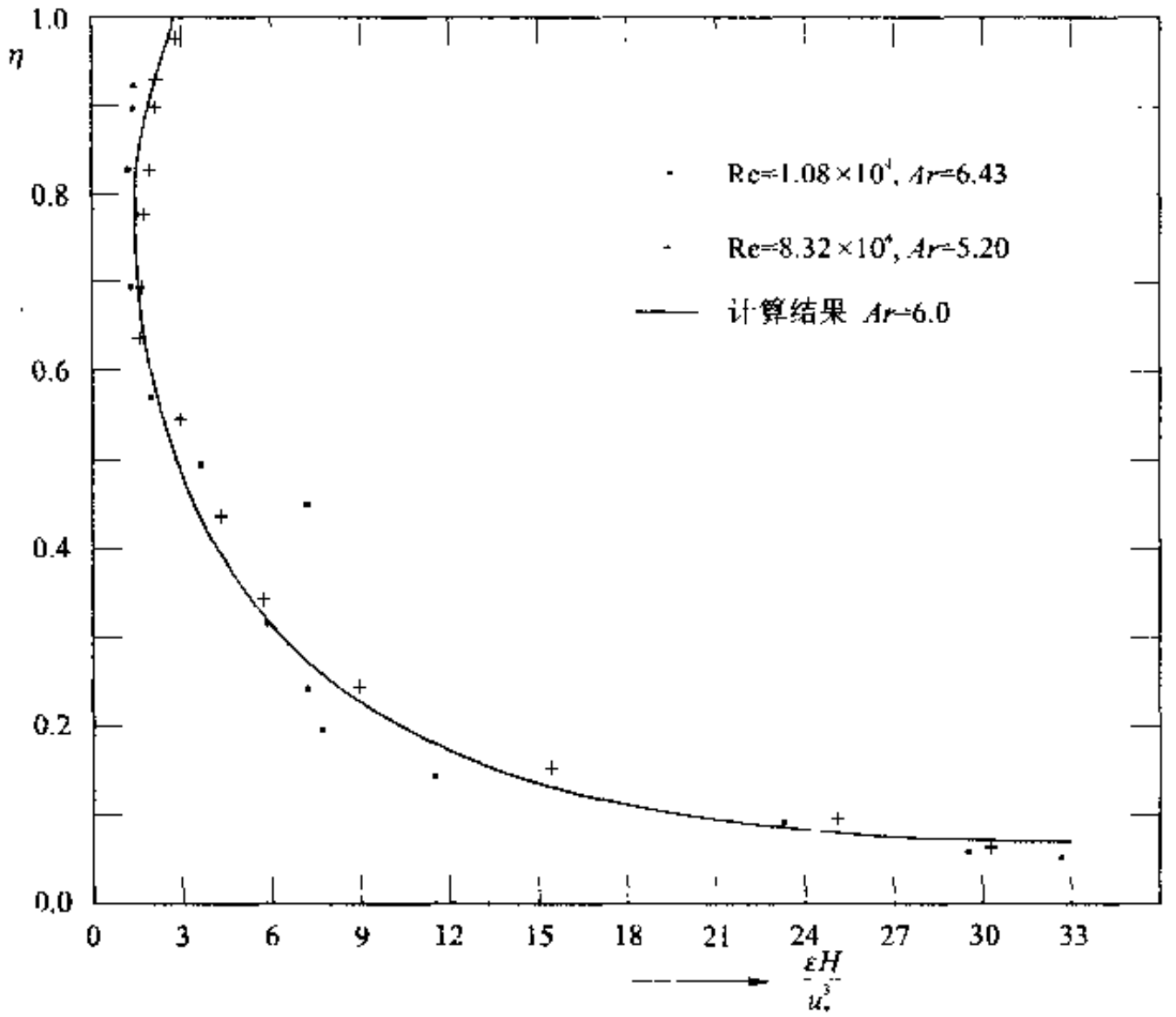


图7.8　湍动能耗散率ε分布图

§7.2　两相紊流方程及其模拟

实际工程中的掺气水流，挟沙水流具有两相紊流特性，下面给出两相紊流一般曲线坐标下的表达式及其模型方程，这对任意形状的流动区域，如河道水流、水工、环境、海洋等工程实际问题的计算是非常方便的。

7.2.1 两相混合流体基本方程

两相流体研究：一种是把流体与另一相（固体质颗粒或气泡）分开，分别建立流体和质点运动的方程，这样做需要考虑相间作用力，这方面另文叙述，另一种是混合流体模型把两相流作为一种混合流体连续介质来考虑。（朗道，1953；刘大有 1986 的文章）这就要重新定混合物的某些参数，如密度，速度，压强等，混合流体密度为

$$\rho=\rho_1(1-C)+\rho_2 C \tag{7.2.1}$$

其中 ρ_1 为水的密度，ρ_2 为沙或气的密度，C 为体积比浓度。

我们把混合流体速度定义为单位质量流体的总动量，即

$$u_i=\frac{(\rho_1(1-C)u_{1i}+\rho_2 C u_{2i})}{\rho} \tag{7.2.2}$$

式中 u_i 为混合流体（浑水）流速；u_{1i} 为水之流速；u_{2i} 为第二相物质质点流速。

变密流的不可压缩流体连续性方程张量形式为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho u^i)_{,i}=S_u \tag{7.2.3}$$

液体的密度 ρ 与压强 p、温度 T 的关系，不象气体那样有简单的状态方程，可用公式给出，在局部热平衡的假定下，液体的密度、压强与温度的关系为 $\rho=\rho(p,\ T)$，令 $\rho=\rho_0+\Delta\rho$，$p=p_0+\Delta p$，$T=T_0+\Delta T$，式中下标“0”为参考点上的值，则有

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0}=\beta_p\Delta p-\beta_T\Delta T \tag{7.2.4}$$

其中 $\beta_p=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial p}$，$\beta_T=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial T}$，$\beta_p$、$\beta_T$ 分别为液体体积压缩性系数和体积热膨胀系数，若 ρ_0 为常数，且密度相对变化很小，即 $\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\ll 1$，则密度可变的连续性方程，可简化为一般的不可压缩流连续性方程：

$$u^i_{,i}=0 \tag{7.2.5}$$

密度 $\rho(x^i,\ t)$ 变化的运动过程，可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i)+u^j(\rho u^i)_{,j}=\rho f^i+P^{ij}_{,j} \tag{7.2.6}$$

其中 f^i 为单位质量流体的质量力，P^{ij} 为应力张量的逆变分量。

变密度情况的质量力项可写作：$f^i=g^i+b^i$，其中浮力项 $b^i=\frac{\Delta\rho}{\rho_0}g^i$；按牛顿流体 $P_{ij}=(-p+\lambda u^k_{,k})g_{ij}+\mu(g^{ik}u^j_{,k}+g^{jk}u^i_{,k})$，从动水压强 p 中扣去静水压强，令 $P=p+\rho_0 g y$，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i)+u^j(\rho u^i)_{,j}=\rho b^i-g^{ij}P_{,j}+\mu g^{jk}u^i_{,jk} \tag{7.2.7}$$

此即张量形式的运动方程，其中空间导数为协变导数。

如果浓度 C 有变化，则浓度的对流扩散方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t}+(u^{i}C)_{,i}=g^{ij}(D_{c}C_{,ij}+S_{c}) \tag{7.2.8}$$

如果温度 T 变化，由温度所引起的热能变化关系为：

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(u^{i}T)_{,i}=g^{ij}(D_{t}T_{,j})_{,i}+\frac{K_{s}}{\rho C_{p}}(T-T_{a})+S_{t} \tag{7.2.9}$$

式中：D_c、D_t 分别为分子浓度、温度扩散系数，C_p 为定压比热，S_q、S_c、S_t 分别为流量源、浓度源、热源。K_s 为水面散热系数，T_a 为自然水温。

7.2.2 紊流方程

紊流中瞬时量 Φ^{*} 写为时均量 Φ 及脉动量 φ 之和，

$$\Phi^{*}=\Phi+\varphi$$

其中 Φ 包括流速、压强、温度、浓度、密度、应力，其表达式如下：

$$U_{i}^{*}=U_{i}+u_{i},\quad p^{*}=P+p,\quad T^{*}=T+\theta$$

$$C^{*}=C+C',\quad \rho^{*}=\rho+\rho',\quad \tau_{ij}^{*}=\tau_{ij}+\tau'_{ij}$$

假设 Navier - Stokes 方程为可用之于紊流，因此，紊流诸时均方程得之如下：

©：
$$\nabla_{i}U^{i}=0 \tag{7.2.10}$$

㊣：
$$\frac{\partial U^{i}}{\partial t}+U^{j}\nabla_{j}U^{i}=B^{i}-\frac{1}{\rho}g^{ij}P_{,j}+\nu g^{jk}\nabla_{j}\nabla_{k}U^{i}-\nabla_{j}(\overline{u^{i}u^{j}}) \tag{7.2.11}$$

式中∇_j为协变导数，下标，j"为普遍偏导数，U^i 为时均速度的逆变分量，上式与 $N-S$ 方程相比除了将瞬量换成时均量之外，多了一项雷诺应力项。雷诺应力方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(u^{i}u^{j})}+U^{l}\nabla_{l}\overline{(u^{i}u^{j})}+\overline{u^{i}u^{l}}\nabla_{l}U^{j}+\overline{u^{j}u^{l}}\nabla_{l}U^{i}+\nabla_{l}(\overline{u^{i}u^{j}u^{l}})$$

$$=-\nabla_{l}\left[g^{jl}\left(\frac{p}{\rho}u^{i}\right)+g^{il}\left(\frac{p}{\rho}u^{j}\right)\right]$$

$$+\nu g^{lm}\nabla_{m}(\nabla_{l}\overline{u^{i}u^{j}})+\frac{p}{\rho}(g^{jl}\nabla_{l}u^{i}+g^{il}\nabla_{l}u^{j})$$

$$+2\nu g^{lm}\overline{\nabla_{l}u^{i}\nabla_{m}u^{j}}-\beta_{l}(\overline{u^{i}\theta}g^{jl}+\overline{u^{j}\theta}g^{il}) \tag{7.2.12}$$

上式中的头两项为雷诺应力的物质导数，随后的两项表示了雷诺应力与时均应变率的乘积，为时均流速与脉动流速的联系，也是由时均量产生脉动量的项，三阶矩的协变导数为由紊流对流运动形式造成紊动应力的扩散项。右端第一项为压力脉动形成的紊流扩散项，它常和三阶速度关联组合在一起；右端第二项为雷诺应力分子扩散项，右端第三项，常叫应力应变项；

右端第四项为分子扩散将紊动能耗散为热能的部分；最后一项为浮力效应形成的速度脉动与温度脉动的关联项在密度变化的场合或浓度变化的场合，其中 θ 可以代换为 ρ' 或 C''，形成密度、浓度脉动与脉动速度的关联项。

如果我们令紊动能为

$$K=\frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}=\frac{1}{2}g_{ij}\overline{u^i'u^j'}$$

则紊动能 K 方程可以由雷诺应力方程 7.2.12 通过缩并指标而得到。

令
$$\varepsilon=\nu g^{lm}g_{ij}\overline{\nabla_l u^i'\nabla_m u^j'} \tag{7.2.13}$$

则可由 $g_{ij}g^{lm}\overline{\nabla_m u^i'\nabla_l m^{j'}}+\overline{\nabla_l u^{i'}\nabla_m m^{j'}}$ 得到 ε 方程，为了节省篇幅，这里对 K 方程，ε 方程不再推导，可参看有关文献，其中方程中会多出一些与温度或浓度、密度脉动有关的新项，因此，应该补充一些与之有关的新的偏微分方程。

脉动温度 θ 所满足的方程可以由瞬时热能方程减去时均热能方程得到。

由此我们又多了一个 $\overline{\theta^2}$ 新的未知量，由⑧方程可以推求到 $2\overline{\theta}\times\overline{\theta}$ 方程，其中出现的 $\varepsilon_\theta=D_t g^{ij}\overline{\nabla_i\theta}\overline{\nabla_j\theta}$ 类似于 ε 是热能耗散，它可以由⑧方程取协变导数并相乘得到。

对于浮力紊流，又有 $\overline{\theta^2}$ 与 ε_θ 两个新方程，而 $\overline{\theta^2}$ 出现在 $\overline{u'\theta'}$ 方程中，ε_θ 仅仅与 θ^2 方程有关，我们希望 ε_θ 在决定 U、P、T 时是不太重要的角色，$\overline{u'\theta}$ 出现在雷诺应力方程与 K 方程中，说明流体动量传输与热量传输有关，即流速与温度或浓度的计算需要联解。

7.2.3 紊流模型方程

为了封闭时均紊流方程曾做过不少假定，归纳起来有以下几点原则：

①时均动量方程与能量方程可用于紊流。

②紊流传输 φ 与其时均量 Φ 的梯度成正比。

③小涡各向同性，对于各向异性亦可推广之。

④所有紊动传输量如 $\overline{u'u'}$、$\overline{u'\theta}$、K、ε、$\overline{\theta^2}$、ε_θ 等，是 U_i、P、T、ρ、ν、D_t 或 D_c 的函数。

⑤模拟紊流量必须考虑到对称性、守恒性。

⑥大涡尺度与 K、ε 有关，特征速度 $u=\sqrt{K}$，特征长度 $l=\frac{K^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}$，特征时间 $t=\frac{k}{\varepsilon}$，小涡尺度与 ε、ν 有关，$u=(\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}}$，$l=\left(\nu\frac{3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$，$t=\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$。

⑦模型常数由试验来定。

对于雷诺应力做过不少假定，经典的涡粘性 (Boussinesq) 假定，认为雷诺应力与粘性应力类似，与时均变形率成线性关系，即

$$-\overline{u^i u^j}=\nu_t(g^{jl}\nabla_l u^i+g^{im}\nabla_m U^j)-\frac{2}{3}g^{ij}K=-R^{ij} \tag{7.2.14}$$

式中 ν_t 为各向同性涡粘性系数，它不仅与流体物理性质有关，更主要的是与当地流动条件有关，是一个场变量。

脉动温度与脉动浓度与脉动流速的关联可以仿照脉动速度的想法写出它们与时均温度或时均浓度梯度的关系，即

$$-\overline{u'\theta}=D_T g^{ij}\nabla_j T,\qquad -\overline{u'C'}=D_C g^{ij}\nabla_j C \tag{7.2.15}$$

在 $k-\varepsilon$ 模型中，按量纲分析可以得涡粘性系数与紊动动能 K 及其耗散率 ε 有关，即

$$\nu_t=\frac{C_\mu K^2}{\varepsilon} \tag{7.2.16}$$

其中 C_μ 为常数。

为了封闭以上的紊流基本方程组，需要对各方程进行模型化，在紊流模型的推导中最为常用的是，用最基本的最低阶关联项的梯度去表征高阶关联项，这是一种假说，它是有一定条件的，但它在现阶段仍不失为工程处理紊流问题的一种可行办法，虽然它还存在着对紊运动描述的一些根本性缺点。

最后，我们得到的由温度或浓度变化引起的，考虑浮力效应的变密度雷诺应力模型方程：

$$\frac{D(R^{ij})}{Dt}=\nabla_l\left[\left(C_\mu\frac{K^2}{\varepsilon}+\nu\right)g^{lm}\nabla_m R^{ij}\right]+G^{ij}-\frac{2}{3}g^{ij}\varepsilon$$

$$-C_1\frac{\varepsilon}{K}\left(R^{ij}-\frac{2}{3}g^{ij}K\right)-C_2\left(G^{ij}-\frac{2}{3}g^{ij}P_k\right)+B^{ij}-C_3\left(B^{ij}-\frac{2}{3}g^{ij}B_k\right) \tag{7.2.17}$$

式中

$$G^{ij}=-(\overline{u^i u^m}\nabla_m U^j+\overline{u^j u^m}\nabla_m U^i);$$

$$P_k=g_{mk}\nabla_m U^m\overline{u^m u^k};$$

$$B_{ij}=-\beta_T(g^i\overline{u^j\theta}+g^j\overline{u^i\theta});$$

$$B_k=-\beta_T g_{ij}\overline{u^i\theta}g^j$$

最后两项为浮力效应项，是由温度差或浓度差与流速脉动引起的。

对雷诺方程中指标 $i=j$ 进行缩并之后，可以得到 K 方程的模型方程。

$$\frac{DK}{Dt}=\nabla_l\left[\left(C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}+\nu\right)g^{lm}\nabla_m K\right]+P_k-\varepsilon+B_k \tag{7.2.18}$$

其中 P_k、B_k、ε 均为标量，P_k 为时均流梯度对脉动运动所作的功，B_k 为浮力功，ε 为紊动能耗散。因此 k 方程与 ε 方程有联系两者需联解。

ε 方程包含了许多未知量，这些未知量能否简单地表示为低阶关联的函数是模化 ε 方程的关键，也是计算精度之所在。与 k 方程类似，ε 方程也有扩散项、产生项、耗散项、毁灭项、浮力项。类似于 k 方程

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=\nabla_l\left[\left(C_\varepsilon\left[\frac{l^2}{t}\right]+\nu\right)g^{lm}\nabla_m\varepsilon\right]+C_{\varepsilon1}\left[\frac{1}{t}\right]P_k+C_{\varepsilon3}\left[\frac{1}{t}\right]B_k-C_{\varepsilon2}\left[\frac{1}{t}\right]\varepsilon \tag{7.2.19}$$

其中 $\left[\frac{l^2}{t}\right]$ 与 $\left[\frac{l}{t}\right]$ 只是说明它们的量纲关系，l, t 为特性长度与特性时间。

在能量保持方面，大涡起主要作用，特征量应由主要物理量 (k, ε) 决定。

$$[u]=[\sqrt{k}],\ [l]=\left[\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}\right],\ [t]=\left[\frac{k}{\varepsilon}\right] \tag{7.2.20}$$

在能量耗散方面，小涡起主要作用，特征量应由主要物理量 $(\nu,\ \varepsilon)$ 决定。

$$[u]=[\nu\varepsilon]^{\frac{1}{4}},\ [l]=\left[\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{4}},\ [t]=\left[\frac{\nu}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.2.21}$$

对大涡，小涡分别采用不同的尺度，这就是所谓双尺度紊流模型，否则为单尺度模型。

大涡尺度 $(k,\ \varepsilon)$ 以 $\left[\frac{l^2}{t}\right]=k^2/\varepsilon,\ \left[\frac{1}{t}\right]=\varepsilon/k$，代入后有

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=\nabla_l\left[\left(C_\varepsilon\frac{k^2}{\varepsilon}+\nu\right)g^{lm}\nabla_m\varepsilon\right]+C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}P_k+C_{\varepsilon3}\frac{\varepsilon}{k}B_k-C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{7.2.22}$$

小涡尺度 $(\nu,\ \varepsilon)$，紊流粘性能耗散项中 $\left[\frac{l}{t}\right]=\frac{\varepsilon}{\nu}$ 代入

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=D_l\left[\left(C_\varepsilon\frac{k^2}{\varepsilon}+\nu\right)g^{lm}\nabla_m\varepsilon\right]+C'_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{\nu}P_k-C'_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon}{\nu}\varepsilon+C_{\varepsilon3}\frac{\varepsilon}{k}B_k$$

$\overline{u'\theta}$，$\overline{\theta^2}$，ε_θ 方程的模型化推导过程，这里不再详述。

以上各方程中的紊流模型常数分列如下：

$$C_\mu=0.09,\ C_\varepsilon=0.07,\ C_{\mu'}=0.13,\ C_l=0.07,$$

$$C_1=1.8\sim2.8,\ C_{\varepsilon1}=1.44,\ C_\theta=?\ (0.1),\ C_{l1}=3.2\ \mathrm{m},$$

$$C_2=0.4\sim0.6,\ C_{\varepsilon2}=1.92,\ C_{\theta1}=?\ (2.5),\ C_{l2}=0.5,$$

$$C_3=0.3\sim0.5,\ C_{\varepsilon3}=1.4\sim2.0,\ C_{\theta2}=2.5,\ C_{l3}=0.5,$$

$$C'_1=2.00,\ C'_{\varepsilon1}=17.5(R_e)^{-\frac{1}{2}},\ C'_{\varepsilon2}=18.9(R_e)^{-\frac{1}{2}},$$

由以上数据可见，这些模型常数本来应当是固定的常数，事实上由于紊流模型的不完善而不能普遍适用，只是对某种流动可靠些另种流动则不一定精确可靠，而有不少常数由于试验困难与测量精度有误差而在一定范围内变化，上述紊流各项模式化也不尽合理准确，这都是有待改进的地方。

对上述对流扩散方程解，采用有限分析法，我们对三维有限分析系数进行了研究与改进，对 27 点格式可以计算斜迎风情况，并适应于高、中、低雷诺数范围，$R_e=0\sim2\times10^6$ 能很好地保持其自动迎风性质。

我们用此方法计算过沉井下沉过程中三维局部冲刷坑，以及三峡电站进水口的单孔、双孔方案比较。

这里给出一般曲线坐标，张量形式的变密度两相混合流体紊流模型方程及数值预测方法。

所给出的雷诺应力 R'' 方程、k 方程、ε 方程等模型化方程组成了封闭的方程组，它考虑了由于温度或浓度变化所引起的变密度混合紊流情况，这可以用来计算有浮力效应的紊流扩

散问题，在有横流的底部排污，及河岸淹没射流，挑流掺气，沉井下沉过程中局部河床变形冲刷坑的数值解中得到有效地应用。

§7.3 溢流面紊流边界层数值分析

边界层在电子计算机未出现之前，曾出现过大量的简化和近似的计算方法，以确定实际形体，如飞机、轮船的表面阻力。在有了电子计算机之后，就有可能直接求解流体力学的偏微分方程，边界层方程属于抛物线型，可以在区域内单向（单通道坐标）推求，在边界层厚度 δ 方向，最好做一变换将 δ 变为 0~1。

溢流坝面边界层多为紊流，它对水利工程有重要应用，我们以此为实例。

7.3.1 紊流边界层方程和边界条件

带自由面的溢流面上的水流可分为两个部分：外势流和靠近固壁的边界层，见图 7.9。

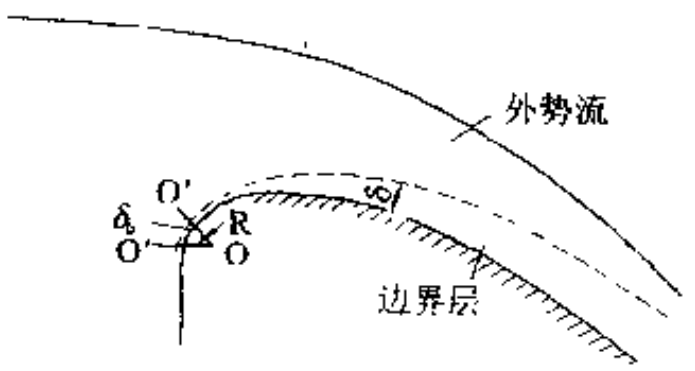


图7.9 溢流示意图

溢流面上的二维和三维势流数值模拟，我们曾用有限元法和边界元法成功的求解。势流解给出紊流边界层的外边界条件。

曲面边界层受到曲率的影响，采用 x, y 为边界层坐标，则 x 方向的拉梅系数 $H_1=\dfrac{(R+y)}{R}$，y 方向的拉梅系数 H_2 仍为 1。如果曲率半径 R 不是很大 $(R=O(1))$，也不是很小 $(R=O(\delta))$ 时，曲面紊流边界层方程可得之如下：

连续性方程

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{7.3.1}$$

动量方程

$$\begin{cases}\lambda u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'})+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+g\sin\alpha-\dfrac{\lambda}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x},\\ \dfrac{u^2}{(R+y)}=\dfrac{\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)}{\rho},\end{cases} \tag{7.3.2}$$

式中 u、v 分别代表 x、y 方向的时均速度；u'、v' 代表 x、y 方向的脉动速度；ν 为运动粘性系数；p为当地压强；ρ 为密度；α 为流线与水平方向夹角；$\lambda=\dfrac{R}{(R+y)}\approx\dfrac{1}{H_1}$。

雷诺应力的求取，采用布辛尼斯克假定。对一般情况的各向异性紊流，公式应为

$$-\overline{u_i'u_j'}=(\nu_t)_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)-(KS_{ij})\frac{2}{3}$$

虽然坝面流场紊流边界层可能具有各向异性性质，但目前尚无实测资料可供使用，这里仍采用简单的假定：

$$-\overline{u'v'}=\nu_t\frac{\partial u}{\partial y} \tag{7.3.3}$$

采用 $k-\varepsilon$ 二方程模型

$$\nu_t=\frac{C_D k^2}{\varepsilon} \tag{7.3.4}$$

k 方程：

$$\lambda u\frac{\partial k}{\partial x}+\nu\frac{\partial k}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial y}+(-\overline{u'v'})\frac{\partial u}{\partial y}-\varepsilon \tag{7.3.5}$$

ε 方程：

$$\lambda u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+\nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_t}+\nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}+C_1\frac{\varepsilon}{k}(-\overline{u'v'})\frac{\partial u}{\partial y}-C_2\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{7.3.6}$$

这里 C_D、C_1、C_2 为紊流模型中的常数，$\sigma_k=\frac{\nu_t}{\nu_k}$ 和 $\sigma_t=\frac{\nu_t}{\nu_t}$ 分别代表紊动动能和紊动耗散的普朗特数。比较式 (7.3.2)、(7.3.5)、(7.3.6)，可以得到统一的表达形式。

$$\lambda u\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\nu\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\Phi}+\nu\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]+S_\Phi \tag{7.3.7}$$

将式 (7.3.7) 中的源项 S_Φ 及所应用的常数列入表 7.1 中。

表7.1

ϕ	σ_ϕ	S_ϕ	常　数
u	1	$S_u=g\sin\alpha-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$	$C_D=0.09$
k	1.0	$S_k=C_1\left(\frac{k^2}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\varepsilon$	$C_1=1.43$
ε	1.3	$S_\varepsilon=\frac{\left[C_1C_1\left(\frac{k^2}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-C_2\varepsilon\right]\varepsilon}{k}$	$C_2=1.92$

因为方程 (7.3.7) 为抛物型方程，可以从上游向下游逐个断面求解，求解只需三组边界条件。

首先是上游起始断面的边界条件，须给出初始边界层厚度 δ_0，它可用粘性流动的驻点法求得或根据经验公式或实测值给定。

其次是与外势流相衔接的边界层外边界条件。如果 u_t 是势流流速，则有

$$y=\delta \text{ 或 } y=H \text{ 时，} u=u_t,\ k=0,\ \varepsilon=0 \tag{7.3.8}$$

其中势流流速 u_t 是以坝面为边界，用有限元法解外势流流场得到的，其中已计及曲线型边界离心惯性力作用 (即式 (7.3.2′) 的作用)，而未考虑粘性及紊动影响，它作为方程 (7.3.2) 计算时的外边界，在边界层计算与 (7.3.2) 反复迭代求解，而在 $y=\delta$ 或 H 时，初始迭代中令 k 与 ε 均为零，未考虑自由紊流存在，这一作法是近似的。

最后是内边界，即壁面条件

$$y=0,\ u=0,\ k=0,\ \varepsilon=0 \tag{7.3.9}$$

由于本算法采用的基本方程是紊流边界层方程，它不适合于层流底层的求解。所以采用边壁函数处理内边界，假定速度满足对数公式

$$\frac{u}{u_t}=\frac{1}{\kappa_t}\ln\left(\frac{F u_t y}{\nu}\right) \tag{7.3.10}$$

式中：$\kappa_t=0.42$，$F=9.97$，u_t 为摩阻流速。

式 (7.3.10) 中含有两个未知数 u 和 u_t，采用迭代求解。同时假设壁面附近存在下面的关系：

$$\kappa=\frac{u_t^2}{\sqrt{c_D}} \tag{7.3.11}$$

$$\varepsilon=\frac{u_t^3}{(k y)} \tag{7.3.12}$$

对初始断面流速分布作以下假定：

$$\frac{u}{u_t}=\left(\frac{y}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{7.3.13}$$

式中：$n=\dfrac{\Psi_{s0}}{(u_t\,\delta_0-\Psi_{s0})}$

$$k_0=\frac{u_t^2\left(1-\dfrac{y}{\delta_0}\right)}{\sqrt{C_D}} \tag{7.3.14}$$

$$\varepsilon_0=C_D^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{k_0^{\frac{3}{2}}}{l}, \tag{7.3.15}$$

而

$$\begin{cases}\text{当 } 0<y<0.214\,\delta_0\text{时，}\ l=0.42\,y\\ \text{当 } y\geq 0.214\,\delta_0\text{时，}\ l=0.09\,\delta_0\end{cases} \tag{7.3.16}$$

7.3.2 坐标变换和微分方程离散

边界层区域形状是逐渐发展的不规则的带状区域，通过坐标变换把它变成规则的矩形区域，便于进行计算。

令

$$\omega=\frac{(\Psi-\Psi_0)}{(\Psi_s-\Psi_0)}, \tag{7.3.17}$$

式中 Ψ_s 是边界层内单宽流量，而 Ψ_0 是边壁流函数，本问题取 $\Psi_0=0$，则 $\omega=\dfrac{\Psi}{\Psi_s}$，因而可知，$\omega=0\sim1$。由自变量为 x，y 变换为 x 与 ω (或理解为 x 与流函数 Ψ)，从而发展的不规则的边界区域变成了一个矩形计算区域。令

$$m=\frac{-\partial\Psi_s}{\partial x}, \tag{7.3.18}$$

且有

$$u=\frac{\partial \Psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{7.3.19}$$

考虑在大雷诺情况下，$v \ll v_t$，从而式 (7.3.7) 变换得

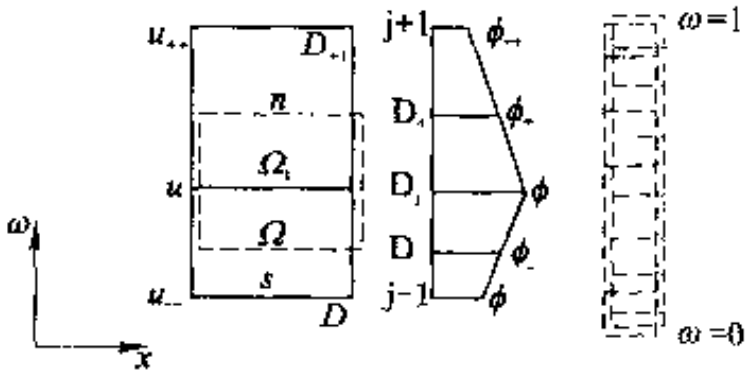
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+b\omega\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}=\frac{\partial}{\partial \omega}\left(c\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}\right)+S'_{\Phi} \tag{7.3.20}$$

式中 $b=\frac{m_c}{\Psi_c}$；$c=\frac{v_t u}{(\sigma_\Phi \Psi_c^2)}$。

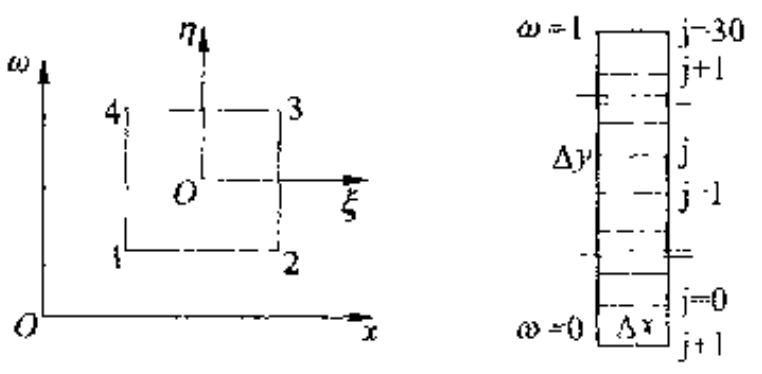
下面讨论使方程 (7.3.20) 离散化的方法。

7.3.2.1 有限控制体积法

由于计算区域已经变成矩形区域，可以很便利的利用差分格式进行计算，如图 7.10 所示的离散网格采用有限控制体积法进行数学离散。



(a)有限容积法



(b)有限元法

图7.10　离散网格示意图

令

$$\begin{cases}\Phi_n=\Phi_D+\dfrac{\omega-\omega_D}{\Delta\omega}(\Phi_{++}-\Phi_D)\\ \Phi_s=\Phi_D+\dfrac{\omega-\omega_D}{\Delta\omega}(\Phi_D-\Phi_{--})\end{cases} \tag{7.3.21}$$

可以得到代数方程

$$A\Phi_D+B\Phi_{D++}+c\Phi_{--}=D, \tag{7.3.22}$$

式中

$$A=\Delta\omega+\frac{\Delta x}{\Delta\omega}(c_N+C_s)-\frac{b}{4}\Delta x\Delta\omega;$$

$$B=-\frac{\Delta x}{\Delta\omega}c_N+\frac{b}{2}\omega_D\Delta x+\frac{b}{8}\Delta x\Delta\omega;$$

$$C=-\frac{\Delta x}{\Delta\omega}c_s-\frac{b}{2}\omega_D\Delta x+\frac{b}{8}\Delta x\Delta\omega;$$

$$D=S'_{\Phi}=\Delta\omega\Phi$$

方程 (7.3.22) 是三对角的，其系数是 Φ 及 Φ 的导数之函数，求解此方程时需要迭代求解，而

Φ 的导数采用上风格式给出。

7.3.2.2　有限元法

为了和有限控制体积法的结果进行比较，也采用了有限元法。由于变换后的计算区域是矩形的规则区域，所以采用矩形线性四点等参单元。单元中变量 Φ 可表示为：

$$\Phi = N_m \Phi_m, \quad m = 1, 2, 3, 4; \tag{7.3.23}$$

插值基函数为

$$N_m = \frac{(1+\xi_m \xi)(1+\eta_m \eta)}{4} \tag{7.3.24}$$

其中 ξ_m，η_m 是结点坐标。

如果将方程 (7.3.20) 写成微分算子的形式，$L(\Phi)=0$，那么，可采用加权余量法，

令

$$\int_A L(\Phi) N_i \, dA = 0 \tag{7.3.25}$$

对每一个单元均可获得下面的算式

$$A_{ij} \Phi_i + B_{ij} \Phi_i = c_{ij} \Phi_i + D_{ij} \Phi_i + (s_\omega)_i, \tag{7.3.26}$$

式中

$$A_{ij} = \int_A \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \, dA; \qquad B_{ij} = \int_A b\omega \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \, dA;$$

$$C_{ij} = -\int_A \frac{\partial N_i}{\partial \omega} \frac{\partial N_j}{\partial \omega} dA; \qquad D_{ij} = \int_\Gamma c \frac{\partial N_i}{\partial \omega} N_j n_\omega \, d\Gamma$$

对所有单元合并，得内点方程

$$BE(j,1)\Phi_{i-1} + BE(j,2)\Phi_i + BE(j,3)\Phi_{i+1}$$

$$= BE(j,4)\Phi_{i+1} + BE(j,5)\Phi_i^{-1} + BE(j,6)\Phi_{i+1} + \bar{S}_\omega \tag{7.3.27}$$

这里 Φ_i 是 i 断面 j 号结点上的 Φ 值，因为 $i-1$ 号断面上的 Φ 值已知，所以方程 (7.3.27) 是三对角的，只要给出合理的边界条件，方程便可求解。

在计算中还有两点值得提及的是，在边界层外边界上，由于 $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}=0$，那么，从方程 (7.3.20) 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = S_N \tag{7.3.28}$$

因此有

$$b = \frac{\left(\frac{c\,\partial u}{\partial \omega}\right)_i - \left(\frac{c\,\partial u}{\partial \omega}\right)_{NI}}{u_I - u_{NI}} \tag{7.3.29}$$

这里 E 是边界点，NE 是靠近边界的内点，不难得出

$$\Psi_B = (1 - b\Delta_i)\Psi_I \tag{7.3.30}$$

式中 Ψ_0 是计算断面上的边界层内单宽流量，Ψ_1 是上游临近断面的流量。

为了保证迭代的收敛性，对源项进行线性化处理，令

$$S_\phi = S_{c\phi} + S_{p\phi}\,\Phi, \tag{7.3.31}$$

这里

$$S_{c\phi} > 0,\quad S_{p\phi} < 0,$$

源项处理后的表达式列于表 7.2 中，带“*”的项表示上一次的迭代值，以确保方程 7.3.22 和 (7.3.27) 的系数为正值，$\frac{\partial p_*}{\partial x}$ 为原坐标系中的值，见表 7.2。

表 7.2

ϕ	$S_{c\phi}$	$S_{p\phi}$	条 件
u	$\left(\frac{g\sin\alpha - \partial P^*}{\rho\,\partial x}\right)\frac{}{u_*}$	0	$\frac{\partial p_*}{\partial x} < 0$
	$\frac{g\sin\alpha}{u_*}$	$-1\frac{\rho\partial^*}{\partial x}\frac{}{u_*}$	$\frac{\partial p_*}{\partial x} \geqslant 0$
k	$C_D\left(\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon_*}\right)\left(\frac{\partial u_*}{\partial \omega}\right)^2\left(\frac{u_*}{\psi_0^2}\right)$	$-\frac{\varepsilon_*}{(u_* k_*)}$	
ε	$C_1 C_D k_*\left(\frac{\partial u_*}{\partial \omega}\right)^3\left(\frac{u_*}{\psi_0^2}\right)$	$-\frac{C_2\varepsilon}{(k_* u_*)}$	

边界层厚度的计算公式是

$$\delta = \int_0^\delta dy = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{2\,\Psi_i\,\Delta\omega}{(u_i + u_{i-1})} \tag{7.3.32}$$

这里 m 是计算断面上的网格点的总数。

对 $y=0\sim\delta$，$\omega=0\sim1$，均匀分布 $m=31$ 个点，为简单起见，只考虑将边界层厚度方向放大，采用单一的壁函数关系，未考虑边界层内、外区分层模式。

x 方向的断面间距影响 Ψ_0 和压力梯度的计算精度，宜取 $x=(0.2-1.0)\,\delta_0$，δ_0 是距起始断面距离为 x 处的边界层厚度。

7.3.3 计算结果

本节中采用了两个实际算例，其一是坡角为 40°的陡坡，其单宽泄量 $q=34.41$ L/s·dm，初始水深 $H=9.94$ cm，初始边界层厚度 $\delta_0=0.9$ cm；另一个算例是我国东江坝的水力学模型，如图 7.13 所示，泄流量 $q=38.61$ L/s·dm，坝上水头为 46 cm。

计算步骤如下：①给定初始条件；②求方程 (7.3.22) 或 (7.3.27) 的系数；③用方程 (7.3.22) 或 (7.3.27) 求边界层中有关变量 Φ；④求边界层厚度 δ；⑤检查迭代结果，如果达到给定精度要求，则转入下一步计算，若不满足要求，则回到步骤②，重复②到⑤各步；⑥转入该断面上最终计算结果，如果是最后一个断面，则终止计算；⑦将本次循环求得的该断面作为下一个断面的上游断面，然后回到步骤②，重复循环。

陡坡面的流动计算结果和试验结果比较见图 7.11 和图 7.12，东江坝的比较结果如图 7.15 到图 7.17 所示。

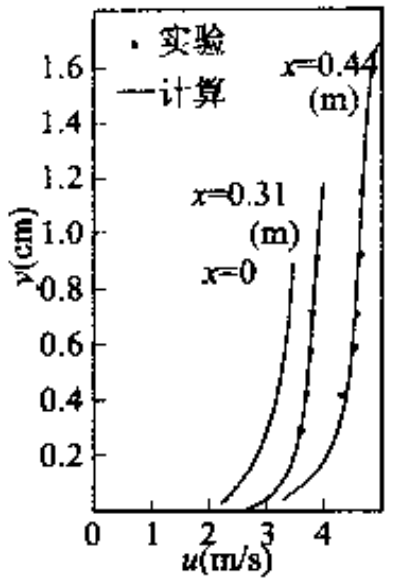


图7.11　陡坡流动速度分布

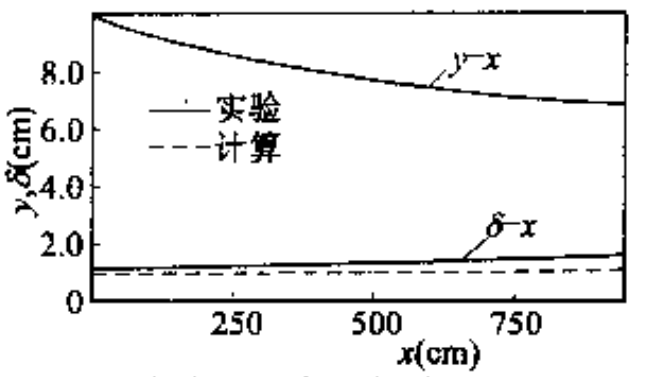


图7.12　陡坡流动水深与边界层厚度发展

NO	1#	2#	3#	4#	5#	6#	7#	8#
δ	40.2	56.0	65.9	148.9	229.9	282	307	329

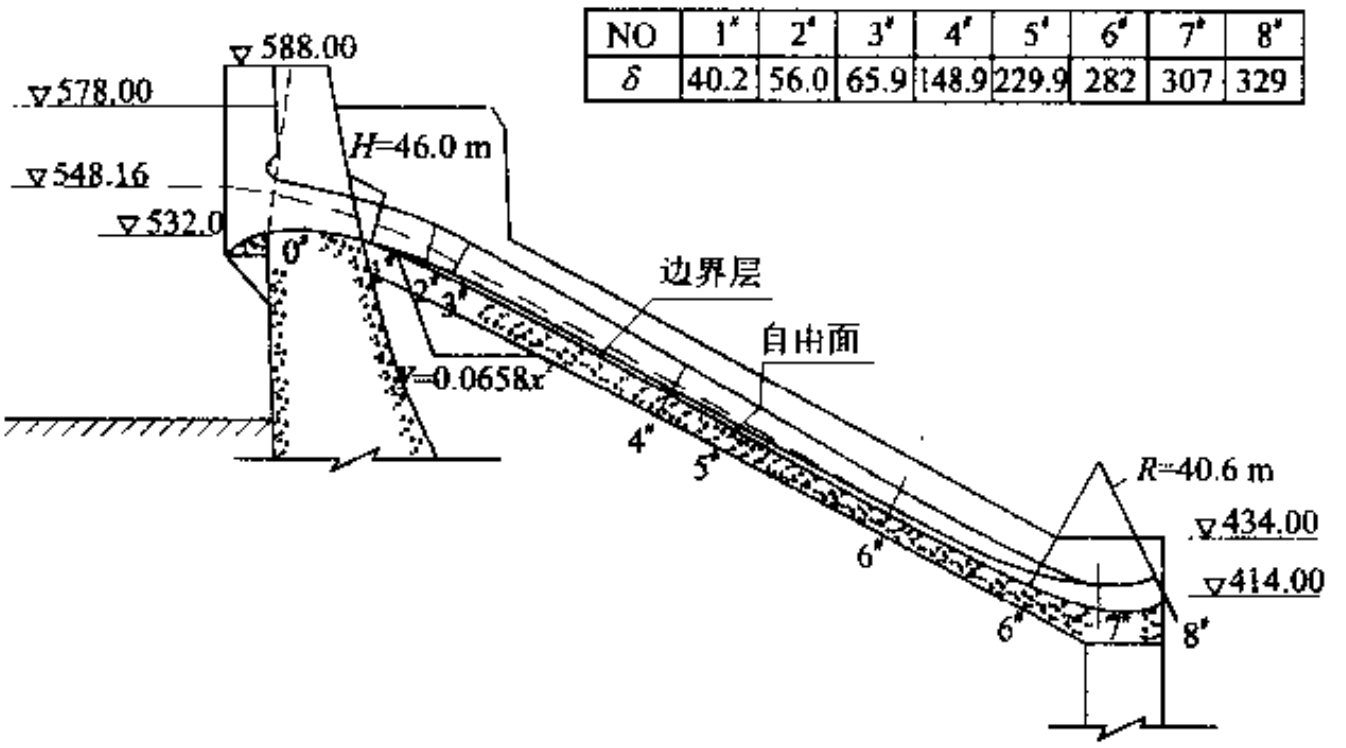


图7.13　东江溢流坝示意图

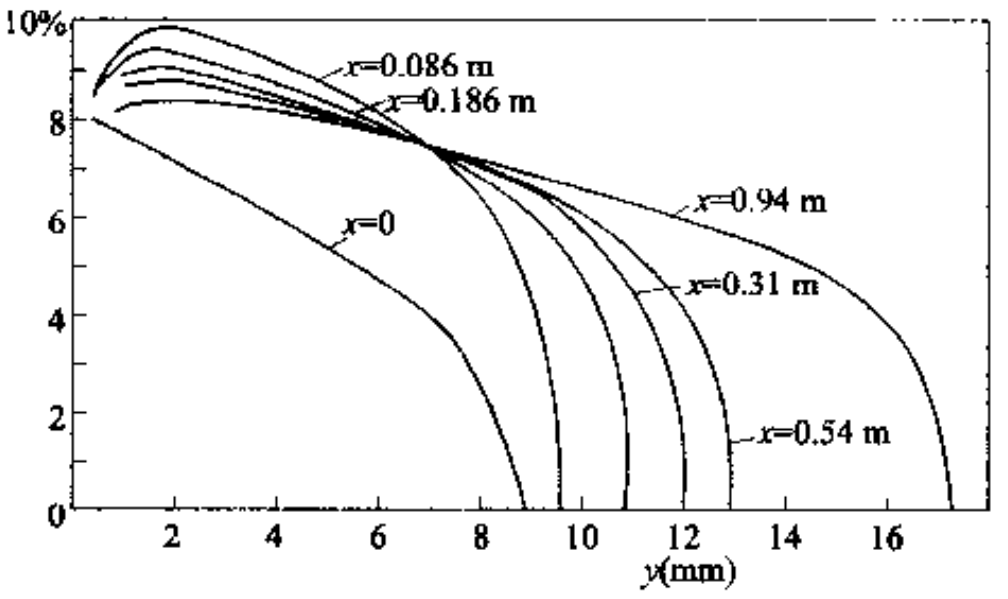


图7.14　紊动动能k分布

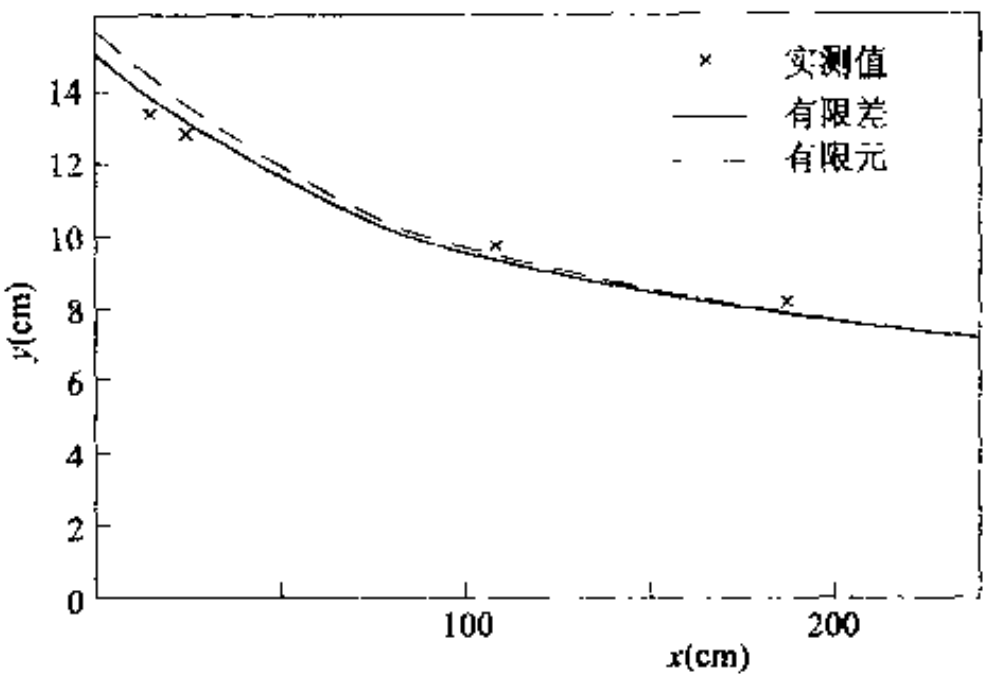


图7.15　自由表面沿程变化

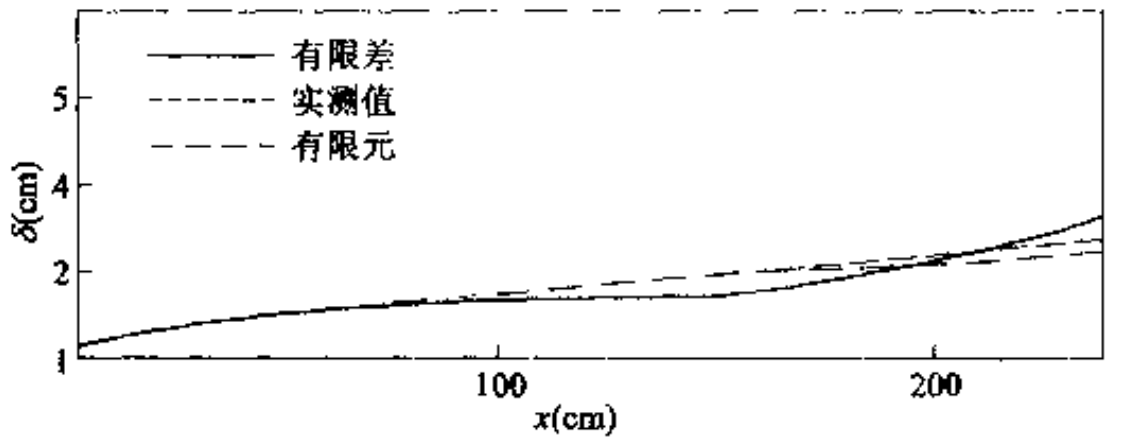


图7.16　边界层厚发展

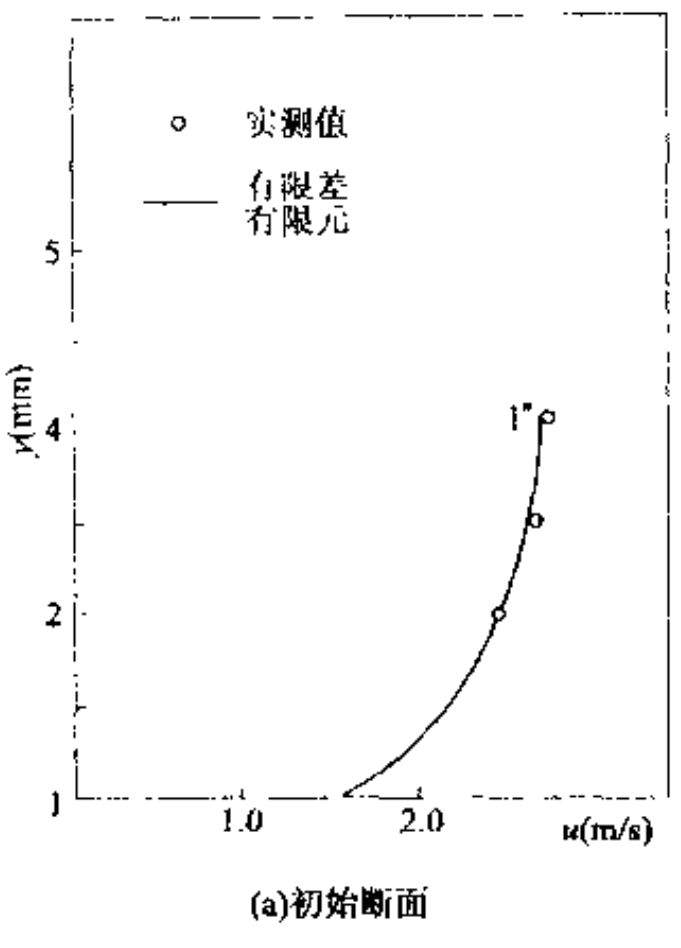
计算所得的速度分布不论是有限差分法或是有限元法，在各个断面的速度分布都和实测值很接近。有限元法较有限差分法结果略偏小。试验值与计算值相比除 5' 断面外稍偏大。初始断面上 k 值给定不同的形式对流速 u 的分布影响很小。一些计算表明，k 值虽和实测值有一定的差距，而速度分布却很接近。

沿 x 方向若干断面上的紊动动能分布的计算结果见图 7.14，其最大值在靠近壁面附近。

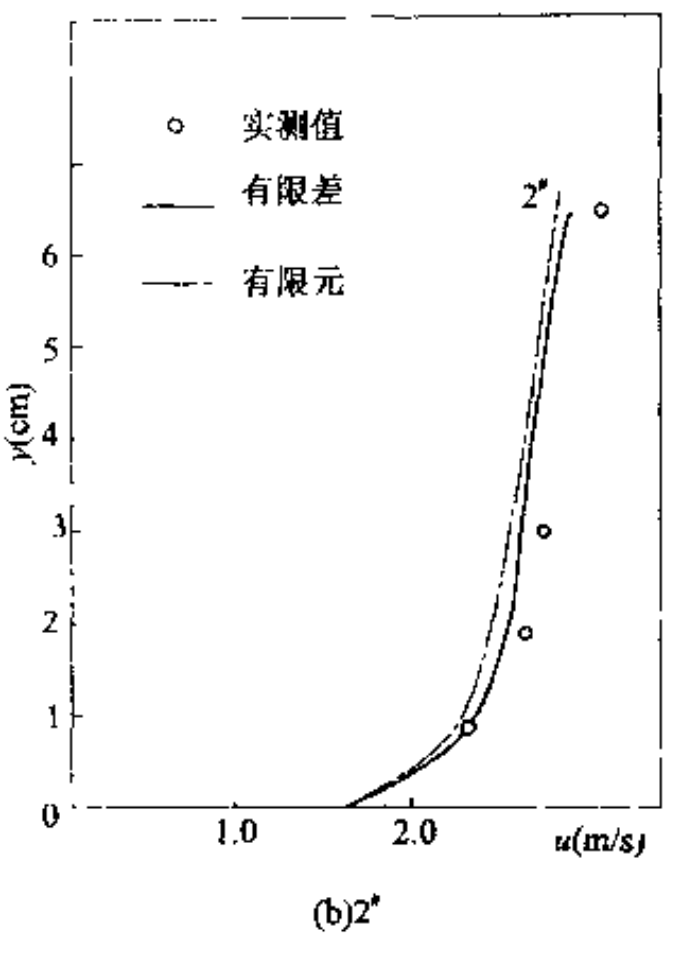
对于东江溢流坝，分别将坝面按曲面和近似平面进行了计算，其边界层厚度 δ 和水深 H 的差值，在若干断面上的计算结果与实测结果比较，列于表 7.3 中，结果表明二者很接近，与实测值比较，最大相对误差为：δ 是 11%，H 是 6.62%。

表 7.3

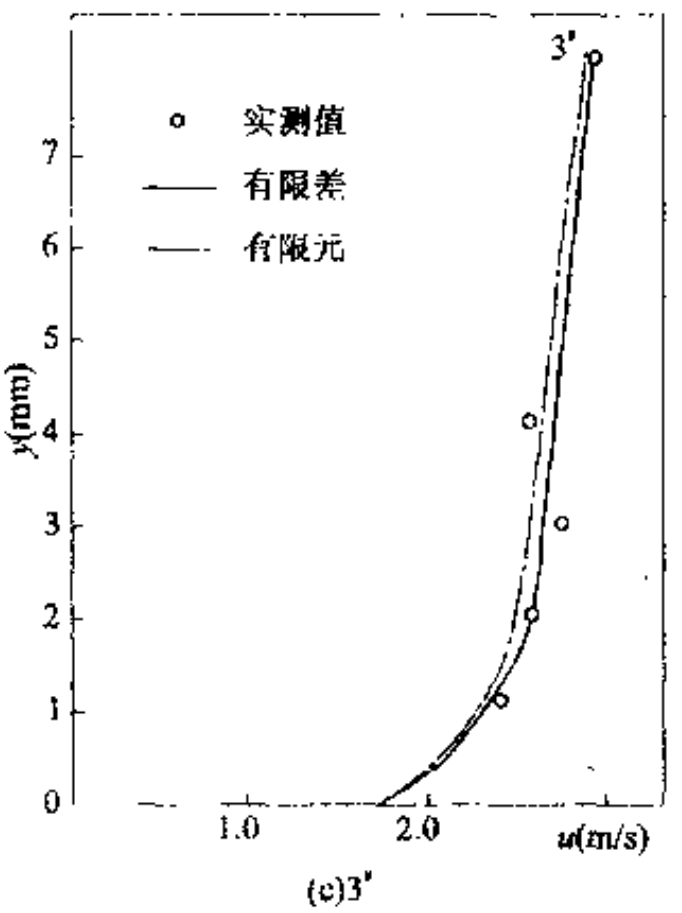
断面号	边界层厚度 δ (cm)					水　深　H　(cm)				
	试验	计　算		相对差 %		试验	计　算		相对差 %	
		平面	曲面	平面	曲面		平面	曲面	平面	曲面
2'	0.6	0.648	0.649	7.92	8.25	13.30	14.18	14.12	6.62	6.17
3'	0.9	0.801	0.804	−11.2	−10.69	12.75	13.40	13.35	5.10	4.71
4'	1.5	1.650	1.654	10.0	10.3	9.70	9.50	9.49	−2.06	−2.16
5'	2.2	2.393	2.389	8.77	9.00	8.10	7.94	7.93	−1.98	−2.10



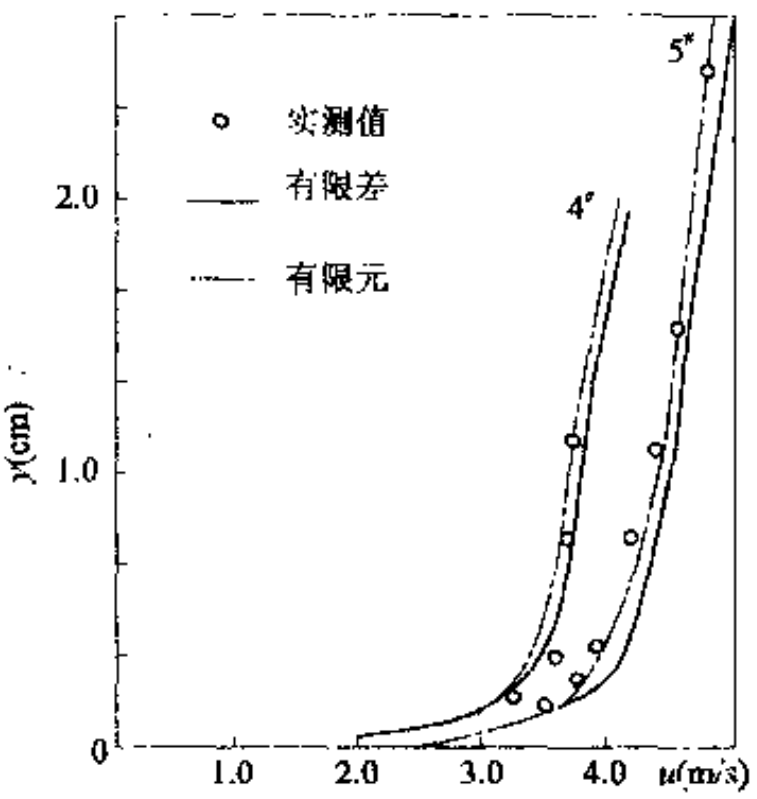
(a)初始断面



(b)2"



(c)3"



(d)4",5"

图7.17　各断面速度分布

边界层厚度沿着溢流坝面是逐渐发展的，由上游至下游边界层厚度逐渐加大，由 2" 断面的 $\frac{\delta}{H}$=0.105 至 5" 断面 $\frac{\delta}{H}$=0.300。

图 7.17 中所给的边界层厚度 δ 的计算结果，不论用差分法或者有限元法两者均很接近。只在 x>200 cm 以后偏差增大，此时边界层进入反弧段，曲率半径 R 影响显著增强所致。此时边界层厚度 δ 也发展较快，$\frac{\delta}{R}=\frac{2.8}{49.7}$=0.056。而按有些资料估计 $\frac{\delta}{R}\approx 0.02$ 将带来较大误差。即部分计及曲率影响的式 (7.3.1)，(7.3.2) 及 (7.3.7) 将不够准确。

本节采用 $k-\varepsilon$ 二方程模型求解溢流面上陡坡段紊流边界层，计算结果表明是成功的，模

型中所采用的边界层及势流的整体迭代以及边壁函数是合适的。坐标变换的方法是有效可行的。

在两个算例中，计算了若干断面的流速分布 u，紊动动能 k，边界层厚度 δ 及水深 H 的变化，除紊动动能 k 无实测资料外，其它物理量的计算值都和实测值符合良好。

采用有限元法和有限差分（控制体积法）分别对本问题进行了计算比较，两种方法的计算结果很接近，但有限元法比有限差分法计算时间略大（比值约为 2.5：2）。

§7.4 紊动射流数值计算

紊动射流在实际工程中有重要应用，我们对水环境、电厂温排水问题作了数值计算，包括二维与三维问题，此处着重讨论三维计算。

7.4.1 一般曲线坐标下的方程

坐标变换包括几何坐标变换和物理函数的变数，前者变换区域形状和生成网格，后者将各物理量如速度、应力表示为曲线坐标系中的分量。

标量在任何坐标系中都是一样的，而速度、应力等向量或二阶张量在一般曲线坐标系的分量则有协变、逆变之分。由于基向量 $\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$，并不一定是单位基。因而，这些分量的量纲并不一定都是实际物理量的量纲。例如，柱坐标 (r, θ, z) 中的速度 $u_\theta=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$；我们希望得到单位基 $\boldsymbol{e}_i$ 上的分量，即其物理分量的关系式。下面我们给出一般曲线坐标 ζ^i 表示的方程。

标量 φ 的梯度是一个向量，它在笛卡尔坐标和一般曲线坐标中，可写作以下的不同形式。

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^i}\boldsymbol{g}^i=g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^j}\boldsymbol{g}_i=\frac{G^{ij}}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^j}\boldsymbol{g}_i=\frac{1}{J}b_i^j\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^j}\boldsymbol{e}_i \tag{7.4.1}$$

其中 b_i^j 为 α_i^j 的代数余子式组成的矩阵，在数值计算中可以写为

$$\left.\begin{aligned} b_1^1&=y_\eta z_\zeta-y_\zeta z_\eta,\quad b_2^1=y_\zeta z_\xi-z_\zeta y_\xi\\ b_1^2&=z_\eta x_\zeta-x_\eta z_\zeta \end{aligned}\right\} \tag{7.4.2}$$

式 (7.4.1) 表明，在不同的坐标系中，向量有不同的分量。

向量 $\boldsymbol{u}$ 的散度是一个标量，即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\zeta^i}(Ju^i) \tag{7.4.3}$$

不可压缩流的连续性方程为

$$\frac{\partial U_i}{\partial x^i}=\frac{1}{J}b_i^j\frac{\partial U_i}{\partial\zeta^j}=0 \tag{7.4.4}$$

即

$$(b_1^1U_\xi+b_2^1V_\xi+b_3^1W_\xi)+(b_1^2U_\eta+b_2^2V_\eta+b_3^2W_\eta)$$

$$+(b_1^3U_\zeta+b_2^3V_\zeta+b_3^3W_\zeta)=0$$

方程中仅仅将坐标由 x^i 变为 ξ^i 表示，而速度分量 $(U, V, W)=(U_x, U_y, U_z)$ 仍是笛卡尔坐标中的分量。

标量 φ 的拉普拉斯算子为

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi)=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\zeta^i}\left(Jg^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^j}\right)=0$$

控制方程以 ζ^i 为自变量可以写作

$$g^{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^i\partial\xi^j}=2A^i\frac{\partial\phi}{\partial\xi^i}+S_\phi \tag{7.4.5}$$

其中

$$2A^i=\frac{1}{J}R_{\mathrm{eff}}\left[a_\phi b_j^i U_j-\frac{1}{J}b_j^i b_k^j\frac{\partial\nu_t}{\partial\xi^k}-\frac{\partial}{\partial\xi^j}(Jg^{ij})\right]$$

$$S_U=\frac{1}{J}R_{\mathrm{eff}}\left(b_j^i\frac{\partial p}{\partial\zeta^j}+\frac{2}{3}b_j^i\frac{\partial k}{\partial\zeta^j}+\beta T\frac{1}{Fr_i}-\frac{1}{J}b_j^i\frac{\partial\nu_t}{\partial\zeta^j}\frac{\partial U_i}{\partial\zeta^k}b_i^k\right)$$

$$S_k=-\sigma_k R_{\mathrm{eff}}\left(G_k-\varepsilon-\frac{1}{J}\beta\frac{1}{Fr_i}b_j^i\frac{\partial T}{\partial\zeta^j}\right)$$

$$S_\varepsilon=-\sigma_\varepsilon R_{\mathrm{eff}}(c_1G_k-c_2\varepsilon)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}}$$

$$\varepsilon_T=0$$

$$G_k=\frac{1}{J^2}\left(b_j^i\frac{\partial U_i}{\partial\zeta^j}+b_i^j\frac{\partial U_j}{\partial\zeta^i}\right)b_i^k\frac{\partial U_j}{\partial\zeta^k}$$

展开 (7.4.5) 式，我们有

$$g^{11}\phi_{,\xi\xi}+g^{22}\phi_{,\eta\eta}+g^{33}\phi_{,\zeta\zeta}=2A^1\phi_{,\xi}+2A^2\phi_{,\eta}+2A^3\phi_{,\zeta}+S_\phi^* \tag{7.4.6}$$

式中

$$S_\phi^*=S_\phi-2(g^{12}\phi_{,\xi\eta}+g^{23}\phi_{,\eta\zeta}+g^{31}\phi_{,\zeta\xi})$$

如果我们引入坐标伸缩因子 $\xi^{*i}=\dfrac{\xi^i}{\sqrt{g^{ii}}}$，(7.4.6) 式可写作

$$\phi_{,\xi^*\xi^*}+\phi_{,\eta^*\eta^*}+\phi_{,\zeta^*\zeta^*}=2A^1\phi_{,\xi^*}+2A^2\phi_{,\eta^*}+2A^3\phi_{,\zeta^*}+S_\phi^* \tag{7.4.7}$$

这是一个典型的对流扩散方程。

如前所述，连续性方程、动量方程的速度分量在上述方程中，仍是 U_x, U_y, U_z。这对于 $\xi^i=(\xi, \eta, \zeta)$ 有某一个主方向的流动，使用单通道坐标不甚方便，最好将流速变为在 ζ^i 曲线坐标上的分量。而动量方程在一般曲线坐标系中，流速以逆变分量表示

$$\frac{\partial U^i}{\partial t}+(U^j-g^{ij}v_{t,j})\nabla_j U^i=\frac{g^{ij}}{R_{\mathrm{eff}}}\nabla_j\nabla_j U^i-g^{ij}p_{,j}-\frac{2}{3}k_{,j}g^{ij}$$

$$-\beta T g^{i}\frac{1}{F_r}+v\quad g^{i}\nabla_i U^{i} \tag{7.4.8}$$

我们利用物理分量与逆变分量之间的关系，

$$U^{(i)}=\sqrt{g_{ii}}U^{i},\ \partial\xi^{(i)}=\sqrt{g_{ii}}\partial\xi^{i} \tag{7.4.9}$$

由于在方程中指标的齐次性质，只需要把指标改变为物理指标即可。

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}+(U^{(j)}-g^{(j)}v_{(j)})\nabla_{(j)}U^{(i)}=\frac{1}{R_{(ii)}}g^{(ii)}\nabla_{(j)}\nabla_{(j)}U^{(i)}-g^{(i)}p_{(i)}-\frac{2}{3}k_{(i)}g^{(i)}$$

$$-\beta T g^{(i)}\frac{1}{F_{r(i)}}+v_{r(i)}g^{(ij)}\nabla_{(j)}U^{(i)} \tag{7.4.10}$$

它可以改写作对流扩散方程形式，即

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j U^{i}=2A^{i}\nabla_j U^{i}+S_{ii} \tag{7.4.11}$$

式中
$$2A^{i}=R_{e(i)}(U^{i}-g^{ij}v_{r,j}),$$

$$S_{ii}=R_{e(i)}\left(\frac{\partial U^{i}}{\partial t}+g^{ij}p_{,j}+\frac{2}{3}k_{,i}g^{ij}+\beta T g^{ij}\frac{1}{Fr_i}-v_{r,i}\nabla_i U^{i}g^{ij}\right)$$

其中协变导数

$$\nabla_j U^{i}=\frac{\partial U^{i}}{\partial\xi^{j}}+U^{k}\begin{bmatrix} i \\ k\ j\end{bmatrix} \tag{7.4.12}$$

克里斯多夫记号

$$\begin{bmatrix} i \\ k\ j\end{bmatrix}=\frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial\xi^{k}}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial\xi^{j}}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial\xi^{l}}\right)=g^{il}[l,\ j,\ k] \tag{7.4.13}$$

数值计算中，$[l,\ j,\ k]=\dfrac{\partial^2 x_m}{\partial\xi^{j}\partial\xi^{k}}\dfrac{\partial x_m}{\partial\xi^{l}}$

方程 (7.4.11) 可以用有限差分法或有限分析法解出。在一个单元中需要给定 $(n-1)$ 时刻的初值及边界值。而基本方程也应在单元内进行局部线性化。

7.4.2 有限分析法解

有限分析法可以用于解上述对流扩散方程

$$\phi_{,ii}=2A_i\phi_{,i}+\phi_{,i}+f \tag{7.4.14}$$

式中
$$U_i=U_{i0}+u',\quad 2A_i=U_i\mathrm{Re},\ f=S_\phi^{*}-\mathrm{Re}\,u'_i\phi_{,i}$$

上述线性化之后的对流扩散方程的解，对于一个单元可用分离变量法和对相应的边界条

件得到，得到非均匀网格 $\Delta\xi=h$, $\Delta\eta=k$, $\Delta\xi=l$ 的分析解。如图 7.18 中空间单元，对内点 P 可得到周围附近 26 点所给出 28 点代数关系式

$$\phi_P=\frac{1}{1+C_P\dfrac{R_{cell}}{\tau}}\left(\sum_{m=1}^{26}C_m\phi_m+C_P\frac{R_{cell}}{\tau}\phi_P^{n-1}+C_P f_P^{n-1}\right) \tag{7.4.15}$$

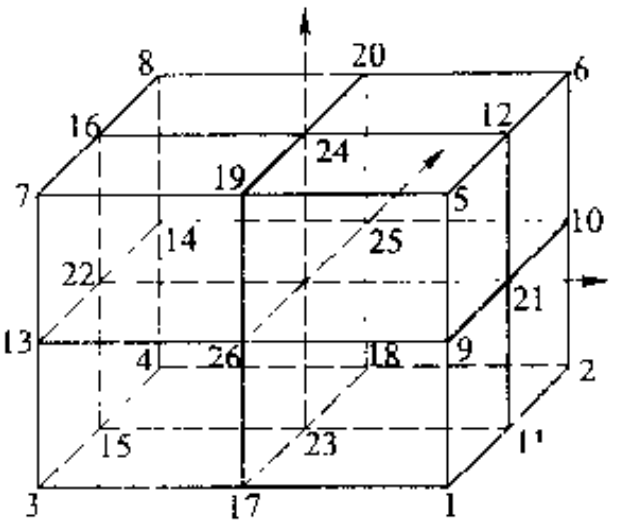


图7.18　FA法三维流的单元及结点分布

式中 C_m 为 FA 系数；C_P 为非齐次方程的 FA 系数。

FA 系数可按下式计算

$$C_m=\begin{cases}\exp(-A_i\xi_m^1)P,\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ 8\\ \exp(-A_i\xi_m^1)Q_i,\ m=9,\ 10,\ \cdots,\ 20\\ \text{若}\xi_m^1=0,\ \text{则}j=1;\ \xi_m^2=0,\ j=2;\ \xi_m^3=0,\ j=3\\ \exp(-A_i\xi_m^i)R_i,\ m=21,\ 22,\ \cdots,\ 26\\ \text{若}\xi_m^i=\xi_m^k=0,\ \text{则}j\ \text{按}(i,\ j,\ k)=(1,\ 2,\ 3)\ \text{顺序取值}\end{cases} \tag{7.4.16}$$

$$C_P=-\sum_{m=1}^{26}\frac{A_i\xi_m^i C_m}{2A_iA_i} \tag{7.4.17}$$

其中

$$P=\frac{(-F_1-F_2-F_3+G_1+G_2+G_3)}{8\mathrm{ch}(A_1\Delta\xi^1)\,\mathrm{ch}(A_2\Delta\xi^2)\mathrm{ch}(A_3\Delta\xi^3)}$$

$$Q_i=2\,\mathrm{ch}(A_i\Delta\xi^i)(F_i-G_j-G_k)$$

$$R_i=4\mathrm{ch}(A_j\Delta\xi^j)\mathrm{ch}(A_k\Delta\xi^k)G_i$$

$$E_i=E_{12}^{ij}+E_{21}^{ij}$$

而

$$E_2=\frac{1}{k^2}\left[h^2(E_1)+\frac{A_3k\,\mathrm{th}B_2k-B_2h\,\mathrm{th}A_3b}{16A_1B_2\mathrm{ch}A_1h\,\mathrm{ch}B_2k\,\mathrm{ch}A_3l}\right]$$

$$E_3=\frac{1}{l^2}\left[h^2(E_1)+\frac{A_1l\,\mathrm{th}A_3l-A_3h\,\mathrm{th}A_1h}{16A_1A_3\mathrm{ch}A_1h\,\mathrm{ch}A_2k\,\mathrm{ch}A_3l}\right]$$

$$F_i=2(A_i\Delta\xi^i)\,\mathrm{cth}(A_i\Delta\xi^i)$$

$$G_i=4(A_j\Delta\xi^j)\mathrm{cth}(A_j\Delta\xi^j)(A_k\Delta\xi^k)\,\mathrm{cth}(A_k\Delta\xi^k)E_{\alpha\beta}^{ij}$$

式中 $E_{\alpha\beta}^{ij}$ 为双重级数和，α, $\beta=1$, 2, 形式如下：

$$E_{\alpha\beta}^{ij}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{p_i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p_i+p_j}(\Delta\xi^i)(\lambda_{pi})(\Delta\xi^j)(\lambda_{pj})}{2(H_{pi})^{\alpha}(H_{pj})^{\beta}\mathrm{ch}\,r_{pk}\Delta\xi^k} \tag{7.4.18}$$

而 $$\lambda_{pn}=\frac{(2P_i-1)\pi}{2(\Delta\xi')}$$

$H_{Pi}=(A_i+\Delta\xi')^2(\Delta\xi'\lambda_{pi})^2$，仅当 $i=j$ 时，

$$d^2=A_1^2+A_2^2+A_3^2+\lambda_{p1}^2+\lambda_{p2}^2+\lambda_{p3}^2$$

$$\lambda_i=\sqrt{d^2-(\lambda_{pi})^2}$$

FA 方法的流速、压强的原参数解，通常按 Patankar 及 H. C. Chen 的做法，采用交错网格，我们这里进行了改进用于规则网格，并给出压强、流速二维问题的迭代公式如下。

有限分析法公式对于三维不定常流动量方程可写作

$$\tilde{U}_P=U_P-Gg^n p_i \tag{7.4.19}$$

其中

$$\tilde{U}_P=\sum_{m=1}^{nb}\frac{C_m U_m^i}{\left(1+\frac{\mathrm{Re}\,C_P}{\Delta t}\right)}+\frac{G(U_P^i)^{n-1}}{\Delta t}$$

$$G=\frac{\mathrm{Re}\,C_P}{\left(1+\frac{\mathrm{Re}\,C_P}{\Delta t}\right)}$$

“*nb*”为周围附近点。

上述中心内点 P 的流速 U_P 的关系式，可以开拓到整个单元，写作

$$U^i=\tilde{U}^i-Gg^n p_i,\quad 或\quad U_i=\tilde{U}_i-G\rho_i \tag{7.4.20}$$

压力、流速的迭代公式为

$$U_i^n=\tilde{U}_i^{n-1}-(Gp_i)^{n-1} \tag{7.4.21}$$

由于 p^{n-1} 是假设的，由它所算出的流速并不满足连续性方程，即

$$U_{i,i}^n=\tilde{U}_{i,i}^{n-1}-(Gp_i)_{,i}^{n-1}=D\neq 0 \tag{7.4.22}$$

式中 D 为流量通量。

令 p^n 满足连续性条件，而 $p'=p^n-p^{n-1}$ 表示压强迭代时的改正量，则有

$$(Gp')_{,i}^n=U_{i,i}^n$$

或

$$p'^n_{,n}=2A'_i p'^n_i+g^n \tag{7.4.23}$$

式中 $2A'_i=\frac{-G_i}{G}$；$g^n=\frac{U_{i,i}^n}{G}=\frac{g_n(U_i^n)_{,i}}{G}$。

我们可以像解对流扩散方程那样解压强改正值 p 的公式 (7.4.23) 即有

$$p' = \sum_{m=1}^{m_0} C'_m p'_m + C'_p g \tag{7.4.24}$$

式中 C'_m，C'_p 为 FA 系数，它们的计算与动量方程中的 C_m，C_p 类似，只需将 A' 代替 A 即可。

迭代计算步骤如下：

①给定初值 $(U)^0$，p^0，$\Delta t=\tau$，$\Delta\xi=(h, k, l)$，及边界条件。

②令 $2A=\mathrm{Re}(U)^n$，$n=1$，$d=1+\dfrac{\mathrm{Re}\,C_p}{\tau}$，$G=\dfrac{\mathrm{Re}\,C}{d}$。计算 FA 系数 C_m，C_p。

③计算 $(U)^n$

$(U_i)^n=\sum_{m=1}^{m_0}\dfrac{C_m U_m}{d}+G(U_p)^{n-1}-g^n G p^{n-1}$，其中 p 用差分计算。

④令 $2A'=-\dfrac{G}{G}$，$g^n=\dfrac{g_i(U_i)^n}{G}$。其中 G，U^n 可用差分计算，计算 FA 系数 $C'_m C'_p$，解压力 p' 方程

$$p'_i=\sum_{m=1}^{m_0} C'_m p'_m + C'_p g$$

⑤$p^n=p^{n-1}+p'$。

⑥如果 $|p|'>\mathrm{eps}$，则转步骤③。

⑦如果 $(U)^n>\mathrm{eps}$，则转步骤②。

⑧在流速 (U) 计算完成之后，计算 ϕ 方程中 $2A, S_\phi$，用类似求流速的方法，求 k，ε，T。

⑨打印 U，p，k，ε，T 结果。

7.4.3 计算结果及结论

本节计算了中缝射流、半中缝淹没射流及岸边侧向排热水淹没三种情况，射流计算的流速分布及温度分布与实验对比见图 7.19 和图 7.20；断面流速 V，W 分布见图 7.21；河道流动区域网格生成及空间坐标变换见图 7.22；流速与温度在空间分布见图 7.23、图 7.24。图 7.26 显示淹没式排放热水表面温升较低，高温移向排水口下游较远的地方。

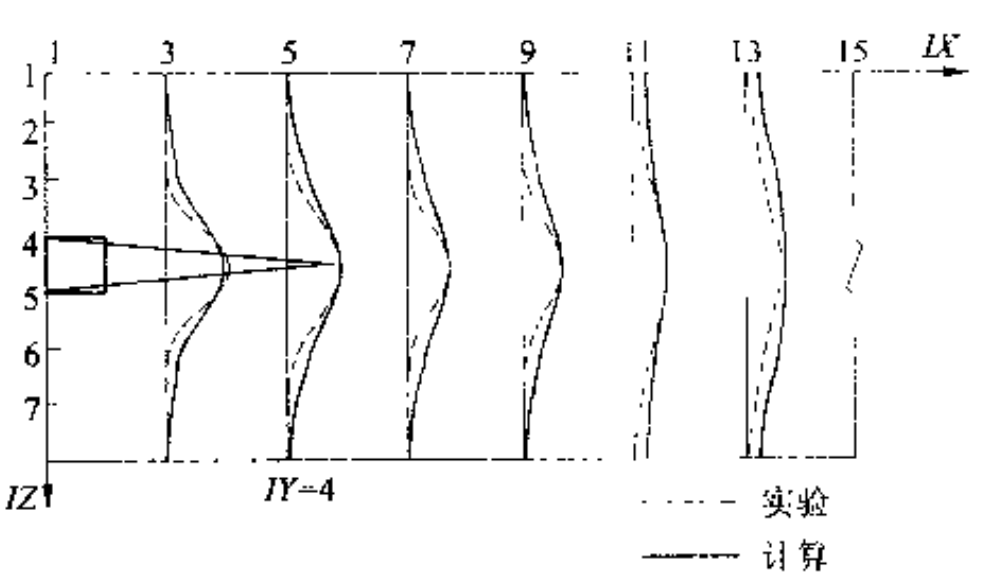


图7.19　中缝射流流速分布

计算结果与实验资料吻合良好，三维问题的一般曲线坐标变换生成适体坐标网格是成功的。

在紊流模拟中对 k 方程与 ε 方程采用不同尺度的双尺度模型证明是合适的，它可以更好地模拟粘性与小尺度涡对能耗散的影响，k 分布和 ε 分布见图 7.27。

我们改进了 FA 系数的计算，使它适应于高雷诺和低雷诺的各种范围。

不同于 SIMPLER 算法需要采用交错网格，我们采用规则网格给出原参数 U, p 的解，并给出压力、流速改正量的迭代公式，将它应用于三维流。

计算比较了部分抛物线型解与交替方向全对流扩散方程的解，表明后者更符合实际并有较高的精度，也不太占计算时间，计算的网格雷诺数 $Re_{\infty}=2\,000$, $Pe=1\,700$, $Fr=0.05$；三维单元 (28×7×21)，迭代 20 次 CPU 时间为 41 分钟；而二维只需 CPU 时间 6 分钟，表明同样问题三维耗时间约为二维的 5~6 倍，计算是在 VAX−750 机上进行的。

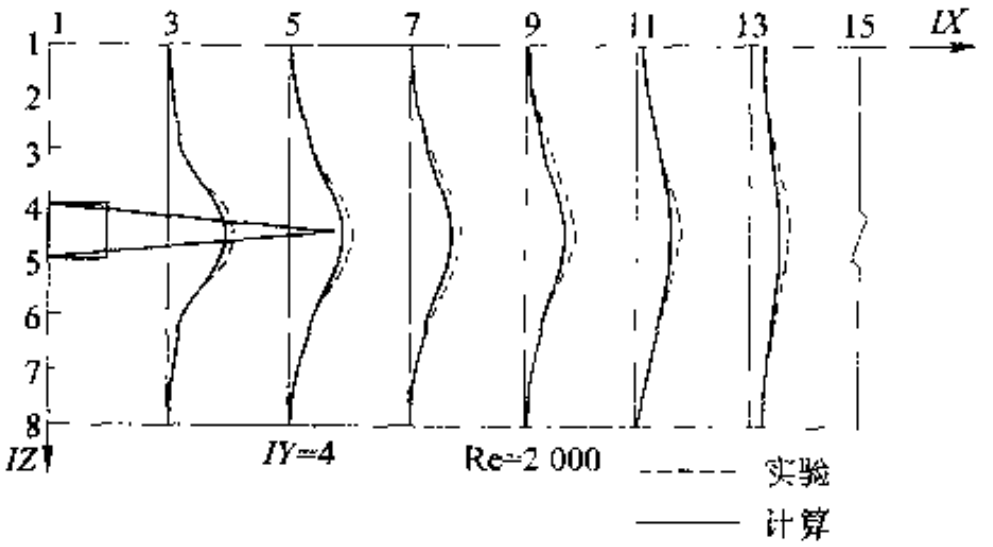


图7.20　中缝射流温度分布

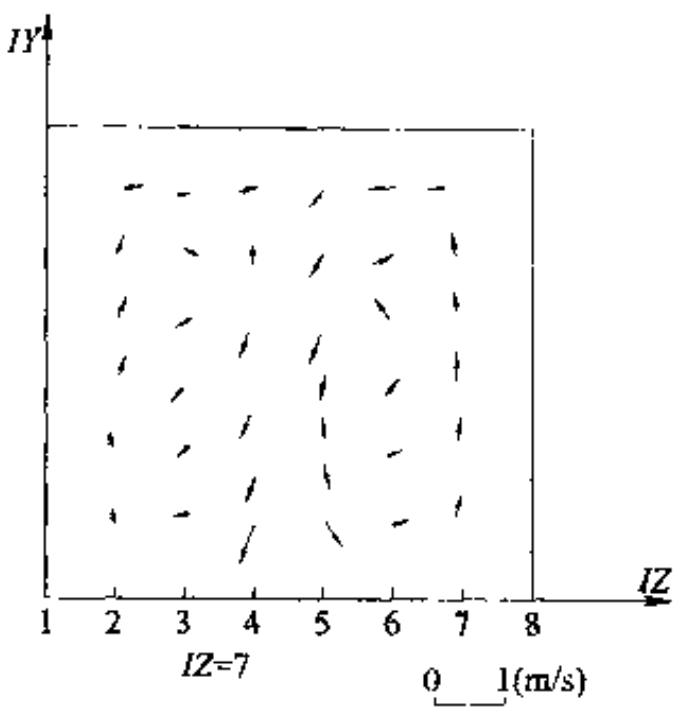


图 7.21　流速 V, W

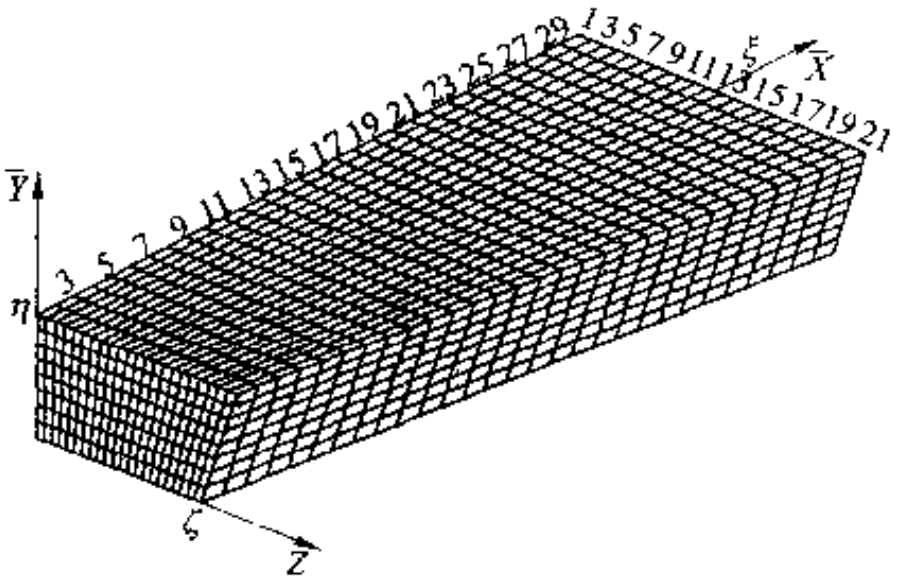


图7.22　三维网格(30×9×22)

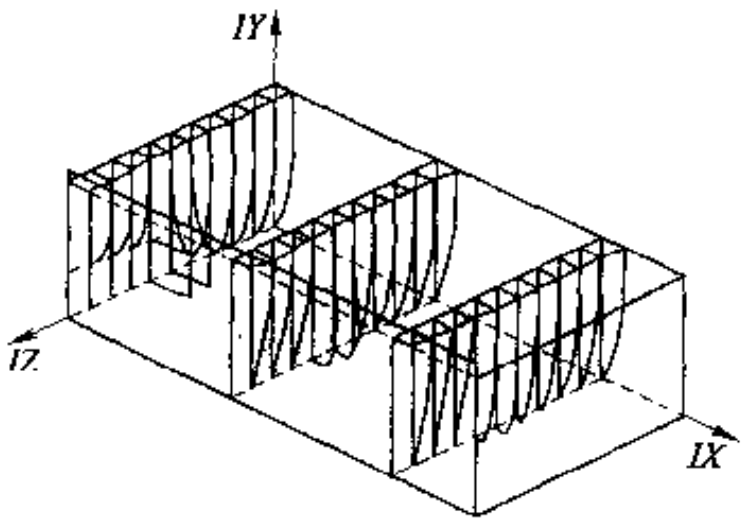


图7.23　三维流速分布

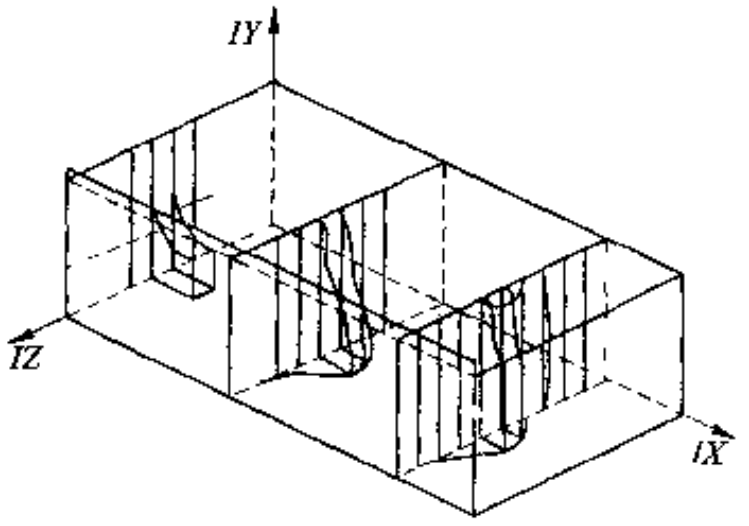


图7.24　三维温度分布

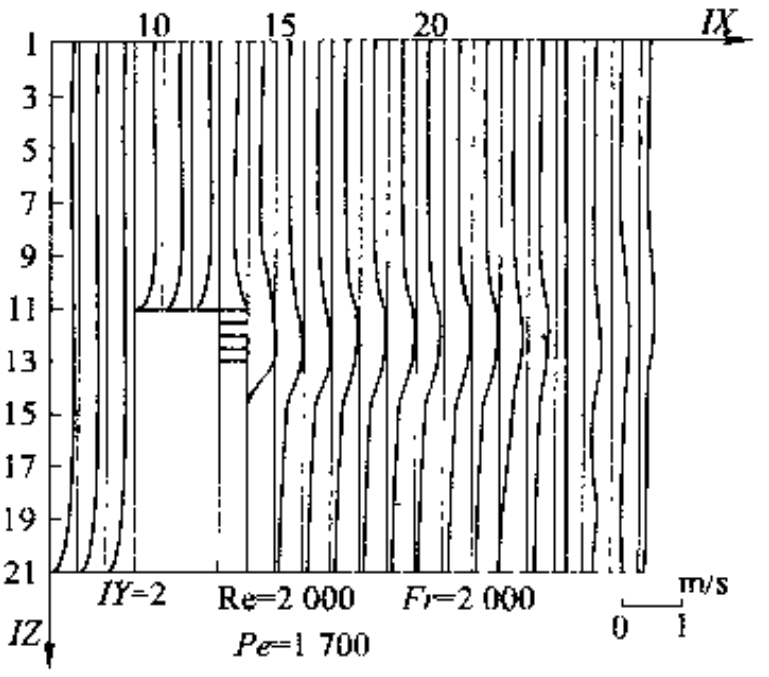
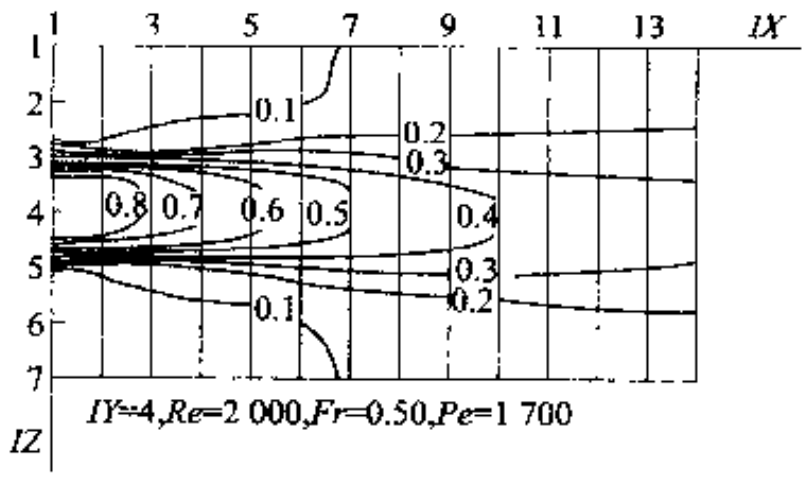
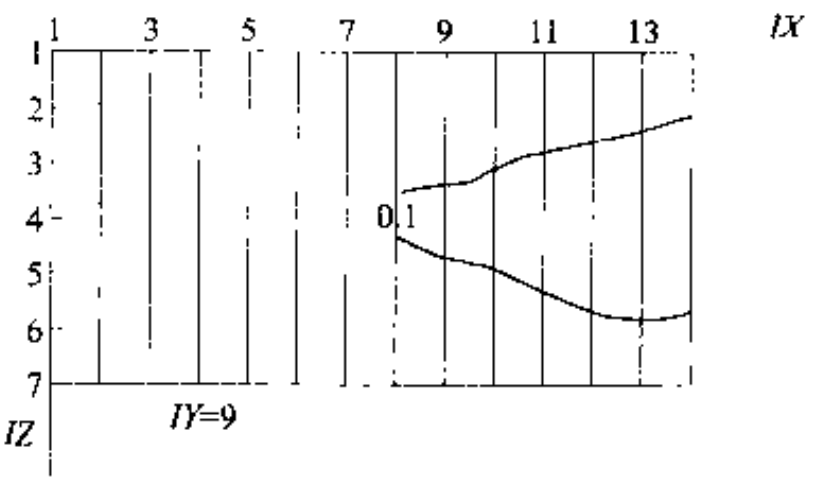


图7.25　侧向排放流速分布

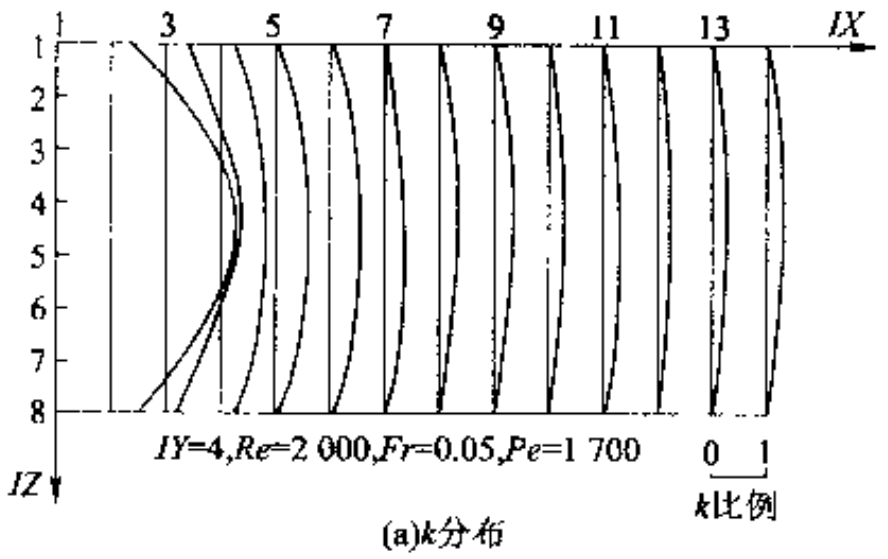


(a)淹没出流

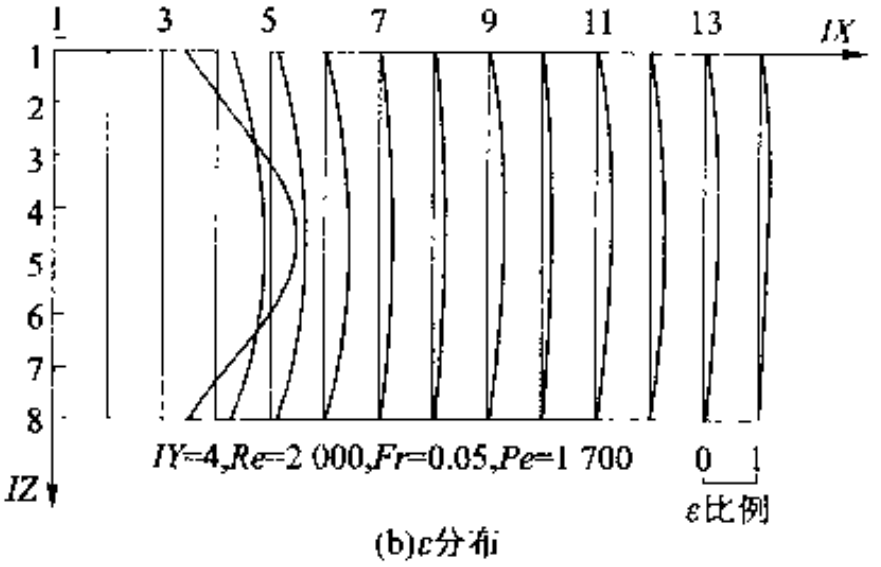


(b)水面温度

图7.26　温度分布



(a)k分布



(b)ε分布

图7.27　k, ε分布

§7.5　明渠整治结构的剪切湍流特性的大涡模拟

7.5.1　概述

河渠上常布置丁坝、顺坝、分水导流堤等整治建筑物以改善水流流态。水流流经这些建

筑物将发生剪切紊流，大尺度涡。目前对实际紊流分析研究，用电子计算机对 N. S 方程进行直接模拟 (DNS) 已成为可能，但它用于三维流计算时因网格数与雷诺数的 9/4 成正比而有困难。

工程上对 N. S 方程时一空平均雷诺方程的解，可以得到充分发展的紊流场时均特性，而平均域应小于流动尺度，远大于脉动尺度。

当水平尺寸远大于垂直尺寸时，可以按浅水处理，对于水平的运动，可用水深平均的二维浅水方程解之。

近来大涡模拟 (LES) 经常用来解紊流动力学问题，将紊流分裂成两部分：大涡，其尺寸大于网格尺寸；局部紊流，其尺寸小于网格尺寸。前者用动力学方程解，后者用紊流模型模化，而为了符合柯洛莫哥洛夫的局部各向同性假设，网络尺寸与时间步长都要很小，当统计过程能够符合紊流情况时，需要大量的 CPU 机时。

对于浅水二维明渠紊流，水平网格尺寸大于水深，水深方向作积分取平均，其涡粘性与混合长度及水深平均速度梯度有关。一般作法认为浅水水深平均成为局部平衡紊流，紊流中能量消耗率等于能量的产生率。

有分墩、丁坝或导堤情况，涡粘性当 $\Delta x \ll$ 水深 h 起着重要作用，底部摩阻和形状阻力都是重要的紊动源而不能忽略，在这种情况下模型操作应十分小心，并有一个妥当的封闭剪切应力解动量方程的办法。

Madson 模型不能考虑传输过程与历史效应，不能正确预测涡的形成与发展，所以简单的紊流模型不能应用于带分墩的浅水明渠紊流，Nadaoka 与 Yagi1993 年发展 Madson 模型形成一种紊流模型，这一模型将紊流分为两部分：水平大尺度的涡与局部小尺度的紊流，后者称为“次水深尺度紊流”，因其长度尺寸小于水深，与大涡模拟类似。大尺度涡用一组紊流动力学方程求解，即将一时间系列水深平均速度的级数和水面脉动级数用于大涡计算，基于这些级数可以在大尺度涡估算雷诺应力与紊动能；另一方面，局部紊动能方程中，用一方程水深平均紊流模型，虽然这一模型类似于原来为 Madson 所发展的二维水深平均大涡模型，但考虑了紊动能产生的紊流传输和历史效应，以及底部摩阻与墩子或丁坝的局部形状阻力，这样就可以成功地再现在分墩边缘的水平大涡的随时间发展情况。

用 SDS 模型和分析方法研究了平行剪切流通过分墩情况，系列墩群紊动场涡旋系的稳定性，丁坝绕流紊流流场与大涡回流特性，两个丁坝的绕流流动等。

7.5.2 基本方程

大涡平均水深二维浅水紊流基本方程：

连续性方程

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (hu_i)}{\partial x_i}=0 \tag{7.5.1}$$

动量方程

$$\frac{Du_i}{Dt}=gs_{oi}-g\frac{\partial h}{\partial x_i}-f_i-\frac{C_f}{h}|u|u_i-\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_t h D_u)-\frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x_i} \tag{7.5.2}$$

式中 h 为水深；u_i 为水深平均流速；S_{oi} 为底坡，k 为次水深尺度水深平均紊流的紊动能；v_t 为水深平均的涡粘性系数；C_f 为底部摩阻系数；f_i 为分墩或丁坝的形状阻力；

$D_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$，为变形率张量。

$$f_i=-\frac{aC_d|u|u_i}{2} \tag{7.5.3}$$

式中C_d为单个墩形体阻力系数；$a=\frac{d}{2L_xL_y}$；而L_x、L_y为墩子尺寸；d为墩厚。

次水深尺底紊流模型的紊动能k用半经验传输方程 (Nadaoda and Yagi 1993) 计算如下：

$$\frac{Dk}{Dt}=\frac{1}{h}\left(h\frac{v_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)+P_{kh}+P_{kv}-\varepsilon \tag{7.5.4}$$

基于 Boussinesq 假设，涡粘性系数v_t与紊动能耗散率ε，可按以下水深平均参数计算。

$$v_t=\frac{C_\mu k^2}{\varepsilon} \tag{7.5.5}$$

$$\varepsilon=\frac{C_\mu^{3/4}k^{1.5}}{l}$$

式中$C_\mu=0.09$；$\sigma_k=1.0$；l为次水深平均紊流特征长度，原来认为l与网络尺寸有关，而在 SDS 紊流模型中与水深有关，即$l=\alpha h$，其中α取 0.04~0.1。

由水平剪切涡产生的紊动产生项为

$$P_{kh}=\frac{v_tD_{ij}^2}{2} \tag{7.5.6}$$

对于无墩的河流，垂直应力近底部特别大，垂直紊动能的产生主要由于河底部摩阻，即

$$P_{kv}=\frac{C_f(u^2+v^2)^{1.5}}{h}$$

而现在的情况，有分墩及丁坝的结构，形状阻力对P_{kv}也有贡献，分墩对紊流产生项应似于底部摩阻应再加上一项，用以下公式模拟

$$P_{kv}=\frac{\left(C_f+\alpha\frac{hC_d}{2}\right)(u^2+v^2)^{1.5}}{l} \tag{7.5.7}$$

垂直紊动能产生项与平均动能的 1.5 次方成正比并与水深有关，无论有无墩、堤，当 SDS 紊流模型中有特征长度l时，以$\frac{h}{l}$代替h代入 (7.5.7) 式，分墩局部阻力只作常数考虑，主流区与分墩的紊动能产生项之比，可推得如下：

$$\frac{(P_{kv})|m}{(P_{kv})|p}=\frac{(\sqrt{C_f}u)|m}{\left[\sqrt{C_f+\left(\frac{ahC_d}{2}\right)}u\right]\Big|p} \tag{7.5.8}$$

式中m为主流区，P为分墩处。此处有两点改进：①用l代替水深，②分墩效应由紊动能理论导出。数值计算初始条件与边界条件，进口条件按

$$\Phi(t)=\Phi_a\left(1+\frac{0.01\sin 2\pi t}{T}\right) \tag{7.5.9}$$

式中Φ_{in}为进口断面平均值；T为扰动周期。

用交替方向隐格式 (ADI) 解，时间后差，空间中心差，为了防止数值波动采用交错网格，这种解法解时间分裂的三对角阵，具有高稳定性和较少的 CPU 时间。

7.5.3 成果分析

1. 对于平行流剪切层横向扩散问题所得结果计算与实验测量一致，如图 7.28、图 7.29 所示。

2. 对于平行流通过分墩群计算结果，其水力参数如表 7.4 和表 7.5。

表 7.4 计算分墩群的主要水力参数

	底坡 S	水深 h (cm)	底摩阻力 C_f	分墩局部阻力 C_d	墩子密度 a(cm^{-1})
方案 1	0.001	6	0.006	2.04	0.01
方案 2	0.0 017	4.28	0.004	2.89	0.019

表 7.5 计算的区域及网格尺寸

	渠长 (cm)	水深 (cm)	分墩长 (cm)	分墩宽 (cm)	Δx (cm)	Δy (cm)
方案 1	1 500	96	1 050	30	3	2
方案 2	1 500	40	1 050	12	3	1

计算结果如下列图所示。图 7.30 为用紊流模型计算的涡迁移过程中不同时刻的流速向量

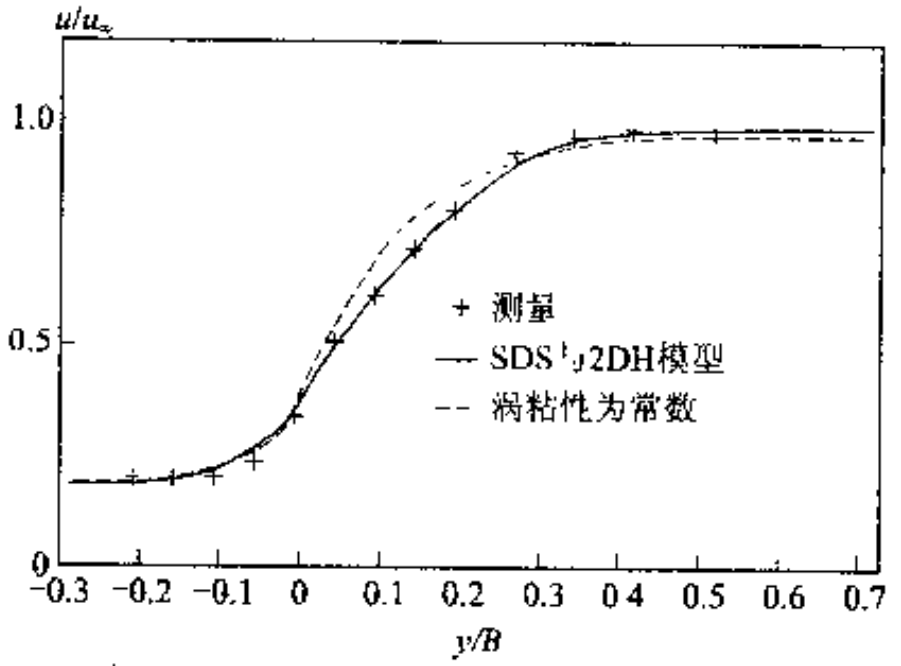


图7.28 不同紊流模型计算的流速

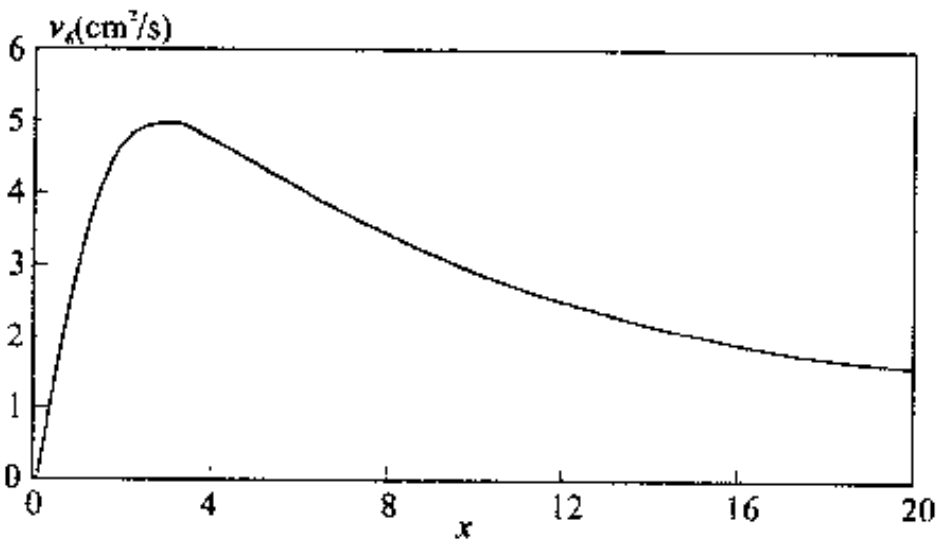
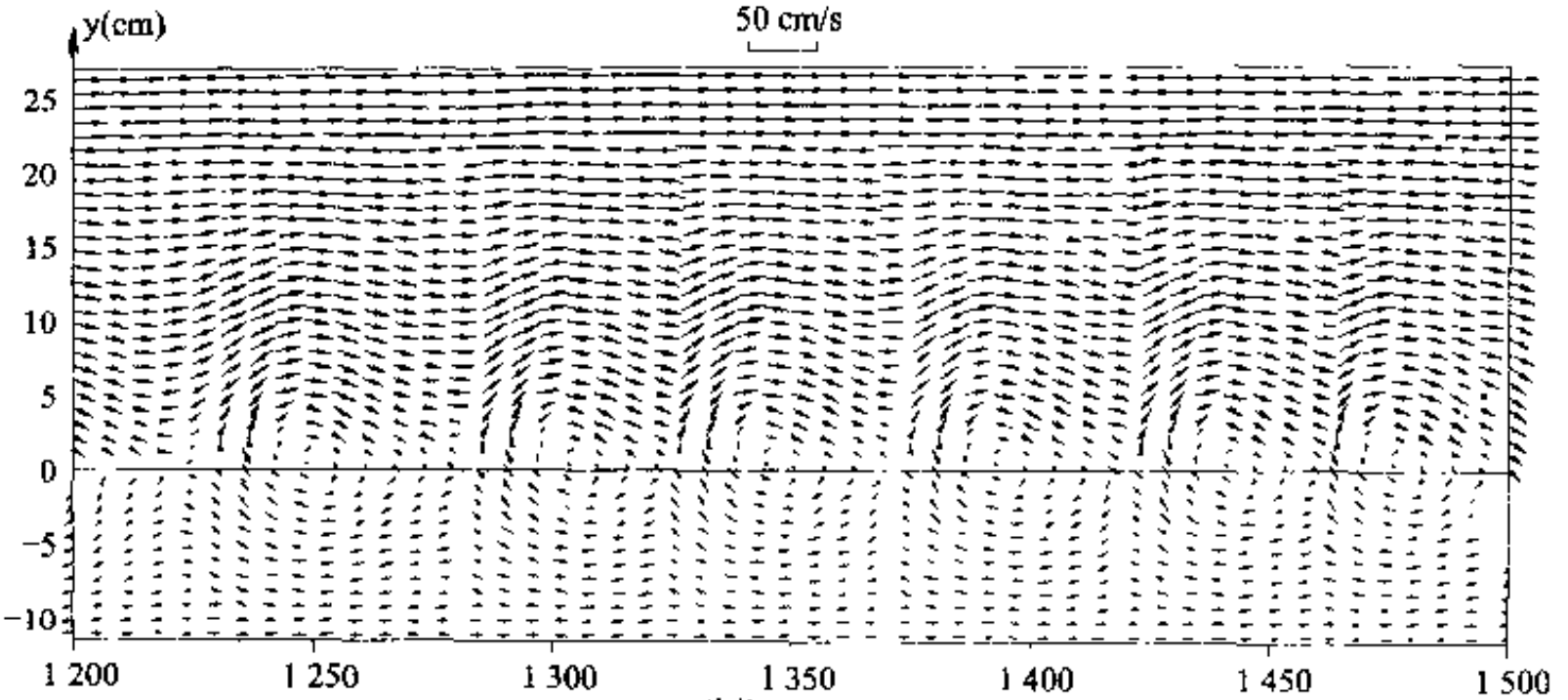
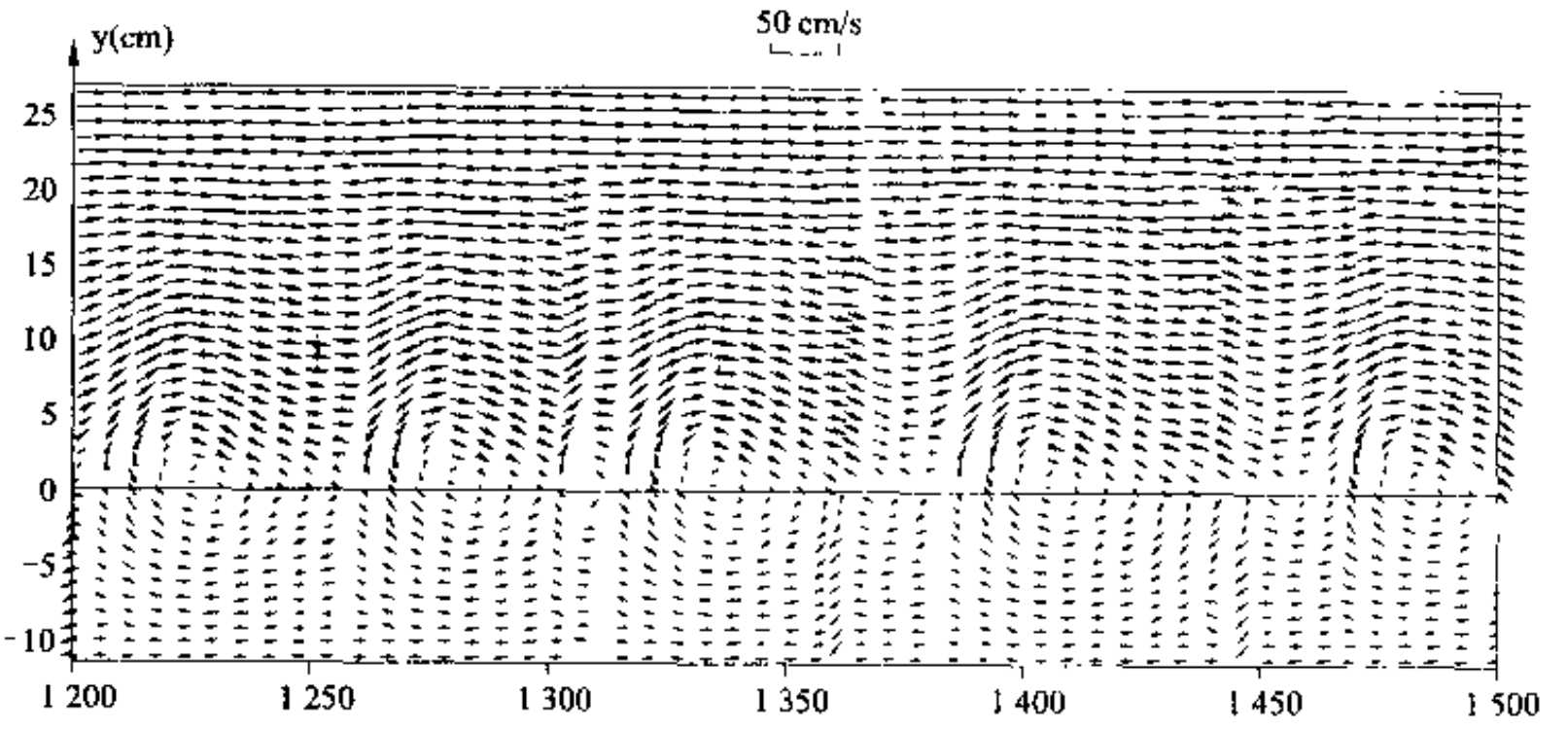


图7.29 底部效应的涡粘性系数



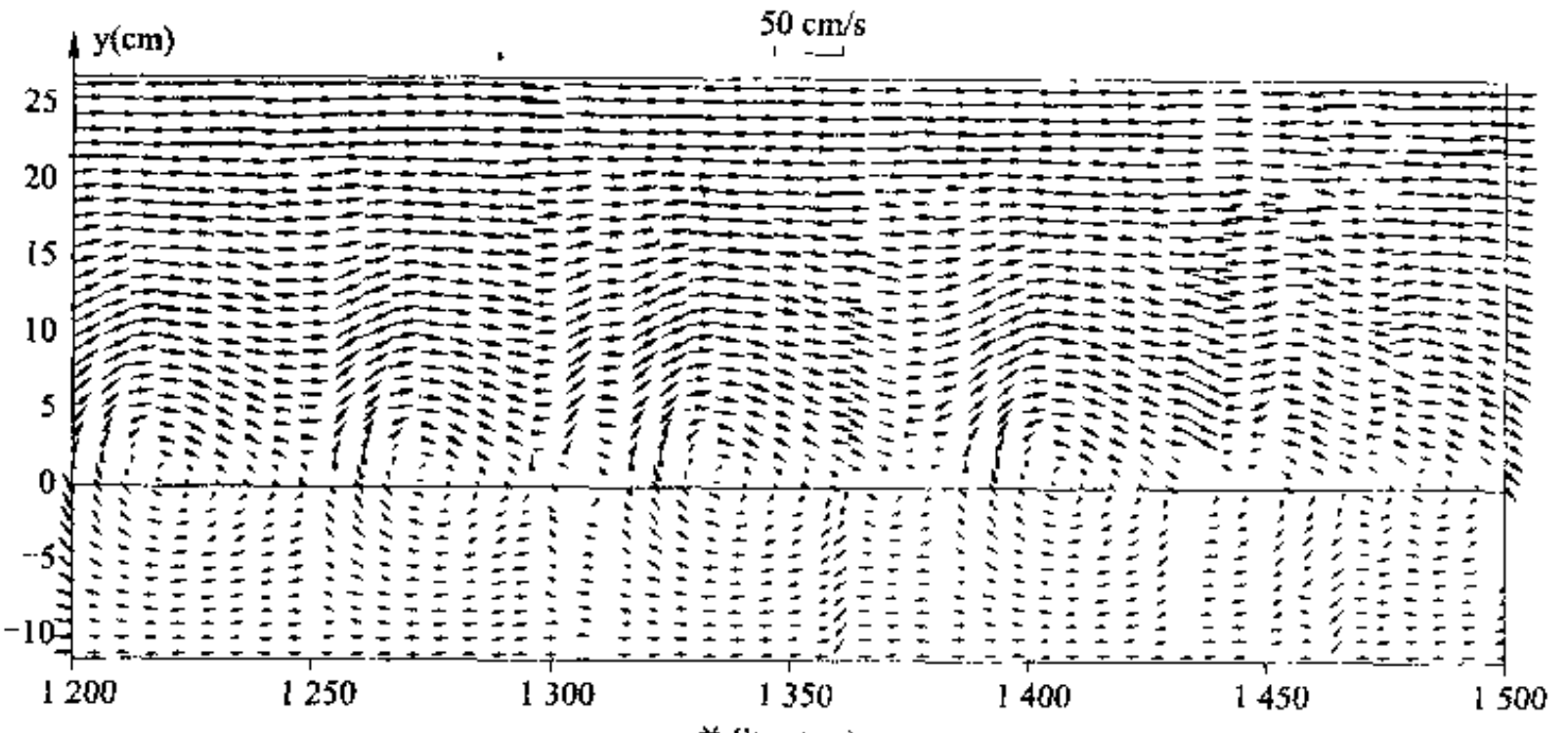
单位：(cm)

(a)t=20 s



单位：(cm)

(b)t=30 s

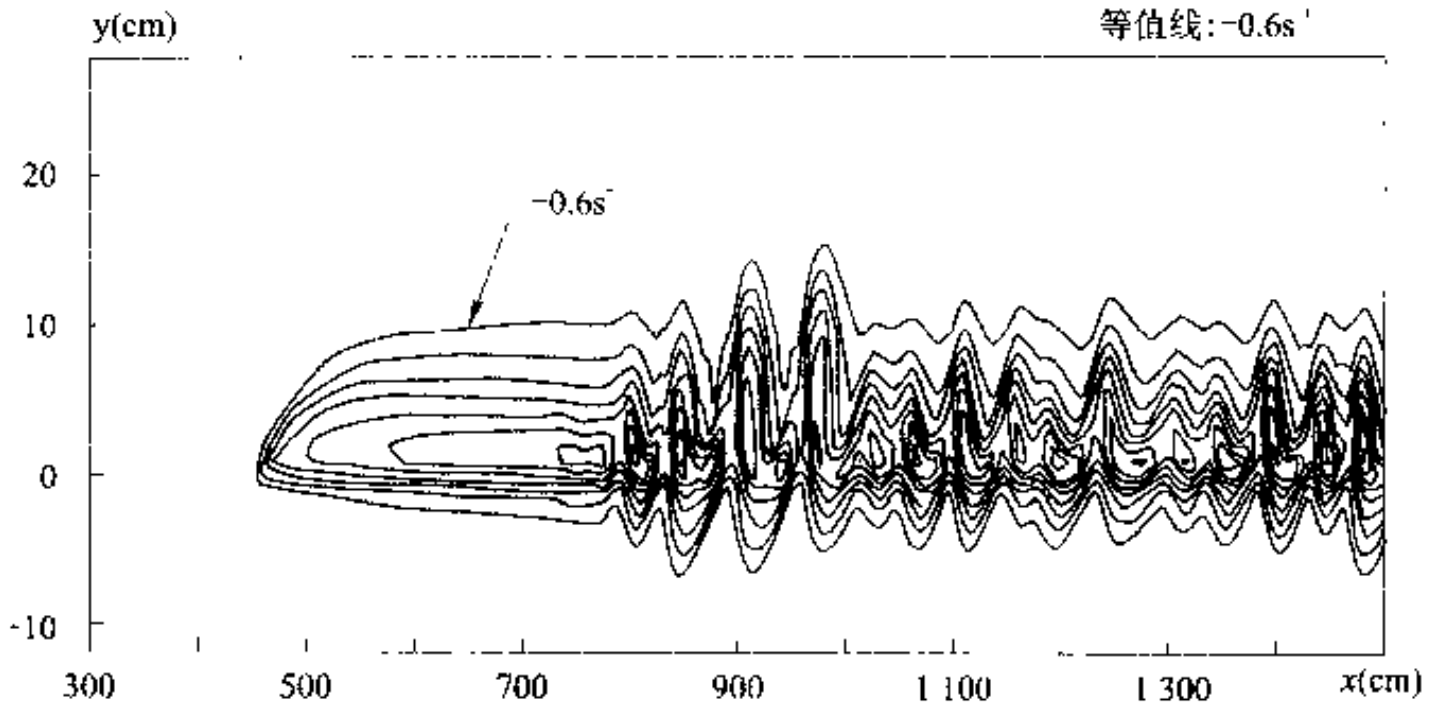


单位：(cm)

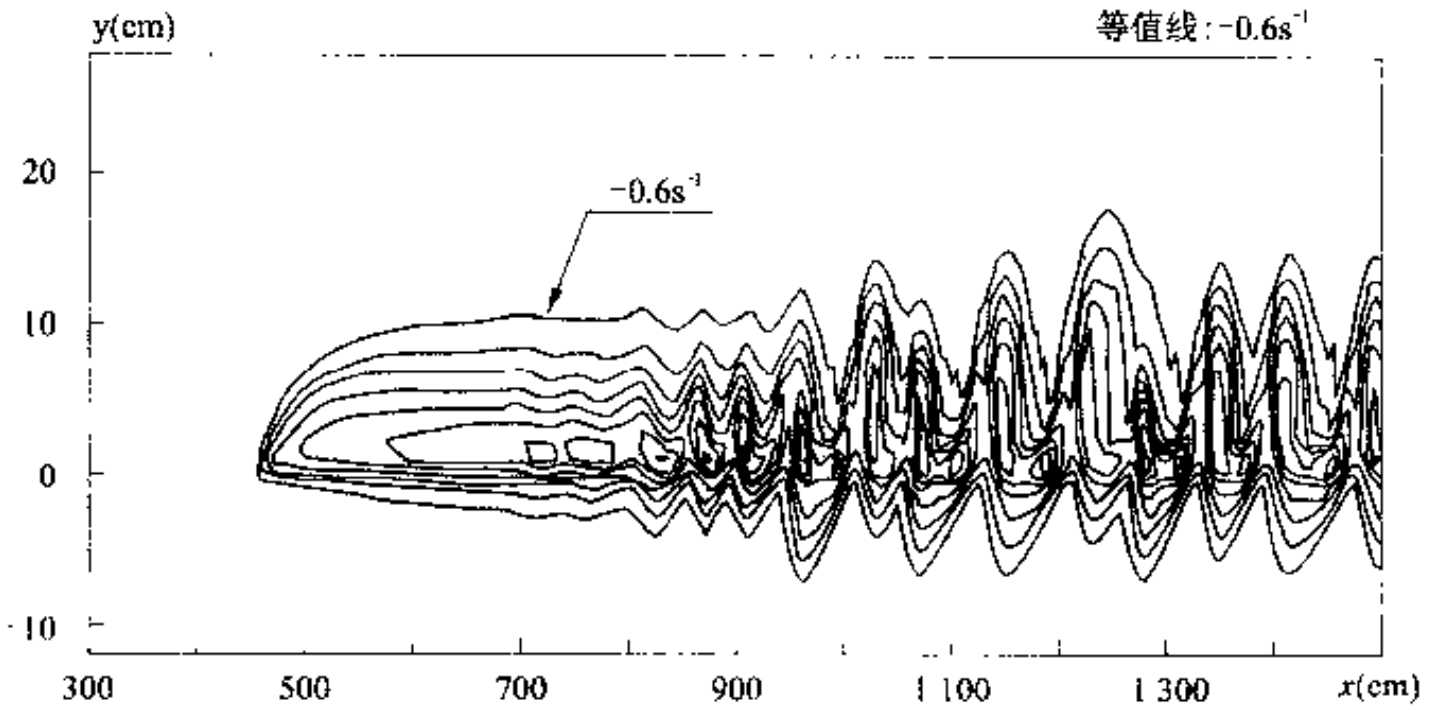
(c)t=50 s

图7.30　涡迁移速度向量场(方案2)

场 (方案 2)；图 7.31 为方案 2 的涡迁移过程中不同时刻的瞬时涡分布。图 7.32 为实测及计算得到紊动动能分布。图 7.33(a)为雷诺应力的横向分布，图 7.33(b)为雷诺应力的纵向发展。图 7.34 为水面波动计算与实验结果的比较。图 7.35 为流动涡再附点确定图，根据不同地点的纵向流速的脉动判断再附点的位置，可见 $x=420$ cm 处 u 的时均值为零，即为再附点所在。图 7.36(a)、(b)分别为该流动的质量和动量交换率。



(a)t=20 s



(b)t=30 s

图7.31　瞬时涡分布(方案2)

本节研究河道整治建筑物产生剪切紊流，大涡是其主要特征。对这种横向扩散的剪切紊流用实验、数值计算和分析方法综合研究，我们可以给出大涡的形成与发展过程。

对于平行流动速度横向差异造成的明渠剪切流横向扩散，其基本方程类似与边界层方程，可在一定假设下求得其分析解。

应用浅水水深平均紊流模型 (SDS)，考虑紊动动能的产生即底部摩阻与形状阻力，得到分墩群的模拟结果，结合单丁坝与双丁坝的实验研究，获得流速场和大涡稳定性、分离及其迁移的特性，给出雷诺应力的横向变化及纵向发展，及大涡迁移引起的水面脉 (波) 动。

这些结果对河渠紊动特性提供了不少参考信息　所用方法可以用于类似紊流问题。

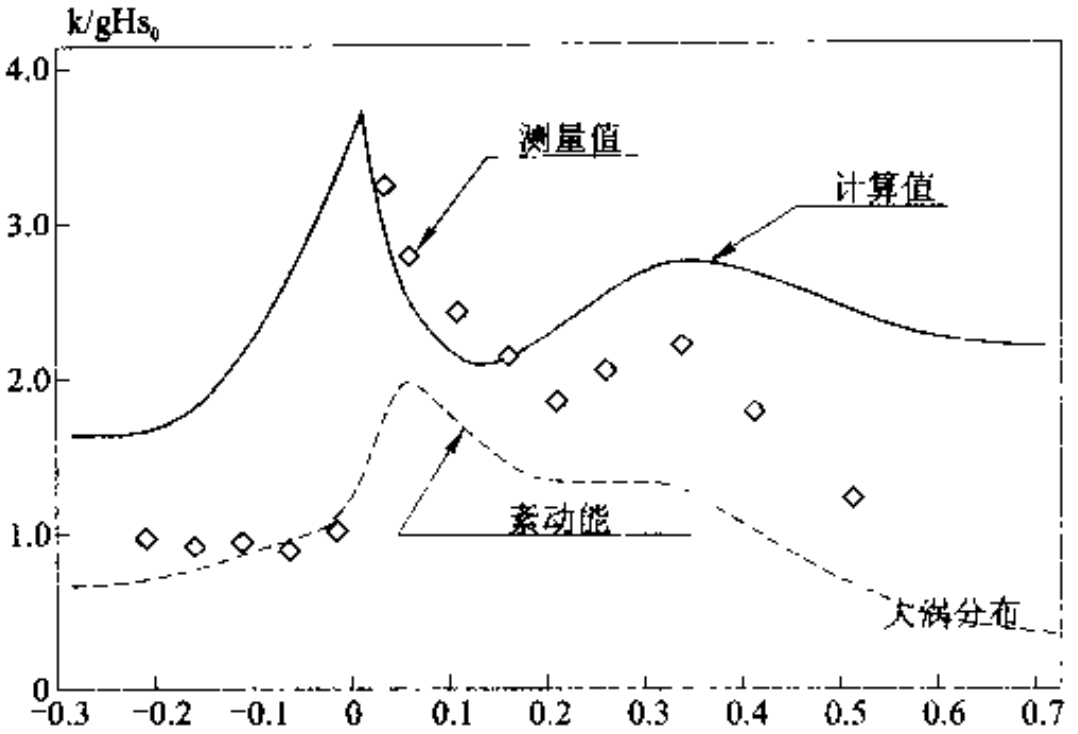
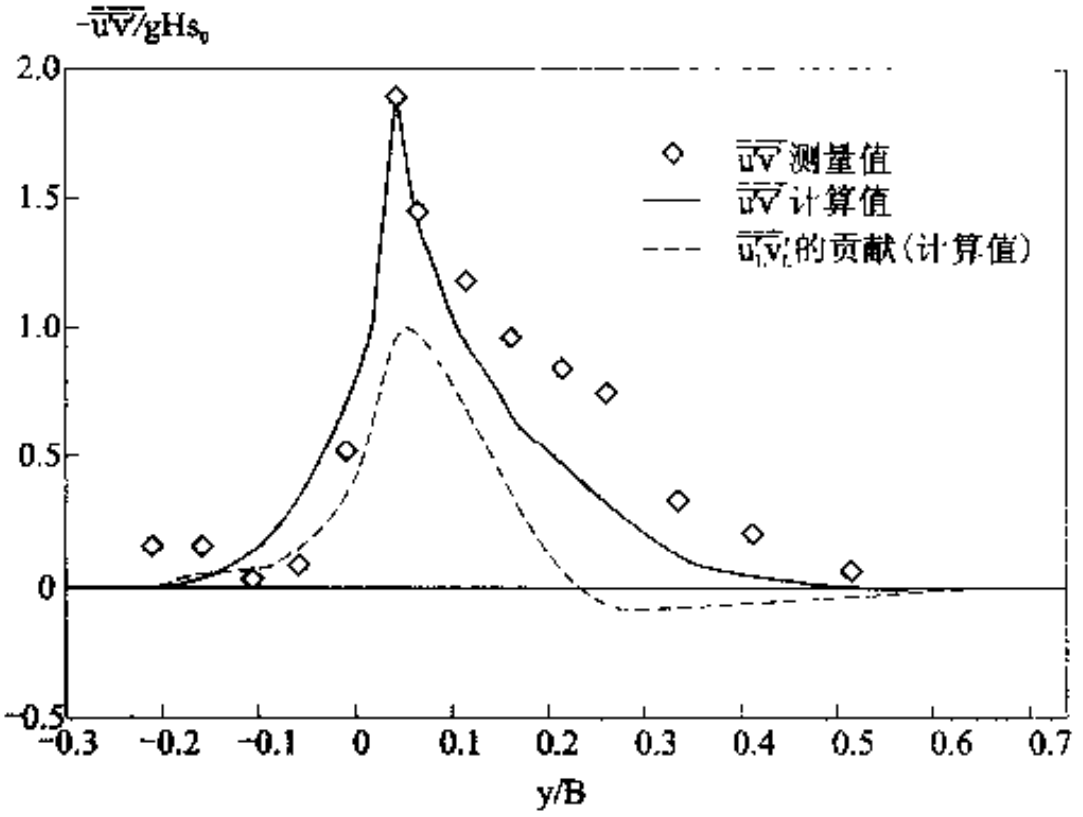
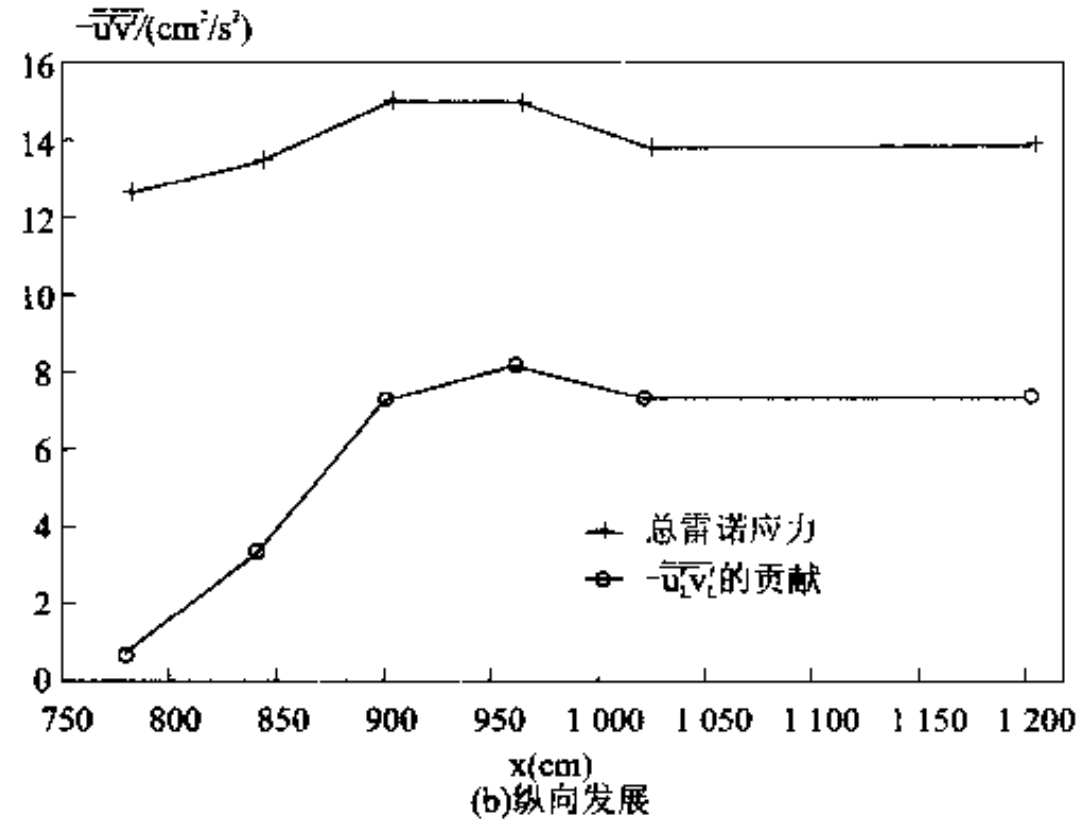


图7.32　紊动能分布

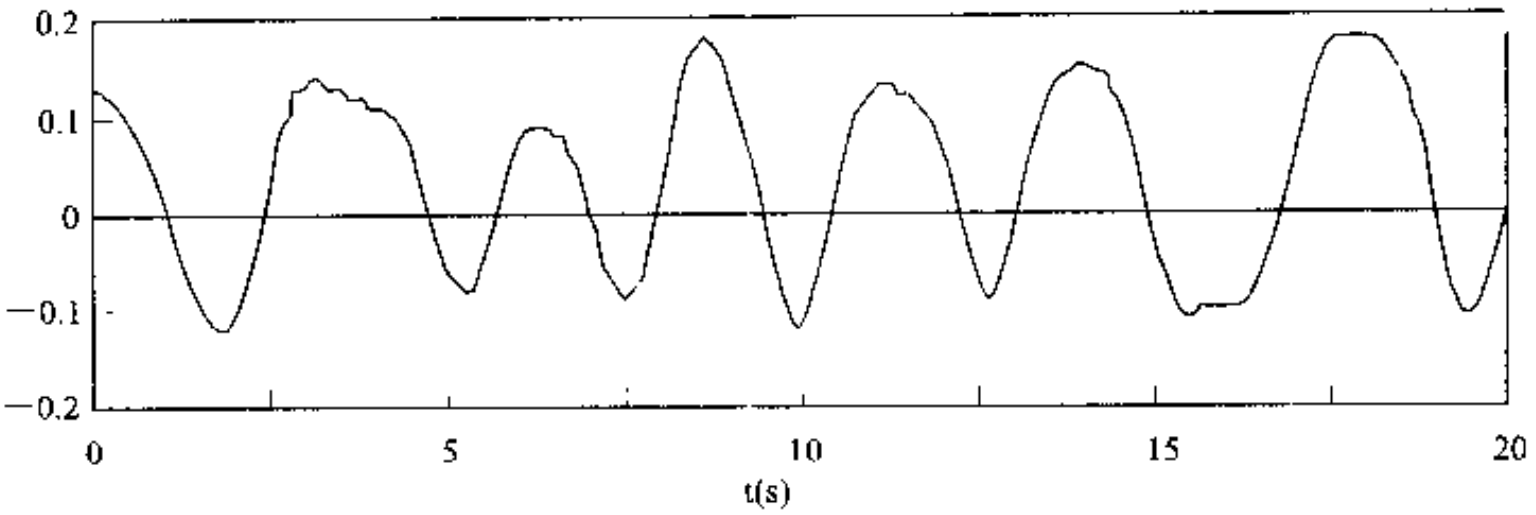


(a)横向分布

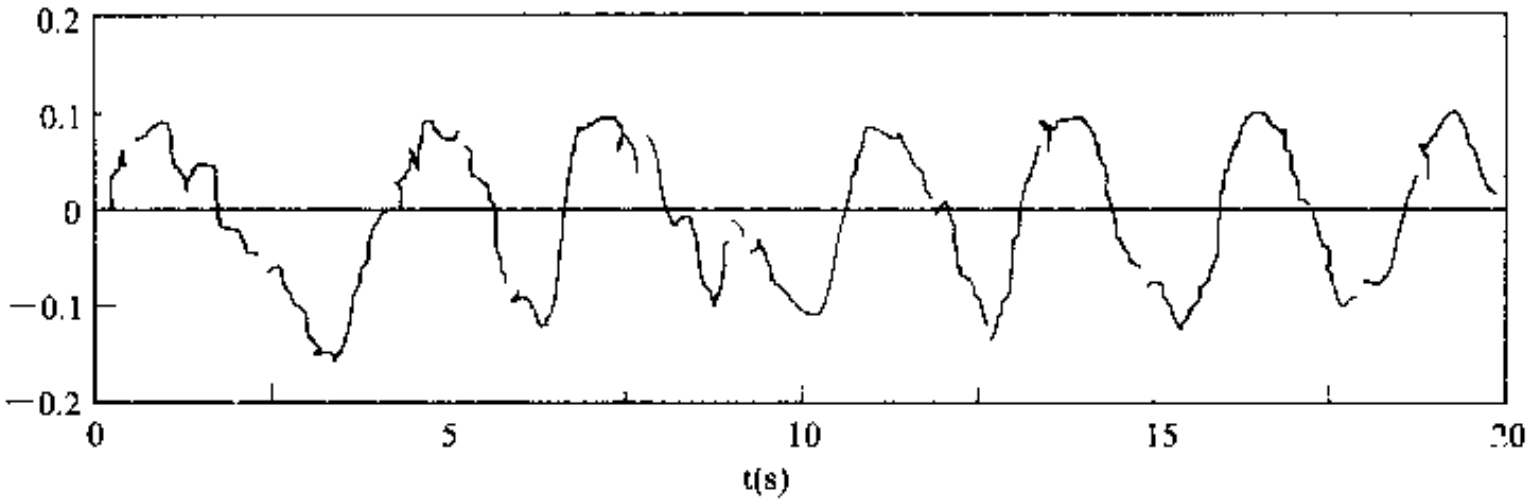


(b)纵向发展

图7.33　雷诺应力分布及纵向发展

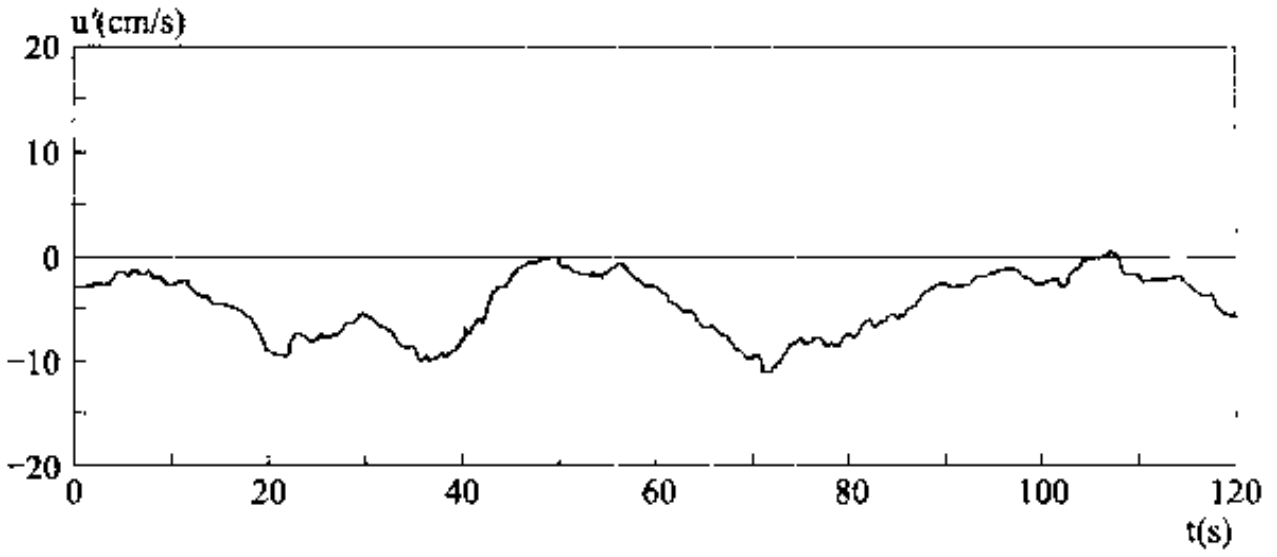


(a)计算的水面波动

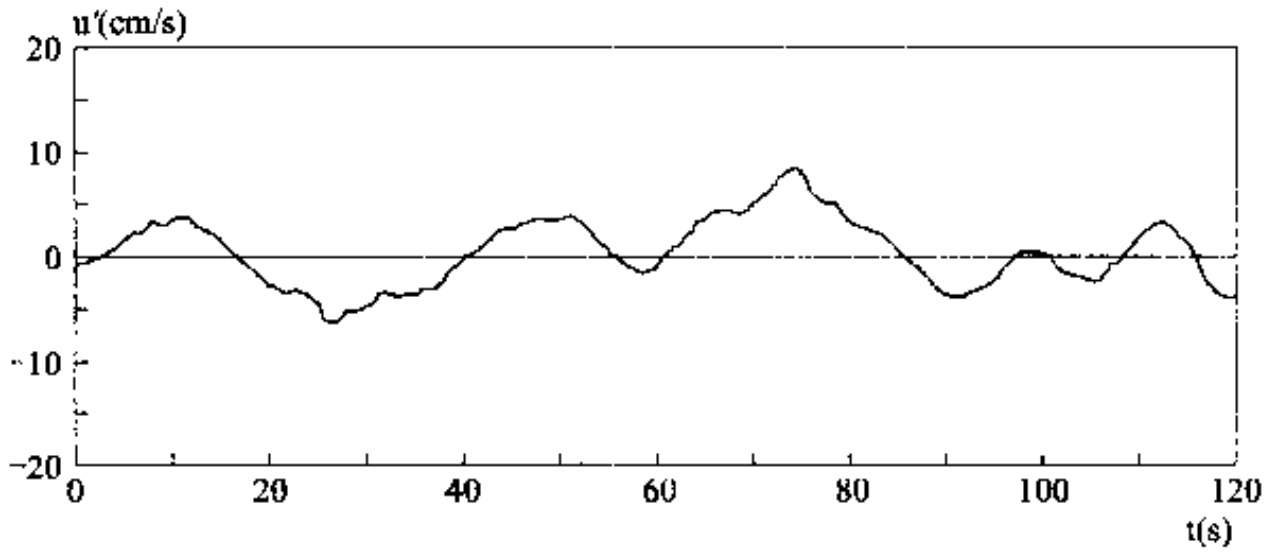


(b)测量的水面波动

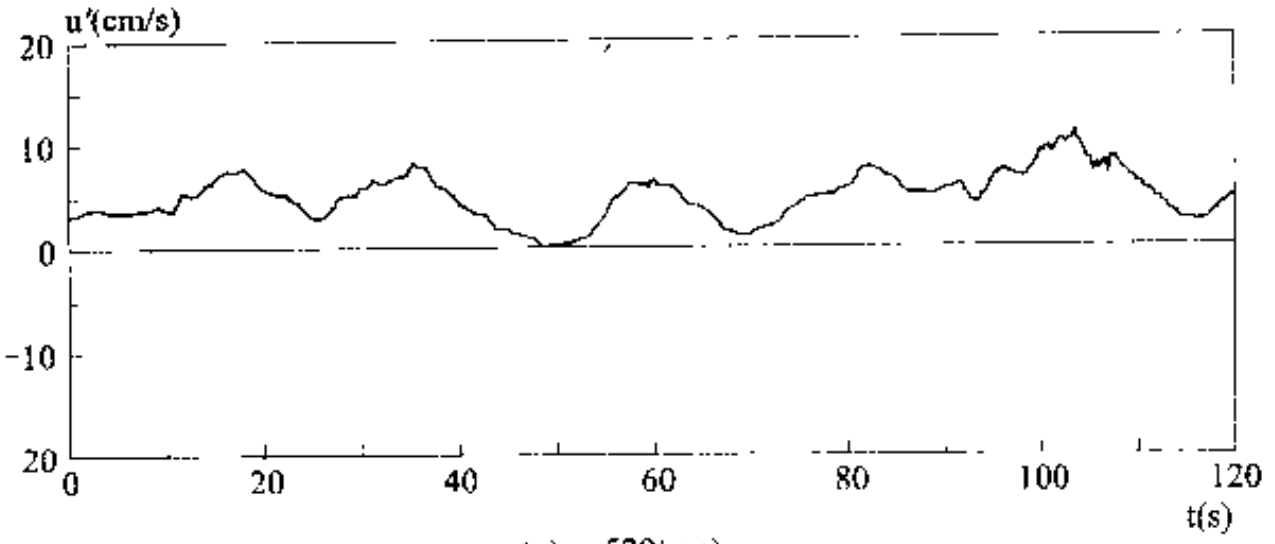
图7.34　水面波动计算与实验结果



(a) x=340(cm)



(b) x=420(cm)



(c) x=520(cm)

图7.35　流动涡再附点确定图

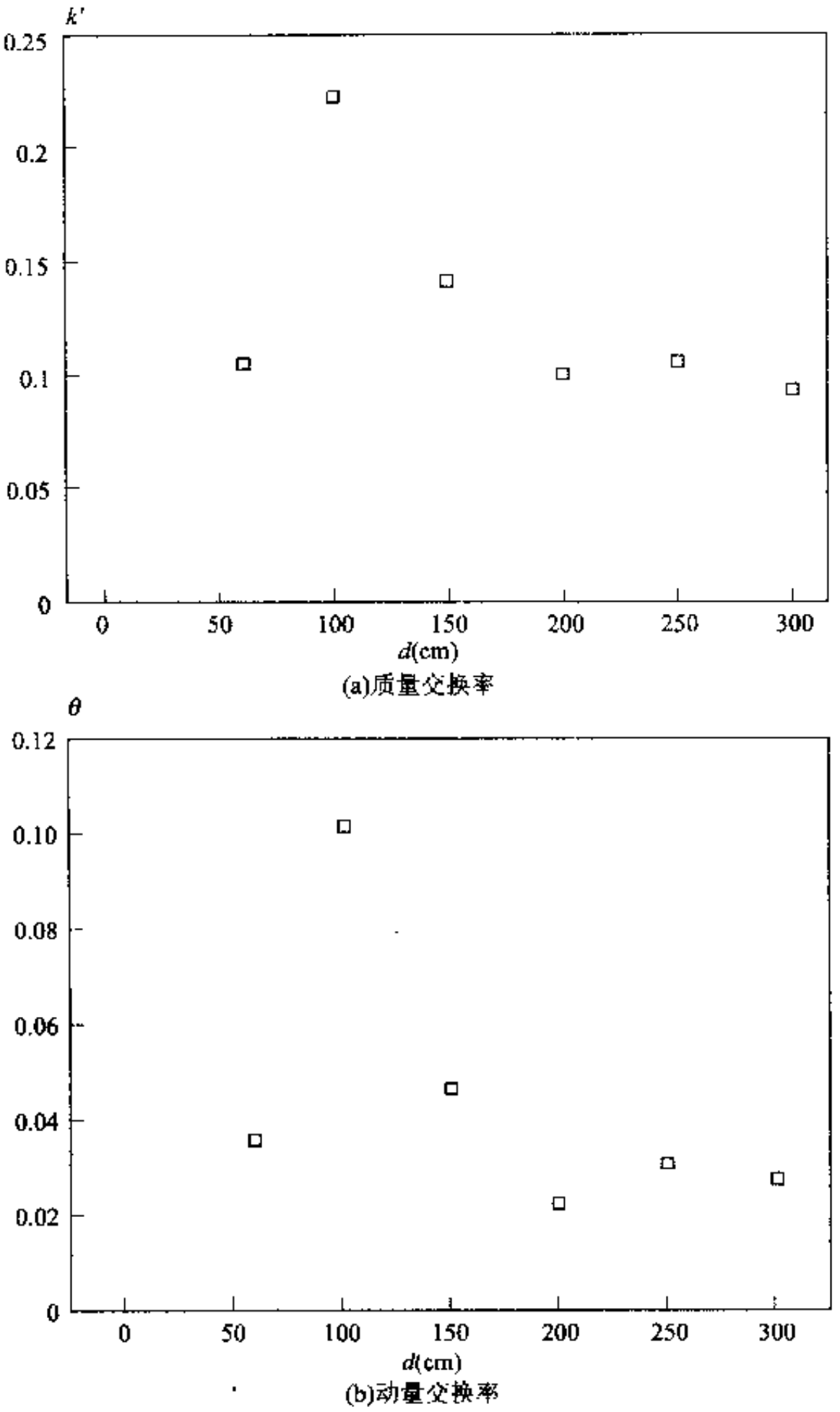


图7.36　质量与动量交换率

第八章　计算水动力学中的随机方法

水流运动有许多随机现象，如紊流、旋涡，污染在水流的扩散，波浪运动，洪水演进，泥砂的起动与淤沉，掺气与雾化等等。概率论是研究随机现象的数量规律的科学，研究上述现象要用到概率论中的方法，其中随机游动 (Randam Walk) 方法或叫蒙特卡罗 (Monte - Carlo) 方法是其中重要的一个分支。它的思想虽然古老，随着电子计算机的飞速发展，它产生了新的活力。它可以解多重积分，代数方程组，偏微分方程等确定性问题，也可以解泥沙沉降，紊动扩散等随机性问题。做为一种数值计算方法，它计算简单灵活，结果形象直观，从一维到二维、三维无本质困难，我们近年用此方法解势流问题，对流扩散问题，最近并推广到自由面流动，管网与河网，两相流动诸方面，为随机方法在计算水动力学中开创了新的广阔的应用前景。

下面我们叙述蒙特卡洛法在水动力学中应用的原理及其特点，和若干个成功的例证。

§8.1　随机游动方法的原理

随机游动 (Monte-Carlo) 方法可以解决各种类型的问题，概括起来有如下两类：

第一类是确定性问题，如解偏微分方程，首先建立一个与所求解的有关的概率模型，使所求的解就是概率模型的概率分布或数学期望，然后对这个模型进行随机试验抽样观察，即产生一系列的随机变量，最后用其算术平均值作为方程解的近似估值。

第二类是随机性问题，如扩散问题，对于这类问题，可以表示为某种函数方程，多重积分等，并进而考虑用随机抽样方法求解。而在一般情况下可以不采用这样间接模拟方法，而采用直接模拟方法。即根据实际物理情况的概率法则，对其分布用计算机进行抽样试验，用随机游动的质点表示其运动的形态、路径与规律，如粒子穿透问题，泥沙颗粒沉降问题，污染物扩散问题，都属于这一类。

下面我们分别介绍解方程与直接质点游动。

8.1.1　简单的随机游动解方程的例子

用随机游动 (Monte-Carlo) 方法解 Laplace 方程 $\nabla_h^2=0$ 是用随机方法解确定性问题最初的简单问题的例子。

差分法中心差离散格式，对于二维 Laplace 方程有如下形式，如图 8.1 所示：

$$\frac{\psi_{i-1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{\psi_{i,j-1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}=0 \tag{8.1.1}$$

如果 $\Delta x=\Delta y=k$，则有

$$\psi_{i,j}=\frac{1}{4}(\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}+\psi_{i,j-1}+\psi_{i,j+1})$$

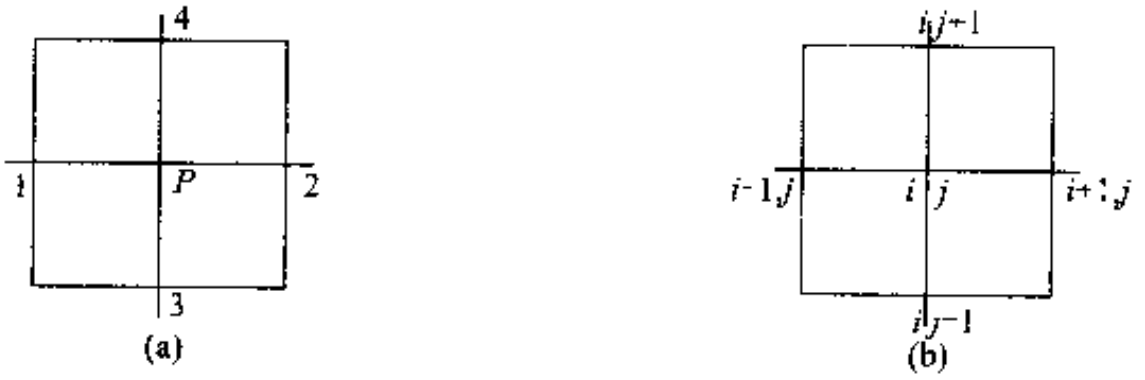


图8.1　网格示意图

也可写作图 8.1 (a) 中，中心 P 点与其周围 4 点的关系，即周围 1，2，3，4 点对中心 P 点的“贡献”。

$$\psi_P=\frac{1}{4}(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4) \tag{8.1.2}$$

$$=c_1\psi_1+c_2\psi_2+c_3\psi_3+c_4\psi_4=c_i\psi_i$$

此时系数 $c_1=c_2=c_3=c_4=1/4=0.25$，即“贡献”系数为 $c_i=0.25$。

对于一维问题 Laplace 方程，这个问题可以表示得更为清晰、直接些，如下图 8.2 直杆 LR 分为 10 段，边界点 $X_L=0$，$\psi=0$，$X_R=1$，$\psi=1$。

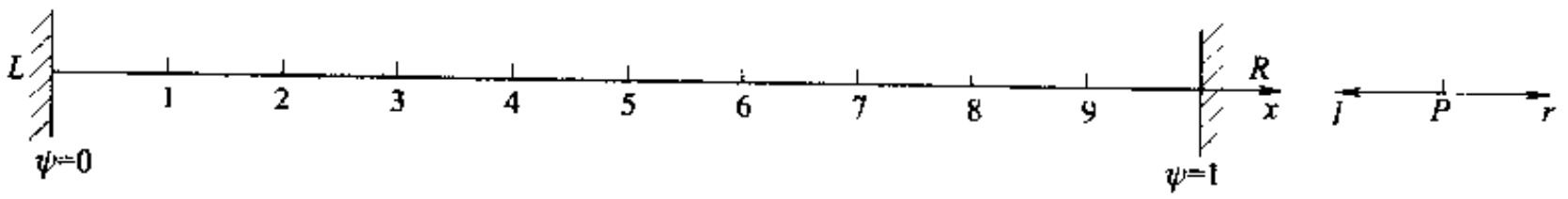


图8.2　一维网格剖分

内点有 9 个，1，2，3，…，8，9；如果在内点第 8 点，放一个质点，让他作均匀分布的随机游动；每次随机地向左或向右跨一步，最后到达左端 L 或右端 R 算一次，取端点（边界点）的值。

因为，按一维 Laplace 方程

$$\psi_P=\frac{1}{2}\psi_l+\frac{1}{2}\psi_r=0.5\psi_l+0.5\psi_r$$

因为质点向左或向右游的机会均等。各占百分之五十，与差分“贡献”为 0.5 相对应。

显然，这样均匀的随机的游动，从第 8 点出发，作多次试验结果，落在右边界点（端点）R 点的机会多，而落在距 8 点远的左边界（端点）L 点的机会（次数）会少一些。试验 $N=1\,000$ 次的结果，其中有 822 次落到 R 点，有 178 次落到 L 点。

最后，将落到边界点次数与边界点取值加权平均，就是第 8 点的 ψ 值。

$$\psi_8=(822\,\psi_R+178\,\psi_l)=0.822\doteq 0.8$$

游动次数 N 越增加，精度越高，计算结果为各点 ψ 值，见表 8.1。

按照精确解各内点的 ψ 值应该是：$\psi_1=0.1$，$\psi_2=0.2$，$\psi_3=0.3$，$\psi_4=0.4$，$\psi_5=0.5$，$\psi_6=0.6$，

表 8.1　ψ 值计算表

点　号	$N=10^2$	$N=10^4$	$N=10^6$
1	0.091	0.1 050	0.10 432
2	0.224	0.2 017	0.20 358
3	0.306	0.3 012	0.30 025
4	0.391	0.4 004	0.40 161
5	0.511	0.5 026	0.50 197
6	0.590	0.5 986	0.59 765
7	0.681	0.6 973	0.69 850
8	0.822	0.7 976	0.79 693
9	0.886	0.8 440	0.89 652
最大误差 %	12%	5%	4%

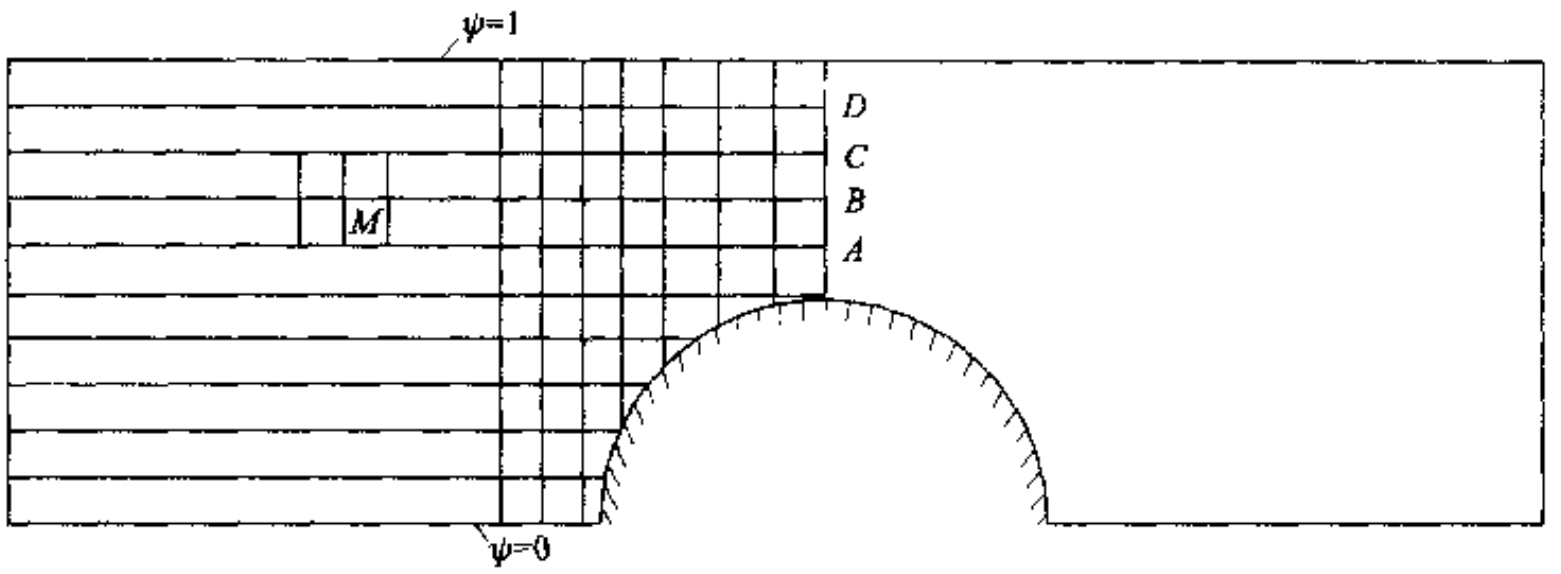


图8.3　二维圆柱绕流网格

$\psi_7=0.7$, $\psi_8=0.8$, $\psi_9=0.9$, 它们与随机方法所得的近似解之间有一定误差，但也表示采用随机游动方法，解方程虽是近似的但也是有效可行的。精度问题可以采用各种有效手段加以提高。

下面以二维圆柱绕流势流解问题，解流函数满足的 Laplace 方程 $\Delta\psi=0$为 例。

产生 一个概率为 (0,1) 之间的随机数 (伪随机数)，以 M 点为质点游动的起始点，当概率 P 取一定范围值时，分别按以下规律向左、右、下、上游动一步

$$0\leqslant P\leqslant 0.25 \quad \leftarrow, \quad 0.25\leqslant P\leqslant 0.5 \rightarrow$$

$$0.5 \leqslant P \leqslant 0.75 \quad \downarrow, \qquad 0.75 \leqslant P \leqslant 1.0 \quad \uparrow$$

如此继续下走，直到质点落到边界上，为一次路线游动的终结。每个点游动 $N=1\,000$ 次。得 A、B、C、D 各点的函数 ψ 值如下：

ψ值	随机走步数
$\psi_A=0.250$	$K_A=10\,007$
$\psi_B=0.452$	$K_B=15\,263$
$\psi_C=0.624$	$K_C=14\,452$
$\psi_D=0.833$	$K_D=9\,308$

8.1.2 蒙特卡罗方法的思想及特点

蒙特卡罗方法 (Monte Carlo Method)，它的基本思想是，为了求解数学、物理、工程技术以及生产管理等方面的问题，首先建立一个概率模型或随机过程，使它的参数等于问题的解，然后通过对模型或过程的观察或抽样试验来计算所求参数的统计特征，最后给出所求解的近似值，而解的精确度可用估计值的标准误差来表示。

假设所要求的量 Φ 是随机变量的数学期望 $E(\xi)$，那么近似确定 Φ 的方法是对 ξ 进行 N 次重复抽样，产生相互独立的 ξ 值的序列 ξ_1、ξ_2、…、ξ_N，并计算其算术平均值：

$$\bar{\xi}_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i \tag{8.1.3}$$

根据加强大数定律有 Law of Large Number

$$\Pr\left(\lim_{N\to\infty}\bar{\xi}_N=\Phi\right)=1 \tag{8.1.4}$$

因此，当 N 充分大时，下式

$$\bar{\xi}_N\approx E(\xi)=\Phi \tag{8.1.5}$$

成立的概率等于 1，亦即可以用 $\bar{\xi}_N$ 作为所求量 Φ 的估计值。

Poisson 方程第一边值问题的蒙特卡罗解法已很成熟，现以二维情形为例，说明其原理与解法。

二维 Poisson 方程及边界条件为：

$$\Delta\Phi(P)=q(P),\quad P\in D \tag{8.1.6}$$

$$\Phi(Q)=f(Q),\quad Q\in\Gamma \tag{8.1.7}$$

这里 D 是一个二维域，Γ 是 D 的边界，P 是 D 内的点，Q 是 Γ 上的点。

以间距为 $\Delta x=\Delta y=h$ 且平行于坐标轴的网格覆盖域 D。在接近边界 Γ 处，取与边界相距最近的结点，如图 8.4，将它们连成一个多边形域 D'，以 Γ' 表示多边形域 D' 的边界。

与方程 (8.1.6) 相应的离散化方程是

$$\Phi(P)=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\Phi(P_j)-\frac{h^2}{4}q(P),\ P\in D' \tag{8.1.6'}$$

其中 P 是 D' 内的结点，$P_j(j=1, 2, 3, 4)$ 是与点 P 相邻连接着的四个结点如图 8.5。

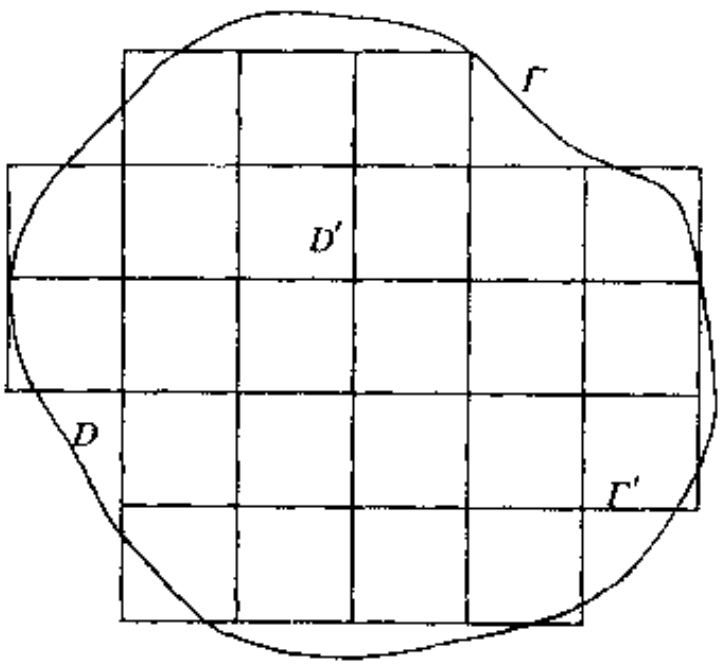


图8.4

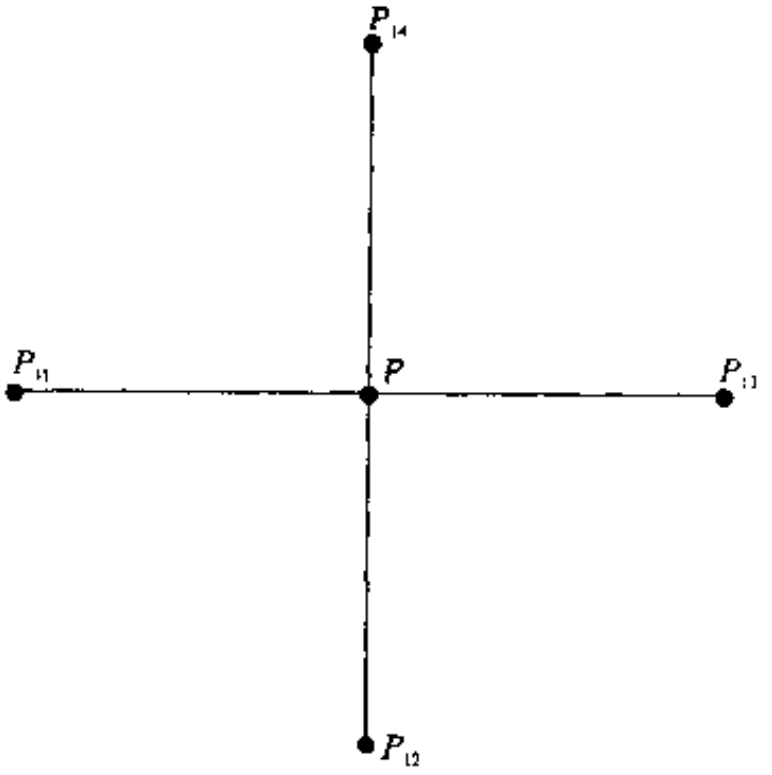


图8.5

边界条件 8.1.7 式离散化为

$$\Phi(Q)=f(Q),\ Q\in\Gamma' \tag{8.1.7'}$$

其中 Q 是边界 Γ' 上的结点。

为了求函数 Φ 在域 D' 内结点 P 处的值 $\Phi(P)$，构造一个二维随机游动如下：设想有一质点，自点 P 处出发，以等概率 1/4 向与 P 相邻接的四个结点 P_{11}、P_{12}、P_{13}、P_{14} 之一个随机移动一步，然后再按同样的方式即同样的转移概率自新的位置向与之邻接的四点处随机移动一步。如此继续下去，直到质点第一次到达边界 Γ' 上的一个结点处为止，这时一次游动便终止了如图 8.6 所示。

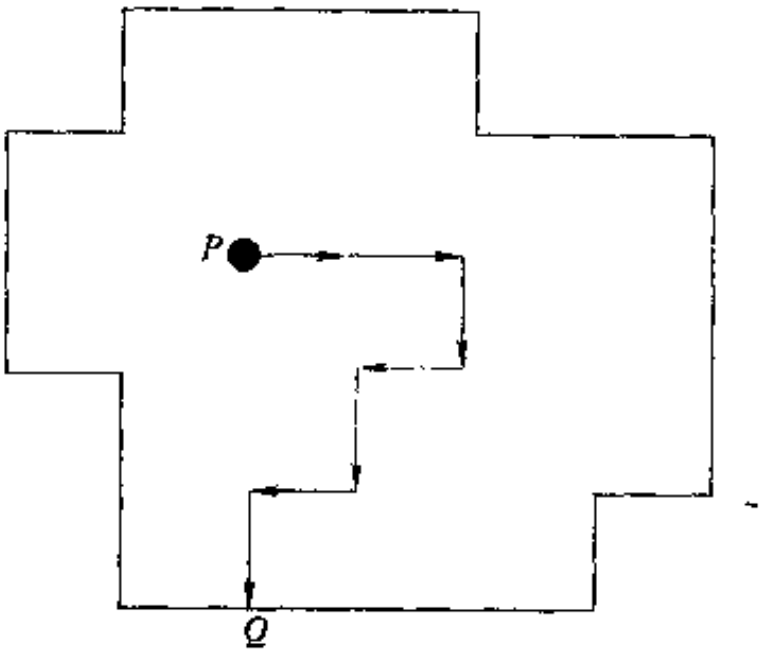


图8.6　质点游动路径

现在，按照下面的方式定义一个随机变量 ξ。

设随机游动的一条游动路线是

$$V_p:\qquad P\to P_1\to P_2\to\cdots\to P_{k-1}\to Q\in\Gamma'$$

对于这样的一条游动路线，定义随机变量的值为：

$$\xi=g(v_p)=-\frac{h^2}{4}[q(P)+q(P_1)+\cdots+q(P_{k-1})]+f(Q) \tag{8.1.8}$$

如果质点游动的出发点是边界结点 Q，则它就停留在点 Q 处，这时定义 ξ 的值为

$$\xi=g(V_0)=f(Q) \tag{8.1.9}$$

经证明，这样定义的随机变量 ξ 的期望值 $E(\xi)=\Phi(P)$。把由 P 点开始而在边界 Γ' 上终止的游动称为一次随机游动。而一次随机游动有一个随机变量 ξ 的取值，经过 N 次随机游动，即获得 N 个随机变量值 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$。用平均值 $\bar{\xi}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$ 作为 $\Phi(P)$ 的近似值。

Laplace 方程是 Poisson 方程的一种特例，因此，亦可用上述方法求解。

1956 年，M. E. Muller 在求解 Laplace 方程边值问题时，提出了一种不用差分近似的连续蒙特卡罗解法，它的大致步骤如下：设 $S(P)$ 是以 P 为中心不超出区域 D 的最大内接球（圆），在 $S(P)$ 的球表面（圆周）上产生随机点 P_1，以 P_1 为中心再作最大的内接球（圆）$S(P)_1$，再在 $S(P)_1$ 的球表面（圆周）上产生随机点 P_2，如此继续下去，如果被取的随机点落在边界点 Q 的 ε 邻域内，游动终止，即取边界值 $f(Q)$ 作为随机变量取值，这样的游动进行 N 次后，求算术平均值 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(Q_i)$，即得到解 $\Phi(P)$ 的估计量。这种作法只适用于某些简单问题，对复杂问题不易操作实施。

1959 年，L. W. Ehrlich 讨论了方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{k}{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \quad (x, y)\in D \tag{8.1.10}$$

的边值问题的蒙特卡罗解法。

1962 年，王建华提出了一般椭圆型方程

$$a(P)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+c(P)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+p(P)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+q(P)\frac{\partial\Phi}{\partial y}+r(P)\Phi=s(P), \quad P\in D \tag{8.1.11}$$

的第一边值问题的蒙特卡罗解法。此外，还以二维 Laplace 方程为例，说明了椭圆型方程第二、三边值问题的蒙特卡罗解法。

1988 年，郑邦民、吉庆丰提出了一般抛物型方程（对流扩散方程）

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}-a(P)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-c(P)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+u(P)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+V(P)\frac{\partial\Phi}{\partial y}+r(P)\Phi=s(P), \quad P\in D \tag{8.1.12}$$

的蒙特卡罗解法，其中 $a(P)>0$，$c(P)>0$，P 代表点 (x, y, t)。边界条件为

$$\Phi(Q)=f(Q), \quad Q\in\Gamma$$

利用一些典型算例对给出的随机游动模型作了验证计算，并就抛物型方程蒙特卡罗解法的误差作了一些初步的理论分析和数值试验研究。

在上述各种方程的蒙特卡罗求解过程中，所用的游动网格几乎都是规则网格，即矩形网格或长方体网格，对几何边界较复杂的问题，边界处理较麻烦，误差也大。

将蒙特卡罗方法直接用于解决水力学工程实际问题的研究成果还不多，已有的成果多限于固体颗粒在流体中的运动问题、污染物的对流扩散问题，所用方法基本上为直接模拟方法。

1964 年，G. Bugliarello 和 E. D. Jackson 应用蒙特卡罗方法，研究了层流中瞬时点源的对流扩散过程。他们采用了零阶马尔可夫链模型，用质点位移表达为

$$x_{i+1}=x_i+L_x+u_i\Delta t$$

$$y_{i+1}=y_i+L_y \tag{8.1.13}$$

如图 8.7 所示，式中 L_x、L_y 分别为在一个时间间隔 Δt 内，分子扩散的确定性步长 L 在 x、y 方向的随机分量，u_i 是位于中线距离为 y_i 处的层流流速。L_x、L_y 可由 L 与 x 轴正向夹角（0°至 360°间的随机角度）确定：

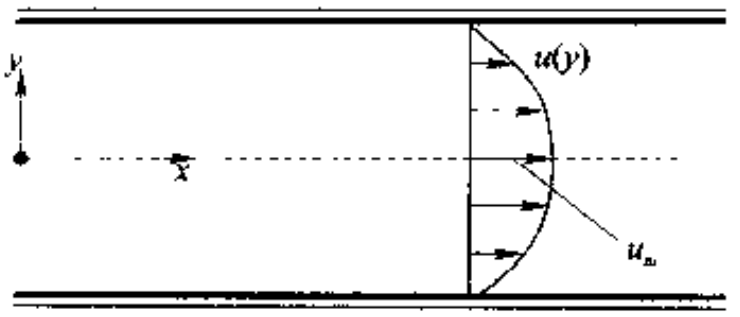


图8.7　管道流动

$$L_x=\frac{\alpha L}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$L_y=\frac{\beta L}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \tag{8.1.14}$$

其中 α、β 是两个随机数，表示单位圆上的一点横坐标与纵坐标，分别独立地服从−9 至+9 共 19 个整数的均匀分布。模型中存在如何确定 L 的问题，Bugliarello 在其论文中没有讨论，只是取其无量纲的一个单位。

1969 年，C. L. Chiu 对固体质点（泥沙）在紊流中的随机运动进行了研究，得到的质点群运动的随机模型为：

$$x_{i+1}=x_i+(l_x)_i+u_i\Delta t_i$$

$$y_{i+1}=y_i+(l_y)_i+v_i\Delta t_i$$

$$z_{i+1}=z_i+(l_z)_i+w_i\Delta t_i \tag{8.1.15}$$

式中 x_i, y_i, z_i 分别表示固体质点在经历时间 t_i 第 i 个随机步进后的位置坐标；$(l_x)_i$、$(l_y)_i$、$(l_z)_i$ 表示粒子在 t_i 到 $t_i+\Delta t_i$ 内的随机步长 L_i 在 x、y、z 方向上的随机位移分量；Δt_i 的大小可随质点的位置而变化，为确定性的量；u_i、v_i、w_i 是(x_i, y_i, z_i)处确定性时均速度在 x, y, z 方向上的分量。模型中只有$(l_x)_i$、$(l_y)_i$、$(l_z)_i$ 为随机量，由紊动而产生，Chiu 认为有

$$(l_x)_i=|L_i|\sin\theta_i\cos\Phi_i$$

$$(l_y)_i=|L_i|\sin\theta_i\sin\Phi_i$$

$$(l_z)_i=|L_i|\cos\Phi_i \tag{8.1.16}$$

即认为 L_i 的模量 $|L_i|$ 是确定性量，方向是随机的。式中 θ_i、Φ_i 是从 0°到 360°之间变化的独立随机变量。

1971 年，M. Bayazit 在研究沉沙池内固体颗粒运动时，提出了三个随机模型。第一个模

型为

$$\Delta x = u\Delta t$$

$$\Delta z = (w - w_s)\Delta t \tag{8.1.17}$$

其中 u 是纵向平均流速，w_s 为沉速，w 为垂向脉动速度。计算时认为脉动速度 w 服从正态分布，取无量纲时间间隔 $\Delta t_0 = \frac{\Delta t u}{h} = 0.01$。第二个模型，Bayazit 考虑了垂向上悬浮物质浓度梯度的影响，引入有效垂向速度 w_e 代替式 (8.1.17) 中的 $(w - w_s)$。采用浓度分布等经验分布得

$$w_e = -\frac{w' w_s}{\left(u \cdot \sqrt{1 - \frac{z}{h}}\right)} - w_s \tag{8.1.18}$$

其中 w' 方向始终向上，仅大小为随机。第三个模型是属一阶马尔可夫链模型。Bayazit 在以上基础上，考虑了脉动速度的相关性，脉动速度表示为

$$w(t + \Delta t) = r\,w(t) + b \tag{8.1.19}$$

式中 r 为相关系数，在计算中采用一常数值 0.25，b 为均值为零、方差为 $\sqrt{w^2(t+\Delta t) - r^2 w^2(t)}$ 的正态随机变量。此模型在物理意义上比前面两个模型更合理，但其中的物理量如相关系数 r 仍未解决，在实用上仍有较大困难。

1975 年，R. M. Li 和 H. W. Shen 在研究明渠流中固体质点的随机沉降中，采用的模型在思想上与 Bayazit 的相似，具体参数的确定方法有所不同，1986 年，黄克中、张子亚在研究平面二维污染带计算中，在 G. Bugliarello 的零阶马尔可夫链模型的基础上，考虑了脉动速度的相关性，提出了一阶、二阶马尔可尔链计算模型。

80 年代中期以后，随着两相流、多相流理论的不断完善，从两相流角度来研究固体颗粒在流体中运动的成果增多。1984 年，F. Durst 等人讨论了固液两相流中固体颗粒运动的数值预报；1986 年，A. Picart 等人讨论了紊流场中分散颗粒的扩散问题；1992 年，郑邦民，方红卫，对“悬沙的随机运动及沉沙池计算”进行了研究；1994 年，李嘉、赵文谦等人，就泥沙颗粒在沉沙池中的运动，提出了新的计算方法；1995 年，刘小兵、程良俊，就旋转流场中沙粒运动的数值模拟问题，作了一系列的研究工作。上述研究的基本方法是：运用两相流理论得出单个颗粒在紊流中的运动方程，结合流场的数值模拟，对运动方程中的一些参数予以确定，最后求解运动方程，得到颗粒的运动轨迹。这方面的研究虽然取得了一些成果，积累了一些成功经验，但仍很不成熟，尤其是颗粒运动方程中一些参数的计算，有必要做进一步深入的研究，这涉及紊动性质和紊动扩散系数的分析。

§8.2 随机游动法解对流扩散问题

水动力学中最重要的最典型的流动是对流扩散，解对流扩散方程是水动力学数值计算的基本任务。

下面让我们先看具有对流性质的波动方程求解，一维波动方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{8.2.1}$$

如为差分求解，时间用前差，空间用中心差隐格式，则有

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+c\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2h}=0 \tag{8.2.2}$$

得 $u_i^{n+1}=u_i^n+\frac{r}{2}u_{i-1}^{n+1}-\frac{r}{2}u_{i+1}^{n+1}$

式中 $r=\frac{c\tau}{h}$，如图 8.8 所示或写作

$$u_p=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+c_4u_4 \tag{8.2.3}$$

系数 $c_1=\frac{r}{2}$，$c_2=-\frac{r}{2}$，$c_3=1$，$c_4=0$

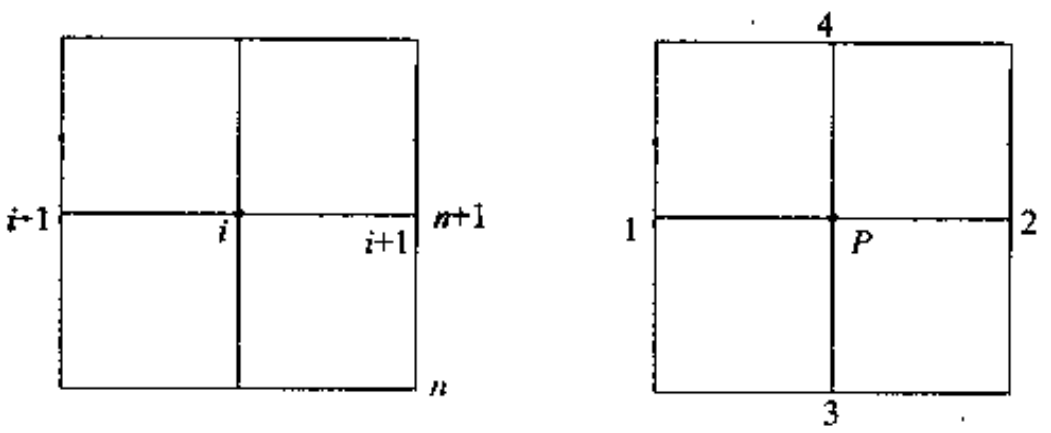


图8.8　二维游动网格示意图

随机方法把系数 c 对应于转移概率 P_{ij}，

$$c_1=P_{p1}=\frac{\frac{r}{2}}{1+\frac{r}{2}+\frac{r}{2}},\quad c_2=P_{p2}=\frac{\frac{r}{2}}{1+\frac{r}{2}+\frac{r}{2}},$$

$$c_3=P_{p3}=\frac{1}{1+\frac{r}{2}+\frac{r}{2}},\quad c_4=P_{p4}=0$$

仍采取产生 (0,1) 之间均匀分布的随机数，如果

在 0 至 P_{p1} 之间，　　$P\rightarrow 1$ 点

在 P_{p1} 至 $P_{p1}+P_{p2}$ 之间，　　$P\rightarrow 2$ 点

在 $P_{p1}+P_{p2}$ 至 $P_{p1}+P_{p2}+P_{p3}$ 之间，　　$P\rightarrow 3$ 点

$P_{p4}=0$　　P不转向 4 点

这样就把随机游动的随机转移概率与表示物理特征的物理参数联系起来，使随机模型与确定性方法相结合。

这样一来，我们可以用随机游动 (Monte-Carlo) 解各类数学物理方程，如对流扩散方程

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u_i\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=\varepsilon\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}+S \tag{8.2.4}$$

一维、二维、三维至高维，多个点，多个断面，多个方程，我们曾用它解决过水库热分布、射流污染、坝面流动、渗流、挑流水舌雾化、水网等各种工程实际课题，详见参考文献。

8.2.1 一般抛物型方程的蒙特卡罗解法及其证明

一般二维抛物型方程可写成如下的形式：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}-a(P)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}-c(P)\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+u(P)\frac{\partial \phi}{\partial x}+v(p)\frac{\partial \phi}{\partial y}+r(P)\phi(P)=s(P),\ P\in\Omega \tag{8.2.5}$$

式中 $a(P)>0$，$c(P)>0$ P 代表点 (x, y, t)。

设边界条件为

$$\phi(Q)=f(Q),\ Q\in\Gamma \tag{8.2.6}$$

这里 Ω 是一个时空域，Γ 是 Ω 的边界，P 是 Ω 内的点，Q 是边界 Γ 上的点。为简便起见，本节均将方程的初始条件和边界条件合在一起表达。

以步长 $\Delta t=h_t$、$\Delta x=h_x$、$\Delta y=h_y$ 且平行于坐标轴的网格覆盖区域 Ω，在接近边界 Γ 处，取与边界相距最近的节点，将它们连成一个新区域 Ω'，以 Γ' 表示 Ω' 的边界。

(8.2.5) 式离散化后的形式为：

$$\phi(P)=[1+P_e(P)]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{5}P_{1i}(P)\phi(P_{1i})+P_t(P)s(P)\right],\ P\in\Omega' \tag{8.2.7}$$

式中，P_{1i} 是与点 P 相邻的五个节点，如图 8.9 所示：

$$P_0(P)=1+2\alpha_x+2\alpha_y+\beta_{x1}-\beta_{x2}+\beta_{y1}-\beta_{y2},$$

$$P_{11}(P)=\frac{(\alpha_x+\beta_{x1})}{p_0(P)},\quad P_{12}(P)=\frac{(\alpha_x-\beta_{x2})}{p_0(P)},$$

$$P_{13}(P)=\frac{(\alpha_y+\beta_{y1})}{p_0(P)},\quad P_{14}(P)=\frac{(\alpha_y-\beta_{y2})}{p_0(P)},$$

$$P_{15}(P)=\frac{1}{p_0(P)},\quad P_t(P)=\frac{h_t}{p_0(P)},$$

$$P_e(P)=\frac{h_t r(P)}{p_0(P)},$$

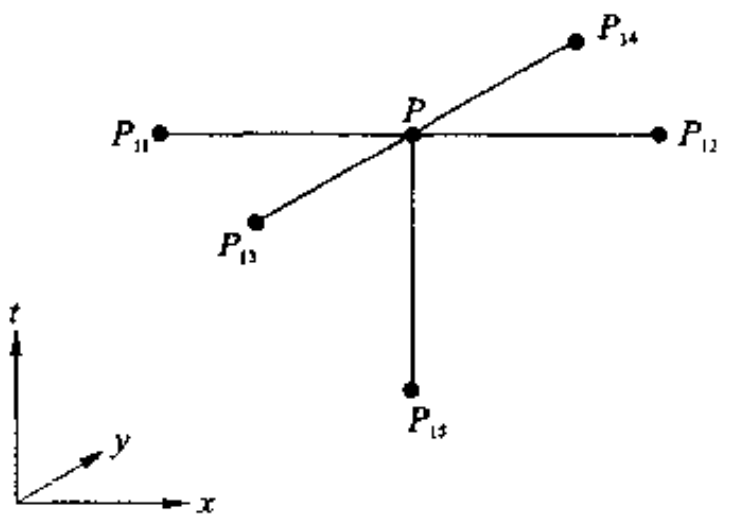


图8.9 质点不规则游动

$$a_x=\frac{a(P)h_t}{h_x^2},\quad a_y=\frac{c(P)h_t}{h_y^2},$$

$$\beta_{x1}=h_t u(P)\frac{\left[0,\ \frac{u(P)}{|u(P)|}\right]}{h_x},$$

$$\beta_{x2}=h_t u(P)\frac{\left[0,\ \dfrac{-u(P)}{|u(P)|}\right]}{h_x},$$

$$\beta_{y1}=h_t v(P)\frac{\left[0,\ \dfrac{v(P)}{|u(P)|}\right]}{h_y},$$

$$\beta_{y2}=h_t v(P)\frac{\left[0,\ \dfrac{-v(P)}{|u(P)|}\right]}{h_y}.$$

[|x_1, x_2|]表示在两者中选大的一个。

(8.2.6) 式离散化后的形式为：

$$\phi(Q)=f(Q),\quad Q\in\Gamma'$$

为了求函数ϕ在区域Ω'内节点P处的值$\Phi(P)$，构造一个随机游动模式如下：设一质点自节点$P=P_0\in\Omega'$处出发，按照概率$P_{11}(P)$、$P_{12}(P)$、$P_{13}(P)$、$P_{14}(P)$、$P_{15}(P)$分别向与P相邻的五个节点P_{11}、P_{12}、P_{13}、P_{14}、P_{15}处随机移动一步。如果质点第一步到达的位置是P_{12}，再按概率$P_{11}(P_{12})$、$P_{12}(P_{12})$、$P_{13}(P_{12})$、$P_{14}(p_{12})$、$P_{15}(P_{12})$分别向P_{12}相邻的五个节点随机移动一步。如此重复下去，直到质点第一次到达一个边界节点Q处时，游动即告终止。

今：
$$W(P)=[1+P_c(P)]^{-1}$$

$$Z(P)=P_c(P)s(P), \tag{8.2.8}$$

$$W_i=W(P_i),\quad Z_i=Z(P_i),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1.$$

对于每一个自节点$P=P_0\in\Omega'$处出发而终止于边界节点$Q\in\Gamma'$处的游动路线

r_P：
$$P=P_0\to P_1\to P_2\cdots P_{k-1}\to Q\in\Gamma',$$

定义随机变量ξ的值为

$$\xi=g(r_P)=\sum_{m=0}^{k-1}\left(\prod_{i=0}^{m}W_i\right)Z_m+\left(\prod_{i=0}^{k-1}W_i\right)f(Q) \tag{8.2.9}$$

如果质点游动的出发点是边界节点Q，则它就停留在点Q处，这时定义ξ的值为

$$\xi=g(r_Q)=f(Q) \tag{8.2.10}$$

下面证明，随机变量ξ的数学期望是满足离散化方程 8.2.7 及初边条件的解，即

$$E(\xi)=E(g(r_P))=\phi(P) \tag{8.2.11}$$

证明：要证 (8.2.11) 式，需证明：

$$E(g(r_P))=[1+p_e(P)]^{-1}\left[\sum_{z=1}^{5}p_{1z}(P)E(g(r_{Pz}))+p_1(P)s(P)\right],\quad P\in\Omega' \tag{8.2.12}$$

$$E(g(r_Q))=f(Q),\quad Q\in\Gamma' \tag{8.2.13}$$

先证明 (8.2.12)

若将每一条游动路线

$$r_P:\quad P=P_{11}\to P_{21}\to P_2\to\cdots P_{k-1}\to Q\in\Gamma'$$

看作是由 $P\to P_{1z}$ 和

$$r_{Pz}:\qquad P_{1z}\to P_2\to\cdots\to P_{k-1}\to Q\in\Gamma'$$

这两条路线组成的，则由 (8.2.9) 式，对于第二条路线 r_{Pz}，随机变量 ξ 应取的值是

$$g(r_{Pz})=\sum_{m=1}^{k-1}\left(\prod_{i=1}^{m}W_i\right)Z_m+\left(\prod_{i=1}^{k-1}W_i\right)f(Q) \tag{8.2.14}$$

由 (8.2.9) 式与 (8.2.14) 式，得

$$g(r_P)=W_0Z_0+\sum_{m=1}^{k-1}\left(\prod_{i=0}^{m}W_i\right)Z_m+W_0\left(\prod_{i=1}^{k-1}W_i\right)f(Q)$$

$$=W_0Z_0+\left[\sum_{m=1}^{k-1}\left(\prod_{i=1}^{m}W_i\right)Z_m+\left(\prod_{i=1}^{k-1}W_i\right)f(Q)\right]W_0$$

$$=W_0Z_0+W_0g(r_{Pz})$$

对每一个节点 $P\in\Omega'$，有

$$E(g(r_P))=\sum_{\{r_P\}}g(r_P)P_r(r_P)$$

$$=\sum_{z=1}^{5}\sum_{\{rp\}}[W_0Z_0+W_0g(r_{Pz})]P_r(P\to P_{1z})\cdot P_r(r_P)$$

$$=W_0Z_0\sum_{z=1}^{5}\sum_{\{r_z\}}P_r(P\to P_{1z})P_r(r_{Pz})+W_0\sum_{z=1}^{5}\sum_{\{r_z\}}g(r_{Pz})P_r(P\to P_{1z})P_r(r_P)$$

$$=W_0Z_0\sum_{z=1}^{5}P_r(P\to P_{1z})\sum_{\{rPz\}}P_r(r_{Pz})+W_0\sum_{z=1}^{5}P_r(P\to P_{1z})\sum_{\{r_z\}}g(r_{Pz})P_r(r_{Pz})$$

$$=W_0Z_0\sum_{z=1}^{5}P_r(P\to P_{1z})\cdot 1+W_0\sum_{z=1}^{5}P_{1z}(P)\cdot\sum_{r_z}g(r_z)\cdot P_r(r_{Pz})$$

$$= W_0 Z_0 + W_0 \sum_{i=1}^{5} P_{1i}(P) E(g(r_{Pi}))$$

$$= W_0 \left[\sum_{i=1}^{5} P_{1i}(P) E(g(r_{Pi})) + Z_0 \right]$$

(8.2.12) 式证毕。

在上述证明过程中，$P_r(r_0)$ 是质点循路线 r_P 游动的概率，$P_r(P \to P_{1i})$ 是质点从 P 点游到 P_{1i} 点的转移概率。

下面再证明 (8.2.13) 式。

对于每一个节点 $Q \in \Gamma'$，有

$$E(g(r_Q)) = \sum_{(r_Q)} g(r_Q) P_r(r_Q) = \sum_{(r_Q)} g(r_Q) = g(r_Q) = f(Q)$$

这就是要证的 (8.2.13) 式。从而 (8.2.11) 式也得到证明。

以上讨论的是一般二维抛物型方程 (8.2.5) 式在边界条件为第一类边界条件时的蒙特卡罗解法，下面讨论 (8.2.5) 式的几种特殊情形。

①当 $u(P)=v(P)=r(P)=s(P)=0$ 时，(8.2.5) 式变成如下的纯扩散方程：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a(P)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c(P)\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2},\ P \in Q \tag{8.2.15}$$

由 (8.2.9)、(8.2.10) 式可知，此时定义随机变量 ξ 的值为

$$\xi = g(r_P) = g(r_Q) = f(Q)$$

②当 $r(P)=s(P)=0$，方程 (8.2.5) 变成如下的对流扩散方程：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u(P)\frac{\partial \phi}{\partial x} + v(P)\frac{\partial \phi}{\partial y} = a(P)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c(P)\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2},\ P \in \Omega, \tag{8.2.16}$$

此时，定义随机变量 ξ 的值为

$$\xi = g(r_P) = g(r_Q) = f(Q)$$

至此，我们已对二维抛物型方程的蒙特卡罗解法作了一个较为详细的讨论，一维、三维抛物型方程的蒙特卡罗解法与二维情况相似，在此不再讨论。

从前面的讨论中可看出，蒙特卡罗解法与差分法既有相同之处，也有不同之处。相同之处在于二者都是求解同样的离散化方程，前面 (8.2.7) 式即为通常的差分方程，只不过在蒙特卡罗解法中，将 (8.2.7) 式中的 $p_{1i}(P)$ 当作转移概率来处理。不同之处在于二者的求解方式不一样，差分法是确定性联立解法，而蒙特卡罗解法是既有确定性一面，又有随机性一面的独立解法，其确定性一面表现在随机游动质点从任意内部节点 P 向相邻节点 P_{1i} 移动的转移概率 $P_{1i}(P)$ 是确定的，它取决于方程中的系数 $a(P)$、$c(P)$、$u(P)$、$v(P)$，其随机性一面表现在游动质点从任意内部节点 P 向相邻节点 P_{1i} 转移的方向 (即向哪一个节点转移) 是随机的，这导致了计算结果的随机性。蒙特卡罗解法可单独求解区域内任一节点上的值，不需要

像差分法那样对区域内所有节点联立求解。

以上讨论的是一般二维椭圆型方程在边界条件为第一类边界条件时的不规则游动网格的蒙特卡罗解法，不难类似地设计一维、三维情形的蒙特卡罗解法。对边界条件为第二类、第三类边界条件的问题，可以通过将第二类、第三类边界条件转换为第一类边界条件来处理，水动力学问题经常碰到的边界条件是第一类边界条件和 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0$ 这样的第二类边界条件。在随机游动过程中，只要将 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0$ 的边界当作反射壁面，就可以实现这种边界的处理，非常简便。

8.2.2 蒙特卡罗解法的计算机实现

建立随机游动模型（即寻找一种游动方式，定义一个随机变量 ξ，使得 $E(\xi(r_p))=\phi(P)$）之后，就可以在计算机上来实现随机游动过程。每模拟一次游动，便得一个 ξ 值，模拟 N 次，便得到 N 个 ξ 值：ξ_1、ξ_2、…、ξ_N。由大数定律知，$\phi(P)=E(\xi(r_p))\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$，这就求出了任意内部节点 P 处的函数值 $\phi(P)$ 的近似值。

在计算机上模拟随机游动过程可分成两个步骤：第一步产生 (0,1) 随机数，第二步实现随机游动。产生随机数的方法比较多，常用的有乘同余法、乘加同余法等。如采用乘同余法，即

$$X_{n+1}=\lambda X_n \pmod M \tag{8.2.17}$$

$$RN=\frac{X_n}{M}$$

式中参数取 $\lambda=7^5$，$M=10^{11}$，$X_0=1$。

有了随机数 RN，便可实现随机游动。设游动质点从任一内部节点 P 出发，当 $RN\leqslant P_{11}(P)$ 时，质点向节点 P_{11} 游动一步，当 $P_{11}(P)<RN\leqslant P_{11}(P)+P_{12}(P)$ 时，质点向节点 P_{12} 游动一步，当 $P_{11}(P)+P_{12}(P)<RN\leqslant P_{11}(P)+P_{12}(P)+P_{13}(P)$ 时，质点向节点 P_{13} 游动一步，当 $P_{11}(P)+P_{12}(P)P_{13}(P)<RN\leqslant P_{11}(P)+P_{12}(P)+P_{13}(P)+P_{14}(P)$ 时，质点向节点 P_{14} 移动一步，当 $RN>P_{11}(P)+P_{12}(P)+P_{13}(P)+P_{14}(P)$ 时，质点向 P_{15} 移动一步，如此重复下去，直至质点到达边界节点处为止，一次游动结束，得到一个 ξ 值。若游动 N 次，即作 N 次抽样，便得 N 个 ξ 值。经统计计算得出 $\phi(P)$ 的近似值。

8.2.3 对流扩散问题的蒙特卡罗解法的算例

①一维方波的对流扩散

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}=D_x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},\quad 0<x<1.5 \tag{8.2.18}$$

$$c(x,\ 0)=\begin{cases}1, & 0.15\leq x\leq 0.25\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$c(0,\ t)=0,\quad c(1.5,\ t)=0,\quad t>0,$$

式中 $u=1$，$D_x=0.01$。

图 8.10 给出 $t=0$ 的初始矩形波形，及 $t=0.1$，0.3，0.5 的分析解与随机解的比较，二者吻合良好，最大相对误差 ε_{max} 不超过 1.5%。

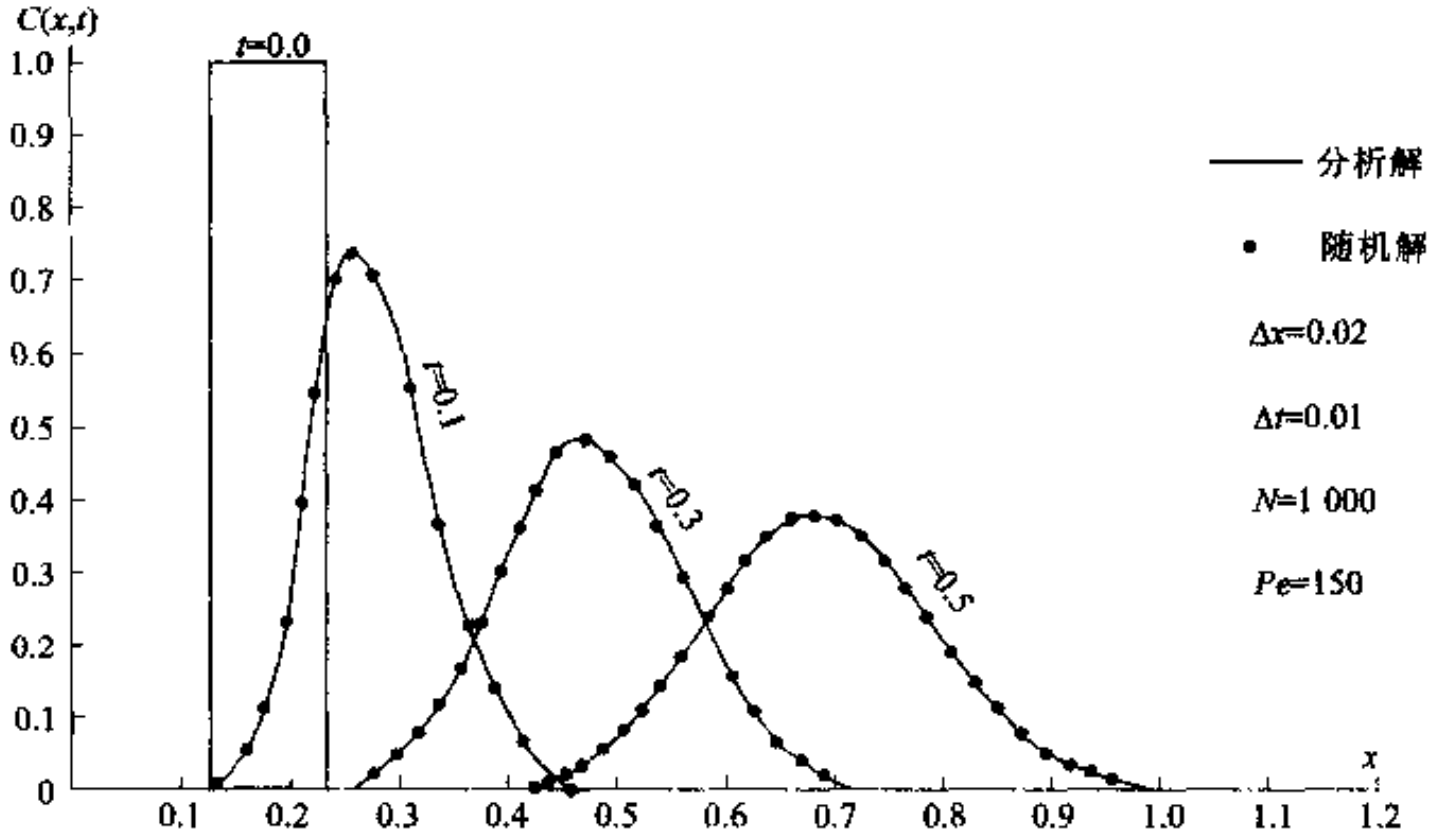


图8.10　一维对流扩散

② “运动”激波问题

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}=D_r\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},\quad 0<x<2 \tag{8.2.19}$$

$$c(x,\ 0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 2$$

$$c(0,\ t)=1,\quad c(2,\ t)=0,\quad t>0$$

式中 $D_r=0.01$。

图 8.11、8.12、8.13 给出了 $u=0$、0.05、10^4 三种情况下的分析解和随机之间的比较。可以看出，吻合还是好的。在 Pe 数较大时，由于在“激波”前区变化很大，故计算误差较大，图 8.11，图 8.12，图 8.13 的 Pe 数分别为 0.0，10.0，2.0×10^6 显示出随着对流不断加强的性质。图 8.11 为强扩散，图 8.13 为强对流。

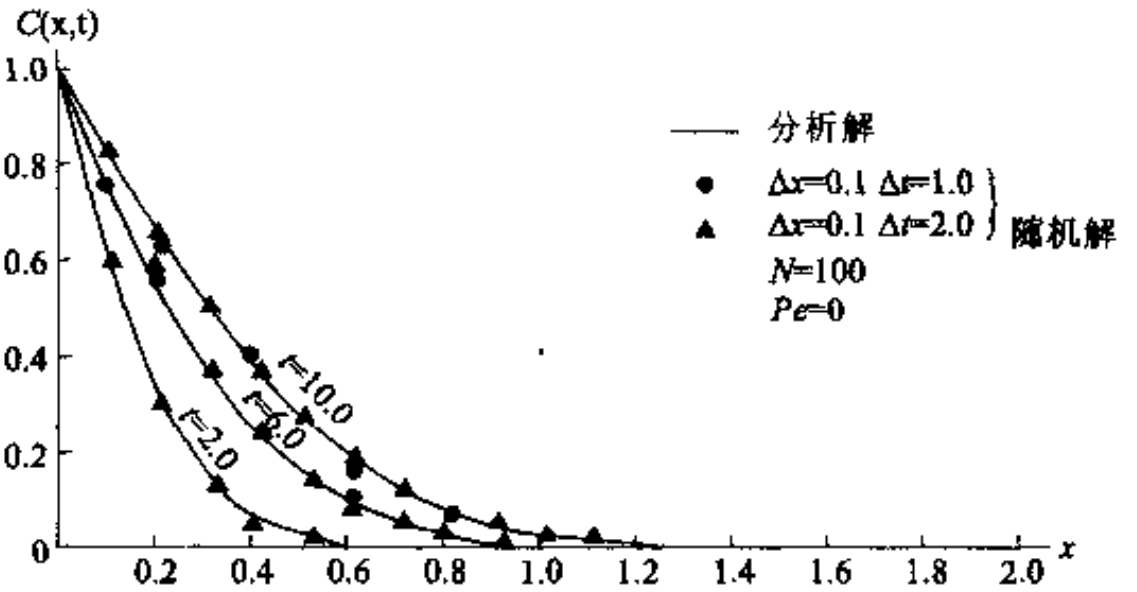


图8.11　对流扩散 $Pe=0$

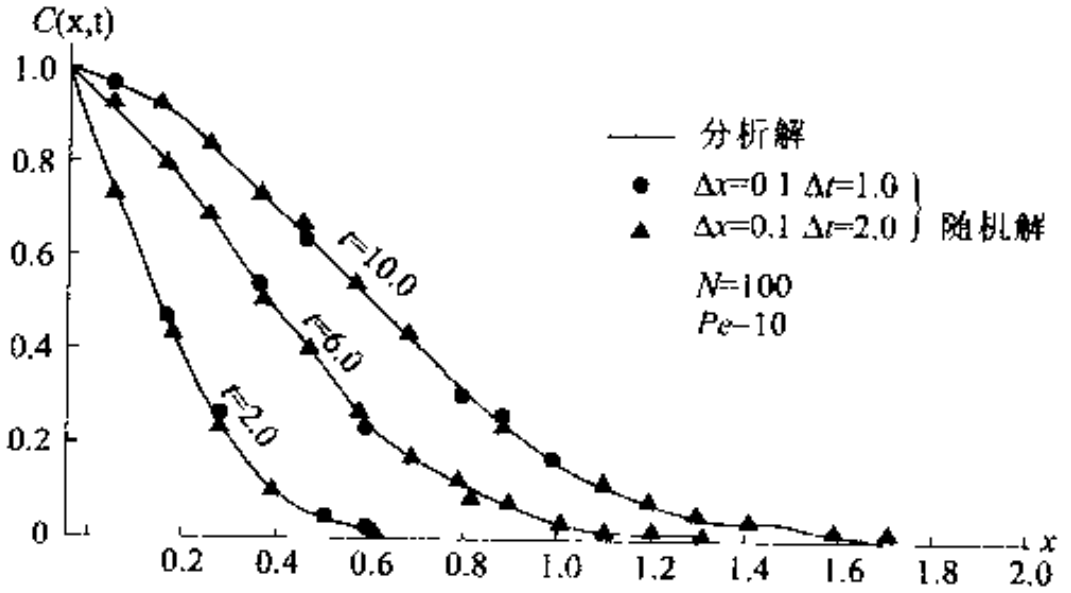


图8.12　对流扩散$Pe=10$

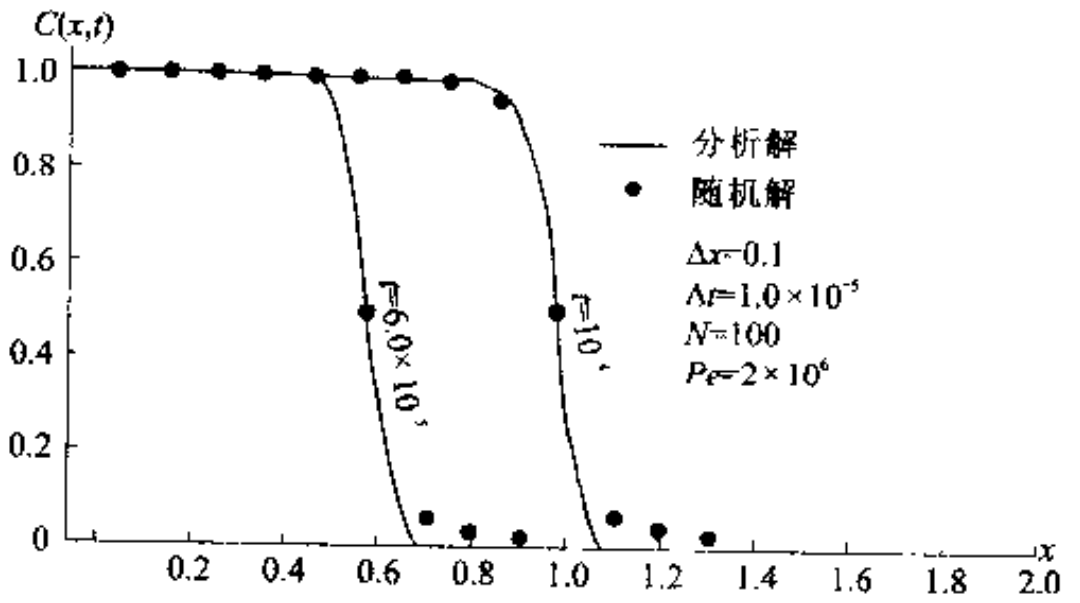


图8.13　对流扩散$Pe=2\times10^6$

③带源项扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D_x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+f(x,\ t),\ \ 0<x<\pi \tag{8.2.20}$$

$$c(x,\ 0)=\sin x,\ \ 0\leqslant x\leqslant\pi$$

$$c(0,\ t)=c(\pi,\ t)=0,\ \ t>0$$

式中 $D_x=0.01$，源项 $f(x,\ t)=10$ 。

图 8.14 给出了 $t=0.05$、0.1、0.2、0.4、0.6 时的分析解与随机解的比较，结果非常令人满意，最大相对误差 ε_{max} 不超过 4%。

④二维方波的对流扩散

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}=D_x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 c}{\partial y^2},\ \ 0<x,\ y<1 \tag{8.2.21}$$

$$c(x,\ y,\ 0)=\begin{cases}10, & |x-0.5|\leqslant0.15,\ |y-0.5|\leqslant0.15\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$c(0,\ y,\ t)=c(1,\ y,\ t)=0,\ \ t>0$$

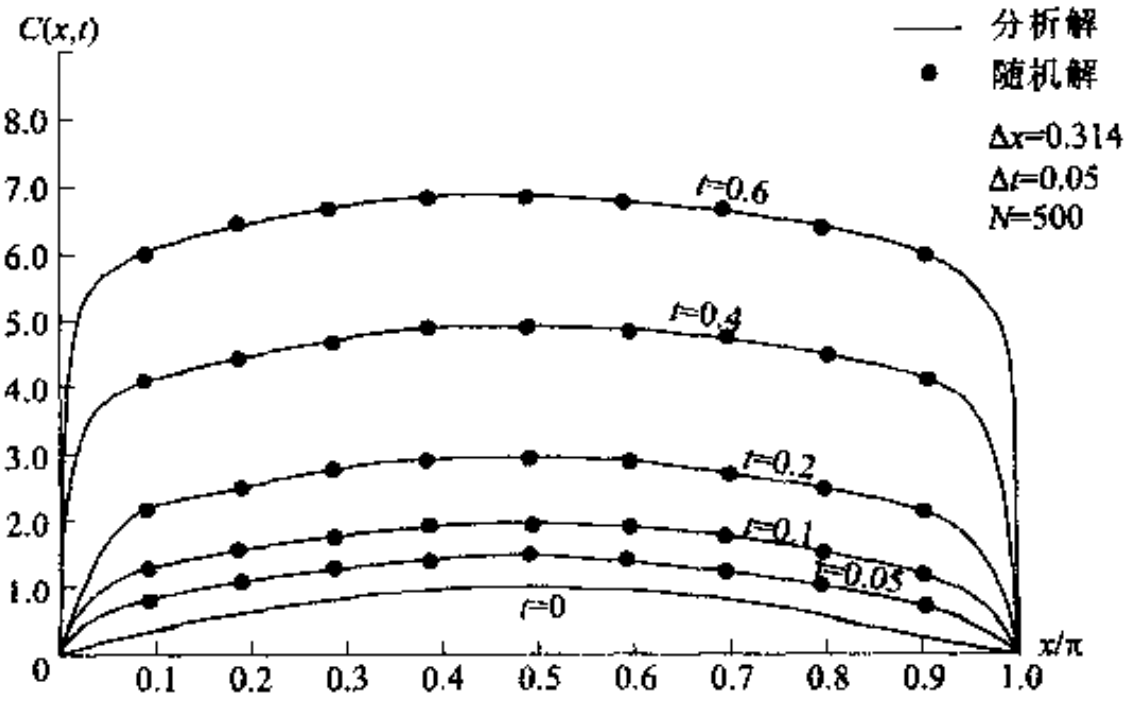


图8.14　带源项扩散

$$e(x,\ 0,\ t)=c(x,\ 1,\ t)=0,\quad t>0$$

式中 $u=1.0,\ D_x=D_y=0.01$。

图 8.15 给出了 $t=0$ 的初始波形以及 $t=0.1$、0.2 时的分析解与随机解，二者比较吻合，最大相对误差 ε_{max} 不超过 8%。

⑤二维带源项扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}=Dx\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+f(x,\ y,\ t),\ 0<x,\ y<\pi \tag{8.2.22}$$

$$c(x,\ y,\ 0)=\sin x\sin y,\ 0\leqslant x,\ y\leqslant\pi$$

$$c(0,\ y,\ t)=c(\pi,\ y,\ t)=0,\ t>0$$

$$c(x,\ 0,\ t)=c(x,\ \pi,\ t)=0,\ t>0$$

式中 $D_x=D_y=0.01$，源项 $f(x,\ y,\ t)=10$。

图 8.16 给出了 $t=0$ 的初始值以及 $t=0.05$、0.1、0.2、0.4 时的分析解和随机解，两者基本一致，最大相对误差 ε_{max} 在 12%以内。

总结本节内容可得以下几点讨论：

①本节给出了一般抛物型方程的蒙特卡罗解法及证明，并用所给解法对几个典型问题作了随机模拟。从模拟结果可以看出，分析解与随机解吻合良好，这说明用所给蒙特卡罗解法求解抛物型方程是完全可行的。

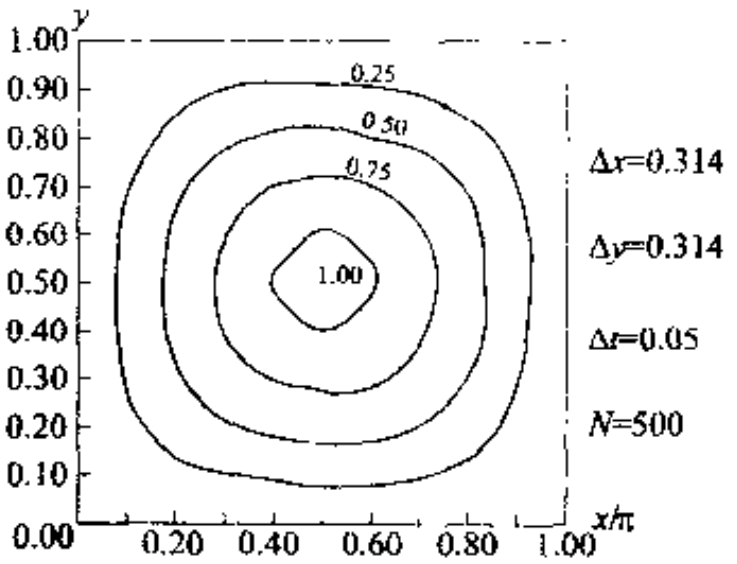
②蒙特卡罗解法的优点主要有如下几点：(a) 计算程序简单，需要计算机的容量少，在普通微型机上即可进行计算；(b) 可计算区域内任一节点的函数值，不象其它方法，需联立所求节点方程求解；(c) 对高维情况特别有利，不会因为维数的增加而增大困难；(d) 计算结果可给出比其它方法更多的信息 (如概率分布等)，便于作可靠性分析。蒙特卡罗解法的主要缺点是大范围求解时计算速度较慢。

③蒙特卡罗解法的误差不仅与网格大小有关，而且与随机游动次数 N (即抽样次数) 有

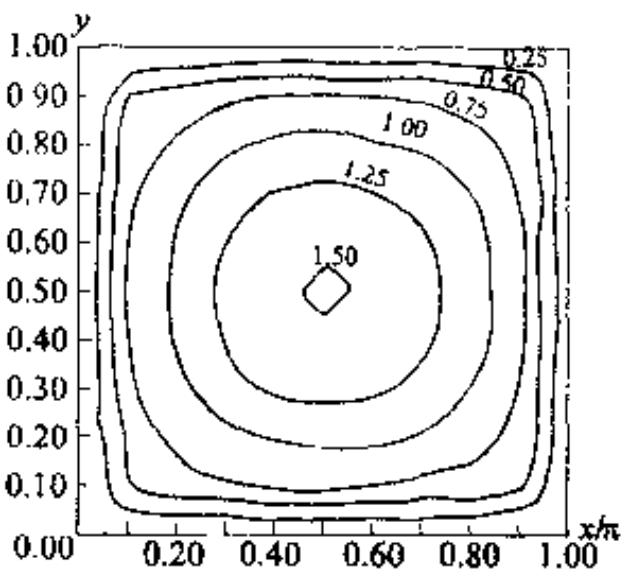
关。为说明误差与N的关系，我们以“运动”激波问题为例，对游动次数N作了试验。试验中，取$\Delta x=0.5$，$\Delta t=1.0$，其它参数同前述。试验结果如图 8.17 所示。从结果可以看出，最大相对误差ε_{max}大致与$\frac{1}{\sqrt{\lg N}}$成正例。

④对同一类问题，模拟一点的函数值，一维问题与二维问题所用机时之比在$\frac{1}{2}$到$\frac{3}{5}$之间，这说明蒙特卡罗解法的计算量大致与维数成正比。

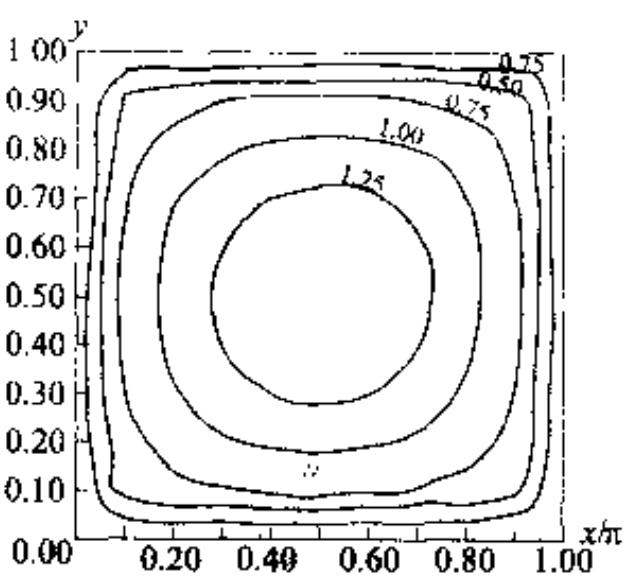
图 8.18 给出温度流在水库中对流扩散用随机方法计算的例子：(a) 计算网格、(b) 流速分布、(c) 温度分布、(d) 用有限元法计算的温度、(e)、(f) 温度分布的实验结果。



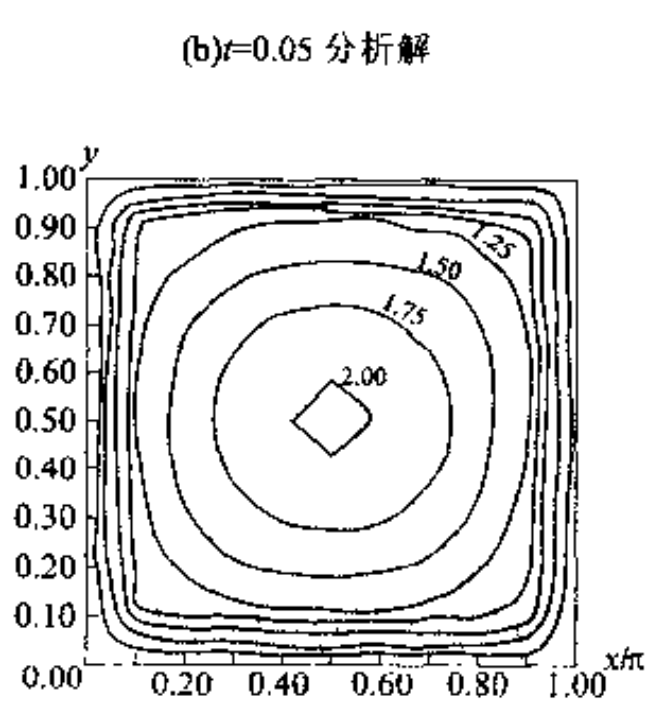
(a)t=0



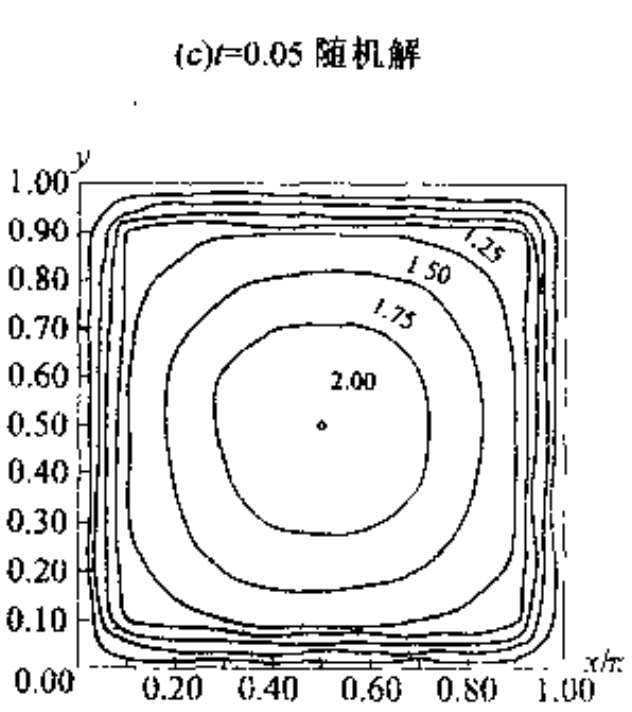
(b)t=0.05 分析解



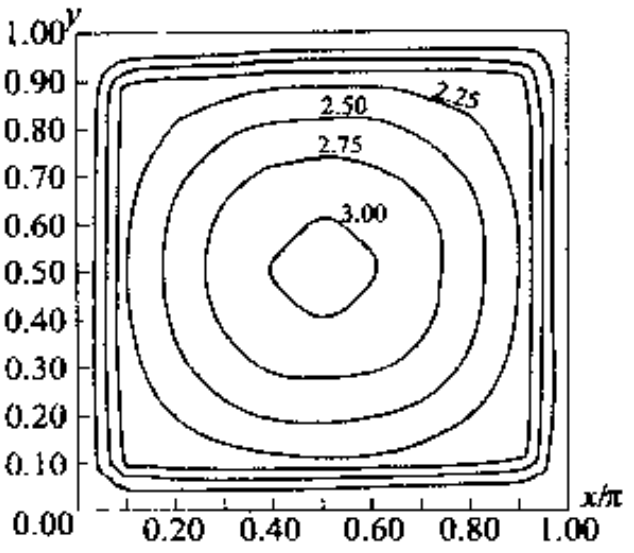
(c)t=0.05 随机解



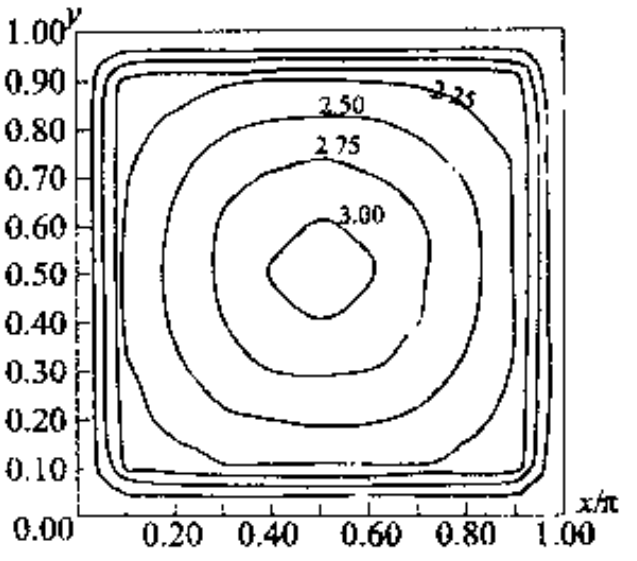
(d)t=0.1分析解



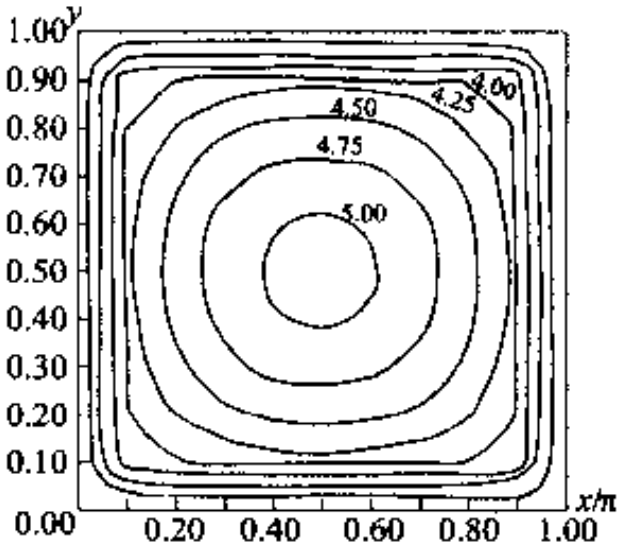
(e)t=0.1随机解



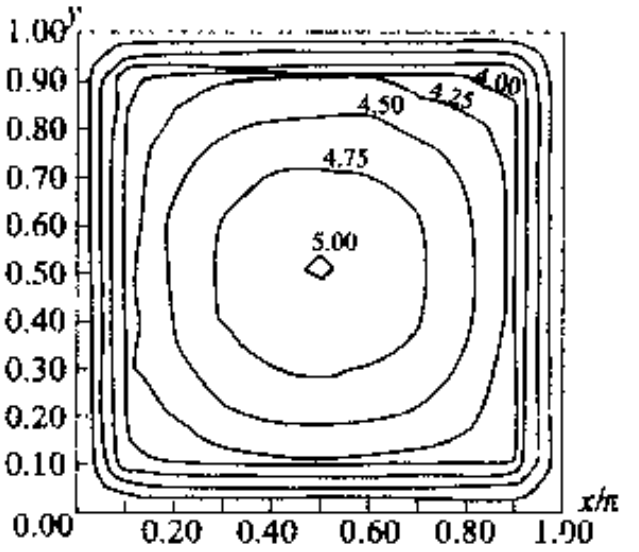
(f)t=0.2 s分析解



(g)t=0.2 s随机解



(h)t=0.4 s分析解



(i)t=0.4 s随机解

图8.16　一维带源项扩散随机解、分析解比较

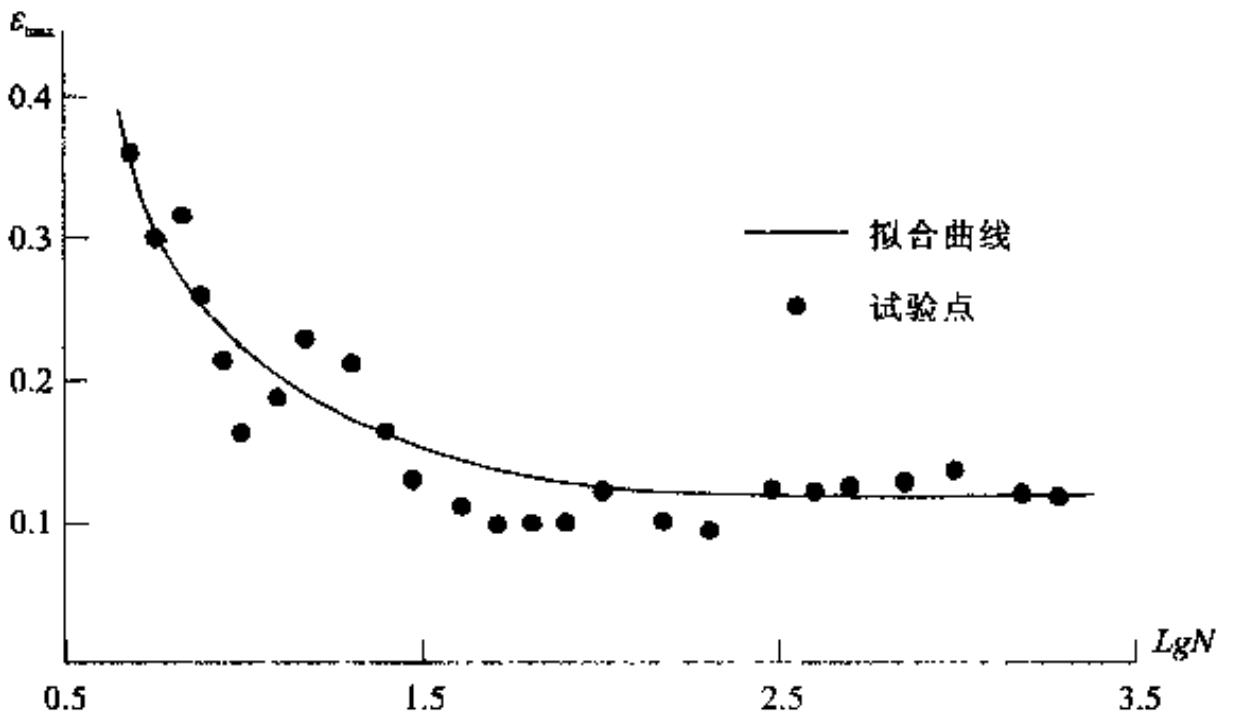
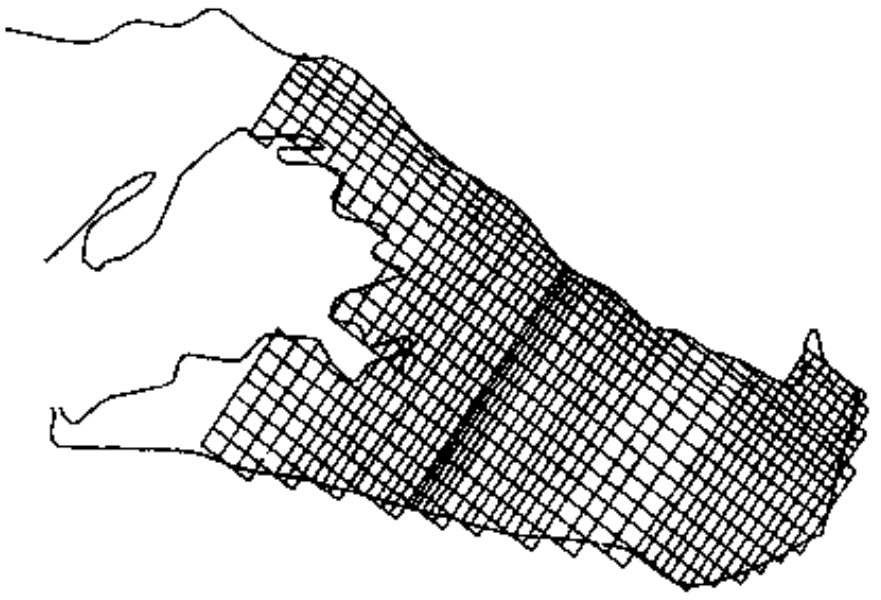


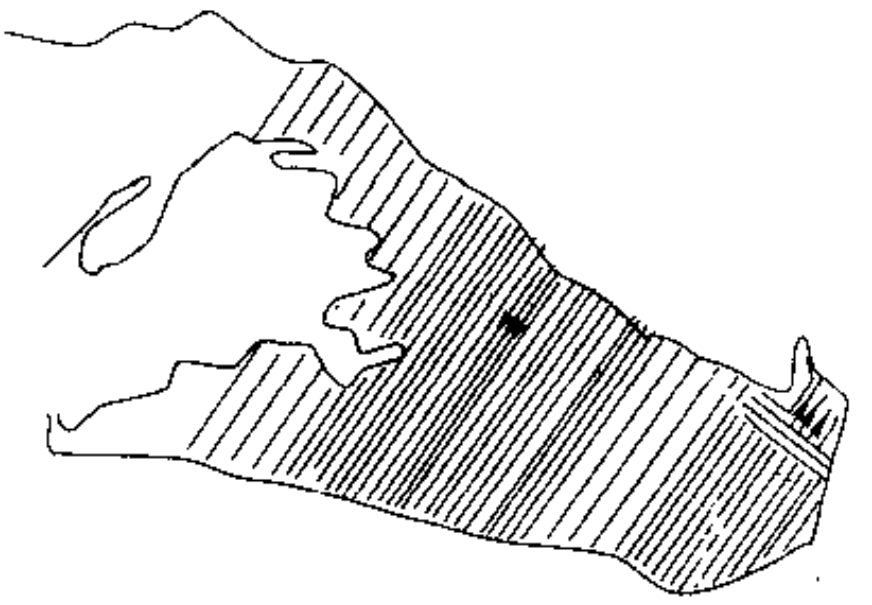
图8.17　随机解误差分析

§8.3　随机游动法在水动力学一些领域推广应用

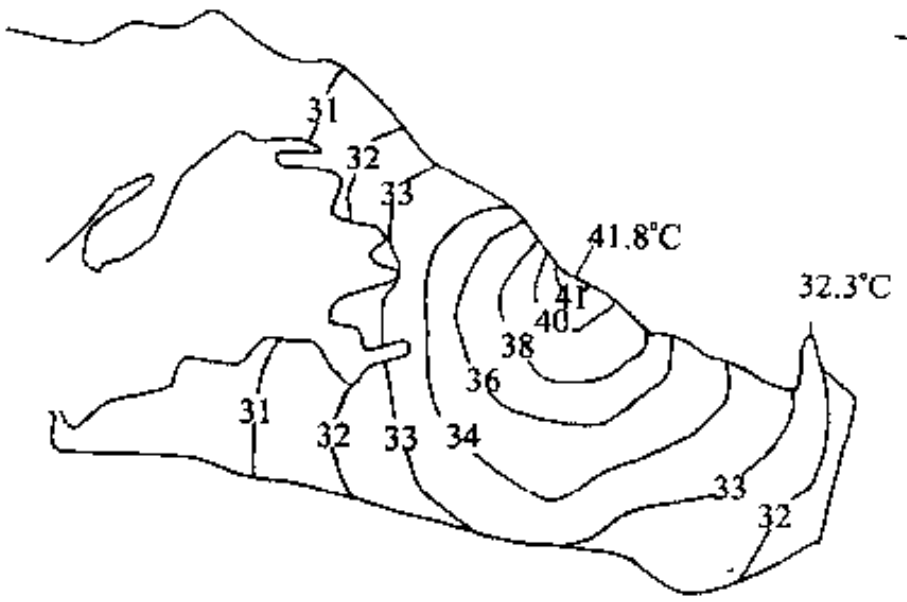
我们将随机游动方法推广应用于水动力学中的一些领域，实际水动力学问题往往发生在



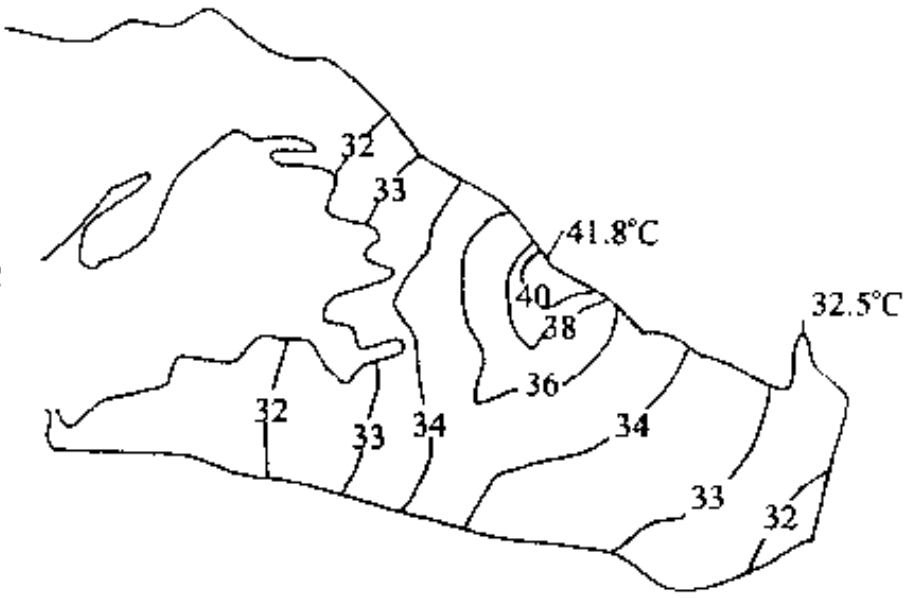
(a)网格



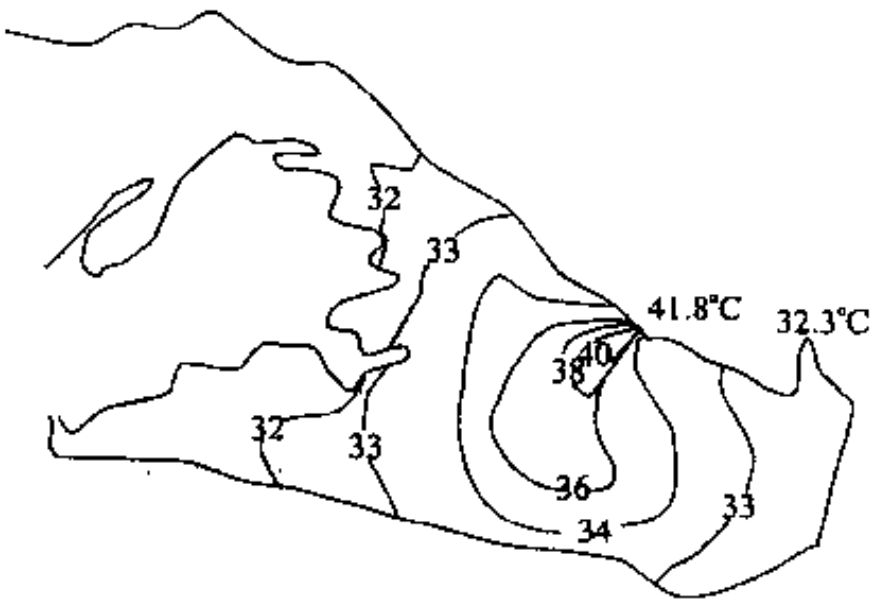
(b)流速



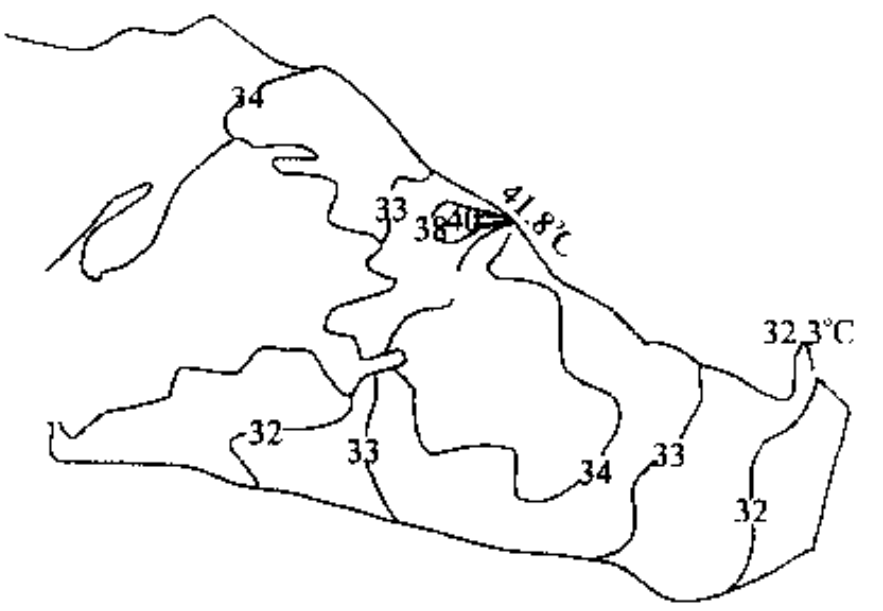
(c)温度



(d)温度有限元法



(e)方案1的温度实验结果



(f)方案2的温度实验结果

图8.18　随机法计算的湖中热水分布与有限元法及实验的对比

不规则几何区域内，首先，应解决在不规则区域内的随机游动问题。

8.3.1 不规则游动网络的蒙特卡罗法

随机游动的基本思想，并不限于规则的矩形网络，关键在于如何给定随机游动于不规则网络的信息，具体作法如下：

设 D 是一个任意形状的几何区域，它可以是不规则的时空域，区域 D 与其边界 Γ 定义如前。将区域 D 剖分为若干个（有限个）三角形，四边形或其它形状的多边形区域 $D^{(e)}$，$D=\bigcup_{e=1}^{I} D^{(e)}$，$P$ 是 D 域的内点，并选多边形的顶点为结点，此处子区域，可称为单元 (element)，而顶点 P_i 为结点 (nodes)，类似于有限元。与 P_i 相邻并与之相连的结点为 P_{i1}、P_{i2}、…、P_{in}。如图 8.19 所示。

对于 Poisson 方程或对流扩散方程都可以类似于差分法或有限元法，建立 P_i 点与其相邻点的未知变量间的关系，形成离散化的代数关系式：

$$\Phi(P_i)=[1+P_c(P_i)]^{-1}\left[\sum_{j=1}^{J} P_{ij}(P_i)\,\Phi(P_{ij})+P_s(P_i)S(P_i)\right] \quad P_i\in D \tag{8.3.1}$$

式中 $P_{ij}(P_i)$ 为关系系数，或称影响矩阵系数。反映周围 P_{ij} 点对 P_i 点的“贡献”，也是由 P_i 向周围 P_{ij} 点随机游动的转移概率 (Transport probability)，并有

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(P_i)=1, \quad 0\leqslant P_{ij}\leqslant 1, \tag{8.3.2}$$

只要知道 P_i 点与相邻点的信息，不难以方程中物理参数给出转移概率 P_{ij}，实现游动转移，原则同前，从而得到变量的数学期望 $E(\xi)$ 作为 $\Phi(P)$ 的近似解。

式中 $P_c(P_i)$，$P_s(P_i)$ 是反映偏微方程零次项与源项的影响程度的系数，随方程性质不同而变化。

对于非恒定流动（不定常）问题，如作时空域来理解，同样可以推导出类似于上述的公式，这里不再列出。

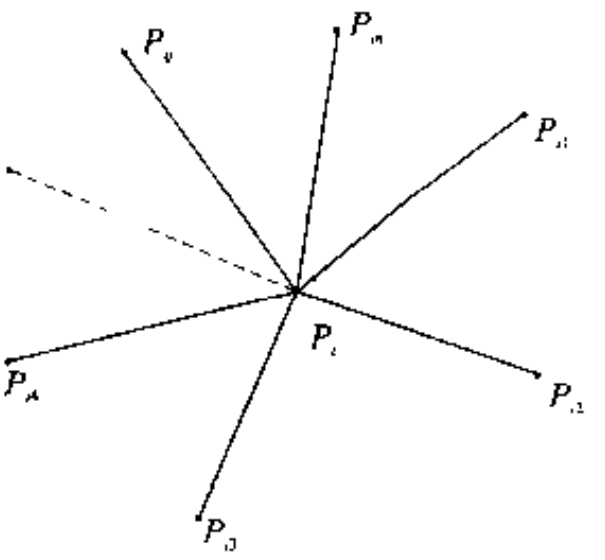


图8.19 不规则游动图

8.3.1.1 二维圆柱绕流势流解例

为了比较采用不规则网格计算的优缺点，以圆柱绕流为例，按势流计算流函数 ψ 解，不规则蒙特卡罗网格与有限元网格相同，有 66 个结点，如图 8.20 所示。另外还采用两种规则的蒙特卡罗网格，一是 10×7 的正方形网格，二是加密的 19×3 的正方形网格。

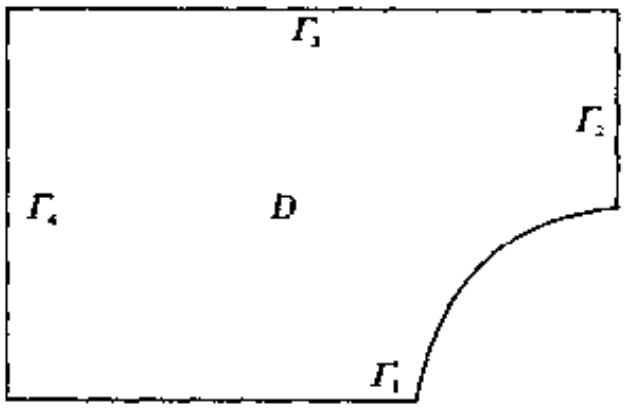
表 8.2 是用不规则网格和规则网格及有限元法计算的在 Γ_2 边界上的流函数值比较。不规则网格与有限元结果吻合很好，最大相对偏差为 0.96%。而两种规则网格与有限元的结果偏差在 19.8%与 7.9%。由此可见在结点数相近的情况下，不规则网格的计算精度与规则网格相比有显著的提高。这是因为不规则网格更能精细地反映边界几何形状的影响。

对全场计算进行对比：有限元法计算时间 2 秒，不规则网格 6 秒，规则网格一为 2 秒，规则网格二为 5 秒。

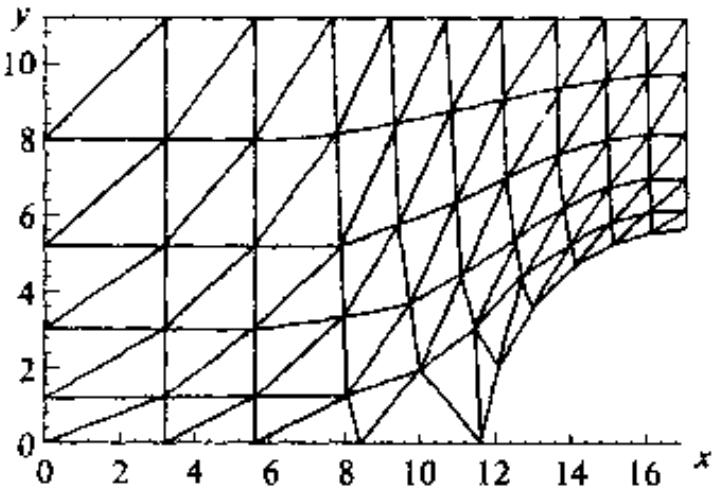
但要指出的是：用蒙特卡罗法计算时，可直接求解几个点的流函数 ψ 值，不需要联解其它点，计算工作量非常小 (属线性方程)。

表 8.2　Γ_3 边界上的流函数 Ψ

方法	流函数值 Ψ					
	$y=5.5$	$y=6.0$	$y=6.8$	$y=8.0$	$y=9.5$	$y=11.0$
FEM	0.0	0.112	0.313	0.497	0.753	1.0
MCM (不规则)	0.0	0.111	0.310	0.493	0.752	1.0
MCM (规则 1)	0.0	0.097	0.251	0.473	0.740	1.0
MCM (规则 2)	0.0	0.106	0.288	0.481	0.749	1.0



(a)计算区域



(b)随机游动网格

图8.20　计算区域及随机游动网格图

8.3.1.2　蒙特卡罗法解复杂边界渗流

多孔介质中流动为渗流，符合达西定律的渗流为势流。

$$u_i=-k\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{8.3.3}$$

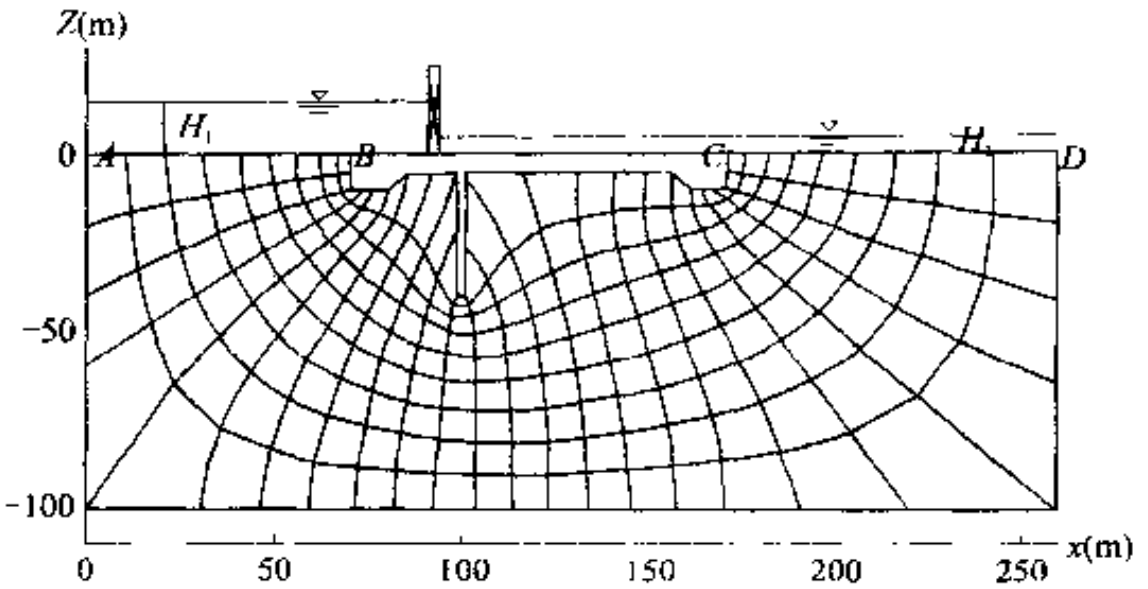
渗流在水利、土建、石油、化工、采矿、地质等部门有广泛应用，以往渗流场计算多用有限元法，而运用不规则网格的罗特卡罗法求解复杂边界渗流，更灵活方便。可以根据需要算出渗流区域中一点的渗透压力、渗流流速。

算例如图 8.21 所示，游动网格共 250 个结点，水头$H_1=15.0$ m、$H_2=5$ m，渗透系数$k=5.0\times10^{-5}$ cm/s。图 8.21 (a) 为计算区域与游动网格；(b) 为渗流水头等值线；(c) 为渗流流速分布图；(d) 为闸底板上渗透压力分布图。

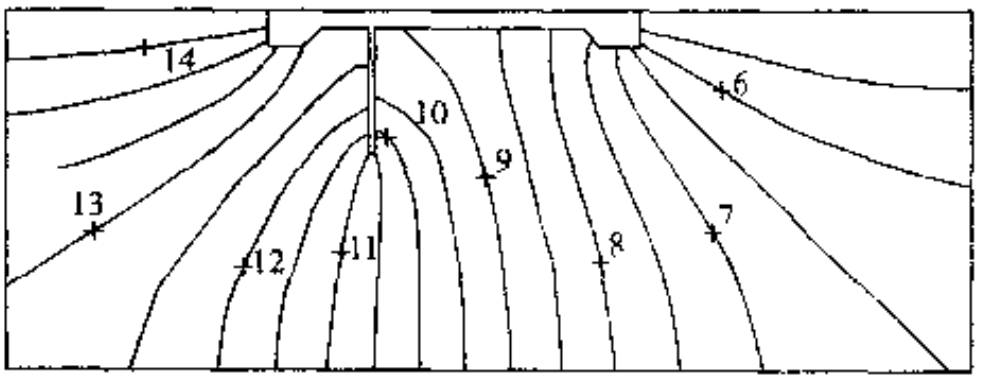
从图中可以看出计算结果是合理的，在奔腾 200 微机上计算全部结点值共用 21 秒。若只计算渗流区域底板上测压管水头，出渗边界上的渗流流速（逸出流速）则只需要 3 秒。由此可见，蒙特卡罗法如只需要计算局部区域点上的物理量，计算工作量将大大减少。

8.3.2　蒙特卡罗法解堰闸流动

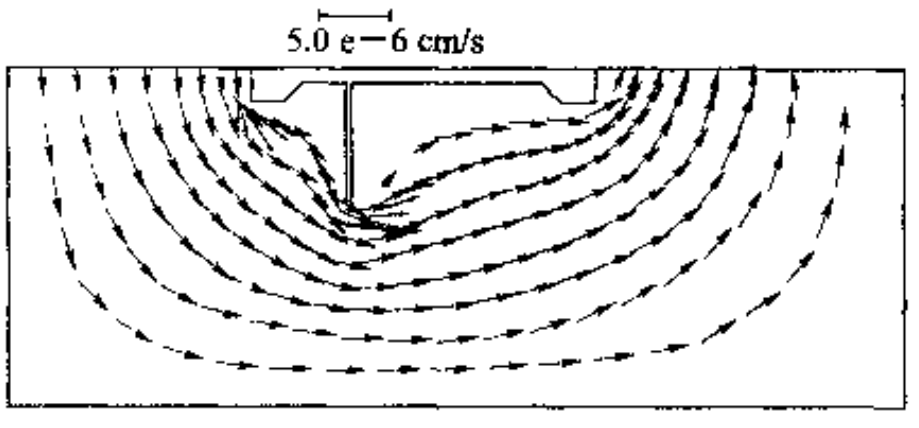
堰闸流动是水利工程的一种重要流动类型，以往除了用物理实验进行研究之外，数值模



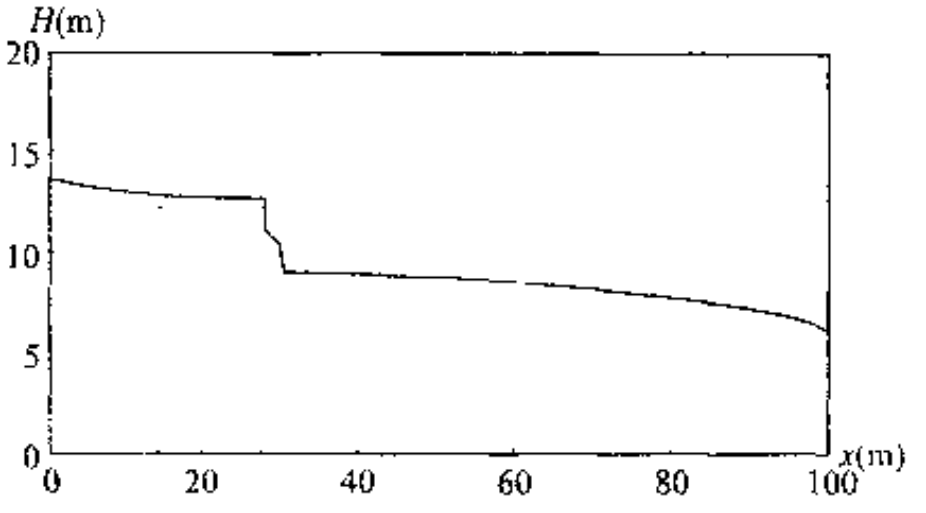
(a)计算区域及游动网格



(b)渗流水头等值线



(c)渗流流速分布



(d)闸底板上的渗透压力

图8.21　计算区域游动网格及渗流水头流速分布

拟在国内始于20世纪70年代，当时以有限元法为主。还有边界元法，坐标变换差分法等。

堰闸流动的特点除区域形状不规则之外，关键在于有自由表面，在自由表面上流量、能头在计算其中之一是待定的，堰流计算中还包含着缓流、急流并存，且临界水深断面在急变流区域随流量变化，位置也是待定的。边界条件是非线性的(非线性边值问题)。自由面调整问题对以往常用的差分法、有限元法都带来棘手的难题。

蒙特卡罗法可以单点求解，无需联解其它结点，可以利用这一特点作调整自由面计算，使计算工作量大为减少，用不规则网格计算曲面流动的堰闸水流也非常合适。

以江苏徐洪河沙集站泄洪闸为例。该泄洪闸堰面为*WES*曲线，曲线方程为$y=-\frac{x^{1.85}}{2H_d^{0.85}}$，其中设计水头$H_d=7.5$ m。图8.22为流动区域及初始随机游动网格图。

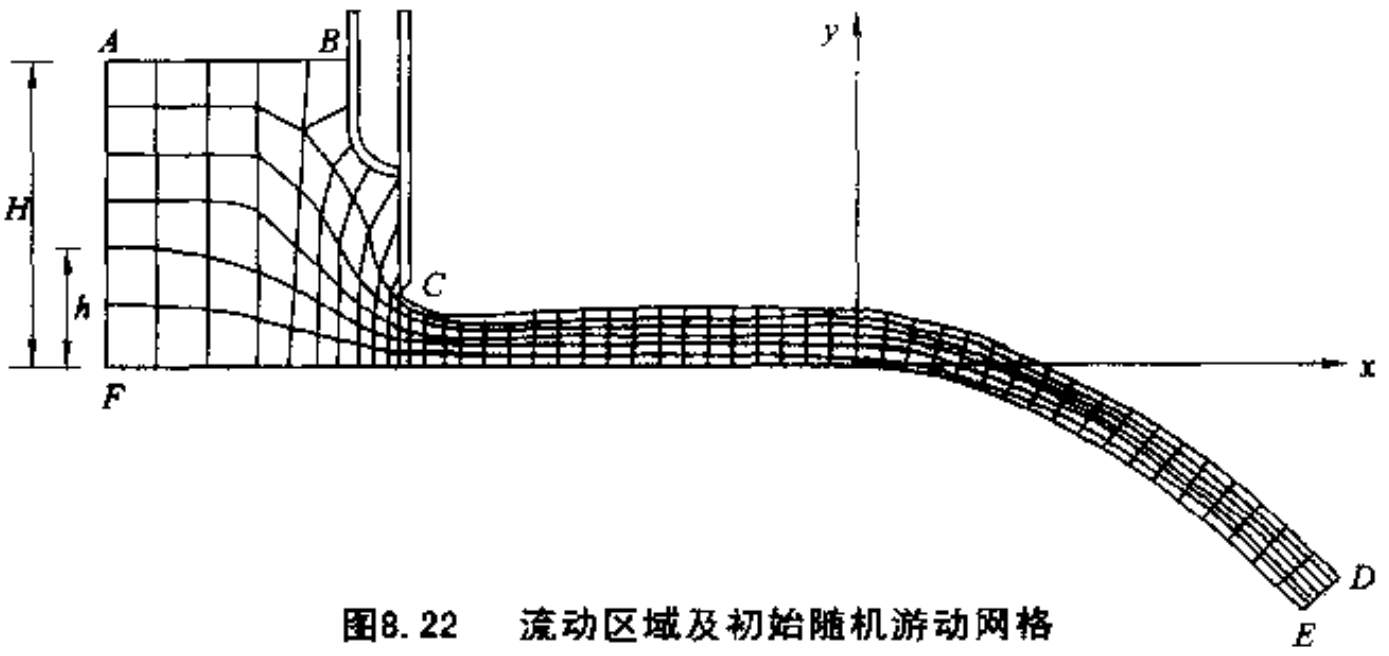


图8.22　流动区域及初始随机游动网格

在二维势流假设下，水流运动的流函数 ψ 满足 Laplace 方程：

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{8.3.4}$$

同时有伯努利方程：

$$H_0 = y + \frac{p}{\rho g} + \frac{(U^2 + V^2)}{2g} \tag{8.3.5}$$

式中 H_0 为能头；y 为位置水头；p 为压强；ρ 为密度；g 为重力加速度；U、V 为水平、铅直方向流速分量，而 $U=\frac{\partial \psi}{\partial y}$，$V=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$。

相应的边界条件为：

$$\psi|_{FE}=0\,,\quad \psi_{ABCD}=q\,, \tag{8.3.6}$$

$$\psi|_{AI}=q\frac{h}{H}\,,\quad \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{DF}=0 \tag{8.3.7}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{ABCD}=\sqrt{2g(H_0-y)} \tag{8.3.8}$$

根据 Laplace 方程定解条件，自由表面上必须同时满足 (8.3.6) 式与 (8.3.8) 式，但求解时只能选用一个，另一个作为调整自由表面的校核条件。

我们在计算中，如令闸前水深 H 为已知值，则过闸流量 q 和自由面形状 $y=y_s(x)$ 都是未知的，待定的，需要在计算过程中迭代求解。

根据蒙特卡罗法特点，提出计算如下迭代步骤：

①假定单宽流量近似值 $q^{(0)}$，自由面形状初始曲线 $y=y_s^{(0)}(x)$。

②在给定的 $q^{(n)}=\psi(n)$，$y_s^{(n)}$ 前提下，(n=0, 1, 2, …)，闸下出流自由面边界条件为 $\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{AI}=\sqrt{2g(H_0-y_s(n))}$。

③根据方程及边界条件，求与自由面流线相邻近的一条网格的流函数 $\psi_n^{(n)}$，据此求 AB 线上流速，$U_{AB}=\frac{\partial \psi}{\partial n}$，$CD$ 边界上近似解 $\psi_{CD}^{(n)}$。

④校核自由面上能头值，流函数差值 $q^{(n)}-\psi^{(n)}$。如满足迭代误差 eps，即 $\|q^{(n)}-\psi^{(n)}\| \leqslant$ eps，则求解成功，否则

⑤调整

$$\Delta n_i=\frac{q^{(n)}-\psi^{(n)}}{\sqrt{2\,g(H_0-y_i^{(n)})}}$$

记结点之处自由面切线与 x 夹角为 α_i，i 点坐标为 x_i，y_i，如图 8.23 所示。

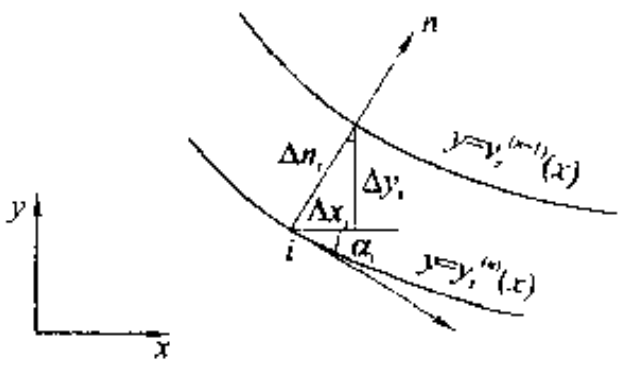


图8.23　自由面位置调整

调整改正量

$$\Delta x_i=-\Delta n_i \sin\alpha_i$$

$$\Delta y_i=-\Delta n_i \cos\alpha_i$$

从而得到新的自由面。

⑥重复②至⑤步，直到获得收敛解。

⑦求出 q，自由面位置 $y=y_i(x)$ 之后，再计算流速，压力、由公式计算流量系数 $\mu=\frac{q}{e\sqrt{2\,g\,H_0}}$。

算例：取闸前水深 H=6.5 m，闸底板高程为 15.0 m，闸上游水位为 21.5 m，闸门开度 e=0.25 m，0.5 m，0.75 m，0.9 m，1.15 m，1.35 m，1.5 m，1.75 m，1.825 m，用蒙特卡罗法计算结果：图 8.24 给出闸孔开度 e 与流量 q 关系曲线，图 8.25 为流量系数 μ 与闸孔开度 e/H 的关系，图 8.26 为堰面压强分布。可以看出：流量系数计算值与实验值吻合很好，这是因为流量系数 μ 是一种总体（总流）特征量。

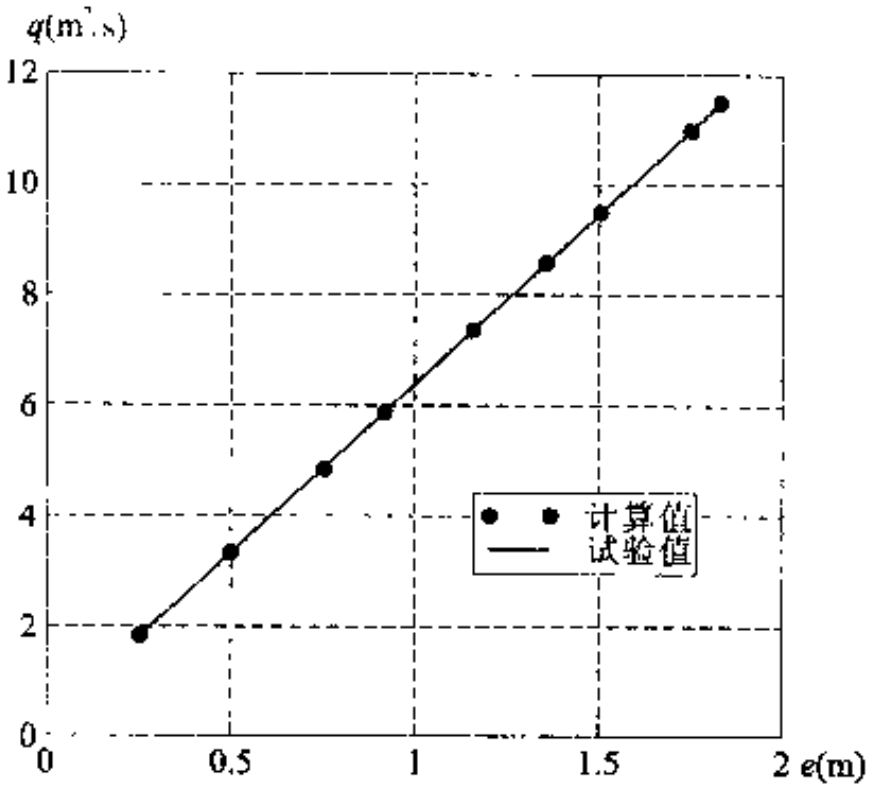


图8.24　流量q与阀门开度e的关系曲线

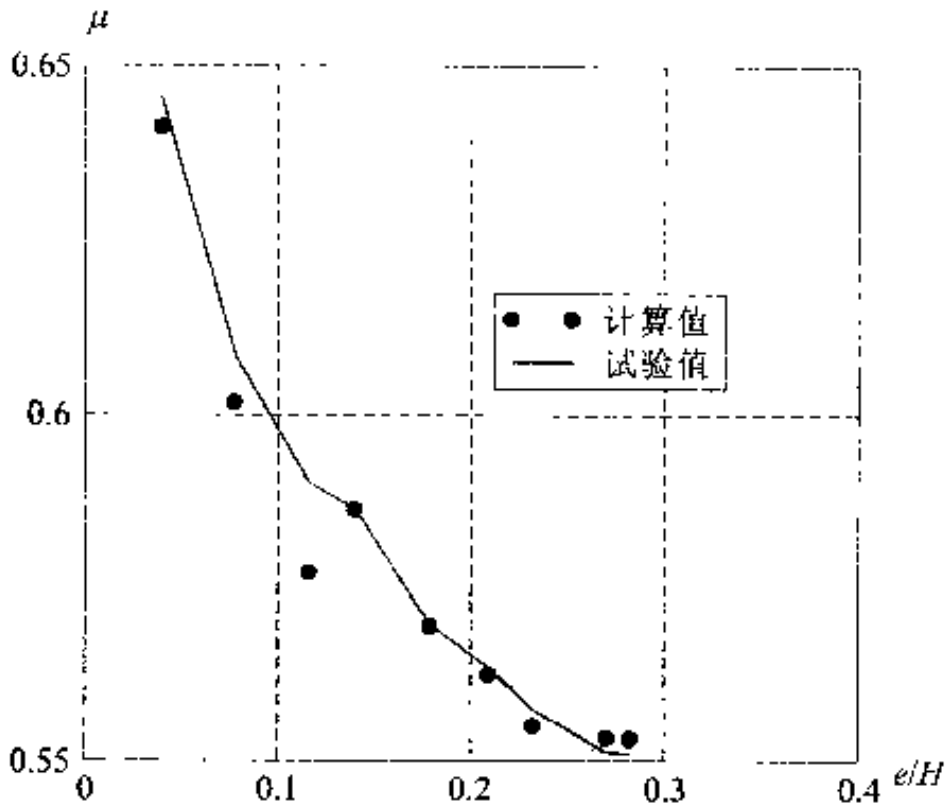


图8.25　流量系数μ与闸门相对开度e/H的关系曲线

堰面压力（压强场）的计算值与试验值系数的趋势是一致的，e=0.25 m，1.825 m 时，计算与试验值相差稍大，四组计算结果在 x=1.33 m，2.82 m，4.38 m，6.35 m 处与试验值的最大偏差分别为：16.2%，6.5%，8.1%，17.7%。

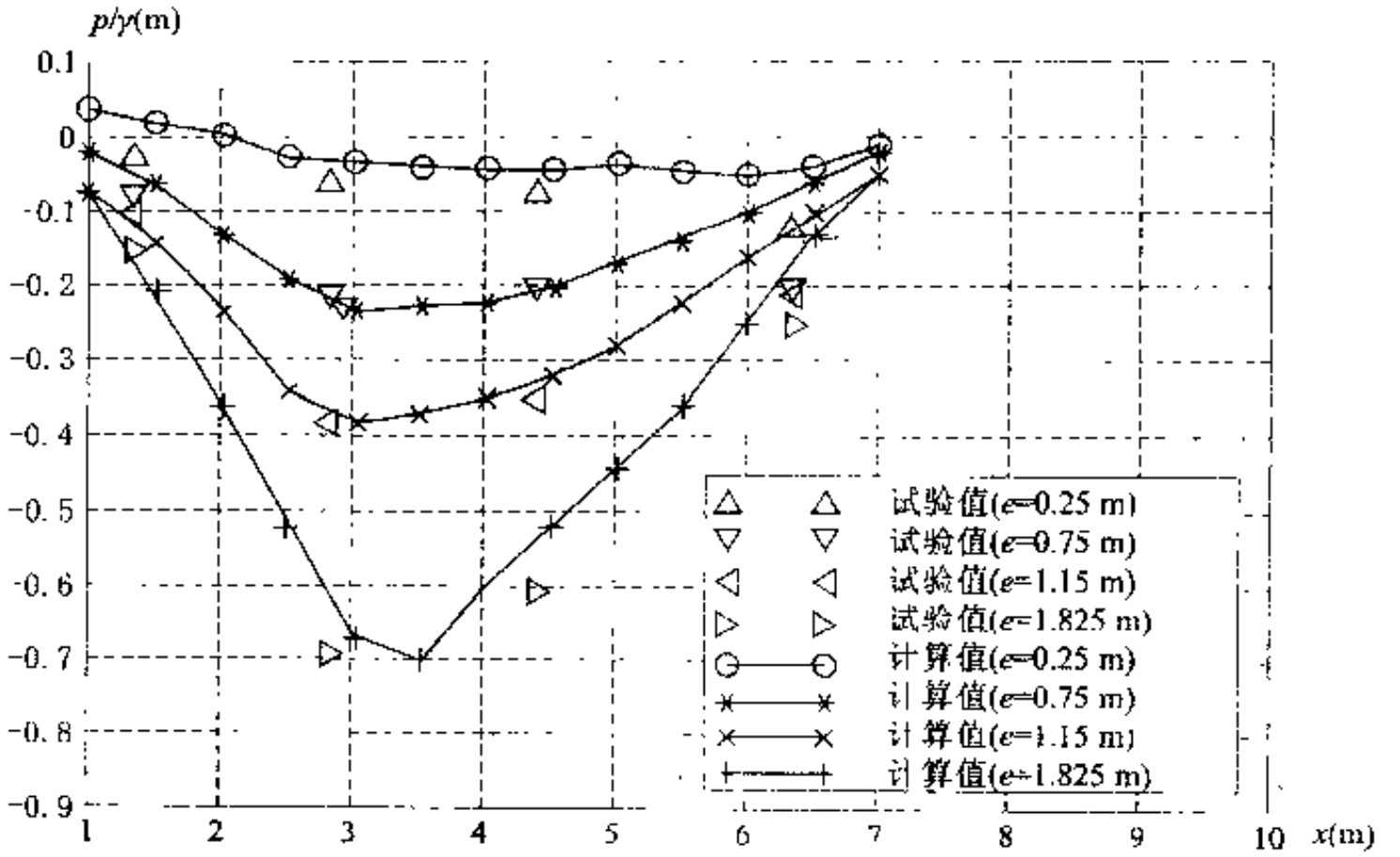


图8.26　堰面压力分布

由以上算例和试验的对比，给我们一个启示，对于堰闸水流数值模拟途径是经济可行的，并且是有效可信的。

8.3.3　蒙特卡罗法在供水管网分析中的应用

管网分析的常规方法见一般的水网计算，下面是用蒙特卡罗法计算含各种元件，多水源的复杂管网。

(1) 管网分析中随机游动模型

恒定管网基本方程仍如前述，有

a. 连续性方程：对管网中任一节点 m 有：

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{mk} = q_m \tag{8.3.9}$$

式中 Q_{mk} 为与 m 节点相连的 k 管段流量，流出节点为正，q_m 为管网外进出节点的流量，流进为正。

b. 能量方程：对任一管段 k 如图 8.27 所示。

$$H_i - H_j = \Delta H_k = R_k |Q_k| Q_k \tag{8.3.10}$$

式中阻尼系数 $R_k = \dfrac{8\lambda_k L_k}{(g\pi^2 D_k^5)}$，达西系数为 λ_k，如用谢才公式则 $\lambda = \dfrac{8g}{C^2}$，并引入曼宁公式，有

$$R_k = \frac{10.29 n_k^2 L_k}{D_k^{5.33}} \tag{8.3.11}$$

或以 ΔH_k 表示流量，则有

$$Q_k = \sqrt{\frac{1}{R_k |\Delta H_k|}}\, \Delta H_k = y_k \Delta H_k \tag{8.3.12}$$

式中 y_k 为传导系数，意义与水网计算同。

管网随机游动模型，类似于复杂不规则网格或见图 8.28 不再重复。

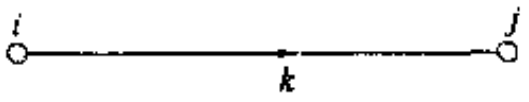


图8.27　管段分析示意图

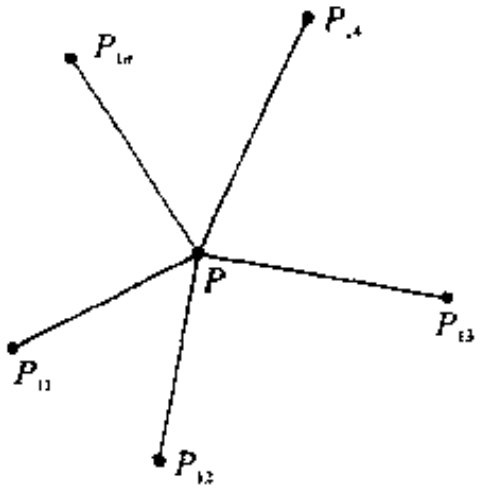


图8.28　节点P与其相邻节点

(2) 管网元件处理

实际管网计算，有许多元件，如供水泵、水塔 (池)、普通阀门、逆止阀、减压阀、增压泵等水力控制设施，这些设备对管网运行影响重大，计算中必须考虑。

a. 普通阀门

闸板式阀门用得最多其水头损失公式为 $h=\frac{\zeta V^2}{2g}$，ζ值见表 8.3。

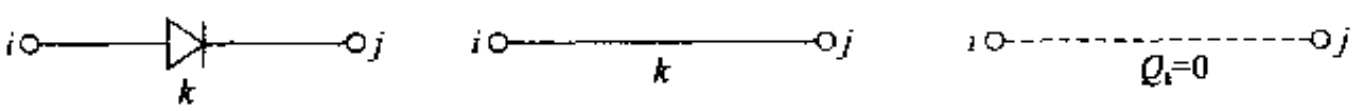
表 8.3　闸阀阻力系数 ζ

a/d	0	0.125	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
ζ	∞	97.3	35.0	10.0	4.60	2.06	0.98	0.44	0.17	0.06	0

注：a 管段中过水断面的高度，d 管段直径，a/d 阀门相对开度

b. 逆止阀

只允许水流单向通过，其上下游节点为 i 与 j j。如图 8.29，当 $H_i > H_j$ 时，阀门打开；当 $H_i \leqslant H_j$ 时，阀门关闭，$Q_k=0$。



(a) 符号　(b) 阀门打开　(c) 阀门关闭

图8.29　逆止阀

c. 减压阀

管网中减压阀可以控制该阀门下游区域的压力水头值，使其保持在某一范围内，不使压力太高，图 8.30 为 k 管段上减压阀作用示意图。

当 $H_i < H_{set}$，且 $H_j < H_i$，减压阀无作用，相当于一简单管；

当 $H_i > H_{set}$，且 $H_j < H_i$ 时，阀门下游水头恒为 H_{set}，$R_k Q_k^2 = H_{set} - H_j$，相当于有一水头为 H_{set} 的水塔。

当 $H_j < H_i$，减压阀相当于逆止阀，$Q_k=0$。

d. 增压泵

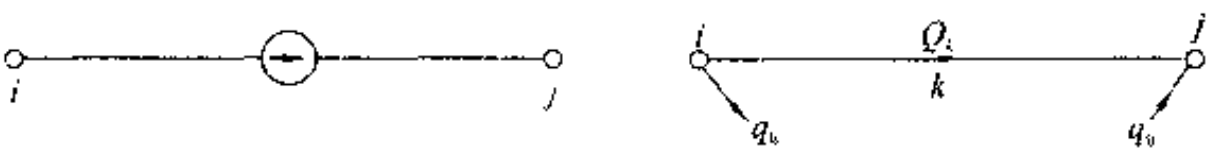
泵之特性曲线为 $Q=q_0 - ah^b$，其中 a, b 为常数，q_0 为恒流量值，h 为扬程。如图 8.31 将水泵看作一个特殊管段。在水泵上游节点之上加上一个值为 "$-q_0$" 的节点输出流量，在水泵下游节点 j 加上一个值为 "q_0" 的节点输入流量，而特殊管段 k 通过的流量 $Q_k = a(H_i -$



(a) 符号　　(c) 作为水池

(b) 作为简单管　　(d) 作为逆止阀

图8.30　减压阀



(a) 符号　　(b) 模型

图8.31　增压泵

$H_i)h^{\wedge}$，传导系数 $y_k=ah^{\wedge}$。

计算步骤如下：

①假定各管段水头值，求出各段 y_k，求出初值 $H_i^{(0)}$；

②用 $H_i^{(n)}$ 求 $y_k^{(n)}$，求新水头 $H_i^{(n+1)}$；

③判断 $|H_i^{(n)}-H_i^{(n-1)}|\leqslant\varepsilon$，满足则计算结束，否则继续迭代；

④计算各段 Q_k。

算例 1　分析图 8.32 所示的管网，求出所有的有关值。已知节点 1 的水头 $H_1=20$ m，节点 4 的水头 $H_4=10$ m，节点流量 $q_2=q_3=10$ (m^3/s)，管段的传导系数 $Y_k=\frac{\pi g D_k^4}{128\nu L_k}$，$\nu=10^{-6}$ (m^2/s)，管段数据见表 8.4。

表 8.4　管段数据

管段	管长 (m)	管径 (m)	上游节点	下游节点
1	1 000	0.4	1	2
2	1 000	0.2	3	1
3	2 000	0.283	3	2
4	2 000	0.283	4	2
5	200	0.573	3	4

用蒙特卡罗法 (MCM) 计算的结果见表 8.5，与有限单元法 (FEM) 计算结果基本一致，但前者方法计算简单灵活，可根据需要计算任一节点水头或任一管段流量。

算例 2　图 8.33 所示的某给水管网，由节点 6 处的水泵和节点 7 处的水塔供水，第 8 管段上设置一个减压阀($H_{ab}=54.00$ m)，基本数据见表 8.6。计算时取管道糙率 $n=0.013$，迭代控制精度 0.000 1。

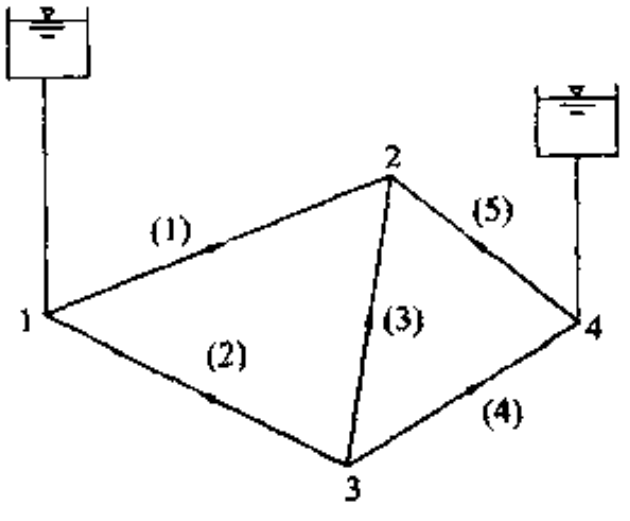


图8.32　算例1管网

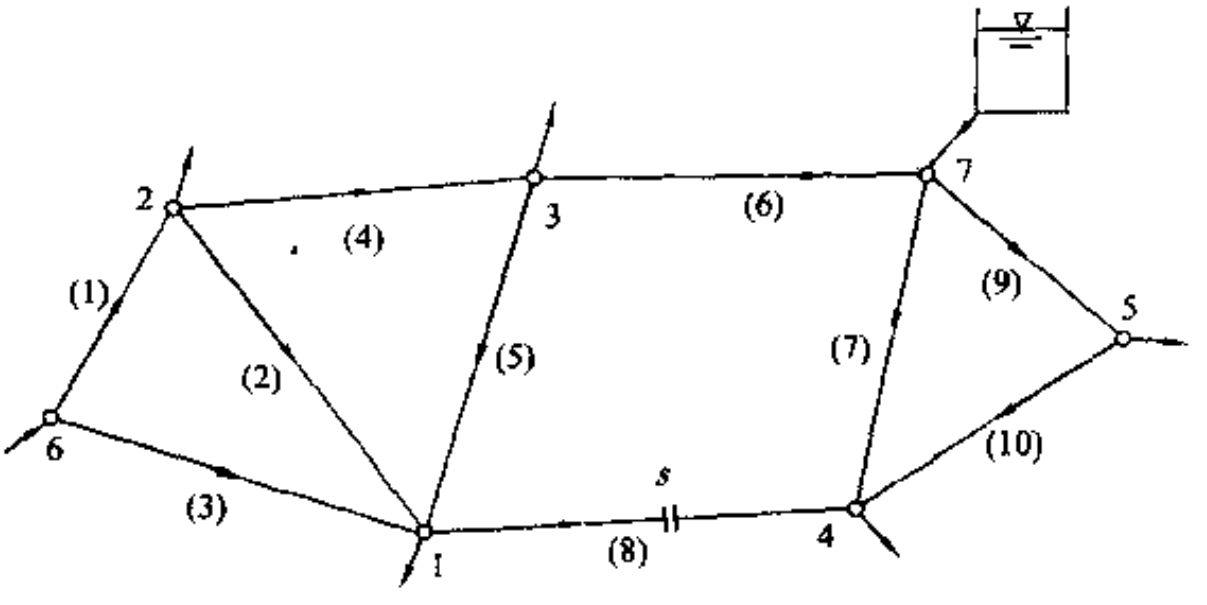


图8.33　算例2管网

计算的结果见表 8.7。

表 8.5　管网计算结果（一）

节点	水头 (m)		管段	流量 (m^3/s)	
	MCM	FEM		MCM	FEM
1	20	20	1	3.476	3.43
2	19.436	19.443	2	−3.274	−3.27
3	11.495	11.495	3	−6.130	−6.14
4	10	10	4	−7.285	−7.29
			5	19.401	19.40

表中“−”负号表示与原假设流向相反。

表 8.6　管网基本数据

管段	管径 (m)	管长 (m)	上游节点	下游节点	节点	高程 (m)	节点流量 (m^3/s)	水头 (m)
1	0.305	487.7	6	2	1	13.96	−0.119	
2	0.381	609.6	2	1	2	14.10	−0.038	
3	0.456	731.5	6	1	3	14.70	−0.063	
4	0.305	548.6	2	3	4	13.55	−0.101	
5	0.305	579.1	3	1	5	14.33	−0.126	
6	0.254	396.2	7	3	6	14.22	0.252	
7	0.381	518.2	7	4	7	15.17		55.00
8	0.305	609.6	1	4				
9	0.381	365.8	7	5				
10	0.381	648.6	5	4				

表 8.7　管网计算结果 (二)

管段	流量 (m^3/s)	水头损失 (m)	节点	节点水头 (m)	节点压力 (m)
1	0.074	2.615	1	56.05	42.09
2	−0.004	0.003	2	56.09	41.99
3	0.179	2.687	3	55.23	40.53
4	0.040	0.859	4	53.66	40.11
5	−0.038	−0.819	5	53.73	39.40
6	-0.015	−0.232	6	58.71	44.49
7	0.093	1.340	7	55.00	39.83
8	0.026	0.310	8	54.00	39.98
9	0.108	1.275			
10	−0.018	−0.063			

§8.4　质点法与流场法相结合的随机模拟

用 Monte - Carlo 方法求解时，先要建立一个简便的随机游动模型，然后根据模型中的转移概率在计算机上实现随机游动过程，以求得未知函数的近似解。前面分别讨论了椭圆型和抛物型方程的 Monte - Carlo 解法，给出了相应的线性方程的随机游动模型。

在用 Monte - Carlo 方法求解非线性方程时可先将方程局部线性化，然后采用与之对应的线性方程的随机游动模型的系数来确定，而非线性项的部分其系数是未知的待求的函数。因此，在求解非线性方程时，模型中的转移概率是未知的，一般需采用迭代方式求解。

8.4.1　差分迭代与质点游动法比较

我们在计算时，采用了如下三种求解方式：

(1) 全场迭代法

这种方法是根据差分法的求解方式，结合蒙特卡罗解法的具体特点提出的，具体步骤为：

①将方程线性化，给出与方程相对应的线性随机游动模型。

②给定未知函数 u 的初始值 $u^{(0)}$，通过随机游动，求出新值 $u^{(1)}$。

③判别 $|u^{(1)}-u^{(0)}|\leqslant\varepsilon$ (其中 ε 为迭代收敛精度) 是否成立，若成立，求解结束，否则给 $u^{(0)}$ 赋新值，即 $u_{(0)}^{(1)}=u^{(0)}+\omega(u^{(1)}-u^{(0)})$，返回第二步。

求解 Burgers 方程时就采用了这种方法。

(2) 选择迭代法 (又称“消峰法”)

这种方法是利用 Monte - Carlo 法可独立求解任一节点函数值这一优点提出的，主要求解步骤是：

①提出相应的线性随机游动模型。

②给定知函数 u 的初始值 $u^{(0)}$，通过随机游动，求出新值 $u^{(1)}$。

③求出 $\varepsilon_{max}=\max(|u^{(1)}-u^{(0)}|)$，若 $\varepsilon_{max}\leqslant\varepsilon$，求解结束，否则，找出满足 $|u^{(1)}-u^{(0)}|\geqslant K\varepsilon_{max}$ (其中 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\leqslant K\leqslant 1$) 的大误差点。

④给 $u^{(0)}$ 赋新值，即 $u^{(0)'}=u^{(0)}+\omega(u^{(1)}-u^{(0)})$，通过随机游动，求出大误差节点的新值 $u^{(1)}$，返回第三步。

对空腔不定常流动及二维、三维射流问题计算，均采用了这种求解方法。

(3) 质点法

这种方法是针对具体问题——射流问题提出的一种避免迭代的近似求解方法，它的精度不及前两种方法，具体求解步骤如下：

①给出相应的线性问题的随机游动模型。

②将计算区域分成若干断面，按从射流的上游断面向下游断面推进的计算顺序进行计算。

③从射流口投放一定数量的游动质点，通过随机游动，求出落到某一待求断面上的质点分布，由质点分布即可求出相应的速度分布 (或浓度分布)。

我们选用了一种简单的对称型的射流问题作为算例。在不考虑质量力作用，忽略横向、垂向的对流效应，动水压强服从静力压强规律分布等条件下，自由射流的控制方程可简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=E_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+E_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+E_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{8.4.1}$$

设初始边界条件为

$$t=0,\quad u=0$$

$$x=0,\quad u=\begin{cases}l, & |y|\leq d,\ |z|\leq d\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$x=a,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$y=\pm b,\quad u=0$$

$$z=\pm c,\quad u=0$$

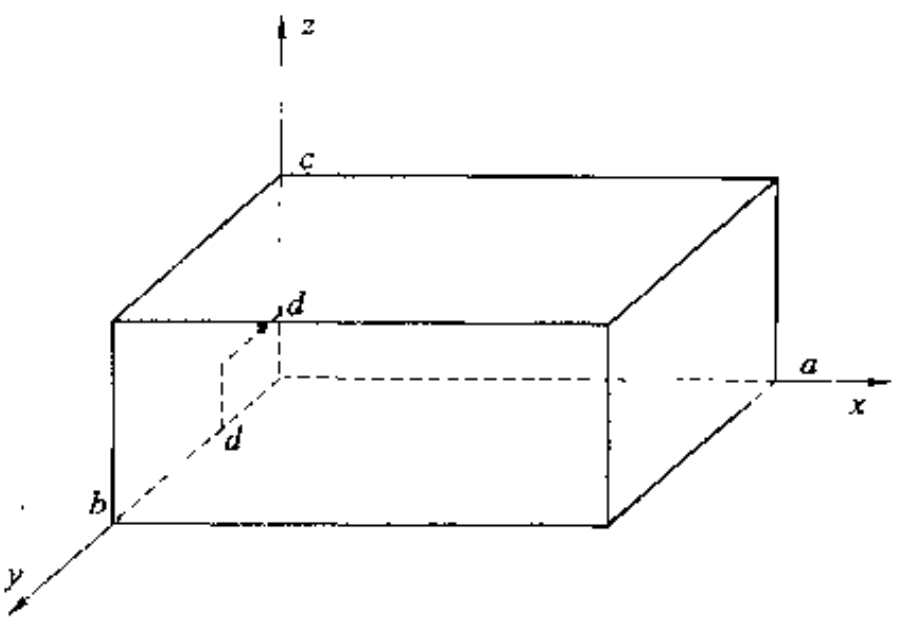
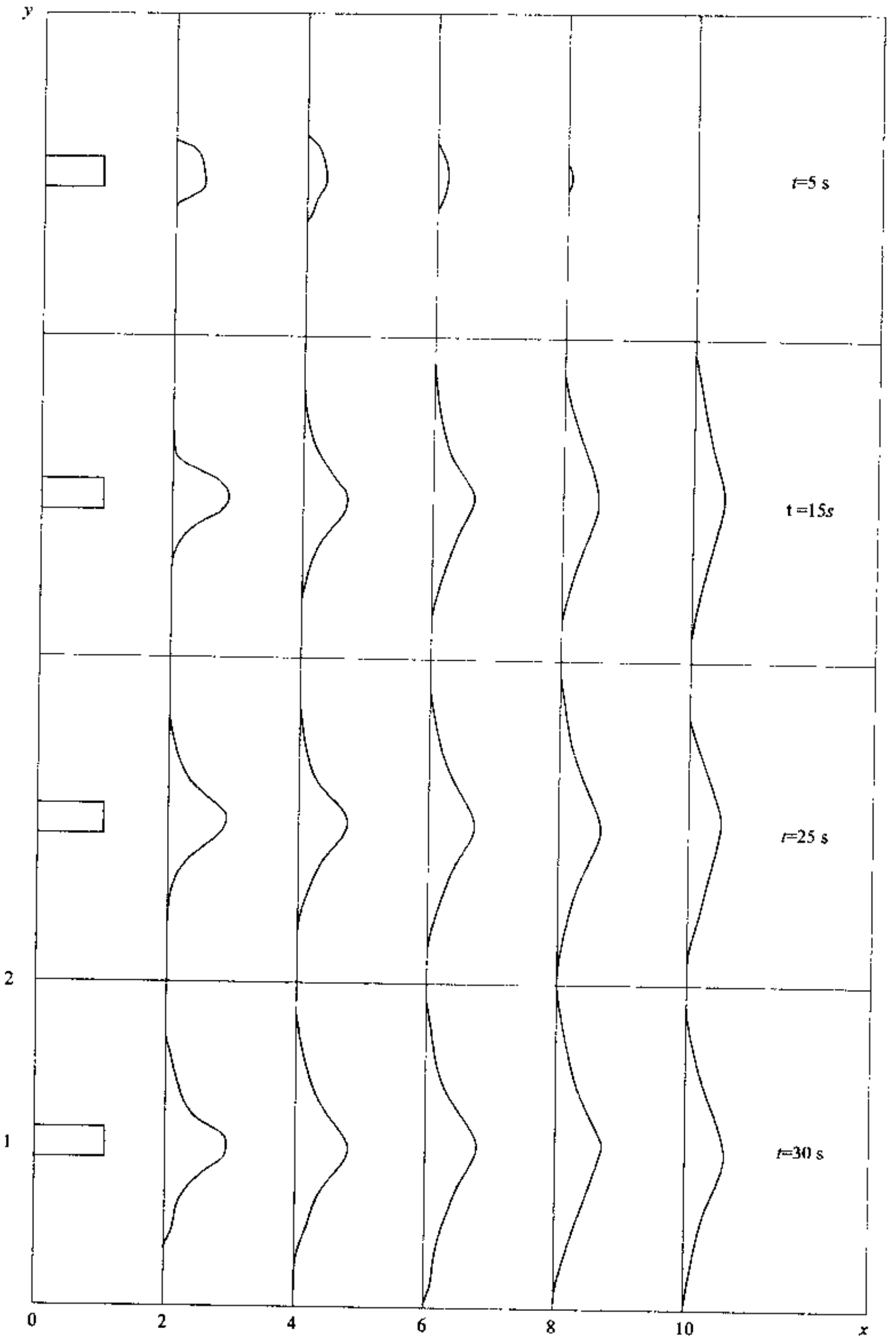


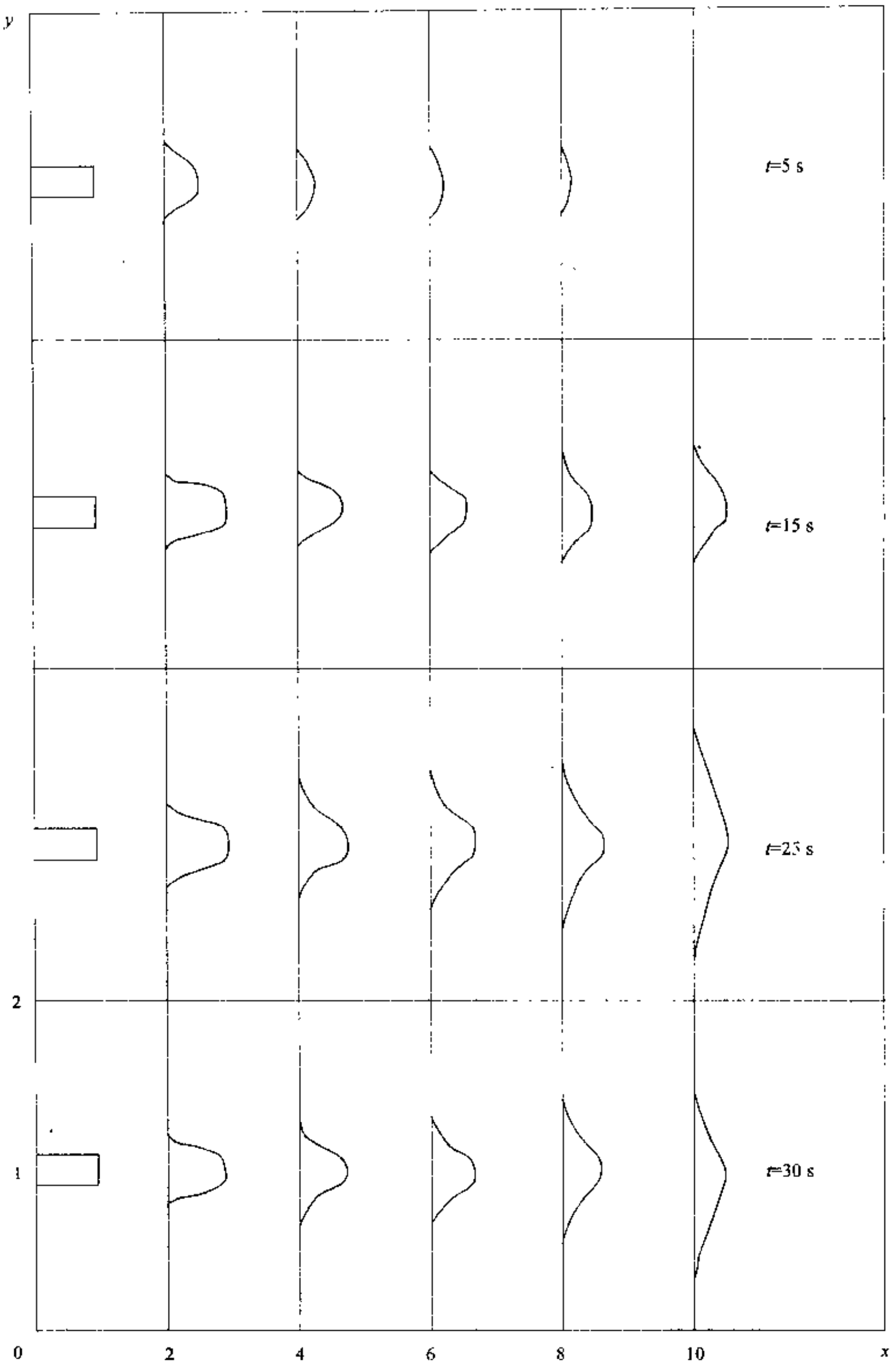
图8.34　方孔射流图

计算时，取 $a=10, b=c=1, d=0.1$，图 8.34 为一方孔射流的四分之一。

对平面二维和三维射流问题，我们分别作了计算，二维问题采用了选择迭代法和质点法两种计算方法，以对这两种方法作一些比较，图 8.35 (a)、(b) 分别给出了用选择迭代法和质点法计算的平面二维的射流结果。从图上可看出，二者的大致趋势还是一致的，与前者相比，后者的扩散效应在一定程度上受到了抑制，这可能是人为规定了质点游动路线所致，需待今后作进一步改进。图 8.35 (c) 给出了用质点法计算时 $t=5$ s、15 s、30 s 的游动质点分布情况，$t=30$ s 时基本达到稳定状态，射流口连续投放了 3×1 000 个游动质点。图 8.36 给出了用选择迭代法计算的三维射流的稳态结果。由于流动在 z 方向上是对称的，因此，图中只画出了 z 方向的负半轴部分。计算时，取 $\Delta t=\Delta x=1, \Delta y=\Delta z=0.1, E_x=E_y=E_z=0.01$, $N=500$。



(a) 选择迭代法计算的..维射流结果



(b) 质点法计算的二维射流结果

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	6	4	3	3	1	1	0	0	0	
0	1	75	53	24	41	23	3	0	1	1	
1 000	453	287	304	293	203	140	32	26	5	2	
1 000	839	520	590	312	241	174	93	41	11	2	*t*=5 s
1 000	530	301	361	290	201	146	39	29	3	1	
0	2	11	62	41	35	21	1	1	0	0	
0	0	6	5	3	1	0	0	0	0	0	
0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	2	
0	0	0	1	1	2	1	2	5	9	11	
0	1	2	4	3	4	2	9	12	14	25	
0	5	4	11	20	31	8	11	49	75	30	
0	27	10	57	111	115	121	140	155	143	140	
1 000	133	350	196	669	430	309	473	403	417	400	*t*=15 s
1 000	144	373	321	749	567	572	532	501	495	433	
1 000	132	341	305	361	635	501	471	419	419	411	
0	57	75	92	105	112	128	136	153	142	134	
0	3	5	7	18	24	33	43	32	71	33	
0	1	1	3	4	3	7	11	15	14	29	
0	0	0	1	1	0	1	2	4	4	9	
0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	4	
0	0	0	0	0	2	1	3	5	9	11	
0	0	0	0	2	2	2	6	12	24	33	
0	0	0	1	5	3	10	14	35	50	73	
0	1	1	2	13	25	38	57	52	92	105	
0	3	5	10	70	91	113	123	153	166	174	
0	44	14	35	154	175	210	221	213	219	291	
1 000	145	160	210	680	672	658	624	610	570	391	
1 000	957	195	432	761	733	699	670	653	574	764	*t*=30 s
1 000	146	258	106	683	669	656	623	607	571	391	
0	43	16	90	157	174	201	225	241	277	300	
0	2	5	4	73	89	111	126	135	163	173	
0	1	2	3	12	23	26	35	39	95	101	
0	0	0	1	4	3	9	5	33	49	65	
0	0	0	0	1	2	3	5	14	22	34	
0	0	0	0	0	1	1	2	6	9	12	
0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	3	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	

2 1 0 2 4 6 8 10 *x*

(c)二维射流的游动质点分布

图 8.35　二维射流计算结果及游动的质点分布

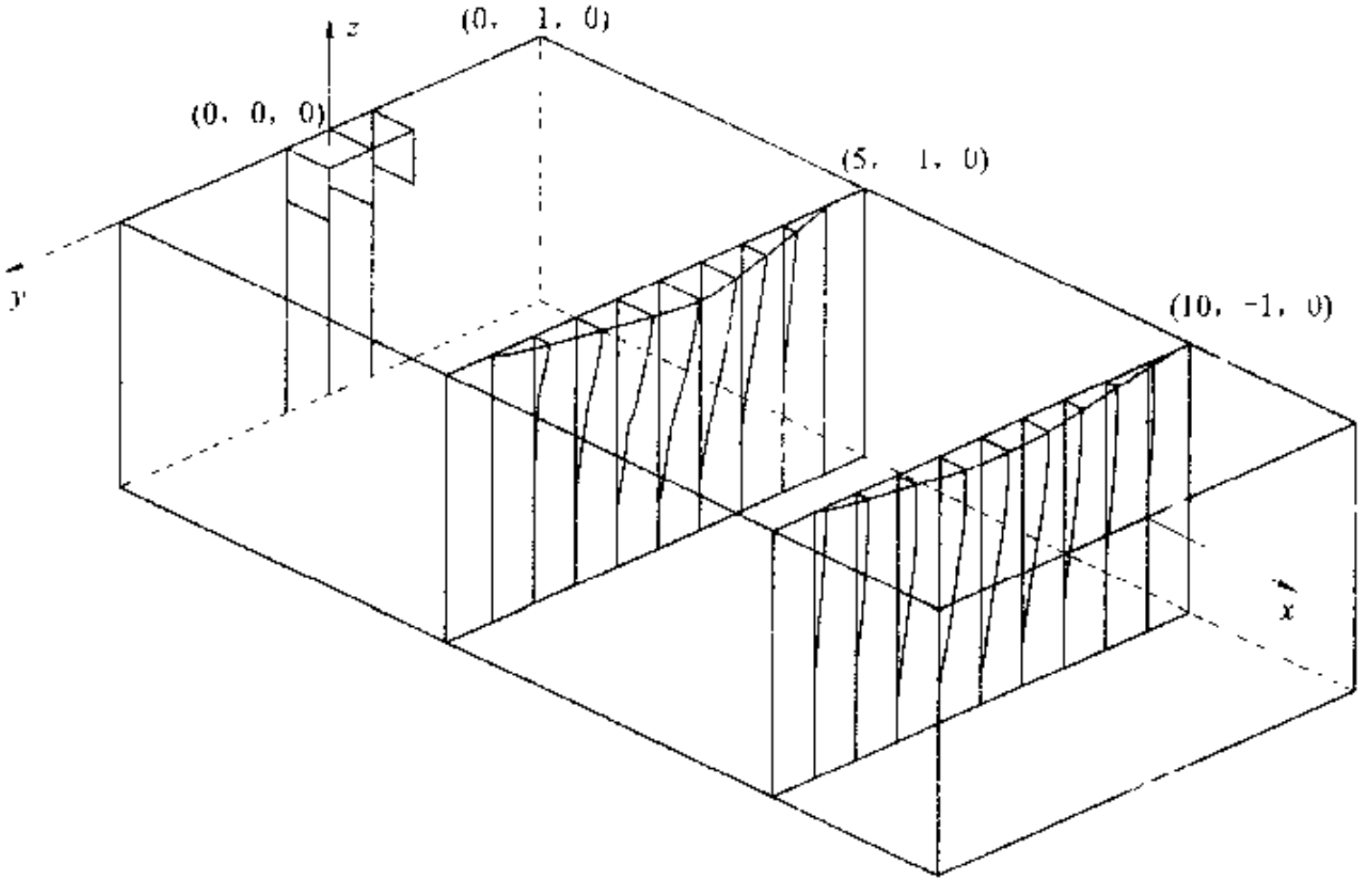


图8.36　选择迭代法计算的三维射流稳态结果

二维、三维射流问题计算表明，用同一种方法，二者花费的计算机时间之比接近 2/3，这说明，蒙特卡罗解法的计算量与维数成正比关系。

这里用 Monto - Carlo 方法求解了二维和三维射流不同情况，又是很典型的非线性问题，计算结果与分析解或其它方法的计算结果吻合较好，这表明用随机数值方法求解一些非线性问题是可行的。

在计算射流问题时，二维射流与三维射流所用计算时间之比接近 2：3，这说明随机游动数值解法具有计算量与维数成正比的优点。

上面提出的质点法，具有计算速度快，占用的内存少等优点，很适合于求解高维问题。

图 8.37、图 8.38、图 8.39 是用蒙特卡罗法计算的挑流（自由射流）水舌雾化问题的水舌扩散图。见后。

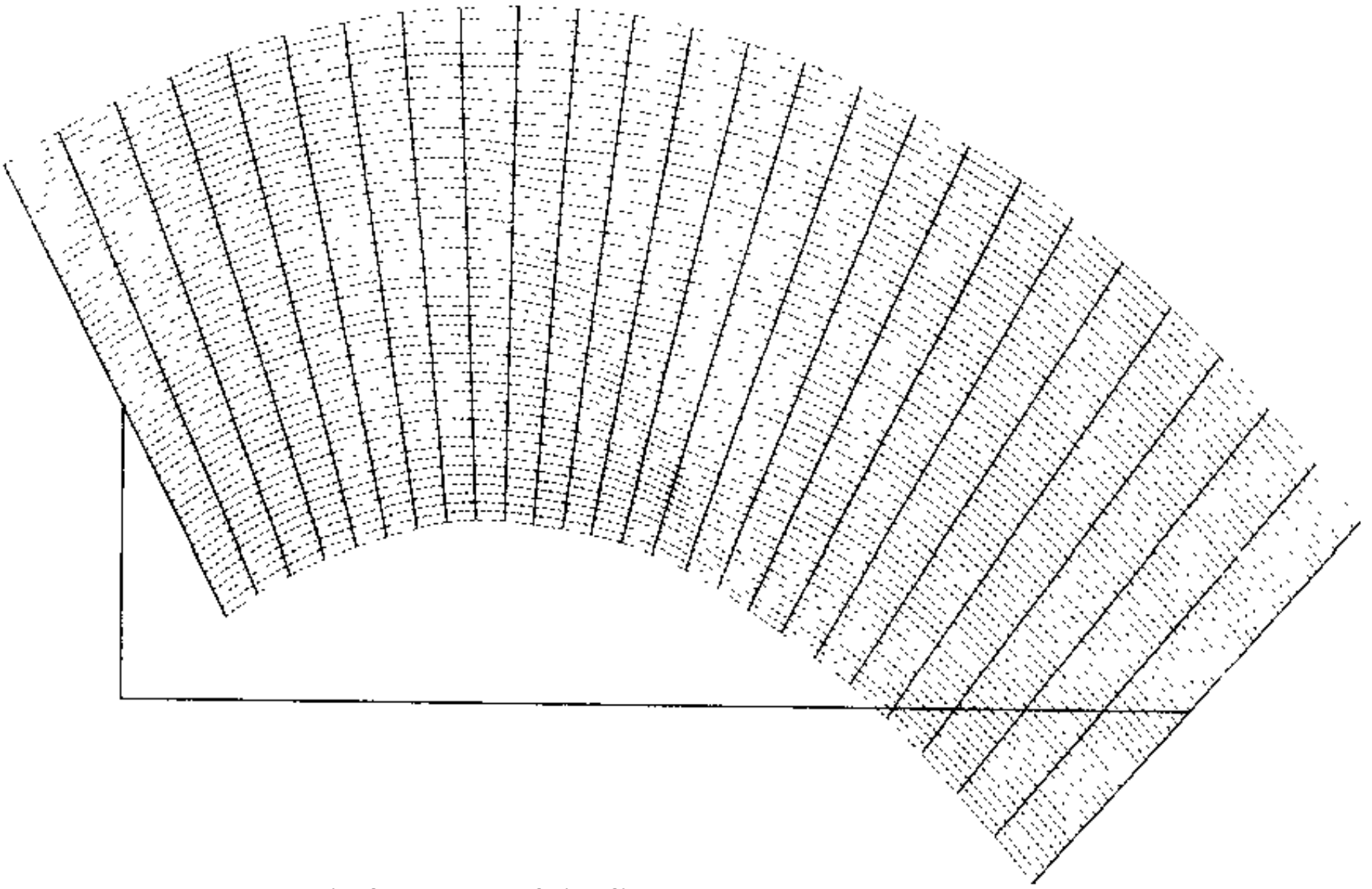
8.4.2　悬沙的随机运动及沉沙池计算

沉沙池是在多泥沙河流上应用较多的一种渠首水工建筑物，通常设置在进水闸处或下游适当地方，以沉淀水流中较粗的泥沙，防止其进入渠道或进入水轮机，造成渠道淤积或水轮机磨损。

通常在考虑沉沙池计算时，对水流及泥沙紊动因素的处理只能依据一定的经验或实测资料来确定某一个系数，这样给计算带来了随意性和误差，这里，计算中应用了水流、泥沙紊动的随机规律，并在此基础上建立了悬沙运动沉降的模式，以此为依据，研究了沉沙池中泥沙的运动规律。

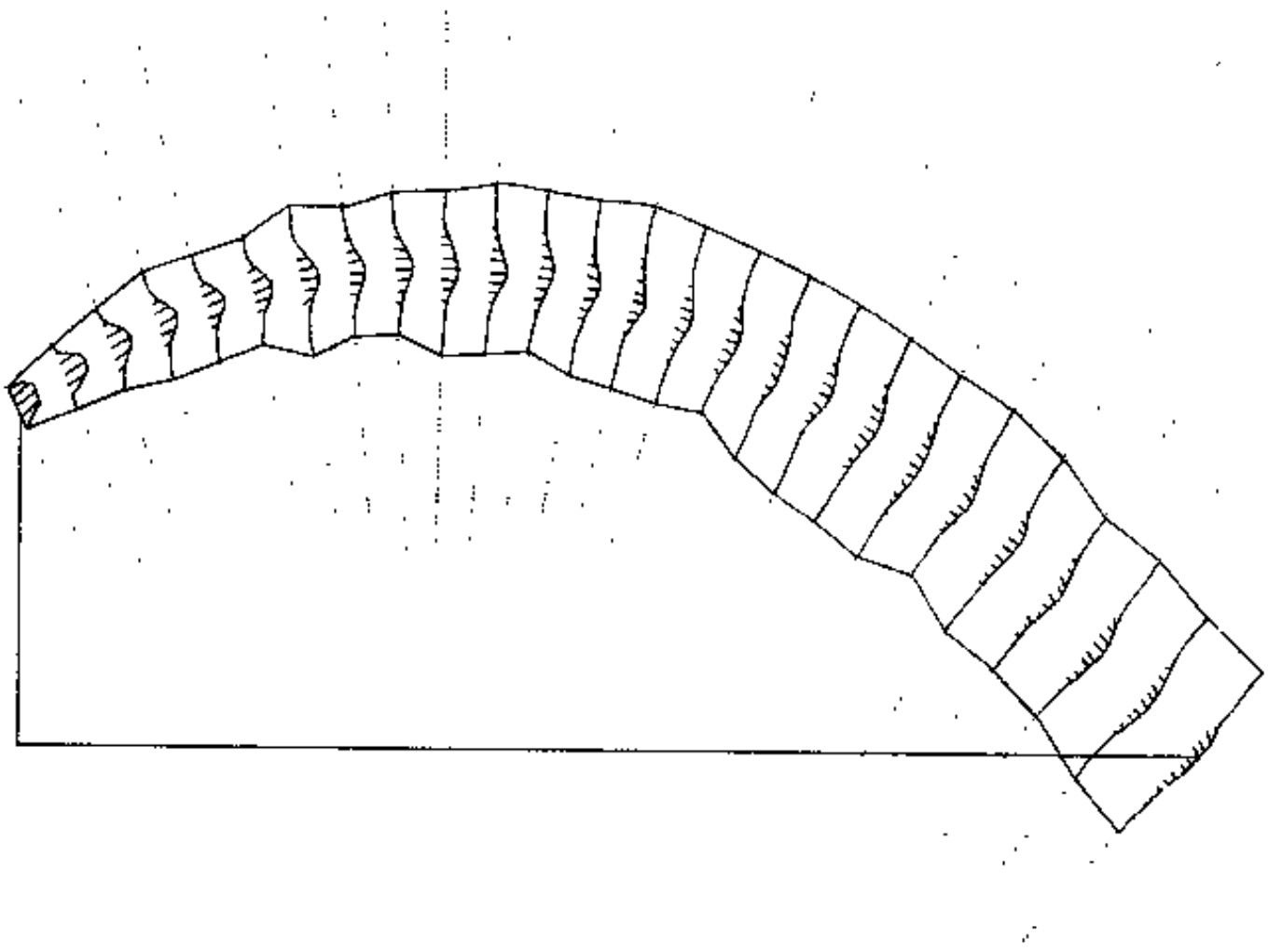
8.4.2.1　水流紊动特性与悬移质沉降运动

泥沙运动与水流紊动特性密切相关，密度大于水的泥沙颗粒在水中运动受水流紊动涡体运动的影响，垂向沉速与脉动速度 u' 相互作用，纵向颗粒运动与水流运动存在着跟随性。假



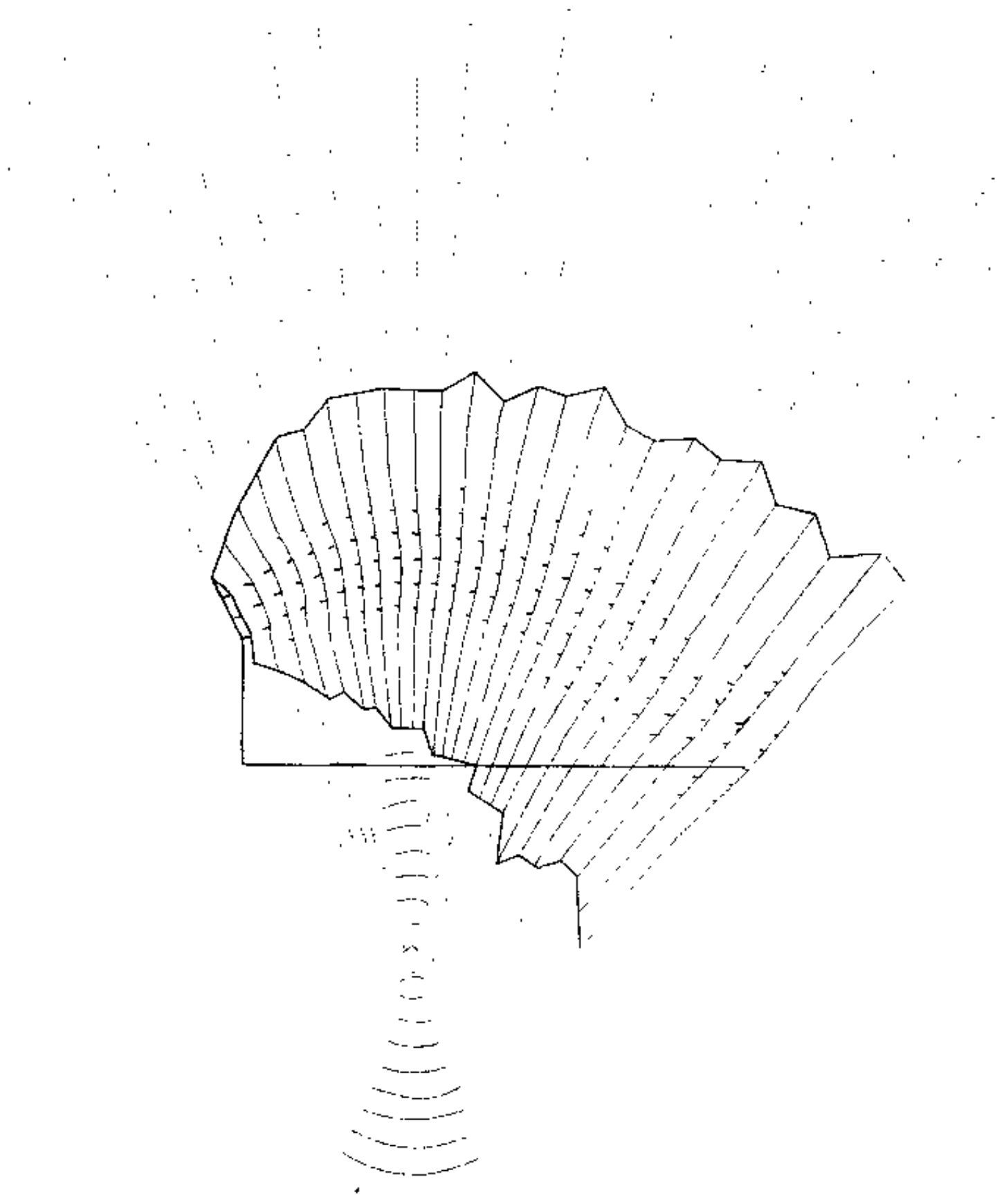
Δx=2.0　Δy=0.4　x方向网格总数＝26　　y方向网格总数－53

图8.37　挑流水舌扩散计算网格



Δx=2.0　Δy=0.4　纵向流速U_x=20.0 m/s　　纵向E_x＝0.2　　时间t=30　s

图8.38　挑流水舌扩散图



Δx=2.0　Δy=2.0　纵向流速U_r=20.0 m/s　时间t=40 s

图8.39　挑流水舌扩散图(局部放大)

设泥沙运动速度，

$$\begin{aligned} u_s &= u(\delta) + u' \\ u_s &= \omega_i + v' \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

式中 $u(z)$ 为水流纵向流速，它与水深 z 有关，ω_i 为第 i 粒径组泥沙的沉速，u'，v' 为水流脉动速度。沉沙池如图 8.40 所示。

如果能够确定水流脉动特征 u'、v'，则可以决定泥沙运动。根据前人资料，有人认为 u'、v' 分别服从正态分布。以 $\zeta(v')$ 代表随机变量 v'，则竖向脉动的分布密度为

$f_{\zeta(v')}$ =

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{v'^2}{2\sigma^2}\right) \tag{8.4.3}$$

按有关资料，认为 $\sigma=10.5\nu_*$。一般而言，细颗粒泥沙与水流运动一致，且纵向密度对泥沙垂向沉降影响较小，令 $v'=0$。

第 i 组粒径的泥沙由高 h 处沉降至沉沙池底，至池首端的距离为一个随机变量 $\zeta(L)$，有

$$\zeta(L)=\frac{hu(z)}{[\omega_i-\zeta(v')]} \tag{8.4.4}$$

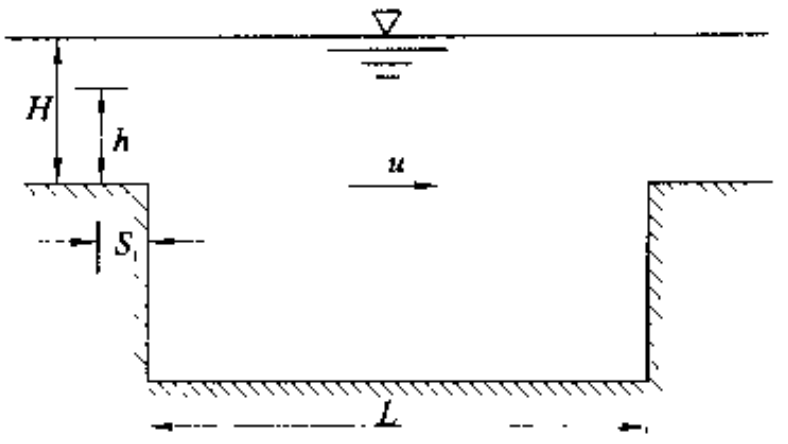


图8 40　沉沙池示意图

其分布函数为

$$F(L)=P[\zeta(L)<L]=P\left[\frac{hu(z)}{\omega_i-\zeta(v')}<L\right]=P\left[\zeta(v')<\omega_i-\frac{hu(z)}{L}\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\omega_i-\frac{hu}{l}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{v'^2}{2\sigma^2}\right)dv' \tag{8.4.5}$$

它的分布密度为

$$f_{(L)}=F'(L)=\frac{hu(z)}{\sqrt{2\pi}\sigma L^2}\exp\left\{-\frac{\frac{[\omega_i-hu(z)]^2}{L}}{2\sigma^2}\right\} \tag{8.4.6}$$

可以用来计算泥沙沉降的分布区间。

8.4.2.2　泥沙沉降的分布区间及沉降保证率

泥沙沉降在区间 $[L_1, L_2]$ 范围内的百分率

$$\alpha=P\{L_1\leqslant L\leqslant L_2\}=\int_{L_1}^{L_2}f_{(L)}\,dL$$

$$=\int_{L_1}^{L_2}\frac{hu(z)}{\sqrt{2\pi}\sigma L^2}\exp\left\{-\frac{[\omega_i-hu(z)/L]^2}{2\sigma^2}\right\}dL$$

$$=\int_{(\omega_i-hu/L_2)/\sigma}^{(\omega_i-hu/L_1)/\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{l^2}{2}\,dl\right\}$$

$$=\varphi\left\{\frac{1}{\sigma}\left[\omega_i-\frac{hu(z)}{L_2}\right]\right\}-\varphi\left\{\frac{1}{\sigma}\left[\omega_i-\frac{hu(z)}{L_1}\right]\right\} \tag{8.4.7}$$

式中 φ 为正态分布函数。

取区间为 $[0, L]$ 时

$$\alpha=\varphi\left\{\frac{1}{\sigma}\left[\omega_i-\frac{hu(z)}{L}\right]\right\}$$

则 $$\frac{hu(z)}{L}=\omega_s-\sigma Z_\alpha$$

Z_α 是与 $\varphi=\alpha$ 对应的反函数值。要使 $L\geqslant 0$，须 $\omega_s\geqslant\sigma Z_\alpha$。

给出垂向的流速分布 $u(z)$（对数或指数规律）可得到不同水深的泥沙沉降率，再根据垂向含沙量分布，如（张瑞谨，1989）

$$\frac{S(h)}{\bar{S}}=\frac{1}{\exp\left\{\frac{\omega_s}{ku_*}[f(\eta)-f(\eta_a)]\right\}} \tag{8.4.8}$$

沿水深 H 积分可得粒径为 d 的泥沙沉降率

$$P_s=\int_a^H\frac{\alpha S(h)\,dh}{\bar{S}H} \tag{8.4.9}$$

不同级配组成的泥沙，总的沉降率 $P=\sum P_{fi}$。

对于有纵向脉动分布 $u'\neq 0$，也可推得分布密度，得到沉降百分率

$$P(L_1<L<L_2)=\varphi\left\{\frac{1}{\sigma_x}\left(\frac{\omega_s}{h}L_2-2\bar{u}\right)\right\}-\varphi\left\{\frac{1}{\sigma_x}\left(\frac{\omega_s}{h}L_1-2\bar{u}\right)\right\} \tag{8.4.10}$$

式中 σ_x 为水流纵向脉动强度，$\bar{u}$ 为垂向平均流速。目前，水流脉动速度测得的资料渐多，可供选用，下面给出一种水流脉动强度图。$\frac{\sqrt{u'^2}}{u_*}$，$\frac{\sqrt{v'^2}}{u_*}$ 与相对水深 $\frac{h}{H}$ 关系图。

图中，$\frac{\sqrt{u'^2}}{u_*}$，为水流纵向脉动方差随水深的变化，$\frac{\sqrt{v'^2}}{u_*}$，为水流竖向脉动方差随水深的变化，由图 8.41 可知：纵向水流脉动方差随水深变化较大，而竖向变化较小。

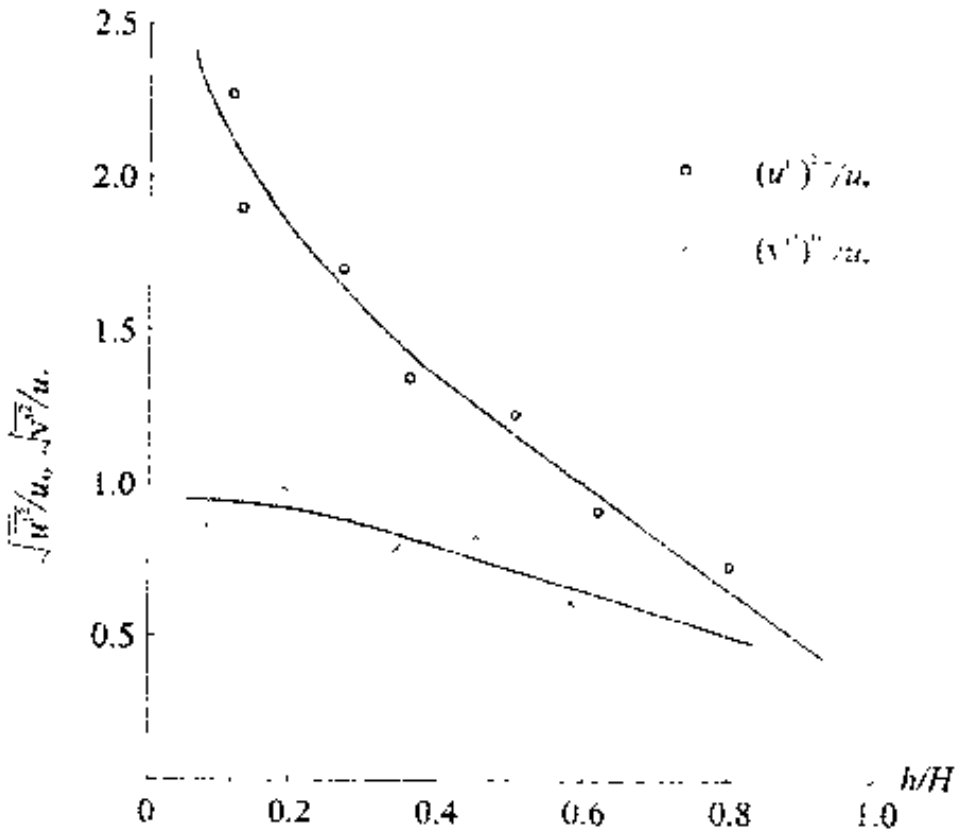


图8.41　水流脉动强度图

就纵向速度而言，它的脉动量相对于平均速度而言较小，而竖向脉动速度相对于泥沙沉速 ω 而言，则较大，所以前面计算时忽略 u' 是有道理的。

8.4.2.3 计算实例

渔子溪（罗福安等，1983）一级水电站为高水头引水式电站，首部枢纽由拦河沟，取水口，沉沙池等组成，流域集水面积 0.169 万平方公里，河道多年平均输沙量 126 万吨，多年平均含沙量 0.603 kg/m³，在目前条件下该电站沉沙效果是明显的，2#机发电时总沉降率大于 50%，大于有害粒径 0.25 mm 泥沙全部沉降，大于 0.1 mm 泥沙沉降 85%，在进入水轮机泥沙组成中 93.1%小于 0.1 mm，中值粒径 d_m =0.037 mm。

根据表 8.8 和表 8.9 提供资料可计算出各沉沙池沉降保证率，在通常规范计算中，对于进入水轮机的有害泥沙粒径而言确定为 0.25 mm，对于进入灌溉田间泥沙而言，确定为 0.10 mm，表 8.10 为分别对 0.25 mm 泥沙及 0.1 mm 泥沙计算结果。

表 8.8 几个水电站沉沙池的主要技术参数

	石棉矿	渔子溪	逊科西
长 度 (m)	57.4	100	69
宽 度 (m)	11	25	32.9
水 深 (m)	4.42	7.3	4.0
引用流量 (m³/s)	18	64.8	40

表 8.9 渔子溪水电站沉沙池相应水流泥沙级配

d_i	>0.5	0.5~0.25	0.25~0.1	0.1~0.05	0.05~0.01	<0.01	d_m
f	6.2	10.5	27.3	29.5	21.3	5.2	0.088

表 8.10 有害粒径泥沙沉降保证率

	石棉矿	渔子溪	逊科西
引用流量 (m³/s)	18	64.8	40
0.25 mm 保证率 (%)	95.45	98.38	98.68
0.10 mm 保证率 (%)	49.2	58.32	53.63
100%沉降分界 d_i (mm)	0.3	0.4	0.3

由表 8.11 和表 8.12 可知，该沉沙池的总沉降率为 60.9%，大于有害粒径 0.25 mm 泥沙沉降达 98%以上，大于 0.4 mm 粒径泥沙将全部沉降，大于 0.1 mm 粒径的泥沙沉降率为 86.33%，

进入水轮机悬沙中小于 0.1 mm 粒径的占 90.1%，中值粒径为 d_{50} =0.060 mm。

表 8.11　渔子溪沉沙池各级配沉降率

d_i (mm)	0.5	0.25	0.10	0.05	0.01	<0.01
ω_i (m/s)	0.07	0.030 45	0.006 2	0.001 56	0.000 062 4	
沉降率 (%)	100	98.38	58.32	44	30	

表 8.12　渔子溪沉沙池沿程泥沙级配表 (%)

区间 (m)	大于 0.5 (mm)	0.5~0.25 (mm)	0.25~0.10 (mm)	0.10~0.05 (mm)	0.05~0.01 (mm)	小于 0.01 (mm)	p_i (mm)
0+40	99.2	0.8	0	0	0	0	0.5
40+60	60.4	38.7	0.9	0	0	0	0.45
60+80	3.1	89.2	7.7	0	0	0	0.36
80+100	0	13.8	38.8	30.6	15.1	1.7	0.147

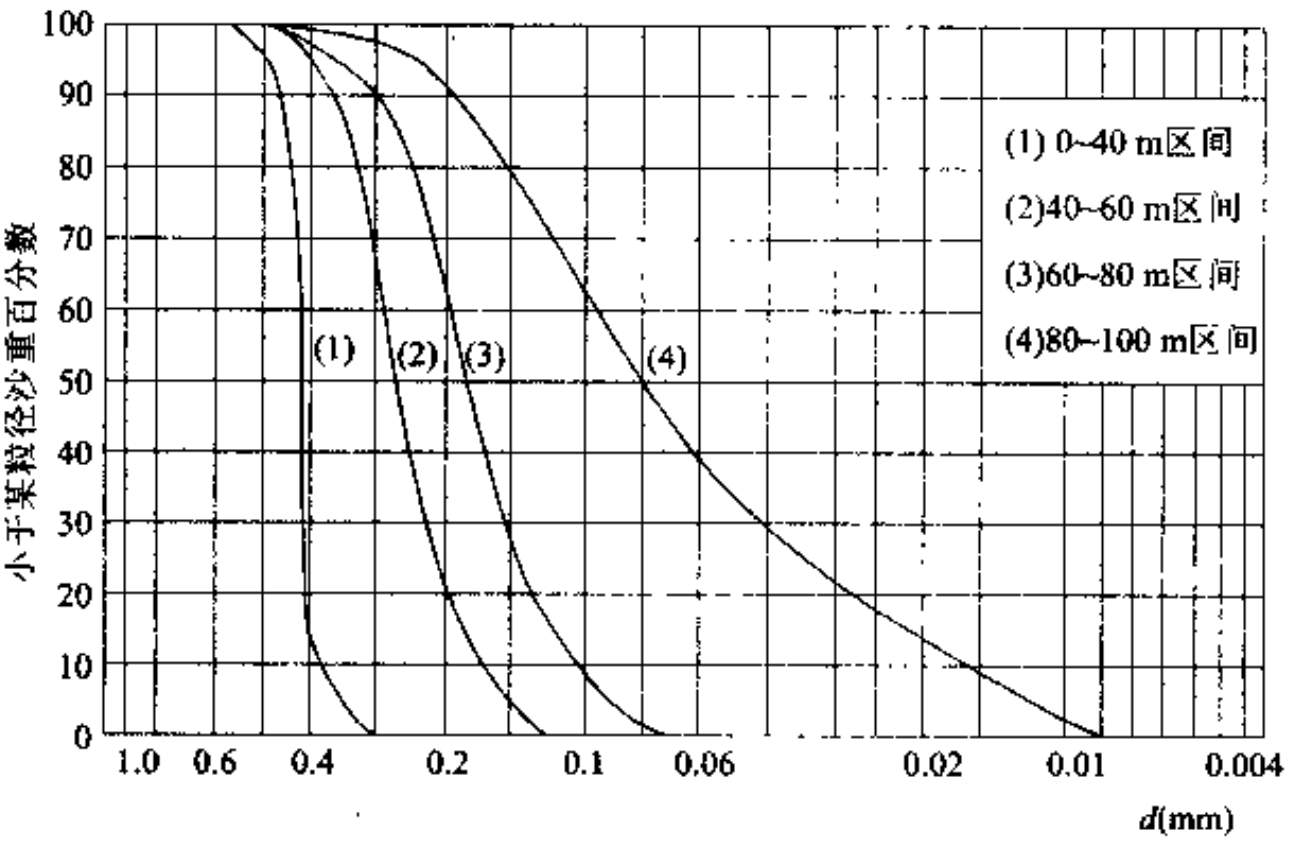


图8.42　沉沙池断面泥沙级配图

由以上结果可知，沉沙池前段沉淀泥沙多为粗沙，在前 50 m 内沉淀中值粒径为 0.47 mm，而在后 20 m 中沉淀中值粒径为 0.147 mm，大于 0.25 mm 的粗沙在前 50 m 中基本沉降，而在后 20 m 中沉降的大部分为细沙。

8.4.3　泵站前池泥沙运动的随机模拟

我们应用两相流体动力学原理，从泥沙颗粒受力情况出发，用泥沙颗粒的质点轨迹模型

给出颗粒在前池中浓度分布，沉降轨迹等图像，游移沉降采用蒙特卡罗思想，此处仅讨论低浓度情况。

(1) 泥沙颗粒在水中所受作用有以下几种：

①重力和浮力；

②泥沙运动的流体阻力、升力；

③压力梯度力；

④加速运动的附加质量力；

⑤Basset 力；

⑥Saffman 力；

⑦旋转运动的 Magnus 力。

这些力的详细表达式，可参看文献，这里略去。

(2) 泥沙颗粒在前池水流中的随机运动。

为了考虑水流对颗粒扩散的影响，根据颗粒运动方程，建立如下形式的颗粒运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}U_{pi}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\tau}(U_{pi}-U_i-U'_i)+C_i \tag{8.4.11}$$

式中 U_{pi} 为颗粒运动的随机运动速度分量；U_i 为水流运动的平均速度分量；U'_i 为其脉动速度；C_1，C_2，C_3，为相应常数 (瞬时值)；$\tau=\dfrac{(\zeta_p+\frac{1}{2}\rho_l)\mathrm{d}\rho^2}{18\mu f}$，而 $f=\dfrac{C_D R_{ep}}{24}$，C_1、C_2、C_3 见参考文献不再列出。

水流脉动速度，近似值 $u'_i=\alpha\sqrt{\overline{u'^2_i}}$，其中 α 为正态分布的随机数，由实验确定，如流场为均匀各向同性的，则 $\sqrt{\overline{u'^2_i}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}k}$，$k$ 为紊动能、可由 Rung-kutta 法求解。颗粒运动的位置：

$$X_i=X_{i0}+(U_{pi}+U_{pi0})\frac{\Delta t}{2} \tag{8.4.12}$$

式中下标有“0”的表示上一步的计算值；Δt 为时间步长。

(3) 泵站前池泥沙运动的随机模拟

由蒙特卡罗法模拟泥沙颗粒随机游动，进而得到计算区域 (前池) 内浓度分布，泥沙游移分布形态。由计算历时累计便可进一步得出泥沙淤积量，淤积厚度。

作为算例：选取粒径，$d_p=0.1$ mm。泥沙浓度泵站前池进口为 1.0 kg/m^3，浓度沿垂线分布见图 8.42 所示，在进口断面投放 5 000 个等粒径的泥沙颗粒 (质点)，泥沙初始速度与水流相同，时间步长取 $\Delta t=1$ 秒，图 8.47 中给出几个泥沙颗粒在泵站前池中运动的轨迹，轨迹清晰地展示了泥沙颗粒的运动过程，此处可以利用计算机图形技术，实现泥沙运动的三维动态显示。

计算的同时，也用彩色塑料球进行了物理模型试验，计算与试验观测相结合，吻合较好。体现了泥沙颗粒的运动过程，由此还可以利用计算机图形技术，实现泥沙运动的三维动态显示。图 8.48 是投放的泥沙颗粒，在计算区域内淤积的分布情况。图 8.49 是计算得出的泵站前池水面和底部泥沙浓度分布。整体模型试验中，为了观测前池水面和底部的流态，分别采用了塑料颗粒和染色砂质颗粒作为示踪物进行示踪试验。图 8.48、图 8.49 的结果与模型试验所观察到的定性结果基本上是一致的。对实际问题，可以根据进口断面处的浓度分布、泥沙

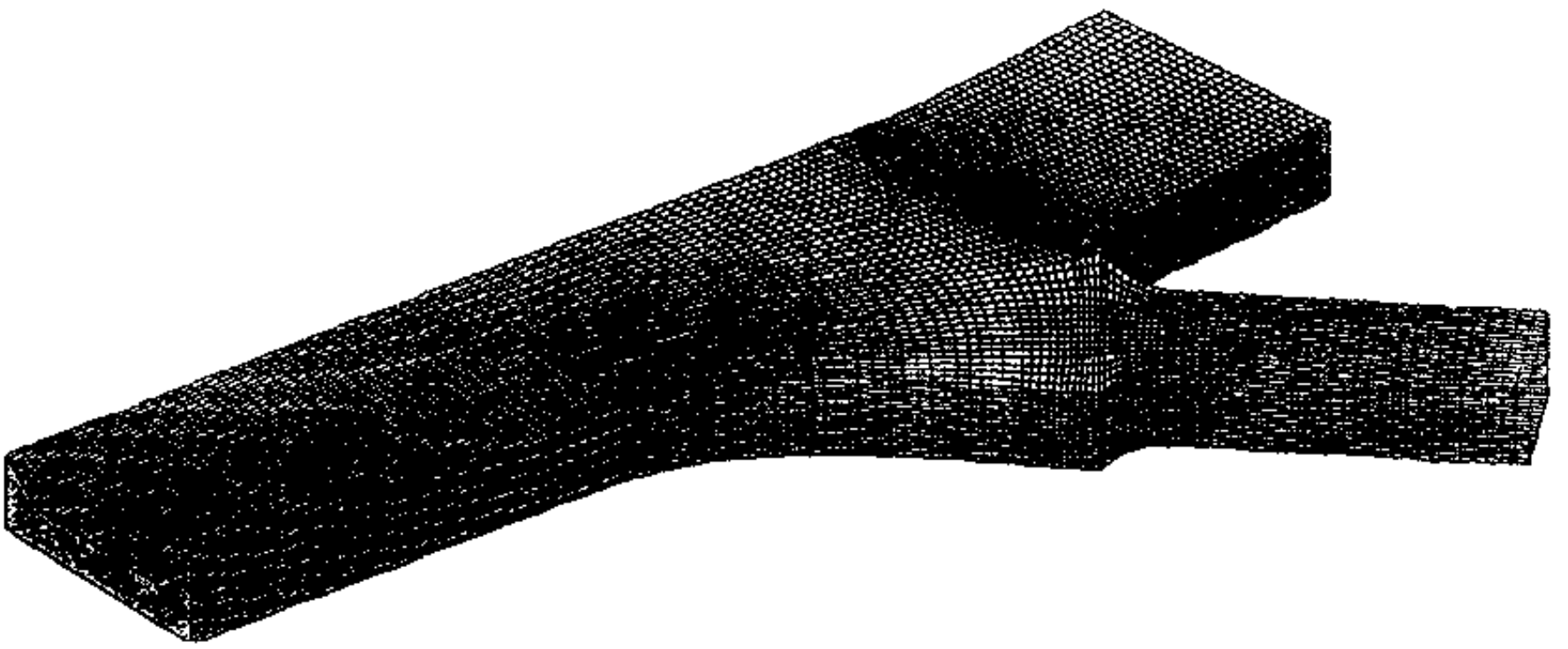


图8.43　混合网格坐标下的泵站前池

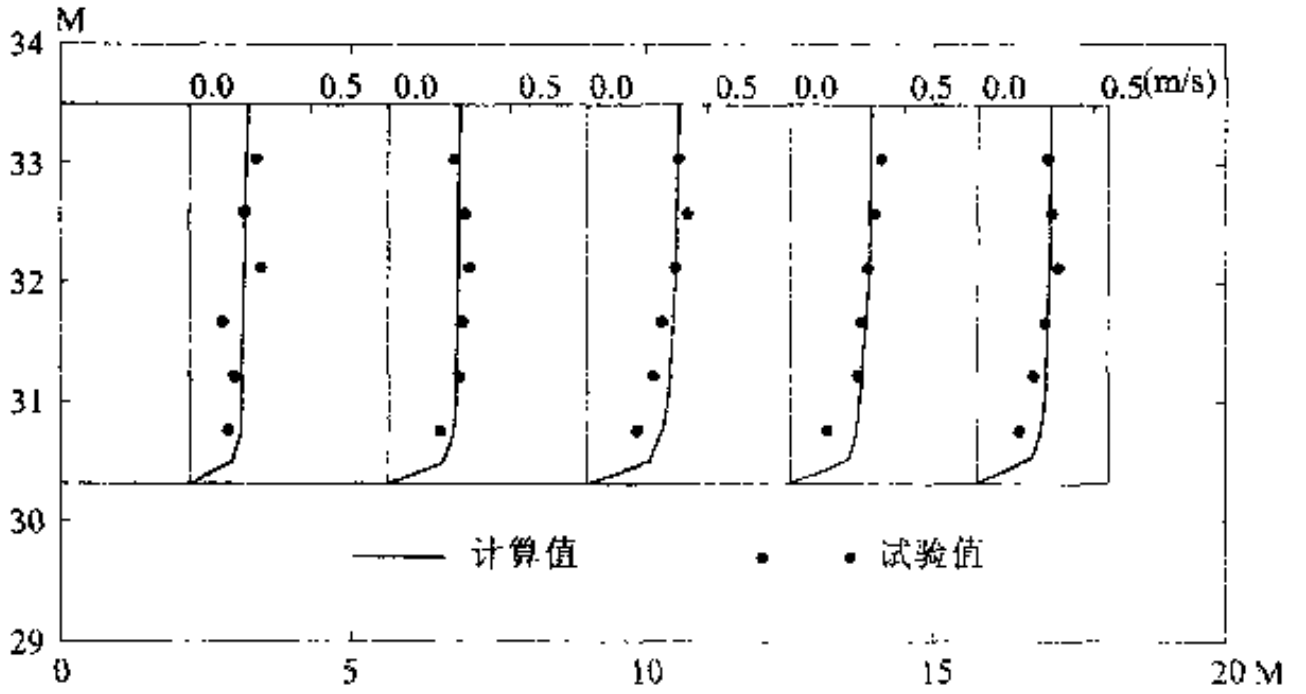


图8.44　断面$A-A$流速大小沿水深分布

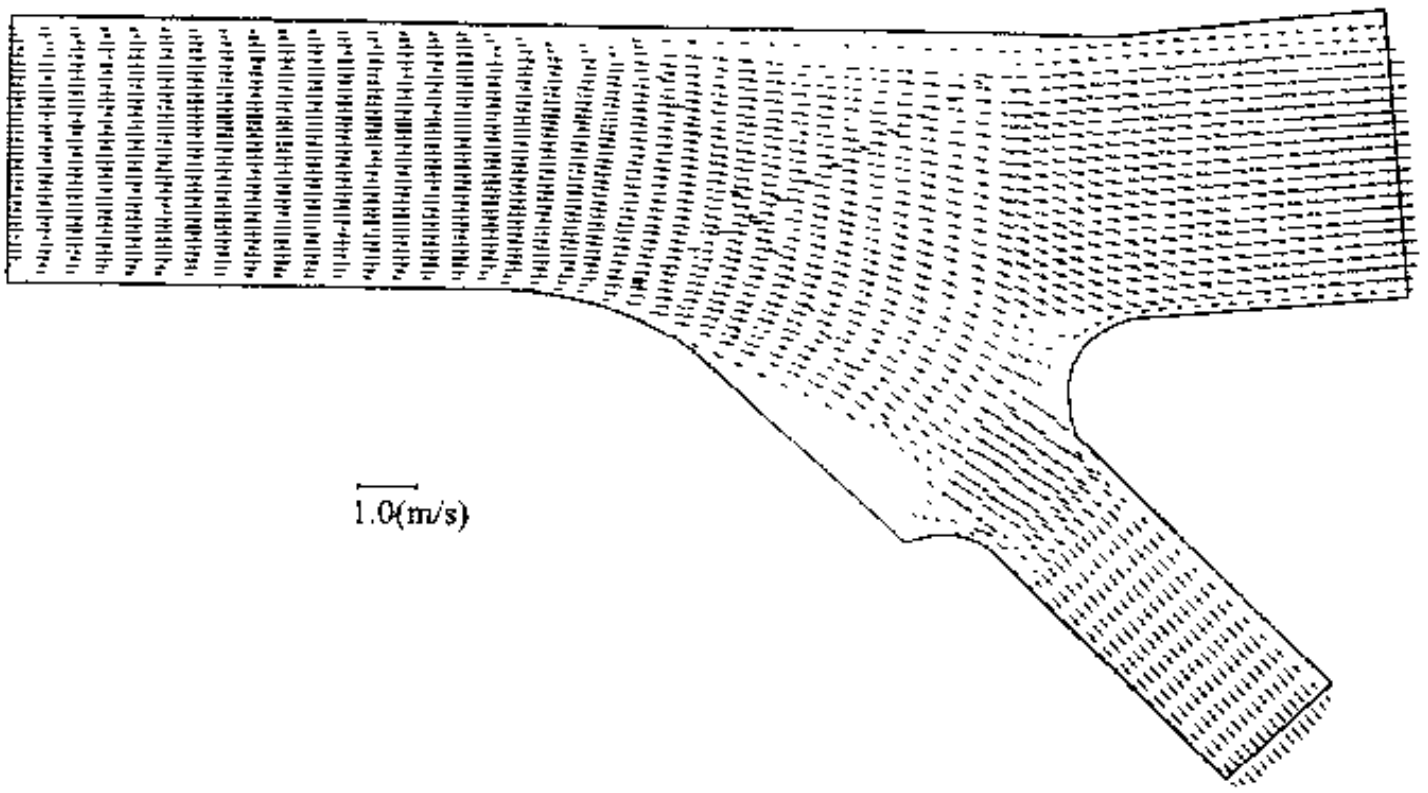
颗粒级配，按本章方法进行计算，计算时间和计算机内存量不会有太大的增加。

混合网格坐标下的泵站前池如图 8.43 所示；断面 $A-A$ 流速大小沿水深分布如图 4.44 所示；不同水深处的流速矢量如图 8.45 所示；不同水深处的 $\sqrt{k}$ 等值线如图 8.46 所示。

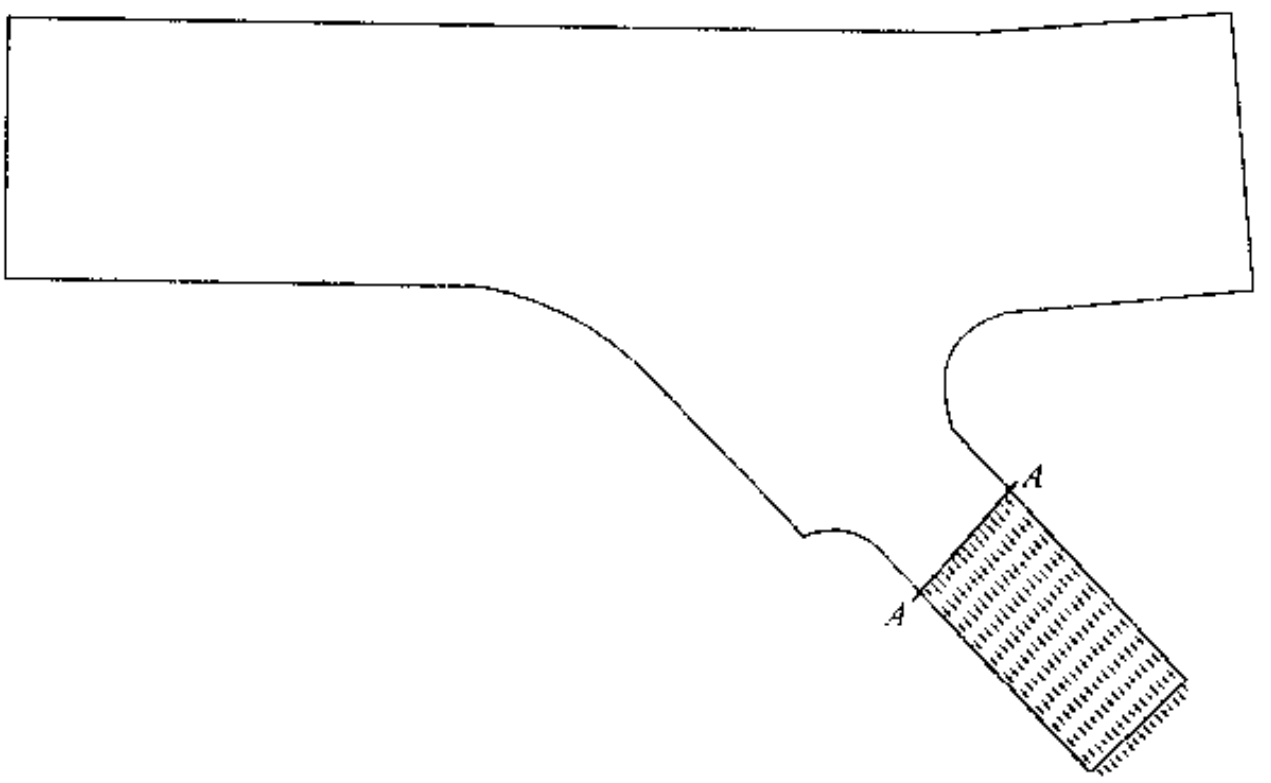
水动力学中的随机方法是一重要分支，因为事物不总是确定性的，大量现象带有随机性。随机游动的思想虽然古老，但随着电子计算机的出现与发展，产生了新的活力。它可以解确定性问题，也可以解随机性问题。

我们在解椭圆型方程如势流、渗流问题，抛物型方程如紊流边界层问题，对流扩散方程如 $\omega-\psi$ 方法、射流与水环境问题，把流动的物理参数与随机转移概率联系起来，也就是把确定性的物理性质引入随机模型中。它可以与差分、有限元同样解广泛的水动力学问题，并给予更多的信息。

另外一类，如质点游动用于两相流，如泥沙、污染、雾化等，关键在于给定符合物理实际背景的随机分布。这有赖于紊流的观察数据与资料，随着对紊流结构的深入揭示和紊流实验资料的增加和积累，模型将会更加完善和更加符合实际。我们这里做了泥沙在沉沙池、泵



(a) 水面



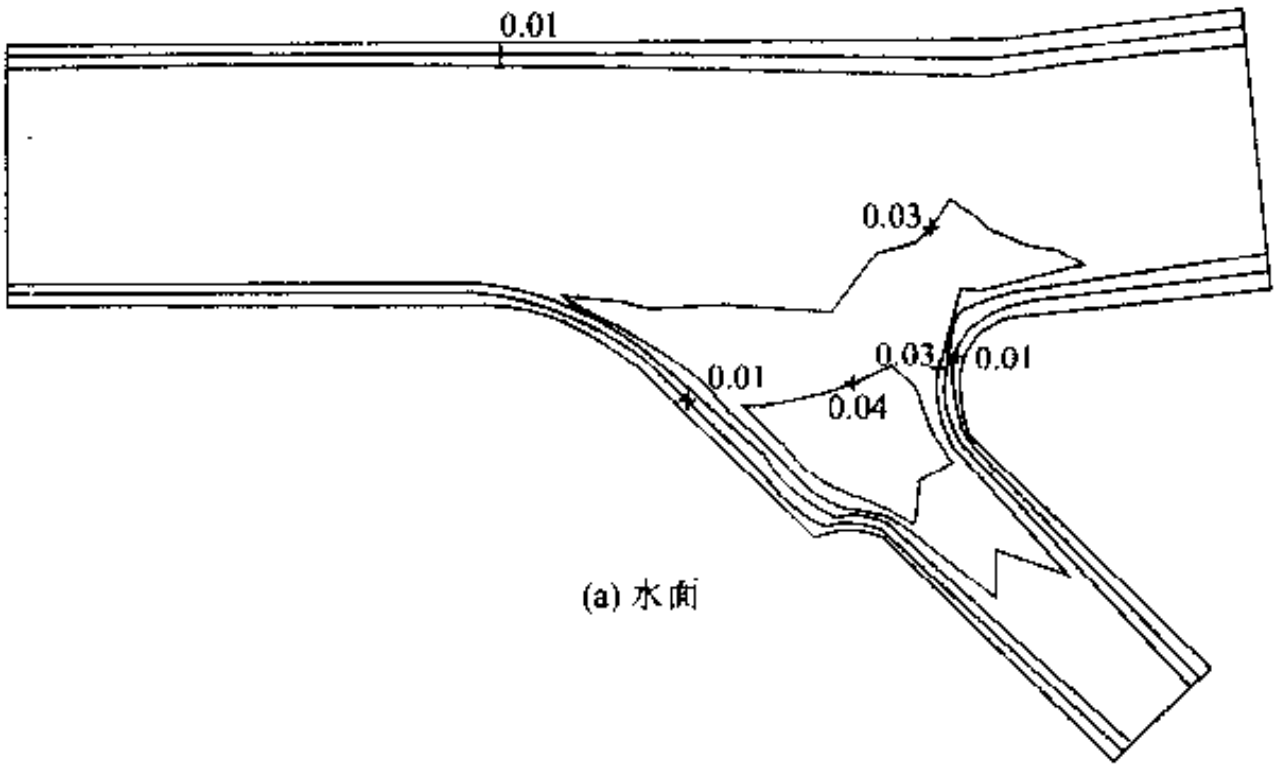
(b) 水深2.2 m

图8.45　不同水深处的流速矢量

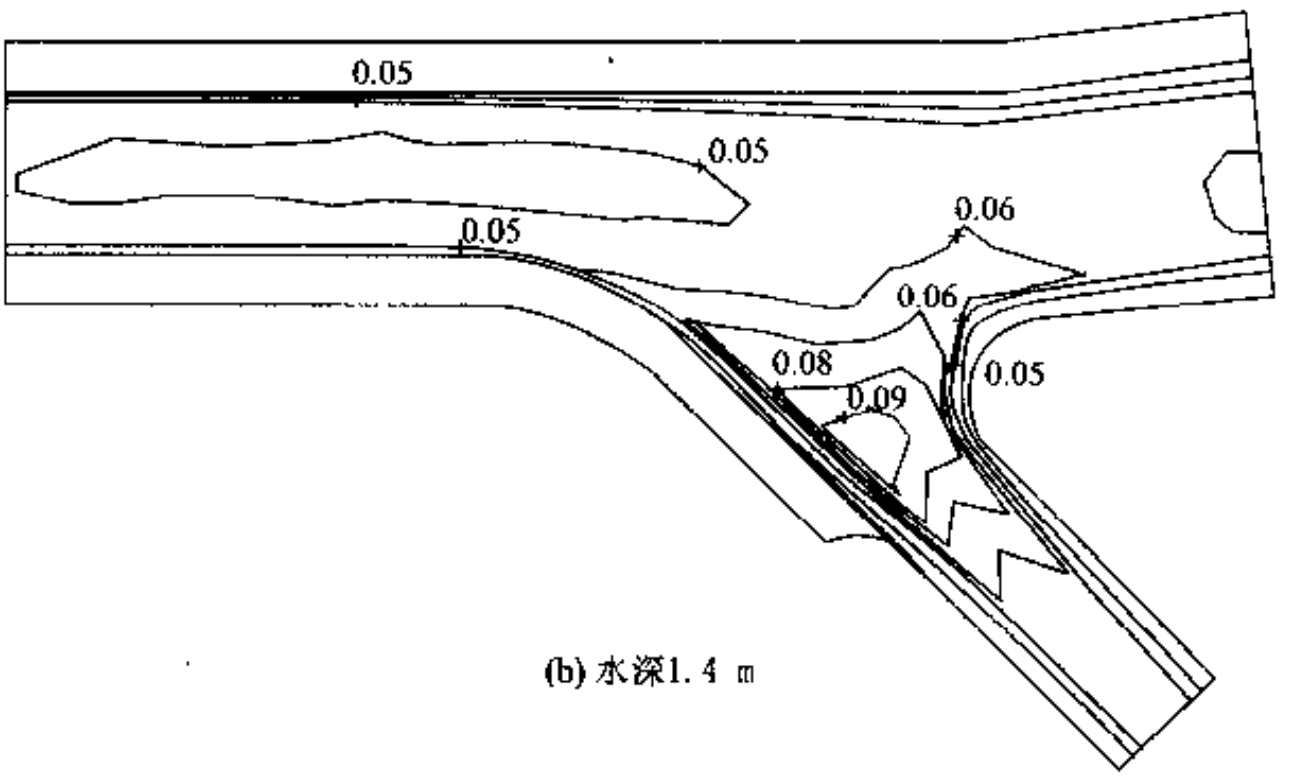
站前池中的沉降计算，也可以推广到泥沙起动，扬起率，冲刷及河床变形，这些都是具有随机性的现象。

对于场的问题，这里用随机方法算的多一些，如浓度场、温度场这些线性问题，如流场这种非线性问题。对于如对流扩散现象不论单个方程或方程组都可进行反复迭代，面对几何复杂、不规则域，它也可用类似于有限元的方法进行计算，只须给定转移信息，大型管网与河网的应用中显示与图论理论结合是可能的。

对于波动现象随机方法我们用得较少，有待今后开拓。



(a) 水面



(b) 水深1.4 m

图8.46　不同水深处的$\sqrt{k}$等值线

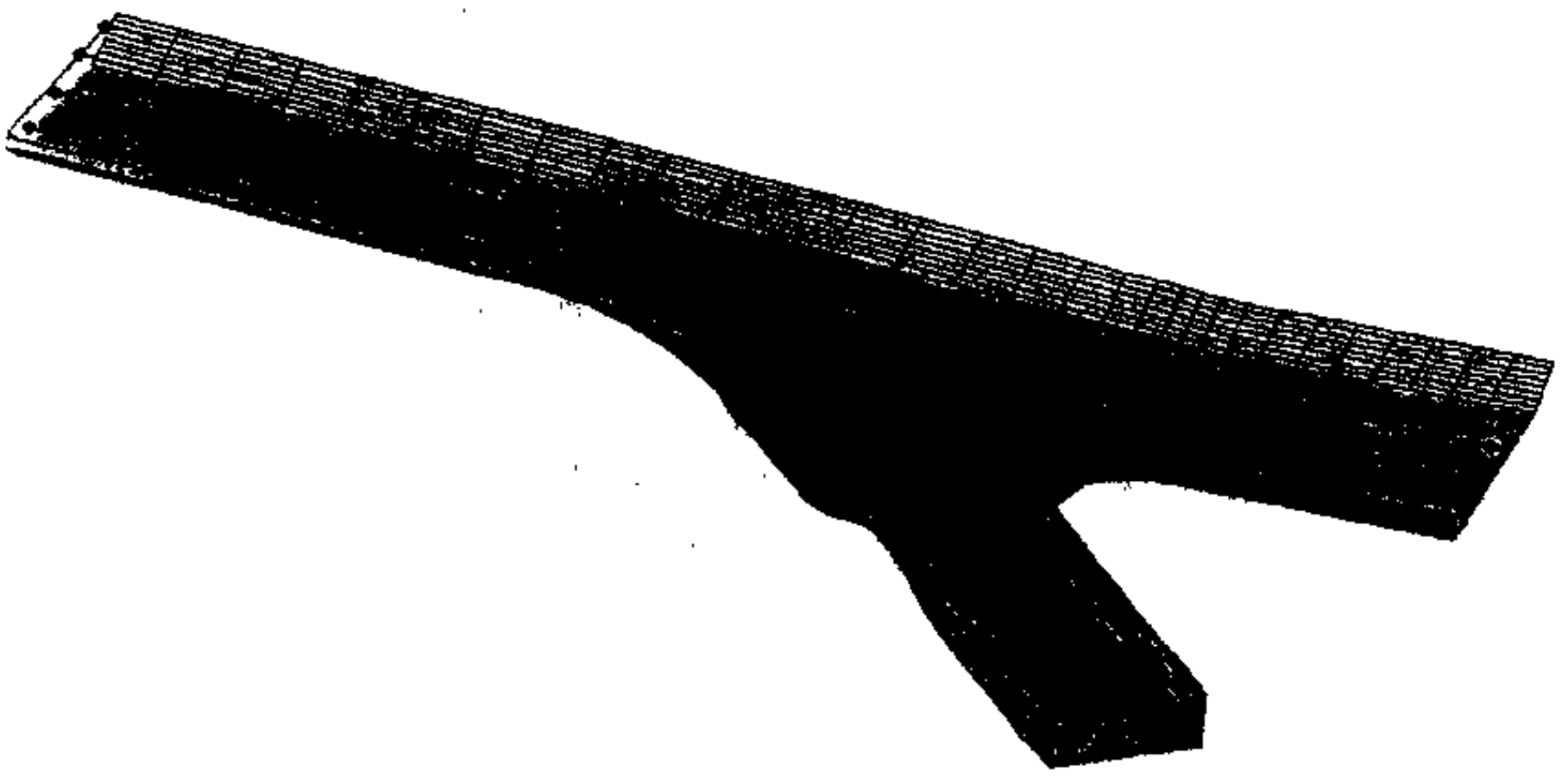


图8.47　泥沙颗粒在泵站前池中的运动轨迹

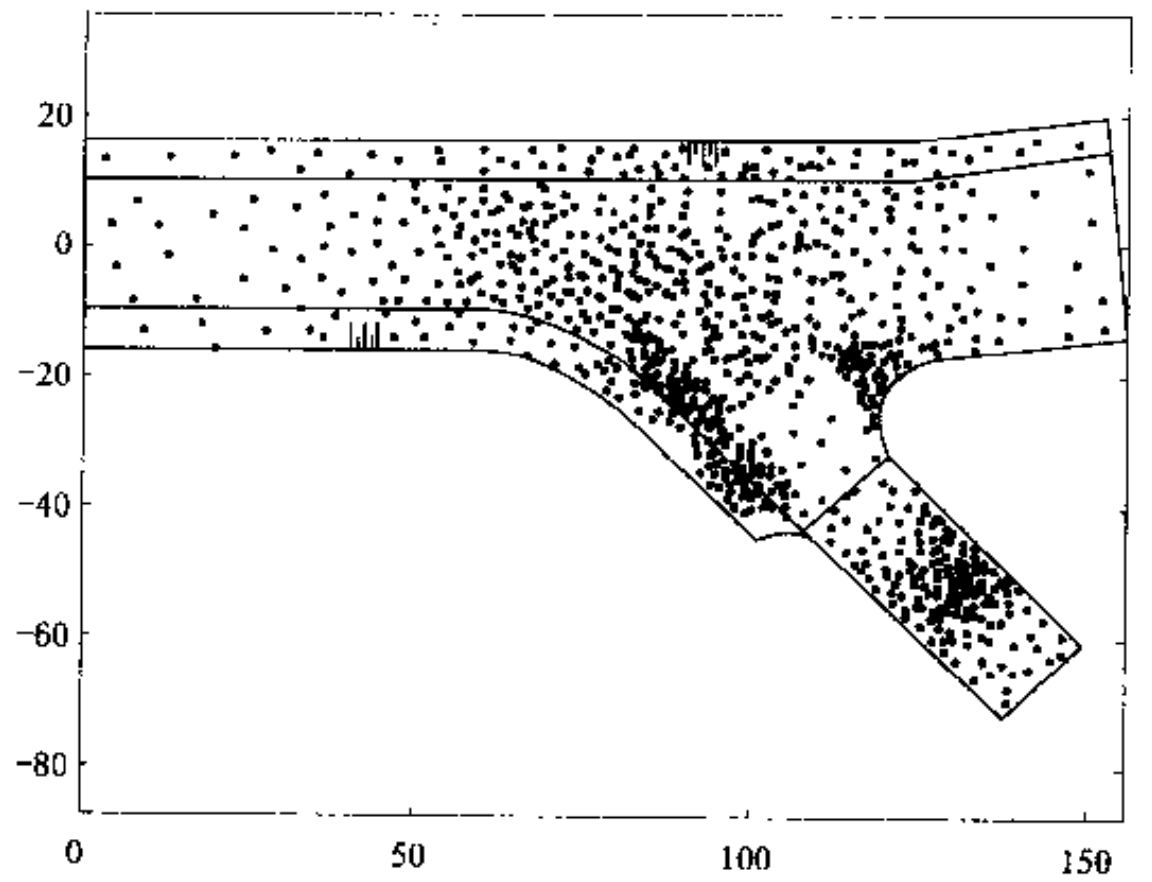
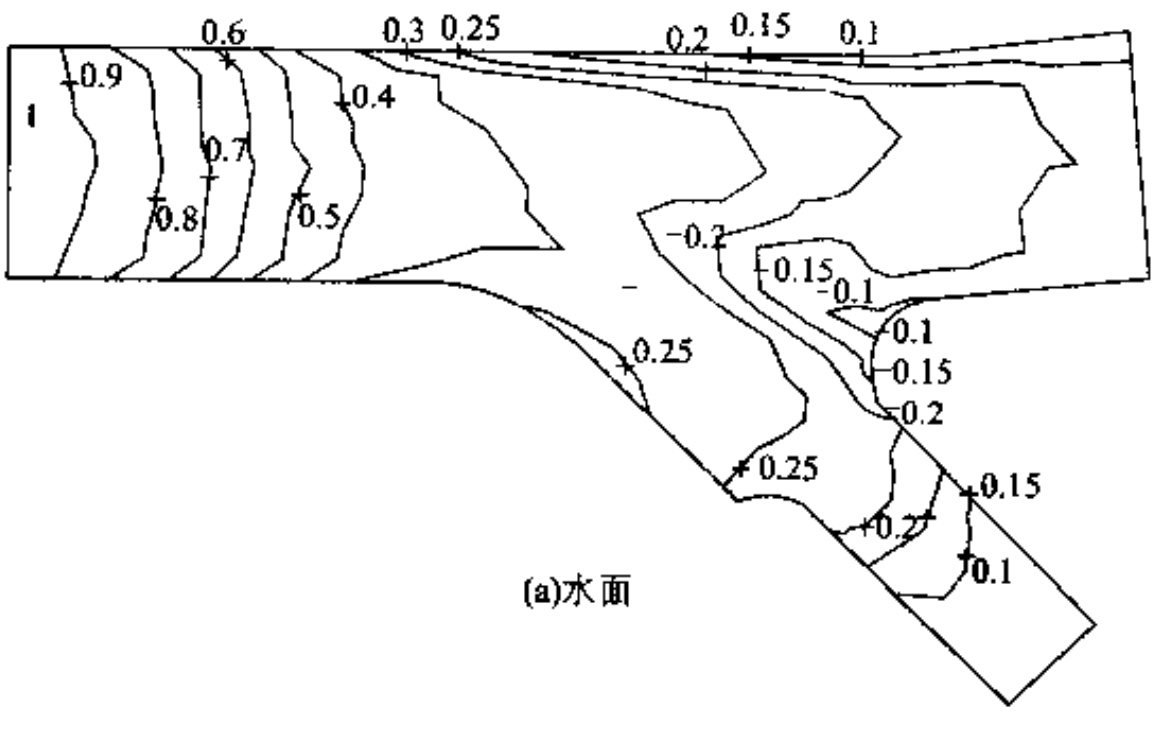
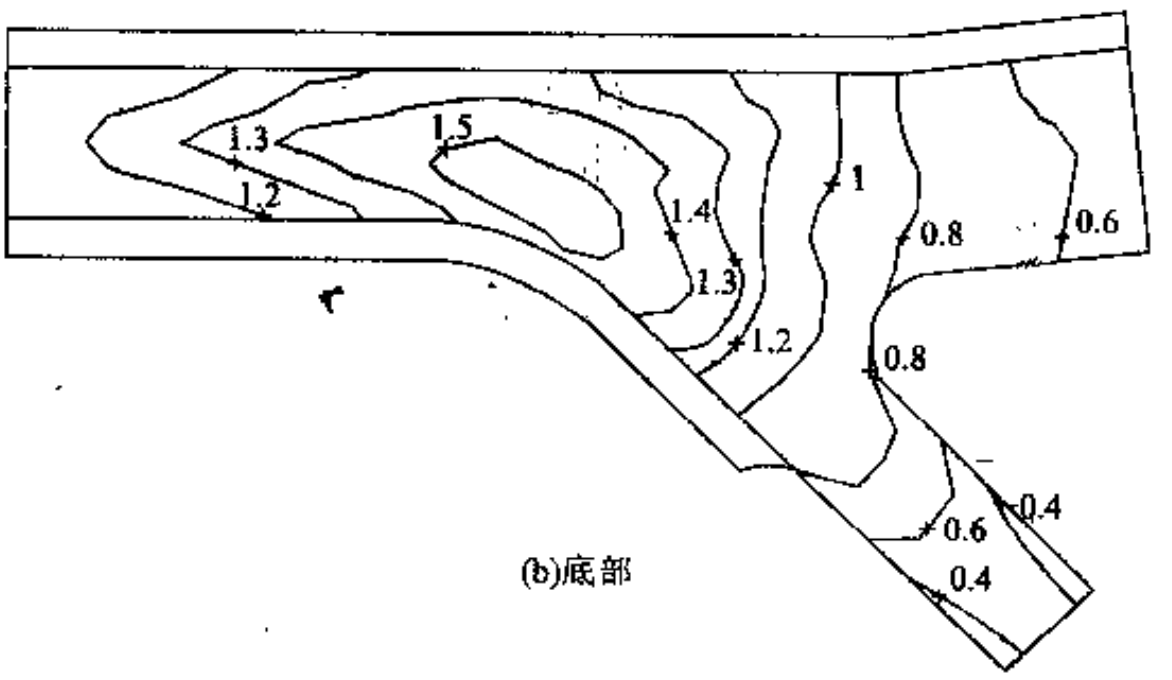


图8.48　泥沙颗粒在泵站前池中的淤积分布



(a)水面



(b)底部

图8.49　泵站前池水面和底部泥沙浓度等值线

参考文献

[1] 郑邦民等编著．流体力学．水利电力出版社，1989

[2] 谭维炎著．计算浅水动力学．清华大学出版社，1998

[3] 朱自强等编著．应用计算流体力学．北京航空航天大学出版社，1998

[4] 周宇澍编著．计算水力学．清华大学出版社，1994

[5] Chung T J. Finite element analysis in fluid dynamics. Mcgraw-Hill Intertional Book Company, 1978

[6] 中国力学学会编．中国学者论文集锦．北京大学出版社，1991

[7] 汪德 ．计算水力学——理论与应用．河海大学出版社，1989

[8] 陈景仁著．湍流模型及有限分析法．上海交通大学出版社，1988

[9] 窦国仁编著．紊流力学．高等教育出版社，1987

[10] 吴江航，韩庆书编著．计算流体力学的理论方法及应用．科学出版社，1988

[11] 郑邦民，赵明登．三维一般曲线坐标变换、网络生成及流场温度场计算．水利学报，第 7 期，1992

[12] Mahmood, Kyevfevech, Vet. al 著，明渠不恒定流．林秉南等译校，水利电力出版社，1987

[13] Patankar S V. Numerical heat transfer and fluid flows. Hemisphere Publishing Cooperation and McGraw Hill Book Company, 1980

[14] 夏震寰．现代水力学．高等教育出版社，1992

[15] 金忠青．N-S 方程的数值解和紊流模型．河海大学出版社，1988

[16] 傅国燕主编．流体力学数值模拟，国防工业出版社，1993

[17] 杨国录．河流数值模型，海洋出版社，1993

[18] 傅国伟．河流水质数学模型及其模拟计算，中国环境科学出版社，1987

[19] 郑邦民．溢流体形的数值模拟，中国科学 A 辑，1985

[20] 周建军，林秉南，王连祥．平面二维泥沙数学模型研究及应用，水科学报，1993

[21] 郑邦民等．北金堤分滞洪区二维非恒定流洪水演进快速预报模型，武汉水利电力大学报告，1995

[22] 郑邦民等．芜湖长江大桥数学模型研究报告，武汉水利电力大学报告，1996

[23] 郑邦民．流体力学中正交曲线坐标张量的应用，武汉水利电力学院院报，1985 年第 1 期

[24] 郑邦民，郑国栋．沙基渗流分析及管涌快速预测，湖北省堤防沙基处理研讨会论文集，1998 年 11 月

[25] 黄东．明渠非恒定流数值模型应用研究，武汉水利电力大学博士论文．1998

[26] 张凌武．平面及竖向二维水流及泥沙运动的数值模拟，武汉水利电力学院博士论文．1989

[27] 吉庆丰. 蒙特卡罗法及其在水动力学中的应用研究，武汉水利电力大学博士论文，1999 年 5 月

[28] Zheng Bangmin, Yang Xiaoting, A Turbulent Model for Varying Density Flow in Ceneral Curvilinear Coordinates, J. of Hydraulics. ser. b 4 (1994), 32-39

[29] Zheng Bangmin, Huang Dong, Ji Qingfeng, Numerical Modeling of Turbid Flood RouLing in Alluvial River, International J. of Sediment Research, vol. 12. No. 3.1997

[30] 郑邦民，邵小敏. 三维坝面溢流边界元法和有限元法比较，北京国际边界元会议文集，1986

[General Information]
书名=计算水动力学
作者=
页数=305
SS号=0
出版日期=

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
前言
第一章　计算水动力学的形成与发展
１．１　计算水动力学的内容及其发展
１．２　计算水动力学的原理与方法
第二章　流体流动的有限元法与边界元法
２．１　变分原理与加权余量法
２．２　有限元法及其插值函数
２．３　水动力学问题的有限元解
２．４　边界元法
第三章　水动力学中的有限差分法
３．１　势流有限差分解
３．２　差分解的基本问题：适定性、相容性、收敛性、稳定性
３．３　扩散（抛物型）方程的差分解法
３．４　变换函数交替方向解非线性边界自由面流动
第四章　对流扩散方程的数值解
４．１　流函数——涡量法解二维对流扩散
４．２　有限分析法（Ｆｉｎｉｔｅ　Ａｎａｌｙｔｉｃ　Ｍｅｔｌｏｏｄ）解水动力学问题
４．３　水动力学Ｎ－Ｓ方程原参数解
４．４　流场中适体坐标变换与网格生成
４．５　有限体积法
第五章　河道水流的数值模拟
５．１　一维非恒定流数值计算特征线法及其它格式
５．２　水网数值计算特点分析及其应用
５．３　二维河渠非恒定流数值计算
５．４　溃坝水流数值分析
第六章　水沙两相流数值模拟
６．１　变形河床冲淤计算
６．２　桥墩局部冲刷的三维计算
６．３　浑水两相流洪水演进数值模拟
第七章　边界层计算及紊流预测
７．１　紊流模型
７．２　两相紊流方程及其模拟
７．３　溢流面紊流边界层数值分析
７．４　紊动射流数值计算
７．５　明渠整治结构的剪切湍流特性的大涡模拟
第八章　计算水动力学中的随机方法
８．１　随机游动方法的原理
８．２　随机游动法解对流扩散问题
８．３　随机游动法在水动力学一些领域推广应用
８．４　质点法与流场法相结合的随机模拟
参考文献
附录页