

目 录

前言

用展开法解闸坝地基有压渗流	1
计算渗流扬压力的新方法	
——直线展开法	15
水闸地基下游渗流出逸坡降近似	
计算	29
堤坝背水侧渗流出逸坡降计算	47
土的渗透变形及临界坡降计算	52
多孔介质中的管涌研究	66
不完整井渗流的近似计算	74
堤坝下游减压井的渗流近似计算	90
堤坝不稳定渗流计算	96
心墙坝壳中自由水面变化的分析	105
各向异性土渗流的转化问题	117
江河大堤背侧管涌预警	133
压盖层设计方法论证	143
防治堤防管涌及流土的排渗减压沟	
设计	154
多重补给下的地下水二元不稳定	
流动	165
农田地下排水系统的近似计算	183
江河水位变化对地下水上升的影响 ...	195
非线性渗流问题	208

用展开法解闸坝地基有压渗流

闸坝透水地基有压渗流计算方法，分为有限深及无限深地基两种，前者适用于地基深度 $T < 0.5l_0$ ，后者适用于 $T \geq 0.5l_0$ ，这里 T 代表地面至不透水层面之距离， l_0 代表地下轮廓线的水平投影长度。

对于有限深地基的计算方法，常见的有 H.H. 巴甫洛夫斯基的分段法，C.H. 努米罗夫的渐近线法，P.P. 丘加也夫的阻力系数法。南京水利科学研究所毛昶熙、周保中在总结上述各法的基础上，特别是对丘加也夫的阻力系数法作了研究，提出了阻力系数改进法^[1]，克服了丘加也夫方法不能求出板桩尖水头的缺点，其精确度也较该法为好。

对于无限深地基或较深厚覆盖层地基的计算方法，目前仍采用柯斯拉的独立变数法^[2]，1964 年 B.C. 布鲁辛提出了图解法^[3]，但某些特殊点的误差较大。

本文根据 H.T. 麦列申科的展开法原理^[4]，对无限深地基或较深厚地基的有压渗流，提出求解渗流扬压力的计算方法，方法的要点是将渗流域（ z 平面）上带有不透水板桩（或防渗墙、窄齿墙等，下同）的地下轮廓，通过保角变换，转化为不带板桩的下半平面（ ζ 平面），然后根据巴甫洛夫斯基的平底板水头分布的理论解，求出轮廓上各点的水头值。本方法不需备有专门的图表，也不必进行各种修正计算，较其他方法简易，切于实用，经用试验资料验证，能得到令人满意的结果。

一、基本原理与计算方法

由复变函数可知，下列许瓦兹—克利斯多菲积分

$$z = A \int_0^{\zeta} (\zeta - b_1)^{\alpha_1-1} (\zeta - b_2)^{\alpha_2-1} \cdots (\zeta - b_n)^{\alpha_n-1} d\zeta + B$$

可将半平面 ζ 变换为具有多边形的 z 平面。若在 z 平面中有任意点, 例如 b_n 位于无穷远处, 则上式积分号内就不出现其相应项, 故有

$$z = A \int_0^{\zeta} (\zeta - b_1)^{a_1-1} (\zeta - b_2)^{a_2-1} \cdots (\zeta - b_{n-1})^{a_{n-1}-1} d\zeta + B \quad (1)$$

令设有多边形 $\infty-2-3-4-\infty$ 的 z 平面 [图 1 (a)], 它有三个顶角分别为 $\angle 2 = \frac{\pi}{2}$, $\angle 3 = 2\pi$, $\angle 4 = \frac{\pi}{2}$ 。另外尚有一些顶角位于无穷远处。由此可得 $a_2 = 1/2$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1/2$ 。而在 ζ 平面内, 可选择实轴 ξ 上点 2 及点 4 离原点之距为 s [图 1 (b)], 且有 $b_2 = -s$, $b_3 = 0$, $b_4 = s$ 。现将各 a 值及各 b 值代入式 (1) 得

$$z = A \int_0^{\zeta} \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} + B$$

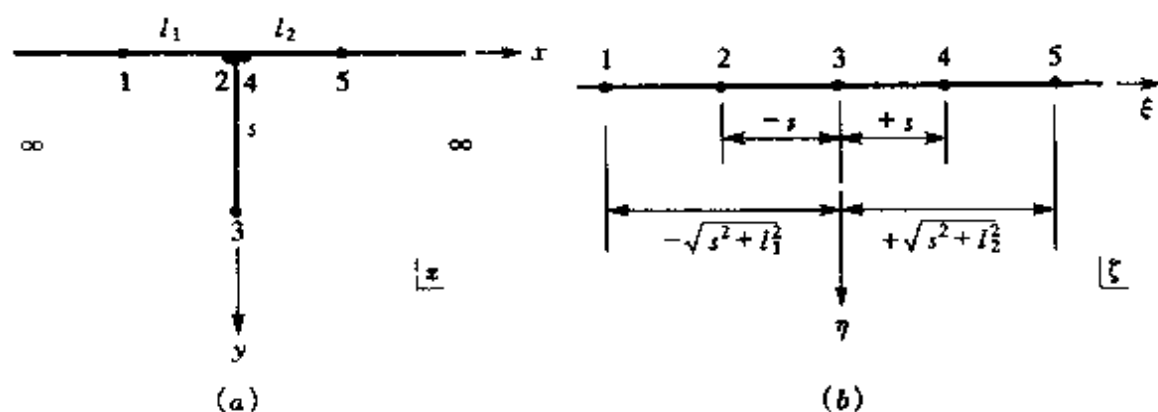


图 1

积分上式得

$$z = A \sqrt{\zeta^2 - s^2} + B$$

在点 4, $z = 0$, $\zeta = s$, 代入上式得到 $B = 0$; 在点 3, $z = is$, $\zeta = 0$, 代入上式, 得到 $A = 1$ 。因而上式化为^{[3][5]}

$$z = \sqrt{\zeta^2 - s^2}$$

或

$$\zeta = \sqrt{s^2 + z^2} \quad (1')$$

式 (1') 可将 z 平面上的渗流域保角变换到下半平面 ζ 中去; 反之亦然。

今将式 (1') 的实部和虚部分开则得

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \pm \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(s^2 + x^2 - y^2)^2 + x^2 y^2} + \frac{1}{2}(s^2 + x^2 - y^2)} \\ \eta &= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(s^2 + x^2 - y^2)^2 + x^2 y^2} - \frac{1}{2}(s^2 + x^2 - y^2)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: 正号表示 $X > 0$ 点的映射; 负号表示 $X < 0$ 点的映射。若当 z 平面上坐标点位于横轴上, 则 $y = 0$, 于是可得

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \pm \sqrt{s^2 + x^2} \\ \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

若当 z 平面上坐标点位于纵轴上, 则 $x = 0$, 于是可得

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \pm \sqrt{s^2 - y^2} \\ \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

对于具有两道板桩以上的 z 平面渗流域, 同样可应用上述各式进行变换 [图 2 (a)], 先展开上板桩 DGP , 将其变换为只带有受了展开影响的下板桩 QRU 的 ζ 平面 [图 2 (b)]。

由图 2 (a) 变换到图 2 (b) 的具体计算如下, 在图 2 (a) 上以底板作为横坐标轴, 以被展开的上板桩 DGP 作为纵坐标轴, 按式 (2)、式 (3)、式 (4) 展开上板桩, 即可得到下列对应关系:

z 平面[图 2(a)]	ζ 平面[图 2(b)]
$D \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 0 \end{cases}$	$D \begin{cases} \xi_D = -\sqrt{s_1^2 + 0^2} = -s_1 \\ \eta_D = \sqrt{\frac{1}{2}(s_1^2 - s_1^2)} = 0 \end{cases}$
$G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \end{cases}$	$G \begin{cases} \xi_G = \sqrt{s_1^2 - s_1^2} = 0 \\ \eta_G = 0 \end{cases}$

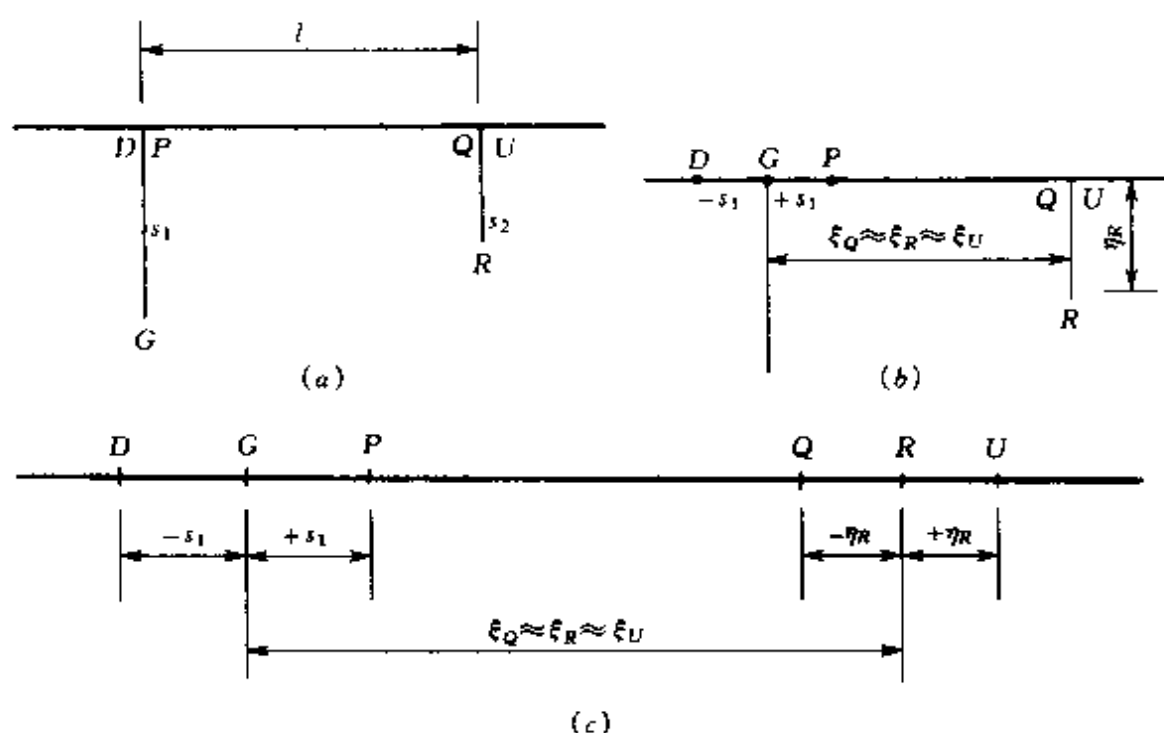


图 2

$$\begin{aligned}
 P \begin{cases} x_P = 0 \\ y_P = 0 \end{cases} & P \begin{cases} \xi_P = +\sqrt{s_1^2 + 0^2} = +s_1 \\ \eta_P = \sqrt{\frac{1}{2}(s_1^2 - s_1^2)} = 0 \end{cases} \\
 Q \begin{cases} x_Q = l \\ y_Q = 0 \end{cases} & Q \begin{cases} \xi_Q = +\sqrt{s_1^2 + l^2} \\ \eta_Q = \sqrt{\frac{1}{2}(s_1^2 + l^2) - \frac{1}{2}(s_1^2 + l^2)} = 0 \end{cases} \\
 R \begin{cases} x_R = l \\ y_R = s_2 \end{cases} & R \begin{cases} \xi_R = +\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(s_1^2 + l^2 - s_2^2)^2 + l^2 s_2^2} + \frac{1}{2}(s_1^2 + l^2 - s_2^2)} \\ \eta_R = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(s_1^2 + l^2 - s_2^2)^2 + l^2 s_2^2} - \frac{1}{2}(s_1^2 + l^2 - s_2^2)} \end{cases} \\
 U \begin{cases} x_U = l \\ y_U = 0 \end{cases} & U \begin{cases} \xi_U = +\sqrt{s_1^2 + l^2} \\ \eta_U = \sqrt{\frac{1}{2}(s_1^2 + l^2) - \frac{1}{2}(s_1^2 + l^2)} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

一般情况下, 特别当 $l \geq (s_1 + s_2)$ 时, 在 ζ 平面内 $\xi_Q \approx \xi_R$

$\approx \xi_U$ 。应该指出,当展开上板桩时,下板桩受到影响,此时图 2 (b) 上的下板桩不仅发生位移,而且发生变形,成为曲线板桩^[4]。但因板桩变形极微,故可视为直板桩(其长度为 η_R) 计算。

再将图 2 (b) 上的下板桩展开,得到图 2 (c) 的不带板桩的平底板。具体变换如下,将图 2 (b) 作为 z 平面,而将图 2 (c) 作为 ξ 平面,在图 2 (b) 上以下板桩为纵轴并展开之:

z 平面 [图 2 (b)]

ξ 平面 [图 2 (c)]

$$\begin{array}{ll} Q \begin{cases} x_Q = 0 \\ y_Q = 0 \end{cases} & Q \begin{cases} \xi_Q = -\sqrt{\eta_R^2 + 0^2} = -\eta_R \\ \eta_Q = \sqrt{\frac{1}{2}(\eta_R^2 - \eta_R^2)} = 0 \end{cases} \\ R \begin{cases} x_R = 0 \\ y_R = \eta_R \end{cases} & R \begin{cases} \xi_R = \sqrt{\eta_R^2 - \eta_R^2} = 0 \\ \eta_R = 0 \end{cases} \\ U \begin{cases} x_U = 0 \\ y_U = 0 \end{cases} & U \begin{cases} \xi_U = +\sqrt{\eta_R^2 + 0^2} = \eta_R \\ \eta_U = \sqrt{\frac{1}{2}(\eta_U^2 - \eta_U^2)} = 0 \end{cases} \end{array}$$

在展开下板桩时,同前面一样,也会对原来已被展开过的上板桩 D 、 G 、 P 三点产生影响,由于影响较第一次小,可忽略不计。

对于具有两道以上的多板桩底板,仍可应用上法逐道展开而消去。但在展开时,应以板桩长短为序先后展开之。例如带有上、中、下三道板桩的地下轮廓,若中板桩较长,则可将中板桩作为纵轴,底板作横轴,先展开中板桩,然后再分别展开上、下两道板桩。在消去各道板桩变换为一假想平底板后,就可应用式 (5)^[4] 求出各点之水头比值 h/H

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{2x}{l} \quad (5)$$

式中 h ——展开后底板上任意点之水头与下游水头之差;

H ——上下游水头差;

x ——任意点离底板中点之距,左端为负,右端为正;

l ——展开后的底板长度。

按式(5)求出之水头比值 h/H ，即为 z 平面渗流域上各对应点之值。当采用各点之水头绝对值 h 后并连接之，即得作用于地下轮廓上渗流压力图，若再在各点加上相当于下游水深的数值后，即得渗流扬压力图。

若底板或铺盖并非平卧于地面而嵌入地面下某一厚度 d 时，则必须消去此嵌入段。布鲁辛提出近似方法^[3]，他将 d 转向 90° ，然后乘上一个系数 $\beta = 0.64$ 。本文将其修改为先乘上 $\beta = 0.64$ ，然后转向 90° ，使位于底板或铺盖之延长线上。

顺便指出，在消去了板桩及底板嵌入段后，此时变为一平卧于地面的假想平底板。其长度 l 就相当于原来带有板桩及嵌入段时地下轮廓的渗径长度，以此渗径长度 l 除以上下游水位差 H ，即为地下轮廓线与地基土壤接触面之平均渗流坡降 J

$$J = \frac{H}{l} \quad (6)$$

式(6)的倒数即为渗径系数 C

$$C = \frac{1}{J} = \frac{l}{H} \quad (7)$$

按式(6)或式(7)式求出的 J 和 C 值必须满足下式

$$\left. \begin{array}{l} J < J_{\text{允许}} \\ C > C_{\text{建议}} \end{array} \right\} \quad (8)$$

式中 $J_{\text{允许}}$ 及 $C_{\text{建议}}$ 值按有关文献查得。如不能满足式(8)，则必加长渗径。

按本文方法求得的渗径长度，其垂直渗径和水平渗径之比是一个变量，随着板桩的位置及深度而变，并不像布莱和莱因那样假定是一常量。

二、计算步骤及算例

在进行计算之先，将解题步骤概括为如下次序：

(1) 展开板桩。按长短次序展开，以被展开之板桩（或防渗

墙)作为纵坐标轴,以垂直于该板桩之底面为横坐标轴,按式(2)、式(3)、式(4)展开(倾斜底板解法则按几何关系求出倾斜长度,参见例2)。

(2) 消去嵌入段。将上或下板桩之嵌入段长度,乘上 0.64 倍,并转向 90° ,使位于底板铺盖底面之延长线上。

(3) 求各关键点横距。消去嵌入段后,即得假想平底板(也即相应于原地下轮廓线之渗径长度),然后以此假想平底板之中点作为坐标原点,逐点求出横距。

(4) 求各点水头比值。按式(5)计算,求出各点水头后,连接之即为闸坝地下轮廓线上的渗流压力图,再在各点加上相当于下游水深的数值,即为渗流扬压力图。

(5) 求渗流下游出口处的坡降。以最后一个关键点的水头值,除以该点至下游出渗处的距离即得。

现在,我们根据上列求解步骤,求解下列两个例题,这些例题的布置形式,均为闸坝地下轮廓线设计中常见的富有代表性之实例。至于其他一些形式的例题,均可参考。

例 1 如图3所示,试求解带有两道板桩(或防渗墙),并具有上游铺盖之地下轮廓线上的渗流扬压力及渗流下游出逸处之坡降。

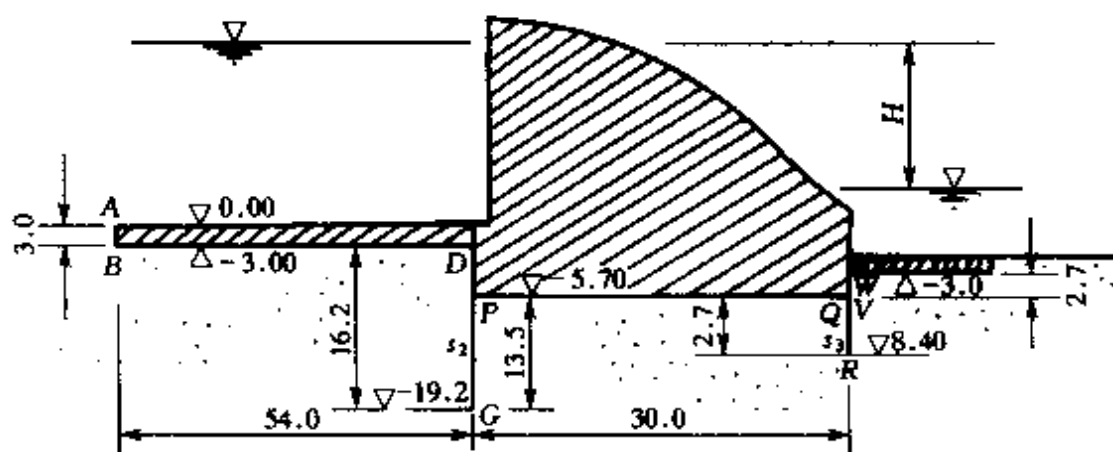


图 3

1. 先展开板桩及消去嵌入段

(1) 以 BD 为横轴, DG 为纵轴,展开 DG 及嵌入段 AB

$$\xi_D = -\sqrt{16.2^2 + 0^2} = -16.20 \text{ (m)},$$

$$\xi_B = -\sqrt{16.2^2 + 54^2} = -56.50 \text{ (m)},$$

$$\xi_A = -56.50 + (-0.64 \times 3) = -58.42 \text{ (m)}。$$

这里的正负号，以纵轴左侧为负，右侧为正（下同）。

(2) 以 PQ 为横轴，PG 为轴纵，展开 PG

$$\xi_P = +\sqrt{13.5^2 + 0^2} = +13.50 \text{ (m)}$$

$$\begin{aligned} \xi_R &= +\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} \times (13.5^2 + 30^2 - 2.7^2)^2 + 2.7^2 \times 30^2} + \frac{1}{2} \times (13.5^2 + 30^2 - 2.7^2)} \\ &= 33.00 \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_R &= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} \times (13.5^2 + 30^2 - 2.7^2)^2 + 2.7^2 \times 30^2} - \frac{1}{2} \times (13.5^2 + 30^2 - 2.7^2)} \\ &= 2.59 \text{ (m)} \end{aligned}$$

(3) 横轴不变，而以被影响后的下板桩 ($s_3 = \eta_R$) 作纵轴，展开下板桩及嵌入段 VW

$$\xi_Q = -\sqrt{\eta_R^2 + 0^2} = -\sqrt{2.59^2 + 0^2} = -2.59 \text{ (m)}$$

$$\xi_V = +\sqrt{\eta_R^2 + 0^2} = +2.59 \text{ (m)}$$

$$\eta_W = 2.59 + (0.64 \times 2.7) = 4.32 \text{ (m)}$$

(4) 板桩及嵌入段均已消去，最后得一卧于地表的假想平底轮廓，如图 4 所示。

该假想轮廓总长

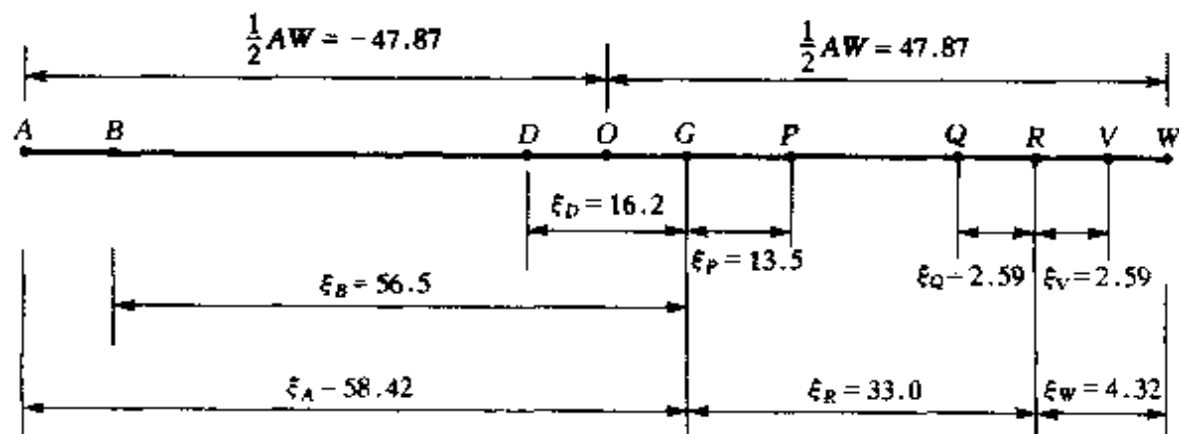


图 4

$$AW = \xi_A + \xi_R + \xi_W = 58.42 + 33.0 + 4.32 = 95.74 \text{ (m)}$$

此即渗径长度 l ，以此 l 除以上下游水头差 H ，则得平均渗流坡降 $J = H/l$ ，而渗径系数 $C = l/H$ 。

2. 求各关键点横距

以 $\frac{1}{2}AW = 47.87$ 为原点，由图 4 立即可算出各点横距

$$x_B = -45.95\text{m} \quad x_P = 24.05\text{m} \quad x_V = 46.14\text{m}$$

$$x_D = -5.65\text{m} \quad x_Q = 40.96\text{m}$$

$$x_G = 10.55\text{m} \quad x_R = 43.55\text{m}$$

3. 按式 (5) 求各关键点水头比

$$\frac{h_B}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{45.95}{47.87}\right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{180^\circ - 16.3^\circ}{180^\circ}\right) \pi = 0.910$$

(试验值 0.911)

$$\frac{h_D}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{5.65}{47.87}\right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{180^\circ - 83.2^\circ}{180^\circ}\right) \pi = 0.537$$

(试验值 0.538)

$$\frac{h_G}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(+\frac{10.55}{47.87}\right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{77.3^\circ}{180^\circ}\right) \pi = 0.430$$

(试验值 0.432)

$$\frac{h_P}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{24.05}{47.87}\right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{59.85^\circ}{180^\circ}\right) \pi = 0.332$$

(试验值 0.337)

$$\frac{h_Q}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{40.96}{47.87}\right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{31.2^\circ}{180^\circ}\right) \pi = 0.173$$

(试验值 0.183)

$$\frac{h_R}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{43.55}{47.87}\right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{24.5^\circ}{180^\circ}\right) \pi = 0.136$$

(试验值 0.150)

连接各关键点水头绝对值 h ，即得作用于地下轮廓线上的渗流压力图，再在各点加下游水深的数值，即得渗流扬压力图。任意点的渗流坡降可在图上求得，下游渗流出口坡降为

$$J = \frac{h_R}{\xi_w} = \frac{0.136H}{4.32}$$

例 2 试求图5所示带有倾斜底板之地下轮廓线上的渗流扬压力及渗出坡降。

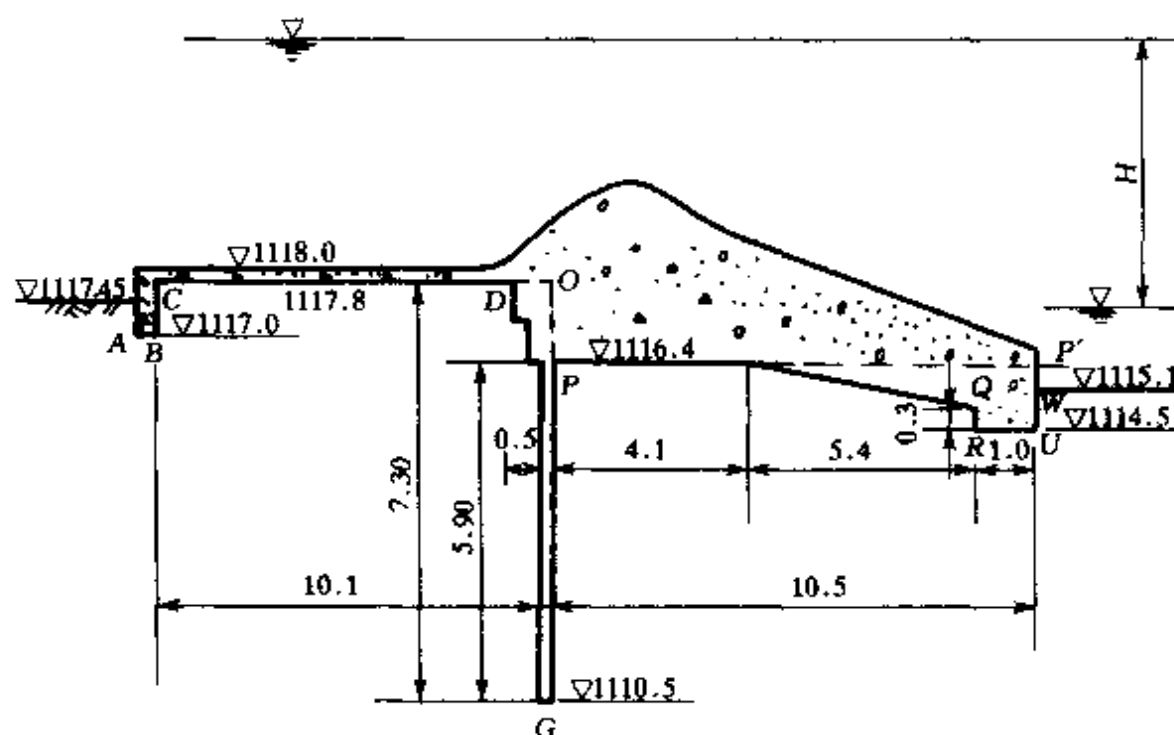


图 5

此例为倾斜底板，也是常见的形式之一，其解法可先将倾斜段按几何关系求出其倾斜长度，并连同齿槽坎 QRU，近似地视作水平距离（图 6），然后按例 1 的方法求解。

1. 先展开板桩及消去嵌入段

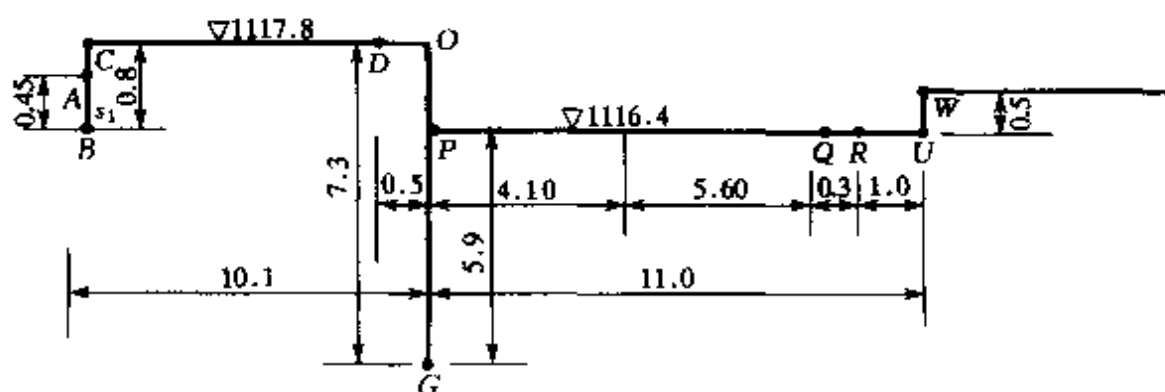


图 6

(1) 以 OC 为横轴, OG 为纵轴, 展开中板桩 OG

$$\xi_D = -\sqrt{7.3^2 + 0.5^2} = 7.32$$

$$\xi_B = -\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(7.3^2 + 10.1^2 - 0.8^2)^2 + 0.8^2 \times 10.1^2} + \frac{1}{2}(7.3^2 + 10.1^2 - 0.8^2)}$$

$$= 12.45$$

$$\eta_B = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(7.3^2 + 10.1^2 - 0.8^2)^2 + 0.8^2 \times 10.1^2} - \frac{1}{2}(7.3^2 + 10.1^2 - 0.8^2)}$$

$$= 0.65$$

(2) 横轴不变, 以受了影响后的上板桩 ($s_1 = \eta_B$) 作纵轴, 并展开上板桩

$$\xi_C = +\eta_B = 0.65$$

$$\xi_A = -[\eta_B - (1117.8 - 1117.45)]$$

$$= -(0.65 - 0.35) = -0.30$$

(3) 以 PP' 为横轴、 PG 为纵轴展开之, 并消去嵌入段

$$\xi_P = +5.90$$

$$\xi_Q = +\sqrt{5.9^2 + (4.1 + 5.6)^2} = 11.40$$

其中 $5.6 = \sqrt{[1116.4 - (1114.5 + 0.3)]^2 + 5.4^2}$

$$\xi_R = +\sqrt{5.9^2 + (4.1 + 5.6 + 0.3)^2} = 11.70$$

$$\xi_U = +\sqrt{5.9^2 + (4.1 + 5.6 + 0.3 + 1.0)^2} = 12.48$$

$$\xi_W = 12.48 + (0.64 \times 0.6) = 12.86$$

(4) 最后得到假想平底板 (见图 7)。

该假想平底板总长

$$AW = 0.30 + 12.45 + 12.86 = 25.61。$$

此即相当于原轮廓之渗径长度 l 。以此 l 除以上下游水头差, 则得渗流平均坡降 $J = H/l$, 而渗径系数 $C = l/H$ 。

2. 求各关键点之横距

以假想平底板半长 $1/2AW = 12.805$ 为原点, 即得各横距

$$x_A = -12.805$$

$$x_P = -0.055 + 5.9 = +5.845$$

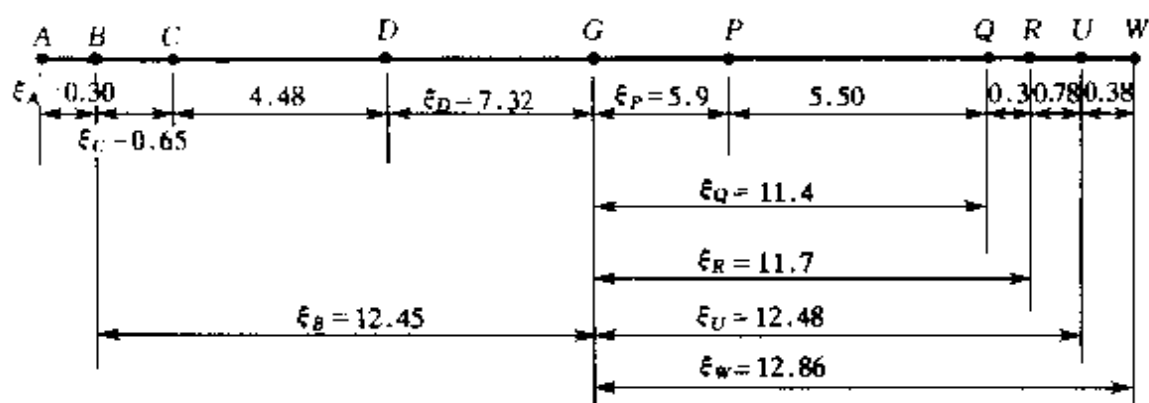


图 7

$$\begin{aligned}
 x_B &= -12.805 + 0.3 = -12.505 & x_Q &= 5.845 + 5.50 = 11.345 \\
 x_C &= -12.505 + 0.65 = -11.855 & x_R &= 11.345 + 0.3 = 11.645 \\
 x_D &= -11.855 + 4.48 = -7.375 & x_U &= 11.645 + 0.78 = 12.425 \\
 x_G &= -7.375 + 7.32 = -0.055 & x_W &= 12.425 + 0.38 = 12.805
 \end{aligned}$$

3. 按式 (5) 求各关键点水头比

$$\frac{h_B}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{12.505}{12.805}\right) = 0.931$$

(试验值 0.920)

$$\frac{h_C}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{11.855}{12.805}\right) = 0.877$$

(试验值 0.880)

$$\frac{h_D}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{7.375}{12.805}\right) = 0.694$$

(试验值 0.690)

$$\frac{h_G}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{0.055}{12.805}\right) = 0.502$$

(试验值 0.490)

$$\frac{h_P}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(+\frac{5.845}{12.805}\right) = 0.348$$

(试验值 0.340)

$$\frac{h_Q}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{11.345}{12.805}\right) = 0.148$$

(试验值 0.130)

$$\frac{h_R}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{11.645}{12.805}\right) = 0.130$$

(试验值 0.110)

$$\frac{h_U}{H} = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{12.425}{12.805}\right) = 0.067$$

(试验值 0.070)

连接上述各点的绝对水头 h ，则得作用于地下轮廓线上的渗流压力图。若再在各点加上一个相当于下游水深数值的纵标，则得渗流扬压力分布图。

任意点之渗流坡降可在图上求得，而下游渗流出口处之坡降 J 则为

$$J = \frac{h_U}{\xi_w - \xi_U} = \frac{0.067H}{0.38}$$

下面将计算值与按柯斯拉方法及电拟试验值进行对比（见表 1）。

表 1

方 法 \ 点 号	各关键点水头百分比值 (h/H) $\times 100\%$								
	B	C	D	E	G	P	Q	R	U
柯斯拉法	91.0		61.9		42.4	32.7	17.1	16.0	
本文方法	91.0		53.7		43.0	33.2	17.3	13.6	
电拟试验	91.1		53.8		43.2	33.7	18.3	15.0	
柯斯拉法	91.0		61.9		42.4	32.7	17.1	16.0	
本文方法	91.0		53.7		43.0	33.2	17.3	13.6	
电拟试验	94.8		55.0		44.0	34.2	18.1	16.0	
柯斯拉法	91.0		61.9		42.4	32.7	17.1	16.0	
本文方法	91.0		53.7		43.0	33.2	17.3	13.6	
电拟试验	93.3		57.0		43.3	30.1	13.8	9.9	
柯斯拉法	91.0	90.0	71.4	66.7	50.0	33.3	13.1	10.0	8.0
本文方法	93.1	87.7	69.4		50.2	34.8	14.8	13.0	6.7
电拟试验	92.0	88.0	69.0	67.0	49.0	34.0	13.0	11.0	7.0

柯斯拉法及电拟试验数据均摘自文献 [1]。若将表 1 误差作一统计, 可得表 2 中数字。

表 2

	平均误差 (%)	最大误差 (%)
柯斯拉独立变数法	2.10	8.10
本文展开法	1.45	3.80

三、结语

(1) 闸坝地基有压渗流计算方法, 分为有限深及无限深地基两种形式。对于地基深度 $T < 0.5l_0$, 可按有限深地基计算; 对于 $T \geq 0.5l_0$, 则可按无限深地基计算。本文 2 展开法适用于无限深地基, 例如深厚覆盖层透水地基。

(2) 本文展开法, 避免了前人方法的一些缺点, 不必备有专门图表, 也不必进行各种修正计算 (诸如倾斜底板修正计算、底板厚度修正计算等), 可一次算毕。此外由于本文方法消去了使计算工作复杂化的板桩 (包括防渗墙之类的垂直不透水防渗体), 因而比较简易方便, 切合实用, 精确度也较好。

(3) 对于带有多边板桩 (两道以上) 的地下轮廓, 均可按本方法进行计算, 对于带有一边板桩之地下轮廓, 同样可按本方法解题。

参 考 文 献

- 1 毛昶熙, 周保中. 闸坝地基渗流的近似计算. 见: 南京水利科学研究所. 水利水运科技情报. 1976 (2)
- 2 Khosla, A. H. et. al. . Design of weirs on permeable foundations. 1936
- 3 B. C. 布鲁辛. 用某些复变函数计算坝下浮托力的新方法. 见: 南京水利科学研究所. 渗流译文汇编. 第 6 辑. 1965
- 4 B. И. 阿拉文, C. H. 努米罗夫. 滤流理论. 北京: 高等教育出版社, 1958
- 5 北京大学. 复变函数论. 北京: 人民教育出版社, 1961

计算渗流扬压力的新方法 ——直线展开法

计算扬压力的方法，一般都很繁琐复杂，因而古老的布莱法现在仍常被采用，该法虽具有方便简单的特点，但误差较大，且理论根据不足。

本节介绍的直线展开法与布莱法同样方便简单，据试验资料对比表明：直线展开法的精确度，优于布莱法及一般公认的前苏联丘加也夫的阻力系数法。本方法适用于 $T \geq l_0/2$ 的情况， T 为地基深度， l_0 为地下轮廓线的水平长度。

一、直线展开法的基本原理及应用

该法是由笔者 1979 年提出的“展开法”简化而来的，其要点是：先将板桩消去，化为水平轮廓，再按线性变化关系求出各点的渗流扬压力，具体内容分述如下。

1. 垂直渗径（板桩、齿坎等）化为水平渗径

图 1 (a) 所示为带有一道板桩的地下轮廓，通过式 (1)

$$L = \sqrt{s^2 + l_1^2} + \sqrt{s^2 + l_2^2} \quad (1)$$

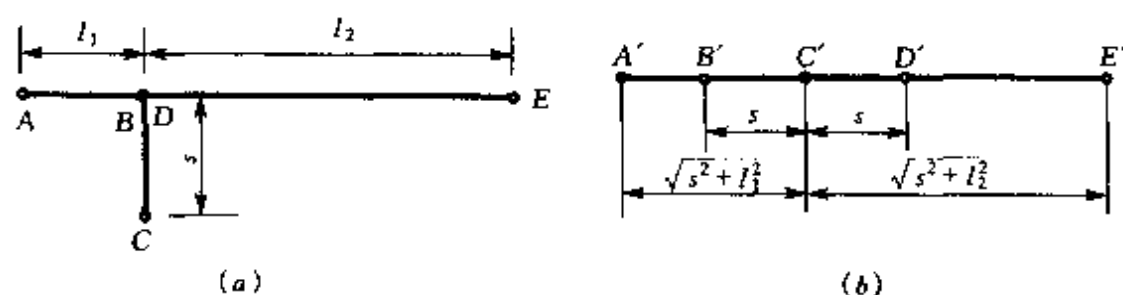


图 1

可以化为具有渗径长度 L 的水平轮廓，如图 1 (b) 所示。由图 1 (b) 可知，各点离开 A' 点之横距为

$$\left. \begin{aligned} X_A' &= 0 \\ X_B' &= \sqrt{s^2 + l_1^2} - s \\ X_C' &= X_B' + s \\ X_D' &= X_C' + s \\ X_E' &= X_D' + \sqrt{s^2 + l_2^2} - s = L \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在水平轮廓上各点 A' 、 B' 、 C' 、 D' 、 E' 所受的渗流扬压力，即是原轮廓 A 、 B 、 C 、 D 、 E 各点所受的扬压力。

实质上，这种转化方法的原理，就是渗流沿着 ABC 线的流动可以用沿着 AC 斜线的流动来代替。

实际工程中的地下轮廓形式比较复杂，为了寻求一个通用计算公式，选用了最一般的地下轮廓，如图 2 (a) 所示，设法推导出一个计算公式，以便推广应用到各种不同的地下轮廓。

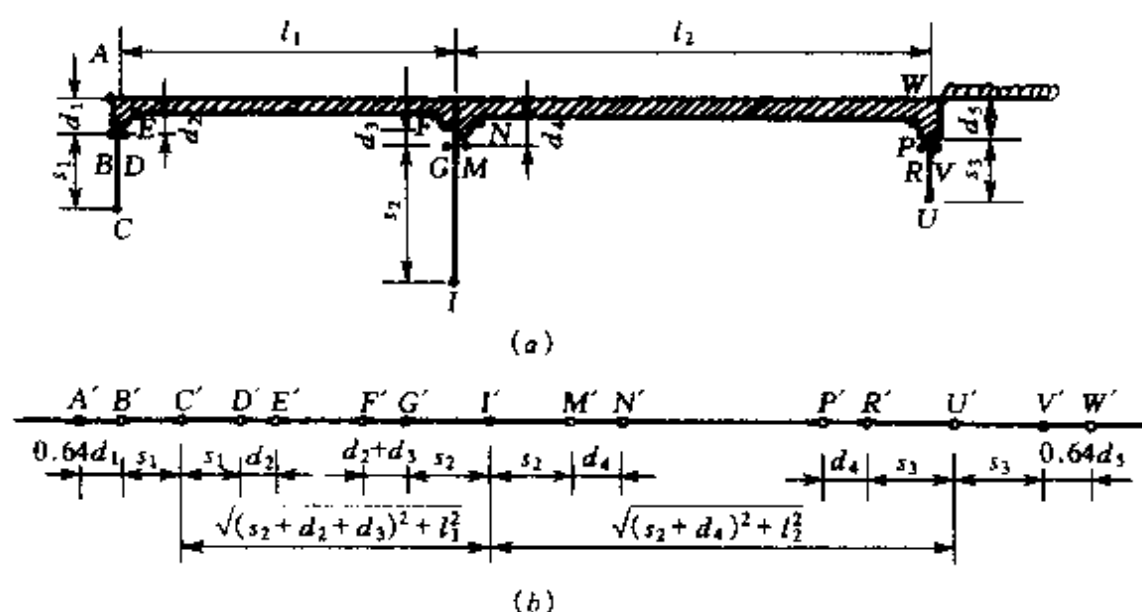


图 2

根据上面所介绍的原理，可以将图 2 (a) 中带有三道板桩的地下轮廓，转化为图 2 (b) 所示的水平轮廓，转化后的渗径长度 L 为

$$\begin{aligned} L &= 0.64d_1 + s_1 + \sqrt{(s_2 + d_2 + d_3)^2 + l_1^2} \\ &\quad + \sqrt{(s_2 + d_4)^2 + l_2^2} + s_3 + 0.64d_5 \end{aligned} \quad (3)$$

在推导式 (3) 时, 有两点必须说明: 第一, 系数 0.64 是转化齿坎为水平方向时, 布鲁辛根据流体力学方法求得的; 第二, 在消去板桩时, 不考虑板桩相互之间的影响, 因而是近似的, 但计算结果表明, 其误差甚微。

在求得 L 后, 根据图 2 (b), 参照式 (2) 就可求出各点离开 A' 点之横距。

式 (3) 是通式。对于下列具体情况, 可修改后使用:

(1) 若没有上游板桩, 则令 $s_1 = 0$ 代入式 (3) 即可, 同时要注意, 水平轮廓图 2 (b) 中 $B'C'D'$ 三点重合为 C' 点。

(2) 若没有下游板桩, 则令 $s_3 = 0$ 代入式 (3) 即可, 同时要注意, $R'U'V'$ 三点重合为 U' 点。

(3) 若没有中间板桩, 则 $G'I'M'$ 三点重合为 I' 点, 此时式 (3) 应改为下式

$$L = 0.64d_1 + s_1 + \sqrt{(s_1 + d_2)^2 + l_1^2} + \sqrt{(s_3 + d_4)^2 + l_2^2} + s_3 + 0.64d_5 \quad (3')$$

(4) 若没有各种齿坎, 则可相应地令各个 $d = 0$ 代入式 (3) 即可, 同时要注意各相应点号的重合。

总之, 不管是什么样的复杂地下轮廓, 都可通过式 (3) 或式 (3') 转化为水平轮廓。

若有倾斜铺盖, 或倾斜底板, 则只需将倾斜段的实有长度代替公式中的 l_1 或 l_2 即可, 不必像其他方法那样进行修正计算。

2. 渗流扬压力的计算

根据流体力学解答, 并考虑到计算公式的方便实用, 类似于布莱方法那样, 将理论解简化为下列线性变化的关系式

$$H_i = \left[\left(0.84 - 0.68 \frac{X_i}{L} \right) + \Delta\phi \right] \Delta H + H_2 \quad (4)$$

式中 L ——按式 (3) 或式 (3') 计算;

ΔH ——上下游水头差;

H_2 ——下游水面至闸底板之深度;

X_i —— i 点离开水平轮廓上游端点之横距；

$\Delta\phi$ ——势函数差值（查表 1）。

式（4）就是计算某点 i 的渗流扬压力公式。

表 1

X/L	$\Delta\phi$	X/L	$\Delta\phi$	X/L	$\Delta\phi$	X/L	$\Delta\phi$
0.00	0.1600	0.11	0.0198	1.00	-0.1600	0.89	-0.0198
0.01	0.1028	0.12	0.0160	0.99	-0.1028	0.88	-0.0160
0.02	0.0836	0.13	0.0134	0.98	-0.0836	0.87	-0.0134
0.03	0.0694	0.14	0.0112	0.97	-0.0694	0.86	-0.0112
0.04	0.0592	0.15	0.0090	0.96	-0.0592	0.85	-0.0090
0.05	0.0500	0.16	0.0068	0.95	-0.0500	0.84	-0.0068
0.06	0.0428	0.17	0.0046	0.94	-0.0428	0.83	-0.0046
0.07	0.0376	0.18	0.0030	0.93	-0.0376	0.82	-0.0030
0.08	0.0314	0.19	0.0020	0.92	-0.0314	0.81	-0.0020
0.09	0.0272	0.20	0.0010	0.91	-0.0272	0.80	-0.0010
0.10	0.0230			0.90	-0.0230		

注 X/L 介于 0.2~0.8 之间时, $\Delta\phi = 0$ 。

二、渗径系数 C 和渗流坡降 J

渗径系数 C 和渗流坡降 J , 都是控制闸基渗透变形的指标。在讨论这个问题之前, 宜先介绍一下闸基的渗透变形。

1. 闸基的渗透变形

视地基土壤条件的不同, 闸基的渗透变形有下列几种:

(1) 流土。一般发生在粘土、壤土及各种砂土地基, 特别是中细砂、粉砂地基, 此外, 对于细粒含量较多的砂砾地基也易发生流土。流土发生的部位在渗流下游出口处。

(2) 管涌。一般发生在细粒含量较少的砂砾地基中。发生的部位可以在渗流下游出口处, 也可以在闸坎地基内部。管涌是小颗粒在大颗粒所形成的孔隙通道内的流失, 其发生、发展有个过程, 不像流土那样迅雷不及掩耳。

细粒含量 p_z 较多的砂砾地基易发生流土, p_z 较少的则易发

生管涌。那么究竟 p_z 为何值，才是流土或管涌呢，可用式 (5) 加以判别

$$p_z = \beta \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \quad (5)$$

式中： n 为孔隙率， $n = 1 - \frac{\gamma_d}{2.65}$ (γ_d 为干容量)； β 为系数，可取 $\beta = 0.95 \sim 1.00$ 。

若实有的 p_z 大于按式 (5) 算得的 p_z 则为流土；否则为管涌。实有的细粒含量 p_z 系指 2mm 以下的土粒的百分含量，可查颗分曲线上相应于 $d = 2$ 的含量。

(3) 接触冲刷。常发生于地下轮廓与地基土的接触面上，渗流沿着此接触面向下游流动，把土粒带走，以致闸室失去稳定。这是一种危险的渗透变形，特别容易发生在砂质地基。此外，对于两层土的交界面上，也会发生这种渗透变形。

(4) 接触流土。是由渗流垂直于接触面的流动而引起的。例如，当渗流在下游消力塘底部向冒水孔出逸时，有时冒水孔或反滤层被淤堵，渗流无法排泄，而使消力塘底部受到很大渗透压力，以致消力塘被顶托掉，特别是在下游低水位或消力塘内无水时更易发生。有些消力塘底部护坦厚度太薄，只有 0.3~0.5m 厚，压重不够，这就容易被渗流所顶托。

以上几个现象的防止办法，从外部条件来说是一定要做好反滤层，从内部条件来说是一定要减小渗流扬压力。

根据所求得的渗流扬压力，就可以用来研究是否会发生渗透变形。

2. 渗径系数 C 和渗流坡降 J

渗径系数 C 最早是由布莱在 20 世纪初提出来的， $C = L / \Delta H$ ，这里的 L 值，是布莱的渗径长度，布莱根据他所搜集到的资料，制订了一套 C 值的数据表。必须指出，不论是布莱的 C 值，还是莱因的 C 值，都是经验数据，理论根据不足，缺乏试验根据，所以常常会出现这样的现象，例如某某闸的 C 大于布

莱或莱因的 C ，应属安全，但却偏偏垮了。

其次还必须指出，上述渗径系数 C 值属平均值，采用一个平均概念的 C 值验算的整个工程地段也许是安全的，但并不能保证局部地段也属安全，换句话说，平均概念的 C 值大于规定值，并不意味着局部地段的 C 值也大于规定值。显而易见，在地下轮廓的各个部段中的 C 值互不相同，但主要的是应控制各个水平段的 C 值，使其大于规定值，以免发生接触冲刷。

在前苏联，是用渗流坡降 J 作为控制指标， $J = \Delta H / L$ ，在形式上与 C 互为倒数，但这里的 L 值并非布莱或莱因的 L 值，而是地下轮廓的实有长度。

采用 J 值作为控制指标，同样应该采用局部段的 J （例如各垂直段的 J 及各水平段的 J ），务必使其小于允许值 $J_{\text{允}}$ 。

当按求得了各点的渗流扬压力后，则各局部段的渗流坡降，可按式（6）计算

$$J = (H_i - H_{i+1}) / l \quad (6)$$

式中 H_i ——某一局部段的上游点渗流扬压力；

H_{i+1} ——某一局部段的下游点渗流扬压力；

l ——某局部段的实有长度。

允许坡降 $J_{\text{允}}$ 可按式（7）计算

$$J_{\text{允}} = \frac{J_{\text{临界}}}{K} \quad (7)$$

式中 K ——安全系数，取值按工程重要性而定；

$J_{\text{临界}}$ ——某种土料的临界渗流坡降，即到达此值后，土料将开始发生渗透变形。

$J_{\text{临界}}$ 值可由下式计算：

（1）当土料发生流土时：（渗流由下向上，且无反滤压盖）

$$\text{对于各种砂土 } J_{\text{临界}} = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) (1 - n) \quad (8)$$

$$\text{或 } J_{\text{临界}} = \alpha \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) (1 - n) \quad (9)$$

(2) 当土料发生管涌时:

$$\text{对于垂直管涌 (渗流出口处)} \quad J_{\text{临界}} = \frac{42d_3}{\sqrt{k/n^3}} \quad (10)$$

$$\text{对于水平管涌} \quad J_{\text{临界}} = \frac{42d_3}{\sqrt{k/n^3}} \lg \phi \quad (11)$$

式中: γ_s 为土的土粒容重, 一般取 2.65g/cm^3 ; n 为土的孔隙率, $n = 1 - \frac{\gamma_d}{2.65}$ (γ_d 为土的干容重); α 为颗粒形状系数, 对砂土取值 $1.16 \sim 1.17$; d_3 为土的颗分曲线上, 对应于含量为 3% 的粒径, 在计算时, 其单位必须取 cm ; k 为土的渗透系数 (cm/s); $\lg \phi$ 为土的内摩擦系数。

(3) 当发生接触冲刷时, 可通过试验确定。表 2 为南京水利科学研究所的试验成果, 供参考。

表 2

试验情况	$J_{\text{临界}}$	试验情况	$J_{\text{临界}}$
平板下细沙	0.09~0.13	砂卵石下中细沙	0.22
砂砾层下细沙	0.095~0.16	砾石层下壤土	1.6
砂卵石下细沙	0.09~0.30	垂直壁面侧边粘土	1.56

注 摘自南京水利科学研究所毛昶熙同志在水利部主办的渗流研究班上所介绍的资料。

除了控制各部段的 J 值以外, 更主要的是要控制出口坡降 $J_{\text{出}}$, 使其小于允许值。 $J_{\text{出}}$ 可按下列情况计算:

(1) 当下游设置板桩时 [参见图 2 (a)]

$$J_{\text{出}} = \frac{(H_u - H_w)}{(s_3 + d_5)} \quad (12)$$

(2) 当下游没有板桩, 而只有齿坎时

$$J_{\text{出}} = \frac{(H_u - H_w)}{d_5} \quad (13)$$

地基土料的允许坡降 $J_{\text{允}}$ 可按式 (7) 计算, 也可参考表 3 取值, 两者之中, 择其小者使用。

表 3

地基土料	水平段 允许坡降	出口段 允许坡降	地基土料	水平段 允许坡降	出口段 允许坡降
粉砂	0.05~0.07	0.25~0.30	砂壤土	0.15~0.25	0.40~0.50
细砂	0.07~0.10	0.30~0.35	粘壤土	0.25~0.35	0.50~0.60
中砂	0.10~0.13	0.35~0.40	软粘土	0.30~0.40	0.60~0.70
粗砂	0.13~0.17	0.40~0.45	较坚实粘土	0.40~0.50	0.70~0.80
中细砾	0.17~0.22	0.45~0.50	极坚实粘土	0.50~0.60	0.80~0.90
粗砂夹卵石	0.22~0.28	0.50~0.55			

注 1. 摘自毛昶熙同志在水利部主办的渗流研究班上所介绍的资料。

2. 允许坡降拟定时, 取 $K=1.5$, 此外, 若有反滤层时, 数据可加大 30%~50%。

三、板桩防渗功能分析

板桩防渗功能在于延长渗径、消杀水头、减小扬压力、减小渗流量及出口坡降。

要充分发挥板桩的防渗效能, 就要深入研究板桩的位置及深度。因为同样深度的一道板桩打的位置不一样, 其防渗功能也不一样; 反之, 在同一位置上, 不同深度的板桩其防渗功能也不一样。再者, 一道板桩与两道板桩之间的功能又值得比较。总之, 在打板桩这个问题上, 存在着技术、经济的方案比较问题, 存在着一个最佳工作状态问题, 下面分别加以研究。

1. 板桩的位置

按照布莱或莱因方法, 不管板桩放在什么地方, 其所增加的渗径总是一样的 (例如, 1:1 或 1:3), 但事实上并不如此, 随着板桩位置的变化, 其所增加的渗径就不一样了。今若有深度为 s 的板桩, 离地下轮廓上游端点之距为 x , 底板长为 l , 则按照保角变换原理, 其转化为水平轮廓后的渗径长度 L 的计算公式如下

$$L = \sqrt{s^2 + x^2} + \sqrt{s^2 + (l-x)^2} \quad (14)$$

由式 (14) 可知, 当 $x=0$ 或 $x=l$ 时, 即当板桩位于轮廓

的上游端点或下游端点时, 得到最大的 L 值, 其表达式为

$$L_{\max} = s + \sqrt{s^2 + l^2} \quad (15)$$

而当 $x = l/2$ 时, 即板桩位于地下轮廓之中央时, 得到最小值, 即

$$L_{\min} = 2\sqrt{s^2 + l^2/4} \quad (16)$$

因而可知, 板桩的最佳位置, 应在上游或下游端点。

2. 板桩的深度

同一相对位置 (l_1/l) 的板桩相对深度 (s/l) 不同时, 其防渗效果就不同, 消杀水头的功能也不一样, 见表 4。

表 4

板桩相对深度 (s/l)		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0
消 杀 水 头 数	$l_1/l = 0.0$	0.388	0.526	0.616	0.681	0.728	0.851	0.897
	$l_1/l = 0.2$	0.282	0.467	0.581	0.658	0.713	0.831	0.868
	$l_1/l = 0.5$	0.241	0.430	0.558	0.643	0.703	0.846	0.895

注 $l_1/l = 0.8$ 与 $l_1/l = 0.2$ 的各消杀水头数值相同。

$l_1/l = 1.0$ 与 $l_1/l = 0$ 的各消杀水头数值相同。

由表 4 可得下列结论:

(1) 板桩越深, 消杀水头越大。

(2) 板桩越深, 消杀水头的效率则相应地减小, 例如表 4 中当 $l_1/l = 0$ 位置时, 其消杀水头数见表 5。

表 5

s/l	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0
每单位深度 ($s/l = 0.1$) 板桩的消杀水头	0.194	0.131	0.103	0.085	0.0728	0.0425	0.0299

由表 5 可知, 不要笼统地认为板桩越深越好, 应按设计要求, 深到某一适宜深度即可。

(3) 不论板桩深度如何, 板桩位于 $l_1/l = 0$ (即端点) 时,

消杀水头的功能优于其他位置，这一结论与前述延长渗径的结论相符合。

3. 板桩消杀扬压力 (ΔP) 的计算

可按式 (17) 计算

$$\Delta P = \left\{ \left[\left(0.84 - 0.68 \frac{x_i}{L} \right) + \Delta \phi_i \right] - \left[\left(0.84 - 0.68 \frac{x_{i+2}}{L} \right) + \Delta \phi_{i+2} \right] \right\} \Delta H \quad (17)$$

式中 x_i ——板桩上游侧面与地下轮廓水平段的交点，所离开轮廓上游端点之距；

x_{i+2} ——板桩下游侧面与地下轮廓水平段交点，所离开轮廓上游端点之距， $x_{i+2} = x_i + 2s$ 。

4. 两道板桩间的距离

前苏联 C.H. 努米罗夫证明，两板桩之间的最小距离，不应小于这两道板桩长度之和，否则就会浪费板桩的功能。

四、布莱方法的误差原因

布莱方法的误差，据笔者分析主要来自两个方面：

(1) 不恰当地将垂直渗径与水平渗径的功用看作是一样的，因而他提出 1:1 的假定。其实垂直渗径与水平渗径之比值 (σ) 并不是固定值，它是随板桩的位置和深度而变的。根据理论解，求得下列数据可供分析。

$\frac{l_1}{l} = 0$ 时或 $\frac{l_1}{l} = 1.0$ 时，见表 6。

表 6

s/l	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0
σ	1.585	1.390	1.34	1.33	1.34	1.44	1.46

$\frac{l_1}{l} = 0.2$ 时或 $\frac{l_1}{l} = 0.8$ 时，见表 7。

表 7

s/l	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0
σ	0.91	1.05	1.13	1.19	1.24	1.13	0.70

$\frac{l_1}{l} = 0.5$ 时, 见表 8。

表 8

s/l	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0
σ	0.79	0.95	1.04	1.12	1.17	1.36	1.46

(2) 不恰当地假定平底轮廓线下水头分布为一直线分布, 事实上由理论解可得一曲线, 状如 S 形, 如图 3 所示。

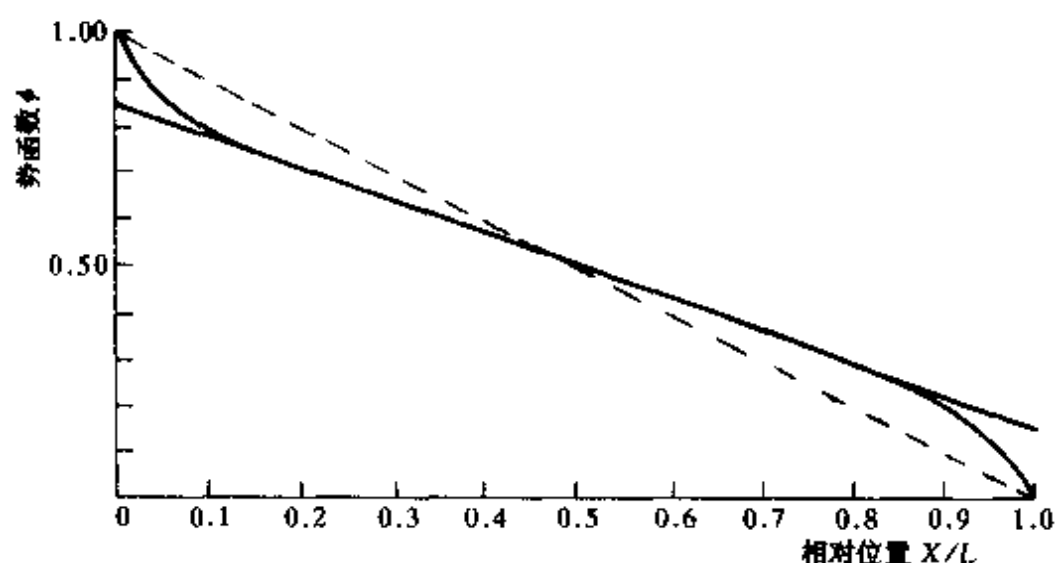


图 3

布莱的直线变化也绘于图 3 中(图中的虚线), 由图 3 可知, 布莱直线和曲线的差距是很大的, 而且越是两端, 其差值就越大。

五、几种不同轮廓的算例

本节将列举若干种有代表性的地下轮廓, 用文中公式进行计算, 并和电拟试验值进行对比, 以验证本节方法的精确度。下列

几种不同型式的地下轮廓，在工程中也是常遇见的，掌握了这些型式的计算方法，则对其他各种型式的地下轮廓的计算便不难解决。

例 1 如图4所示 $s_1 = 0\text{m}$, $s_2 = 22.5\text{m}$, $s_3 = 2.5\text{m}$, $T = 75\text{m}$, $l_1 = 22\text{m}$, $l_2 = 60\text{m}$, $\Delta H = 1\text{m}$, $H_2 = 0\text{m}$, $d_1 = 2.5\text{m}$, $d_2 = 0\text{m}$, $d_3 = 0\text{m}$, $d_4 = 0\text{m}$, $d_5 = 2.5\text{m}$ 。

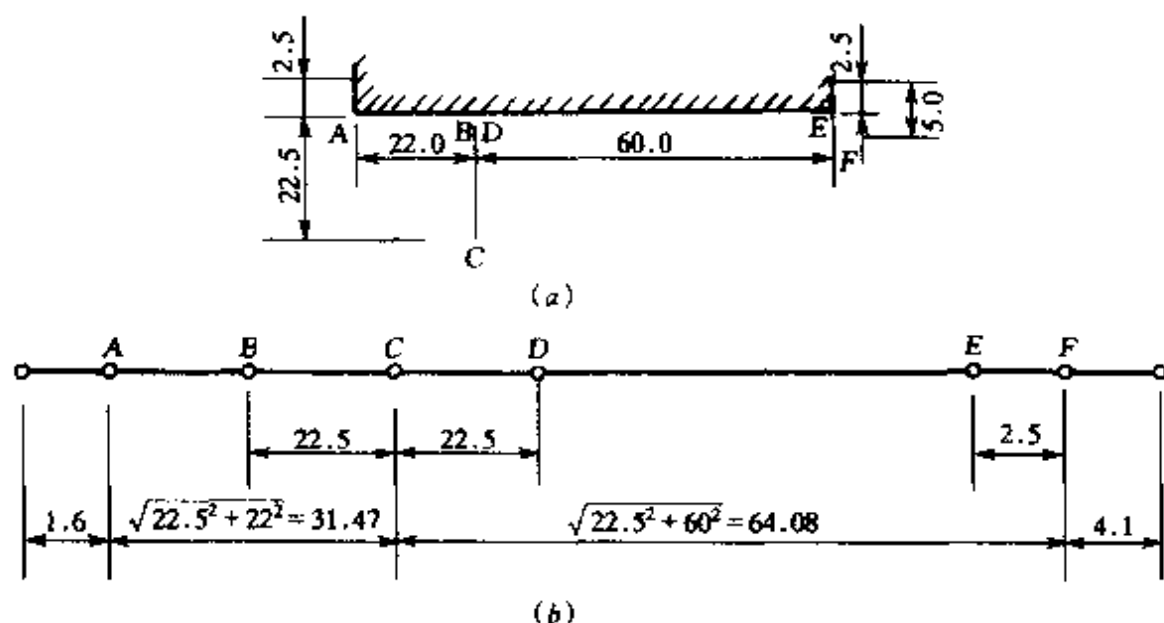


图 4

解 第一步：由式 (3) 求 L

$$\begin{aligned} L &= 0.64 \times 2.5 + \sqrt{22.5^2 + 22^2} + \sqrt{22.5^2 + 60^2} + 2.5 \\ &\quad + 0.64 \times 2.5 \\ &= 1.6 + 31.47 + 64.08 + 2.5 + 1.6 = 101.3 \text{ (m)} \end{aligned}$$

第二步：求各点横坐标

$$X_A = 1.6\text{m}, \quad X_B = 1.6 + 31.47 - 22.5 = 10.57 \text{ (m)}$$

$$X_C = 10.57 + 22.5 = 33.07 \text{ (m)}$$

余类推，分别算得 $X_D = 55.57\text{m}$, $X_E = 94.65\text{m}$, $X_F = 97.15\text{m}$ 。

第三步：按式 (4) 求各点扬压力

$$H_A = \left[\left(0.84 - 0.68 \times \frac{1.6}{101.25} \right) + 0.1 \right] \times 1 + 0 = 0.93 \text{ (m)}$$

$$H_B = \left[\left(0.84 - 0.68 \times \frac{10.57}{101.25} \right) + 0.022 \right] \times 1 + 0 = 0.80 \text{ (m)}$$

$$H_C = \left[\left(0.84 - 0.68 \times \frac{33.07}{101.25} \right) + 0 \right] \times 1 + 0 = 0.62 \text{ (m)}$$

余类推，分别算得 $H_D = 0.46\text{m}$ ， $H_E = 0.16\text{m}$ ， $H_F = 0.13\text{m}$ 。

成果对照表见表 9。

表 9

点 号	A	B	C	D	E	F
布 莱 法	0.98	0.82	0.66	0.49	0.05	0.04
阻力系数法	0.91	0.77	—	0.47	0.15	—
本节直线展开法	0.93	0.79	0.62	0.46	0.16	0.13
电拟试验值	0.94	0.83	—	0.43	0.15	—

例 2 $T = \infty$ ，其他尺寸如图 5 所示。

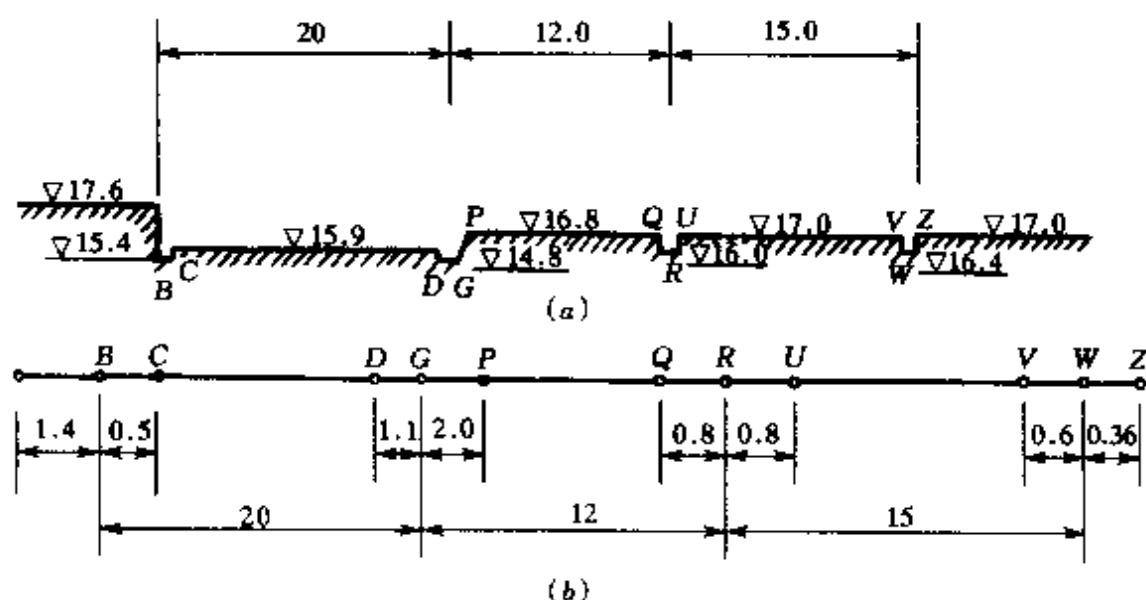


图 5

图 5 (a) 所示为一无板桩地下轮廓，仅有 4 个齿坎，且埋深均很浅，因此对于这样型式的地下轮廓线，除了上下游端齿坎外，其余齿坎均可不考虑其深度的影响，而直接展开成图 5 (b)，可得水平轮廓渗径总长

$$L = 1.4 + 20 + 12 + 15 + 0.36 = 48.76 \text{ (m)}$$

算得各点横坐标如下

$$X_B = 1.4\text{m}, X_C = 1.9\text{m}, X_D = 20.3\text{m}, X_G = 21.4\text{m},$$

$$X_P = 23.4\text{m}, X_Q = 32.6\text{m}, X_R = 33.4\text{m}, X_U = 34.2\text{m},$$

$$X_V = 47.8\text{m}, X_W = 48.4\text{m}, X_Z = 48.76\text{m}。$$

按式(4)求各点扬压力如下

$$H_B = \left[\left(0.84 - 0.68 \times \frac{1.4}{48.76} \right) + 0.075 \right] \times 1 + 0 = 0.89 \text{ (m)}$$

$$H_C = \left[\left(0.84 - 0.68 \times \frac{1.9}{48.76} \right) + 0.059 \right] \times 1 + 0 = 0.87 \text{ (m)}$$

$$H_D = \left[\left(0.84 - 0.68 \times \frac{20.3}{48.76} \right) + 0 \right] \times 1 + 0 = 0.56 \text{ (m)}$$

余类推, 分别算得 $H_G = 0.54\text{m}$, $H_P = 0.51\text{m}$, $H_Q = 0.38\text{m}$, $H_R = 0.37\text{m}$, $H_U = 0.35\text{m}$, $H_V = 0.09\text{m}$, $H_W = 0.06\text{m}。$

表 10

点 号	B	C	D	G	P	Q	R	U	V	W
布 莱 法	0.96	0.95	0.68	0.66	0.63	0.34	0.33	0.31	0.02	0.01
阻力系数法	0.91	0.82	0.56	—	0.52	0.38	—	0.36	0.18	0.06
本节直线展开法	0.89	0.87	0.56	0.54	0.51	0.39	0.37	0.35	0.09	0.06
电拟试验值	—	0.80	0.53	—	0.47	0.37	—	0.34	0.11	—

水闸地基下游渗流出 逸坡降近似计算

水闸下游渗流出逸处，最易发生渗透破坏，诸如流土、管涌等，有时在设置反滤层后，也常常会淤堵，最后仍将导致失事。造成渗透变形的原因是渗流出逸坡降大于该处土料的临界坡降或允许坡降，因此设计人员必须严格控制渗流出逸坡降。

鉴于目前国内外对渗流出逸坡降还没有专门的全面系统的讨论，现有的计算公式仅适用于较简单的地下轮廓，而对于一些复杂的地下轮廓布置，还没有现成的计算方法可供采用。此外，常有这种看法，认为延长渗径长度就可以减小渗流出逸坡降，其实这种观点并不完全正确，需视具体工程布置情况而定。为此，本文拟对这些问题作一初步探讨。

一、平底板布置情况

如图 1 所示渗流出逸坡降最大值发生在 E 点，其值可按已有流体力学严格解法求得^[1]

$$I_x = \frac{h}{\pi \sqrt{X^2 - l^2}} \quad (l \leq X < \infty) \quad (1)$$

式中： h 为水闸上下游水位差； $\pi = 3.1416$ 。

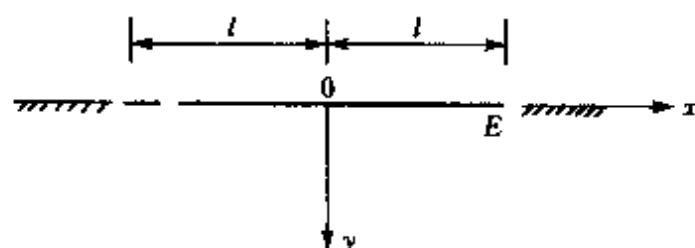


图 1

由式 (1) 可见，在 E 点处 $x = l$ ，故 $I_E = \infty$ 。由此可知，平底板闸坝最易发生渗透变形处为 E 点。同时也可看出，在图 1

中, 尽管延长渗径长度 l , 仍然是 $I_E = \infty$, 说明了在这种情况下, 不能采用延长渗径的方法来减小出逸坡降 I_E 。当然, 延长渗径仍然是可以减少地基内部的水平渗流坡降, 不过应当指出, 水平渗流坡降一般并不是控制渗透变形的对象, 因为它仅是一个平均概念, 既不能说明地基内部的局部偶然现象, 也不能保证渗流出口处的渗流安全。

从 E 点往右, $x \geq l$ 起, 随着 x 的增加, I_x 将迅速减小, 列出表 1 备查。

表 1 出逸段渗流坡降与 x 的对应表

X	l	$1.2l$	$1.4l$	$1.6l$	$1.8l$	$2.0l$	$2.5l$	$3.0l$
I_x	∞	$0.48h/l$	$0.325h/l$	$0.255h/l$	$0.213h/l$	$0.184h/l$	$0.139h/l$	$0.2h/l$

注 h 为上下游水位差。

设计人员可以根据表 1 中渗流在下游出逸段范围内的出逸坡降 I_x 的大小, 确定在多大范围内需要铺设反滤层以防止发生渗透变形。这个范围也可按式 (2) 求出

$$x = \sqrt{\left(\frac{h}{\pi I_A}\right)^2 + l^2} \quad (2)$$

式中: I_A 为地基土料的允许坡降, 视土料而异, 见表 2。反滤层铺设的范围为 $(x - l)$ 。

表 2 各种土基上水闸设计的允许渗流坡降

地基土质类别	允许渗流坡降	
	水 平 段	出 口 处
粉 砂	0.05~0.07	0.25~0.30
细 砂	0.07~0.10	0.30~0.35
中 砂	0.10~0.13	0.35~0.40
粗 砂	0.13~0.17	0.40~0.45
中 细 砾	0.17~0.22	0.45~0.50
粗砾夹卵石	0.22~0.28	0.50~0.55
砂 壤 土	0.15~0.25	0.40~0.50

续表

地基土质类别	允许渗流坡降	
	水平段	出口处
粘壤土夹砂壤土	0.25~0.36	0.50~0.60
软粘土	0.36~0.40	0.60~0.70
较坚实粘土	0.40~0.50	0.70~0.80
极坚实粘土	0.50~0.60	0.80~0.90

注 摘自毛昶熙的《电模拟试验与渗流研究》一书。

二、只有板桩没有底板时的出逸坡降

对图 2 所示情况，出逸段内的渗流坡降可按已有流体力学解法由式 (3) 确定^[1]：

$$I_x = \frac{h}{\pi \sqrt{x^2 + s^2}} \quad (0 \leq x < \infty) \quad (3)$$

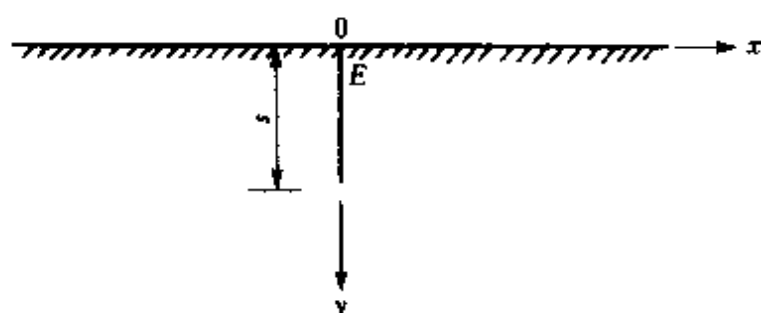


图 2

由式 (3) 可知，板桩越深， s 越大，则 I_x 越小；反之 s 越小， I_x 也就越大。当 $x=0$ 时 I_x 最大，此时该点的出逸坡降为

$$I_E = \frac{h}{\pi s} \quad (4)$$

在式 (3) 中，随着 x 的增大，则出逸坡降 I_x 将逐步减小，见表 3。

表 3 出逸坡降与 x 值的对应关系

x/s	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0
$I_x s/h$	0.318	0.312	0.296	0.273	0.249	0.225	0.142	0.100

由式 (3) 即可确定出反滤层应铺设的范围为 $0 \sim x$

$$x = \sqrt{\left(\frac{h}{\pi I_A}\right)^2 - s^2} \quad (5)$$

式中: I_A 为地基土料的允许坡降, 见表 2。

三、既有板桩也有底板时的出逸坡降

如图 3 所示, 这是一种常见的布置形式, 板桩位于底板的任意位置, 出逸段内渗流坡降 I_x 可按下列流体力学精确解求得^[2]

$$I_x = \frac{hx}{\pi \sqrt{x^2 + s^2} \sqrt{(\sqrt{x^2 + s^2} - a)^2 - b^2}} \quad (l_2 \leq x < \infty) \quad (6)$$

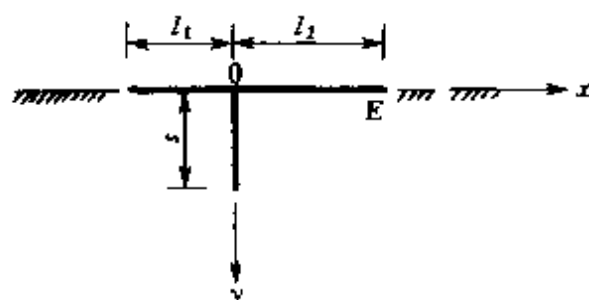


图 3

反滤层应铺设的范围为 $x - l_2$, 则

$$x = \frac{I_A [\pi \sqrt{x^2 + s^2} \sqrt{(\sqrt{x^2 + s^2} - a)^2 - b^2}]}{h} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (\sqrt{s^2 + l_2^2} - \sqrt{s^2 + l_1^2}) \\ b &= \frac{1}{2} (\sqrt{s^2 + l_2^2} + \sqrt{s^2 + l_1^2}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: I_A 为地基土料的允许坡降, 见表 2。

当 $x = l_2$ 时, 由式 (8) 得 $(\sqrt{x^2 + s^2} - a)^2 = b^2$, 由式 (6) 可知, $I_x = I_E = \infty$ 。在这种情况下, 可见延长渗径也不能降低 I_E 。

对图 3 也可采用本文笔者提出的下列方法^[4]计算, 以资简

化。先将图 3 展开为图 1，消去板桩，此时相应于图 1 中

$$l = \frac{1}{2} (\sqrt{l_1^2 + s^2} + \sqrt{l_2^2 + s^2}) \quad (9)$$

然后采用式 (1) 求出逸坡降。今举一例对比这两种方法的计算结果。

例 1 设按图 3 工程布置 $l_1 = 8\text{m}$, $l_2 = 10\text{m}$, $h = 1\text{m}$, $s = 4\text{m}$, 试求 $x = 12\text{m}$ 处的渗流出逸坡降。

解 先用式 (6) 求解

$$a = \frac{1}{2} \times (\sqrt{16 + 100} - \sqrt{16 + 64}) = 0.913(\text{m})$$

$$b = \frac{1}{2} \times (\sqrt{16 + 100} + \sqrt{16 + 64}) = 9.857(\text{m})$$

$$I_x = \frac{1 \times 12}{3.14 \times \sqrt{144 + 16} \times \sqrt{(\sqrt{144 + 16} - 0.913)^2 - (9.857)^2}} \\ = 0.0474$$

再用本文方法求解

$$l = \frac{1}{2} \times (\sqrt{100 + 16} + \sqrt{64 + 16}) = 9.857(\text{m})$$

代入式 (1)，并令 $x = 9.857 + 2 = 11.857(\text{m})$ ，代入得

$$I_x = \frac{1}{3.14 \times \sqrt{(11.857)^2 - 97.16}} = 0.0483$$

两法所得 I_x 几乎相同。但本文方法较为简易。

现在再来讨论板桩位于底板两端的情况：

(1) 当板桩位于底板上游端时，见图 4。这种情况相当于在图 3 中令 $l_1 = 0$ 并且 $l_2 = L$ ，此时

$$a = \frac{1}{2} (\sqrt{s^2 + L^2} - s)$$

$$b = \frac{1}{2} (\sqrt{s^2 + L^2} + s)$$

当 $x = L$ 时，则 E 点的出逸坡降由式 (6) 可得 $I_E = \infty$ ，故在这种情况下，延长渗径并不能降低 I_E 。

对图 4 仍可采用本文方法，先展开为图 1，此时图 1 中的 l

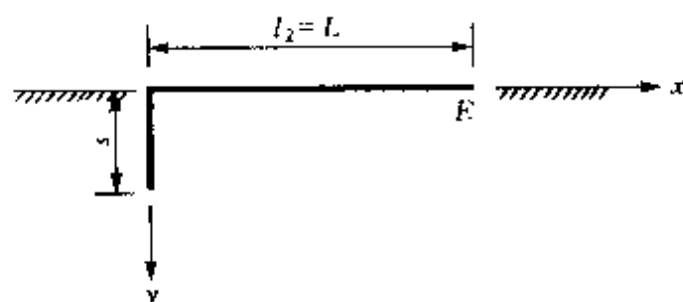


图 4

$= 1/2 (\sqrt{s^2 + L^2} + s)$ 。然后采用式 (1) 求 I_x 。今举例对比两方法结果。

例 2 令例 1 中的 $l_1 = 0$, 于是 $l_2 = L = 10\text{m}$, 而 $a = 1/2 \times (\sqrt{16 + 100} - 4) = 3.385 \text{ (m)}$, $b = 1/2 \times (\sqrt{16 + 100} + 4) = 7.385 \text{ (m)}$, 代入式 (6) 得 $x = 12\text{m}$ 处的出逸坡降

$$I_x = \frac{1 \times 12}{3.14 \times \sqrt{144 + 16} \times \sqrt{(\sqrt{144 + 16} - 3.385)^2 - (7.385)^2}} \\ = 0.054$$

若采用本文方法, 则得 $l = \frac{1}{2} \times (\sqrt{16 + 100} + 4) = 7.385 \text{ (m)}$, 代入式 (1), 并因 $x = 7.385 + 2 = 9.385 \text{ (m)}$, 得

$$I_x = \frac{1}{3.14 \times \sqrt{(9.385)^2 - (7.385)^2}} = 0.0549$$

两法结果几乎相同。

(2) 当板桩位于底板下游端时, 见图 5。这种情况相当于图 3 中的 $l_2 = 0$, $l_1 = L$, 故 $a = \frac{1}{2} (s - \sqrt{s^2 + L^2})$, $b = \frac{1}{2} (s + \sqrt{s^2 + L^2})$, 而下游出逸段的渗流最大出逸坡降发生在图 5 中的 E 点, 其值为^[2]

$$I_E = I_{\max} = \frac{h}{\pi \sqrt{bs}} \quad (10)$$

文献 [3] 给出了查图法 (图 6), 两者结果是一样的。

由式 (10) 可知, 当板桩位于底板下游端点时, 延长渗径或

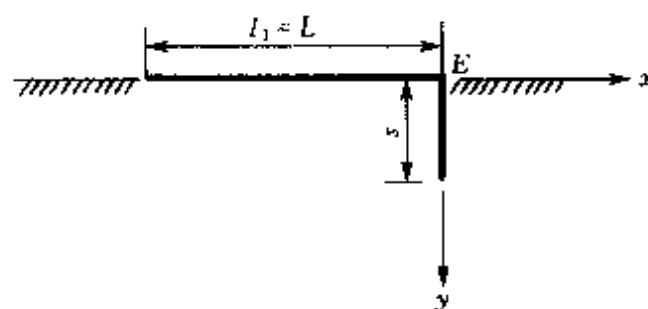


图 5

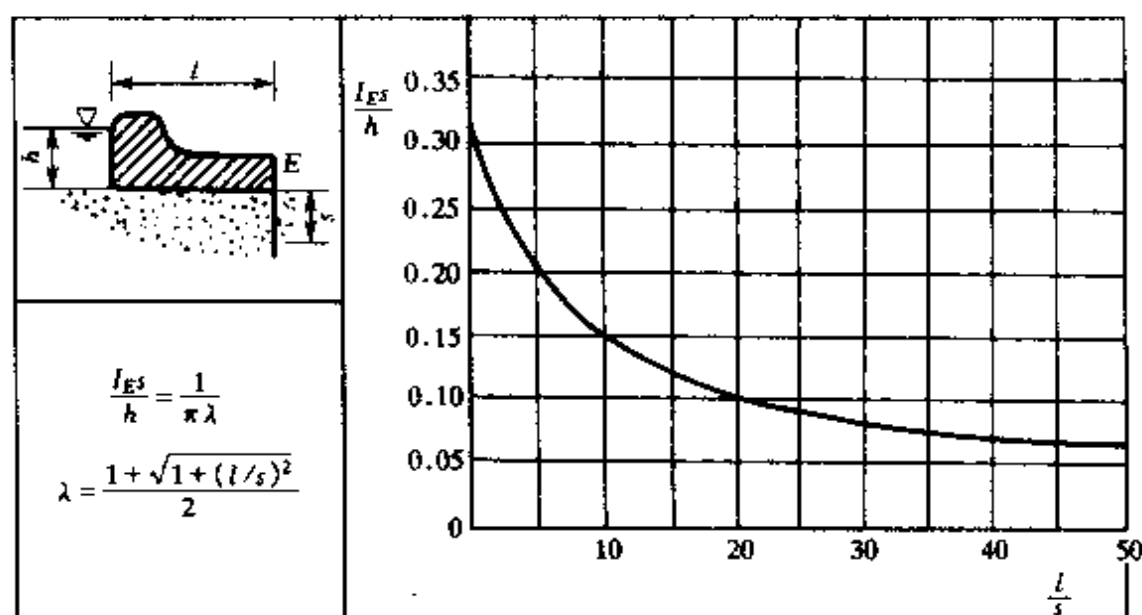


图 6

增加板桩深度 s ，均能降低出逸坡降，但增加 s 的效果明显地优于增加 b 的效果（即增加水平渗径）。

综上所述，凡是板桩不设在底板下游端点时，则 E 点的出逸坡降均为 ∞ ，故 E 点最易发生渗透变形，而一旦在 E 点处设置板桩或齿坎后，其 I_E 值将迅速降低，由此可知，降低 E 点的出逸坡降的好办法，不是延长水平渗径而是加设板桩或齿坎。这一点务请设计人员多加注意。

四、具有两道板桩的底板的出逸坡降

对于图 7 所示情况，现在还没有现成的计算公式来计算出逸

段内的渗流出逸坡降，故必须按此图形先求出沿地下轮廓各处的渗流扬压力，然后再求出逸坡降。这样做计算量很大，本文提出一种近似方法可供设计人员使用。

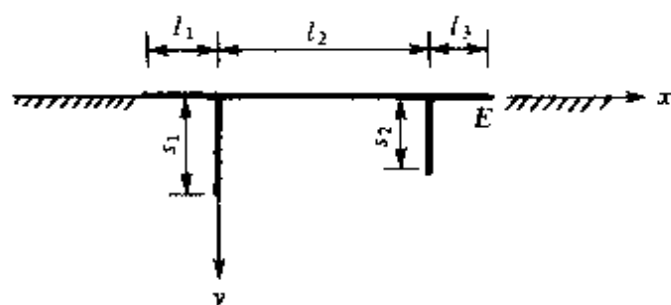


图 7

将图 7 先后消去两道板桩而化为图 1 所示的平底板^[4]，此时图 1 中的 l 可按下式确定

$$l = \frac{1}{2} (\sqrt{s_2^2 + l_0^2} + \sqrt{s_2^2 + l_3^2}) \quad (11)$$

其中 $l_0 = \sqrt{s_1^2 + l_1^2} + \sqrt{s_1^2 + l_2^2}$

有了式 (11) 后，就可采用式 (1) 求出逸段内的渗流出逸坡降 I_x 。

下面继续讨论图 8 所示情况。

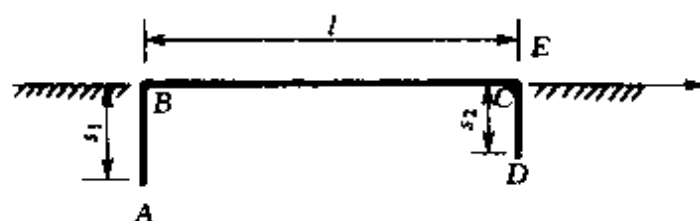


图 8

对于这种图形，在工程上是经常可以遇见的，仍然可以采用展开法消去上游端板桩 s_1 而化为图 5 或图 6 所示情况。例如化为图 5 情况时，则有

$$I_E = I_{\max} = \frac{h}{\pi \sqrt{bs_2}} \quad (12)$$

其中 $b = \frac{1}{2} (s_2 + \sqrt{s_2^2 + L^2})$ (12')

而
$$L = \sqrt{s_2^2 + l^2} + s_1 \quad (13)$$

若化为图 6 情况, 则也为 $L = \sqrt{s_2^2 + l^2} + s_1$ 。

例 3 如图 8 所示, 已知 $s_1 = 10\text{m}$, $s_2 = 10\text{m}$, $l = 20\text{m}$, $h = 1\text{m}$, 试求 E 点的渗流出逸坡降 I_E 。

解 由式 (13) 得 $L = \sqrt{s_1^2 + l^2} + s_1 = \sqrt{100 + 400} + 10 = 32.36 \text{ (m)}$, $b = \frac{1}{2}(s_2 + \sqrt{s_2^2 + L^2}) = \frac{1}{2} \times (10 + \sqrt{100 + 1047}) = 21.93 \text{ (m)}$, 代入式 (12) 得

$$I_E = \frac{h}{\pi \sqrt{bs_2}} = \frac{1}{3.1416 \times \sqrt{21.93 \times 10}} = 0.0215$$

若查图 6, 则 $l/s_2 = 32.36/10 = 3.236$, 查得 $\frac{I_{Es_2}}{h} = 0.244$, 所以

$$I_E = \frac{0.244 \times 1}{10} = 0.0244$$

将图 8 所示尺寸采用二维有限元数值解求得流网图后, 可得 D 点及 E 点处的水头分别为 20.298m 及 20.0m, 故渗流出逸坡降均相差无几, 为

$$I_E = \frac{h_D - h_E}{DE} = \frac{20.298 - 20}{10} = 0.0298$$

由此可知, 三种方法所得结果相差无几。

五、具有多道板桩时底板下游段的渗流出逸坡降

如图 9 所示, 这也是常见的闸坝底板地下轮廓线布置形式, 具有上游端、中间内部段及下游端三道板桩。对于这种布置, 迄今为止, 也没有现成的计算下游端渗流出逸坡降的方法。在这里仍采用展开法^[4]将上游端板桩 s_1 及中间段板桩 s_2 逐步消去而展开成为图 5、图 6 所示的只有下游端板桩 s_3 的轮廓, 于是便可应用式 (10) 求 I_E , 此时式 (10) 中的 b 应为

$$b = \frac{1}{2}(s_3 + \sqrt{s_3^2 + L^2})$$

而
$$L = \sqrt{s_2^2 + \left(\sqrt{s_2^2 + l_1^2} + s_1 \right)^2} + \sqrt{s_2^2 + l_2^2} \quad (14)$$

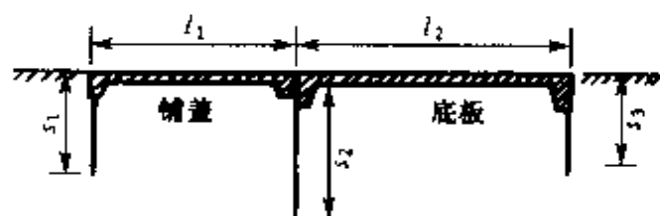


图 9

六、板桩下游地面挖低的情况

对于图 10 所示情况，靠近板桩处的渗流出逸坡降为

$$I_E = I_{\max} = \frac{h\delta}{s^2} \frac{C}{(1-C)} \quad (15)$$

式中： $\delta = s_2 / (s_1 - s_2)$ ； C 值见表 4。

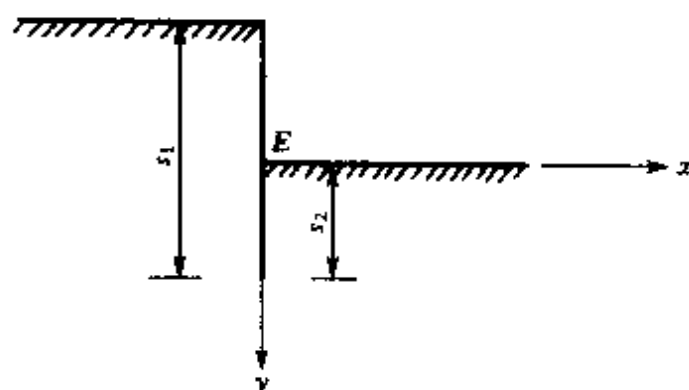


图 10

表 4 不同 δ 值的 C 值表

δ	C	δ	C	δ	C	δ	C	δ	C
0	1.000	0.5	0.335	1.0	0.217	6.0	0.049	∞	0.030
0.1	0.645	0.6	0.302	2.0	0.129	7.0	0.042		
0.2	0.516	0.7	0.275	3.0	0.091	8.0	0.038		
0.3	0.437	0.8	0.254	4.0	0.071	9.0	0.033		
0.4	0.380	0.9	0.233	5.0	0.058	10.0	0.030		

注 摘自《水工设计手册》第十五章。

文献 [3] 提出另一查图法, 见图 11。

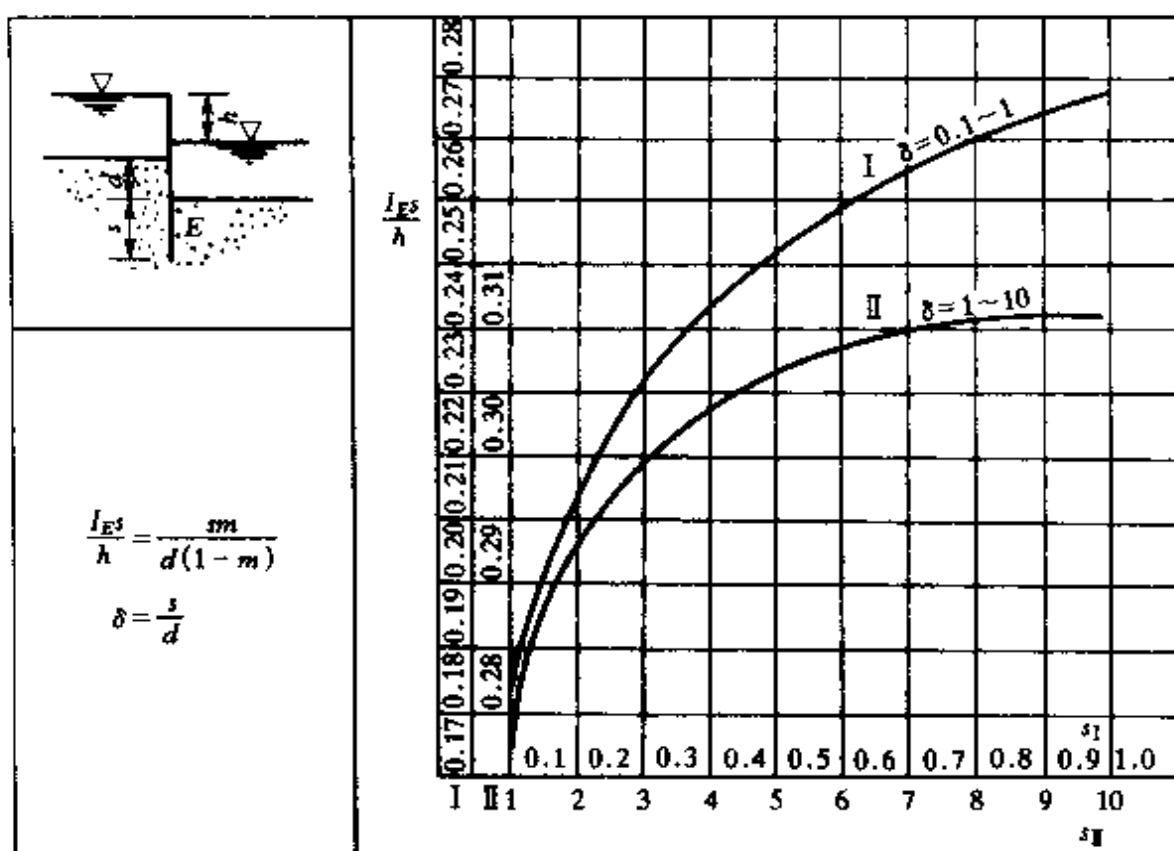


图 11

七、闸坝底板挖低并带有下游端板桩的情况

对图 12 所示情况^[3], 可按曲线图查得 $\frac{I_E s}{h}$; 然后即可求得 I_E 。至于对图 13 所示情况, 可采用本文提出的方法求出逸坡降, 即将图 13 (与图 12 相同) 的轮廓化为图 1 的平底轮廓, 然后采用式 (1) 计算, 此时式 (1) 中的 l 应按式 (16) 确定

$$l = \frac{1}{2} \left(\sqrt{l_2^2 + (d+s)^2} + \sqrt{l_2^2 + s^2} \right) \quad (16)$$

八、底板埋入地面下的情况

对图 14 (a) 所示轮廓, 其最大出逸坡降^[3]

$$I_E = I_{\max} = \frac{h}{\pi d} \frac{E' - m^2 K'}{m'} \quad (17)$$

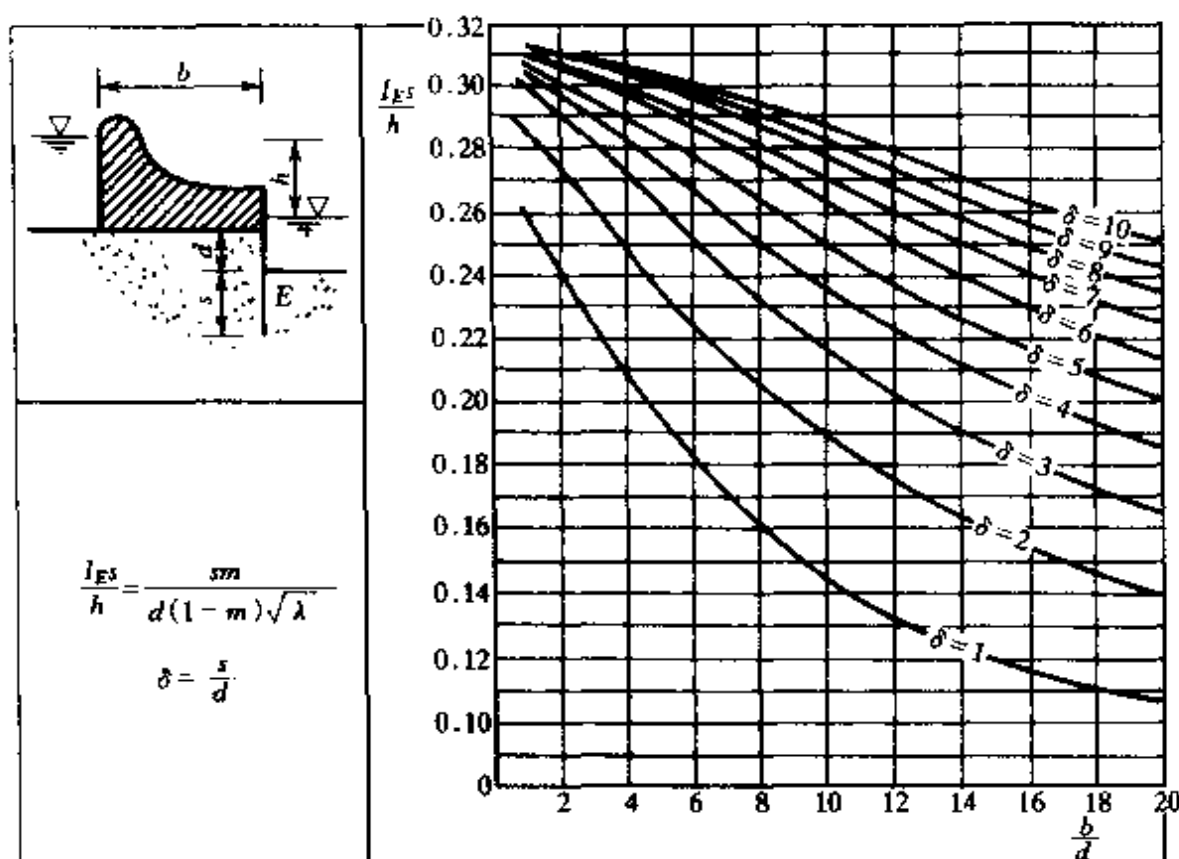


图 12

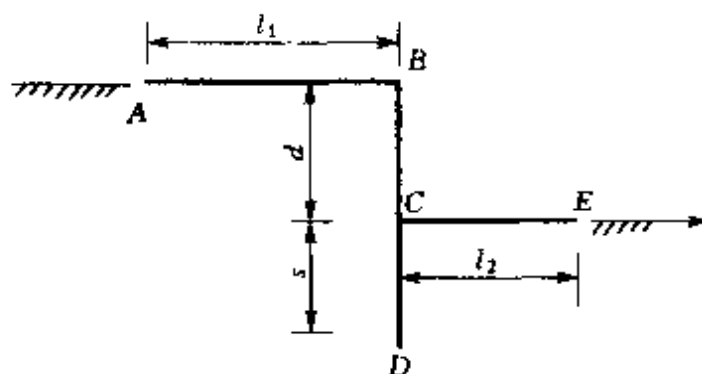


图 13

式 (17) 中, 先由图 14 (b) 查得模数 m , 然后再由图 14 (c) 查得 $\frac{E' - m^2 K'}{m'}$ 。

例 4 已知上下游水头 $h = 10\text{m}$, $b = 20\text{m}$, $d = 5\text{m}$, 则得 $d/b = 0.25$, 由图 14 (b) 查得 $m = 0.88$, 再根据此 $m = 0.88$ 查图 14 (c) 得 $\frac{E' - m^2 K'}{m'} = 0.36$, 故得 $I_E = 0.23$ 。

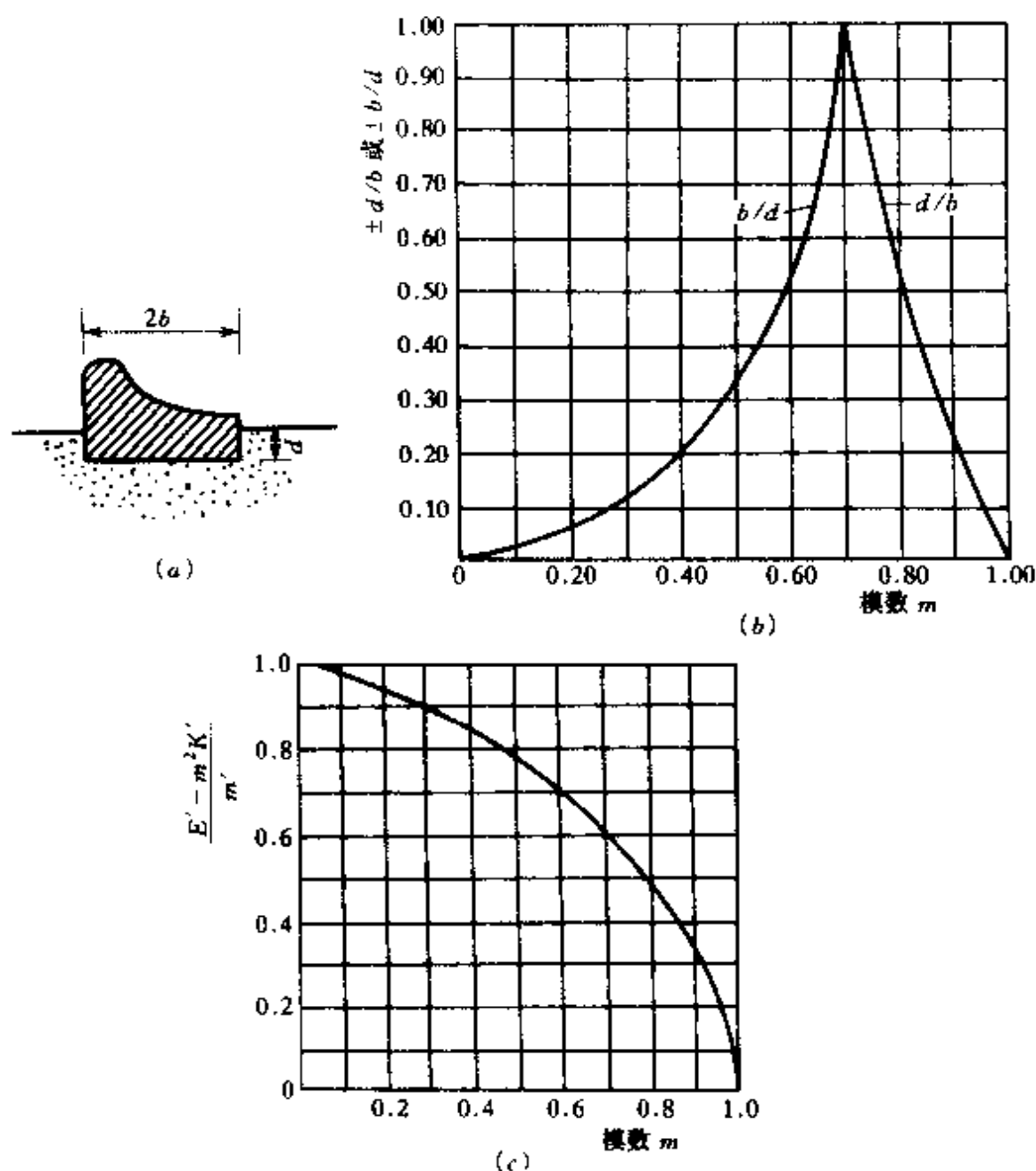


图 14

九、底板埋入地面以下且在上下游端有板桩

图 15 所示布置中出逸点 E 处的渗流出逸坡降 I_E 的求法，现在还没有现成的公式，可按本文提供的下列方法计算^[4]（展开为图 16）

$$I_E = \frac{h_D - h_E}{DE} = \frac{h_1 - h_2}{DE} \quad (18)$$

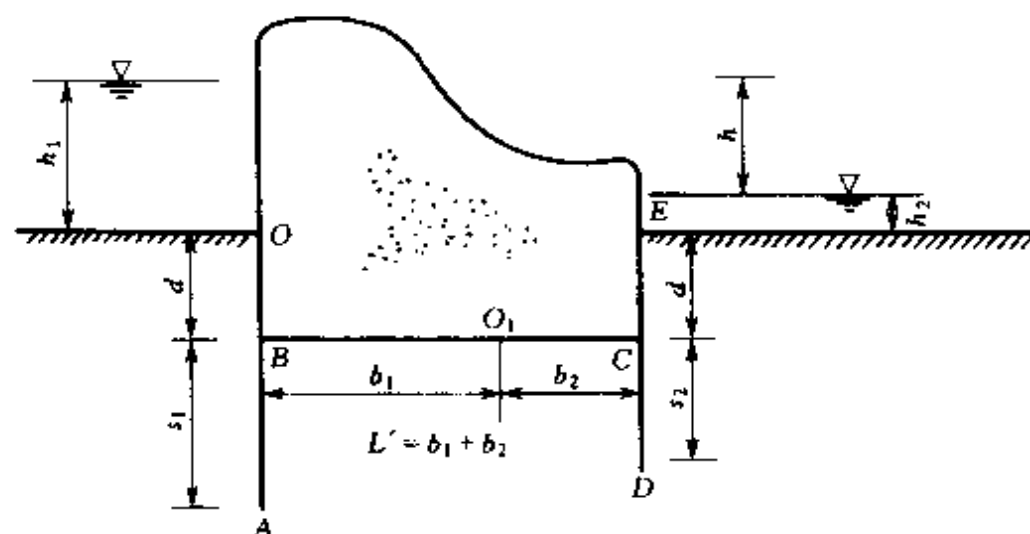


图 15

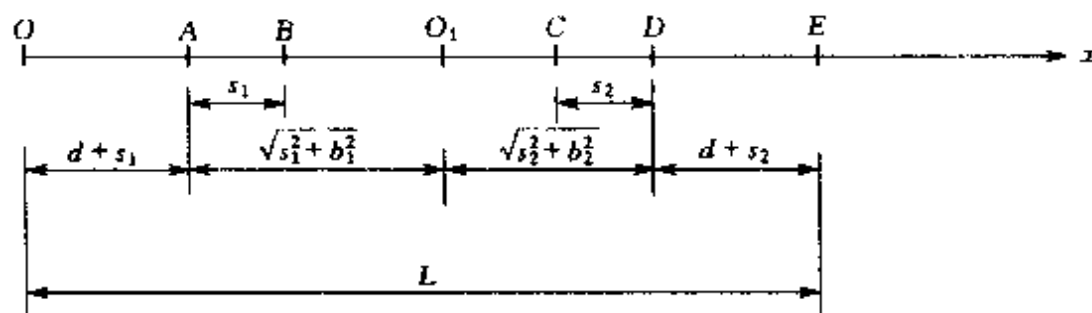


图 16

$$h_D = \left[\left(0.84 - 0.68 \frac{x_D}{L} \right) + \Delta\phi \right] h + h_2 \quad (19)$$

$$x_D = L - (s_2 + d)$$

$$L = (s_1 + d) + \sqrt{s_1^2 + b_1^2} + \sqrt{s_2^2 + b_2^2} + (s_2 + d)$$

$$b_1 = \frac{\sigma L'}{1 + \sigma}, \quad b_2 = L' - b_1, \quad \sigma = s_1/s_2,$$

$$\Delta\phi \text{ 可查表 5, } L' = b_1 + b_2$$

表 5 不同 x_i/L 时的 $\Delta\phi$ 表

x_i/L	$\Delta\phi$	x_i/L	$\Delta\phi$	x_i/L	$\Delta\phi$	x_i/L	$\Delta\phi$
0.00	0.1600	0.11	0.0198	1.00	-0.1600	0.89	-0.0198
0.01	0.1028	0.12	0.0160	0.99	-0.1028	0.88	-0.0160
0.02	0.0836	0.13	0.0134	0.98	-0.0836	0.87	-0.0134

续表

x_i/L	$\Delta\phi$	x_i/L	$\Delta\phi$	x_i/L	$\Delta\phi$	x_i/L	$\Delta\phi$
0.03	0.0694	0.14	0.0112	0.97	-0.0694	0.86	-0.0112
0.04	0.0592	0.15	0.0090	0.96	-0.0592	0.85	-0.0090
0.05	0.0500	0.16	0.0068	0.95	-0.0500	0.84	-0.0068
0.06	0.0428	0.17	0.0046	0.94	-0.0428	0.83	-0.0046
0.07	0.0376	0.18	0.0030	0.93	-0.0376	0.82	-0.0030
0.08	0.0314	0.19	0.0020	0.92	-0.0314	0.81	-0.0020
0.09	0.0272	0.20	0.0010	0.91	-0.0272	0.80	-0.0010
0.10	0.0230	—	—	0.90	-0.0230	—	—

注 当 $\frac{x_i}{L} = 0.2 \sim 0.8$ 时, $\Delta\phi = 0$ 。

例 5 如图17所示, $d = 5\text{m}$, $s_1 = s_2 = 5\text{m}$, $L' = 20\text{m}$, $\sigma = 5/5 = 1$, $b_1 = \frac{1 \times 20}{1+1} = 10\text{ (m)}$, $b_2 = 20 - 10 = 10\text{ (m)}$, $h = 1\text{m}$, $h_1 = 21\text{m}$, $h_2 = 20\text{m}$ 。

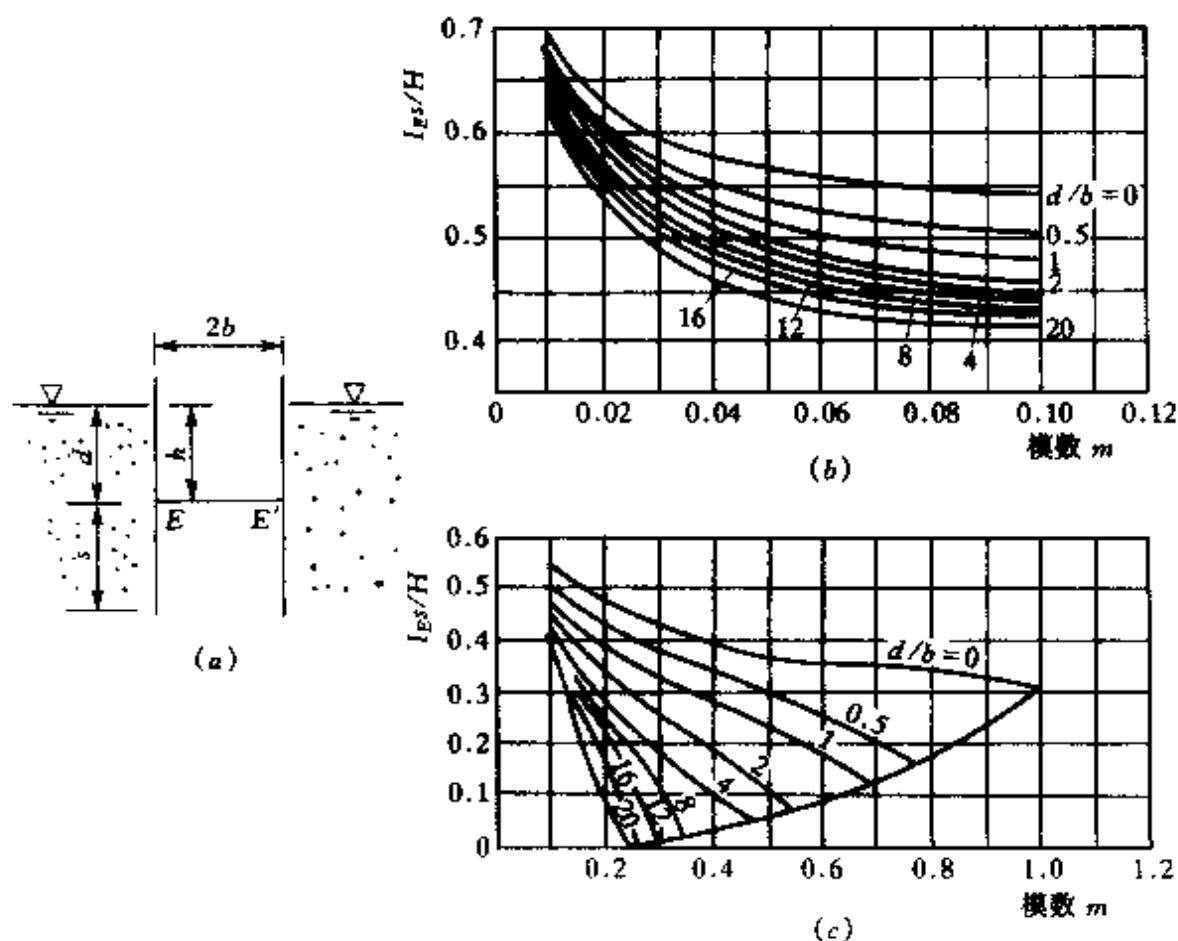


图 17

$$\text{解 } L = (5+5) + \sqrt{5^2 + 10^2} + \sqrt{5^2 + 10^2} + (5+5) = 42.36(\text{m})$$

$$x_D = 42.36 - (5+5) = 32.36 (\text{m})$$

$$\frac{x_D}{L} = \frac{32.36}{42.36} = 0.764$$

查表 $5\Delta\phi = 0$ 。故

$$h_D = [(0.84 - 0.68 \times 0.764) + 0] \times 1 + 20 = 20.320 (\text{m})$$

$$I_E = \frac{20.320 - 20.0}{10} = 0.032$$

根据有限元数值法在电子计算机上求解这一例题，得 $h_D = 20.291\text{m}$ ，并由计算机自动绘制流网图，由此得到

$$I_E = \frac{h_D - h_E}{DE} = \frac{h_D - h_2}{DE} = \frac{20.291 - 20}{10} = 0.0291$$

由此可知，两法相差甚微，本文提供的方法精确度是可信的，且计算十分方便，下面顺便提出按有限元数值法求得的各点水头 $h_O = 21$ (21) m, $h_A = 20.650$ (20.679) m, $h_B = 20.592$ (20.599) m, $h_C = 20.406$ (20.40) m, $h_D = 20.291$ (20.32) m, $h_E = h_2 = 20\text{m}$ 。括号内数值系根据式 (19) 求得。

十、开挖壕沟并带有两道板桩情况

可按图 17 所示求渗流出逸坡降^[3]。

例 6 如图 17 (a) 所示，已知 $h = 10\text{m}$, $d = 4\text{m}$, $b = 20\text{m}$, $s = 10\text{m}$ ，试求最大出逸渗流坡降 I_E 。

解 根据图 18 (a)， $\frac{s}{b} = 0.5$ ， $\frac{d}{b} = 0.2$ ，可查得 $m = 0.35$ ，再由图 17 (c)，由 $m = 0.35$ ， $\frac{d}{b} = 0.2$ ，可查得 $I_{Es}/h = 0.39$ ，故得 $I_E = 0.39h/s = 0.39$ (发生在图中 E 点处)。

以上我们介绍了各种常见闸坝地下轮廓线求渗流出逸坡降的计算方法，可供工程设计单位参考采用。应该指出，本文方法的适用范围为 $T \geq \frac{1}{2}L$ ，式中符号如图 19 所示。当 $T \geq \frac{1}{2}L$ 时，

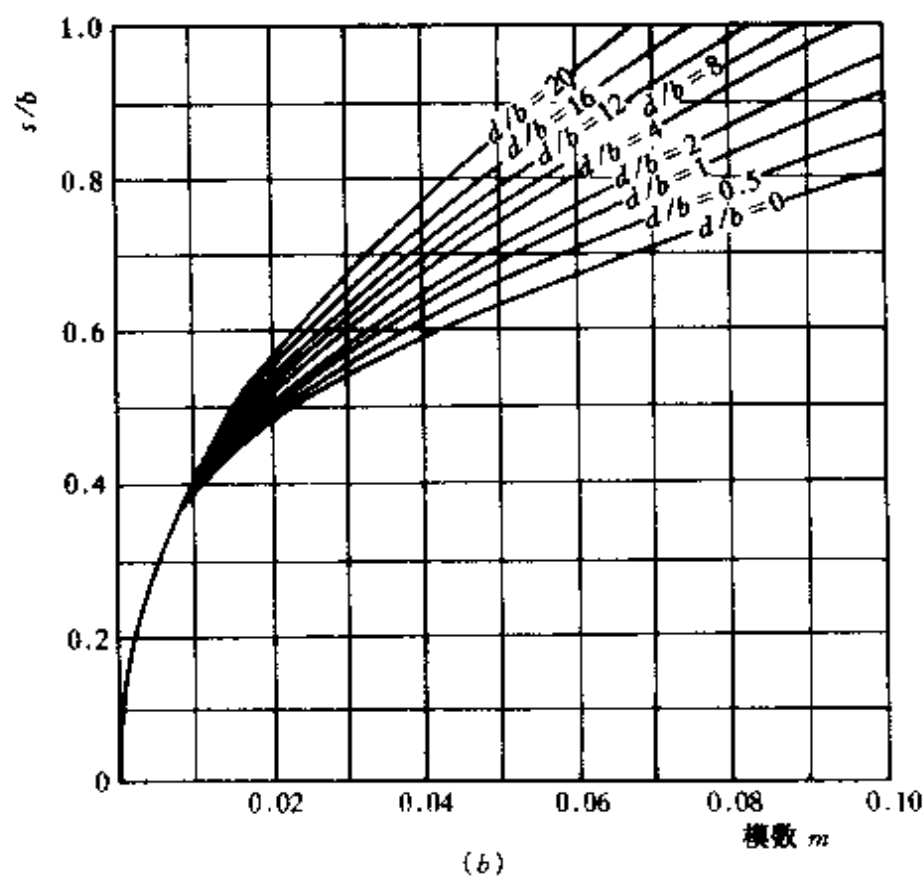
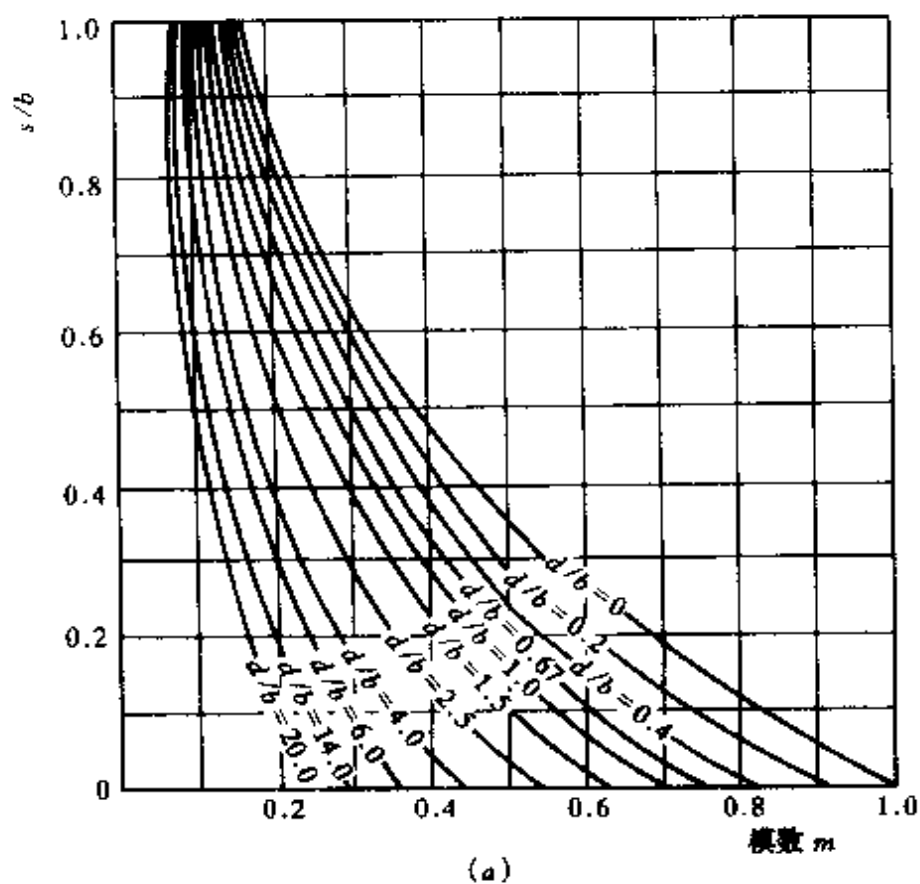


图 18

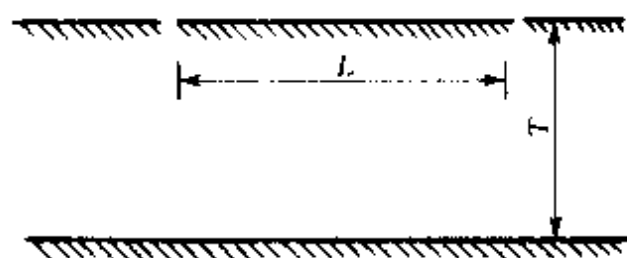


图 19

实质上就可视为无限深地基了。

参 考 文 献

- 1 华东水利学院. 水工设计手册. 第三卷. 北京: 水利电力出版社, 1984
- 2 B. N. C阿拉文, C. H. 努美罗夫. 滤流理论. 上册. 北京: 高等教育出版社, 1953
- 3 Milton E. Harr. Groundwater And Seepage. McGraw - Hill Book Company INC, 1962
- 4 沙金焯. 计算渗流扬压力的新方法. 江苏水利科技. 1981 (1)

堤坝背水侧渗流出逸坡降计算

在汛期高水位持续期间,堤坝背水坡及附近地面会由于渗流出逸而导致土体流失,如果不加控制,防患于未然,则必酿成险情,地基土壤最终被渗流淘空而使堤坝塌陷。因此,设计人员首先要注意这一问题,务必控制渗流出逸坡降,减少渗流出逸能量,避免地面及坡面发生渗透破坏。其控制原则是渗流出逸坡降 J 必须小于土的临界坡降 J_K (也是人们常指的土体抗渗强度),即

$$J < J_K$$

在众多水库土坝及江河大堤中,最担心背侧发生渗透破坏的是图 1 及图 2 两种坝型,图 1 为透水地基上的均质坝,图 2 为双层地基上的均质坝。这两种坝型也是实际工程中最常见的。

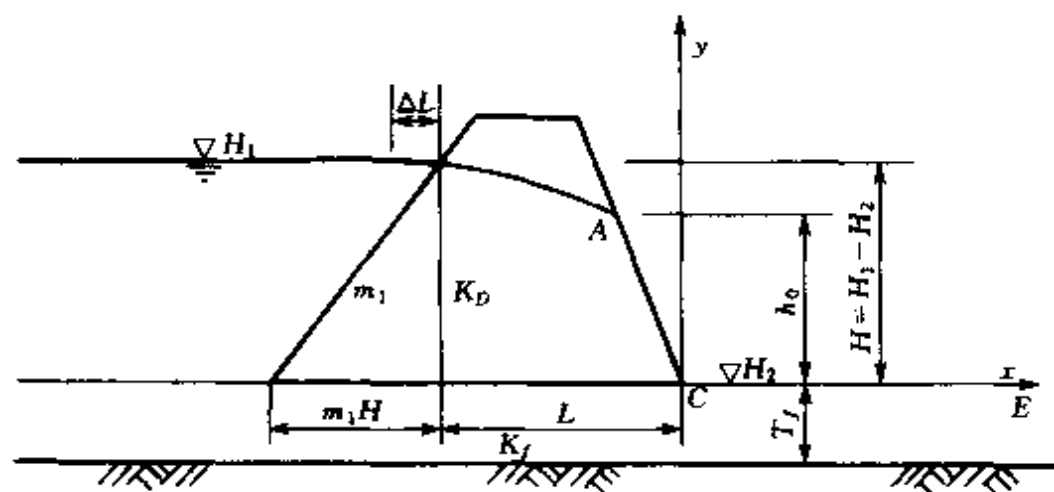


图 1

现在先讨论图 1 中有可能发生渗透破坏的地段 AC、CE。坝体的渗流从背水坡面 AC 段出逸,其出逸坡降 J 可按式 (1) 求出

$$J = \frac{1}{\sqrt{1+m_2^2}} \left(\frac{h_0}{y} \right)^{0.25} \quad (1)$$

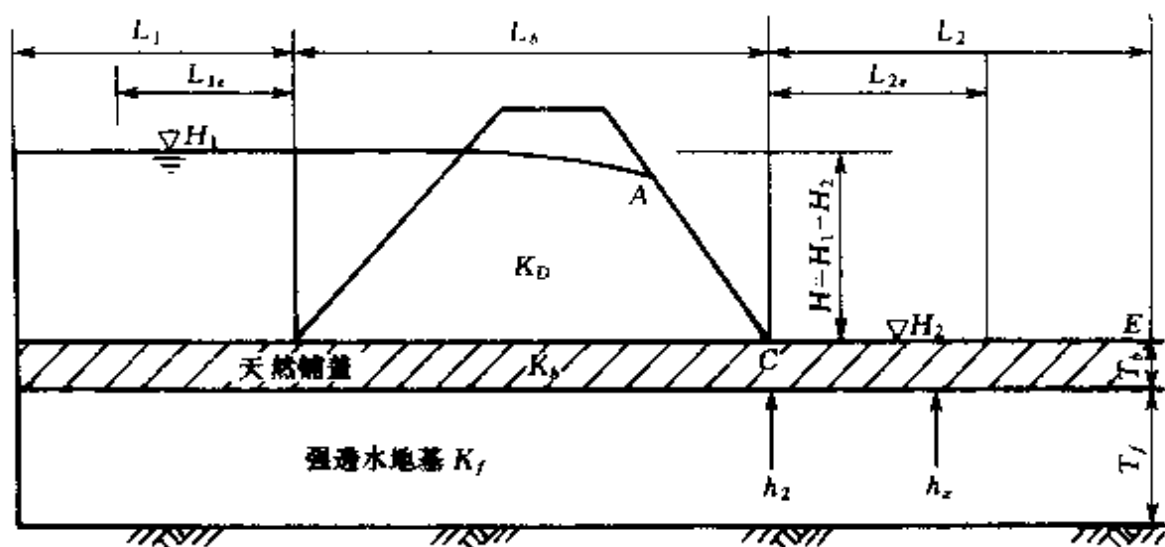


图 2

式 (1) 是根据 $T = \infty$ 时由前苏联谢斯塔可夫教授求得的, 但可近似应用于本节讨论的 T 为有限深的情况, 当 $y = h_0$ 时, 则 A 点的出逸坡降 J 为

$$J = \frac{1}{\sqrt{1 + m_2^2}} \quad (2)$$

当 $y = 0$ 时, 则 C 点的 $T = \infty$ 。

坝基的渗流从地面 CE 段出逸, 其出逸坡降可由前苏联努美罗夫求解方法演化而得^[1]

$$J = \frac{\pi (h_0 - H_2)}{2 T_f \left[\operatorname{arsh} \sqrt{\exp \left[\frac{\pi m_2 h_0}{T_f} \right]} - 1 \right] \sqrt{\exp \left[\frac{\pi x}{T_f} \right]} - 1} \quad (3)$$

图 1 中背侧地面无水, 则式 (3) 中 $H_2 = 0$; 在 C 点 $x = 0$, 则式 (3) $J = \infty$ 。

从发生渗透破坏的危害性来说, CE 段是最重要的, 此地段最易发生事故。而坝体渗流在 AC 段出逸则是正常的, 因为水库或大江大河在汛期高水位时, 堤坝背水坡必然会有渗流出逸。在 AC 段淌水, 如果淌清水则问题不大, 若淌浑水, 则必须铺设滤层。而 CE 段则必须严加防治, 防患于未然, 特别是在背水坡脚 C 点附近, 出逸坡降是很大的。

式 (3) 中含有浸润线逸出高度 h_0 ，此值大小取决于堤坝渗流量 q 值，因此在求 h_0 之前，先要求出图 1 的渗流量 q ，可按式 (4) 求之^[1]

$$q = q_D + \frac{(H_1 - H_2) T_f}{L + m_1 H_1 + 0.88 T_f} \quad (4)$$

q_D 为坝体渗流量，其值由前苏联巴甫洛夫斯基求得为

$$q_D = \frac{K_D H^2}{L_1 + \sqrt{L_1^2 - (m_2 H_1)^2}} \quad (5)$$

其中 $L_1 = L + \Delta L$ ，而 ΔL 为

$$\Delta L = \frac{m_1 H}{2m_1 + 1} \quad (6)$$

式 (4) 中第二项是坝基渗流量，将式 (5) 代入式 (4) 则得总渗流量 q 为

$$q = \frac{K_D H^2}{L_1 + \sqrt{L_1^2 - (m_2 H_1)^2}} + \frac{H T_f}{L + m_1 H_1 + 0.88 T_f} \quad (7)$$

式 (7) 就是根据巴甫洛夫斯基院士将坝身与坝基渗流分割开来互不干扰这一假定而得的。从理论上讲，这一假定不大正确，因为坝身渗流必然会有一部分流入坝基，这从流网图形来看也是很明显的。只有当坝基透水性比坝身透水性很大，坝身渗流量微不足道、可忽略不计时，式 (7) 才不会有什么误差。一般情况下，因为坝基透水性总是比坝身透水性大，故式 (7) 可用。另外，从实际情况来说，式 (7) 也是正确可用的，因为堤坝在施工中分层碾压，其水平方向渗透性 K_x 远大于垂直方向渗透性 K_y ，渗流容易在水平方向流动，不大会流入坝基，恰好符合了巴甫洛夫斯基的假定。

接下来再求 h_0 。一般情况下，地基透水性 K_f 总是比坝身透水性 K_D 大，也即是 $K_f > K_D$ ，此时可用式 (8) 求 h_0 ^[1]

$$h_0 = \frac{q}{\frac{K_D}{m_2} + \frac{K_f T_f}{m_2 h_0 + 0.44 T_f}} \quad (8)$$

式中 K_D 及 K_f 的单位为 m/d 。

式 (8) 求得的 h_0 是一个隐函数, 现将其演化为显函数

$$h_0 = \left\{ \sqrt{[K_f T_f (0.44 + m_2) - q m_2^2]^2 + 1.76 K_f T_f q m_2^2} - [K_f T_f (0.44 + m_2) - q m_2^2] \right\} / 2 K_f m_2 \quad (9)$$

将式 (7) 求出的 q 代入式 (9), 即可得到 h_0 , 然后再将 h_0 代入式 (3) 便能求出 $J = J(x)$ 了。在 CE 地段上, 每给出一个 x 值便可相应求出一个 J 值。

如果在图 1 中 $T = \infty$, 则 AC 段的出逸坡降 J 的计算式仍用式 (1), 而 CE 段的 J 为^[1]

$$J = \frac{1}{2 \sqrt{m_2}} \sqrt{\frac{h_0}{x}} \quad (10)$$

在 C 点 $x = 0$, 故 $J = \infty$ 。随着 x 的加大, J 值很快减小。

图 2 是建在双层地基上的堤坝。上层是天然铺盖层, 其透水性 K_b 很小; 下层是强透水层, 其透水性 K_f 很大, K_f/K_b 之比从 100 到 10000 甚至更大。渗流主要在下层中流动, 对堤坝背侧地面 CE 段的铺盖底面产生很大的渗透压力 h_x , 向上顶托。当水头差 ($H = H_1 - H_2$) 很大时, 就可能把该段铺盖托起, 而致灾情, 情况很是危险。

渗流在 CE 段的出逸坡降为

$$J = \frac{h_x - H_2}{T_b} \quad (11)$$

其中 h_x 经本书作者求得为

$$h_x = H_2 + (h_2 - H_2)e^{ax} - C_2(e^{ax} - e^{-ax}) \quad (12)$$

其中 a 为越流系数

$$a = \sqrt{\frac{K_b}{K_f T_f T_b}} \quad (13)$$

$$C_2 = \left[\frac{(h_2 - H_2)e^{aL_2}}{e^{aL_2} - e^{-aL_2}} \right] \quad (14)$$

在 C 点处的渗流压力为

$$h_2 = H_2 + \frac{H_1 - H_2}{L_{1e} + L_b + L_{2e}} L_{2e} \quad (15)$$

$$L_{1e} = \frac{\text{th}(aL_1)}{a} \quad L_{2e} = \frac{\text{th}(aL_2)}{a} \quad (16)$$

参 考 文 献

- 1 毛昶熙. 渗流计算分析与控制. 北京: 水利电力出版社, 1990

土的渗透变形及临界坡降计算

一、渗透变形的类型及判别方法

(一) 渗透变形的类型

渗透变形的形式及其发生发展过程，与地质条件、土粒级配、水力条件、防渗排渗措施等因素有关，通常可归结为下列4种类型：

(1) 管涌。在一定的渗流作用下，土体中的细颗粒沿着骨架颗粒所形成的孔隙管道的移动或被渗流带走，这种现象叫管涌，它发生在砂砾料中。

(2) 流土。在一定的渗流作用下，土体中的颗粒群同时起动而流失，它既可以发生在非粘性土中，也可发生在粘性土中。在非粘性土中的流土变形，表现为颗粒群的同时起动，诸如泉眼群、砂沸、土体翻滚最终被渗流托起。在粘性土中的流土变形，则表现为土块隆起、膨胀、浮动、断裂等现象。

(3) 接触冲刷。渗流沿着两种不同介质的接触面流动时，把其中颗粒层的细粒带走。这里所指的接触面，其方向是任意的。

(4) 接触流土。渗流垂直于两种不同介质的接触面流动时，把其中一层的细粒移入到另一层中去，例如反滤层的淤塞就是这种变形。

对流土来说，作用力是单位土体的渗透力；对管涌来说，作用力则为单个颗粒的渗透力。前者从渗流的层流条件导出，而后者则越出了层流的界限。这就显示出了质的不同，只是当土体中的细粒含量不断增加，直至将土体中骨架颗粒所形成的孔隙全部填满，形成一个实体时，管涌才转化为流土。土体孔隙中所含细粒的多寡，是影响渗透变形的关键，若孔隙中只有少量细粒，则细粒自由处在孔隙之中，只需在很小的渗流坡降作用下，细颗粒

便将由静止状态起动而随渗流流失。若孔隙中细粒不断增加，虽然仍处在自由状态，但因阻力增大，则需要较大一些的渗流坡降才足以推动这些细粒运动。若孔隙全为细粒所填满，此时孔隙中的砂粒就像一个微小体积的砂土那样，互相挤在一起阻力更大，渗流在这些砂粒中的运动与一般砂土中的渗流运动完全一样，因而要推动这个砂体的运动，便是上述的流土变形，需要更大的渗流坡降。

对于任何水工建筑物及地基而言，渗透变形的形式可以是单一形式出现，也可以是多种形式伴随出现于各个不同部位。因此不要因为某种形式的渗透变形出现，而忽视了其他部位可能出现的渗透变形。

(二) 渗透变形的判别

1. 用土料的不均匀系数 η 来判别

这个方法是前苏联的伊斯妥明娜提出来的，她认为在自下而上的渗流作用下，可用土的不均系数 η 作为判断

$$\begin{cases} \eta < 10 & \text{流土} \\ \eta > 20 & \text{管涌} \\ 10 < \eta < 20 & \text{流土或管涌} \end{cases} \quad (1)$$

实践证明，用不均匀系数 η 作为判别土料渗透变形形式的指标，还不能完全反映出土的渗透性能，因而也是不够精确的。事实上 $\eta > 20$ 的土料仍有可能为流土；而 $\eta < 10$ 的土料，一般来说，按上法判别则是较准的。

2. 用土体的孔隙直径与填料粒径之比来判别

巴特拉雪夫的研究证明，土体细颗粒 d 与土体平均孔径直径 d_0 之比如满足式 (2)

$$\frac{d_0}{d} \leq 1.8 \quad (2)$$

则该土体将是非管涌土，而若满足式 (3)

$$\frac{d_0}{d} \geq 1.8 \quad (3)$$

则该土体将是管涌土。

根据水工建筑物的类别、组织条件和要求，巴特拉雪夫建议管涌流失的细颗粒 d 可在 $d_3 \sim d_{10}$ 之间选择，如果细颗粒的流失不超过土体总量的 1% ~ 3%，巴特拉雪夫认为土体的强度和稳定不会被破坏。对于平均孔隙直径 d_0 ，巴特拉雪夫提出用式 (4) 计算

$$d_0 = 0.026 (1 + 0.15\eta) \sqrt{\frac{k}{n}} \quad (4)$$

式中： k 为渗透系数； n 为土体的孔隙率。

而巴甫契奇则提出

$$d_0 = 0.535 \sqrt[9]{\eta} \frac{n}{1-n} d_{17} \quad (5)$$

根据式 (4) 或式 (5)，结合式 (2)，可以得到流失细粒的直径为

$$d \leq 0.55 d_0 \leq 3\% \quad (6)$$

若将式 (4) 和式 (5) 代入式 (6)，则得两个表示非管涌土的条件式为

$$d_3 \geq 0.01 (1 + 0.15\eta) \sqrt{\frac{k}{n}} \quad (7)$$

$$\frac{d_3}{d_{17}} \geq 0.296 \sqrt[9]{\eta} \frac{n}{1-n} \quad (8)$$

根据南京水利院的试验资料认为，式 (7) 和式 (8)^[2] 均能用来近似确定出管涌土和非管涌土。

康特拉夫在他的著作中，提出了双峰土和单峰土。所谓双峰土就是指缺乏中间粒径的土，所谓单峰土则指连续级配的土。康特拉契夫用一个称之为水力当量孔径 d_0 来判别，其值按下式计算

$$d_0 = 0.214 \eta d_{50} \quad (9)$$

式中： η 为系数， $\eta = \frac{d_n}{d_{100-n}}$ ； d_n 为颗分曲线上含量为 n 的相应

粒径, d_{100-n} 为筛分曲线上含量为 $100-n$ 的相应粒径; 其中 n 为土体的孔隙率。

对于双峰土, 若当其水力当量孔径 d_0 为

$$\left. \begin{array}{ll} d_0 > (d_{70})_z & \text{危险性管涌} \\ d_0 < (d_{70})_z & \text{非危险性管涌} \end{array} \right\} \quad (10)$$

式中: $(d_{70})_z$ 表示土体中的填料颗粒为 d_{70} 。

对于单峰土, 康特拉契夫认为是非危险性管涌土, 而若当其骨架孔隙率 $n_{ck} > 50\%$ 者, 则为非管涌土, 即

$$\left. \begin{array}{ll} n_{ck} > 50\% & \text{流土} \\ n_{ck} < 50\% & \text{非危险性管涌} \end{array} \right\} \quad (11)$$

上述康特拉契夫对双峰土的骨架颗粒的区分界限, 是取其微分曲线上的断裂点, 如图 1 所示的 A 点, 凡大于断裂点粒径的颗粒为骨架颗粒, 凡小于断裂点粒径的颗粒则为填料颗粒。

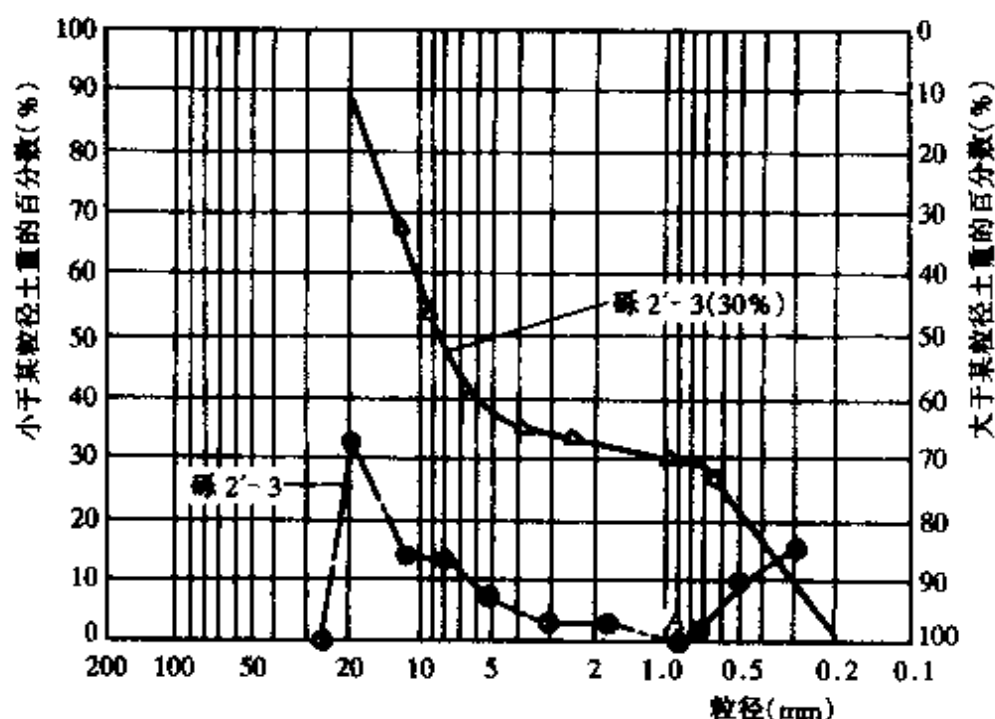


图 1 土的筛分曲线及微分曲线

3. 用土体的细粒含量 P_z 来判别

随着试验研究的不断深入, 人们越来越认识到影响土体渗透性能和渗透变形的因素中, 细粒含量这一因素是主要的。马斯洛

夫指出,砂砾料的渗透性主要取决于细料填充粗料孔隙的程度,填充得愈完全,则渗透性愈小。伊斯妥明娜也提到细料对粗料孔隙的填充程度,会引起对渗透变形形式的影响。前面提到的康特拉契夫的判别式〔式(10)、式(11)]也考虑到细料对粗料孔隙的填充程度。但是上述学者都没有对此作过详细的论述。我国学者对此曾作了较为深入的研究,下面择要作介绍。

(1) 北京水利科学研究院刘杰根据细粒(填料颗粒)的体积等于粗料(骨架颗粒)孔隙体积的原则,得到细粒含量 P_z 为

$$P_z = \frac{\gamma_{d1} n_2}{(1 - n_2) \gamma_{s2} + \gamma_{d1} n_2} \quad (12)$$

式中: γ_{d1} 为细粒本身的干容重; n_2 为粗粒本身在密实状态下的孔隙体积(在细粒刚填满时,相当于单位体积混合料内细粒的体积); γ_{s2} 为粗料的土粒容重。

式(12)是按理想情况下得到的,从北京水科院的试验中说明了实际中天然的缺乏中间粒径的砂砾料的细粒含量值 P'_z , 一般情况下大于按式(12)中求得的 P_z , 因此在式(12)中加一修正值是适宜的,于是得到 P'_z 值的计算公式

$$P'_z = P_z + \Delta P_z = \frac{\gamma_{d1} n_2}{(1 - n_2) \gamma_{s2} + \gamma_{d1} n_2} + \frac{74}{\left(\frac{D_{15}}{d_{85}}\right)^{1.4}} \quad (13)$$

式中: D 、 d 分别表示骨架和填料的粒径。

按式(13)计算结果与试验结果很接近。因此对于天然的缺乏中间粒径的砂砾石,其粗料孔隙被细料所填充的程度,可以用式(13)作为判别标准,如果实有的细粒含量小于式(13)中的 P'_z , 则说明其粗料孔隙尚未被细料完全填满;如大于计算值 P'_z , 则说明粗料孔隙全被细料充满。为了便于判别,刘杰提出对于缺乏中间粒径的砂砾料,应以细粒含量作为判断

$$\left. \begin{array}{ll} P_z > 35\% & \text{流土} \\ P_z < 25\% & \text{管涌} \\ 25\% < P_z < 35\% & \text{两者均可} \end{array} \right\} \quad (14)$$

上述方法只适用于缺乏中间粒径的砂砾料, 其骨架颗粒 (即粗料) 和填料颗粒 (即细料) 的区分界限, 仍是以微分曲线上的断裂点粒径为界。

(2) 南京水利科学研究院沙金煊根据填料充满骨架孔隙时发生流土这一概念认为必然成立下式^[4] (图 2):

$$n_z = \frac{n}{n_{ck}} \quad (15)$$

式中: n_z 为填料本身的孔隙率; n_{ck} 为骨架本身的孔隙率; n 为包括骨架和填料一起在内的混合料的孔隙率。

试验表明, 发生流土的土体, 其 n_z 与 n_{ck} 值很为接近, 见表 1 所示。

表 1 n_{ck} 值和 n_z 值

n_{ck}	0.433	0.494	0.600	0.454	0.438	0.491	0.431	0.464	0.434	0.680	0.553
n_z	0.415	0.405	0.370	0.465	0.420	0.406	0.430	0.434	0.415	0.355	0.400

由表 1 可知, 两者互为接近, 因此可近似假定 $n_z = n_{ck}$, 于是式 (15) 化为

$$n = n_{ck}^2 \quad (16)$$

又因骨架含量

$$P_{ck} = \frac{\text{骨架重}}{\text{总重}} = \frac{(1 - n_{ck})\Delta_{ck}}{(1 - n)\Delta} = \frac{1 - n_{ck}}{1 - n}$$

式中: Δ_{ck} 为骨架颗粒比重; Δ 为土粒比重, 可近似令 $\Delta_{ck} \approx \Delta$ 。可得

$$n_{ck} = 1 - P_{ck}(1 - n) = (1 - P_{ck}) + nP_{ck}$$

即
$$n_{ck} = P_z + nP_{ck} = P_z + n(1 - P_z) \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (16) 中得

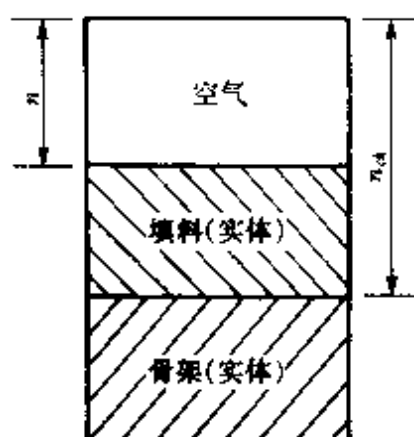


图 2 土体中所含颗粒和空气的成分

$$P_z = \frac{\sqrt{n} - n}{1 - n} \quad (18)$$

即

$$P_z = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \quad (19)$$

式 (19) 是理论值, 根据试验资料修正后得

$$P_z = \alpha \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \quad (20)$$

式中: α 为修正系数, $\alpha = 0.95 \sim 1.00$ 。

由此可得到下列判别式

$$\left. \begin{array}{ll} P'_z > P_z & \text{流土} \\ P'_z < P_z & \text{管涌} \end{array} \right\} \quad (21)$$

式中: P'_z 为实有土体的细粒含量; P_z 为按式 (20) 算出的细粒含量。

这个方法的骨架和填料的区分粒径, 也是采用 2mm 粒径为界。为了方便起见, 式 (20) 可以用图 3 列出。

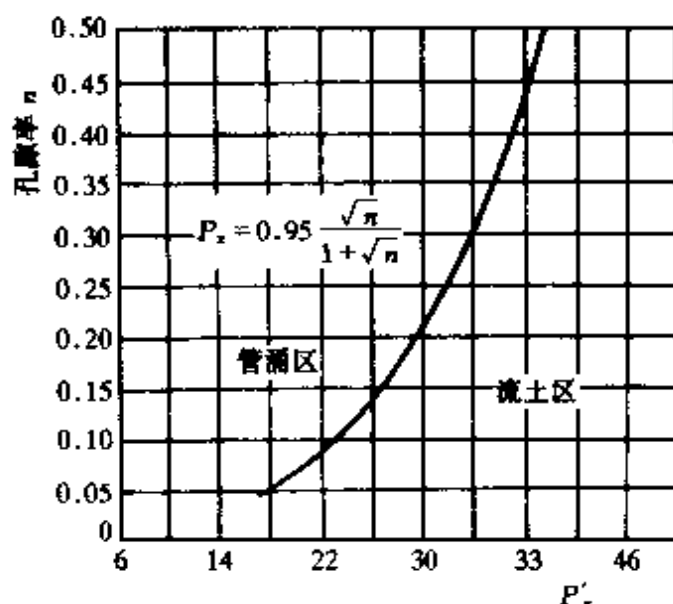


图 3 判别流土管涌图

二、渗流自下而上时管涌和流土的计算

(一) 流土临界坡降的计算

1. 太沙基公式

根据单位体积的土体在水中的重量和作用在该土体上的透渗力相平衡, 得到流土的临界坡降 J_B 为

$$J_B = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) (1 - n) \quad (22)$$

式中: γ_s 为土粒容重, 一般取 $\gamma_s = 2.65 \text{g/cm}^3$; γ 为水容重, $\gamma = 1 \text{g/cm}^3$; n 为土体的孔隙率。

由式 (22) 求得的 J_B 值偏小, 大约小于试验值 15% ~ 25%, 因而采用该式作为设计是偏于安全的, 当然也是偏于保守的, 西方国家仍用式 (22)。

2. 扎马林公式

$$J_B = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) (1 - n) + 0.5n \quad (23)$$

此式结果与试验值较为一致, 它是在太沙基公式的基础上进行了修正, 加上 $0.5n$ 这一项, 这是一个经验数值, 其理论意义不甚明确, 前苏联多半采用此式。

3. 南京水利科学研究所公式

南京水利科学研究所先后提出两个计算流土临界坡降 J_B 的公式, 1960 年王伟在太沙基及斯罗波田公式的基础上, 再增加了一个由于单位土体自重而引起的侧压力所产生的摩阻力, 得到下列公式

$$J_B = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) (1 - n) (1 + \xi \tan \phi) \quad (24)$$

式中: ξ 为土的侧压力系数; ϕ 为土的内摩擦角。

通过试验资料求得式 (24) 中的 $(1 + \tan \phi) \approx 1.17$ 。

式 (24) 计算结果与扎马林公式结果较接近。1977 年沙金焯进一步考虑了土体颗粒的形状阻力, 得到了下列公式

$$J_B = \alpha \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) (1 - n) \quad (25)$$

式中: α 为土体颗粒的形状系数, 亦即不规则颗粒与等体积球形颗

粒表面积的比值,对于各种砂粒(如粗砂、中砂、细砂、粉砂等)根据明滋、卡门等试验资料, $\alpha = 1.16 \sim 1.17$;对于有锐角的不规则颗粒, $\alpha = 1.5$;对于各种颗粒混合的砂砾料可近似地取 $\alpha = 1.33$ 。针对不同种类的土体,可采用相应的 α 值代入式(25)计算。

(二) 管涌临界坡降的计算

计算管涌临界坡降的公式,迄今为止还不大成熟,这主要是:一方面发生管涌的渗流机理,理论上还没有很好解决;另一方面试验数据也甚难测准,而且对管涌发生的鉴别也缺乏一个明确的标准。尽管是这样,但作为计算,得出一个数据供初步设计之用还是需要的。管涌临界坡降值是标志着土体中的细粒开始流失,表明了水工建筑物或地基某处出现了薄弱环节。

研究管涌临界坡降 J_c 有不同的方法。一种是通过试验,积累资料,绘制临界坡降 J_c 与某些因素之间的关系曲线,例如绘制 J_c 与渗透系数 k 之间的关系曲线,或 J_c 与细粒含量 P_z 之间的关系曲线图。

图4、图5是北京水利科学研究院根据试验资料绘制的。这种方法纯粹是经验关系,局限性较大,除非具有大量试验资料,否则根据部分试验资料点绘,很难发现规律性。

另一种方法是根据单个颗粒(通常称之为细粒)在土体中的受力情况,从理论上进行分析,推导出发生管涌的临界坡降计算公式^[4]。

南京水利科学研究院沙金煊公式如下。

在总结国内外试验研究的基础上,求得了作用在土体中单个颗粒 d 上的渗透力为

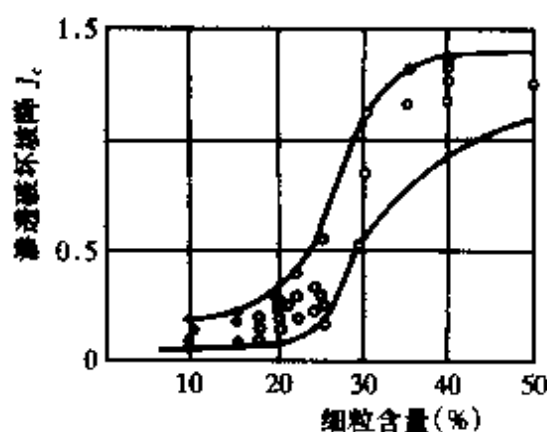
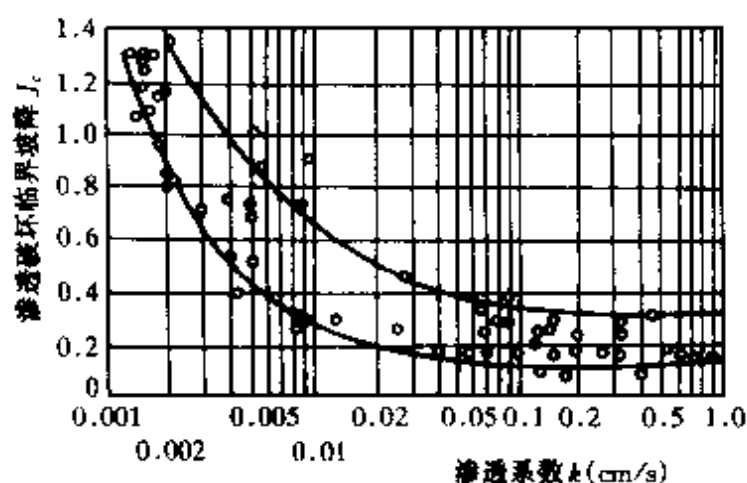


图4 细粒含量与 J_c 的关系曲线

$$F = \gamma J \pi d^2 \frac{d_{3\kappa}}{6\alpha(1-n)} \quad (26)$$

图 5 渗透系数与 J_c 的关系曲线

式中： $d_{3\pi}$ 为等效粒径，即将天然土体中各不同粒径 d_i 的土颗粒化为具有同一粒径 $d_{3\pi}$ 的土体而阻力不变。

$$d_{3\pi} = 1 / \sum \frac{P_i}{d_i} \quad (27)$$

式中： P_i 为粒径为 d_i 时所对应的百分含量，可由颗分曲线上查得。

式 (27) 中 $d_{3\pi}$ 值也可用式 (28) 表示

$$d_{3\pi} = \sqrt{\frac{36 A \nu k (1-n)^2}{g n^3}} \quad (28)$$

式中： A 为层流阻力系数， $A = 5.1$ ； ν 为水的粘滞系数； g 为重力加速度， $g = 981 \text{ cm/s}^2$ ；其他符号同前。

式 (28) 是根据明兹的阻力系数和雷诺数之间的关系而得到的。

式 (26) 中的 α 是表示颗粒的形状系数，即任意形状的天然土颗粒与等体积球形颗粒两者的表面积之比值，由于球表面积总是小于同体积不规则形状颗粒，故形状系数 α 恒大于 1.0，根据各家试验资料，列于表 2。

表 2 形状系数 α 值

颗粒名称	球 粒	河 沙	海 砂	锐角石英砂	颗粒异常杂乱
α	1.0	1.17	1.17~1.16	1.50~1.67	1.70~1.87

颗粒在水中的自重 $G = \frac{\pi d^3}{6} (\gamma_s - \gamma)$, 将此自重 G 和式 (26) 中的渗透力 F 相平衡, 得到了发生管涌的临界坡降计算公式为

$$J_c = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) (1 - n) \alpha \frac{d}{d_{3\sigma}} \quad (29)$$

再将式 (28) 中的 $d_{3\sigma}$ 代入式 (29), 并采用一些习用数据 $\gamma_s = 2.65 \text{ g/cm}^3$, $\gamma = 1 \text{ g/cm}^3$, $g = 9.81 \text{ cm/s}^2$, $\nu = 0.0116 \text{ cm}^2/\text{s}$, $\alpha = 1.165$ 等代入, 经过一些演算, 最后得到管涌临界坡降公式

$$J_c = 42 \frac{d}{\sqrt{\frac{k}{n^3}}} \quad (30)$$

式中: d 为管涌时的流失颗粒之粒径, 一般取 d_3 计算, 单位为 cm ; k 为渗透系数, 单位为 cm/s ; n 为土体之孔隙率。

为了探求不同流态时发生管涌的临界流速或临界坡降, 原作者将式 (26) 化为

$$F = C \pi d^2 \frac{\gamma \nu^2}{g} \frac{1}{\alpha n^3} \quad (31)$$

$$C = \frac{A}{R_c} + B \quad (32)$$

式中: C 为渗流阻力系数; A 为层流阻力系数, $A = 5.1$; B 为紊流阻力系数, 其值按下式求之

$$\sqrt{B} = \left(\frac{\gamma \tau}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\gamma \tau}{2} \right)^2 + \eta_{np}} \quad (33)$$

其中 γ 、 τ 、 η_{np} 等参数见表 3、表 4 所示。

表 3 γ 随孔隙率 n 的变化表

n	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
γ	64	45	33	25	19.5	15

表 4 η_{sp} 及 τ 值

粒径 d (mm)	0.025	0.034	0.046	0.063	0.085	0.091	0.101
η_{sp}	0.755	0.618	0.45	0.35	0.333	0.334	0.214
τ	0	0	0.0103	0.0185	0.0151	0.0135	0.0174
粒径 d (mm)	0.137	0.218	0.329	0.366	0.517	0.541	0.57
η_{sp}	0.245	0.195	0.195	0.195	0.195	0.200	0.172
τ	0.0135	0.0158	0.0172	0.0262	0.0287	0.0208	0.026

将式 (32) 代入式 (31) 中, 并再令 $F = G$, 得到不同渗流态时发生管涌的临界流速公式

$$BV^2 + MV - N = 0 \quad (34)$$

其中

$$M = \frac{6A\nu(1-n)}{d_{3\sigma}} \quad (35)$$

$$N = \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) an^3 gd_3 \quad (36)$$

作为式 (34) 的特殊情况, 例如当作层流运动时 (一般流速很缓慢) 可令式 (34) 中的 $B = 0$, 于是得到

$$V = \frac{N}{M} \quad (37)$$

将式 (35)、式 (36) 代入式 (37), 同样可得

$$J_c = 42 \frac{d}{\sqrt{\frac{k}{n^3}}} \quad (38)$$

此即还原成式 (30)。

若当渗流流速较大, 特别是在松散的大颗粒介质中的渗流运动时, 此时流态将转变为紊流, 可令式 (35) 中的 $A = 0$, 则得紊流区管涌的临界流速

$$V_c = \sqrt{\frac{1}{6B} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) n^3 gd_3} \quad (39)$$

如果直接求解式 (34), 则得任意渗流态时的管涌临界流速

$$V_c = \frac{1}{2B} (\sqrt{M^2 + 4BN} - M) \quad (40)$$

一般来说, 计算管涌目前均用层流公式。上述层流和紊流的区分界限用临界雷诺数 Re 来表示 ($Re = 7 \sim 9$), 其计算方法可按巴甫洛夫斯基公式

$$Re = \frac{1}{0.75n + 0.28} \frac{Vd}{\nu} \quad (41)$$

式中: V 为渗流断面流速; ν 为水的运动粘滞系数; d 为土的有效粒径。

若按式 (41) 算出的 Re 大于 $7 \sim 9$ 则为紊流, 小于 $7 \sim 9$ 则为层流。区分了流态后, 就可选择相应的公式计算 J_c 或 V_c 。如利用式 (40) 则可不必区分流态。

参 考 文 献

- 1 Истомина, В. С. . Фильтрационная Устойчивость Грунтов. Госстройиздат. 1957
- 2 南京水利科学研究所. 土坝渗流分析. 1980
- 3 刘杰. 缺乏中间粒径砂砾石的渗透稳定特性. 见: 水利水电科学研究院论文集. 1961
- 4 沙金煊. 多孔介质中的渗流和管涌. 水利水运科学研究. 1981 (3)
- 5 蒋国澄, 刘宏梅. 砂砾地基上土坝的渗流控制. 水利学报. 1962 (1)
- 6 明滋, 舒尔别特. 粒状材料水力学. 北京: 水利出版社, 1957
- 7 毛昶熙. 电模拟试验及渗流研究. 北京: 水利出版社, 1981
- 8 Sherard, J. L. , et al. . Piping in the Earth Dams of Dispersive Clay. Performance of Earth and Earth - Supported Structures. Vol. 1. Part1. 1972
- 9 钱家欢. 分散性土作为坝料的一些问题. 岩土工程学报. 1981 (3). 1
- 10 南京水利科学研究所水工研究所. 七一水库土坝渗流计算及粘土铺盖击穿试验报告. 1986. 10
- 11 Decker, R. A. , et al. . Laboratory Study of Hydraulic Facturing in Clay. Proc. 10th International Conference Soil Mechanics and Foundation Engineering. 1981



- 12 大卫登可夫. 堤坝渗流与稳定性. 见: 南京水利科学研究所渗流译文汇编. 第7辑. 1973
- 13 Vaughan, P. R., Soares, H. F., Design of Filters for Clay Cores of Dams. Proc. ASCE. Vol. 108, GT1. 1982.

多孔介质中的管涌研究

一、作用在单个颗粒上的渗透力

设有一土体，高为 l ，截面积为 a ，渗流由下向上，则作用在该土体上的动水压力 P 为

$$P = a\gamma_w\Delta h \quad (1)$$

式中： γ_w 为水容重； Δh 为渗流通过该土体的水头差。

由水力学原理可知，水流在管道内流动时，其作用力必然与水流和管壁薄膜间的摩阻力相平衡，今若以 τ_0 代表单位面积摩阻力， S 代表孔隙管道的总表面积，则渗流通过此土体孔隙管道的总阻力 τ 为

$$\tau = \tau_0 S \quad (2)$$

根据作用力 P 与总阻力 τ 相平衡，则得

$$\tau_0 = a\gamma_w\Delta h / S \quad (3)$$

这里 τ_0 在数值上是渗流对单位管壁面积的作用力而方向则相反。若近似地假定土体中任一颗粒具有球形表面积（粒径为 d ），则渗流对此颗粒的作用力，即作用在单个颗粒上的渗透力为

$$f = a\gamma_w\Delta h \pi d^2 / S \quad (4)$$

由于土体是多粒径级的颗粒群组成，故总表面积 S 为

$$S = 6(1 - n)al / d_{3\kappa} \quad (5)$$

实际上，颗粒并非球形，故式（5）中的颗粒总表面 S 应乘上一个形状系数 α 使之尽可能符合天然状态的总面积

$$S = 6\alpha(1 - n)al / d_{3\kappa} \quad (6)$$

式中： n 为土体孔隙率； $d_{3\kappa}$ 为土体的等效粒径；形状系数 α 根据明滋^[1]的试验资料，对于各种砂粒 $\alpha = 1.16 \sim 1.17$ ，对于锐角颗粒

$\alpha = 1.50 \sim 1.67$ 。今以式(6)代入式(4),则得渗透力 f 为

$$f = \gamma_w J \pi d^2 d_{3\kappa} / 6\alpha(1-n) \quad (7)$$

式中: J 为渗流坡降, $J = \Delta h / l$ 。

二、管涌的临界坡降

静止颗粒自由处于孔道中,当作用在其上的渗透力等于该颗粒在水中的自重 G 时,将由静止转化为运动状态,此时

$$f - G = 0 \quad (8)$$

$$G = \pi d^3 (\gamma_s - \gamma_w) / 6 \quad (9)$$

式中: γ_s 为土粒容重,以式(7)、式(9)代入式(8)则得管涌临界坡降

$$J_c = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_w} - 1 \right) (1-n) \alpha d / d_{3\kappa} \quad (10)$$

若为坝基内部水平渗流所引起的水平管涌,则其临界坡降

$$J_H = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_w} - 1 \right) (1-n) \alpha d \operatorname{tg} \phi / d_{3\kappa} \quad (11)$$

式中: $\operatorname{tg} \phi$ 为土的内摩擦系数。以上各式中的等效粒径 $d_{3\kappa}$ 根据文献[1]可得

$$d_{3\kappa} = \sqrt{\frac{36 A \nu k (1-n)^2}{g n^3}} \quad (12)$$

式中: ν 为液体的运动粘滞系数; k 为渗透系数; A 为层流阻力系数, $A = 5.1^{[1]}$ 。将式(12)代入式(10)并采用一些习用数据 $\gamma_w = 1 \text{ g/cm}^3$, $\gamma_s = 2.65 \text{ g/cm}^3$, $g = 981 \text{ cm/s}^2$, $\nu = 0.0116 \text{ cm}^2/\text{s}$, $\alpha = 1.165$, 则得管涌临界坡降的近似公式^[2]

$$J_c = 42 d / \sqrt{k/n^3} \quad (13)$$

式中: d 为管涌时被冲动细粒粒径,根据试验观测可取 d_3 , 计算时 k 的单位为 cm/s , d_3 的单位为 cm 。

三、不同流态的渗透力及管涌的临界值

如同水力学中管流一样,渗流的阻力系数 η 和雷诺数 Re 可

表示为^[1]

$$Re = \gamma_w V d_{3\pi} / 6(1-n)\mu g \quad (14)$$

$$\eta = P n^3 g d_{3\pi} / 6(1-n)\gamma_w V^2 \quad (15)$$

式中各量的尺度为: γ_w — $[FL^{-3}]$; V — $[LT^{-1}]$; μ — $[FTL^{-2}]$; g — $[LT^{-2}]$; P — $[FL^{-2}]$ 。今以式(15)代入式(7), 因 $\frac{P}{L} = \gamma_w J$, 于是可得不同流态时作用在单个颗粒上的渗透力 f 为^[2]

$$f = \eta \pi d^2 \gamma_w V^2 / g n^3 a \quad (16)$$

式中: V 为渗流断面平均流速; 其他符号同前。

分析式(16)不难看出, 它实质上表达了多孔介质中上升液流绕静止颗粒流动的阻力通式, 其 η 与 Re 的关系见图 1。

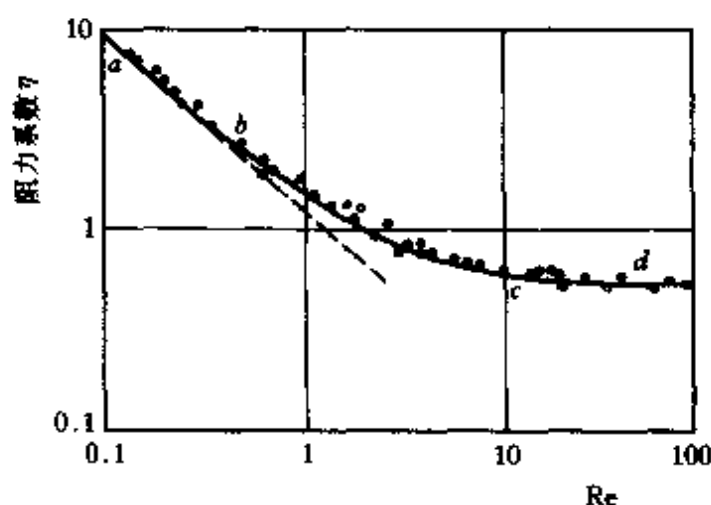


图 1

图 1 中曲线 $abcd$ 代表各流态时 η 与 Re 的关系, 分析这条曲线可近似表示为式 (17)^[1]

$$\eta = \frac{A}{Re} + B \quad (17)$$

式中的紊流阻力系数, 明滋给出为

$$\sqrt{B} = \left(\frac{\gamma \tau}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\gamma \tau}{2} \right)^2 + \eta_{np}} \quad (18)$$

其中 γ 、 τ 、 η_{np} 各参数由表 1、表 2 给出。

表 1

孔隙率 n (%)	25	30	35	40	45	50
γ	64	45	33	25	19.5	15

表 2

粒径 d (mm)	0.025	0.034	0.046	0.063	0.0847	0.0907	0.101
η_{np}	0.755	0.618	0.450	0.350	0.333	0.334	0.214
τ	0	0	0.0103	0.0185	0.0151	0.0135	0.0174
粒径 d (mm)	0.137	0.218	0.329	0.366	0.517	0.541	0.870
η_{np}	0.245	0.195	0.195	0.195	0.195	0.200	0.172
τ	0.0135	0.0158	0.0172	0.0262	0.0287	0.0208	0.0259

对于砂粒的 τ 值, 明滋建议取平均值 $\tau = 0.019$ 。

今以式 (17) 代入式 (16) 则得^[2]

$$f = \left(\frac{A}{Re} + B \right) \pi d^2 \gamma_w V^2 / g a n^3 \quad (19)$$

此即不同流态的渗透力, 以此和式 (9) 平衡, 则得

$$BV^2 + MV - N = 0 \quad (20)$$

其中

$$M = 6A\nu(1-n)/d_{\text{se}}$$

$$N = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_w} - 1 \right) a g n^3 d / 6$$

若为层流时, 则可在式 (20) 中令 $B = 0$, 于是得 $MV - N = 0$ 。解之并代入一些习用数据, 则同样可得式 (13)。若为紊流时, 则 $A = 0$, 即 $M = 0$, 于是得到紊流管涌临界流速

$$V_c = \sqrt{\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_w} - 1 \right) g n^3 d / 6B} \quad (21)$$

顺便指出, 若令 $n = 1$ 则意味着多孔介质转化为水体, 并由式 (18) 得 $B = \eta_{np} = \eta_{3T} / \pi^{[1]}$, 代入式 (21), 则得^[2]

$$V_c = \sqrt{\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_w} - 1\right)gd\pi/6\eta_{3T}} \quad (22)$$

式(22)表示了无限液体中上升液流绕静止颗粒的紊流流速,也就是泥沙理论中紊流区颗粒沉速公式^{[3][4]},显然式(22)与式(23)相同

$$V_c = \sqrt{4\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_w} - 1\right)gd/3c_w} \quad (23)$$

式中: c_w 为紊流区阻力系数, $c_w = 0.43$ ^{[3][4]}。而式(22)中的 $\eta_{3T} = 0.159$ ^[1] (当为球粒时), $\pi = 3.14$, 因而式(22)和式(23)给出同一结果。

以上我们分别讨论了层流与紊流这两种特殊情况的管涌临界值,若欲以一般通式表示管涌的临界值,则可直接解式(20)而得^[2]

$$V_c = \sqrt{M^2 + 4BN} - M \quad (24)$$

众所周知,对于各种砂土(例如粗砂、中砂、细砂、粉砂、中细砂等),其渗透变形为流土。因为砂粒基本上可认为是均一粒径的,故式(10)中的 $d_{\text{sk}} = d$, 于是得到流土的临界坡降公式^[2]

$$J_B = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_w} - 1\right)(1-n)\alpha \quad (25)$$

式(25)和太沙基流土公式相比,仅差 α 倍 ($\alpha = 1.16 \sim 1.17$),而太沙基公式正好偏少 20% 左右,因而按式(25)将比太沙基公式给出更加精确的结果。

一般说来,渗流多半为层流。因而可采用式(13)、式(25)分别计算管涌和流土的临界值,不必按式(24)计算。经用大量试验资料验证^[5],式(13)的精确度很好,见图2,优于国内外现有同类公式^[6],且计算很方便。

四、粘性土的流土临界坡降

众所周知,管涌是发生在砂砾料中,细颗粒土在粗颗粒土形

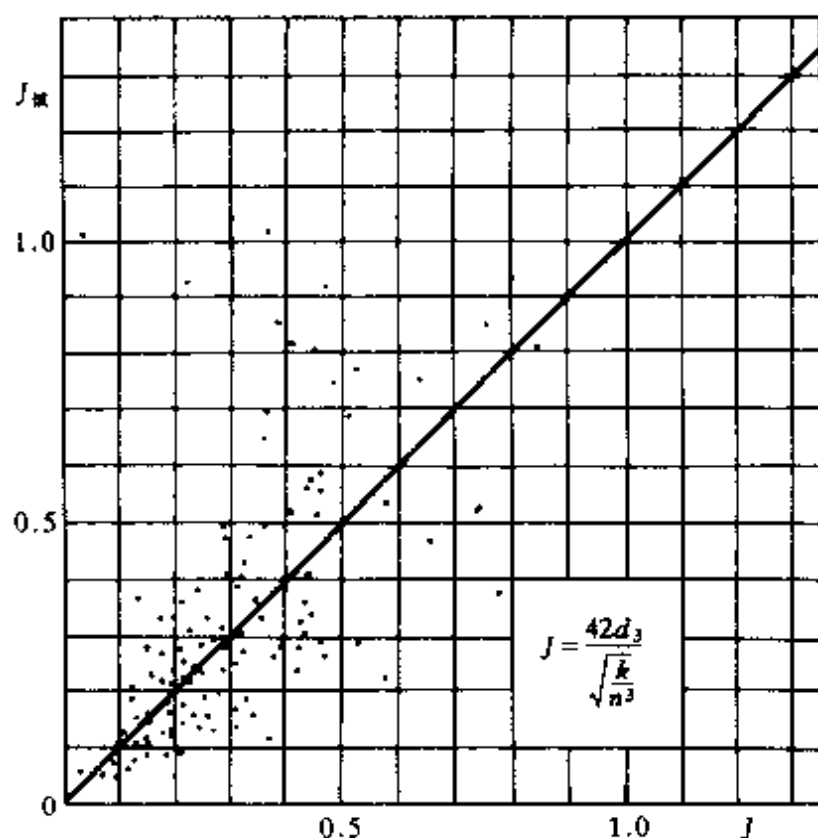


图 2

成的孔隙通道内被渗流带走；而流土则完全是另一种现象，它发生在粘性土中或颗粒均匀的非粘性土中，它的发生是一大群颗粒同时被渗流冲走，瞬间就会将地基土淘空。堤坝背侧发生的渗透破坏，就是这种流土（但现在社会上不分管涌流土，统统叫管涌）。

迄今为止，还没有推求流土临界坡降的计算公式，前面提到的，虽是求流土临界坡降，但也只是求非粘性土的流土临界坡降，即是著名的太沙基公式。为什么粘性土流土临界坡降公式难求？这是因为粘性土具有凝聚力，它将力图阻止流土的发生。所以在建立力平衡方程时，必须把这个问题考虑进去。麻烦也就出在这个问题上，因为发生流土时，人们无法预知流土的体积是什么形状，因而也就没法计算出它的周界面积，故而参与力平衡方程中的凝聚力值就求不出来了。土力学大师太沙基教授早就曾指出，在计算流土的临界坡降，当发生大面积的流土时，可以不考

虑凝聚力，但我们找不到他的论证根据。从下面推导中也许能说明太沙基的论断是可信的。

我们知道，在同样大小面积的各种几何形状中，只有圆面积的周界长度 $2\pi R$ (R 是圆的半径) 是最短的，因而它与周界的接触也是最短的，换句话说，圆的周界具有最小阻力。那么圆柱体的周界 ($2\pi RT_b$) 也应是具有最小阻力的接触面积了，于是可列出流土的平衡方程

$$\pi R^2 \gamma \Delta h = \pi R^2 T_b (\gamma_s - \gamma)(1 - n) + 2\pi R T_b C \quad (26)$$

式中： γ 为水容重； Δh 为作用在流土土体的水头差； γ_s 为土的容重； n 为土的孔隙率； T_b 为土柱体的高度； πR^2 为土柱体的圆面积。式 (26) 经过演化后最终得到粘土流土的临界坡降公式

$$J_B = (\Delta_s - \Delta)(1 - n) + \frac{2C}{\gamma R} \quad (27)$$

式中： C 为单位面积凝聚力； Δ_s 为土粒比重，一般为 2.65。显然，式 (27) 中的 R 是一个未知值，故式 (27) 无法具体计算，但可看出， R 愈大，则 $\frac{2C}{\gamma R} \rightarrow 0$ ，表明了可不考虑凝聚力。因而可知在发生大面积流土时仍可用著名的太沙基公式

$$J_B = (\Delta_s - \Delta)(1 - n)$$

五、管涌和流土的判别

工程界常常把管涌和流土混淆，下面提供的方法可供判别^[2]。先按式 (28) 算出发生流土时的临界细粒含量 P_z

$$P_z = \beta \sqrt{n} / (1 + \sqrt{n}) \quad (28)$$

式中： $\beta = 0.95 \sim 1.0$ ； n 为孔隙率。若某砂砾料实有的细粒含量 P'_z 小于按式 (28) 算得的 P_z 则为管涌；否则为流土。即成立下列判别式

$$\left. \begin{array}{l} P'_z \leq P_z \\ P'_z > P_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{管涌} \\ \text{流土} \end{array} \quad (29)$$

P'_0 为小于及等于 2 毫米粒径的细粒含量, 可由颗分曲线上查得。

参 考 文 献

- 1 明滋等. 粒状材料水力学. 北京: 水利出版社, 1957
- 2 沙金焯. 关于砂砾料的渗透变形问题. 南京水利科学研究所, 1977
- 3 沙玉清. 泥沙运动学引论. 北京: 工业出版社, 1965
- 4 窦国仁. 泥沙运动理论. 南京: 南京水利科学研究所, 1962
- 5 王书. 砂砾土壤渗透变形(管涌)的研究. 南京: 南京水利科学研究所, 1965
- 6 沙金焯. 渗透变形和渗径长度计算. 南京: 南京水利科学研究所, 1979

不完整井渗流的近似计算

一、承压不完整井

承压完整井的渗流计算基本成熟，如图 1 所示，当 $T_0 = 0$ 时，可用式 (1) 计算

$$Q = 2\pi kT(H_R - h_0) \ln \frac{R}{r_0} \quad (1)$$

式中： H_R 为离井轴 R 处之水头； h_0 为井水头； k 为渗透系数；其他符号示于图 1 中。

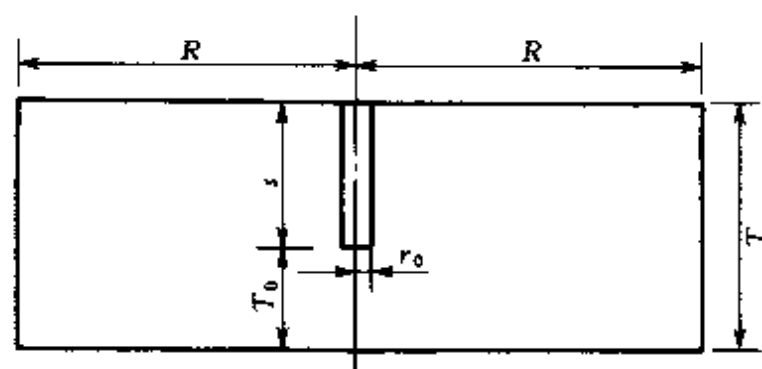


图 1

承压不完整井的渗流计算，迄今为止仍未完满解决，关键在于不完整井渗流场内的附加阻力不易计算。

20 世纪 50 年代后期，克尔克姆 (D. Kirkham) 在他的一篇著名论文《不完整井渗流的精确理论》中，提出了一个严格的理论解，这个公式的结构非常复杂，几乎难以具体运算，但它可用来检验其他一些近似公式的精确性。此外，由于该公式中所含各项系数，在井的贯入度 (s/T) 愈小时，收敛甚慢，且当承压层厚度 T 比井半径 r_0 大得多时，这些系数更难收敛，所以这个严格解并不适于计算小井径的不完整井。

在许多近似解中，普遍地运用了井附近的局部阻抗概

念^[2,4,6]，而采用下列通式

$$Q = 2\pi kT(H_R - h_0) / \left(\ln \frac{R}{r_0} + f_0 \right) \quad (2)$$

与式 (1) 相比，式 (2) 分母项中多了一个 f_0 项，它表示了不完整井贯入度 $s/T < 1.0$ 时所引起的附加阻力，这种阻力是由于渗流行近井附近时，流线急剧弯曲而产生的。显然，当 $s/T = 1.0$ 时的完整井流线没有发生急剧弯曲，故该项附加阻力 $f_0 = 0$ 。

20 世纪 30 年代，莫斯卡特 (M. Muskat) 假定泉点流量沿井轴线均匀分布，求得了小口径井的流量计算公式，以之与式 (2) 相比，则莫氏的 f_0 应为

$$f_0 = \frac{T_0}{s} \ln \frac{4T}{r_0} - \frac{T}{2s} \ln \frac{\Gamma\left(0.875 \frac{s}{T}\right) \Gamma\left(0.125 \frac{s}{T}\right)}{\Gamma\left(1 - 0.875 \frac{s}{T}\right) \Gamma\left(1 - 0.125 \frac{s}{T}\right)} \quad (3)$$

式中： Γ 为伽玛函数；其他符号同前。莫斯卡特将式 (3) 制成图 2。

当 $s/T = 1.0$ 时，式 (2) 可转化为式 (1)，但当 $s = 0$ 或 r_0/T 比值较大时，按式 (2) 就会得出不完整井的渗流量大于完整井渗流量这样一个不合理的结果，产生这一现象的原因是莫斯卡特公式本身是在 $\frac{r_0}{T}$ 比值很小的前提下推导出来的，故莫斯卡特公式只能适用于小口径的不完整井，根据西德

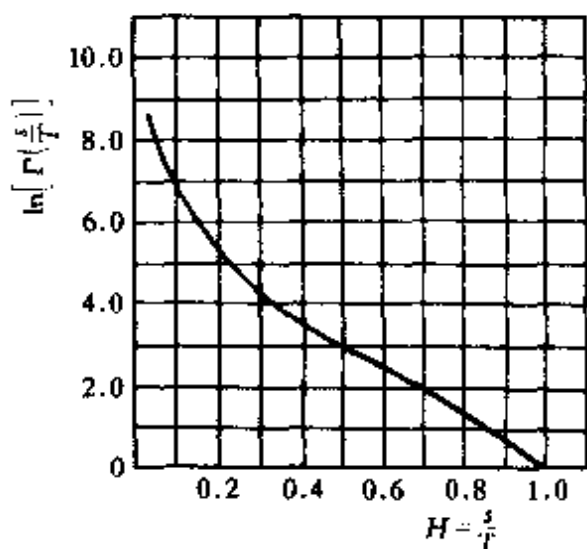


图 2

弗兰克 (O. Franke) 的电拟试验资料^[2]表明，莫斯卡特公式在 $r_0/T \leq 0.01$ 时精度较好，越出这一范围误差甚大，例如当 r_0/T

$T=0.1$, $s/T=0.1$ 时, 按此式计算结果要比弗兰克的电拟试验结果大很多。

20 世纪 70 年代西德英格尔 (K. Ingerle) 根据渗流场中远离井轴的缓变流区与井轴附近的急变流区的流动情况, 建立流量表达式^[3], 按流量连续原理导得下式

$$Q = 2\pi kT(H_R - h_0) \left/ \left[\ln \frac{R}{T_0} + \frac{T}{s} \ln \frac{(s+r_0)T_0}{(s+T_0)r_0} \right] \right. \quad (4)$$

也可将式 (4) 表为式 (2) 形式, 此时 f_0 为

$$f_0 = \ln \frac{r_0}{T_0} + \frac{T}{s} \ln \frac{(s+r_0)T_0}{(s+T_0)r_0} \quad (5)$$

式 (4) 以 T_0 为界, 近似地将渗流场分为急变与缓变两区, 而对急变区的等势面, 假定为一具有半球面底部的圆筒, 以区别于一般所作的同心半球形等势面, 当井的贯入度 s/T 较小时, 式 (4) 精度较差, 例如当 $s/T=0.05$, $r_0/T=0.1$ 时, 按此式求得的 Q 要比弗兰克的电拟试验值相差 56.2%; 此外当 $T_0=r_0$ 而不是当 $T_0=0$ 时, 式 (4) 就转化为式 (1), 但此时井底离不适水底层尚有 r_0 之距, 这说明了作者在推导上式时, 假定井底呈半球形而不是平底井。

表示不完整井渗流量的计算公式, 尚有一些, 现简介如下:

(1) 柯贞尼 (J. Kozeny) 公式

$$Q = 2\pi kT(H_R - h_0) \left[\frac{s}{T} \left(1 + 7\sqrt{r_0/2s} \cos \frac{\pi s}{2T} \right) \right] \left/ \ln \frac{R}{r_0} \right. \quad (6)$$

式 (6) 是将完整井渗流量计算公式 (1) 乘上一个方括号, 其实它并没有什么理论依据, 纯属经验公式, 采用弗兰克的电拟试验资料对比表明, 在各家公司中, 此式精确度最差^[4,5], 当 $\frac{r_0}{T} \geq 0.1$ 时, 误差可达 100% 以上。但由于该式发表较早, 故流传甚广, 在一些教科书或手册之类中, 常引用此式。

(2) 李·博克和本通公式^[2] (Li, Bock and Benton)

$$Q = 2\pi kT(H_R - h_0) \left/ \left(\ln \frac{R}{r_0} + f_0 \right) \right. \quad (7)$$

$$f_0 = \ln \frac{T}{r_0} \left[\left(\frac{T}{s} \right)^n - 1 \right] \quad (8)$$

式中：\$n\$ 为经验指数，在双对数纸上随 \$T/r_0\$ 而变，见图 3。

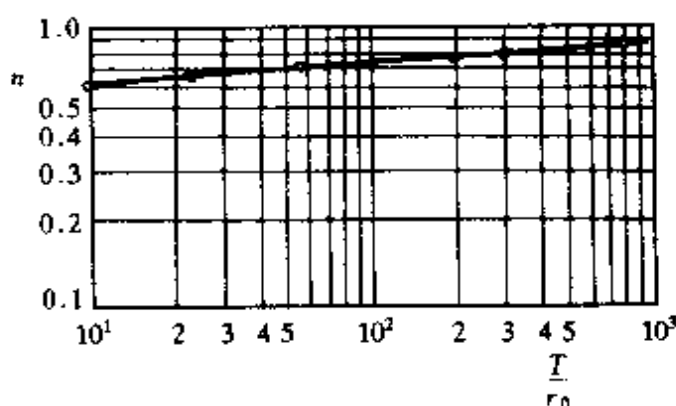


图 3

式 (7) 精度甚好，计算也不复杂，原作者认为其有效范围为 $800 > \frac{T}{r_0} \geq 25$ ， $r_0 \geq (T - s)$ ， $0.1 < \frac{s}{T} \leq 1.0$ 。由于这些条件的限制，特别是 $r_0 \geq (T - s)$ ，对于井贯入度 $\frac{s}{T}$ 较小的不完整井就不能应用此式了。此外，当 $\frac{s}{T} < 0.1$ 以后，按此式计算结果将明显偏小

(3) 萨姆修 (A. Samsoe) 公式^[2]

$$Q = 2\pi ks(H_R - h_0) / \ln \left[\frac{r_0}{2s} \left(\frac{4T}{R} \right)^{\frac{s}{T}} \left(\frac{T - 0.72s}{T + 0.72s} \right)^{0.4} \right] \quad (9)$$

式 (9) 是将井视为线汇而导得的，从理论上讲井半径 r_0 小，井深 s 大时，可得最佳近似。但当为井深 $s = 0$ 的冒水孔口时，按此式求得之 $Q = 0$ ，这当然是不合理的，除非该井底为不透水。

(4) 我国学者吴世余求出线汇在井壁井底的平均位势，进而导得了一个理论公式，并进行了简化，最后得到式 (2) 分母中的 f_0 为

$$\begin{aligned}
f_0 = & \frac{T}{s} \frac{1}{1 + \frac{2s}{r_0}} \left\{ \frac{2s}{r_0} \operatorname{arsinh} \frac{2s}{r_0} + 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2s}{r_0} \right)^2} \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} \frac{s}{r_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} \frac{s}{r_0} \right)^2} \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{\pi}{2} \frac{s}{r_0} \right)^2 + \ln \frac{\pi}{2} \frac{s}{r_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} \frac{s}{r_0} \right)^2} \right] \right\} \\
& - \left(\frac{T}{s} \operatorname{arsinh} \frac{s}{2T} + \ln \frac{2T}{r_0} \right) + 0.037 \\
& + \frac{T}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2s}{r_0}} \left[2 \left(n \frac{T}{r_0} + \frac{s}{r_0} \right) \operatorname{arsinh} 2 \left(n \frac{T}{r_0} + \frac{s}{r_0} \right) \right. \right. \\
& + 2 \left(n \frac{T}{r_0} - \frac{s}{r_0} \right) \operatorname{arsinh} 2 \left(n \frac{T}{r_0} - \frac{s}{r_0} \right) - 4n \frac{T}{r_0} \operatorname{arsinh} 2n \frac{T}{r_0} \\
& + 2 \sqrt{1 + \left(2n \frac{T}{r_0} \right)^2} - \sqrt{1 + 4 \left(n \frac{T}{r_0} + \frac{s}{r_0} \right)^2} - \sqrt{1 + 4 \left(n \frac{T}{r_0} - \frac{s}{r_0} \right)^2} \\
& + \left(n \frac{T}{r_0} + \frac{s}{r_0} \right) \sqrt{1 + 4 \left(n \frac{T}{r_0} + \frac{s}{r_0} \right)^2} - 2 \left(n \frac{T}{r_0} + \frac{s}{r_0} \right)^2 \\
& \left. - \left(n \frac{T}{r_0} - \frac{s}{r_0} \right) \sqrt{1 + 4 \left(n \frac{T}{r_0} - \frac{s}{r_0} \right)^2} + 2 \left(n \frac{T}{r_0} - \frac{s}{r_0} \right)^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{2 \left(n \frac{T}{r_0} + \frac{s}{r_0} \right) + \sqrt{1 + 4 \left(n \frac{T}{r_0} + \frac{s}{r_0} \right)^2}}{2 \left(n \frac{T}{r_0} - \frac{s}{r_0} \right) + \sqrt{1 + 4 \left(n \frac{T}{r_0} - \frac{s}{r_0} \right)^2}} \right] \\
& \left. - \left[\operatorname{arsinh} \left(n + \frac{s}{2T} \right) - \operatorname{arsinh} \left(n - \frac{s}{2T} \right) \right] \right\} \quad (10)
\end{aligned}$$

吴世余将式 (10) 制成表 1。

表 1 不同 r_0/T 和 s/T 时的附加阻力 f_0

$\frac{r_0}{T}$	s/T						
	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
0.001	78.4	42.2	20.7	8.28	3.67	1.30	0.511
0.01	35.6	21.5	11.5	4.78	2.11	0.694	0.255
0.05	12.9	9.07	5.48	2.44	1.07	0.320	0.093
0.2	3.56	2.69	1.77	0.822	0.345	0.082	
0.5	1.26	0.964	0.639	0.290	0.126		

实际应用时，须根据曲线图以曲线插入法求出 f_0 ，但这样做可能会带来某些误差。吴世余公式立论依据和推导过程比较严密，精度可靠，其适用范围较上述各式为广，据原作者意见，其适用范围为 $\frac{r_0}{T} \leq 0.5$ ， $\frac{s}{T} \leq \left(1 - \frac{r_0}{T}\right)$ 。一般说来， $\frac{r_0}{T} > 0.5$ 的大口径井在工程中是很少见的，而当 $\frac{s}{T} > \left(1 - \frac{r_0}{T}\right)$ 时，则 $f_0 < 0.1$ 可忽略之，故吴世余公式的适用范围已能满足实际工程的需要。这是继克尔克姆理论解后的又一个理论公式。

(5) 我国另一学者陈济生，把不完整窄沟的单向渗流场看作是不完整井轴向渗流场的一个特例，应用特定的不完整沟的现成解答，类比反推而导得了不完整井的计算公式^[4,5]。

陈济生将不完整井的轴向渗流场以 $r_M = r_0 + \xi T$ 为界，而不像英格尔那样以 T_0 为界，分为内圈急变区和外圈缓变区两个渗流场，运用流量连续原理而得

$$Q = 2\pi kT(H_R - h_0) / \left[\ln \frac{R}{r_0} + \frac{T_0}{r_0} \ln \left(1 + \frac{\xi T}{r_0} \right) \right] \quad (11)$$

将式 (11) 展开为单宽流量，并保持渗流场径向尺度 $L = R - r_0$ 不变的前提下，无限增大井径，于是得单向不完整沟渗流量公式

$$q = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{Q}{2\pi r_0} = \frac{kT (H_R - h_0)}{\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left\{ r_0 \left[\ln \left(1 + \frac{L}{r_0} \right) + \frac{T_0}{s} \ln \left(1 + \frac{\xi T}{r_0} \right) \right] \right\}} \quad (12)$$

又因 $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{L}{r_0} \right) = L$, 故得

$$q = \frac{kT (H_R - h_0)}{L + \frac{T_0}{s} \xi T} = \frac{kTH}{L + \frac{T_0}{s} \xi T} \quad (13)$$

这种形式的不完整沟的渗流问题, 已有现成的保角变换数学解, 虽涉及椭圆积分, 但在常见的 $L > T$ 情况下, 可近似简化为普通函数式

$$q = \frac{kT (H_R - h_0)}{L + \frac{2T}{\pi} \ln \frac{1}{\sin \frac{\pi s}{2T}}} \quad (14)$$

比较式 (13)、式 (14), 不难得出

$$\xi = \frac{s}{T_0} \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\sin \frac{\pi s}{2T}} \quad (15)$$

将此 ξ 代入式 (11) 则得不完整井渗流量公式

$$Q = 2\pi kT (H_R - h_0) \left/ \left(\ln \frac{R}{r_0} + f_0 \right) \right. \quad (16)$$

$$\text{而} \quad f_0 = \frac{T_0}{s} \ln \left(1 + \frac{s}{T_0 r_0} \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\sin \frac{\pi s}{2T}} \right) \quad (17)$$

上述陈济生公式是根据井底为不透水情况而导得, 但据原作者意见, 在 $s/T > 0.4$ 以后, 此式求得之 Q 与弗兰克电拟试验值非常吻合, 这也就说明了当具有一定的井的贯入度时, 从井壁入渗的流量远大于从井底入渗的流量, 故井底透水与否区别不大。一般说来, 在实际工程中不透水底盘的井也是常见的, 而当 $s/T > 0.4$ 以后, 此式同样可用于透水底盘的井。作为一种简化, 陈济生建议近似地取 $\xi = 0.2$, 仍可达到一定的精确度。上述陈济生公式

的精度经与电拟试验比较是很好的, 现已列入国家规范。

(6) 笔者在总结前人工作的基础上, 提出了一个更加简便的公式, 现推导如下。

如图 4 所示, 将不完整沟看作不完整井的一个特例, 渗流场分为上下两区, 以假想的虚线 $a-a$ 作为上部渗流场的底界, 由此可得一深度为 s 的完整沟, 各流线基本平行, 长度为 L 。而 $a-a$ 线下部渗流场为各流线汇集到对称点 A 的对称流动形式的冒水沟, 流线自远而近再转向流入沟底, 每一条流线随深度 T_0 方向而变化, 是不等长的, 今取其平均长度, 其值为 $(L + r_0 + 0.5T_0 + \frac{2T_0}{\pi} \ln 2)$, 其中 $0.5T_0$ 为下部渗流场的半厚度, $\frac{2T_0}{\pi} \ln 2$ 为流线行近沟底时转向而引起的纯转弯损失, 是前苏联学者根据流体力学方法而导得的。现将上下两个渗流场的流线, 取其加权平均值作为整个渗流场沟一侧的流线长度 L_{cp}

$$L_{cp} = \left[Ls + \left(L + r_0 + 0.5T_0 + \frac{2T_0}{\pi} \ln 2 \right) T_0 \right] / (s + T_0)$$

$$\approx L + \frac{r_0 T_0 + T_0^2}{T} = L + \frac{T_0^2}{T}$$

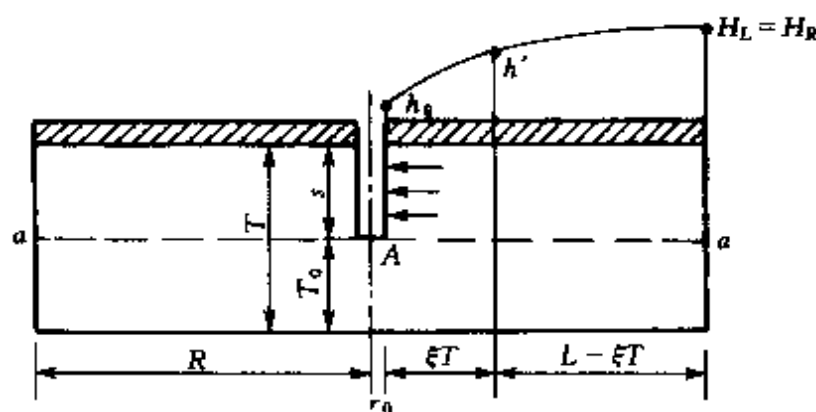


图 4

由此可得不完整沟渗流量

$$q = \frac{kT (H_R - h_0)}{L + \frac{T_0^2}{T}} = \frac{kTH}{L + \frac{T_0^2}{T}} \quad (18)$$

另一方面,若将不完整井展开为不完整沟,则其单宽流量的表达式在 $(L - \xi T)$ 段和 ξT 段内分别为

$$q = kT(H_L - h')/(L - \xi T) \quad (19)$$

$$q = ks(h' - h_0)/\xi T \quad (20)$$

在式 (19)、式 (20) 中消去 ξT 处之水头 h' 后得到

$$q = kT(H_L - h_0) / \left(L + \xi T \frac{T_0}{s} \right) = kTH / \left(L + \xi T \frac{T_0}{s} \right) \quad (21)$$

比较式 (18) 和式 (21) 得

$$\xi = sT_0/T^2 \quad (22)$$

将此 ξ 值代入式 (11) 则得不完整井渗流量公式为

$$Q = 2\pi kT(H_R - h_0) / \left(\ln \frac{R}{r_0} + f_0 \right) \quad (23)$$

$$\text{而} \quad f_0 = \frac{T_0}{s} \ln \left(1 + \frac{s}{T} \frac{T_0}{r_0} \right) \quad (24)$$

式(23)就是本文求得的不完整井渗流量计算公式,较之前述各家公式要简便得多。式(23)的推导原理也是类比法,与陈济生公式不同之处在于不完整井的附加阻力系数,本文是根据加权平均流线长度来模拟,而陈济生则是采用现成的保角变换数学解。这两个公式的前提都是不透水底盘的井。但由于引入附加阻力时又考虑进了井底入流这一因素在内,故这两个公式不论是透水底盘的井或不透水底盘的井,基本上均能适用,在表 2 中可以看出这两个公式的精确度是相当高的,也可看出式(23)的适用范围是相当宽的。

表 2 各家公式计算井渗流量 (Q/kT) 结果和电拟试验值对比

s/T	r_0/T	弗兰克 电拟试验	莫斯 卡特	柯贞尼	萨姆修	李·博克 和本通	英格尔	陈济生	沙金煊	吴世余
0.80	0.100	1.970	2.040	0.580	1.830		2.070	1.960	1.942	
	0.075	1.800					1.869	1.780	1.809	
	0.050	1.570	1.590	1.970	1.470	1.500	1.640	1.570	1.552	1.567
	0.025	1.300	1.310	1.460	1.250	1.250	1.348	1.300	1.287	
	0.010	1.050	1.050	1.110	1.000		1.086	1.060	1.050	1.049
	0.005	0.925	0.920	0.940	0.875		0.946	0.923	0.915	

续表

s/T	r_0/T	弗兰克 电拟试验	莫斯 卡特	柯贞尼	萨姆修	李·博克 和本通	英格尔	陈济生	沙金煊	吴世余
0.60	0.100	1.680	1.820	2.740	1.550		1.890	1.680	1.648	1.321 0.848
	0.075	1.520					1.678	1.510	1.452	
	0.050	1.320	1.360	1.890	1.210	1.270	1.442	1.320	1.295	
	0.025	1.080	1.090	1.370	0.986	1.050	1.153	1.070	1.060	
	0.010	0.854	0.862	0.984	0.796		0.906	0.856	0.844	
	0.005	0.744	0.745	0.790	0.695		0.778	0.741	0.732	
0.40	0.100	1.290	1.530	2.520	1.240		1.591	1.320	1.300	1.025 0.623
	0.075	1.170					1.384	1.170	1.156	
	0.050	0.999	1.270	1.660	0.920	1.000 0.816	1.159	1.010	0.993	
	0.025	0.816	0.830	1.140	0.736		0.896	0.802	0.800	
	0.010	0.627	0.639	0.780	0.580		0.682	0.626	0.620	
	0.005	0.542	0.541	0.610	0.499		0.575	0.535	0.531	
0.20	0.100	0.882	1.330	1.820	0.927		1.187	0.876	0.922	0.685 0.374
	0.075	0.772					0.998	0.758	0.800	
	0.050	0.654	0.765	1.150	0.614	0.651	0.801	0.635	0.666	
	0.025	0.516	0.540	0.766	0.458	0.527	0.583	0.486	0.507	
	0.010	0.382	0.386	0.488	0.344		0.418	0.365	0.378	
	0.005	0.325	0.318	0.366	0.289		0.342	0.305	0.315	
0.10	0.100	0.648	2.360	1.240	0.920		0.941	0.506	0.716	0.492 0.234
	0.075	0.546					0.762	0.507	0.605	
	0.050	0.453	0.655	0.765	0.457	0.418	0.585	0.411	0.485	
	0.025	0.346	0.380	0.493	0.304	0.328	0.395	0.301	0.348	
	0.010	0.240	0.244	0.304	0.211		0.265	0.216	0.241	
	0.005	0.200	0.193	0.219	0.171		0.207	0.176	0.194	
0.05	0.100	0.514					0.803	0.427	0.605	0.378 0.154
	0.075	0.493					0.632	0.355	0.498	
	0.050	0.370	1.160		0.458		0.462	0.278	0.383	
	0.025	0.257	0.327		0.228		0.290	0.193	0.255	
	0.010	0.167	0.166		0.137		0.177	0.130	0.163	
	0.005	0.130	0.122		0.105		0.132	0.103	0.124	
平均误差(%)			25.09	37.00	10.34	组次太 少, 无 法统计	15.00	6.455	2.850	组次太 少, 无 法统计
最大误差(%)			264.19	106.35	41.97		56.2	28.05	17.76	

现对本文式 (23)、式 (24) 举例如下。已知某不完整承压

井 $\frac{R}{T} = 2$, $\frac{s}{T} = 0.8$ (相应于 $\frac{T_0}{T} = 0.2$), $\frac{r_0}{T} = 0.1$, 试求 Q_r 。

解 $Q_r = Q/kT(H_R - h_0)$

$$= 2\pi \left[\ln \frac{2}{0.1} + \frac{0.2}{0.8} \ln \left(1 + 0.8 \times \frac{0.2}{0.1} \right) \right] = 1.942$$

弗兰克电拟试验值 1.970

这样的计算相当简便, 不必借助电子计算机。

以上我们讨论了承压不完整井渗流的计算公式, 现将各家公式概括如下

$$Q = 2\pi kT(H_R - h_0) / \left(\ln \frac{R}{r_0} + f_0 \right)$$

(1) 完整井: $f_0 = 0$ 。

(2) 莫斯卡特不完整井: $f_0 = \frac{T_0}{s} \ln \frac{4T}{r_0} - \frac{T}{2s}$
 $\times \ln \frac{\Gamma\left(0.875 \frac{s}{T}\right) \Gamma\left(0.125 \frac{s}{T}\right)}{\Gamma\left(1 - 0.875 \frac{s}{T}\right) \frac{s}{T} \Gamma\left(1 - 0.125 \frac{s}{T}\right)}$, 或查图 2 求 f_0 。

(3) 英格尔不完整井: $f_0 = \ln \frac{r_0}{T_0} + \frac{T}{s} \ln \frac{(s + r_0) T_0}{(s + T_0) r_0}$ 。

(4) 李·博克和本通不完整井: $f_0 = \ln \frac{T}{r_0} \left[\left(\frac{T}{s} \right)^n - 1 \right]$, n 查图 3。

(5) 吴世余不完整井: f_0 见式 (10)。

(6) 陈济生不完整井: $f_0 = \frac{T_0}{s} \left(1 + \frac{s}{r_0} \frac{T}{r_0} \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\sin \frac{\pi s}{2T}} \right)$ 。

(7) 沙金煊不完整井: $f_0 = \frac{T_0}{s} \ln \left(1 + \frac{s}{T} \frac{T_0}{r_0} \right)$ 。

在结束本节时, 顺便求一下承压不完整沟的修正系数 α , 由上我们得到了不完整沟的渗流量

$$q_{Hk} = kTH / \left(L + \frac{T_0^2}{T} \right) \quad (25)$$

而完整沟为

$$q_c = kTH/L \quad (26)$$

不完整沟的修正系数 $\alpha = q_{Hk}/q_c$ ，将式 (25)、式 (26) 代入得

$$\alpha = 1 / \left(1 + \frac{T_0^2}{TL} \right) \quad (27)$$

式 (27) 相当简便。而按前苏联阿韦里亚诺夫 (С.Ф. Аверьянов) 及吴世余求得的 α 为

$$\alpha = 1 / \left(1 + \frac{2T}{\pi L} \ln \frac{1}{\sin \frac{\pi s}{2T}} \right) \quad (28)$$

按式 (27)、式 (28) 求得的 α 基本相同，今列表计算如下，见表 3。

表 3 α 值 计 算 结 果

	s/T	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
$\frac{L}{T} = 1$	α (式) (27)	0.609	0.735	0.862	0.961	0.990
	α 式 (28)	0.572	0.747	0.881	0.969	0.992
$\frac{L}{T} = 10$	α 式 (27)	0.940	0.965	0.984	0.996	0.999
	α 式 (28)	0.930	0.967	0.986	0.997	0.999

二、潜水不完整井

众所周知，潜水完整井的渗流量计算公式为

$$Q = k\pi(H_R^2 - h_0^2) \ln \frac{R}{r_0} \quad (29)$$

而潜水不完整井渗流量计算公式，迄今为止，还没有成熟的计算公式，前苏联恰尔内 (И. Чарный) 曾对莫斯卡特公式进行修正而得式 (30)^[2]

$$Q_y = \frac{2\pi kT(s-l)}{\frac{1}{2s/T} \left[2 \ln \frac{4T}{r_0} - \ln \Gamma \left(\frac{s}{T} \right) \right] - \ln \frac{4T}{R}} \left(\frac{1 + \frac{l}{s}}{2} \right) \quad (30)$$

弗兰克用电拟试验资料验证上式, 并再修正上式, 乘上一个系数 c 值, 于是得潜水不完整渗流量公式为

$$Q = Q_{qc} \quad (31)$$

c 值见表 4。

表 4 不同 s/T 、 l/s 、 r_0/T 时的 c 值

s/T	l/s	r_0/T				
		0.10	0.065	0.055	0.045	0.035
0.80	0.00	1.02	1.04	1.03	1.01	1.02
	0.20	1.01	1.03			1.01
	0.50	1.00	1.01			1.00
0.60	0.00	1.14	1.11	1.11	1.07	1.06
	0.20	1.11	1.08			1.03
	0.50	1.09	1.04			1.02
0.40	0.00	1.29	1.23	1.20	1.16	1.13
	0.20	1.22				1.08
	0.50	1.13	1.07			1.04
0.20	0.00	1.45	1.39	1.34	1.30	1.22
	0.20	1.34	1.26			1.14
	0.50	1.19	1.11			1.08
0.10	0.00	1.57	1.49	1.42	1.39	1.29
	0.20	1.40	1.31			1.18
	0.50	1.23	1.14			1.10

由于恰尔内公式是莫斯卡特公式的变形, 故莫斯卡特公式在应用上受到的局限性, 也将是恰尔内公式的局限性。

现在我们来推求一个新的计算公式, 以期能在精度上及简易性方面有所提高。

如图 5 所示, 根据试验表明^[7], 流线在 $a-a$ 线附近呈水平状, $a-a$ 线将渗流场分为上下两域, 并将 l 等分为二。这样一来, 上域是以 $a-a$ 线为不透水层的无压完整井, 而下域则是以 $a-a$ 线为顶的承压不完整井, 于是按前述方法, 可分别得到上下两域的渗流量计算公式

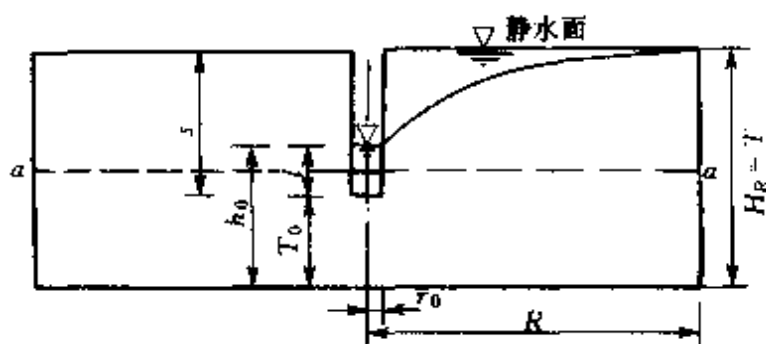


图 5

$$\text{上域 } Q_{\pm} = k\pi \left[\left(H_R - T_0 - \frac{l}{2} \right)^2 - \left(h_0 - T_0 - \frac{l}{2} \right)^2 \right] / \ln \frac{R}{r_0} \quad (32)$$

$$\text{或写为 } Q_{\pm} = k\pi H \left[\left(H_R - T_0 - \frac{l}{2} \right) + \left(h_0 - T_0 - \frac{l}{2} \right) \right] / \ln \frac{R}{r_0} \quad (33)$$

$$\text{其中 } H = H_R - h_0$$

$$\text{下域 } Q_{\mp} = 2\pi k \left(T_0 + \frac{l}{2} \right) (H_R - h_0) / \left(\ln \frac{R}{r_0} + f_0 \right) \quad (34)$$

$$\text{而 } f_0 = \frac{2T_0}{l} \ln \left[1 + \frac{T_0}{r_0} \frac{l}{2(T_0 + l)} \right] \quad (35)$$

$Q_{\pm} + Q_{\mp}$ 即为所求的潜水不完整渗流量公式

$$Q = k\pi H \left[\frac{(H_R + h_0) - (2T_0 + l)}{\ln \frac{R}{r_0}} + \frac{2T_0 + l}{\ln \frac{R}{r_0} + f_0} \right] \quad (36)$$

$$\text{其中 } H = H_R - h_0 \quad h_0 = l + T_0$$

$$f_0 = \frac{2T_0}{l} \ln \left[1 + \frac{T_0}{r_0} \frac{l}{2(T_0 + l)} \right]$$

当为潜水完整井时, 则 $T_0 = 0$, 故 $f_0 = 0$, 于是式 (36) 即可转化为式 (29), 现在我们来简化式 (36), 因为式中 $(H_R + h_0) - (2T_0 + l) = s$, 故式 (36) 又可化简为

$$Q = k\pi H \left(\frac{s}{\ln \frac{R}{r_0}} + \frac{2T_0 + l}{\ln \frac{R}{r_0} + f_0} \right) \quad (37)$$

式 (36) 或式 (37) 就是本文求得的潜水不完整井渗流量计算公式, 计算结果与弗兰克的电拟试验资料对比表明, 式 (37) 的精确性是相当高的, 而计算又很方便实用, 今举例如下。

例 已知 $\frac{R}{T} = 2$, $\frac{s}{T} = 0.1$ (则 $\frac{T_0}{T} = 0.9$), $\frac{r_0}{T} = 0.065$, $\frac{l}{s} = 0.5$, 求 Q 。

$$\begin{aligned} \text{解 } f_0 &= \frac{2 \times 0.9}{0.1 \times 0.5} \ln \left(1 + \frac{0.9}{0.065} \times \frac{0.1 \times 0.5}{2 \times 0.9 + 0.1 \times 0.5} \right) \\ &= 11.44 \end{aligned}$$

代入式 (37) 得

$$Q = k\pi H \left[\frac{0.1}{\ln (2/0.065)} + \frac{2 \times 0.9 + 0.1 \times 0.5}{\ln (2/0.065) + 11.44} \right] = 0.4825kH$$

本例 $H = 0.05$, $H = H_R - h_0 = T - h_0 = 1 - (l + T_0) = 1 - (0.05 + 0.9) = 0.05$, 故

$$Q = 0.4825kH = 0.024k$$

弗兰克电拟试验值 $Q = 0.022k$

恰尔内公式 $Q = 0.019k$

由此可见, 本文公式在此例中优于恰尔内公式, 现将本文公式 (37) 和弗兰克电拟试验值及恰尔内公式结果一并列入表 5。

表 5 潜水不完整井渗流量 Q/kH (当 $R/T = 2.0$ 时)

s/T	l/s	r_0/T								
		0.10			0.065			0.035		
		式 (37)	恰尔内	试验	式 (37)	恰尔内	试验	式 (37)	恰尔内	试验
0.80	0.20	0.809	0.767	0.777	0.694	0.652	0.671	0.571	0.550	0.554
	0.50	0.608	0.599	0.600	0.523	0.510	0.514	0.434	0.492	0.430
	0.90	—	0.151	—	—	—	—	—	—	—
0.60	0.20	0.541	0.506	0.577	0.452	0.416	0.450	0.360	0.346	0.354
	0.50	0.397	0.377	0.410	0.336	0.325	0.336	0.273	0.270	0.275
	0.90	0.095	0.095	—	—	—	—	—	—	—

续表

s/T	l/s	r_0/T								
		0.10			0.065			0.035		
		式 (37)	恰尔内	试验	式 (37)	恰尔内	试验	式 (37)	恰尔内	试验
0.40	0.20	0.300	0.247	0.302	0.240	0.215	—	0.185	0.174	0.188
	0.50	0.215	0.193	0.218	0.177	0.168	0.179	0.139	0.136	0.141
	0.90	0.050	0.048	—	—	—	—	—	—	—
0.20	0.20	0.115	0.085	0.114	0.088	0.069	0.088	0.063	0.056	0.064
	0.50	0.079	0.066	0.078	0.062	0.054	0.060	0.046	0.044	0.047
	0.90	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.10	0.20	0.048	0.031	0.044	0.036	0.025	0.033	0.023	0.018	0.0224
	0.50	0.032	0.024	0.029	0.024	0.019	0.022	0.0165	0.0148	0.0164
	0.90	—	—	—	—	—	—	—	—	—

由表 5 中 29 个组次统计得表 6。

表 6 表 5 统计结果

	平均误差 (%)	最大误差 (%)
式 (37)	2.865	10.34
恰尔内公式	11.596	24.24

参 考 文 献

- 1 克尔克姆. 不完整井渗流的精确理论. 美国地球物理研究. 1959. Vol. 64. No. 9
- 2 O. L. 弗兰克. 不完整井的水流过程. 见: 南京水利科学研究所渗流译文汇编. 第 7 辑. 1973
- 3 K. Ingerle. Zur Berechnung des Unvollkommenen Brunnens. WASSERWIRTSCHAFT. 1979. 7/8
- 4 陈济生. 不完整井压力渗流问题的一种近似解. 水利学报. 1980 (4)
- 5 Цэнг Цэц-шэн. Фильтрационный расчёт вертикального дренажа в основании земляной плотины. Гидротехника и мелиорация, 1955 (4)
- 6 安徽水科所. 多层地基和减压井沟的渗流计算理论. 北京: 水利出版社, 1980
- 7 薛禹群, 朱学愚. 地下水动力学. 北京: 地质出版社, 1979

堤坝下游减压井的渗流近似计算

图1是水利工程中常见的不完整并列的布局。图2则是渗流从水库或河流底经堤坝下地基流入井中的渗流场等势线分布（示意图）。由图2可知，在地基中的渗流，大部分是缓变流动，等势线几乎呈铅直状，只是在渗流行近至井附近时，流线弯曲，产生了附加阻力。图2中的等势线呈逐渐倾斜状，并最终形成一个包围井轴的半椭球体。图3则是由电模拟试验求得的等势线包围在井轴周围的一个半椭球体图形。综上所述，许多文献中^[1~4]常把渗流场分为缓变区与急变区，且急变区半径以 l_w 表示。

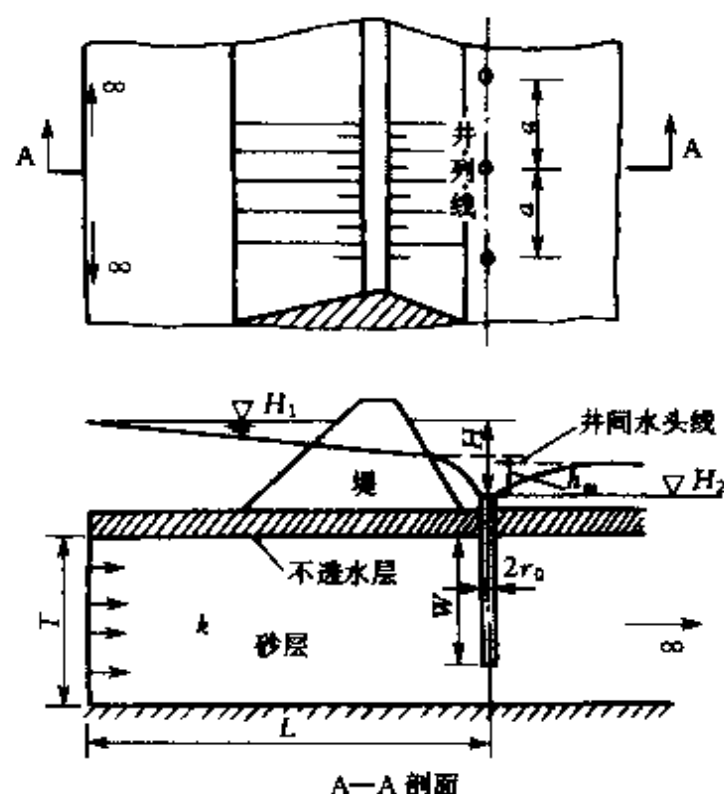


图1

一、完整减压井列的渗流计算

若井深 $W = T$ ，则表示为完整并列；若 $W = 0$ ，则表示为井

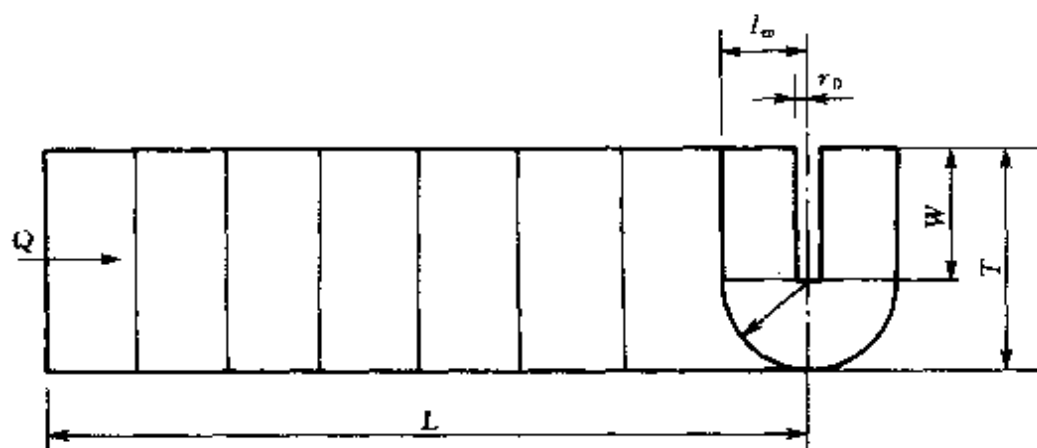


图 2

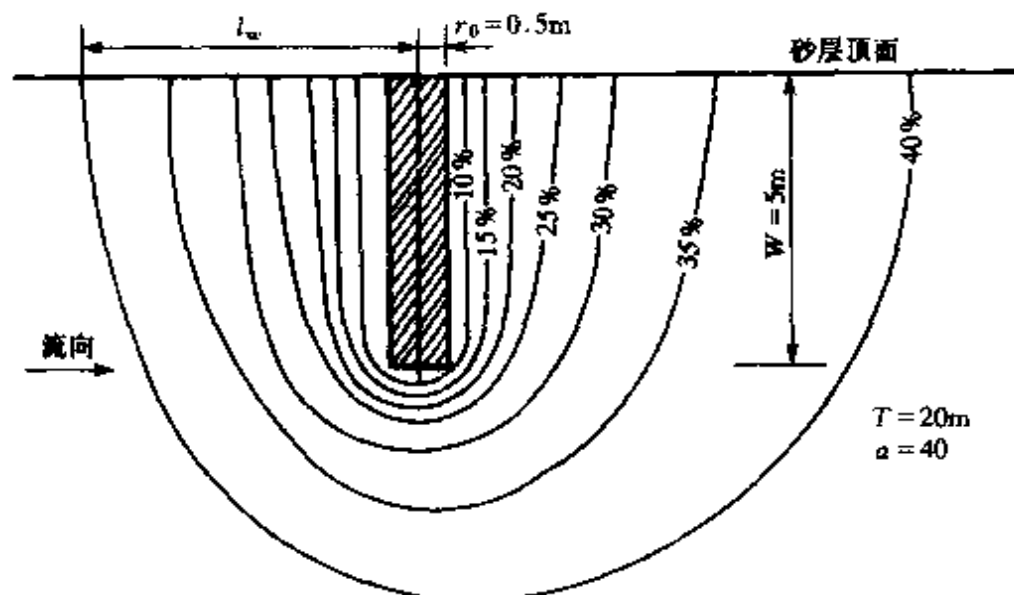


图 3

深等于零值的浅井；若 $T > W > 0$ ，则为不完整井列（参见图 1）。对于井深 $W = T$ 的完整减压井列的渗流计算比较成熟，一致公认莫斯卡特公式^[1]最为精确。

1. 渗流量的计算式

$$Q = \frac{2\pi kTH}{\frac{2\pi L}{a} + \ln \frac{a}{2\pi r_0}} \quad (1)$$

式中： k 为渗流系数； H 为上下游水位差， $H = H_1 - H_2$ ；其他符号见图 1。

2. 井间压力的计算式

$$h_m = \frac{H \ln \frac{a}{\pi r_0}}{\frac{2\pi L}{a} + \ln \frac{a}{2\pi r_0}} \quad (2)$$

3. 并列线下游剩余压力的计算式

$$h_s = \frac{H \ln \frac{a}{2\pi r_0}}{\frac{2\pi L}{a} + \ln \frac{a}{2\pi r_0}} \quad (3)$$

二、不完整减压并列的渗流计算

不完整井区别于完整井之主要点,在于不完整井的井深 W 未达到不透水底层,而使井悬挂于地基中。因而,部分渗流在行近至井附近的渗流急变区内,流线产生变形而引起了附加阻力,使得入井流量小于完整井的渗流量。由此可设想,只要在完整井各计算式中,考虑了附加阻力 f_0 的因素,就可化为不完整井的计算式^[2]

1. 渗流量的计算式

$$Q = \frac{2\pi kTH}{\frac{2\pi L}{a} + \ln \frac{a}{2\pi r_0} + f_0} \quad (4)$$

或 $Q_r = \frac{Q}{kH} = \frac{1}{\frac{L}{aT} + \frac{1}{2\pi T} \left(\ln \frac{a}{2\pi r_0} + f_0 \right)} \quad (5)$

2. 井间压力的计算式

$$h_m = H \frac{\ln \frac{a}{\pi r_0} + f_0}{\frac{2\pi L}{a} + \ln \frac{a}{2\pi r_0} + f_0} \quad (6)$$

3. 并列线下游的剩余压力计算式

$$h_s = H \frac{\ln \frac{a}{2\pi r_0} + f_0}{\frac{2\pi L}{a} + \ln \frac{a}{2\pi r_0} + f_0} \quad (7)$$

一般说来, h_x 的最大值发生在并列线后 $2T$ 的距离之内^[1]。

若当不完整减压井列线离背水堤脚较远, 则该堤脚处的承压水头有可能高于井间压力, 在这种情况下, 应以堤脚处作为渗透变形的控制点。据试验资料, 从并列线到上游进口处的承压水头线接近直线分布。因此, 在求得井间压力以后, 就可计算并列线上游一侧任意距离 x 处的承压水头

$$h_x = \frac{x}{L}(H_1 - h_m) + h_m \quad (8)$$

当 $x=0$ 时, 在并列线上两任意井之间 $h_x = h_m$ 。当 $x=L$ 时, 在上游进口处 $h_x = H_1$ 。

在列出了计算式 (4) ~ 式 (8) 之后, 现在的问题便归结为怎样求取各式中的附加阻力因素 f_0 。

据上述渗流场的描述, 有一点值得注意, 即并列与单井不同之处, 在于并列中各个井的等势面, 并非以影响半径为周界的旋转体, 故不能笼统应用孤立单井计算式, 但在并列中每一口井的急变区范围内, 则可认为, 等势面是以井轴为轴心, 急变区半径 l_w 为周界的直立半椭球体, 故在此范围内, 仍可视为一孤立单井而借用单井计算式。文献 [3] 中, 根据附加阻力的概念, 对不完整单井求得 f_0 的表达式为

$$f_0 = \frac{T_0}{W} \ln \left(1 + \frac{W T_0}{T r_0} \right) \quad (9)$$

式中, $T_0 = T - W$, 将其代入式 (4) ~ 式 (7) 中, 便可方便地求得不完整减压井列中任一井的渗流量、井间压力、剩余压力及并列线上游一侧的水力坡降线。计算结果表明, 与电模拟试验值吻合 (见表 1)。

由表 1 中渗流量 Q_r 的计算值与试验值之比较可见, 其平均误差为 1.5%, 最大误差为 6.25%。不难看出, 本节计算式既简单又具有较好的精度, 且不受应用范围的限制。

表 1

L (m)	a (m)	T (m)	W (m)	r ₀ (m)	f ₀	h _m /H		Q _r [m ³ /(s·m)]		
						计算值	试验值	计算值	试验值	误差 (%)
70	10	20	5	0.5	6.42	0.160	0.115	2.437	2.430	0.29
70	20	20	5	0.25	8.32	0.351	0.327	3.826	3.870	1.14
70	10	5	1.25	0.5	3.168	0.103	0.092	0.650	0.640	1.56
70	10	2.5	0.625	0.5	1.984	0.081	0.092	0.333	0.327	1.84
70	10	20	10	0.025	5.303	0.206	0.193	2.352	2.270	3.61
70	20	20	10	0.025	5.303	0.337	0.335	3.903	3.760	3.80
70	10	5	2.5	0.1	2.603	0.123	0.119	0.636	0.633	0.47
70	10	2.5	1.25	0.1	1.981	0.111	0.108	0.322	0.319	0.94
70	10	20	15	0.5	0.713	0.055	0.050	2.740	2.720	0.74
70	10	10	7.5	0.5	0.519	0.052	0.048	1.376	1.372	0.29
70	10	5	3.75	0.1	0.78	0.089	0.085	0.661	0.660	0.15
70	10	2.5	1.865	0.1	0.596	0.086	0.082	0.332	0.332	0
70	30	20	20	0.5	0	0.174	0.174	7.411	7.450	0.52
70	40	20	20	0.5	0	0.239	0.239	9.283	9.300	0.18
100	20	20	20	0.5	0	0.077	0.077	3.788	3.780	0.21
100	20	10	2	0.5	5.74	0.212	0.200	1.610	1.638	1.71
50	20	15	5	0.5	4.072	0.306	0.285	4.487	4.580	2.03
50	20	20	2	0.5	13.734	0.520	0.501	4.018	4.170	3.65
100	20	20	2	0.5	13.734	0.344	0.327	2.675	2.720	1.65
70	30	10	0.5	0.5	12.69	0.526	0.550	2.118	2.070	2.32
70	10	2.5	0.25	0.5	3.344	0.107	0.132	0.323	0.304*	6.25
70	10	20	2	0.5	13.73	0.264	0.240	2.135	2.160	1.16

注 试验值均摘自文献 [1]。

* 试验值 0.304, 可能系 0.324 之误, 因不少计算式求得值均与 0.304 相差较大。

参 考 文 献

- 1 毛昶熙. 新沂河大堤渗流控制试验研究. 南京: 南京水利科学研究所, 1966



- 2 安徽省水利科学研究所. 多层地基和减压沟井的渗流计算理论. 北京: 水利出版社, 1980
- 3 沙金焄. 不完整井渗流的近似计算. 岩土工程学报, 1985, 7 (5)
- 4 顾淦臣. 堤渗下游减压工程的研究. 水利学报, 1963 (3)

堤坝不稳定渗流计算

一、按水量平衡方法推导

如图 1 所示, 采用浮动坐标系, x 轴位于堤坝底部, 纵坐标 h 轴则是浮动的, 在任何时刻, 使它通过库水位 (或河水位) 与虚拟坝坡 m'_1 的交点上

$$m'_1 = m_1^2 / (m_1 + 0.5)$$

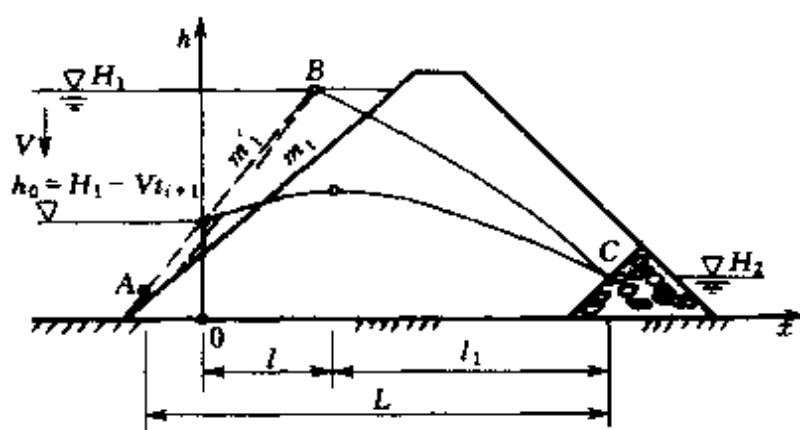


图 1

库水位下降期间, 浸润线将出现峰点 (分水岭), 并且峰点位置也将随时间变化。当初始状态时, 库水位 h_0 尚未下降, 故 $h_0 = H_1$, 此时峰点位于 B 点, 渗流全部泄向下游, 由于 B 点位于浮动纵轴上, 故峰点离纵坐标之距 $l = 0$, 当库水位下降到与下游水位齐平时, 即 $h_0 = H_2$, 堤坝内部渗流场呈对称状态, 峰点位于浸润线中点, 由于纵坐标此时通过 A 点, 故峰点离纵轴之距 $l = L/2$, L 是 AC 之距, 是一已知数。当库水位 h_0 自 H_1 下降到 H_2 过程中, 峰点轨迹可近似地以直线代替, 如图 2 所示, 即

$$l = \left(\frac{H_1 - h_0}{H_1 - H_2} \right) \frac{L}{2} \quad (1)$$

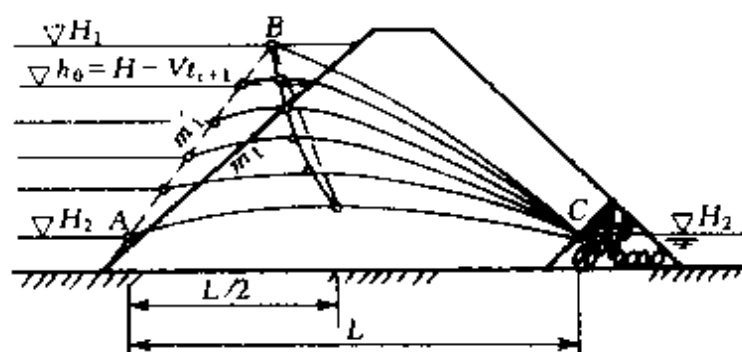


图 2

按式 (1) 求得之 l ，与按二次曲线计算之 l ，相差不大，而计算表明该差距对浸润线位置的影响将更小。

现在，只需研究某时刻峰点左侧（向上游一侧）浸润线所包围的体积 V

$$V = h_0 l + \int_0^l (h_x - h_0) dx \quad (2)$$

$$\text{而} \quad h_x = h_0 + (h - h_0) \sqrt{x/l} \quad (3)$$

式中： h 为某时刻的峰点高程； h_0 为库水位， $h_0 = H_1 - vt_{i+1}$ ； t_{i+1} 为自零起算的天数。今以式 (3) 代入式 (2) 并积分之得

$$V = h_0 l + \frac{2}{3} l (h - h_0) \quad (4)$$

由于库水位在下降，故该体积 V 发生变化，其增量 dV 为

$$dV = \frac{2}{3} l d(h - h_0) \quad (5)$$

其水量为

$$dW = dV \mu = \frac{2}{3} l \mu d(h - h_0) \quad (6)$$

式中： μ 为土的给水度。

另一方面，在该时刻 t ，由该体积泄入上游之渗流量为

$$q = - \frac{k(h^2 - h_0^2)}{2l} \quad (7)$$

其水量为

$$dW = q dt = - \frac{k(h^2 - h_0^2)}{2l} dt \quad (8)$$

显然式 (6) 和式 (8) 相等, 故得微分方程

$$\frac{d(h - h_0)}{(h^2 - h_0^2)} = - \frac{3}{4} \frac{k dt}{l^2 \mu} \quad (9)$$

式中: k 为土的渗透系数。对式 (9) 积分得

$$\int_{h(l, t_i)}^{h(l, t_{i+1})} \frac{d(h - h_0)}{(h^2 - h_0^2)} = - \frac{3}{4} \frac{k}{l^2 \mu} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \quad (10)$$

解式 (10) 得

$$\frac{1}{2h_0} \ln \left(\frac{h - h_0}{h + h_0} \right) \Big|_{h(l, t_i)}^{h(l, t_{i+1})} = - \frac{3}{4} \frac{k \Delta t}{l^2 \mu} \quad (11)$$

整理后得峰点高程随时间的变化为

$$h(l, t_{i+1}) = h_0 \left(\frac{1 + P e^{-R \Delta t}}{1 - P e^{-R \Delta t}} \right) \quad (12)$$

式中: $h_0 = H_1 - vt_{i+1}$; $P = \frac{h(l, t_i) - h_0}{h(l, t_i) + h_0}$; $R = \frac{3kh_0}{4l^2\mu}$; $\Delta t = t_{i+1} - t_i$; $h(l, t_i)$ 为上一时段峰点高程, 当初始状态时 $h(l, t_i) = H_1$; $h(l, t_{i+1})$ 为下一时段峰点高程, 是一待求值; l 为任意时刻的峰点位置, 应按式 (1) 计算。以上各符号的单位是 m, d, m/d 等。在按式 (12) 求得 t_{i+1} 时刻的峰点高程后, 则峰点向上下游两侧的浸润线分支, 可分别按式 (13)、式 (14) 求之

$$(h_x)_{\text{左侧}} = \sqrt{h_0^2 + \frac{x}{l} [h^2(l, t_{i+1}) - h_0^2]} \quad (13)$$

$$(h_x)_{\text{右侧}} = \sqrt{H_2^2 + \frac{x}{l_1} [h^2(l, t_{i+1}) - H_2^2]} \quad (14)$$

式 (14) 的纵坐标通过图 1 中的 C 点 (下游排水棱体处)。

必须指出, 式 (12) 是式 (11) 解出的, 故不能适用于 $h_0 = 0$ 的情况。若遇到水库放空且无死库容时, 则 $h_0 = 0$, 此时如使用式 (12), 则可将横轴 x 平移往下一个 Δh 值使得 $h_0 = \Delta h$

即可。

文献 [1] 曾对均质坝不稳定渗流进行了砂模试验, 今选其实例计算如下, 并和该文的试验值作一对照。

某均质坝 (因为是模型坝, 故采用的单位为 cm, s, cm/s 等) 已知数据为 $m_1 = 2$, $L = 306$, $H_1 = 60$, $H_2 = 0$, H_d (坝高) $= 74$, $k = 0.0017$, $\mu = 0.006$, $m'_1 = m_1^2 / (m_1 + 0.5) = 1.6$, $v = 0.002112$, 试求浸润线峰点随时间的变化及浸润线。今解算于下:

(1) $t_i = 0$, $t_{i+1} = 4735$, $\Delta t = 4735 - 0 = 4735$, $h_0 = H_1 - vt_{i+1} = 60 - 0.002112 \times 4735 = 50$, $P = \frac{h(l, t_i) - h_0}{h(l, t_i) + h_0} = \frac{H_1 - h_0}{H_1 + h_0} = \frac{60 - 50}{60 + 50} = 0.091$, $l = \left(\frac{H_1 - h_0}{H_1 - H_2} \right) \frac{L}{2} = \left(\frac{60 - 50}{60 - 0} \right) \times \frac{306}{2} = 25.5$, $R = \frac{3}{4} \frac{kh_0}{l^2 \mu} = \frac{3}{4} \times \frac{0.0017 \times 50}{(25.5)^2 \times 0.006} = 0.0163$, $R\Delta t = 0.0163 \times 4735 = 77.18$, $e^{-R\Delta t} = e^{-77.18} = 0$; 将上列各值代入式 (12) 得峰点高程

$h(l, t_{i+1}) = h_0 \left(\frac{1 + Pe^{-R\Delta t}}{1 - Pe^{-R\Delta t}} \right) = 50 \left(\frac{1 + 0.091 \times 0}{1 - 0.091 \times 0} \right) = 50$ (试验值 49.80)

(2) $t_i = 4735$, $t_{i+1} = 9370$, $\Delta t = 9370 - 4735 = 4635$, $h(l, t_i) = 50$ [即上一时段的 $h(l, t_{i+1})$], $h_0 = H_1 - vt_{i+1} = 60 - 0.002112 \times 9370 = 40$, $P = \frac{h(l, t_i) - h_0}{h(l, t_i) + h_0} = \frac{50 - 40}{50 + 40} = 0.111$, $l = \left(\frac{H_1 - h_0}{H_1 - H_2} \right) \frac{L}{2} = \left(\frac{60 - 40}{60 - 0} \right) \times \frac{306}{2} = 51$, $R = \frac{3}{4} \frac{kh_0}{l^2 \mu} = \frac{3}{4} \times \frac{0.0017 \times 40}{(51)^2 \times 0.006} = 0.00326$, $R\Delta t = 0.00326 \times 4635 = 15.15$, $e^{-R\Delta t} = e^{-15.15} \approx 0$, 将上列各值代入式 (12) 得

$h(l, t_{i+1}) = h_0 \left(\frac{1 + Pe^{-R\Delta t}}{1 - Pe^{-R\Delta t}} \right) = 40 \times \left(\frac{1 + 0.111 \times 0}{1 - 0.111 \times 0} \right) = 40$ (试验值 39.50)

依此类推就可逐时计算，表1列有各时段的结果。

表1 按各种方法求得的峰点高程

土的 k (cm/s) 和 μ	时段 (s)	峰点高程 (cm)				
		按本文式 (12) 计算值	按本文式 (20) 计算值	按拉普拉斯 方程计算值	按固结方程 计算值	按砂模试 验值
$k=0.0017$ $\mu=0.006$	4735	50.00	50.00			49.80
	9370	40.00	40.00			39.50
	13717	30.05	30.00			29.40
	17755	21.61	21.36			22.60
	23520	13.38	8.23			12.80
$k=0.0017$ $\mu=0.006$	900	50.00	50.00	50.02	50.04	50.30
	1800	40.43	40.00			39.30
	2700	33.50	30.33	30.90	31.07	31.10
	3600	28.26	22.62			24.20
	4425	25.40	19.66	20.00	20.29	20.40
$k=0.0002$ $\mu=0.001$	986	50.00	50.00	49.21	49.64	52.10
	1898	41.07	40.01			46.40
	2725	35.38	31.21	32.25	35.05	42.25
	3429	31.68				
	5340	23.67	22.58	18.77	22.30	35.00

注 本表试验值及拉普拉斯、固结方程电算结果，均引自文献 [1]。

二、按不稳定渗流方程求解

利用上述峰点特性，只需研究峰点左侧流向水库的渗流即可。

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} h(0, t_{i+1}) &= h(0, t_i) - v\Delta t \\ \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$h(x, t_i) = \sqrt{h^2(0, t_i) + \frac{x}{l} [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)]} \quad (17)$$

上述方程组的物理意义是很明确的。式 (15) 是描述不稳定

运动的基本偏微方程。式(16)之一的边界条件,表示了库水位的变化;式(16)之另一边界条件,表示了在任何时刻峰点的斜率为零值,即是说,其切线为水平线,这是峰点本身所具有的特性。式(17)是表示 t_{i+1} 时刻的上—时刻 t_i 的浸润线形状,即是我们所研究的 t_{i+1} 时刻的初始条件,这在任何时候都是正确的,总是一条抛物线。解上述方程组得浸润线随时间和空间的变化规律为

$$h(x, t_{i+1}) = \left\{ h^2(0, t_{i+1}) + \frac{4}{\pi} [h^2(0, t_i) - h^2(0, t_{i+1})] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-c\Delta t} \sin Kx \right. \\ \left. + \frac{8}{\pi^2} [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-c\Delta t} \sin Kx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

式中: $h(0, t_i)$ 为 t_i 时段(即前一时段)的库水位, $h(0, t_i) = H_1 - vt_i$, 当 $t_i = 0$ 时的初始状态即为起始库水位 H_1 ; $h(0, t_{i+1})$ 为 t_{i+1} 时段(即下一时段)的库水位, $h(0, t_{i+1}) = H_1 - vt_{i+1}$ 或 $h(0, t_{i+1}) = h(0, t_i) - v\Delta t$; $h(l, t_i)$ 为前一时段的峰点高程, 当 $t_i = 0$ 时则 $h(l, t_i) = H_1$, 即图1中B点位置, l 按式(1)计算; $h(l, t_{i+1})$ 为下一时段峰点高程是待求值; $K = (n + 1/2)\pi/l$; $C = [(n + 1/2)\pi a/l]^2$; $a^2 = kh_{cp}/\mu$; $h_{cp} = (1/2)[h(l, t_i) + h(0, t_{i+1})]$; $\pi = 3.14$ 。

若在式(18)中, 令 $x = l$, 则得 t_{i+1} 时段的峰点高程为

$$h(l, t_{i+1}) = \left\{ h^2(0, t_{i+1}) + \frac{4}{\pi} [h^2(0, t_i) - h^2(0, t_{i+1})] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-c\Delta t} \right. \\ \left. + \frac{8}{\pi^2} [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-c\Delta t} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

对式(19)取近似算式则简化为

$$h(l, t_{i+1}) = \left\{ h^2(0, t_{i+1}) + \frac{4}{\pi} [h^2(0, t_i) - h^2(0, t_{i+1})] \left(e^{-D\Delta t} - \frac{1}{3} e^{-9D\Delta t} \right) \right. \\ \left. + \frac{8}{\pi^2} [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] e^{-D\Delta t} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

式中: $D = \pi^2 a^2 / 4l^2$; 其他符号同前。

必须指出, 式 (20) 是近似式, 故当 $\Delta t = 0$ 时不能还原成初始条件式 (17)。在按式 (20) 求得峰点高程后, 如同前述, 可分别按式 (13)、式 (14) 求出峰点两侧的浸润线分支, 连接起来即是一光滑的浸润线。下面再采用文献 [1] 进行砂模试验的另一例子, 按式 (20) 计算, 并和该文试验结果作一对照。

如图 1 所示, 已知 $m_1 = 2$, $m'_1 = m_1^2 / (m_1 + 0.5) = 1.6$, $H_1 = 60$, $H_2 = 0$, $L = 306$, $v = 0.0111$, $k = 0.0017$, $\mu = 0.006$, 试分别求出 $t_i = 900$ 、1800、2700、3600、4425 等时段的浸润线峰点高程及浸润线变化。

(1) $t_i = 0s$, $t_{i+1} = 900$, $\Delta t = 900 - 0 = 900$, $h(0, t_i) = H_1 - vt_i = 60 - 0.0111 \times 0 = 60$, $h(0, t_{i+1}) = H_1 - vt_{i+1} = 60 - 0.0111 \times 900 = 50$, $h(l, t_i) = H_1 = 60$ (即图 1 中 B 点位置), $l = 25.5$ [按式 (1) 计算], $h_{cp} = (1/2)[h(l, t_i) + h(0, t_{i+1})] = (1/2)[60 + 50] = 55$, $a^2 = kh_{cp}/\mu = 0.0017 \times 55/0.07 = 15.58$, $D = \pi^2 a^2 / 4l^2 = 9.87 \times 15.58 / 4 \times (25.5)^2 = 0.059$, $D\Delta t = 0.059 \times 900 = 53.1$, $e^{-D\Delta t} = e^{-53.1} = 0$, 故 $e^{-9D\Delta t} = 0$ 。将上列各值代入式 (20) 则得 t_{i+1} 时段的峰点高程

$$h(l, t_{i+1}) = \sqrt{50^2 + 1.273 \times (60^2 - 50^2)(0 - 0) + 0.81 \times (60^2 - 50^2) \times 0} = 50$$

(试验值为 50.3)

(2) $t_i = 900$, $t_{i+1} = 1800$, $\Delta t = 1800 - 900 = 900$, $v = 0.0111$, $l = 51$ [按式 (1) 算出], $h(0, t_i) = 50$ [即上一时段的 $h(0, t_{i+1})$], $h(0, t_{i+1}) = H_1 - vt_{i+1} = 60 - 0.0111 \times 1800 = 40$, $h(l, t_i) = 50$ [即上一时段的 $h(l, t_{i+1})$], $h_{cp} = (1/2)[h(l, t_i) + h(0, t_{i+1})] = (1/2)(50 + 40) = 45$, $a^2 = kh_{cp}/\mu = 0.0017 \times 45/0.07 = 12.75$, $D = \pi^2 a^2 / 4l^2 = 9.87 \times 12.75 / 4 \times 51^2 = 0.0121$, $D\Delta t = 0.0121 \times 900 = 10.89$, $e^{-D\Delta t} = e^{-10.89} = 0$, 故 $e^{-9D\Delta t} = 0$ 。将上列各值代入式 (20) 得 $h(l, t_{i+1}) = 40$ (试验值 39.30)。

依此类推, 可逐时算出其他各个 $h(l, t_{i+1})$, 此处从略。各

时段结果列于表 1。

由表 1 可知, 不论是式 (12) 或式 (20) 计算结果与其他各种方法相对照, 均很接近。而本文方法则是方便简单, 运算迅速。特别是前苏联的 B.M. 谢斯塔可夫方法, 计算更繁^[3]。下面我们再按式 (13)、式 (14) 求得的浸润线与按其他方法求得的浸润线^[1]一并绘入图 3。

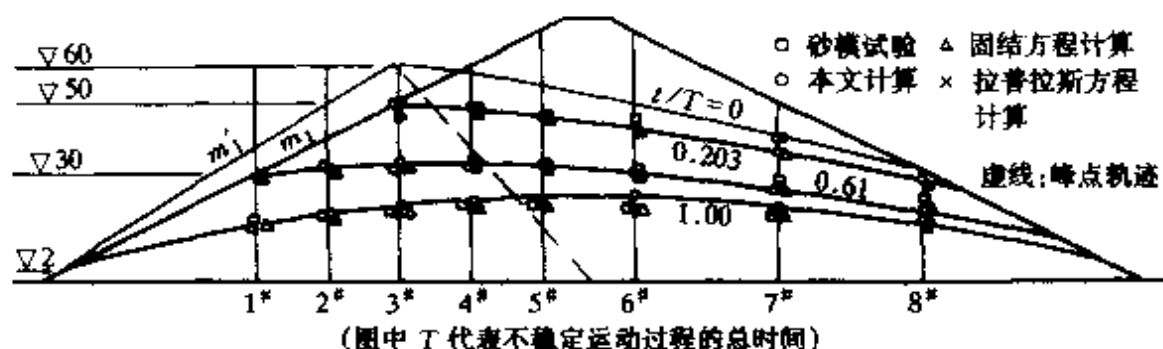


图 3

以上介绍的两种计算方法, 也可用于心墙坝, 只需将式 (12)、式 (20) 中的 l 值改为式 (21) 即可

$$l = S - (m'_1 - m_2)(H_1 - vt_{i+1}) \quad (21)$$

式中: S 为心墙迎水一侧的坡脚至上游坝壳的坡脚之距; m_2 为心墙迎水侧坡的边坡系数; m_1 为上游坝壳边坡系数; 其他符号同前。其实按式 (20)、式 (21) 求解心墙坝不稳定渗流就是文献 [2] 方法。

库水位下降常有骤降和缓降之分。所谓骤降, 无非是水位下降速度 v 很大而已, 但总不会有 $v = \infty$, 总有一个具体的 v 值, 就可代入本文公式求解。故采用本文方法, 不必事先区分骤降与缓降之别。

参 考 文 献

- 1 陶同康. 堤坝非稳定试验研究与计算. 南京: 南京水利科学研究所, 1979

- 2 沙金焯. 心墙坝壳中自由水面变化的分析. 水利学报. 1981 (1)
- 3 谢斯塔可夫, B. M. . 上下游水位变化时土工建筑物和边坡中动水压力的确定. 水利水电科学研究院土工译报, 1958. 12

心墙坝壳中自由水面 变化的分析

设计心墙土坝时，常需对迎水坝坡进行稳定分析，为此必须先求出水库水位降落过程中，坝壳中自由水面位置的变化。这是一个不稳定渗流问题，它取决于心墙上游坝壳的几何尺寸、库水位的下降速度、坝壳土料的透水性及释水性。由于心墙坝壳一般均以砂质土料组成，故压缩固结的影响可以忽略。

20 世纪 40 年代以后，各国学者曾对此问题作过研究，可惜的是都采用了差分方法求解，虽然避免了复杂的数学处理，但却增加了设计人员的计算量。瑞士希尼脱^[1] (G. Schnitter) 则从解析方法入手，求得了自由水面随时间的变化规律，但他对边界的处理过于简化，不太符合实际情况。例如，他假定心墙为垂直边坡，这对实际上为倾斜边坡的高坝来说，所造成的误差就不会小。其次，他把浸润线按正弦曲线规律分布，也是与实际情况有出入的。而且，希尼脱等只是研究了不透水地基上的心墙坝。除了理论分析外，他还在狭缝槽模型中做了大量的试验，这些资料对分析这一问题是很有价值的。德国乌利希 (D. Uhlig) 博士就是根据希尼脱的试验资料，求得了计算自由水面变化的经验公式^[2]，精确度较高，计算也不复杂，但毕竟是经验公式，受试验资料的局限性较大。我国学者黄文熙、周汾等曾先后对这一问题作了研究，提出了计算自由水面变化的方法^[3,4]。

近年来，有限单元法及电算的逐步开展，有利于解算这一问题。南京水利科学研究所曾对碧口坝采用电算求解。但电算只能提供某一具体工程问题的数值解，而不能给出这一问题的通解，计算虽快，但耗资较多。有鉴于此，本文拟在前人的基础上，对这一问题作一讨论，旨在得到一个既能保证精确度而又方便实用的方法，以供设计之用。

一、基本方程及边界处理

图1所示为两种常见的心墙坝型，图1(a)为直接建于不透水地基上的心墙坝，图1(b)为建于透水地基上的铺盖心墙坝。因为铺盖透水性很小，与地基透水性相比，故可视为不透水。

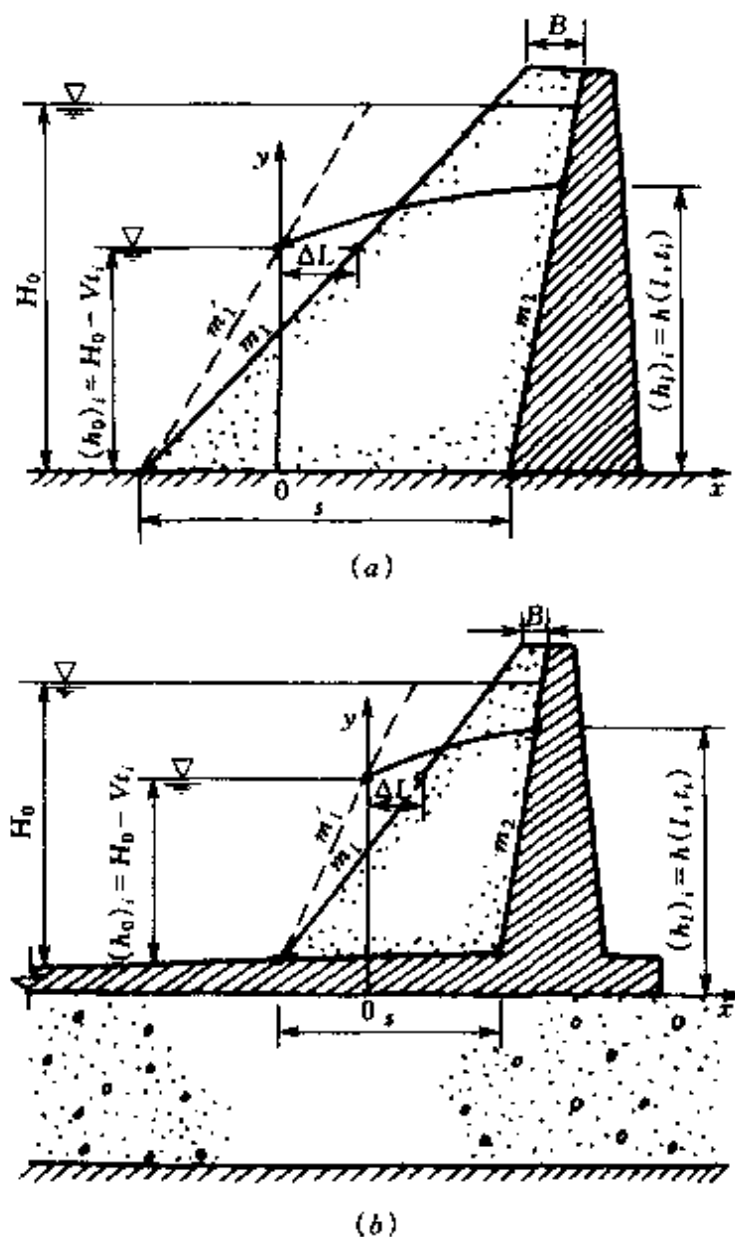


图1

在研究坝壳中自由水面变化时，由于坝壳透水性远远大于心墙透水性，故心墙可视为不透水边界，如同不透水地基一样

处理。

这两种坝型的不稳定渗流运动，可由包辛涅斯克 (Boussinesq) 方程描述，即

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (1)$$

式中：\$h\$ 为自由面高程 (m)；\$k\$ 为渗透系数 (m/d)；\$\mu\$ 为土的给水度。

将式 (1) 采用线性化方法得

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \quad (1')$$

$$a^2 = kh_{cp} / \mu \quad (2)$$

式中：\$a^2\$ 为水文地质参数 (m²/d)；\$h_{cp}\$ 为相邻两个时段内，自由面的平均高程 (m)。\$h_{cp}\$ 可近似地按式 (3) 计算

$$h_{cp} = [h(l, t_i) + h(0, t_{i+1})] / 2 \quad (3)$$

式中：\$h(l, t_i)\$ [或记为 \$(h_l)_i\$] 为在 \$i\$ 时段心墙迎水面上自由面的高程；\$h(0, t_{i+1})\$ [或记为 \$(h_0)_{i+1}\$] 为 \$(i+1)\$ 时段的库水位。式 (3) 是近似值，但不会引起显著误差。

式 (1) 是描述一维运动的不稳定渗流运动，它假定：在断面上沿垂线各点水平流速不变，运动符合缓变流条件，且底面是水平面。这对实际上是二维流动的土坝断面来说，其流网图形是有一定误差的，但用它来描述浸润线的变化则不会引起显著误差，特别是当分时段来研究时，由于水头差小，接近缓变流动，自由面比较平缓，基本符合上述假定。前苏联学者谢斯塔可夫^[5] (B.M. Шестаков) 通过试验研究指出可用包氏方程来求解这一问题，现有文献资料也表明此点。式 (1) 或式 (1') 的边界条件可按图 1 列出

$$h(0, t_i) = H_0 - ut_i \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (5)$$

式中：\$h(0, t_i)\$ 为任意时刻 \$t_i\$ 的库水位 (m)，当不稳定运动尚

未开始时, 则 $t_i = 0$, 于是得到 $h(0, 0) = H_0$, 此即起始库水位;
 v 为库水位下降速度 (m/d); $\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$ 为自由面在心墙迎水面上的斜率, 由于该处切线近似于一条水平线, 故取零值。此外, 由于自由面是随时间变化的, 故式中的 l 是一变量, 但对某一具体时刻来说, 则是一个常量, 其值可按式 (6) 计算

$$l = S - (m'_1 - m_2)(H_0 - vt_i) \quad (6)$$

式中: m_2 为心墙迎水面的边坡系数; S 为迎水坝壳坡脚至心墙迎水侧面坡脚的距离 (m); m'_1 为虚拟的迎水坝壳的边坡系数。谢斯塔可夫将浸润线按抛物线规律分布原则, 采用米哈依洛夫 (Г. К. Михайлов) 的虚拟长度 $\Delta L = h_0 / (2 + 1/m_1)$ [这里的 h_0 相当于本文的 $h(0, t_i)$, m_1 为实有的心墙上游坝壳边坡系数], 求得 m'_1 值为

$$m'_1 = m_1^2 / (m_1 + 0.5) \quad (7)$$

现在, 再来讨论初始条件。当 $t_i = 0$ 时, 库水位尚未下降, 此时水库及心墙上游坝壳可认为是同一水位, 即

$$h(x, 0) = H_0 \quad (8)$$

当 $t_i > 0$ 以后, 库水位开始下降, 坝壳中的浸润线便由水平线转变为一曲线。为了使得既能描述 $t_i = 0$ 时之初始水位, 又能描述 $t_i > 0$ 以后的任意时段的初始条件, 我们取式 (9) 作为统一的初始条件

$$h(x, t_i) = \sqrt{h^2(0, t_i) + [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)]x/l} \quad (9)$$

当研究 $(i+1)$ 时段的不稳定运动时, 式 (9) 的 i 时段的浸润线就是 $(i+1)$ 时段的初始条件。若库水位未下降, 亦即 $t_i = 0$ 时, 则此刻水库及上游坝壳中均为同一水位高程, 按式 (4) 可知, $h(0, t_i) = H_0 - vt_i = H_0$, 又按式 (8) 可知, $h(x, 0) = H_0$, 即式 (9) 中各 h 值均为 H_0 , 于是式 (9) 即可化为 $h(x, 0) = H_0$, 此即还原成式 (8)。由此可见, 式 (8) 寓于式 (9) 之中。

文献 [1] 过于简单地采用了正弦曲线来描述坝壳中的浸润线, 这与实际情况是不太符合的。

二、心墙坝壳中浸润线变化的分析

通过上述讨论, 现在我们可以根据式 (1)、式 (4)、式 (5)、式 (9) 列出描述任意时段心墙坝壳中浸润线变化的方程组

$$[I] \begin{cases} \frac{\partial h^2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \\ h(0, t_{i+1}) = [h(0, t_i) - v\Delta t] \\ \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \\ h(x, t_i) = \sqrt{h^2(0, t_i) + [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)]x/l} \end{cases}$$

式中: t_i 为从运动一开始起算的连续天数 (d); Δt 为时间步长, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ (d), 在同一算题中 Δt 可任选、等距或不等距步长均可; 其他符号同前。

方程组 [I] 是求解第 $(i+1)$ 时段的浸润线, 故第 i 时刻的浸润线就是其初始条件。

求解方程组 [I] 甚为繁琐, 其最终解答为

$$\begin{aligned} h(x, t_{i+1}) = & \left\{ h^2(0, t_{i+1}) \right. \\ & + \frac{4}{\pi} [h^2(0, t_i) - h^2(0, t_{i+1})] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-c\Delta t} \sin kx \\ & \left. + \frac{8}{\pi^2} [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-c\Delta t} \sin kx \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $k = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi/l$ $c = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi a/l\right]^2$

式 (10) 就是 $(i+1)$ 时段心墙上游坝壳中浸润线的计算式, 分别给以不同的 x/l 值, 就可以逐点算出各 h 值, 连接起来便是浸润线。

其实, 还可以用另一更方便的方法求浸润线, 即是先以 x/l 代入上式, 求出心墙迎水侧面上浸润线端点的高程

$$h(l, t_{i+1}) = \left\{ h^2(0, t_i) + \frac{4}{\pi} [h^2(0, t_i) - h^2(0, t_{i+1})] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-c\Delta t} + \frac{8}{\pi^2} [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-c\Delta t} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

将求得的 $h(l, t_{i+1})$ 代入式 (12)

$$h(x, t_{i+1}) = \sqrt{h^2(0, t_{i+1}) + [h^2(l, t_{i+1}) - h^2(0, t_{i+1})]x/l} \quad (12)$$

分别给以不同的 x/l 值, 即可很方便地求得浸润线, 而不必按式 (10) 逐点计算。它与按式 (10) 计算相比, 结果基本一致, 但运算速度却大大加快。

现在, 我们来验证式 (10) 的正确性, 然后再来简化它求其近似解。

今以 $x=0$ 代入式 (10), 则得到 $h(0, t_{i+1})$, 此即还原成边界条件式 $h(0, t_{i+1}) = [h(0, t_i) - v\Delta t]$, 若将式 (10) 对 x 偏微分一次, 并再令 $x=l$ 代入, 则得到 $\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$, 此即另一边条件式 (5)

若在式 (10) 中, 令 $\Delta t=0$ 代入, 则可得到

$$h(x, t_i) = \sqrt{h^2(0, t_i) + \frac{8}{\pi^2} [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin kx}$$

可以证明, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin kx = \frac{\pi^2 x}{8l}$, 从而回到式 (9) 的形式, 此即初始条件。

由此可知, 式 (10) 的解答是正确无误的。

现在, 我们来简化式 (11), 将其化为简单的运算形式。

经判明, 式 (11) 中的两个无穷级数均为性能良好的收敛级数, 因而取少量级数项求和就可代表整个级数之和, 今在式 (11) 中的前一个无穷级数中取 $n=0, n=1$ 两项, 后一个无穷

级数中取 $n=0$ 一项, 于是式 (11) 就可化简为下列算式

$$h(l, t_{i+1}) = \left\{ h^2(0, t_{i+1}) + \frac{4}{\pi} [h^2(0, t_i) - h^2(0, t_{i+1})] \left(e^{-D\Delta t} - \frac{1}{3} e^{-9D\Delta t} \right) + \frac{8}{\pi^2} [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] e^{-D\Delta t} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

对于 $(k/\mu v) > 10^{-1}$ 的情况, 还可将 $e^{-9D\Delta t}/3$ 这一项略去而为

$$h(l, t_{i+1}) = \left\{ h^2(0, t_{i+1}) + \left[\frac{4}{\pi} [h^2(0, t_i) - h^2(0, t_{i+1})] + \frac{8}{\pi^2} [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] \right] e^{-D\Delta t} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

式中: $D = \pi^2 a^2 / 4l^2$; $l = s - (m'_1 - m_2)h(0, t_{i+1})$; $h(l, t_i)$ 为上一时段心墙迎水侧面上浸润线端点高程, 可由上一时段中按公式求出, 对于第一个时段即 $t_i = 0$ 时, $h(l, t_i) = H_0$ (此即起始时刻的初始条件); 其他符号意义同前。

按式 (13) 或式 (14) 求出 $h(l, t_{i+1})$ 后, 便可代入式 (12) 求出浸润线。

三、算例

设有如图 1 (a) 所示的心墙砂壳坝。已知 $m_1 = 2.08$, $m_2 = 0.16$, $k/\mu = 1\text{m/d}$, 库水位下降速度 $v = 1\text{m/d}$, 起始库水位 $H_0 = 5\text{m}$, $s = 9.6\text{m}$, 试求坝壳中浸润线随时间的变化。

解 先按式 (7) 求出 $m'_1 = 1.68$, 然后分时段逐段求解。

第一天: $t_i = 0$, $\Delta t = 1\text{d}$

$$h(0, t_i) = H_0 - vt_i = 5\text{m}$$

$$h(0, t_{i+1}) = h(0, t_i) - v\Delta t = 4\text{m}$$

$$h(l, t_i) = H_0 = 5\text{m}$$

$$h_{cp} = [h(l, t_i) + h(0, t_{i+1})] / 2 = 4.5\text{m}$$

$$a^2 = kh_{cp} / \mu = 4.5\text{m}^2/\text{d}$$

$$l = s - (m'_1 - m_2)h(0, t_{i+1}) = 3.52\text{m}$$

$$D = \pi^2 a^2 / 4l^2 = 0.896/\text{d} \quad D\Delta t = 0.896 \quad e^{-D\Delta t} = 0.408$$

$$9D\Delta t = 8.82 \quad e^{-9D\Delta t} = 0 \quad 4/\pi = 1.27 \quad 8/\pi^2 = 0.81$$

将上列各值代入式 (13), 最后得到

$$h(l, t_{i+1}) = 4.52\text{m}$$

求出 $h(l, t_{i+1})$ 后, 便可按式 (12) 计算浸润线, 其结果见表 1。

表 1

x/l	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$h(x/l, t_{i+1})$	4.00	4.11	4.21	4.32	4.42	4.52

第二天: $t_i = 1\text{d}$, $\Delta t = 1\text{d}$

$$h(0, t_i) = H_0 - vt_i = 4\text{m}$$

$$h(0, t_{i+1}) = h(0, t_i) - v\Delta t = 3\text{m}$$

$$h(l, t_i) = 4.52\text{m} \text{ (上一时段中求得)}$$

$$h_{cp} = [h(l, t_i) + h(0, t_{i+1})]/2 = 3.76\text{m}$$

$$a^2 = 3.76\text{m}^2/\text{d} \quad l = 5.04\text{m}$$

$$D = 0.364/\text{d} \quad D\Delta t = 0.364 \quad e^{-D\Delta t} = 0.694$$

$$9D\Delta t = 3.276 \quad e^{-9D\Delta t} = 0$$

将上列各值代入式 (13), 得 $h(l, t_{i+1}) = 4.20\text{m}$, $h(l, t_{i+1})/H_0 = 0.84$ (试验值 0.85)。

求出 $h(l, t_{i+1}) = 4.20\text{m}$ 后, 同上一时段一样, 再按式 (12) 求浸润线, 此处不再重复。

依此类推, 可以算出任意时段的浸润线, 而在运算过程中, 每一时段 Δt 的选取是任意的。我们曾按此例计算了 4 天, 其结果见表 2。

为了更广泛地验算公式 (13), 我们计算了较多的组次, 并将计算结果和希尼脱的试验资料加以对比^[1,2], 见表 3~表 5。

由表 3~表 5 可知, 本文公式 (13)、式 (14) 的精确度是好的, 在 19 组资料的统计中, 平均误差是 2.43%, 最大误差不超过 6%, 可满足设计要求。

表 2

天数	t_i (d)	Δt (d)	h_0 (m)	$h(0, t_{i+1})$ (m)	$h(l, t_i)$ (m)	h_{cp} (m)	a^2 (m ³ /d)	l (m)
1	0	1	5	4	5.00	4.50	4.50	3.52
2	1	1	4	3	4.52	3.76	3.76	5.04
3	2	1	3	2	4.20	3.10	3.10	6.56
4	3	1	2	1	3.88	2.44	2.44	8.08
天数	D (1/d)	$D\Delta t$	$e^{-D\Delta t}$	$9D\Delta t$	$e^{-9D\Delta t}$	$h(l, t_{i+1})$ (m)	$\frac{h(l, t_{i+1})}{H_0}$	试验值
1	0.980	0.980	0.374	8.82	0	4.52	0.901	—
2	0.364	0.364	0.694	3.28	0	4.20	0.840	0.85
3	0.178	0.178	0.837	1.60	0.202	3.88	0.770	0.77
4	0.093	0.912	0.912	0.83	0.435	3.58	0.716	0.71

表 3

$k/uv = 10$, $v = 2\text{m/d}$, $H_0 = 20\text{m}$,
水库放空天数 $T_0 = H_0/v = 10\text{d}$

t/T_0		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	备 注
$h(l, t_{i+1})$	计算值	1.000	0.801	0.612	0.473	0.384	0.328	0.160	试验值取 $m_1=2.08$, $m_2=0.16$
	试验值	1.000	0.840	0.670	0.510	0.400	0.330	0.150	

表 4

$k/uv = 1$, $v = 1\text{m/d}$, $H_0 = 5\text{m}$,
水库放空天数 $T_0 = H_0/v = 5\text{d}$

t/T_0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	4.0	8.0	备 注	
$h(t, t_{i+1})$	计算值	1.000	0.900	0.840	0.770	0.710	0.645	0.515	0.340	0.220	试验值取 $m_1 = 2.08$, $m_2 = 0.16$
	试验值	1.000	—	0.850	0.770	0.710	0.650	0.480	0.390	0.270	

表 5

 $k/uv = 10^{-1}$, $v = 10\text{m/d}$, $H_0 = 20\text{m}$,水库放空天数 $T_0 = H_0/v = 2\text{d}$

t/T_0	1.0	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0	64.0	备 注
$h(t, t_0)$	计算值	0.955	0.840	0.740	0.600	0.490	0.390	0.280
	试验值	—	0.850	0.740	0.620	0.480	0.340	0.220
								试验值取 $m_1 = 2.08$, $m_2 = 0.16$

四、透水地基上心墙坝壳中的浸润线变化

图 2 为一修建于透水地基上的心墙坝，一般常在心墙底下设有悬挂式截水墙；对于透水地基较浅时，则截水墙为完整式，直达不透水基岩。本文研究的是带有完整式截水墙的心墙坝。

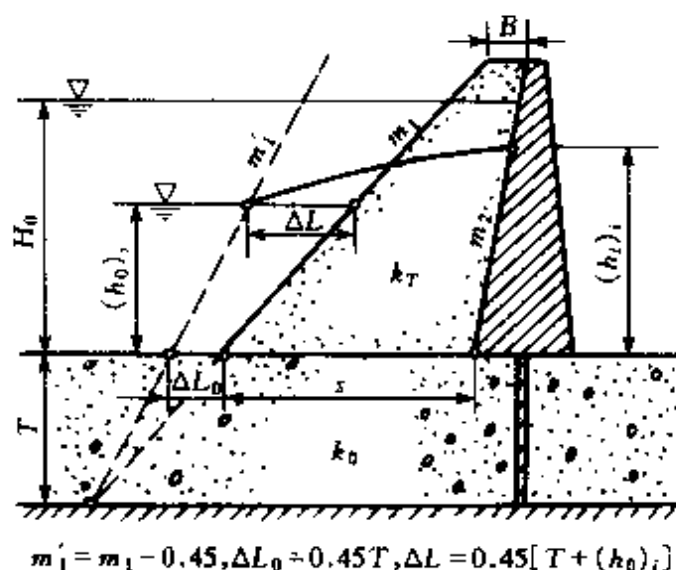


图 2 位于透水地基上的心墙坝

对于这种情况的不稳定渗流计算，基本上如同前述计算方法一样。惟一不同之处在于将式 (2) 乘上一个修正系数 α ，即

$$a^2 = kh_{cp}\alpha/\mu \quad (15)$$

修正系数 α 值的计算由式 (16) 给出

$$\alpha = q_{Hk}/q_c \quad (16)$$

式中： q_{Hk} 为水库水位下降期间，由坝壳及坝基流向水库的渗流量 (m^2/d)； q_c 为假设心墙上游坝壳边坡延长，穿越透水层 T

直达不透水层基岩时, 该假想坝壳流向水库的流量 (m^2/d)。

在水库水位下降期间, 渗流量并非全部由坝壳泄向水库, 其中有一部分从地基泄入水库, 由于流线弯曲而产生附加损失, 而 q_c 则是全部由坝壳泄入水库, 不增加附加损失, 故 $q_{Hk} < q_c$ 。 q_{Hk} 及 q_c 可由式 (17)、式 (18) 求得

$$q_{Hk} = k_T [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] / 2l' + k_0 T [h(l, t_i) - h(0, t_i)] / (l_{cp} + 0.44T) \quad (17)$$

$$q_c = k_T [h^2(l, t_i) - h^2(0, t_i)] / 2l' + k_0 T [h(l, t_i) - h(0, t_i)] / l_{cp} \quad (18)$$

式中: $l' = s + \Delta L_0$; $l_{cp} = (l' + l'') / 2$; $l'' = l' + (m'_1 - m_2)T$; $\Delta L = 0.45T$; T 为透水层深度 (m); k_0 、 k_T 分别为坝基、坝体渗透系数 (m/d); 其他符号同前。这里要注意, 坐标轴 x 轴仍放在坝的底面, 而不是放在不透水层基岩面上。

式 (17)、式 (18) 的建立虽不够严格, 但它对浸润线的计算是不会引起显著误差的。

将式 (17)、式 (18) 代入式 (16) 则得 α 的计算式为

$$\alpha = \left(1 + \frac{k_0}{k_T} \frac{T}{h_{cp}} \frac{l'}{l_{cp} + 0.44T} \right) / \left(1 + \frac{k_0}{k_T} \frac{T}{h_{cp}} \frac{l'}{l_{cp}} \right) \quad (19)$$

由式 (19) 可知, 当 $T=0$ 时, 则 $\alpha=1$ 。 h_{cp} 为浸润线平均高程, 可近似地取为 $h_{cp} = [h(0, t_i) + h(l, t_i)] / 2$ 。一般情况下, $k_0 > k_T$, 如果 $k_0/k_T > 100$, 则式 (19) 可简化为

$$\alpha = l_{cp} / (l_{cp} + 0.44T) \quad (20)$$

求出 α 后, 便可代入式 (15) 即得 a^2 , 于是便可参照“三、”中算例进行计算。

值得指出的是, 当 $t_i=0$ 时, 起始水位为 H_0 的一条水平线, 故 $h_{cp} = H_0$ 。因此, 在此时是会产生渗流运动的, 只是在 $t_i > 0$ 以后才形成渗流, 才有浸润曲线, 但是在 h_{cp} 的计算式中, 含有 $h(l, t_i)$ 这一项恰是个待求值, 因而 h_{cp} 求不出来, 为此, 可近似地取前一时段的 $h(l, t_{i-1})$, 因而 h_{cp} 的表达式可改写为

$$h_{cp} = [h(0, t_i) + h(l, t_{i-1})] / 2 \quad (21)$$

或
$$h_{cp} = [h(0, t_{i+1}) + h(l, t_i)] / 2 \quad (22)$$

现将计算步骤归纳如下：

先从 $t_i = 0$ 开始起经历第一个时段 Δt 值后，得到库水位为 $h(0, t_{i+1}) = (H_0 - vt_i) - v\Delta t$ ，而 $h(l, t_i) = H_0$ ，代入式 (22) 求得 h_{cp} ，从而可由式 (19) 求得 α ，再由式 (15) 求得 a^2 。至此，便可仿“三、”中算例进行计算。

参 考 文 献

- 1 Schnitter und Zeller. Sickerströmungen als Folge Von Stauspiegelschwankungen in Erddämmen. *Schweizerische Bauzeitung*. Zurich 75, Jg (1957), S. 52, S. 808
- 2 Dieter Uhlig. Die Sickerlinie im Wasserseitigen Stützkörper Von Staudämmen bei Stauspiegelsenkung. *Wasserwirtschaft - Wassertechnik*. Hft 5, 1962
- 3 黄文熙. 水库水位降落对砂质坝壳稳定性影响的研究. 见：南京水利实验处研究试验报告汇编（专题研究部分）. 1954
- 4 周汾，徐家海，刘杰. 水库水位降落时心墙土坝上游坝壳中自由水面位置的确定. *水利学报*. 1962 (1)
- 5 谢斯塔可夫，B. M. . 上下游水位降落时土工建筑物和边坡中水动力的确定. 北京水科院土工译报. 1958. 12

各向异性土渗流的转化问题

土坝或江河的堤防，由于分层碾压施工，常形成各向异性土层，其渗透性随方向而变，一般总是水平方向的渗透性大于垂直方向的渗透性（即 $k_x > k_y$ ）。解决这种各向异性土的渗流问题，采用电解液模型试验及解析计算是无能为力的，通常都是采用等效转换法化为各向同性土处理。现行有关文献均采用改变 x 轴方法转化为各向同性土，即 $x' = \sqrt{k_y/k_x}x$ ， $k' = \sqrt{k_x k_y}$ 。但是这种习用方法，对于具有交界面的层状土（各向异性）的转化，则不宜采用。

此外，现行有关文献对层状土（各向同性）转化为单层土（各向异性）的方法，经本文验算，无论渗流量及各点势函数，均不能对应相等，因而说明了这种转化关系值得商榷。

一、各向异性土的转化

（一）垂直剖面的二元渗流问题

描述各向异性土的二元渗流基本方程为

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

式中： x 、 y 分别为水平、垂直坐标轴； h 为水头； k_x 、 k_y 分别为水平和垂直方向的渗透系数。当消去方程中的 k_x 、 k_y ，则为转化各向同性渗流场的拉普拉斯方程。

有下列几种转化方法。

1. 改变 x 轴的方法

将式（1）通过 x 轴的转化得下列拉普拉斯方程

$$k' \frac{\partial^2 h}{\partial x'^2} + k' \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

$$x' = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} x \quad (3)$$

$$k' = \sqrt{k_x k_y} \quad (4)$$

式中：\$x'\$ 为新的水平坐标轴；\$k'\$ 为新的各向同性渗透系数。

式 (1) 化为式 (2) 后，结合边界条件就可求解，这就是现行习用的等效转化方法。不仅渗流量相等，而且渗流场内各对应点的势函数也均逐一对应相等。

2. 改变 \$y\$ 轴的方法

(1) 不带有交界面（不透水地基上堤坝渗流的各向异性）的转化。将式 (1) 同除 \$k_x\$ 而得

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y'^2} = 0 \quad (5)$$

$$y' = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} y \quad (6)$$

$$h' = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} h \quad (7)$$

式 (5) 中由于垂直坐标改变，则上、下游水位也将相应改变，故 \$h\$ 变为 \$h'\$。

将式 (5) 同乘 \$k'\$ 得

$$k' \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + k' \frac{\partial^2 h'}{\partial y'^2} = 0 \quad (8)$$

式中：\$k'\$ 为各向同性渗透系数，且不能任意取值。\$k'\$ 可按按下法确定。

由图 1 (a) 可得 \$x\$ 方向的渗流量

$$q_x = k_x \frac{\Delta h}{b} a \quad (9)$$

由图 1 (b) 则得

$$q'_x = k' \frac{\Delta h \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}}{b} a \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \quad (10)$$

\$q_x\$ 必然等于 \$q'_x\$，于是可得^[3]

$$k' = k_y \quad (11)$$

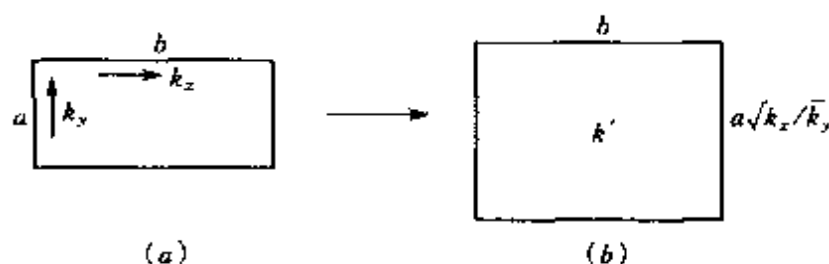


图 1

如若取 $q_y = q'_y$, 也可求得 $k' = k_y$ 。

由以上可知, 当改变 y 轴转化为各向同性土时, 新的渗透系数 $k' = k_y$, 而不再是 $k' = \sqrt{k_x k_y}$ 。

例 1 设有一矩形坝, 坝高 10m, 坝宽 20m, 上游水位为 10m, 下游水位为 8m, 各向异性土, $k_x = 16\text{m/d}$, $k_y = 4\text{m/d}$ (见图 2)。试求渗流量及渗流场内各点位势, 并再按式 (6)、式 (7)、式 (11) 求转化为各向同性土时的渗流量及各点位势。

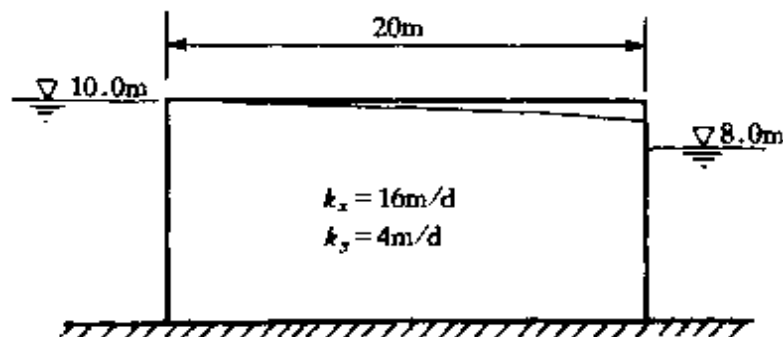


图 2

经电算求解, 得到渗流量 $q = 14.2427\text{m}^2/\text{d}$, 而化为各向同性土时 (见图 3), 求得 $q = 14.2616\text{m}^2/\text{d}$, 转化前后的渗流场内各点位势均能对应相等^[3]。由此可知, 式 (6)、式 (7)、式 (11) 的转化关系是正确可靠的。

(2) 带有交界面 (透水地基上的堤坝渗流的各向异性) 的转化。对坝体而言, 可直接根据式 (6)、式 (7)、式 (11) 得到

$$y'_1 = \sqrt{\frac{k_{1x}}{k_{1y}}} y_1 \quad h'_1 = \sqrt{\frac{k_{1x}}{k_{1y}}} h_1 \quad k'_1 = k_{1y}$$

而对坝基, 则得

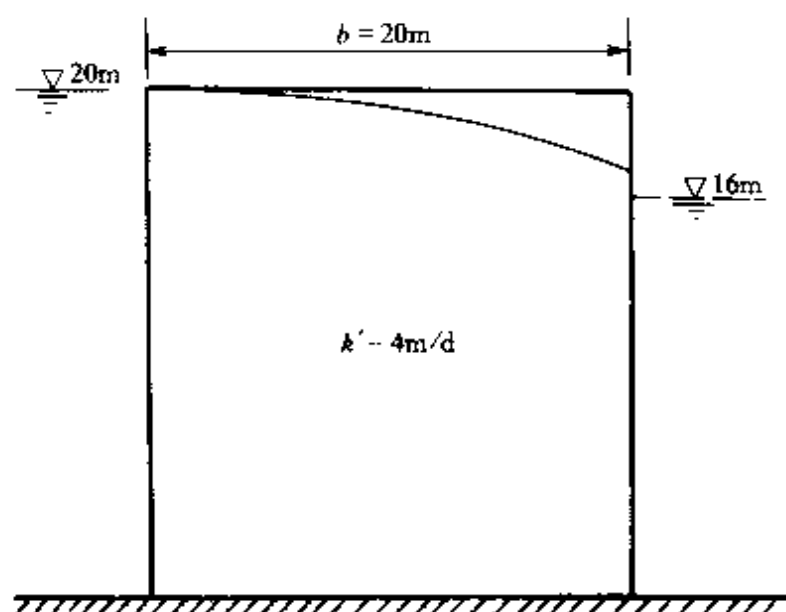


图 3

$$y'_2 = \sqrt{\frac{k_{2x}}{k_{2y}}} y_2$$

至于坝基水头的转化, 根据吴世余的研究仍应采用坝体的转化关系

$$h'_2 = \sqrt{\frac{k_{1x}}{k_{1y}}} h_2$$

根据上述关系不难导得, 新的坝基各向同性渗透系数为

$$k'_2 = \sqrt{\frac{k_{1y}}{k_{1x}} \frac{k_{2x}}{k_{2y}}} k_{2y}$$

将上述各式归纳如下

$$\left. \begin{array}{l} \text{坝体} \quad y'_1 = \sqrt{\frac{k_{1x}}{k_{1y}}} y_1, \quad h'_1 = \sqrt{\frac{k_{1x}}{k_{1y}}} h_1, \quad k'_1 = k_{1y} \\ \text{坝基} \quad y'_2 = \sqrt{\frac{k_{2x}}{k_{2y}}} y_2, \quad h'_2 = \sqrt{\frac{k_{1x}}{k_{1y}}} h_2, \quad k'_2 = \sqrt{\frac{k_{1y}}{k_{1x}} \frac{k_{2x}}{k_{2y}}} k_{2y} \end{array} \right\} \quad (12)$$

式 (12) 由吴世余导得。坝基若为各向同性, 则只需令 $k_{2x} = k_{2y} = k_2$ 代入即可。以上转化关系, 不仅渗流量相等, 而且各点势函数在转化前后也对应相等, 并且在交界面上符合折射规

律。曾将图 4 转化为图 5，计算表明正确可靠。

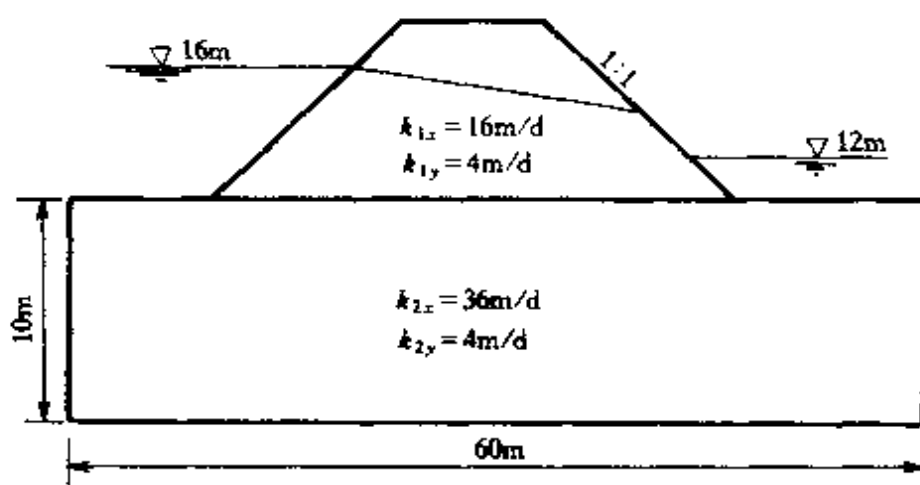


图 4

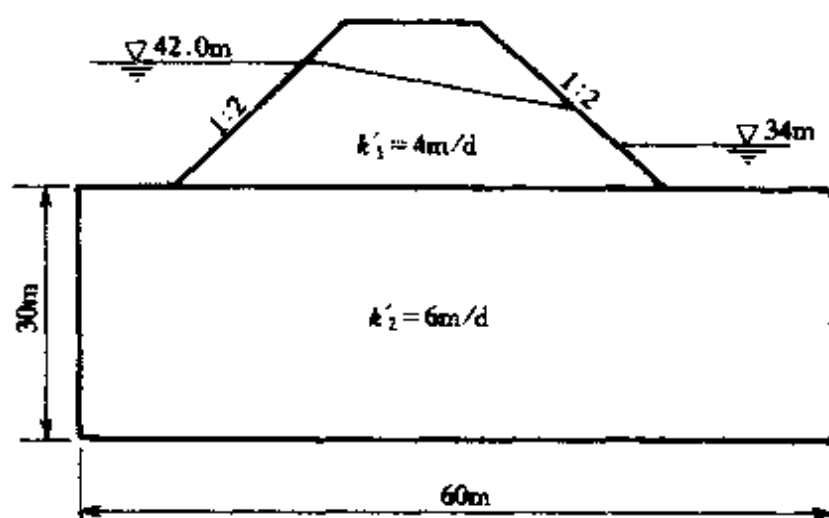


图 5

(3) 多层闸基（或坝基）有压渗流的转化。以双层闸基为例（见图 6）。采用改变 y 轴方法，则得

$$\begin{aligned} y'_1 &= \sqrt{\frac{k_{1x}}{k_{1y}}} y_1 & h'_1 &= \sqrt{\frac{k_{1x}}{k_{1y}}} h_1 \\ y'_2 &= \sqrt{\frac{k_{2x}}{k_{2y}}} y_2 & h'_2 &= \sqrt{\frac{k_{2x}}{k_{2y}}} h_2 \end{aligned}$$

转化前水头差 $\Delta h = h_{\text{上}} - h_{\text{下}}$ ，转化后水头差 $\Delta h' = [(y'_1 + y'_2 + h_{\text{上}}) - (y'_1 + y'_2 + h_{\text{下}})] = \Delta h$ ，根据转化前后渗流量相等

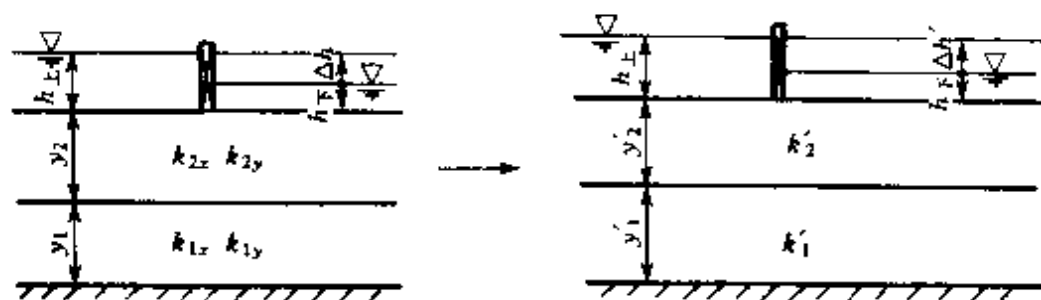


图 6

原则得

$$k'_1 = k_{1x} \sqrt{\frac{k_{1x}}{k_{1y}}}$$

$$k'_2 = k_{2x} \sqrt{\frac{k_{2x}}{k_{2y}}}$$

可见, 虽然未改变 x 轴, 但所得新的渗透系数恰好和采用改变 x 轴方法所得相同。由上述结果便可推知, 对于 n 层各向异性地基, 则可按式 (13) 逐层转化为各向同性

$$y'_i = \sqrt{\frac{k_{ix}}{k_{iy}}} y_i, \quad h'_i = \sqrt{\frac{k_{ix}}{k_{iy}}} h_i, \quad k'_i = k_{ix} \sqrt{\frac{k_{ix}}{k_{iy}}} \quad (13)$$

为了验证式 (12)、式 (13) 的正确性, 作了以下两个算例。图 7 是按式 (12) 转化的。图 8 是按式 (13) 转化的。

由图 7、图 8 可知, 式 (12)、式 (13) 是正确可靠的, 不仅渗流量相等, 渗流流网也相对应, 而且在交界面上符合流向折射规律。

3. 同时改变 x 轴和 y 轴的方法

由式 (1) 得

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (14)$$

并化为式 (15)

$$k' \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} + k' \frac{\partial^2 h'}{\partial y'^2} = 0 \quad (15)$$

两式对应项相等, 故得新坐标系为

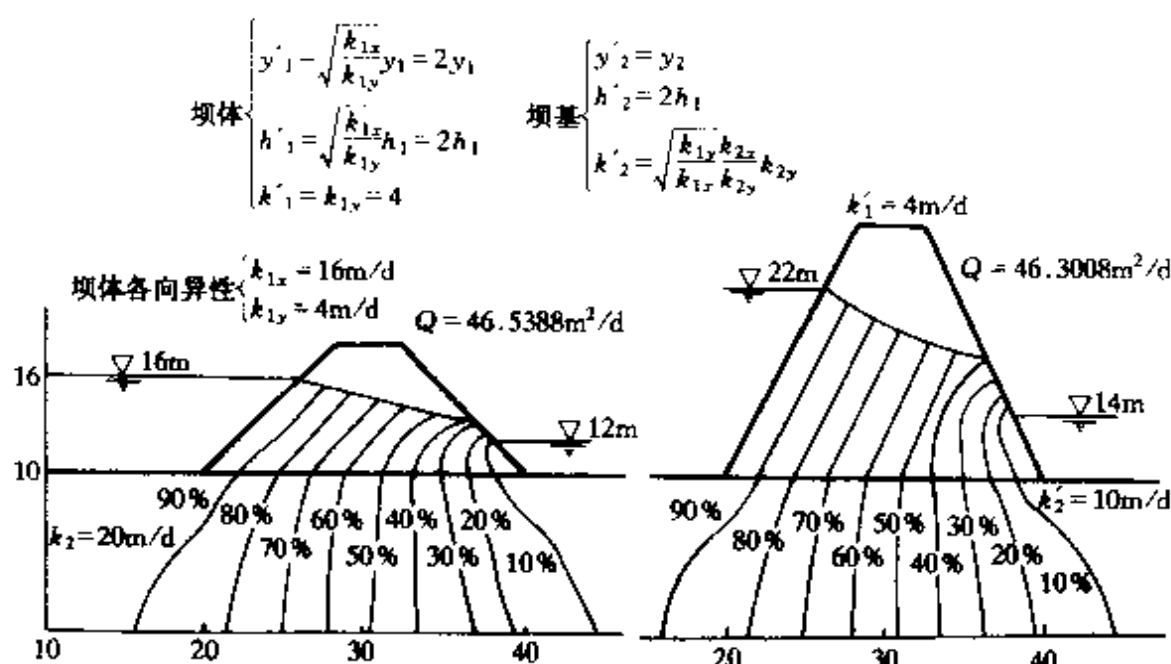


图 7

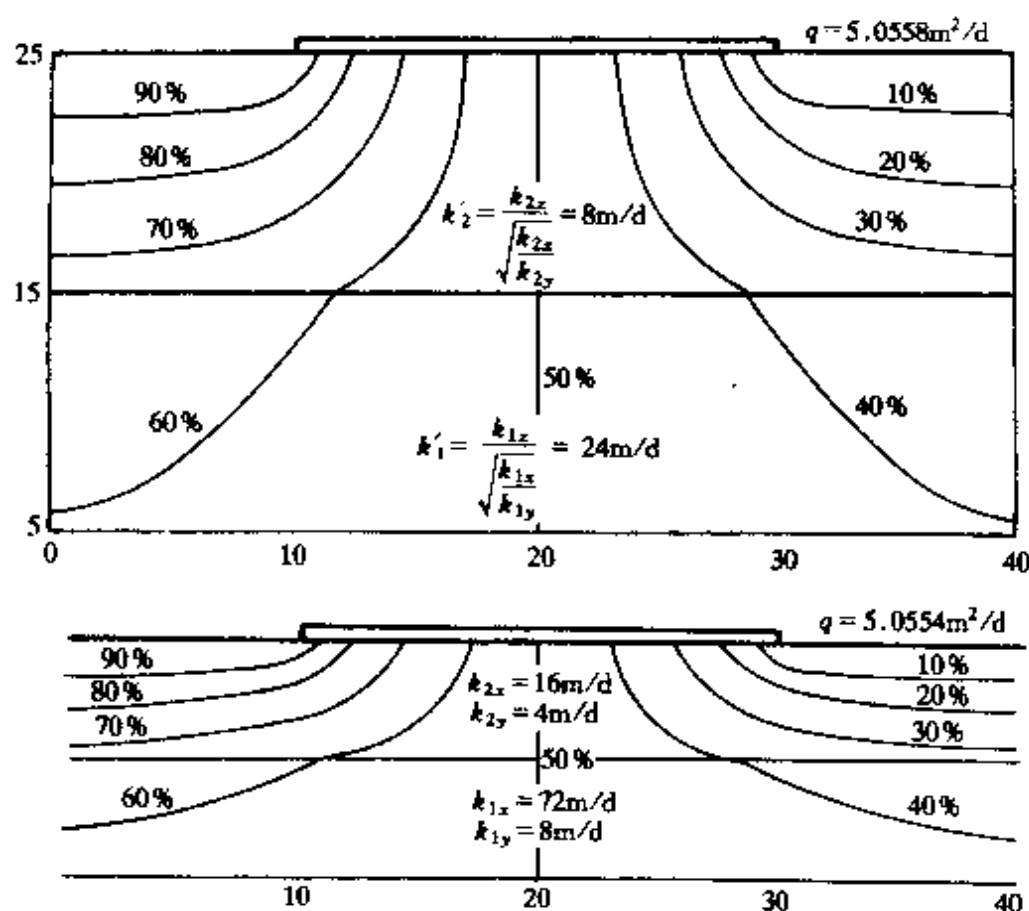


图 8

$$x' = \sqrt{\frac{k}{k_x}}x, \quad y' = \sqrt{\frac{k}{k_y}}y, \quad h' = \sqrt{\frac{k}{k_y}}h \quad (16)$$

而根据转化前后流量相等原则, 得到新的各向同性渗透系数为

$$k' = \sqrt[3]{k_x k_y^2} \quad (17)$$

例 2 仍将图2的各向异性矩形坝采用式 (16)、式 (17) 化为各向同性坝 (见图 9), 此时 $k' = \sqrt[3]{16 \times 4^2} = 6.35 \text{ (m/d)}$, $x' = \sqrt{\frac{6.35}{16}}x = 0.63x$, $y' = \sqrt{\frac{6.35}{4}}y = 1.26y$, 经用电算求得图 9 的渗流量 $q = 14.2808 \text{ m}^2/\text{d}$ (例 1 的 $q = 14.2427 \text{ m}^2/\text{d}$), 转化前后的渗流场内各点位势均能对应相等^[3]。

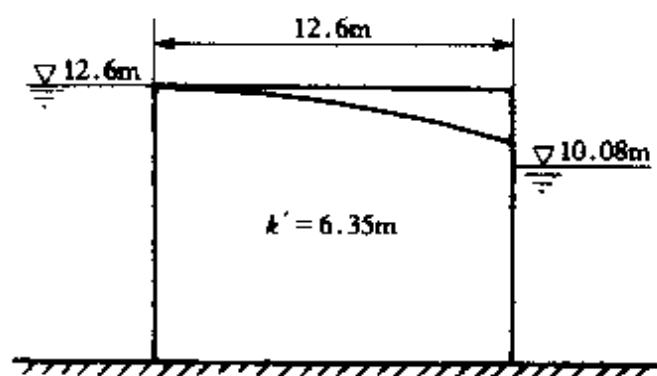


图 9

(二) 垂直剖面的三元渗流问题

1. x 、 y 、 z 轴均改变的方法

各向异性的三元渗流基本方程

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (18)$$

将式 (18) 化为下列各向同性三元渗流方程

$$k' \frac{\partial^2 h'}{\partial x'^2} + k' \frac{\partial^2 h'}{\partial y'^2} + k' \frac{\partial^2 h'}{\partial z'^2} = 0 \quad (19)$$

两式对应项相等, 故得各向同性渗流场坐标系

$$x' = \sqrt{\frac{k}{k_x}}x, \quad y' = \sqrt{\frac{k}{k_y}}y,$$

$$z' = \sqrt{\frac{k'}{k_z}} z, \quad h' = \sqrt{\frac{k'}{k_z}} h \quad (20)$$

式中: x 、 y 为水平方向的坐标; z 为垂直方向坐标。 k' 值可按图 10 求得。

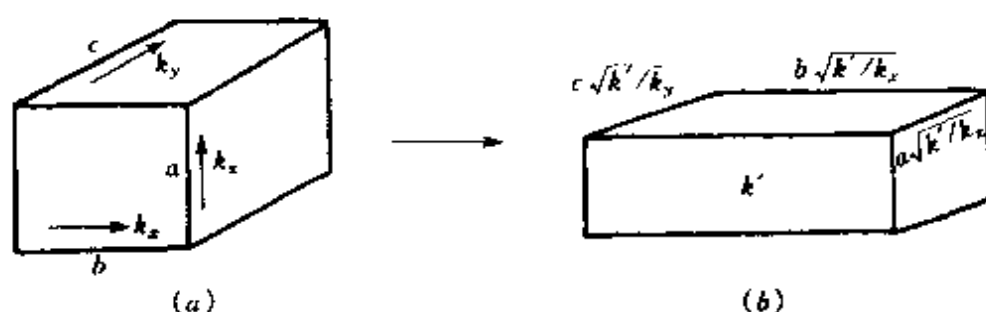


图 10

由图 10 (a) 得

$$q_x = k_x \frac{\Delta h}{b} ac \quad (21)$$

由图 10 (b) 得

$$q'_x = k' \frac{\Delta h \sqrt{k'/k_z}}{b \sqrt{k'/k_x}} a \sqrt{k'/k_z} c \sqrt{k'/k_y} \quad (22)$$

联立解后, 得新的各向同性渗透系数 k' 为

$$k' = \sqrt[4]{k_x k_y k_z^2} \quad (23)$$

而不是现行文献 [4] 中采用的

$$k' = \sqrt[3]{k_x k_y k_z} \quad (24)$$

类似以上推导方法, 还可求出下列各转化关系:

2. 改变 y 、 z 轴不改变 x 轴的方法

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} y, \quad z' = \sqrt{\frac{k_x}{k_z}} z, \\ h' &= \sqrt{\frac{k_x}{k_z}} h, \quad k' = k_z \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \end{aligned} \quad (25)$$

3. 改变 x 、 z 轴不改变 y 轴的方法

$$x' = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} x, \quad z' = \sqrt{\frac{k_y}{k_z}} z, \\ h' = \sqrt{\frac{k_y}{k_z}} h, \quad k' = \sqrt{k_z k_x^2 / k_y} \quad (26)$$

4. 改变 x 、 y 轴不改变 z 轴的方法

$$x' = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} x, \quad y' = \sqrt{\frac{k_z}{k_y}} y, \quad h' = h, \quad k' = \sqrt{k_x k_y} \quad (27)$$

现将各向异性的二元、三元渗流问题转化关系汇总列入表 1。

表 1

转化方法	对应坐标转化关系	化为各向同性 ± 的渗透系数	备注
改变 x 轴	$x' = \sqrt{k_y/k_x} x, y' = y, h' = h$	$k' = \sqrt{k_x k_y}$	x 为 水平 轴, y 为 垂直 轴
改变 y 轴	$x' = x, y' = \sqrt{k_x/k_y} y, h' = \sqrt{k_x/k_y} h$	$k' = k_y$	
改变 x, y 轴	$x' = \sqrt{k'/k_x} x, y' = \sqrt{k'/k_y} y, h' = \sqrt{k'/k_y} h$	$k' = \sqrt{k_x k_y^2}$	
改变 x, y 轴	$x' = \sqrt{k_x/k_x} x, y' = \sqrt{k_z/k_y} y$	$k' = \sqrt{k_x k_y}$	x, y 为水 平轴, z 为 垂直 轴
改变 x, z 轴	$x' = \sqrt{k_y/k_x} x, z' = \sqrt{k_y/k_z} z, h' = \sqrt{k_y/k_z} h$	$k' = \sqrt{k_x k_z^2 / k_y}$	
改变 y, z 轴	$y' = \sqrt{k_x/k_y} y, z' = \sqrt{k_x/k_z} z, h' = \sqrt{k_x/k_z} h$	$k' = k_x / \sqrt{k_x/k_y}$	
改变 x, y, z 轴	$x' = \sqrt{k'/k_x} x, y' = \sqrt{k'/k_y} y, \\ z' = \sqrt{k'/k_z} z, h' = \sqrt{k'/k_z} h$	$k' = \sqrt{k_x k_y k_z^2}$	

注 1. 对于透水地基上的堤坝渗流问题及闸坝地基(层状土)等渗流转化关系见式(12)、式(13)。

2. 表中凡涉及到改变水平轴的转化方法,均不能用于具有交界面的层状各向异性土的转化。

坝体渗流的各向异性 ($k_x > k_y$), 主要影响坝体内浸润线的位置, 容易导致滑坡。图 11、图 12 分别求出了不同 $\sigma = k_x/k_y$ 值时浸润线的位置。

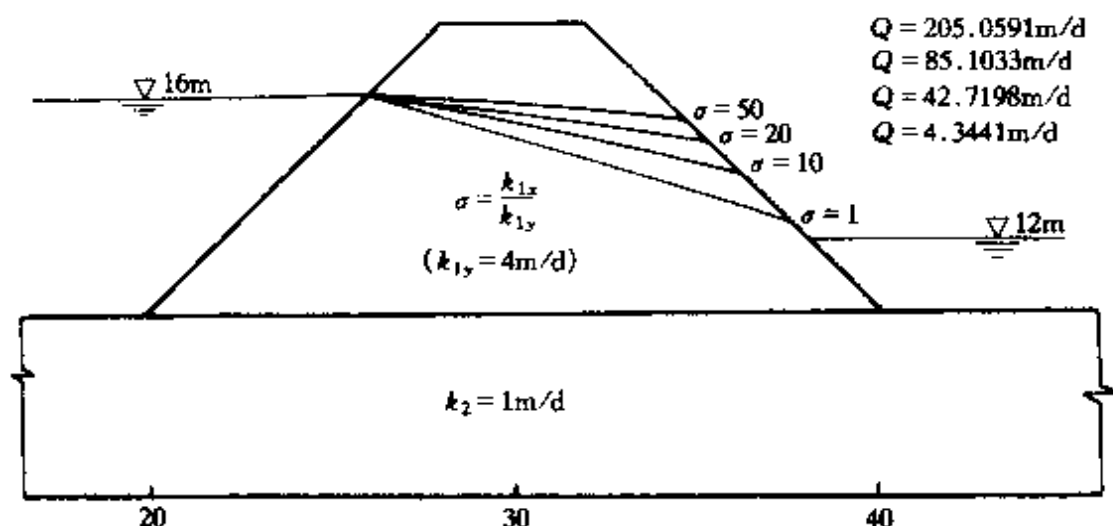


图 11

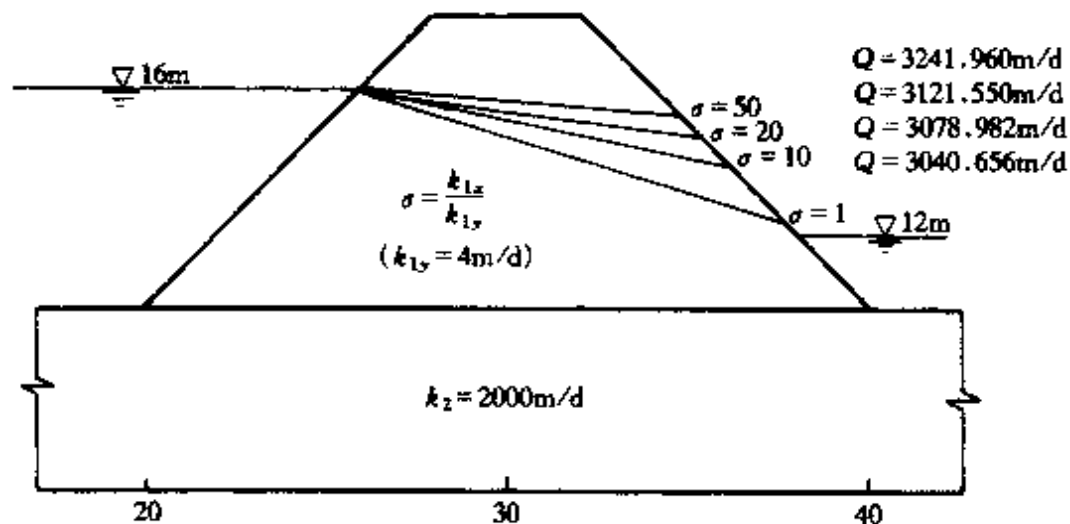


图 12

由图 11 可见, 浸润线的抬高主要受 σ 大小的影响, 而与坝基土层透水性的强弱几乎没有什么关系。不少学者认为, 强透水地基上的坝体浸润线位置要比弱透水地基上坝体浸润线的位置低, 其实这是一种误解。因为一般均质坝体内的土料都是粘性土, 由于各向异性之故, 经碾压后垂直方向渗透性 k_y 很小, 渗

入坝内的水流往往直接经由水平方向从坝体渗入下游，与坝基透水性强弱程度关系不大，而与 σ 和渗流量的关系较大。图 11、图 12 和表 2、表 3 都清楚地说明了这一点。

表 2

$\sigma = k_x/k_y$		k_2	0.001	1	20	2000
$\frac{4}{4} = 1$	h_a		12.413	12.419	12.394	12.368
	q		2.7840	4.3441	33.5933	3040.6560
$\frac{16}{4} = 4$	h_a		13.599	13.597	13.581	13.571
	q		15.8478	17.3995	46.5387	3053.5830
$\frac{40}{4} = 10$	h_a		13.835	13.834	13.824	13.812
	q		41.1637	42.7198	71.8913	3078.982
$\frac{80}{4} = 20$	h_a		14.731	14.731	14.730	14.728
	q		83.5482	85.1033	114.3246	3121.550
$\frac{200}{4} = 50$	h_a		15.404	15.404	15.404	15.404
	q		203.5098	205.0591	234.3160	3241.960

表 3

$\sigma = k_x/k_y$		k_2	0.001	1	20	2000
$\frac{20}{20} = 1$	h_a		12.413	12.415	12.418	12.370
	q		13.9139	15.4722	45.1064	3054.373
$\frac{80}{20} = 4$	h_a		13.599	13.599	13.592	13.571
	q		79.2327	80.7866	110.1953	3119.075
$\frac{200}{20} = 10$	h_a		13.835	13.835	13.831	13.813
	q		205.8124	207.3708	236.8398	3246.0540
$\frac{400}{20} = 20$	h_a		14.731	14.731	14.731	14.728
	q		417.7351	419.2909	448.7725	3458.895
$\frac{1000}{20} = 50$	h_a		15.404	15.404	15.404	15.404
	q		1017.541	1019.0910	1048.512	4060.5950

注 h_a 为浸润线出逸点高程 (m); k_2 为地基渗透系数; q 为渗流量 (m^2/d)。

二、层状土的转化

层状土中的渗流计算，有时将其转化为各向异性的单层土后（图 13），再按上节的方法进行计算，一般公认的转化关系为^[1,2]

$$k_x = \frac{\sum_{i=1}^n T_i k_i}{\sum_{i=1}^n T_i} \quad (28)$$

$$k_y = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{\sum_{i=1}^n T_i / k_i} \quad (29)$$

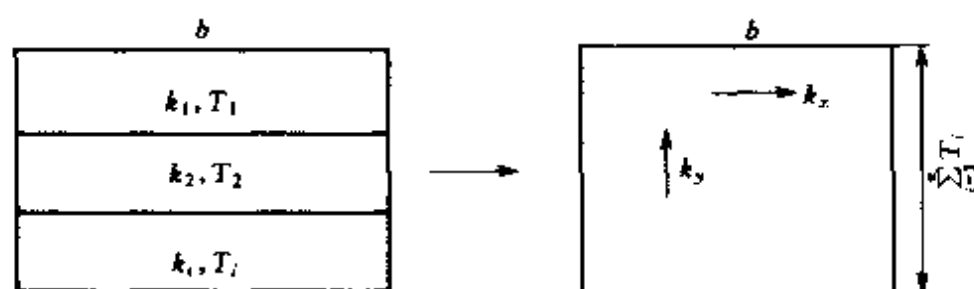


图 13

这样的转化是否可行，今通过算例来验证。

例 3 设有如图 14 的双层地基，闸上游水位为 7.0m，下游水位为 6.0m。试按式 (28)、式 (29) 转化为单层各向异性地基。今采用电算，先求得图 14 双层地基的渗流量 $q = 17.1557\text{m}^2/\text{d}$ ，渗流场内各点位势见表 4，然后按式 (28)、式 (29) 求得 $k_x = 140\text{m}/\text{d}$ ， $k_y = 50\text{m}/\text{d}$ ，经电算求解得渗流量 $q = 14.9120\text{m}^2/\text{d}$ ，各点位势也列入表 4。由表 4 比较可知，转化前

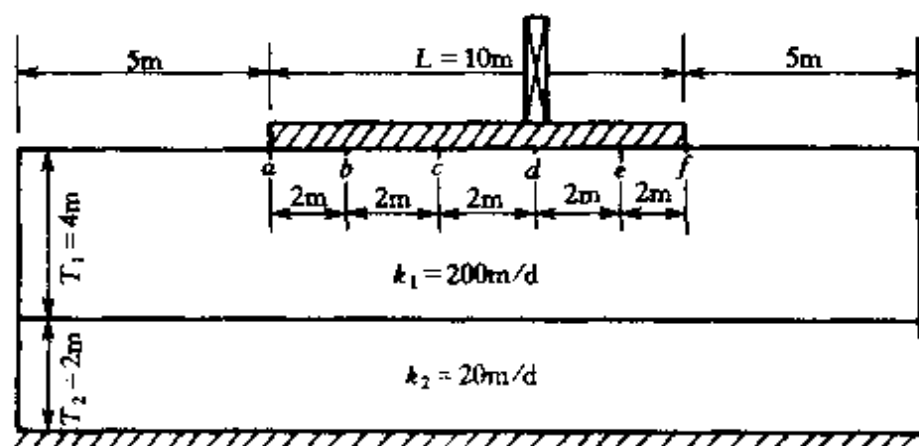


图 14

后各对应点的水头及位势的百分数均不能对应相等,而且渗流量也相差,由此可知,式(28)、式(29)的转化关系是值得商榷的。匈牙利 G.Kovacs 指出,将层状土转化为各向异性土是有条件的,这些条件是:①土层之间渗透系数比值不能相差太大;②各层厚度要大大小于流动方向的长度,一般不宜大于 1m。对此也作了验证,首先将渗透系数的比值从 10 倍变化到 10000 倍。计算结果说明,不论相差多少倍,层状土均不能转化为单层各向异性土(见图 15 及表 5)。其次,又将层厚减小到每层为 0.5m 来进行计算,也不够理想,只是转化前后的误差则比较小(见表 6)。

表 4

节点编号	x (m)	y (m)	转化前的双层地基		转化后的单层地基	
			水头 h (m)	位势 (%)	水头 h (m)	位势 (%)
1	0.000	6.000	7.000	100.000	7.000	100.000
3	0.000	2.000	6.949	94.859	6.761	76.136
5	0.000	0.000	6.934	93.378	6.732	73.169
7	2.500	4.000	6.949	94.859	6.836	83.555
9	2.500	1.000	6.915	91.477	6.722	72.241
11	5.000	6.000	7.000	100.000	7.000	100.000
13	5.000	2.000	6.854	85.363	6.692	69.208
15	5.000	0.000	6.830	83.047	6.667	66.609
17	7.500	4.000	6.700	70.049	6.646	64.614
19	7.500	1.000	6.683	68.292	6.594	59.402
21	10.000	6.000	6.500	50.000	6.500	50.000
23	10.000	2.000	6.500	50.000	6.500	50.000
25	10.000	0.000	6.500	50.000	6.500	50.000
27	12.500	4.000	6.300	29.951	6.354	35.386
29	12.500	1.000	6.317	31.708	6.406	40.598
31	15.000	6.000	6.000	0.000	6.000	0.000
33	15.000	2.000	6.146	14.637	6.308	30.792
35	15.000	0.000	6.170	16.952	6.333	33.331
37	17.500	4.000	6.051	5.086	6.164	16.445
39	17.500	1.000	6.085	8.522	6.278	27.759
41	20.000	6.000	6.000	0.000	6.000	0.000
43	20.000	2.000	—	—	6.239	23.864
45	20.000	0.000	—	—	6.268	26.831

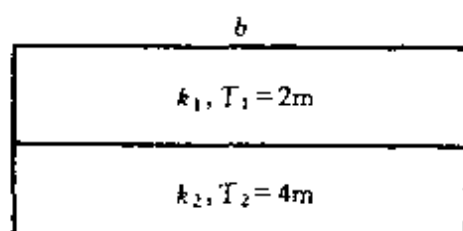


图 15

表 5

 $T_1 = 2m, T_2 = 4m$

组次	渗透系数转化情况 (m/d)	各点位势 (%)				渗流量 (m ² /d)
		b	c	d	e	
A	双层 $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 10 \end{cases}$	65.454	54.035	45.940	34.540	1.114
A'	单层 $\begin{cases} k_x = 7.0 \\ k_y = 2.5 \end{cases}$	73.135	57.109	42.891	26.865	2.100
B	双层 $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 100 \end{cases}$	60.626	52.054	47.871	39.311	1.554
B'	单层 $\begin{cases} k_x = 67 \\ k_y = 29.41 \end{cases}$	75.320	57.815	42.181	24.677	8.073
C	双层 $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1000 \end{cases}$	59.540	51.338	47.754	39.692	1.622
C'	单层 $\begin{cases} k_x = 667 \\ k_y = 2.994 \end{cases}$	78.799	59.405	40.591	21.198	33.848
D	双层 $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 10000 \end{cases}$	54.304	45.212	41.691	34.610	1.769
D'	单层 $\begin{cases} k_x = 6667 \\ k_y = 2.999 \end{cases}$	79.844	59.921	40.076	20.105	236.96

表 6

 $T_1 = 0.5m, T_2 = 0.5m$

组次	渗透系数转化情况 (m/d)	各点位势 (%)				渗流量 (m ² /d)
		b	c	d	e	
E	双层 $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 10 \end{cases}$	75.571	58.472	41.518	24.421	0.4661
E'	单层 $\begin{cases} k_x = 5.5 \\ k_y = 1.818 \end{cases}$	77.926	59.260	40.736	22.070	0.5089

参 考 文 献

- 1 阿拉文, 努米罗夫. 滤流理论. 北京: 高等教育出版社, 1957
- 2 南京水利科学研究所. 土坝渗流分析. 1980
- 3 沙金煊. 各向异性土和层状土中的渗流. 南京: 南京水利科学研究所, 1986
- 4 B. И. 阿拉文. 高坝岩基节理. 见: 渗流译文汇编, 第七辑. 南京: 南京水利科学研究所, 1973

江河大堤背侧管涌预警

图1所示为一典型的江河（湖）大堤断面图，堤基上部由弱透水覆盖层 k_n 组成，其厚度为 t_n ，下部为强透水层 k_0 组成，其厚度为 T ，河水渗入堤基并在下游 CE 段出逸，此时 CE 段受到渗透力作用，特别是在汛期高水位时，极易发生流土或管涌（现在社会上都统称为管涌）。例如1998年长江发生特大洪水，湖北、江西一带部分堤防发生了大面积管涌，并导致了大堤塌陷，尽管大力抢救，但仍造成巨大损失。如果能及早防治，防患于未然，就可从容应急，把灾害降低到最低限度。因此各地工程管理部门，应对自己所管辖范围内的江河（湖）大堤及早作出判断，哪些地段有可能发生管涌，应及时作出防治措施。但可惜的是现在还没有看到这方面的科研成果供判断或预测，为此本文根据长期对管涌的研究，特提出下列办法，供预测预报之用。

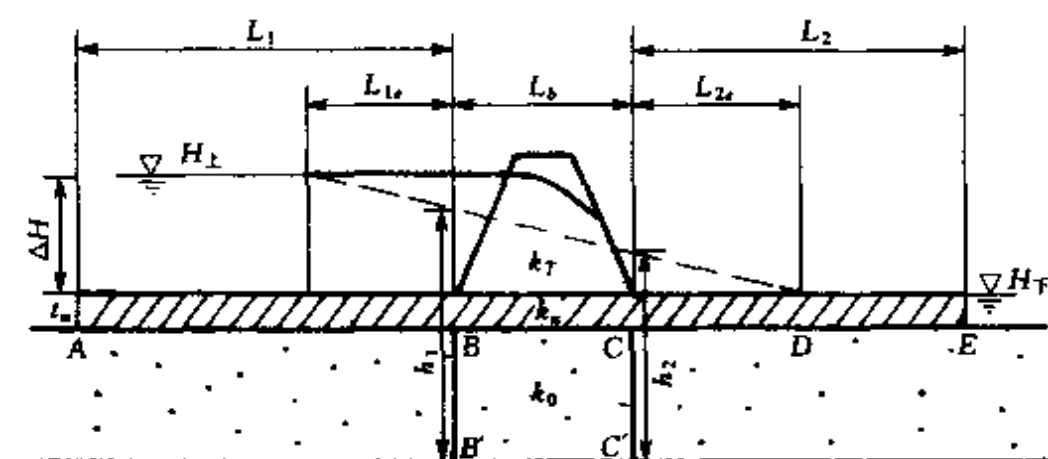


图1

参看图1， L_1 及 L_2 分别为上下游段覆盖层长度，为了方便分析研究，先将它们化为等效不透水层 L_{1e} 及 L_{2e} ，上游等效不透水覆盖层长度为 L_{1e} ，可用本奈特公式计算^[1]

$$L_{1e} = \frac{\text{th}(aL_1)}{a} \quad (1)$$

式中: $a = \sqrt{\frac{k_n}{k_0 T t_n}}$, 称为越流系数。

而对于下游等效不透水覆盖层长度 L_{2e} , 仍用式 (1), 只需改成 L_{2e} 即可

$$L_{2e} = \frac{\text{th}(aL_2)}{a} \quad (2)$$

顺便提一下, 所谓等效不透水覆盖层长度 L_{1e} 及 L_{2e} , 其物理意义是指它们与实际长为 L_1 及 L_2 的弱透水覆盖层长度情况下, 在堤基 BB' 及 CC' 断面, 所造成的渗流量和渗流水头损失是相同的, 故谓等效。

根据式 (1)、式 (2) 将 L_1 及 L_2 化为 L_{1e} 及 L_{2e} 后堤基便成为一个由假想的不透水覆盖层作为顶面的有压渗流, 其渗径长度 $L = L_{1e} + L_b + L_{2e}$, 在此区内, 渗流水头呈线性变化, 可参见图 1 中的虚直线, 此时作用在 B 点的渗流水头为 h_1 , 作用在 C 点的渗流水头为 h_2 , 在 D 点的渗流水头为 h_3 , 此 h_3 等于 H_F , 于是使得

$$h_1 = H_F + \frac{(H_U - H_F)}{(L_{1e} + L_b + L_{2e})}(L_{2e} + L_b) \quad (3)$$

$$h_2 = H_F + \frac{(H_U - H_F)}{(L_{1e} + L_b + L_{2e})}(L_{2e}) \quad (4)$$

$$h_3 = H_F \quad (5)$$

再参看图 2, 实际上作用在弱透水覆盖层底面 CE 段上的渗流水头为 h_x , 其最大值为 h_2 作用在 C 点, 最小值作用在 E 点, 从 C 点到 E 点的渗流水头 h_x 呈非线性变化, 而非一般论文中所述的线性变化^[2], 这个概念很重要。

现取一微分段 dx 来研究, 在此 dx 段的覆盖层上向上逸出渗流量为 dq_n

$$dq_n = k_n \frac{\Delta h_x}{t_n} dx \quad (6)$$

其中

$$\Delta h_x = h_x - H_F \quad (7)$$

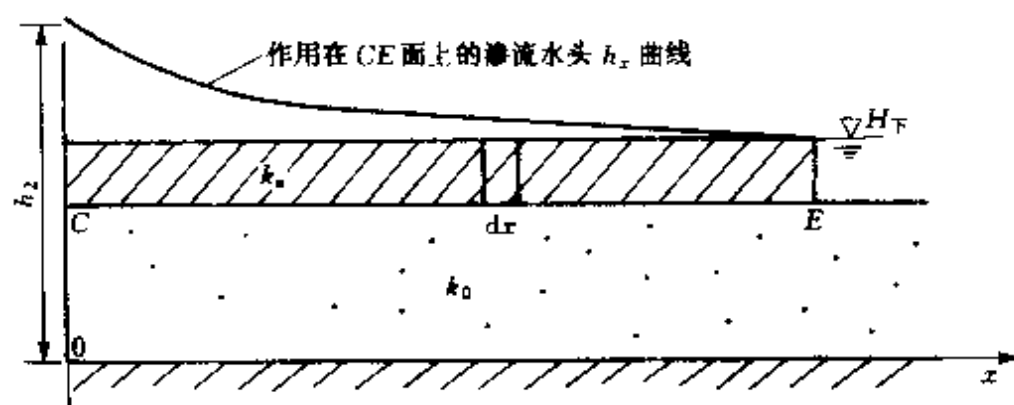


图 2

另一方面，通过堤基垂直断面的渗流量为

$$q = k_0 T \frac{d(\Delta h_x)}{dx} \quad (8)$$

在 dx 长度上，地基渗流量的增量为 dq

$$dq = k_0 T \frac{d^2(\Delta h_x)}{dx^2} dx \quad (9)$$

显然，这个增量的产生是因为向上渗流出逸所致，故必然式 (6) = 式 (9)，由此得到

$$\frac{d^2(\Delta h_x)}{dx^2} = a^2 \Delta h_x \quad (10)$$

式中： $a = \sqrt{\frac{k_1}{k_0 T t_n}}$ ，称为越流系数^[1]。

式 (10) 的通解为

$$\Delta h_x = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} \quad (11)$$

其中

$$\Delta h_x = h_x - H_T$$

当 $x=0$ 时

$$\Delta h_x = h_2 - H_T = c_1 + c_2$$

故得

$$c_1 = (h_2 - H_T) - c_2$$

当 $x=L_2$ 时

$$\Delta h_x = 0 = c_1 e^{aL_2} + c_2 e^{-aL_2} = [(h_2 - H_T) - c_2] e^{aL_2} + c_2 e^{-aL_2}$$

由此得到
$$c_2 = \left[\frac{-(h_2 - H_T) e^{aL_2}}{e^{-aL_2} - e^{aL_2}} \right] = \left[\frac{(h_2 - H_T) e^{aL_2}}{e^{aL_2} - e^{-aL_2}} \right] \quad (12)$$

将 c_1 及 c_2 代入式 (11), 最后得解

$$\Delta h_x = (h_2 - H_F)e^{ax} - c_2(e^{ax} - e^{-ax})$$

由此可得

$$h_x = H_F + (h_2 - H_F)e^{ax} - c_2(e^{ax} - e^{-ax}) \quad (13)$$

由式 (13) 即可求得作用于弱透水覆盖层底面 CE 段上的渗流水头 h_x , 若再对式 (13) 微分一次则得

$$\begin{aligned} \frac{dh_x}{dx} &= a(h_2 - H_F)e^{ax} - ac_2(e^{ax} + e^{-ax}) \\ &= a(h_2 - H_F)e^{ax} - a \left[\frac{(h_2 - H_F)e^{aL_2}}{e^{aL_2} - e^{-aL_2}} \right] (e^{ax} + e^{-ax}) \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,

$$\left. \frac{dh_x}{dx} \right|_{x=0} = a(h_2 - H_F) - 2a \left[\frac{(h_2 - H_F)e^{aL_2}}{e^{aL_2} - e^{-aL_2}} \right] \quad (14)$$

$$\text{但又因} \quad \left. \frac{dh_x}{dx} \right|_{x=0} = J_{x=0} = \frac{-(h_2 - H_F)}{L_{2e}} \quad (15)$$

式 (15) 中负号表示 h_x 沿 x 增加方向而下降。

因而必然存在式 (14) = 式 (15), 并消去等式两端 $(h_2 - H_F)$ 项而得到

$$\frac{-1}{L_{2e}} = a - 2a \left[\frac{e^{aL_2}}{(e^{aL_2} - e^{-aL_2})} \right]$$

$$\text{由此得到} \quad L_{2e} = \frac{1}{a \left(\frac{e^{aL_2} + e^{-aL_2}}{e^{aL_2} - e^{-aL_2}} \right)} = \frac{\text{th}(aL_2)}{a} \quad (16)$$

一看便知, 式 (16) 便是本奈特公式, 参见式 (2), 我们在这里为其作了佐证。

今对式 (13) 举例如下。

例 1 参看图 1, 已知 $L_1 = L_2 = 180$, $L_b = 70$, $T = 10$, $t_n = 2$, $H_{\text{上}} = 22$, $H_{\text{下}} = 12$, $\Delta H = H_{\text{上}} - H_{\text{下}} = 10$, $k_T = 10$, $k_n = 1$, $k_0 = 100$ 。试求 CE 面上所受到的渗流作用水头 h_x 。

先求各参数 $a = \sqrt{\frac{k_n}{k_0 T t_n}} = \sqrt{\frac{1}{100 \times 10 \times 2}} = 0.0224$

本例 $L_1 = L_2 = 180$, 故

$$L_{1e} = L_{2e} = \frac{\text{th}(aL)}{a} = \frac{\text{th}(0.0224 \times 180)}{0.0224}$$

$$= 44.615$$

$$L = L_{1e} + L_b + L_{2e} = 44.615 + 70 + 44.615$$

$$= 159.32$$

$$h_2 = H_F + \frac{\Delta H L_{2e}}{L} = 12 + \frac{10 \times 44.615}{159.32}$$

$$= 14.802$$

$$c_2 = \left[\frac{(h_2 - H_F) e^{aL_2}}{(e^{aL_2} - e^{-aL_2})} \right] = \left[\frac{(14.802 - 12) e^{0.0224 \times 180}}{e^{0.0224 \times 180} - e^{-0.0224 \times 180}} \right]$$

$$= 2.80288$$

此例经用式 (13) 计算后, 已将结果列入表 1, 并和有限元法计算结果作对比, 发现两法结果相当吻合。

例 2 仍同例 1 数据, 但 $k_0 = 1000$ 。今先求各参数

$$a = \sqrt{\frac{1}{1000 \times 10 \times 2}} = 0.00707$$

$$L_{1e} = L_{2e} = \frac{\text{th}(0.00707 \times 180)}{0.00707} = 120.86$$

$$L = 120.86 + 70 + 120.86 = 311.72$$

$$h_2 = 12 + \frac{10 \times 120.86}{311.72} = 15.877$$

$$c_2 = \left[\frac{(15.877 - 12) e^{0.00707 \times 180}}{e^{0.00707 \times 180} - e^{-0.00707 \times 180}} \right]$$

$$= 4.207$$

将这些参数代入式 (13), 得到各 h_r 值, 见表 1, 并和有限元法作了对比, 两者非常吻合。我们除了上述两个例以外, 还对 $k_0 = 2000, 5000, 10000$ 等同样进行了计算, 一并列入表 1。

表 1 不同 k_n/k_0 条件下的 h_x 值

X	$k_n/k_0 = 1/100$	$k_n/k_0 = 1/1000$	$k_n/k_0 = 1/2000$	$k_n/k_0 = 1/5000$	$k_n/k_0 = 1/10000$	$k_n = 0$
0	14.802 (15.165)	15.877 (16.095)	16.018 (16.165)	16.115 (19.191)	16.150 (16.195)	16.186
16.36	13.943 (14.202)	15.376 (15.570)	15.571 (15.707)	15.707 (15.779)	15.755 (15.801)	15.805
32.73	13.346 (13.535)	14.924 (15.092)	15.154 (15.272)	15.304 (15.379)	15.361 (15.411)	15.425
49.09	12.933 (13.069)	14.508 (14.660)	14.748 (14.860)	14.916 (14.984)	14.985 (15.026)	15.044
65.45	12.648 (12.743)	14.126 (14.255)	14.367 (14.467)	14.541 (14.600)	14.606 (14.645)	14.664
81.80	12.448 (12.515)	13.772 (13.885)	14.005 (14.091)	14.167 (14.222)	14.231 (14.267)	14.284
98.18	12.311 (12.354)	13.444 (13.539)	13.647 (13.728)	13.797 (13.850)	13.849 (13.893)	13.903
114.54	12.220 (12.240)	13.132 (13.215)	13.311 (13.377)	13.428 (13.484)	13.486 (13.521)	13.523
130.91	12.150 (12.158)	12.838 (12.906)	12.975 (13.036)	13.074 (13.121)	13.116 (13.151)	13.144
147.27	12.103 (12.098)	12.511 (12.610)	12.651 (12.701)	12.716 (12.761)	12.745 (12.782)	12.761
163.64	12.072 (12.0717)	12.272 (12.320)	12.328 (12.370)	12.360 (12.402)	12.377 (12.414)	12.381
180.00	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00

表 1 中括弧内数字,是用有限元方法在电脑上求得的结果,不难发现,采用本文式 (13) 求得的结果,其精确度是相当高的,完全可以满足工程设计及管理单位的要求。今将表 1 分别绘制下列曲线,见图 3,供参阅,从图中可看出,当 $\frac{k_0}{k_n} \leq 100$ 时,说明覆盖层较透水,此时 h_x 曲线的曲率较大,表明了从覆盖层

出逸的渗流量较多，故水头损失也大，此时堤基内为一变量流，其渗流量沿 x 方向的增加而逐步出逸；而当 $\frac{k_0}{k_n} > 100$ 倍时，情况就不一样了，此时 h_x 的变化曲率较小，并随着 $\frac{k_0}{k_n}$ 的比值增大，越来越接近线性变化（参见图 3）。由式 (13) 可求得作用于下游覆盖层底面 CE 段上的渗流水头 h_x ，从而可据此求得各点的渗流出逸坡降 J_x 为

$$J_x = \frac{h_x - H_F}{t_n} \quad (17)$$

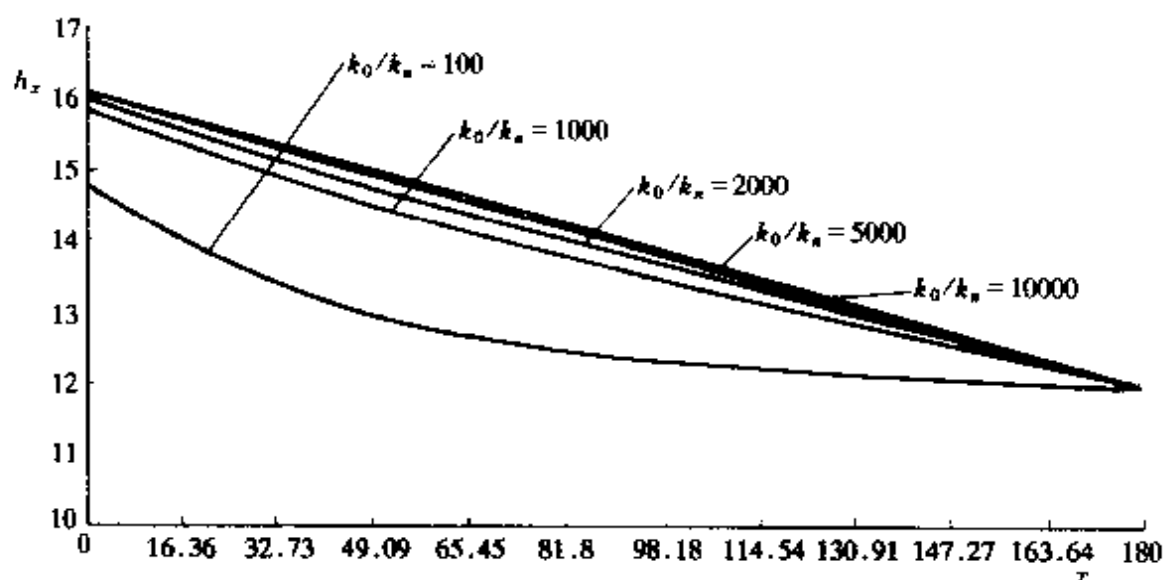


图 3

若当某一位置的 $J_x \geq J_{kp}$ ，就会发生管涌；若 $J_x < J_{kp}$ ，则不会发生管涌。由此便可作出预报。式 (17) 中， J_{kp} 为覆盖层土料发生管涌的临界坡降，此值可查设计规范或设计手册，也可在当地取土作试验求得。

式 (13) 的计算结果，见图 3 及表 1，说明该式精度很好。下面再讨论渗流坡降 J_x ，很显然 J_x 可以表示为

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{h_x - H_F}{t_n} \\ &= \frac{1}{t_n} (h_2 - H_F) e^{ax} - \frac{c_2}{t_n} (e^{ax} - e^{-ax}) \end{aligned}$$

即
$$J_x = \frac{1}{t_n} [(h_2 - H_{\text{下}}) - c_2] e^{ax} + \frac{c_2}{t_n} e^{-ax}$$

若令 $J_x = J_{kp}$ 为临界坡降, 则此时的 x 值便相应为 x_{kp} , 称为临界值, 于是得到

$$J_{kp} = \frac{1}{t_n} [(h_2 - H_{\text{下}}) - c_2] e^{ax_{kp}} + \frac{c_2}{t_n} e^{-ax_{kp}} \quad (18)$$

由式 (18) 求出的 x_{kp} 便是判别发生管涌地段的临界值了。凡在 $0 \sim x_{kp}$ 地段则为发生管涌的地段, 需及早防治; 凡在 $x_{kp} \sim L_2$ 地段则为不发生管涌的地段, 是安全地段。将式 (18) 改写为

$$J_{kp} \frac{e^{ax}}{e^{ax}} = \frac{1}{t_n} [(h_2 - H_{\text{下}}) - c_2] e^{ax_{kp}} + \frac{c_2}{t_n} e^{-ax_{kp}} \quad (19)$$

移项后得

$$J_{kp} e^{ax_{kp}} = \frac{1}{t_n} (\Delta h_2 - c_2) (e^{ax_{kp}})^2 + \frac{c_2}{t_n} \quad (20)$$

其中

$$\Delta h_2 = h_2 - H_{\text{下}}$$

或写为 $(\Delta h_2 - c_2) (e^{ax_{kp}})^2 - t_n J_{kp} e^{ax_{kp}} + c_2 = 0 \quad (21)$

式 (21) 为一典型的一元二次代数方程式, 其通解如下

$$e^{ax_{kp}} = \left[\frac{J_{kp} t_n - \sqrt{J_{kp}^2 t_n^2 - 4(\Delta h_2 - c_2) c_2}}{2(\Delta h_2 - c_2)} \right] \quad (22)$$

两边取对数得

$$ax_{kp} = \ln \left[\frac{J_{kp} t_n - \sqrt{J_{kp}^2 t_n^2 - 4(\Delta h_2 - c_2) c_2}}{2(\Delta h_2 - c_2)} \right]$$

即
$$x_{kp} = \frac{1}{a} \ln \left[\frac{J_{kp} t_n - \sqrt{J_{kp}^2 t_n^2 - 4(\Delta h_2 - c_2) c_2}}{2(\Delta h_2 - c_2)} \right] \quad (23)$$

此式 (23) 便是预测管涌发生地段的公式, 它适用于任意 $\frac{k_0}{k_n}$ 比值情况。求出 x_{kp} 后, 便可作出预测:

$$\left. \begin{aligned} 0 \sim x_{kp} & \text{为发生管涌地段} \\ x_{kp} \sim L_2 & \text{为不发生管涌地段} \\ x_{kp} < 0 & \text{整个 CE 段均不发生管涌} \\ x_{kp} > L_2 & \text{整个 CE 段均会发生管涌} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

例3 仍用例1的数据, $k_0 = 100$, $k_n = 1$, $t_n = 2$, $a = 0.0224$, $h_2 = 14.802$, $H_F = 12.000$, $\Delta h_2 = 2.8020$, $c_2 = 2.80288$, 今设 $J_{kp} = 1.2$, 试求 x_{kp} 。

采用式 (23) 求 x_{kp}

$$\begin{aligned} x_{kp} &= \frac{1}{a} \ln \left[\frac{J_{kp} t_n - \sqrt{J_{kp}^2 t_n^2 - 4(\Delta h_2 - c_2)c_2}}{2(\Delta h_2 - c_2)} \right] \\ &= \frac{1}{0.0224} \ln \left[\frac{1.2 \times 2 - \sqrt{1.44 \times 4 - 4 \times (-0.00088) \times 2.80288}}{2 \times (2.802 - 2.80288)} \right] \\ &= 6.910 \end{aligned}$$

例4 用例2数据, $k_0 = 1000$, $k_n = 1$, $t_n = 2$, $a = 0.00707$, $h_2 = 15.877$, $H_F = 12.000$, $\Delta h_2 = 3.877$, $c_2 = 4.207$, $J_{kp} = 1.2$, 试求 x_{kp} 。

$$\begin{aligned} x_{kp} &= \frac{1}{a} \ln \left[\frac{J_{kp} t_n - \sqrt{J_{kp}^2 t_n^2 - 4(\Delta h_2 - c_2)c_2}}{2(\Delta h_2 - c_2)} \right] \\ &= \frac{1}{0.00707} \ln \left[\frac{1.2 \times 2 - \sqrt{1.44 \times 4 - 4 \times (3.877 - 4.207) \times 4.207}}{2 \times (3.877 - 4.207)} \right] \\ &= 53.31 \end{aligned}$$

若再设 $J_{kp} = 0.12$ 时

$$\begin{aligned} x_{kp} &= \frac{1}{0.00707} \ln \left[\frac{0.24 - \sqrt{0.0144 \times 4 - 4 \times (3.877 - 4.207) \times 4.207}}{2 \times (3.877 - 4.207)} \right] \\ &= 165.63 \end{aligned}$$

说明了在 $0 \sim 165.63$ 地段内均会发生管涌。这是因为 J_{kp} 这一临界坡降较小, 表明此种情况下覆盖层土料的抗渗强度较小, 故 $0 \sim 165.63$ 地段内均会发生管涌, 比之 $x_{kp} = 53.51$ 要扩大得多。

现在我们来分析式 (21), 不难发现当 $e^{-aL_2} \rightarrow 0$ 时, 会出

现 $\Delta h_2 = c_2$ 。于是式 (21) 化为

$$c_2 = \Delta h_2 = t_n J_{kp} e^{ax_{kp}}$$

经简化后得

$$x_{kp} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\Delta h_2}{J_{kp} t_n} \right) \quad (25)$$

这种情况出现在 L_2 较大或 a 较大时, 也即 $\frac{k_0}{k_n}$ 较小时。

最后必须指出, 上述 x_{kp} 值是理论值, 它没有考虑进安全系数 K 值, 所以工程设计或管理单位在采用此 x_{kp} 时, 还必须乘上 K 值, 这个 K 值应视工程级别的重要性而选定, 可查设计规范或设计手册。一般来说, 大江大河的堤防比较重要, 其 K 值应取大些。

以上提供的计算方法可对堤后是否发生管涌作出预报, 工程或管理单位可以用此方法对所辖范围内作出预报, 只要用几分钟时间就可计算完毕, 从而作出预测判断。现在不少单位都采用有限元数值解用电脑计算, 应该说电脑运算是非常之快的, 不到一分钟便可计算完毕, 但电脑计算前的数据准备工作却很费时间, 甚至程序通不过、数据不合理等。若出现这些情况, 则必须一遍又一遍核实数据的合理性及正确性, 它是很费时间的。笔者对此体会颇深, 还不如采用本文式 (23) 来得快捷些。当然, 对于复杂地基情况下, 则仍然只能求助于有限元数值法, 借助电脑计算才行, 采用本文方法则无能为力了。

参 考 文 献

- 1 毛昶熙. 渗流计算分析与控制. 北京: 水利电力出版社, 1990
- 2 毛昶熙. 堤坝设计中的稳定渗流计算简介. 南京: 南京水利科学研究院, 1998

压盖层设计方法论证

每当汛期，堤坝背水坡脚附近地段常发生管涌，轻则冒水冒砂，重则地基被渗流掏空，堤坝塌陷，酿成灾情。因此防治管涌十分重要，一直为工程单位所关注。在上一节笔者曾根据渗流理论，求得了一个发生管涌的预测方法，可在汛前预测判断管涌是否会发生，以及管涌发生范围的大小，为工程单位防治管涌提供科学根据。

就工程施工方便和造价而言，采用压盖防止管涌应是首选对象，近阶段来，不少堤段均采用此法而获得成功，但综观近年来修建的压盖层工程，有不少工程的设计尚欠合格，而且施工又不太规范，其原因是迄今为止还缺少合理的设计方法。

应该指出，国内外对压盖层的研究不太多见，一直不为人们重视，1997年水利学报发表了论文^[1]，曾对此问题作了专门研究，该文提出了压盖层设计的两种方案：其一是当压盖层的透水性 K_i 小于其下的天然铺盖层的透水性 K_b ，即 $K_i \leq K_b$ ；其二是正好相反， $K_i > K_b$ 。该文分别对此两种设计方案作了分析，并提出相应的计算方法。本文作者在学习之余，拟稍作补充，目的是要使压盖层的设计能更加完善一些。

众所周知，压盖层的功能是压住管涌，防止堤基塌空。而要实现这一功能，就必须压密夯实，增加自重，这样一来就会使得压盖层的透水性 K_i 远远小于铺盖的透水性 K_b ，因而就有 $K_i \leq K_b$ 。但是这一结果的副作用却使渗流出逸受到严重阻塞，并且 K_i 越小，阻塞作用就越大，当强大的渗流出逸一旦受到阻塞，就必然会往下游方向寻找新的出路，因而就会在下游的某个段落，也就是尚未被压盖层压到的地段，又要引发新的管涌。于是就不得不再延长压盖层的长度 B 值，如此防不胜防，一直延长下去，直到把新生的管涌压住为止。这样一来，原本是一个某一

长度范围的管涌，由于压盖层的阻塞却要大幅度地增加压盖范围。这一现象在文献 [1] 中，也提到了，该文列举了一个算例，其结果如表 1 所示。

表 1

 $K_b = 1$

K_t/K_b	1	0.1	0.01	0.001	0.0001
B (m)	63.7	163.07	206.35	212.45	213.06

由表 1 比较可知，当 $K_t/K_b = 0.01$ ，也就是两者的透水性比等于 100 倍时，压盖长度 B 值增加很多，由原来的 63.7m 增加到 206.35m，只有当 $K_t/K_b = 0.001 \sim 0.0001$ 时，压盖层的透水性压缩到几乎已近极限时，压盖层长度 B 值的增加才会收敛。由此可知采用 $K_t \leq K_b$ 的设计，将会使工程造价大幅度地增加。

鉴于上述原因，人们自然会想到，能否采用 $K_t \geq K_b$ 方案，以避免 B 值的大幅增大。本文认为这是完全可以做到的，其原因是，当 $K_t \geq K_b$ 后渗流出逸基本上不会受到阻塞，而且 K_t 越大，越不阻塞，因而原来在某处发生的管涌，在修建压盖后不会扩大，渗流不会往下游方向寻找新的出路，故压盖层长度 B 值也就不会延长。

现在我们先来研究 $K_t \leq K_b$ 这一情况，文献 [1] 求得了计算 B 值的公式为

$$B = \left(\frac{K_b r'_b L_{3e}}{K_t r'_t} + L_{1e} + L_2 \right) [-1 + \sqrt{1 + (\dots)}] \quad (1)$$

$$\text{其中 } (\dots) = \left(\frac{2HK_b \eta}{r'_t T_b K_t} - \frac{r'_b K_b L_{1e} + L_2 + L_{3e}}{r'_t K_t L_{3e}} \right) / \left(\frac{r'_b K_b}{r'_t K_t} + \frac{L_{1e} + L_2}{L_{3e}} \right)$$

式 (1) 是根据下列微分方程

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{K_t}{K_f T_f} \frac{h_x - t_x}{t_x + \frac{K_t}{K_b} T_b} = \frac{K_t}{K_f T_f} J = \theta (\theta \text{ 为常数}) \quad (2)$$

式中: $J = \left(\frac{h_x - t_x}{t_x + \frac{K_t}{K_b} T_b} \right)^c$

而求得的。令 $J = \text{常数}$, 从而消去圆括号内众多变数, 而使微分方程有解, 得到

$$h_x = \frac{\theta}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (3)$$

再经过一些演化, 就可得到式 (1)。

经本书作者验算, 利用式 (1) 计算 B 值会偏大很多, 甚至几百倍以上, 故此式有误。

鉴于上述缘故, 本文作者在此重新求解式 (2) 而得到新的 B 值计算公式为

$$B = \sqrt{\left(L_{1e} + L_2 + \frac{T_b J_C}{\theta L_{3e}} \right)^2 - \frac{2}{\theta} \left[T_b J_C - H + \frac{T_b J_C}{L_{3e}} (L_{1e} + L_2) \right] - \left(L_{1e} + L_2 + \frac{T_b J_C}{\theta L_{3e}} \right)} \quad (4)$$

式中: $L_{1e} = \frac{\text{th}(aL_1)}{a}$; $L_{3e} = \frac{\text{th}(aL_3)}{a}$; $\theta = \frac{K_t}{K_f T_f} J_C$; $J_C = (\Delta_s - 1) \times (1 - n)$; Δ_s 为压盖土的比重, 一般 $\Delta_s = 2.65$; n 为压盖土的孔隙率; $a = \sqrt{\frac{K_b}{K_f T_f T_b}}$; 其他符号见图 1 所示。

若采用式 (4) 求得 B 值, 就与表 1 中的各个 B 值基本吻合了。

为了验证式 (4) 的正确性, 现举例如下。

例 1 如图 1 所示, 已知 $K_f = 200 \text{m/d}$, $K_b = 1 \text{m/d}$, $T_b = 2 \text{m}$, $T_f = 10 \text{m}$, $L_1 = 150 \text{m}$, $L_2 = 60 \text{m}$, $L_3 = 190 \text{m}$, $H_{\text{上}} = 22 \text{m}$, $H_{\text{下}} = 12 \text{m}$, $H = H_{\text{上}} - H_{\text{下}} = 22 - 12 = 10 \text{m}$ 。今分别给予不同的 K_t 值, 采用式 (4) 求解 B 值, 并与采用有限元数值解法在电脑上演算结果作一对比, 见表 2。

由此可见, 式 (4) 计算结果与有限元法结果很吻合, 同时也与表 1 相仿, 也是 B 随 K_t 而变。接下来再把各个 K_t 情况下, 渗流压力沿程分布列于表 3 ~ 表 6。表 3 ~ 表 6 中各个 h_x 值,

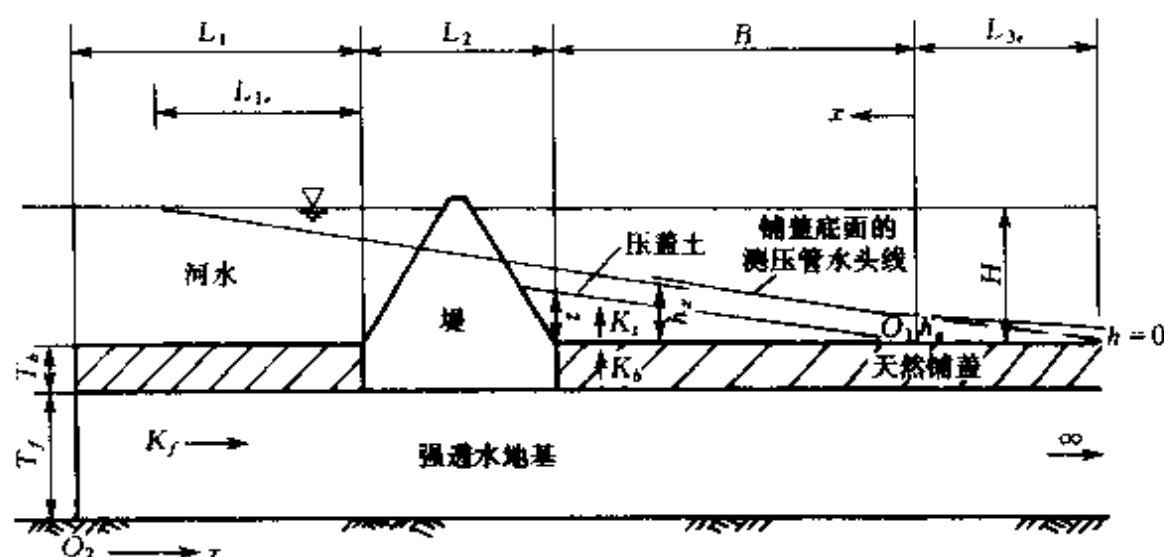


图 1 堤防内脚压盖土方案设计概化剖面

表 2

$K_b = 1$

K_f	1	0.1	0.01	0.001	0.0001
$B_{式(4)}$	40.01	101.85	125.9	128.8	128.8
$B_{电脑}$	40.0	99.4	122	126.6	127

均是以图 1 中强透水地基地面为基准面的, 坐标原点在 O_2 点, 而 $h_x = \frac{\theta}{2}x^2 + C_1x + C_2$ 中的 h_x 则是以图 1 中铺盖顶面作基准面的, 坐标原点在 O_1 点, $C_1 = \frac{T_b J_C}{L_{3e}}$, $C_2 = T_b J_C$ 。

表 3

$K_b = 1, K_f = 1$

x	210	216.67	233.3	230	236.67	243.3	250	265
h_x	15.759	15.421	15.105	14.812	14.540	14.290	14.063	13.639
x	280	295	310	325	340	355	400	
h_x	13.306	13.046	12.804	12.69	12.574	12.489	12.388	

由表 3, 可求出 $B_{电脑} = 250 - 210 = 40(\text{m})$, 因为在 $x = 250$ 处, $h_x = 14.063$, 而此点的出逸坡降 $J_{出} = \frac{h_x - H_{下}}{T_b} = \frac{14.063 - 12}{2}$

表 4 $K_b = 1, K_t = 0.1$

x	210.0	220.2	230.4	240.6	250.8	261.0	271.2
h_x	17.587	17.201	16.818	16.438	16.062	15.690	15.322
x	281.4	291.6	301.8	312.0	325.57	...	502.0
h_x	14.958	14.599	14.247	13.904	13.540

表 5 $K_b = 1, K_t = 0.01$

x	210.0	222.6	235.3	247.8	260.4	273.0	285.6
h_x	18.093	17.669	17.246	16.823	16.402	15.981	15.560
x	298.2	310.8	323.4	336.0	347.85	...	502.0
h_x	15.141	14.724	14.306	13.882	13.565

表 6 $K_b = 1, K_t = 0.001$

x	210.0	222.9	235.8	248.7	261.6	274.5	287.4
h_x	18.180	17.753	17.325	16.897	16.470	16.042	15.616
x	300.3	313.2	326.1	339.0	350.64	...	502.0
h_x	15.189	14.762	14.336	13.897	13.587

$=1.03$, 与临界坡降 $J_C = (\Delta_s - 1)(1 - n) = (2.65 - 1) \times (1 - 0.39) = 1.00$, 两者大致相等, $J_{\text{出}} = J_C$, 故此可知, 在 $x = 210 \sim 250\text{m}$ 范围内发生管涌, 压盖层需 $B = 40\text{m}$ 。

由表 4, 在 $x = 301.8$ 到 $x = 312.0$ 之间用内插法求得大约在 $x = 309.4$ 处, $h_x \approx 14.00$, 于是此处渗流出逸坡降 $J_{\text{出}} = \frac{h_x - H_T}{T_b + t_x} = \frac{14 - 12}{2 + 0.001} = 0.999$, 与该土的渗流临界坡降 $J_C = (\Delta_s - 1)(1 - n) = (2.65 - 1) \times (1 - 0.39) = 1.006$ 大致相等, 这就表明了, 在 $x = 210 \sim 309.4$ 之间地段要发生管涌, 大于 $x = 309.4$ 的地

段为安全区, 故压盖层的长度 B 应为 $309.4 - 210 = 99.4\text{m}$ 。而 B 按式 (4) 的理论计算为 101.85, 两者基本吻合。

由表 5, 用内插法求得大约在 $x = 333$ 处, $h_x \approx 14.00$, $J_{\text{出}} = \frac{14 - 12}{2 + 0.001} = 0.999 \approx J_c$, 故需压盖 $B = 333 - 210 = 123 (\text{m})$, 而按式 (4) 理论计算 $B = 125.9\text{m}$ 。

由表 6, 同样可求得 $x = 336.6$ 处, $h_x \approx 14.00$, 由此得 $B = 336.6 - 210 = 126.6 (\text{m})$, 而按式 (4) 理论计算的 $B = 128.8\text{m}$, 此外我们还对 $K_t = 0.0001$ 做了演算, 其结果与 $K_t = 0.001$ 相同, 其实 $K_t = 0.001$ 已经与 $K_t = 0.01$ 时基本相仿了。通过上述比较可知, 用有限元法求得的 B 值与本文式 (4) 求得的 B 值基本吻合。

以上是对 $K_t \leq K_b$ 这一方案进行了分析, 说明了采用这一方案设计压盖层, 会加大工程造价, 同时也说明了文献 [1] 中求 B 的计算公式有待改进。

接下来, 我们再来讨论 $K_t > K_b$ 方案, 这一方案的特点是铺盖控制了渗流, 而非压盖层, 故应将压盖层转化为等效铺盖而建立微分方程, 参见文献 [1]

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{K_b}{K_f T_f T_b} \left(\frac{h_x - t_x}{1 + \frac{K_b}{K_t} \frac{t_x}{T_b}} \right) \quad (5)$$

文献 [1] 认为此微分方程不易直接求解, 而采用巴龙的差分法求解压盖层长度 B 值, 但这种解法工作量非常之大, 每算一个例题, 至少要计算几十次才能逐步接近 B 值, 比较麻烦, 本文有鉴于此, 拟另觅他法。

现我们把式 (5) 改写为

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{K_b}{K_f T_f} \left(\frac{h_x - t_x}{T_b + t_x \frac{K_b}{K_t}} \right) \quad (6)$$

将式 (6) 与式 (2) 比较, 形式相同, 式 (6) 中的圆括号

其物理意义为渗流出逸坡降是一个变数，故这种微分方程不易求解，但可令 $J = \left(\frac{h_x - t_x}{T_b + t_x \frac{K_b}{K_t}} \right) = J_C$ ，这种做法就是将变数化为一个常数 J_C [$J_C = (\Delta_s - 1)(1 - n)$]，以便求解式 (6)，这样求解的结果就使得求出的压盖层具有等抗渗强度，即在压盖层的任一个垂直剖面上所承受的渗流出逸坡降 $J_{出} = J_C$ ，保证不发生局部变形。于是式 (6) 化为

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{K_b}{K_f T_f} J_C = \theta' \quad (\text{常数}) \quad (7)$$

此微分方程的通解为

$$h_x = \frac{\theta'}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (8)$$

式中： $C_1 = \frac{T_b J_C}{L_{3e}}$ ； $C_2 = T_b J_C$ 。

边界条件与前面 $K_t \leq K_b$ 时完全一样，因而其介也应为

$$B = \sqrt{\left(L_{1e} + L_2 + \frac{J_C T_b}{\theta' L_{3e}} \right)^2 - \frac{2}{\theta'} \left[J_C T_b - H + \frac{J_C T_b}{L_{3e}} (L_{1e} + L_2) \right]} - \left(L_{1e} + L_2 + \frac{J_C T_b}{\theta' L_{3e}} \right) \quad (9)$$

式 (9) 与式 (4) 一样，但 $\theta' = \frac{K_b}{K_f T_f} J_C$ ，而不是 $\theta = \frac{K_t}{K_f T_f} \times J_C$ 。

采用式 (9) 求得的 B 值，理应与文献 [1] 的差分法求解相近，现在我们举一算例来看一下，两法所得的结果，是否相近。

例 2 采用文献 [1] 算例数据： $H = 9.14\text{m}$ ， $T_b = 1.52\text{m}$ ， $T_f = 15.24\text{m}$ ， $K_f = 200\text{m/d}$ ， $K_b = 1\text{m/d}$ ， $K_t = 1\text{m/d}$ ， $L_1 = 152.4\text{m}$ ， $L_2 = 60.96\text{m}$ ， $L_3 \rightarrow \infty$ ， $L_{1e} = 66.6\text{m}$ ， $L_{3e} = 68.15\text{m}$ ， $J_C = 1$ 。

将上述数据代入式 (9), 先求出 $\theta = \frac{K_b}{K_f T_f} J_c = \frac{1}{200 \times 15.24} \times 1 = 0.000328$, 然后求压盖层长度 B

$$\begin{aligned}
 B &= \sqrt{\left(66.6 + 60.96 + \frac{1.52 \times 1}{0.000328 \times 68.15}\right)^2 - \frac{2}{0.000328} \times \left[1.52 \times 1 - 9.14 + \frac{1.52 \times 1}{68.15} \times (66.6 + 60.96)\right]} \\
 &\quad - \left(66.6 + 60.96 + \frac{1.52 \times 1}{0.000328 \times 68.15}\right) \\
 &= \sqrt{(195.56)^2 - (-29115.45)} - 195.56 \\
 &= 63.98 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

例 2 在文献 [1] 中采用差分求解, 一共算了大约 21 次, 才求得 $B = 64.05\text{m}$, 而本文 (9) 式只需一次即得 $B = 63.98\text{m}$ 。

下面再用算例 3 采用有限元法, 进一步验证公式 (9), 看一下在保持铺盖渗透性 K_b 不变的情况下, 分别给予不同的压盖层渗透系数 K_f 时是否会影响 B 值。

例 3 仍如图 1 所示及例 1 的原始数据布置在电脑上, 先令 $K_b = 1\text{m/d}$, 用式 (9) 求出 $B = 40.01\text{m}$ 作为压盖层长度, 然后分别令 $K_f = 1, 10, 100, 1000, 10000\text{m/d}$ 等不同数值采用有限元法计算看一下, 不同的 K_f 是否对 B 有影响, 最后经过一系列结果证明, 没有影响, 详见表 7~表 9。表 8、表 9 中各个 h_x 值, 均是以强透水层底面作为基准面的, 坐标原点在 O_2 点, 而文中的 $h_x = \frac{\theta}{2} x^2 + C_1 x + C_2$ 则是以天然铺盖顶面作为基准面的, 坐标原点在 O_1 点, $C_1 = \frac{T_b J_c}{L_{3e}}$, $C_2 = T_b J_c$ 。

表 7 $K_b = 1$ (不变)

K_f	1	2	10	100	1000	10000
$B_{\text{计算}}$	40.01	40.01	40.01	40.01	40.01	40.01
$B_{\text{有限元}}$	40	40	40	40	40	40

表 8 $K_b = 1$ (不变)

X	210	216.67	223.3	230	236.67	243.3	250
$h_{K_t}=1$	见表 3						
$h_{K_t}=10$	15.627	15.284	14.970	14.683	14.420	14.180	13.962
$h_{K_t}=100$	15.608	15.265	14.952	14.665	14.403	14.165	13.949
$h_{K_t}=1000$	15.606	15.264	14.951	14.664	14.403	14.164	13.949
$h_{K_t}=10000$	同 $K_t=1000$						

X	260	280	300	320	...	440
$h_{K_t}=1$	见表 3					
$h_{K_t}=10$	13.678	13.229	12.902	12.666	...	12.198
$h_{K_t}=100$	13.667	13.221	12.896	12.662	...	12.197
$h_{K_t}=1000$	13.666	13.220	12.896	12.661	...	12.197
$h_{K_t}=10000$	同 $K_t=1000$					

表 9 $K_b = 1$, 没有压盖的情况

x	210	220.2	230	240	250	260	270	280
h_r	15.464	14.961	14.533	14.168	13.857	13.592	13.366	13.175
x	290	300	320	340	360	380	400	
h_i	13.012	12.875	12.662	12.515	12.419	12.366	12.348	

由表 8 可知, B 值不随 K_t 而变, 均为 $B = 40\text{m}$ 左右 (即 $x = 210 \sim 250$), 当 $x = 250\text{m}$ 时, $h_x \approx 14\text{m}$, 正好 $J_{\text{出}} = \frac{14-12}{2} = 1$, 而 $J_c = (2.65 - 1) \times (1 - 0.39) = 1$, 两者相等, 故小于 40m 的地段将发生管涌, 需压盖层 $B = 40\text{m}$ 。此外由表 8 还可知, 在同一个 x 坐标下, 各 h 值基本不变, 也不随 K_t 而变。我们在表 9 中顺便列出了没有压盖层时天然状态下的管涌区在 $x = 246 - 210 = 36$ (m) 范围。故 $B = 40$ (m) 已足够了。表 8 的一系列计算结果说明, 当 $K_t > K_b$ 时是铺盖在控制渗流出逸, 而非压盖

层；故只要 K_b 不变，则 B 值就不会变，就可压住管涌。

综上所述，不论 $K_t \leq K_b$ 或 $K_t > K_b$ ，均可用同一个公式

$$B = \sqrt{\left(L_{1e} + L_2 + \frac{T_b J_C}{\theta L_{3e}}\right)^2 - \frac{2}{\theta} \left[T_b J_C - H + \frac{T_b J_C}{L_{3e}}(L_{1e} + L_2)\right]} - \left(L_{1e} + L_2 + \frac{T_b J_C}{\theta L_{3e}}\right) \quad (10)$$

式中，当 $K_t \leq K_b$ 时 $\theta = \frac{K_t}{K_f T_f}$

当 $K_t > K_b$ 时 $\theta = \frac{K_b}{K_f T_f}$

若求出的 $B \leq 0$ ，则表示不发生管涌，不需要压盖层。

最后，关于在堤坝背水坡脚处，压盖层的厚度 $t_{x=B}$ ($x=B$ 处) 可根据等抗渗强度原则，即在压盖层的任一垂直剖面上的渗流出逸坡降 $J_{\text{出}}$ 等于该层土的临界渗流坡降 J_C [$J_C = (\Delta_s - 1)(1 - n)$]，因而可得到：

(1) 当 $K_t \leq K_b$ 时

$$J_{\text{出}} = \frac{h_x - t_x}{T_b \frac{K_t}{K_b} + t_x} = J_C$$

$$t_x = \frac{h_x - J_C T_b \frac{K_t}{K_b}}{J_C + 1} \quad (11)$$

$$h_x = \frac{\theta}{2} x^2 - \frac{J_C T_b}{L_{3e}} x + J_C T_b$$

当 $x=B$ 时，则得

$$t_{x=B} = \frac{h_{x=B} - J_C T_b \frac{K_t}{K_b}}{J_C + 1} \quad (12)$$

$$h_{x=B} = \frac{\theta}{2} B^2 - \frac{J_C T_b}{L_{3e}} B + J_C T_b \quad (13)$$

式中： $\theta = \frac{K_t}{K_f T_f}$ 。

式 (13) 基准线 0—0 线在铺盖顶面上, 坐标原点在图 1 中的 O_1 点。

(2) 当 $K_t > K_b$ 时

$$t_{x=B} = \frac{h_{x=B} - J_C T_b}{1 + J_C \frac{K_b}{K_t}} \quad (14)$$

式中: $h_{x=B}$ 同式 (13)。

关于在 $x=0$ 处的压盖层厚度 $t_{x=0}$, 不论 $K_t \leq K_b$ 或者 $K_t > K_b$ 均为零。

最后必须指出, 在求得 B 和 $t_{x=B}$ 后还应乘上安全系数 K , 一般情况下, $K=1.1 \sim 1.3$, 视工程重要性而定。

综上所述, 可以归结为下列几点:

(1) 采用压盖层防治管涌, 是一个快速有效的措施, 近年来各堤防段采用甚多, 它的优点是施工方便, 就地取材, 造价不贵。

(2) 由于压盖层目前还缺乏合理的设计方法, 本文提供的成果可供工程设计、施工及管理单位采用。

(3) 鉴于 $K_t \leq K_b$ 时, B 值会大幅度增加, 增大工程造价, 故最好采用 $K_t > K_b$, K_t 越大越好。

(4) 施工时只要控制压盖层的容重 γ_t , 使其比天然铺盖层的 γ_b 小, 就能使得 $K_t > K_b$ 。

(5) 计算步骤, 先根据式 (10) 求出 B 值, 用式 (12)、式 (14) 求出 $t_{x=B}$ 。将 $t_{x=B}$ 与 $x=0$ 处的 $t_{x=0}=0$ 取一直线, 即为压盖层顶面, 并且此层具有等效抗渗强度特点。

参 考 文 献

- 1 毛昶熙. 堤内压土方案的渗控设计方法. 水利学报. 1997 (6)

防治堤防管涌及流土的 排渗减压沟设计

汛期洪峰持续期间，江河大堤背水坡脚附近地区，最易发生管涌。防汛抢险历来是工程单位头等大事，目前最常用的方法有三。其一是修建压盖，把管涌压住，这个办法快速有效，特别适用于应急救灾，但施工质量难以保证。此外，压盖层越不透水，则所需要压盖的面积将成倍地大于原本发生管涌的面积，才能把管涌压住，不致在别处引发新的管涌，故工程量很大。第二种方法是在背水坡脚附近地面修建排渗沟减小渗流压力，这也是很有效的工程措施，施工方便，造价也不高，但易堵塞，可考虑改进，用暗沟代替明沟，用浅沟代替深沟，仅需将天然覆盖层挖通让其下面的强透水层露头即可达到排渗减压防治管涌的目的。第三种方法是在背水坡脚处或在迎水坡脚处打板桩，深入到强透水层中去，全部截断或部分截断该透水层。如果强透水地基深度不深，则可全部截断，一劳永逸解决管涌。如果深度较深，采用板桩全部截断有困难，则可部分截断，笔者曾作了分析计算，其防渗效果并不理想，而且防渗效果与板桩打入的深浅关系不大，究其原因是因为：江河大堤内外的天然覆盖层一般情况下均是很长，故水平渗径远远大于板桩的垂直渗径，垂直防渗所占的比重实在太小，以致显现不出来，除非水平渗径比较短，板桩才能展示其防渗功能。综观上述三种防治管涌的方法，第一种方法及第二种方法的实用价值较大。本书笔者曾对第一种方法作了专门研究并提出了压盖层的设计方法，此处不再赘述。今拟对第二种方法作一探讨如下。

图 1 所示是一典型的双层地基上江河大堤断面，地基上层为天然覆盖层，也可叫天然铺盖层，透水性 K_b 很小，一般均为粘土或壤土，下层为天然砂基，透水性 K_f 很大， K_f/K_b 均在 100

倍以上,甚至可达 1000 倍或 10000 倍,故渗流在其中流动,阻力很小,因而对 CE 段的顶托作用很大,易引起管涌,特别在背水堤脚附近,这是最危险的区域。

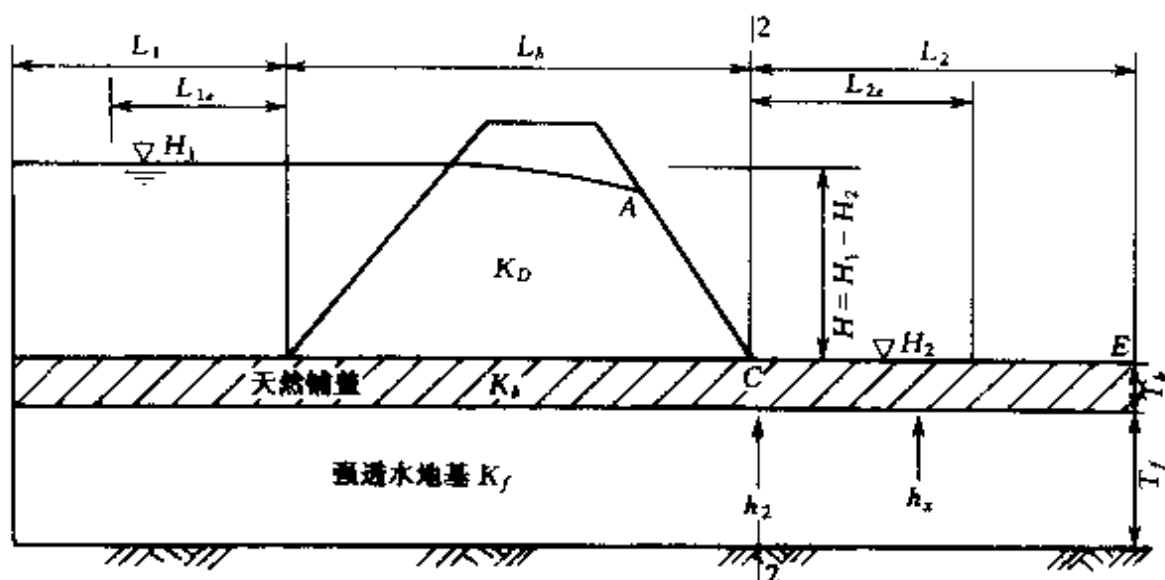


图 1

图 1 中的 L_{1e} 及 L_{2e} 是上下游等效不透水覆盖层长度,是本奈特在 20 世纪 40 年代求得的,其值为

$$L_{1e} = \frac{\text{th}(aL_1)}{a} \quad (1)$$

$$L_{2e} = \frac{\text{th}(aL_2)}{a} \quad (2)$$

式中: $a = \sqrt{\frac{K_b}{K_f T_f T_b}}$, 称为越流系数。

当下游覆盖层很大时,则 $\text{th}(aL_3) \rightarrow 1$, 故得

$$L_{3e} = \frac{1}{a} \quad (2')$$

上述等效不透水覆盖层的物理意义,是指将上、下游的弱透水覆盖层长度 L_1 及 L_2 转化为不透水时的长度 L_{1e} 及 L_{2e} 时,对上游下游地基 1—1 及 2—2 断面的渗流量及渗透压力与未转化前是相等的,故谓等效。此外又因堤身的透水性很小,可视为不透水,故整个强透水地基的渗流对覆盖层底面的渗透压力沿程变化

为线性变化。因而作用在 2—2 断面的覆盖层底面上的渗透压力 h_2 为（基准面 0—0 设在透水层底面上）

$$h_2 = H_F + \frac{HL_{2e}}{L} \quad (3)$$

式中： $L = L_{1e} + L_b + L_{2e}$

在断面 2—2 的 C 点处，渗流出逸坡降为

$$J_{\text{出}} = \frac{h_2 - H_F}{T_b} \quad (4)$$

对于图 1 所示的下游段 CE 范围内是否发生管涌，关键问题是取决于 h_2 的大小。我们可以采用工程措施设法减小 h_2 值，使该处不发生管涌。如果能使该处不发生管涌，那么整个下游地段 CE 范围内就可保证全线均不发生管涌，也即是在 2—2 断面的 C 点若成立式 (5)，就可保证全线不发生管涌

$$J_{\text{出}} \leq J_C \quad (5)$$

J_C 为覆盖层土的临界坡降，其值可按式 (6) 计算

$$J_C = (\Delta_s - 1)(1 - n) \quad (6)$$

式 (6) 是著名的土力学家太沙基所创立。式中： Δ_s 为土的比重，一般均在 2.65 左右； n 为土体的孔隙率。

避免管涌则令 $J_{\text{出}} \leq J_C$ ，因而可得

$$\frac{h_2 - H_F}{T_b} \leq J_C$$

$$\text{由此可得} \quad h_2 \leq J_C T_b + H_F \quad (7)$$

$$\text{又因} \quad h_2 = H_F + \frac{HL_{2e}}{L} = H_F + \frac{HL_{2e}}{L_{1e} + L_b + L_{2e}} \quad (8)$$

因式 (7) = 式 (8)，故得

$$L_{2e} \leq \frac{T_b J_C (L_{1e} + L_b)}{H - T_b J_C} \quad (9)$$

又因式 (2)

$$L_{2e} = \frac{\text{th}(aL_2)}{a}$$

则 L_2 应为

$$L_2 = \frac{\text{arth}(aL_{2e})}{a} \quad (10)$$

再将式 (9) 代入式 (10) 则得

$$L_2 = L'_2 \leq \frac{\text{arth}\left[a \frac{T_b J_C (L_{1e} + L_b)}{H - T_b J_C}\right]}{a} \quad (11)$$

我们从图 1 中知道, L_2 是下游 CE 段的长度, 其尺寸是一个既定的事实, 无法改变, 但若将排渗沟的位置选在 L'_2 处, 放弃原来的 L_2 , 这是完全可以做到的, 并再考虑完全系数 K 值, 则上述不等式就可改为等式

$$L'_{2e} = \frac{\text{arth}\left[a \frac{T_b J_C (L_{1e} + L_b)}{H - T_b J_C}\right]}{aK} \quad (12)$$

K 值视工程重要性而定, 大江大河取大些, 一般工程 $K = 1.2$ 可以了。与 L'_2 相对应

$$L'_{2e} = \frac{\text{th}(aL'_2)}{a} \quad (13)$$

$$h'_2 = H_F + \frac{HL'_{2e}}{L_{1e} + L_b + L'_{2e}} \quad (14)$$

$$J'_{\text{出}} = \frac{h'_2 - H_F}{T_b} \quad (15)$$

根据式 (12)、式 (13)、式 (14)、式 (15) 就可以计算了。

例 1 已知图 1 所示各数据为, $T_b = 2$, $T_f = 10$, $H_{\text{上}} = 22$, $H_F = 12$, $K_b = 1$, $K_f = 200$, $L_1 = 150$, $L_b = 60$, $L_2 = 190$, $\Delta_s = 2.65$, $n = 0.27$ (长度单位为 m, 渗透系数单位为 m/尺)。

由上述各原始数据可得下列参数

$$H = H_{\text{上}} - H_F = 22 - 12 = 10$$

$$J_C = (\Delta_s - 1)(1 - n) = (2.65 - 1) \times (1 - 0.27) = 1.204$$

$$a = \sqrt{\frac{K_b}{K_f T_f T_b}} = \sqrt{\frac{1}{200 \times 12 \times 2}}$$

$$= 0.0158$$

$$L_{1e} = \frac{\text{th}(aL_1)}{a} = \frac{\text{th}(0.0158 \times 150)}{0.0158}$$

$$= 62.158$$

$$L_{2e} = \frac{\text{th}(aL_2)}{a} = \frac{\text{th}(0.0158 \times 190)}{0.0158}$$

$$= 62.94$$

先求 h_2

$$h_2 = H_{\text{下}} + \frac{HL_{2e}}{L_{1e} + L_b + L_{2e}}$$

$$= 12 + \frac{10 \times 62.94}{62.158 + 60 + 62.94} = 15.40$$

再求 $J_{\text{出}}$

$$J_{\text{出}} = \frac{h_2 - H_{\text{下}}}{T_b} = \frac{15.40 - 12.0}{2} = 1.70$$

因为 $J_{\text{出}} > J_c$, 故必产生管涌, 必须修排渗沟, 今将排渗沟修在 L'_2 处, 由式 (12) 可得

$$L'_2 = \frac{\text{arth}\left[a \frac{T_b J_c (L_{1e} + L_b)}{H - T_b J_c}\right]}{aK}$$

$$= \frac{\text{arth}\left[0.0158 \times \frac{2 \times 1.204 \times (62.158 + 60)}{10 - 2 \times 1.204}\right]}{0.0158 \times 1.0}$$

$$= 45.10$$

作为例题验证式 (12)、式 (13)、式 (14)、式 (15) 的正确可靠性, 故取 $K = 1.0$ 计算, 实际工程设计时应为 $K > 1.0$, 再由式 (13) 得

$$L'_{2e} = \frac{\text{arth}(aL'_2)}{a} = \frac{\text{arth}(0.0158 \times 45.10)}{0.0158} = 38.752$$

由式 (14) 得

$$h'_2 = H_{\text{下}} + \frac{HL'_{2e}}{L_{1e} + L_b + L'_{2e}}$$

$$= 12 + \frac{10 \times 38.752}{62.158 + 60 + 38.753}$$

$$= 14.408$$

再由式 (15) 得

$$J'_{\text{出}} = \frac{h'_2 - H_{\text{下}}}{T_b} = \frac{14.408 - 12.0}{2} = 1.204$$

正好 $J'_{\text{出}} = J_c$, 故不发生管涌。式 (12) ~ 式 (15) 验证完毕, 说明了排渗沟修建在 L_2 就可避免管涌了。目前修建排渗沟还缺乏合理的计算方法, 要么修建得离背水坡脚很近, 甚至就位于坡脚脚下, 要么修得很远, 本文提供的式 (12) 所修建的位置正好恰到好处。接下来, 再讨论排渗沟的深度 S 问题。

如图 2 所示为一悬挂式排渗沟, 沟底宽为 $2b$, 沟深为 S , 若当 $S = T_f$, 则为完整排渗沟; 当 $S = 0$, 则为浅沟, 或叫冒水沟。当为完整沟时, 则将透水地基截断, 只能从上游侧进水; 而当为不完整沟时, 则从上下游两侧都能进水; 而当为 $S = 0$ 的浅沟时 (图 3), 则其过水断面为一半圆弧, 从多个方向均能进水。排渗沟的深浅, 对排渗流量及渗透压力的影响并不是很大, 我们曾用有限元法做了一次比较, 见图 2、图 3。

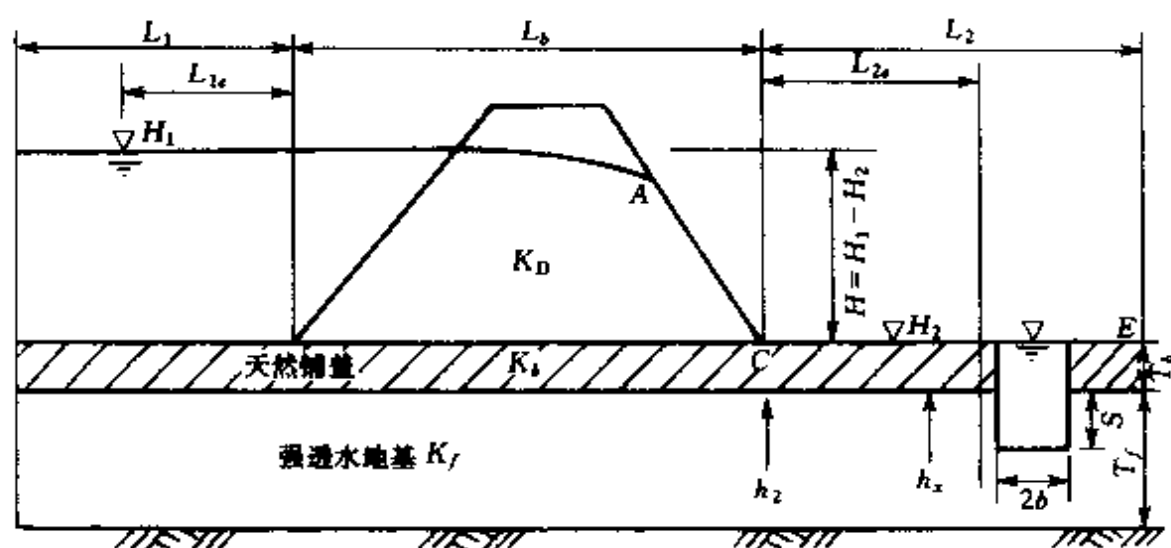


图 2

结合例 1, 已求得排渗沟的位置为 $L'_2 = 45.10$, 今分别在该处修建 $S = T_f$ 的完整沟及 $S = 0$ 的浅沟, 看一下对渗流量及沿程

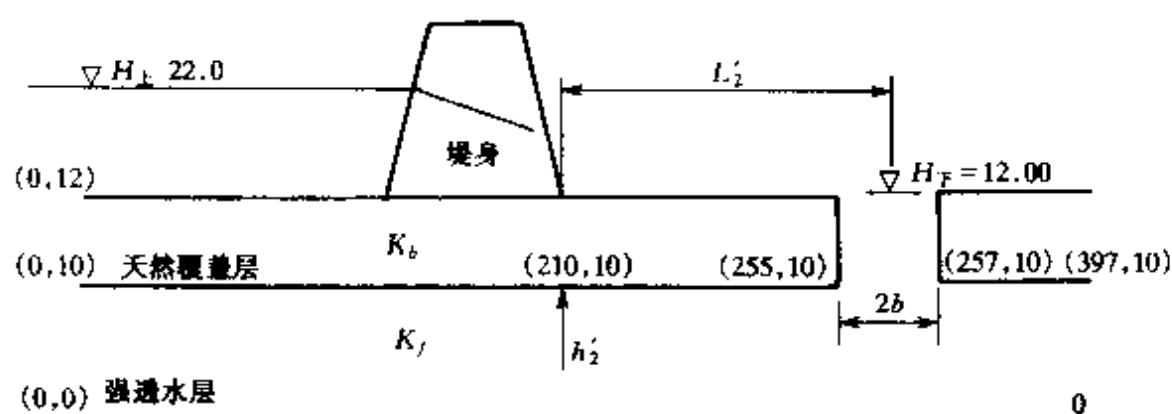


图 3

渗透压力的变化 (表 1)。

表 1 渗流量变化

完整排渗沟	$S = T_f$	$q = 116.1153$	文件名 (SJX10)
浅 沟	$S = 0$	$q = 113.7589$	文件名 (SJX8)

由表 1 可知, 两个 q 相差不大。

表 2 为作用在覆盖层底面的渗透压力 h'_2 的沿程分布变化。

表 2 h'_2 变化

	x	210	219	228	237	246	255	257
完整沟	h'_2	14.498	13.940	13.422	12.932	12.461	12.000	—
浅 沟	h'_2	14.578	14.028	13.521	13.043	12.578	12.000	12.000
	x	267	277	287	297	...	397	
完整沟	h'_2	—	—	—	—	...	—	
浅 沟	h'_2	12.083	12.077	12.066	12.057	...	12.022	

由表 2 可知, 位于 $x = 210\text{m}$ 处的背水坡脚处的 $h'_2 = 14.498\text{m}$ (完整沟), 浅沟时 $h'_2 = 14.578\text{m}$, 两者相差微小, 而本文式 (14) 得 $h'_2 = 14.408\text{m}$, 也很接近, 说明了三者均相吻合。此外, 还可看出, 在 $x = 210\text{m}$ 处的渗流的渗流出逸坡降 $J_{\text{出}}$

$$= \frac{h'_2 - H_{\text{下}}}{T_b} = \frac{14.408 - 12.00}{2} = 1.204$$
, 正好等于 J_c , 也说明了在 $x = 210 \sim 255$ (即 $L'_2 = 255 - 210 = 45.0\text{m}$) 这一段内由于修建了排渗透沟而不会发生管涌了。下面再举一例。

例 2 各原始数据同例 1, 但 $K_f = 1000\text{m/d}$, 其他不变, 此时由上述计算可得 $L'_2 = 56.93\text{m}$ (离背水坡脚处)

渗流量变化见表 3。

表 3 渗流量变化

完整排渗沟	$S = T_f$	$q = 349.72$	文件名 (SJX10)
浅沟时	$S = 0$	$q = 345.367$	文件名 (SJX8)

由表 3 可知, q 相差不大。

作用在覆盖层底面上的渗透压力 h'_2 的沿程分布变化见表 4。

表 4 作用在覆盖层底面上的渗透压力 h'_2 的沿程分布变化

	x	210	221.386	232.772	244.158	255.544	266.93	267.93	268.93	408.93
完整沟	h'_2	13.963	13.555	13.158	12.768	12.383	12.000	—	—	—
浅沟	h'_2	14.024	13.621	13.229	12.844	12.461	12.000	12.000	12.000	12.043

由表 4 可知, 完整沟的 h'_2 与浅沟的 h'_2 也相差不大。

综上所述, 对于只从上游一侧来水的完整沟与多侧来水的浅沟, 两者相比, 无论是渗流量或渗流压力, 相差很微小。因而可知, 修建排渗沟只需修浅沟就行了, 也就是沟深 $S = 0$, 只需将覆盖层挖穿, 让强透水层露头冒水就行了。此时应做好反滤层, 只能排渗不能冒砂, 这是关键。

接下来再讨论排渗沟的渗流量计算问题。如图 2 所示, 可在沟底划一水平线, 将该不完整沟分割在水平线上, 这就成了一个

沟深为 S 的完整沟了。而在水平线下方，则成了一个沟深 $S=0$ 的冒水沟（也即浅沟）。分别对这两部分的流态研究一下，就能解决问题了。在水平线上部区域，各流线基本平行，长度为 $(L_1 + L_b + L'_2) = L$ ，而水平线下部区域各流线汇集到沟底，每一条流线随自己所处的深度而定，其长短不尽相同，今取其平均长度 L' 为

$$L' = L + b + 0.5T_0 + \frac{2T_0}{\pi} \ln 2 \quad (16)$$

式中： b 为沟底半宽； $2T_0 \ln 2 / \pi$ 为流线行近沟底时转向而引起的纯转变损失，是前苏联学者采用严格的流体力学方法而得到的精确介。今将水平线上下两个渗流场的流线，取其加权平均值作为整个渗透流场沟上游一侧的长度 L_{CP} ，则得

$$\begin{aligned} L_{CP} &= \left[LS + \left(L + b + 0.5T_0 + \frac{2T_0}{\pi} \ln 2 \right) \right] T_0 / (S + T_0) \\ &= L + \frac{bT_0 + T_0^2}{T_f} \end{aligned} \quad (17)$$

式中： $T_0 = T_f - S$ 。

由于 b 值较小，可忽略，故得

$$L_{CP} = L + \frac{T_0^2}{T_f} \quad (18)$$

由此可得不完整排渗沟渗流量为

$$q = \frac{K_f T_f H}{L + \frac{T_0^2}{T_f}} \quad (19)$$

式中： $L = L_1 + L_b + L'_2$ 。

当 $T_0 = 0$ ，则为完整沟

$$q = \frac{K_f T_f H}{L}$$

当 $T_0 = T_f$ ，则为冒水沟（浅沟）

$$q = \frac{K_f T_f H}{L + T_f} \quad (20)$$

为了验证式 (19) 的正确性, 采用较多的试验资料进行对比, 见表 5。

表 5

L	T_f	S	T_0	$L + \frac{T_0^2}{T_f}$	$q_r = \frac{q}{K_f H}$	$q_{r\text{试验}}$
70	5	0.5	4.5	74.05	0.0675	0.0670
70	10	0.5	9.5	79.025	0.126	0.122
70	15	0.5	14.5	84.017	0.178	0.175
100	10	0.5	9.5	109.025	0.091	0.086
70	10	0.5	9.5	79.025	0.126	0.122
50	10	0.5	9.5	59.025	0.164	0.170
70	10	1.0	9	78.1	0.128	0.124
70	10	2.0	8	76.4	0.131	0.126
70	10	4.0	6	73.6	0.136	0.128
80	4	2.0	2	81	0.049	0.046
60	4	2.0	2	61	0.065	0.0612
60	4	1.0	3	62.25	0.064	0.060
40	4	0	4	44	0.090	0.0833
20	4	3.0	1	20.25	0.197	0.186

表 5 中, $q_r = \frac{q}{K_f H}$, q 计算式参见式 (19), 由表可知, 计算的 q_r 与电拟试验的 $q_{r\text{试验}}$ 相比, 非常吻合。表 5 试验资料取自文献 [1]。

式 (19) 在文献 [2] 计算不完整承压井渗流量时, 取得了很高的精确性。文献 [2] 已刊在中国岩土工程学报 1985 年 9 月期刊上, 后被美国土木工程师协会选登。本次将式 (19) 用来计算不完整沟时, 同样取得了很高精确度, 主要是因为它与不完整井渗流场的一侧流线分布极其相仿。

对于背水堤脚处至排渗沟之间, 覆盖层底面上所受到的渗流

压力分布计算已经没有什么实用价值, 故不再推导计算公式了。
沟底宽一般取 2m 左右即可。

参 考 文 献

- 1 毛昶熙. 新沂河大堤渗流控制试验研究. 南京: 南京水利科学研究院, 1966
- 2 沙金焯. 不完整井渗流的近似计算. 岩土工程学报, 1985. 9

多重补给下的地下水 二元不稳定流动

一、基本方程及解答

地下水二元不稳定流动，受包辛涅斯克（Boussinesq）方程所支配^[1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\mu}{k} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\epsilon}{k} \quad (1)$$

式中： h 为地下水自由面高程； k 为渗透系数； t 为时间； μ 为给水度； ϵ 为地下水蒸发强度。

式（1）是基于缓变流假定而得，并且在推导方程时，将基准面（ xy ）设于不透水底层的顶面上。

为了从最普遍情况来研究补给，我们设地下水运动过程中，受地下水蒸发 ϵ 、大气降水或灌溉入渗 ω 、承压水隔层渗透 q 等多重补给，因而式（1）为

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mu} (\omega + q - \epsilon) \quad (2)$$

现在分别讨论式（2）中的各补给项。

（1）地下水蒸发强度 ϵ 。它是一个变量，受土壤、植被、气象、地下水埋藏深度等因素而变，常用式（3）表示

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 - \Delta / \Delta_0) \quad (3)$$

式中： ϵ_0 为地下水上升到地表面时的蒸发强度，其值可近似地取同一地区的水面蒸发强度； Δ_0 为地下水蒸发为零值时的埋藏深度，视土壤条件而异，一般为 2.0~3.0m； Δ 为地下水埋深，其值可由式（4）表示

$$\Delta = T - h \quad (4)$$

式中： T 为自地面至不透水底层顶面的距离。

在式 (3) 中, 当 $\Delta > \Delta_0$ 时, 则 $\epsilon = 0$ 。

(2) 入渗强度 ω 。它也是一个变量, 例如降水强度、灌溉水量、土壤前期含水量均不相同, 均会影响入渗强度。但在某一时段内, 则可近似地将 ω 视为常量。

(3) 承压水隔层渗透 q 。在成层地层中, 可能有承压层存在, 如图 1 所示, 它将沿程补给位于其上的含水层中, 也是一个变量, 其补给强度可由式 (5) 表示^[1]

$$q = k'[(h' - h)/d]dx \quad (5)$$

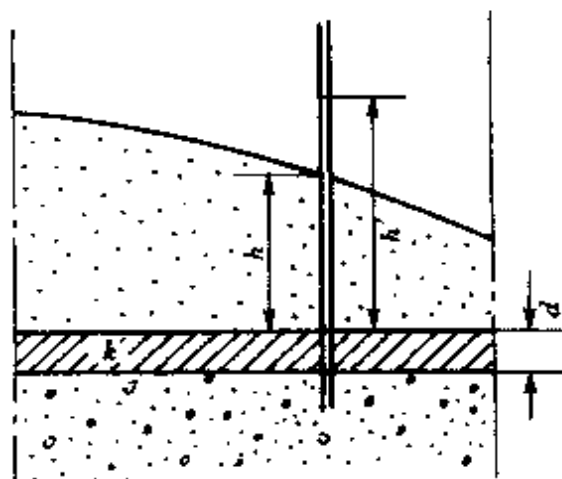


图 1

式中: k' 为隔层渗透系数; d 为隔层厚度。

今若设 dx 地段内, 地下水的蒸发量为 ϵdx , 入渗量为 ωdx , 承压水补给量为 q 。将考虑到表示变量 ϵ 的式 (3) 及式 (4) 代入式 (2), 并对式 (2) 进行线性化, 于是可得

$$\partial h / \partial t - a^2 (\partial^2 h / \partial x^2 + \partial^2 h / \partial y^2) = -E - Mh \quad (6)$$

式 (6) 就是考虑多重补给后的地下水二元不稳定运动方程。式中: $E = (\epsilon_0 / \mu - k'h' / \mu d - AT - \omega / \mu)$, $M = (k' / \mu d + A)$, $A = \epsilon_0 / \Delta_0 \mu$, $a^2 = kh_{cp} \alpha / \mu$, $h_{cp} = [H_0 + (h_0 - vt)] / 2$ 。 α 为排水沟的不完整系数, 可由瞿兴业公式计算^[2]

$$\alpha = 1 / \left(1 + \frac{8T_0}{\pi L} \ln \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi b}{4T_0}} \right) \quad (7)$$

式中: L 为排水沟沟距; T_0 为沟底至不透水层顶面之距; b 为沟中水面的宽度。

式 (7) 是瞿兴业按均匀入渗补给下的稳定流动导得的。笔者认为, 对于蒸发情况也可近似应用, 因为运动图式是基本一致的, 只是小部分水量由蒸发逸去。而对于承压水隔层渗透补给情况, 其运动图式则有所区别, 特别是当弱透水隔层埋藏较深时。但作为近似应用还是允许的, 因为一般说来, α 的影响不是很明显。

为了简便起见, 将式 (6) 改为下列形式

$$h_t - a^2(h_{xx} + h_{yy}) = -E - Mh \quad (8)$$

式中: h_t 为函数 h 对 t 的一阶偏微; h_{xx} , h_{yy} 为函数 h 分别对坐标轴 xy 的二阶偏微。

求介式 (6) 甚为困难, 为此我们作一函数 \tilde{h} 进行变换, 并令

$$\tilde{h} = h e^{\frac{k}{M} t} e^{Mt} = h e^{Mt} \quad (9)$$

将式 (9) 代入式 (8), 则有

$$\tilde{h}_t - a^2(\tilde{h}_{xx} + \tilde{h}_{yy}) = -E e^{Mt} \quad (10)$$

式 (10) 是式 (8) 的逆方程。若将式 (10) 和式 (6) 相比, 则不难发现, 由于消去了式 (8) 中的 h 项, 这就使得介题大为简化。

式 (8) 的边界条件和初始条件分别为

$$\left. \begin{aligned} h(0, y, t) &= h(L, y, t) = h_0 - vt \\ h(x, 0, t) &= h(x, B, t) = h_0 - vt \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$h(x, y, 0) = H_0 \quad (12)$$

边界条件式 (11) 表示了农田四周的排水沟水位是随时间变化的, 其下降速度为 v 。初始条件式 (12) 表示了雨后或灌溉后地下水位上升到最高位置 H_0 , 这样的处理是基本符合实际情况的, 因为雨后地下水位基本上呈一水平面, 只是在紧靠排水沟的两端, 地下水面略有弯曲。

将式 (11)、式 (12) 通过式 (9) 的变换则有

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}(0, y, t) &= \bar{h}(L, y, t) = (h_0 - vt)e^{Mt} \\ \bar{h}(x, 0, t) &= \bar{h}(x, B, t) = (h_0 - vt)e^{Mt} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\bar{h}(x, y, 0) = H_0 \quad (14)$$

将上述问题求解, 并将解答通过式 (9) 的逆变换, 于是可得到农田地下水在多重补给因素作用下, 流向排水沟过程中, 地下水位随时间和空间的变化规律

$$\begin{aligned} h(x, y, t) = & (h_0 - u) + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(Q - E) \frac{1 - e^{-(M+\beta)t}}{M + \beta} \right. \\ & \left. + u \frac{(M + \beta)t - 1 + e^{-(M+\beta)t}}{(M + \beta)^2} + He^{-(M+\beta)t} \right] \\ & \times \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{B} \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $Q = v - Mh_0$; $u = vM$; $H = H_0 - h_0$; $M = (k'/\mu d) + A$; $A = \epsilon_0/\Delta_0\mu$; $E = (\epsilon_0/\mu) - (k'h'/\mu d) - AT - (w/\mu)$; $\beta = (m\pi a/L)^2 + (n\pi a/B)^2$; 其他见前。

在式 (15) 中, 令 $x=0$ (或 $x=L$) 和 $y=0$ (或 $y=B$) 分别代入, 则可还原为式 (11) 的边界条件; 若令 $t=0$ 代入式 (15), 则可还原为式 (12) 的初始条件。若再将式 (15) 分别对 x 、 y 及 t 偏微, 则可还原为式 (6)。此处均从略。由此可见式 (15) 是正确的。

农业生产中, 最有意义的是农田中点地下水位的变化, 为此, 只需令 $x=L/2$, $y=B/2$ 代入式 (15) 中, 于是有

$$\begin{aligned} h(t) = & (h_0 - u) + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(Q - E) \frac{1 - e^{-(M+\beta)t}}{M + \beta} \right. \\ & \left. + u \frac{(M + \beta)t - 1 + e^{-(M+\beta)t}}{(M + \beta)^2} + He^{-(M+\beta)t} \right] \\ & \times \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

式 (16) 表明了农田中点地下水位随时间成指数规律下降, 按此式计算, 即可预报任一时刻的农田中点地下水位, 从而使得

控制地下水位有所依据。

若将式 (15) 对 t 偏微一次, 则可得到地下水下降速度 V 随时间和空间的变化规律

$$V(x, y, t) = -v + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(Q - E)e^{-(M+\beta)t} + u \frac{1 - e^{-(M+\beta)t}}{(M + \beta)} - H(M + \beta)e^{-(M+\beta)t} \right] \times \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{B} \quad (17)$$

同理, 将式 (16) 对 t 偏微, 则可得到农田中点地下水位下降速度随时间的变化规律

$$V(t) = -v + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(Q - E)e^{-(M+\beta)t} + u \frac{1 - e^{-(M+\beta)t}}{(M + \beta)} - H(M + \beta)e^{-(M+\beta)t} \right] \times \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (18)$$

任意时间内, 流入 x 方向任一侧排水沟的渗流量

$$q_{x-x}(t) = k[h^2(t) - (h_0 - vt)^2]/L \quad (19)$$

同理, 任意时间内, 流入 y 方向任一侧排水沟的渗流量

$$q_{y-y}(t) = k[h^2(t) - (h_0 - vt)^2]/B \quad (20)$$

式 (19)、式 (20) 中的 $h(t)$ 可按式 (16) 计算。

若边界水位变化甚微或不变时, 则可在上述诸式中令 $v=0$ 代入即可, 由于 $v=0$, 则便有 $u=0$, $Q=-Mh_0$, 从而上述诸式化为

$$h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[-(Mh_0 + E) \frac{1 - e^{-(M+\beta)t}}{(M + \beta)} + He^{-(M+\beta)t} \right] \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{B} \quad (21)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[-(Mh_0 + E) \frac{1 - e^{-(M+\beta)t}}{(M + \beta)} \right]$$

$$+ He^{-(M+\beta)t} \left\{ \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi y}{2} \right. \quad (22)$$

同理, 还可写出 $V(x, y, t)$ 及 $V(t)$ 的计算式, 此处从略。以上我们讨论了多重补给下的地下水二元不稳定流动问题, 可以由此引伸出若干单项补给情况下的问题。

二、蒸发作用下的排水问题

久雨逢晴, 地下水位普遍抬高, 一旦转晴并停止入渗, 此时在蒸发和排水沟的作用下, 地下水位开始消退。这种情况常是农业生产中最主要的情况, 务必将地下水位控制在某一高程, 以利农作物生长及防止土壤返盐。

对于只有蒸发作用的排水问题的解答, 可在式 (16) 中令 $\omega = 0$, $q = 0$ 代入即可, 因而有

$$\begin{aligned} h(x, y, t) = & (h_0 - u) + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ [v - (Ah_0 + B)] \right. \\ & \times \frac{1 - e^{-(A+\beta)t}}{(A + \beta)} + vA \frac{(A + \beta)t - 1 + e^{-(A+\beta)t}}{(A + \beta)^2} \\ & \left. + He^{-(A+\beta)t} \left\{ \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{B} \right. \right. \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) = & (h_0 - u) + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ [v - (Ah_0 + B)] \right. \\ & \times \frac{1 - e^{-(A+\beta)t}}{(A + \beta)} + vA \frac{(A + \beta)t - 1 + e^{-(A+\beta)t}}{(A + \beta)^2} \\ & \left. + He^{-(A+\beta)t} \left\{ \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right. \right. \quad (24) \end{aligned}$$

式 (23)、式 (24) 中, $B = \frac{\varepsilon_0}{\mu} - AT$; 其他符号同前。

有时边界水位变化甚微或不作变化时, 则可在式 (23)、式 (24) 中令 $v = 0$ 代入即可, 于是得到^[3]

$$h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[- (Ah_0 + B) \frac{1 - e^{-(A+\beta)t}}{(A + \beta)} \right]$$

$$+ He^{-(A+\beta)t} \left] \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{B} \quad (25)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[- (Ah_0 + B) \frac{1 - e^{-(A+\beta)t}}{(A+\beta)} + He^{-(A+\beta)t} \right] \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{2} \sin \frac{n\pi y}{2} \quad (26)$$

为了便于计算, 可将式 (25)、式 (26) 作一近似简化。因为式中的 $(Ah_0 + B)$ 可改写为 $A(h_0 + \Delta_0 - T)$, 而 $h_0 + \Delta_0 \approx T$, 故得 $(Ah_0 + B) = A(h_0 + \Delta_0 - T) \approx 0$, 于是式 (25)、式 (26) 可大为简化, 并考虑到式中的无穷级数收敛性能极为良好, 有可能取少量级数项求和即可获得满意精度, 今分别取 $m=1, 3, 5, 7$, 及 $n=1, 3, 5, 7$, 于是得到近似算式

$$h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} He^{-At} \left(e^{-Dt} \sin \theta + \frac{1}{3} e^{-9Dt} \sin 3\theta + \frac{1}{5} e^{-25Dt} \sin 5\theta + \frac{1}{7} e^{-49Dt} \sin 7\theta \right) \times \left(e^{-Ft} \sin r + \frac{1}{3} e^{-9Ft} \sin 3r + \frac{1}{5} e^{-25Ft} \sin 5r + \frac{1}{7} e^{-49Ft} \sin 7r \right) \quad (27)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} He^{-At} \left(e^{-Dt} - \frac{1}{3} e^{-9Dt} + \frac{1}{5} e^{-25Dt} - \frac{1}{7} e^{-49Dt} \right) \times \left(e^{-Ft} - \frac{1}{3} e^{-9Ft} + \frac{1}{5} e^{-25Ft} - \frac{1}{7} e^{-49Ft} \right) \quad (28)$$

式中: $D = (\pi a/L)^2$; $F = (\pi a/B)^2$; $\theta = \pi x/L$; $r = \pi y/B$; $H = H_0 - h_0$ 。

当 Dt (或 Ft) ≥ 3 以后, 则还可进一步简化为

$$h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} He^{-At} e^{-Dt} \sin \theta e^{-Ft} \sin r \quad (29)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} He^{-At} e^{-Dt} e^{-Ft}$$

$$= h_0 + \frac{16}{\pi^2} H e^{-(A+D)t} \quad (30)$$

我们在文献 [3] 中曾指出, 当农田长宽比 $\sigma = B/L > 3$, 则地下水的二元不稳定流动可视作为一元流动处理之, 以资简化。于是上述式 (27) ~ 式 (30) 可改写为

$$h(x, t) = h_0 + \frac{4}{\pi} H e^{-At} \left(e^{-Dx} \sin \theta + \frac{1}{3} e^{-9Dx} \sin 3\theta + \frac{1}{5} e^{-25Dx} \sin 5\theta + \frac{1}{7} e^{-49Dx} \sin 7\theta \right) \quad (31)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{4}{\pi} H e^{-At} \left(e^{-Dx} - \frac{1}{3} e^{-9Dx} + \frac{1}{5} e^{-25Dx} - \frac{1}{7} e^{-49Dx} \right) \quad (32)$$

$$h(x, t) = h_0 + \frac{4}{\pi} H e^{-At} e^{-Dx} \sin \theta \quad (33)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{4}{\pi} H e^{-(A+D)t} \quad (34)$$

式 (27) ~ 式 (30) 的计算并不繁复, 下面介绍查图法。前已述及 $(Ah_0 + B) \approx 0$, 则由式 (25) 可得

$$h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} H e^{-(A+\beta)t} \times \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{B} \quad (35)$$

现在, 我们将式 (35) 改写为

$$h(x, y, t) = h_0 + H e^{-At} \Psi_x \Psi_y \quad (36)$$

其中

$$\Psi_x = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-m^2 Dt} \sin \frac{m\pi x}{L}$$

$$\Psi_y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 Ft} \sin \frac{n\pi y}{B}$$

级数 Ψ_x , Ψ_y 已制成曲线图 (图 2), 图中纵坐标 Ψ 代表 Ψ_x 或 Ψ_y 。

按图 2 即可很方便地由任意的 Dt (或 Ft) 查出在某一 x/L

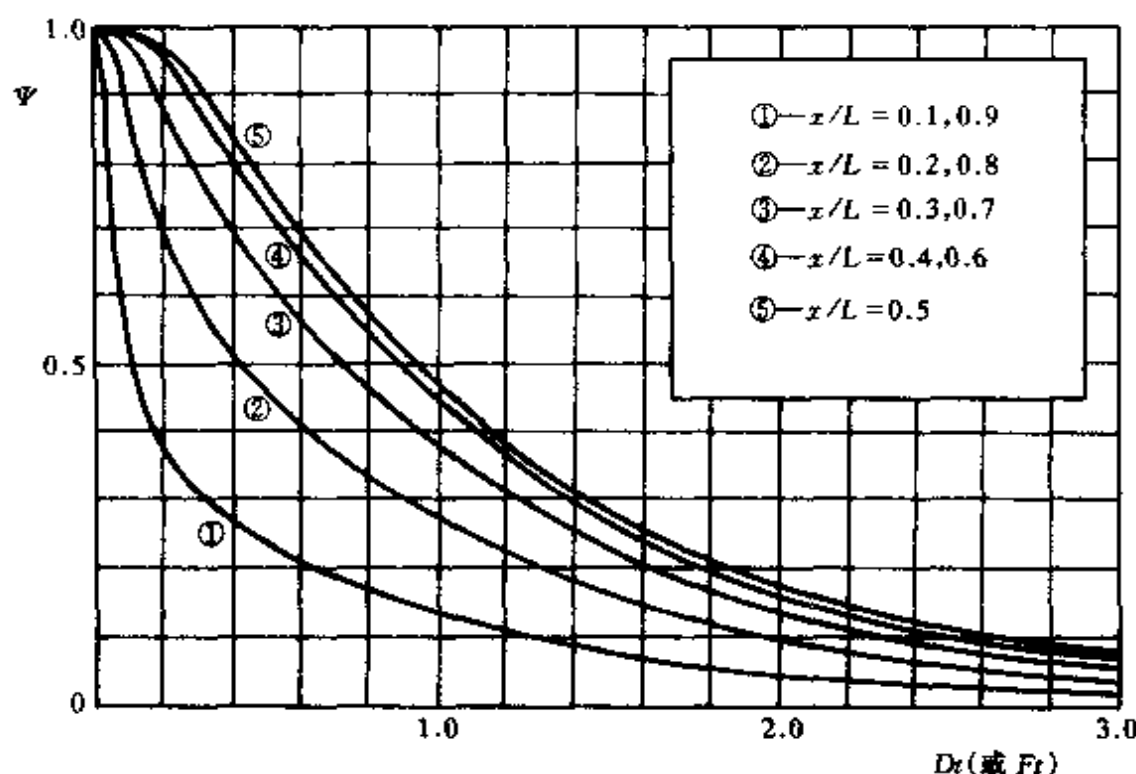


图 2

情况下相对应的 Ψ_x 或 Ψ_y 值, 然后, 再按式 (36) 计算 $h(x, y, t)$, 若为一元问题则可舍弃 Ψ_y 项。

由式 (30) 可求得二元问题的排水沟 (管) 距计算公式^[3]

$$L = \sqrt{\left(\frac{1 + \sigma^2}{\sigma^2}\right) \frac{\pi^2 a^2 t}{\ln \frac{16H}{\pi^2(h - h_0)} - At}} \quad (37)$$

由式 (34) 可求得一元问题的间距公式

$$L = \sqrt{\frac{\pi^2 a^2 t}{\ln \frac{4H}{\pi(h - h_0)} - At}} \quad (38)$$

式中: h_0 为沟水位; h 为经历 t 天后, 生产上要求得到的沟距中点地下水位; $H = H_0 - h_0$; H_0 为 $t = 0$ 时的起始地下水位; $\sigma = B/L$ 为田块长宽比, 事先由生产部门定出, 求出 L 后则另一沟距 $B = \sigma L$; $a^2 = kh_{cp}\alpha/\mu$, 此处取 $\alpha = 1$, $h_{cp} = (H_0 + h_0)/2$ 。

比较式 (37)、式 (38) 可知, 当按二元流动导得的式 (37)

来计算排水沟的沟距, 要比一元流动时式 (38) 求得之沟距放宽 $\sqrt{2}$ 倍, 因而现有国内外按一元流动所求得之沟距公式计算沟距是不经济的。只有在田块长宽比 $\sigma = B/L \geq 3$ 以后式 (37) 和式 (38) 可得相近结果, 才能简化为一元问题处理。

此外由于式 (37)、式 (38) 考虑进了蒸发影响, 因而又可进一步放宽沟距。顺便指出, 当式中的 A_t 大于分母中的对数项, 则表示了蒸发量很大, 意味着沟距可无限放宽。

例 已知沟水位 $h_0 = 2.0\text{m}$, $t = 0$ 时的起始地下水位为一水平面 $H_0 = 3.8\text{m}$, 渗透系数 $k = 0.87\text{m/d}$, 给水度 $\mu = 0.07$, 试求田块中点地下水位 h 在 $t = 5\text{d}$ 内自 $h = 3.8\text{m}$ 下降到 $h = 2.8\text{m}$, 所需沟距 L 应为多少, 设此田块为正方形 $\sigma = B/L = 1$, 并比较按式 (37) 和式 (38) 计算结果的差距。

解 (1) 先求有关参数

$$h_{cp} = (H_0 + h_0)/2 = (3.8 + 2.0)/2 = 2.9(\text{m})$$

$$a^2 = kh_{cp}/\mu = 0.87 \times 2.90/0.07 = 36.04(\text{m/d})$$

(2) 按式 (37) 计算沟距 $L = 53.04\text{m}$

(3) 若按式 (38) 计算沟距则为 $L = 41.08\text{m}$ (按一元流动布置的电拟试验值 $L = 41.10\text{m}$)

由此可知, 上例系二元流动的排水问题, 若按一元流动的公式来计算沟距, 则将多占耕地, 故应按式 (37) 的二元问题公式来计算。

若考虑蒸发影响, 设 $\epsilon_0 = 0.004\text{m/d}$, $\Delta_0 = 2.50\text{m}$, 则有 $A = \epsilon_0/\Delta_0\mu = 0.023$, 代入式 (37) 得 $L = 55.59\text{m}$, 代入式 (38) 则得 $L = 43.52\text{m}$ 。

在某些地区, 有时受一些条件限制, 不可能采取加密排水沟的方法来控制地下水位, 则可采用预降沟水位、增大地下水头差的办法, 来加速地下水出流, 降低地下水位。对某一既定排水沟布局的条件下, 要使沟距中点地下水位, 在允许的消退时间 t 内, 由初始地下水位 H_0 下降到农作物适宜的地下水位 h , 所需

预降后的沟水位 h_0 可近似地按式 (39) 计算确定

$$h_0 = [16H_0 e^{-(A+D+F)t} - h\pi^2] / [16e^{-(A+D+F)t} - \pi^2] \quad (39)$$

式 (39) 适用于 Dt (或 Ft) > 3 的情况。

以上我们讨论了在蒸发作用下地下水向排水沟网的流动。可见蒸发在地下水消退过程中的作用是很大的。但从另一方面看, 随着蒸发作用地下水不断向上运动, 土壤表层将不断积聚盐分, 从而加速了土壤返盐的过程。解决这个矛盾的方法是广种绿肥或其他植被, 将地下水蒸发转化为植物蒸腾。

在没有排水工程设施的地区, 例如一些天然状态的大面积平原地区, 或沿海冲积平原地区, 地下水的升高来源于大气降水, 地下水的消退则是由于蒸发作用所致。

如图 3 所示, 由于地下水蒸发 ϵ 的作用, 在 dt 时间内, 微分段 dx 内的水储量变化为 $\epsilon dx dt$, 这一水储量的变化, 必将引起相应的地下水面的降低, 设为 dh , 其水量亏损为 $-\mu dx dh$, 由此必然成立下式

$$\epsilon dx dt = -\mu dx dh \quad (40)$$

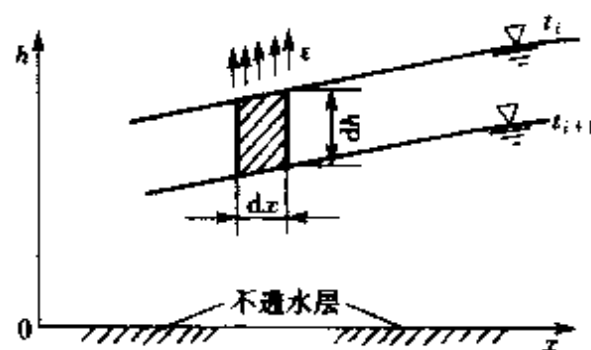


图 3

两端消去 dx , 于是可得

$$dh/dt = -\epsilon/\mu \quad (41)$$

将式 (3)、式 (4) 代入式 (35) 得

$$dh/dt = -B - Ah \quad (42)$$

解式 (42) 得地下水位随时间的变化关系为

$$h(t) = e^{-\int A dt} \left(-B \int e^{\int A dt} dt + C \right) \quad (43)$$

积分得

$$h(t) = -B/A + Ce^{-At} \quad (44)$$

式中: C 为积分常数, 当 $t=0$ 时, $h=H_0$, 故得 $C=H_0+B/A$, 因而式 (44) 为

$$h(t) = -B/A + (H_0 + B/A)e^{-At} \quad (45)$$

因 $A = \epsilon_0/\Delta_0\mu$, $B = \epsilon_0/\mu - AT$, 代入后得

$$h(t) = (T - \Delta_0) + [H_0 - (T - \Delta_0)]e^{-\epsilon_0 t/\Delta_0\mu} \quad (46)$$

若缺乏实测含水层厚度 T 时, 则可将式 (46) 改写为

$$\Delta = \Delta_0 - (\Delta_0 - \Delta_{H_0})e^{-\epsilon_0 t/\Delta_0\mu} \quad (47)$$

式中: Δ 为任意时刻 t 时, 由于蒸发而引起的地下水下降所对应的地下水埋深, 以 m 计; Δ_0 为地下水蒸发为零时的埋深, 一般为 $\Delta_0 = 2 \sim 3m$, 是一常数, 视地区土壤而别; Δ_{H_0} 为地下水面初始位置时的埋深。

根据式 (46) 或式 (47) 即可计算无排水工程地区的蒸发排水量。由式 (47) 显然可知, 当 $t=0$ 时 $\Delta = \Delta_{H_0}$, 当 t 不断增大后, $e^{-\epsilon_0 t/\Delta_0\mu} \rightarrow 0$, 于是得 $\Delta = \Delta_0$ 。

三、入渗作用下的排水问题

久旱无雨, 地下水面将消退到最低位置 H_0 , 一旦降雨或连续灌溉, 则入渗开始, 地下水面将由原来的水平面 H_0 逐步上升而为一曲面。在地下水面上升过程中, 沟水位亦将上升, 但上升很慢, 可视为 h_0 不变。特别是在灌溉而不是在降雨时, 沟水位将保持在 h_0 而不变。对于这种情况下的地下水面变化规律, 可在前面求得的综合解答式 (26) 中, 令蒸发 $\epsilon_0 = 0$, 承压水补给 $q = 0$ 代入即可。由于 $q = 0$, 则 $k' = 0$, 由于 $\epsilon_0 = 0$, 则 $A = 0$, 从而在式 (21) 中有 $M = 0$, $Q = 0$, $u = 0$, $E = -\omega/\mu$, 因而式 (21) 化为

$$h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\mu} \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} + H e^{-\beta t} \right)$$

$$\times \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{B} \quad (48)$$

对于沟距中点的地下水位随时间变化的规律为

$$h(t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\mu} \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} + H e^{-\beta t} \right) \times \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (49)$$

由于是收敛级数，故有可能取少量级数项求和，即可获得满意精度。今取 $m=1, 3, 5, 7$ 及 $n=1, 3, 5, 7$ 各四项级数，于是得近似算式

$$\begin{aligned} h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \frac{\omega}{\mu} & \left(\frac{1 - e^{-Dt}}{D} \sin \theta + \frac{1}{3} \frac{1 - e^{-9Dt}}{9D} \sin 3\theta \right. \\ & + \frac{1}{5} \frac{1 - e^{-25Dt}}{25D} \sin 5\theta + \left. \frac{1}{7} \frac{1 - e^{-49Dt}}{49D} \sin 7\theta \right) \left(\frac{1 - e^{-Ft}}{F} \sin r \right. \\ & + \frac{1}{3} \frac{1 - e^{-9Ft}}{9F} \sin 3r + \frac{1}{5} \frac{1 - e^{-25Ft}}{25F} \sin 5r + \left. \frac{1}{7} \frac{1 - e^{-49Ft}}{49F} \sin 7r \right) \\ & + \frac{16}{\pi^2} H \left(e^{-Dt} \sin \theta + \frac{1}{3} e^{-9Dt} \sin 3\theta + \frac{1}{5} e^{-25Dt} \sin 5\theta \right. \\ & + \left. \frac{1}{7} e^{-49Dt} \sin 7\theta \right) \left(e^{-Ft} \sin r + \frac{1}{3} e^{-9Ft} \sin 3r + \frac{1}{5} e^{-25Ft} \sin 5r \right. \\ & + \left. \frac{1}{7} e^{-49Ft} \sin 7r \right) \quad (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \frac{\omega}{\mu} & \left(\frac{1 - e^{-Dt}}{D} - \frac{1}{3} \frac{1 - e^{-9Dt}}{9D} + \frac{1}{5} \frac{1 - e^{-25Dt}}{25D} \right. \\ & - \left. \frac{1}{7} \frac{1 - e^{-49Dt}}{49D} \right) \left(\frac{1 - e^{-Ft}}{F} - \frac{1}{3} \frac{1 - e^{-9Ft}}{9F} + \frac{1}{5} \frac{1 - e^{-25Ft}}{25F} \right. \\ & - \left. \frac{1}{7} \frac{1 - e^{-49Ft}}{49F} \right) + \frac{16}{\pi^2} H \left(e^{-Dt} - \frac{1}{3} e^{-9Dt} + \frac{1}{5} e^{-25Dt} \right. \\ & - \left. \frac{1}{7} e^{-49Dt} \right) \left(e^{-Ft} - \frac{1}{3} e^{-9Ft} + \frac{1}{5} e^{-25Ft} - \frac{1}{7} e^{-49Ft} \right) \quad (51) \end{aligned}$$

在式 (50)、式 (51) 中，当 Dt 和 Ft 大于 3 以后，则可简化为

$$\begin{aligned} h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \frac{\omega}{\mu} & \frac{1 - e^{-Dt}}{D} \sin \theta \frac{1 - e^{-Ft}}{F} \sin r \\ & + \frac{16}{\pi^2} H e^{-Dt} \sin \theta e^{-Ft} \sin r \end{aligned}$$

$$= h_0 + \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{\omega}{\alpha} \frac{1 - e^{-Dt}}{D} \frac{1 - e^{-Ft}}{F} + H e^{-(D+F)t} \right) \sin \theta \sin r \quad (52)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1 - e^{-Dt}}{D} - \frac{1 - e^{-Et}}{E} + H e^{-(D+E)t} \right) \quad (53)$$

以上各式中符号均同前。

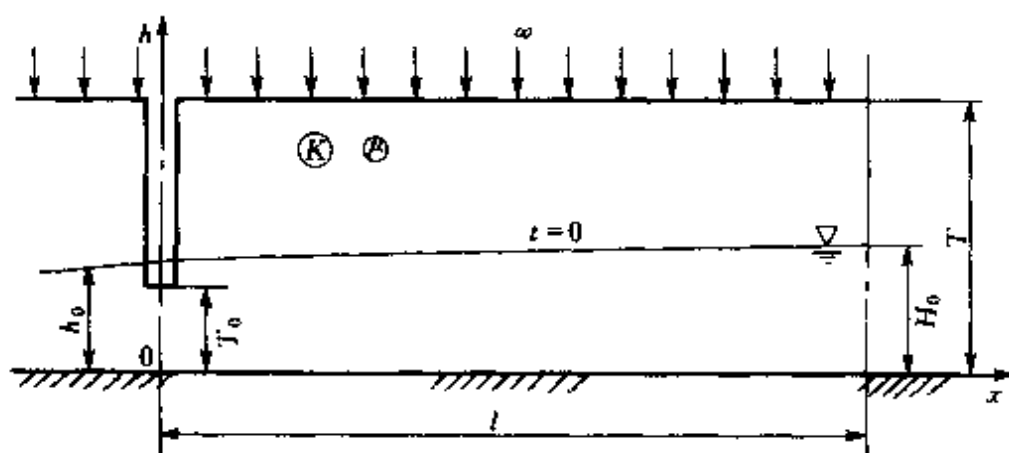
某些地区，在久旱后，地下水面消退到最低位置时，也可能为一稍带弯曲的曲面。如以一元问题为例，则很可能近似于正弦曲线分布（图4），于是可列出下列定解问题

$$h_f - a^2 h_{TT} = \omega/\mu$$

$$h(0, t) = h_0$$

$$h_x(l, t) = 0, (l = L/2)$$

$$h(x, 0) = h_0 + H \sin(\pi x / 2l); (H = H_0 - h_0) \quad (54)$$



4

解上述方程组, 得地下水随时间和空间的上升变化为

$$h(x, t) = h_0 + H e^{-D t} \sin \frac{\pi x}{2l} + \frac{4}{\pi} \frac{\omega}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha}}{C} \frac{\sin K x}{2n+1} \quad (55)$$

式中: $D = (\pi a / 2l)^2$; $K = (n + 1/2) \pi / l$; $C = [(n + 1/2) \times \pi a / l]^2$ 。

沟距中点地下水位随时间的上升变化为

$$h(t) = h_0 + H e^{-D t} + \frac{4}{\pi} \frac{\omega}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-c t}}{C} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (56)$$

若将式 (56) 对 t 偏微则得中点地下水位上升速度 V 随时间的变化

$$V(t) = -DH e^{-Dt} + \frac{4}{\pi} \frac{\omega}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (57)$$

同前一样, 式 (55)、式 (56)、式 (57) 可取少量级数项计算即可获得满意精度, 于是有

$$h(x, t) = h_0 + H e^{-Dt} \sin \theta + \frac{4}{\pi} \frac{\omega}{\mu} \left(\frac{1 - e^{-Dt}}{D} \sin \theta + \frac{1}{3} \frac{1 - e^{-9Dt}}{9D} \sin 3\theta + \frac{1}{5} \frac{1 - e^{-25Dt}}{25D} \sin 5\theta + \frac{1}{7} \frac{1 - e^{-49Dt}}{49D} \sin 7\theta \right) \quad (58)$$

$$h(t) = h_0 + H e^{-Dt} + \frac{4}{\pi} \frac{\omega}{\mu} \left(\frac{1 - e^{-Dt}}{D} - \frac{1}{3} \frac{1 - e^{-9Dt}}{9D} + \frac{1}{5} \frac{1 - e^{-25Dt}}{25D} - \frac{1}{7} \frac{1 - e^{-49Dt}}{49D} \right) \quad (59)$$

$$V(t) = -DH e^{-Dt} + \frac{4}{\pi} \frac{\omega}{\mu} \left(e^{-Dt} - \frac{1}{3} e^{-9Dt} + \frac{1}{5} e^{-25Dt} - \frac{1}{7} e^{-49Dt} \right) \quad (60)$$

众所周知, 入渗补给下地下水将上升, 但在上升过程中又形成了与沟水位的水头差, 从而产生了流向排水沟的流量, 于是地下水面的上升将受到一定程度的抵消。因而这种运动, 随着时间的推移, 将是一个彼此互相消长的过程, 直至到达某个时候, 地下水上升到某一位置时, 此时的排水量恰好等于入渗量, 于是地下水水面将保持稳定不变, 地下水上升速度 $V(t) = 0$, 因而由式 (60) 可得

$$\omega = \frac{\pi \mu}{4} \frac{DH e^{-Dt}}{e^{-Dt} - \frac{1}{3} e^{-9Dt} + \frac{1}{5} e^{-25Dt} - \frac{1}{7} e^{-49Dt}} \quad (61)$$

当 $Dt \geq 3$ 后, 则式 (61) 可简化为

$$\omega = \pi \mu DH / 4 \quad (62)$$

也即是说, 当入渗量满足式 (61) 或式 (62) 时, 地下水水面将保持不变。由此可得到入渗作用下, 地下水升降的判别式:

$$\begin{aligned}
 \text{地下水面上升} \quad \omega &> \frac{\pi\mu}{4} \frac{DH e^{-Dt}}{e^{-Dt} - \frac{1}{3}e^{-9Dt} + \frac{1}{5}e^{-25Dt} - \frac{1}{7}e^{-49Dt}} \\
 \text{地下水面不变} \quad \omega &= \frac{\pi\mu}{4} \frac{DH e^{-Dt}}{e^{-Dt} - \frac{1}{3}e^{-9Dt} + \frac{1}{5}e^{-25Dt} - \frac{1}{7}e^{-49Dt}} \\
 \text{地下水面下降} \quad \omega &< \frac{\pi\mu}{4} \frac{DH e^{-Dt}}{e^{-Dt} - \frac{1}{3}e^{-9Dt} + \frac{1}{5}e^{-25Dt} - \frac{1}{7}e^{-49Dt}} \quad (63)
 \end{aligned}$$

或近似判别式:

$$\begin{aligned}
 \text{地下水面上升} \quad \omega &> \pi\mu DH / 4 \\
 \text{地下水面不变} \quad \omega &= \pi\mu DH / 4 \\
 \text{地下水面下降} \quad \omega &< \pi\mu DH / 4 \quad (64)
 \end{aligned}$$

当地下水面稳定不变时, 此时的排水量 q_d 等于入渗量, 于是有

$$q_d = \omega L / 2 \quad (65)$$

若以 $\omega = (\pi/4)\mu DH$ 代入式 (65) 则得

$$q_d = (\pi/4)\mu DHL / 2 \quad (66)$$

由于 $D = (\pi a / L)^2$, 而 $a^2 = kh_{cp}a / \mu$, $H = H_0 - h_0$, 则式 (66) 化为

$$q_d = k(H_0^2 - h_0^2)a / l \quad (67)$$

当为完整排水沟时, $a = 1$, 于是得到

$$q_d = k(H_0^2 - h_0^2) / l \quad (68)$$

前苏联考斯加可夫院士曾根据入渗补给下的稳定流原理导得式 (68)^[4], 而我们这里从另一角度为考斯加可夫公式作了佐证。

应该指正, 当地下水上升到某一位置保持不变后, 整个地下水运动状态由不稳定流转化为稳定流。我们称这个 (沟距中点) 地下水位置为极限高程 h_{np} , 由式 (69) 求得

$$h_{np} = \sqrt{\frac{\omega l^2}{k} + h_0^2} \quad (69)$$

若将此 h_{np} 代入式 (55), 并取 $n=0$ 一项级数, 则可近似求得沟距中点地下水位自起始位置 H_0 上升到 h_{np} 时所需经历的天数

$$t = \frac{1}{D} \ln \left[\frac{H - \frac{4}{\pi} \frac{\omega}{\mu D}}{h_{np} - \left(h_0 + \frac{4}{\pi} \frac{\omega}{\mu D} \right)} \right] \quad (70)$$

也即是说, 在经历了 t 天后, 地下水水面将在此入渗量 ω [式 (62)] 补给下保持不变, 此时的沟距中点地下水位则为 h_{np} 。

以上我们讨论了在有排水工程设施地区, 地下水在入渗补给下的流动问题。下面我们进而讨论在无排水工程设施地区, 地下水在入渗补给下的上升变化问题。

如图 5 所示, 可列出下列方程

$$dh/dt = \omega/\mu \quad (71)$$

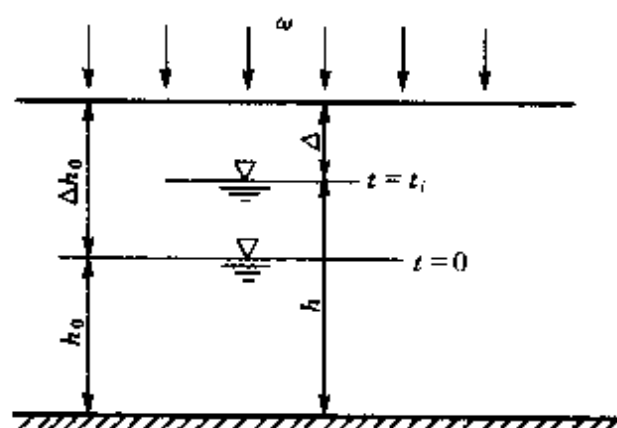


图 5

分离变量求得地下水位随时间 t 的变化关系为

$$h(t) = h_0 + (\omega/\mu)t \quad (72)$$

四、承压水补给下的排水问题

对于只有承压水 q 补给下的地下水二元不稳定流动问题, 其地下水随时间和空间的变化规律, 可由式 (15) 演化而得, 只需令式中的 $\epsilon_0 = 0$, $A = 0$, $\omega = 0$, 此处从略。

五、无补给的排水问题

对于没有各种补给, 而仅由于地下水头差引起的排水问题, 只需在式 (27) ~ 式 (39) 中令 $A=0$ 代入即可, 此处从略。

参 考 文 献

- 1 阿拉文, B. И., 努米罗夫, C. H., 滤流理论. 北京: 高等教育出版社, 1957
- 2 瞿兴业. 均匀入渗情况下均质土层内地下水向排水沟流动的分析. 水利学报. 1962 (6)
- 3 沙金焯. 水平面内地下水的二维非定常运动. 力学学报. 1979 (4)
- 4 考斯加可夫. 土壤改良原理 (下册). 北京: 高等教育出版社, 1956

农田地下排水系统的近似计算

本节讨论农田地下水在蒸发、入渗、承压水渗透补给等因素作用下，向排水沟的流动问题。文中提出了一些简明的计算方法可供设计参考。

一、垂向补给下的地下水位变化

如图 1 所示，由于排水沟及各种垂向补给，半沟距 l 内的水量变化为 qdt ，而 q 由下列各分项组成。

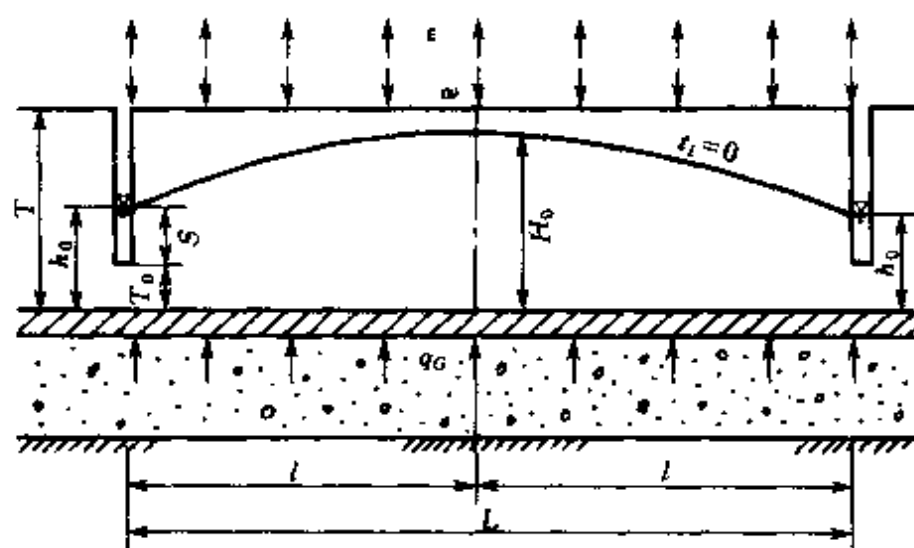


图 1

1. 排水沟渗流量

在 x 断面处的渗流量为

$$q_x = kl(h^2 - h_x^2)/x^2 \quad (1)$$

式中： k 为渗透系数 (m/d)； x 为该断面离沟距中心断面之距 (m)； h_x 为 x 处之地下水位； h 为沟距中心断面处之地下水位，即 $x=0$ 处之地下水位。当 $x=l$ 时， $h_x=h_0$ ，得由一侧流入排水沟的流量为

$$q_G = k(h^2 - h_0^2)/l \quad (2)$$

为了免去出现两次项, 令 $h_{cp} = (h + h_0)/2$, 则式 (2) 化为

$$q_G = 2kh_{cp}(h - h_0)/l \quad (3)$$

若为不完整排水沟, 则式 (3) 尚需乘上不完整系数 α 。根据 α 的计算公式, 计算表明当 $l/h_0 > 5$ 以后, $\alpha \approx 1.0$; 当 $l/h \leq 5$, 则 α 视沟的悬挂度 T_0/h_0 而异, 对 $T_0/h_0 = 0.1 \sim 0.5$ 的深沟, $\alpha \approx 1.0$, 对 $T_0/h_0 = 0.5 \sim 0.9$ 的浅沟, $\alpha = 0.9 \sim 0.6$, 可近似取 $\alpha = 0.75$ 。由此可得, 只有在 $l/h_0 \leq 5$ 时的浅沟 ($T_0/h_0 = 0.5 \sim 0.9$), 才取 $\alpha = 0.75$, 其他任何情况, 均可取 $\alpha = 1.0$ 。

2. 半沟距 l 内的蒸发量 q_s

地下水蒸发强度为

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\Delta_x}{\Delta_0}\right)^n \quad (4)$$

式中: ϵ_0 为地下水接近地表面之蒸发强度 (m/d), 可近似按当地水面蒸发强度代替, 为一已知常量; Δ_0 为地下水蒸发接近零时之埋深 (m), 为一已知常量; Δ_x 为地下水埋深 (m); n 为蒸发指数, 一般认为 $n = 1, 2, 3$, 实际上为 $n \geq 1$ 的任意数 (包括非整数), 如图 2 所示。

由图 2 可知, $n > 1$ 的非线性蒸发可表为下列线性关系, 从而可使计算简化

$$\epsilon = \epsilon_0(1 - \Delta_x/\Delta_0) - \beta\epsilon_0 \quad (5)$$

由于 $\Delta_x = T - h_x$, $\Delta_0 = T - h_{\Delta_0}$ 故得

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{\Delta_0}(h_x - h_{\Delta_0}) - \beta\epsilon_0 \quad (6)$$

半沟距 l 内蒸发总量为

$$q_s = \int_0^l \epsilon dx = \int_0^l \left[\frac{\epsilon_0}{\Delta_0}(h_x - h_{\Delta_0}) - \beta_{cp}\epsilon_0 \right] dx \quad (7)$$

式中: β_{cp} 为半沟距 l 内的平均值。

由于式 (1) 不是杜布衣方程, 故半沟距 l 内的地下水面线不能以杜布衣抛物线公式绘制。计算表明, 该自由水面线分布形

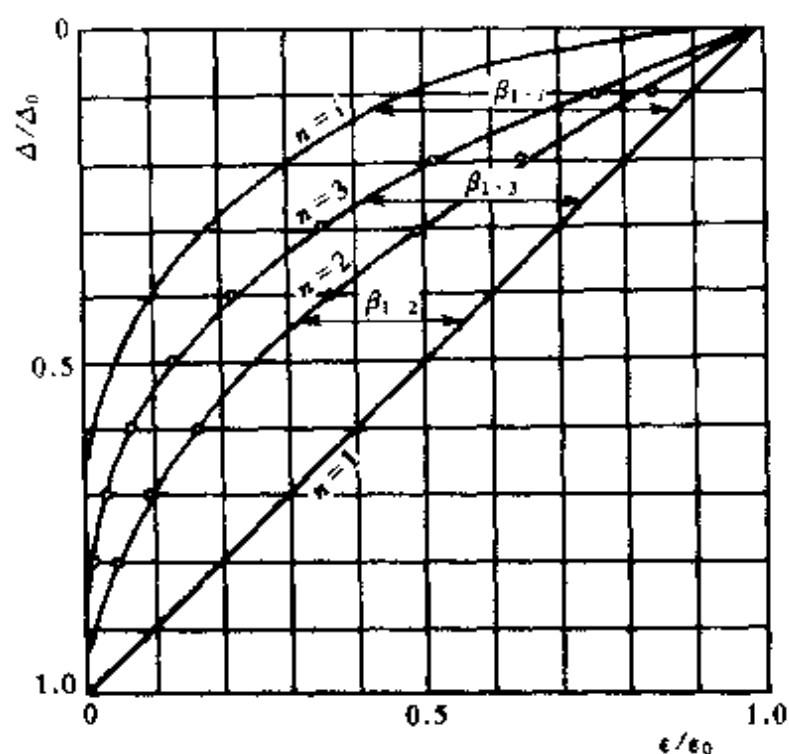


图 2

式近似余弦曲线（当坐标原点取在沟边时，则为正弦曲线），参见图 3。

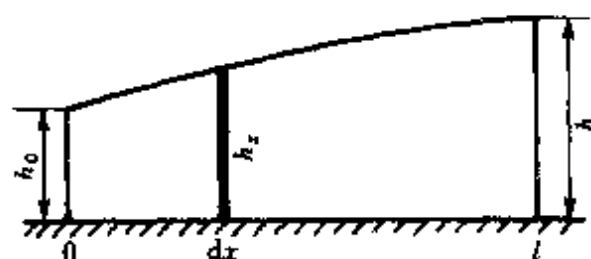


图 3

由图 3 可知

$$h_x = h_0 + (h - h_0) \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{l} \quad (8)$$

以式 (8) 代入式 (7) 并积分后得

$$q_s = \frac{\epsilon_0 l}{\Delta_0} (h_0 - h_{\Delta_0}) + \frac{\epsilon_0 l}{\Delta_0} \frac{2}{\pi} (h - h_0) - \beta_{cp} \epsilon_0 l \quad (9)$$

3. 半沟距 l 内的入渗总量 q_l

$$q_l = \omega l \quad (10)$$

式中: ω 为半沟距 l 内的时空平均入渗强度 (m/d)。

4. 半沟距 l 内承压水渗透量为 q_A

参见图 4。

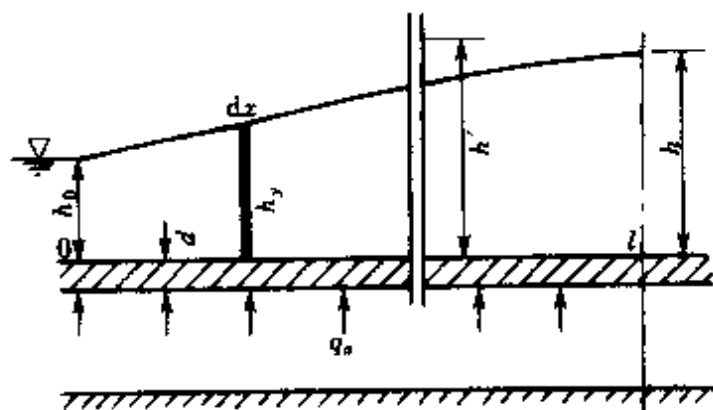


图 4

$$q_A = \int_0^l q_a dx = \int_0^l \frac{k'(h' - h_x)}{d} dx \quad (11)$$

以式 (8) 代入式 (11), 并积分得

$$q_A = \frac{k'l}{d} (h' - h_0) - \frac{k'l}{d} \frac{2}{\pi} (h - h_0) \quad (12)$$

将以上各分项求代数和, 则得半沟距 l 内的净流量为

$$q = [-(q_G + q_e) + (q_A + q_l)] \quad (13)$$

将各分项代入式 (13) 则得

$$\begin{aligned} q = & \left\{ - \left[\frac{2kh_{cp}(h - h_0)}{l} + \frac{\epsilon_0 l}{\Delta_0} (h_0 - h_{\Delta_0}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\epsilon_0 l}{\Delta_0} \frac{2}{\pi} (h - h_0) - \beta_{cp} \epsilon_0 l \right] \right. \\ & \left. + \left[\frac{k'l}{d} (h' - h_0) - \frac{k'l}{d} \frac{2}{\pi} (h - h_0) + \omega l \right] \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

d 时间内, 半沟距 l 内的总净水量变化为

$$dW = qdt \quad (15)$$

另一方面, 由于上述水量变化, 必将引起半沟距 l 内地下水水面线变化, 若自由水面所包围之水体为 V , 则 dt 内其增量为 dV

$$V = h_0 l + \int_0^l (h_x - h_0) dx \quad (16)$$

将式 (8) 代入得

$$V = h_0 l + \frac{2}{\pi} l (h - h_0) \quad (17)$$

而 dt 内的增量为

$$dV = \frac{2}{\pi} l d(h - h_0) \quad (18)$$

其水量为

$$dW = \mu dV = \frac{2}{\pi} l \mu d(h - h_0) \quad (19)$$

式中: μ 为土的给水度 (%)。很明显, 必然存在式 (15) = 式 (19), 再结合式 (14), 于是得水量平衡方程

$$(N - Mh)dt = \frac{2}{\pi} l \mu d(h - h_0) \quad (20)$$

分离变量并积分

$$\int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{d(h - h_0)}{N - Mh} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\pi dt}{2l\mu} \quad (21)$$

解式 (21) 得沟距中点地下水位随时间的变化为

$$h_{i+1} = \frac{N}{M} - \left(\frac{N}{M} - h_i \right) e^{-R\Delta t} \quad (22)$$

其中 $N = \left[Kh_0 - \epsilon' \left(h_0 - \frac{2}{\pi} h_0 - h_{\Delta_0} - \beta_{cp} \Delta_0 \right) + K' (h' - h_0 + \frac{2}{\pi} h_0) + \omega l \right]$

$$M = [K + (2/\pi)(\epsilon' + K')]$$

$$R = M\pi/2l\mu$$

$$K = 2kah_{cp}/l = k\alpha(h_i + h_0)/l$$

$$\epsilon' = \epsilon_0 l / \Delta_0 \quad K' = k'l/d \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i$$

当 $t_i = 0$ 时, $h_i = H_0$, 即是初始中点地下水位。对于各个单项问题可分别由式 (22) 派生而得, 例如:

(1) 当蒸发、入渗、承压水渗透均不考虑时则得

$$N = Kh_0 \quad M = K \quad (23)$$

(2) 当只考虑蒸发时, 则得

$$N = \left[Kh_0 - \epsilon' \left(h_0 - \frac{2}{\pi} h_0 - h_{\Delta_0} - \beta_{cp} \Delta_0 \right) \right] \quad (24)$$

$$M = \left[K + \frac{2}{\pi} \epsilon' \right]$$

(3) 当只考虑入渗时则得

$$N = [Kh_0 + \omega l] \quad M = K \quad (25)$$

(4) 当只考虑承压水渗透时 (向上渗透或向下渗漏) 则得

$$N = [Kh_0 + K'(h' - (1 - 2/\pi)h_0)]$$

$$M = [K + (2/\pi)K'] \quad (26)$$

例 1 如图 5 所示, 已知下列各数据, $k = 0.87\text{m/d}$, $\mu = 0.07$, $h_0 = 2.0\text{m}$, $t_i = 0$ 时的初始中点地下水位 $H_0 = 3.0\text{m}$, $l = 50\text{m}$, $\epsilon_0 = 0.004\text{m/d}$, $\Delta_0 = 2.5\text{m}$, $T = 4.0\text{m}$, $T_0 = 1.0\text{m}$ 。试求蒸发指数 $n = 1, 2$ 时, 沟距中点地下水位的变化。

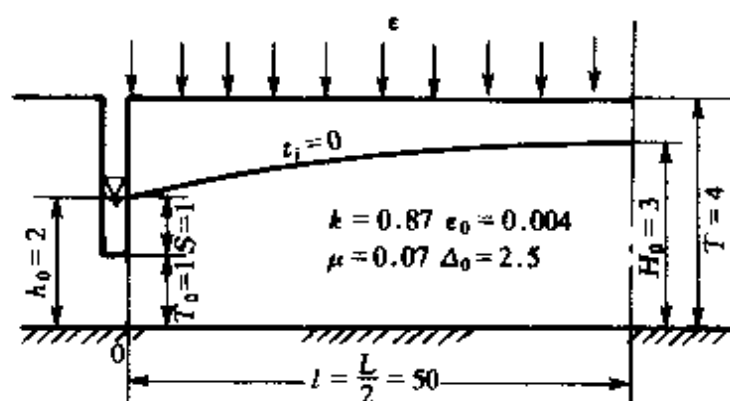


图 5

解 先根据原始数据求各参数。由于 $l/h_0 = 25$, 故可近似得不完整修正系数 $\alpha = 1.00$ (如按公式计算, 则 $\alpha = 0.98$), 由式 (22) 得 $\epsilon = 0.08\text{m/d}$, $K = 0.017(h_i + 2)\text{m/d}$, 由式 (24) 得 $N = 0.034(h_i + 2) + 0.062 + 0.2\beta_{cp}$, $M = 0.017(h_i + 2) +$

0.053。

(1) 先求 $n=1$ 时的沟距中点地下水位 (此时上式中 $\beta_{cp}=0$)

$$N/M = [0.034(h_i + 2) + 0.062] / [0.017(h_i + 2) + 0.053]$$

$$R = M\pi/2l\mu = 0.008(h_i + 2) + 0.024$$

$$h_{i+1} = N/M - (N/M - h_i)e^{-R\Delta t}$$

第一天: $t_i=0$, $t_{i+1}=1$, $\Delta t=1$, $h_i=H_0=3$, 代入上式得 $h_{i+1}=2.918\text{m}$ 。第二天: $t_i=1$, $t_{i+1}=2$, $\Delta t=1$, $h_i=2.918$ (即上一时段的 h_{i+1}), 代入上式得 $h_{i+1}=2.841\text{m}$ 。依此类推, 将上一时段求得的 h_{i+1} 值, 作为本时段的 h_i 代入式 (22)、式 (24), 即可逐日求得沟距中点地下水位。现将计算结果列于表 1, 并和拉普拉斯方程结合运动中的自由面边界的有限元数值解结果作一对比。

表 1

t (d)	0	1	2	3	4	5	6	8	10
Δt (d)		1	1	1	1	1	1	2	2
按本节方法 $h_{i+1}(\text{m})$	3	2.918	2.841	2.770	2.704	2.642	2.584	2.480	2.387
按有限元法 $h_{i+1}(\text{m})$	3	2.872	2.792	2.722	2.673	2.623	2.576	2.493	2.420

(2) 再求 $n=2$ 时沟距中点地下水位, 此时

$$N/M = [0.034(h_i + 2) + 0.062 + 0.2\beta_{cp}]$$

$$\div [0.017(h_i + 2) + 0.053]$$

$$R = 0.008(h_i + 2) + 0.024$$

式中: β_{cp} 查图 2 再求平均值。

仍参照 $n=1$ 的计算方法, 求得表 2 所列结果。

由表 1、表 2 可知按本文方法计算结果与较准确的拉普拉斯方程求解有限元法, 相差无几, 说明了本文提供的近似计算在精确度上是可靠的, 而计算方法则是比较方便的。

表 2

t (d)	0	1	2	3	4	5	6	8	10
Δt (d)		1	1	1	1	1	1	2	2
按本节方法 h_{i+1} (m)	3	2.939	2.880	2.828	2.78	2.735	2.693	2.635	2.565
按有限元法 h_{i+1} (m)	3	2.886	2.819	2.769	2.726	2.688	2.653	2.592	2.538

二、排水沟间距计算

由式 (22) 可知, 沟距中点地下水位计算式为

$$h_{i+1} = N/M - (N/M - h_i)e^{-R\Delta t}$$

式中: $R = M\pi/2l\mu$ 。令 $h_p = N/M$, 代入式 (22) 得

$$h_p - h_{i+1} = (h_p - h_i)e^{-M\pi\Delta t/2l\mu} \quad (27)$$

一般情况下, 计算沟距主要是针对在有蒸发的情况下, 故不必考虑其他因素的作用, 因而可知 $M = K + (2/\pi)\epsilon = [k\alpha(h_i + h_0)/l] + 2\epsilon_0 l/\pi\Delta_0$, 将其代入式 (27) 并经过一些演化可得排水沟半间距 l 的计算式为

$$l = \sqrt{\frac{k\alpha\pi(h_i + h_0)\Delta t}{2\mu \left[\ln \frac{(h_p - h_i)}{(h_p - h_{i+1})} - A\Delta t \right]}} \quad (28)$$

或 $L = 2l$

$$L = \sqrt{\frac{2k\alpha\pi(h_i + h_0)\Delta t}{\mu \left[\ln \frac{(h_p - h_i)}{(h_p - h_{i+1})} - A\Delta t \right]}} \quad (29)$$

式中: $A = \epsilon_0/\Delta_0\mu$ (1/d)。由于式 (28)、式 (29) 中等号右端的 $h_p = N/M$ 含有半沟距 l 在内, 故为隐函数, 因此需设法改进以免试算。

众所周知, 考虑蒸发与否对地下水的消退有影响, 但是对 $n = 1$ 的线性蒸发和 $n > 1$ 的非线性蒸发这两者所引起地下水位消退的差别, 则不甚明显, 而对沟距计算的影响更为微小 [参见式 (28)、式 (29) 中对数号内的 h_p]。因此在计算 h_p 时, 可令 N

中的 $\beta_{cp}=0$ 以资简化。此外, 在大多数情形下, 沟水位 h_0 与地下水蒸发为零时的极限高程 h_{Δ_0} 大致接近, 即 $h_0 \approx h_{\Delta_0}$, 对计算沟距影响不大。根据以上分析可得

$$h_p = N/M = [Kh_0 - \epsilon[(1 - 2/\pi)h_0 - h_{\Delta_0} - \beta\Delta_0]] \div [K + (2/\pi)\epsilon] \approx h_0 \quad (30)$$

因而式 (29) 可改写为

$$L = \sqrt{\frac{2ka\pi(h_i + h_0)\Delta t}{\mu \left[\ln \frac{(h_0 - h_i)}{(h_0 - h_{i+1})} - A\Delta t \right]}} \quad (31)$$

若令排水沟纵间距与横间距之比为 $\sigma = S/L$, 则当地下水向农田四侧排水沟作二元流动时 ($\sigma = S/L < 3$) 其沟距为

$$L = \sqrt{\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2} \frac{2ka\pi(h_i + h_0)\Delta t}{\mu \left[\ln \frac{(h_0 - h_i)}{(h_0 - h_{i+1})} - A\Delta t \right]}} \quad (32)$$

式中: σ 由设计单位事先定出, 故求得 L 后, 则另一侧沟距 $S = \sigma L$; 当 $t_i = 0$ 时, $h_i = H_0$; h_{i+1} 为若干天以后农业生产上所要求达到的沟距中点地下水位; Δt 是按生产要求而定的时限; h_0 为沟水位; 不完整系数 α 可近似取 $\alpha = 0.75$ (当 $l/h_0 \leq 5$ 及 $T_0/h_0 = 0.5 \sim 0.9$ 时, 其余任何情况下 $\alpha = 1.0$), $l/h_0 \leq 5$, 可凭估计, 因为求沟距时 l 是未知数。

我们在文献 [2] 中得到排水沟沟距 L 的计算公式:

二元流动时, $\sigma < 3$

$$L = \sqrt{\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2} \frac{\pi^2 ka(h_i + h_0)\Delta t}{2\mu \ln \left[\frac{16}{\pi^2} \frac{(h_i - h_0)}{(h_{i+1} - h_0)} - A\Delta t \right]}} \quad (33)$$

一元流动时, $\sigma \geq 3$

$$L = \sqrt{\frac{\pi^2 ka(h_i + h_0)\Delta t}{2\mu \left[\ln \frac{4}{\pi} \frac{(h_i - h_0)}{(h_{i+1} - h_0)} - A\Delta t \right]}} \quad (34)$$

式 (33)、式 (34) 是求解布西涅斯克方程时, 取无穷级数中的第一项演化而得, 由于舍弃了其余的级数项, 故精确度与式 (31)、式 (32) 差不多, 特别是对于大的沟距情况下。在式 (31)、式 (32) 如不考虑蒸发, 则可令 $A=0$ 。

三、入渗作用下的排水计算

入渗作用下, 沟距中点地下水位的变化可按式 (22)、式 (25) 计算, 即

$$h_{i+1} = h_p - (h_p - h_i)e^{-R\Delta t} \quad (35)$$

其中
$$h_p = N/M = (Kh_0 + \omega l) / K = h_0 + \omega l / K$$

$$R = K\pi\Delta t / 2l^2\mu \quad K = k\alpha(h_i + h_0)/l$$

对式 (35) 求 t 的微分得

$$dh_{i+1}/dt = V = R(h_p - h_i)e^{-R\Delta t} \quad (36)$$

如令 $V=0$, 则表示地下水不作升降变化。若要满足 $V=0$, 则必存在

$$h_p - h_i = 0 \quad (37)$$

由此可得

$$\omega l = k\alpha(h_i^2 - h_0^2)/l = q_G \quad (38)$$

也即是说, 当半沟距 l 内入渗总量 ωl 等于某一时刻的排水流量 q_G 时, 地下水运动即由不稳定状态转化为稳定状态。若当运动一开始便满足式 (38), 则必得

$$\omega l = k\alpha(H_0^2 - h_0^2)/l \quad (39)$$

此即考斯加可夫公式, 本文为其作了佐证。式 (39) 可作为入渗引起地下水位升降的判别式:

$$\omega > k\alpha(H_0^2 - h_0^2)/l^2, \text{则地下水位将上升} \quad (40)$$

$$\omega < k\alpha(H_0^2 - h_0^2)/l^2, \text{则地下水位将下降} \quad (41)$$

$$\omega = k\alpha(H_0^2 - h_0^2)/l^2, \text{则地下水位不变} \quad (42)$$

若满足式 (40), 则地下水位将上升, 但不会无休止地上升, 一定会在上升到某一高程 h_{np} 时, 地下水头差增大到此时的排水

流量恰好等于入渗量 ωl ，于是地下水将停止上升而保持稳定不变，我们称此高程为极限高程 h_{np} ，可由式 (43) 求得

$$h_{np} = \sqrt{h_0^2 + \omega l^2 / k\alpha} \quad (43)$$

地下水位由原来的 $h_i = H_0$ 上升到 h_{np} 所需之时间 Δt_{np} ，可解式 (44) 而得

$$h_{np} = (h_0 + \omega l / K) - [(h_0 + \omega l / K) - H_0] e^{-K\pi\Delta t / 2l\mu} \quad (44)$$

式中： $K = k\alpha (H_0 + h_0) / l$ 。演化式 (44) 得

$$\Delta t_{np} = [2l^2\mu / k\alpha(H_0 + h_0)\pi] \times \ln \left[\frac{(H_0 - h_0) - \omega l^2 / k\alpha(H_0 + h_0)}{(h_{np} - h_0) - \omega l^2 / k\alpha(H_0 + h_0)} \right] \quad (45)$$

用同样方法可推导出当 $\omega < k\alpha(H_0^2 - h_0^2) / l$ 时，地下水位的下降运动，也可求得 h_{np} 及 Δt_{np} 与式 (44)、式 (45) 相同。

例 2 已知 $k = 1\text{m/d}$ ， $\mu = 0.05$ ， $l = 20\text{m}$ ， $\alpha = 1.0$ （完整排水沟）， $h_0 = 2.0\text{m}$ ， $H_0 = 3.0\text{m}$ ， $T = 5.0\text{m}$ ， $\omega = 0.01\text{m/d}$ 。试求：(1) 判别地下水位的升降；(2) 求地下水位升降的极限高程 h_{np} ；(3) 求到达 h_{np} 所需之时间 Δt_{np} 。

解 (1) 先判别升降。 $k\alpha(H_0^2 - h_0^2) / l^2 = 0.0125\text{m/d}$ ， $\omega = 0.01\text{m/d}$ ， $\omega < k\alpha(H_0^2 - h_0^2) / l^2$ ，故地下水位虽处于入渗补给，但仍下降。

(2) 求 h_{np} 。由式 (43) 得地下水位下降的极限高程 $h_{np} = 2.828\text{m}$ ，到达此 h_{np} 后，便不再下降了，此时的排水流量为 $q_G = k\alpha(H_0^2 - h_0^2) / l = 0.2\text{m}^2/\text{d}$ ，而此时半沟距 l 内的入渗总量 $\omega l = 0.2\text{m}^2/\text{d}$ ，两者必相等，故地下水位不再下降而保持稳定。

(3) 再求 Δt_{np} 。根据式 (45) 得 $\Delta t_{np} = 7\text{d}$ ，也即是说经过 7d，地下水位由原来的 $H_0 = 3.0$ 下降到 $h_{np} = 2.828\text{m}$ 。如将此 $\Delta t_{np} = 7$ 代入式 (44)，则同样可得 $h_{np} = 2.828\text{m}$ 。

式 (22)、式 (35)、式 (40)、式 (41)、式 (42)、式 (43)、式 (45) 可作为农田地下水预测预报之用。

参 考 文 献

- 1 阿拉文, 努米罗夫. 滤流理论. 北京: 高等教育出版社, 1958
- 2 沙金焯. 水平面内地下水的二元非定常流动. 力学学报, 1979 (4)

江河水位变化对地下水 上升的影响

一、无压地下水运动的基本方程

设地下水自由面的垂直坐标为

$$z = h(x, y, t) \quad (1)$$

对时间 t 微分得

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

其中 $\frac{dx}{dt}$ 、 $\frac{dy}{dt}$ 为流体质点的孔隙流速在 x 、 y 轴上的分量

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V_x}{n}, \frac{dy}{dt} = \frac{V_y}{n}, \frac{dz}{dt} = \frac{V_z}{n} \quad (3)$$

由达西定律可得

$$V_x = -k \frac{\partial \phi}{\partial x}, V_y = -k \frac{\partial \phi}{\partial y}, V_z = -k \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4)$$

式中： k 为渗透系数； n 为土的孔隙率； V_x 、 V_y 、 V_z 分别为 x 、 y 、 z 轴上的流速分量； ϕ 为势函数，任何时刻自由水面上总是满足

$$\phi = h \quad (5)$$

将式 (3)、式 (4)、式 (5) 代入式 (2) 并以给水度 μ 代替孔隙率 n 得地下水自由面位置的方程^[1]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial h}{\partial z} \right] \quad (6)$$

可化为

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} V_x + \frac{\partial h}{\partial y} V_y - V_z = 0 \quad (7)$$

因为无压地下水拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

而且地下水运动服从缓变流假定, 则水平分速 V_x 、 V_y 不沿垂直轴 z 变化, 并将式 (8) 对 z 积分得

$$V_z(h) = -h \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \quad (9)$$

$$V_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad V_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} \quad (10)$$

将式 (9)、式 (10) 代入式 (8) 忽略高次项后可得无压地下水运动基本方程^[1]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \quad (11)$$

二、一侧边界水位突变的地下水运动

1. 地下水位

常见河口水闸关闭使整个河道水位升高, 或河道某处关闸造成闸上水位升高, 而另一侧平行河沟水位不变 (见图 1)。由于是条状地带, 对于一侧河道水位突变而引起的地下水运动, 可按一维运动计算, 故式 (11) 简化为

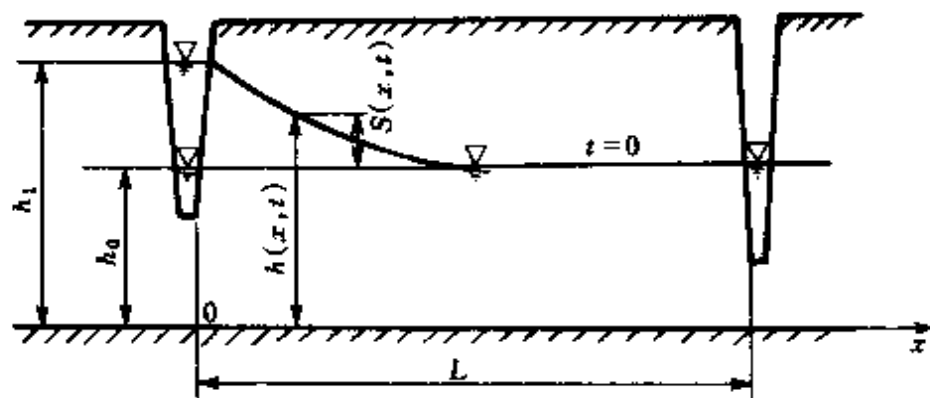


图 1

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (12)$$

式中: $a^2 = kh_{cp}/\mu$, 其中 $h_{cp} = \frac{1}{2} (h_1 + h_0)$ 。

边界条件和初始条件为

$$h(0, t) = h_1 \quad (13)$$

$$h(L, t) = h_0 \quad (14)$$

$$h(x, 0) = h_0 \quad (15)$$

为求得式 (12) ~ 式 (15) 中的解 $h(x, t)$, 可令

$$h(x, t) = V(x, t) + W(x, t) \quad (16)$$

及
$$V(x, t) = V = h_1 + \frac{x}{L} (h_0 - h_1) \quad (17)$$

因
$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

则
$$\frac{\partial W}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

相应的边界条件和初始条件为

$$W(0, t) = 0 \quad (19)$$

$$W(L, t) = 0 \quad (20)$$

$$W(x, 0) = \Delta h - \frac{x}{L} \Delta h \quad (21)$$

式中: $\Delta h = h_0 - h_1$ 。

要求得式 (18) ~ 式 (21) 中的解 $W(x, t)$, 可先将 W 分解为

$$W = X(x)T(t) \quad (22)$$

将式 (22) 代入式 (18) 化简得

$$T' + \lambda a^2 T = 0 \quad (23)$$

$$x'' + \lambda x = 0 \quad (24)$$

边界条件

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (25)$$

求解式 (24)、式 (25) 可知, 只有当 $\lambda > 0$ 时, 才有非零解。此时

$$\lambda_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \quad (m = 1, 2, \dots, \infty) \quad (26)$$

这样就找到了一簇非零解为

$$X_m(x) = C_m \sin \frac{m\pi}{L}x \quad (27)$$

再将 λ_m 代入式 (23) 得

$$T_m(t) = A_m e^{-m^2 \pi^2 a^2 t / L^2} \quad (28)$$

于是得式 (18) ~ 式 (21) 的解

$$\begin{aligned} W(x, t) &= X_m(x) T_m(t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-m^2 \pi^2 a^2 t / L^2} \sin \frac{m\pi}{L}x \end{aligned} \quad (29)$$

式中, $B_m = A_m C_m$, 是函数 $\phi(x)$ 在 $[0, L]$ 域按正弦函数组 $\left\{ \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}$ 的傅里叶展开的系数

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(\xi) \sin \frac{m\pi \xi}{L} d\xi \quad (30)$$

结合初始条件 $\phi(\xi) = \Delta h - \frac{\xi}{L} \Delta h$, 代入式 (30) 得

$$B_m = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta h}{m} [1 - (-1)^m] + \frac{2}{\pi} \frac{\Delta h}{m} (-1)^m = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta h}{m} \quad (31)$$

则
$$W(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\Delta h}{m} e^{-\alpha} \sin K_x \quad (32)$$

式中: $K = m\pi/L$; $c = m^2 \pi^2 a^2 / L^2$; $\Delta h = h_0 - h_1$ 。

求出了 W 以后, 则式 (12) ~ 式 (15) 的解

$$h(x, t) = h_1 + \frac{x}{L} \Delta h + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\Delta h}{m} e^{-\alpha} \sin K_x \quad (33)$$

令
$$S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-\alpha} \sin K_x$$

则
$$h(x, t) = \left(h_1 + \frac{x}{L} \Delta h \right) + \frac{2}{\pi} \Delta h S_1 \quad (34)$$

其中 S_1 可查表 1, 表中 $D_t = \pi^2 a^2 t / L^2$ 。

由式 (34) 可求出当一侧河道水位突升后, 对附近地区地下水位上升的影响, 举例说明如下。

表 1

X/L Dt	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.01	1.37237	1.09956	0.78540	0.47124	0.15708
0.02	1.23114	1.09955	0.78540	0.47124	0.15708
0.03	1.10011	1.09937	0.78540	0.47124	0.15708
0.04	0.99480	1.09820	0.78540	0.47124	0.15708
0.05	0.91030	1.09504	0.78540	0.47124	0.15708
0.06	0.84122	1.08932	0.78539	0.47124	0.15708
0.07	0.78364	1.08106	0.78536	0.47124	0.15708
0.08	0.73479	1.07056	0.78562	0.47124	0.15708
0.09	0.69271	1.05821	0.78506	0.47124	0.15708
0.10	0.65600	1.04446	0.78470	0.47124	0.15708
0.20	0.44080	0.88565	0.76497	0.47044	0.15707
0.40	0.27425	0.64087	0.66122	0.44934	0.15479
0.60	0.19749	0.48759	0.54731	0.40133	0.14413
0.80	0.15103	0.38297	0.44908	0.34421	0.12707
1.00	0.11910	0.30634	0.36784	0.28892	0.10833
2.00	0.04192	0.10965	0.13534	0.10933	0.04172
4.00	0.00566	0.01482	0.01832	0.01482	0.00566

例 两河道间距 $L = 200\text{m}$ ，左侧河道关闸蓄水，水位迅速上升到 $h_1 = h(0, t) = 6.0\text{m}$ ，右侧河道水位仍为 $h_0 = h(L, t) = 2.0\text{m}$ ，起始地下水位 $h(x, 0) = 2.0\text{m}$ ，含水层渗透系数 $k = 1\text{m/d}$ ，土壤给水度 $\mu = 0.05$ ，试求第 10 天离左侧河道 $x = 100\text{m}$ 处的地下水位。

解 $h_{cp} = \frac{1}{2}(h_1 + h_0) = 4\text{m}$ ， $a^2 = kh_{cp}/\mu = 80\text{m}^2/\text{d}$ ，因 $D_t = \pi^2 a^2 t / L^2 = 0.2$ ，及 $x/L = 100/200 = 0.5$ ，由表 1 查得 $S_1 = 0.765$ ， $\Delta h = -4\text{m}$ ，则 $h(x, t) = h(100, 10) = h_1 + \frac{x}{L} \Delta h + \frac{2}{\pi} \Delta h S_1 = 2.052\text{m}$ （按张蔚榛^[2]公式计算得 2.050m ）。

2. 地下渗流量

将式 (33) 对 x 偏微分得任一断面 x 处的地下水面坡降 J_x

为

$$J_x = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = \frac{\Delta h}{L} + \frac{2}{L} \Delta h \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha} \cos Kx \quad (35)$$

则任一断面处之渗流量

$$q_x = -kh_{cp} J_x \quad (36)$$

当 $x=0$ 时, 即为自左侧河道补给含水层之流量 q_0

$$q_0 = -kh_{cp} J_0 \quad (37)$$

式中, J_0 为 $x=0$ 时之 J

$$J_0 = \frac{\Delta h}{L} + \frac{2\Delta h}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha} \quad (38)$$

令

$$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 Dt}$$

则

$$J_0 = \frac{\Delta h}{L} + \frac{2}{L} \Delta h S_2 \quad (39)$$

其中 S_2 可查表 2。

表 2

Dt	0.02	0.04	0.06	0.08	0.12
S_2	5.766	3.981	3.118	2.633	2.058
Dt	0.18	0.22	0.26	0.32	0.38
S_2	1.589	1.389	1.238	1.066	0.937
Dt	0.50	1.0	2.0	3.0	4.0
S_2	0.729	0.386	0.136	0.05	0.018

自含水层流入右侧河道或排水沟之流量

$$q_L = -kh_{cp} J_L \quad (40)$$

式中, J_L 为 $x=L$ 处之 J

$$J_L = \frac{\Delta h}{L} + \frac{2}{L} \Delta h \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\alpha} \quad (41)$$

令

$$S_3 = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\alpha} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-m^2 Dt}$$

则
$$J_L = \frac{\Delta h}{L} + \frac{2}{L} \Delta h S_3 \quad (42)$$

其中 S_3 可查表 3。

表 3

Dt	S_3	Dt	S_3
0.02	-0.5	2.0	-0.135
0.3	-0.5	2.6	-0.074
0.6	-0.463	3.2	-0.041
0.9	-0.380	3.8	-0.022
1.4	-0.243	5.0	-0.006

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 表示了不稳定运动将转化为稳定运动, 此时 $J_0 = J_L = J_{t \rightarrow \infty} = \Delta h / L$, 则稳定流流量

$$q_{t \rightarrow \infty} = -kh_{cp} J_{t \rightarrow \infty} = -kh_{cp} \frac{\Delta h}{L} = \frac{k(h_0^2 - h_1^2)}{2L} \quad (43)$$

式 (43) 与法国水力学家 Dupite 按稳定流原理求得的公式相同。

3. 地下渗水总量

在 $0 \sim t$ 时期内, 自左侧河道补给含水层之总水量

$$W_0 = \int_0^t q_0 dt = -kh_{cp} \left(\frac{\Delta h}{L} t + \frac{2\Delta h}{L} \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{e^{-\alpha} - 1}{ct} t \right) \quad (44)$$

令
$$S_4 = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{e^{-\alpha} - 1}{ct} = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{e^{-m^2 Dt} - 1}{m^2 Dt}$$

则
$$W_0 = -kh_{cp} \left(\frac{\Delta h}{L} t + \frac{2\Delta h}{L} S_4 t \right) \quad (45)$$

其中 S_4 可查表 4。

表 4

Dt	S_4	Dt	S_4	Dt	S_4
0.02	11.043	0.32	2.571	0.8	1.457
0.04	7.367	0.36	2.399	1.0	1.252
0.06	6.406	0.4	2.523	1.4	0.984

续表

Dt	S_4	Dt	S_4	Dt	S_4
0.08	5.519	0.44	2.127	1.8	0.811
0.1	4.907	0.48	2.017	2.0	0.745
0.14	4.096	0.50	1.967	3.0	0.525
0.18	3.568	0.54	1.875	4.0	0.402
0.22	3.188	0.58	1.793	5.0	0.323
0.28	2.779	0.6	1.755		

在 $0 \sim t$ 时期内, 自含水层流入右侧河道或排水沟之总水量

$$W_L = \int_0^t q_L dt$$

$$= -kh_{cp} \left(\frac{\Delta h}{L} t + \frac{2\Delta h}{L} \sum_{m=1}^{\infty} -(-1)^m \frac{e^{-\alpha} - 1}{ct} t \right) \quad (46)$$

$$\text{令 } S_5 = \sum_{m=1}^{\infty} -(-1)^m \frac{e^{-\alpha} - 1}{ct} = \sum_{m=1}^{\infty} -(-1)^m \frac{e^{-m^2 Dt} - 1}{m^2 Dt}$$

$$\text{则 } W_L = -kh_{cp} \left(\frac{\Delta h}{L} t + \frac{2\Delta h}{L} S_5 t \right) \quad (47)$$

其中 S_5 可查表 5。

表 5

Dt	0.02	0.1	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
S_5	-0.49	-0.5	-0.458	-0.343	-0.257	-0.2	-0.16

在 $0 \sim t$ 时期内, 贮存于含水层中之总水量

$$\Delta W = W_0 - W_L \quad (48)$$

这一部分量 ΔW 将使地下水面自 h_0 ($t=0$ 时) 逐步抬高到任意时刻 t 时的水面线。上述这些水量, 流量的计算式可供水资源计算时应用。

三、一侧边界水位缓变时的地下水运动

江河水位一般都是缓慢变化的。汛期行洪时, 开始水位上涨快, 然后逐渐放慢, 最后稳定在某一高程; 过一定时间以后, 水

位开始下降,也是开始水位下降快,然后放慢,最后下降到某一低水位几乎不变。江河水位的这种缓速升降,符合指数规律^[3](见图2)。本文仅讨论江河水位上升的情况。

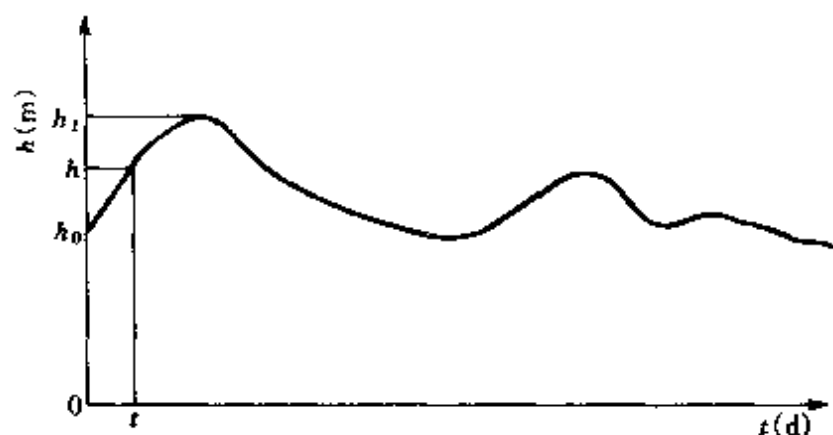


图 2

边界水位的上升变化可表示为

$$h(0, t) = h_1 + \Delta h e^{-\alpha t} \quad (49)$$

其中

$$\Delta h = h_0 - h_1$$

并列定解方程组中其他有关方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (50)$$

$$h(L, t) = h_0 \quad (51)$$

$$h(x, 0) = h_0$$

可求出定解方程组的解为

$$h(x, t) = (h_1 + \Delta h e^{-\alpha t}) + \frac{x}{L} [h_0 - (h_1 + \Delta h e^{-\alpha t})] + \frac{2}{\pi} \alpha \Delta h \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t}}{c - \alpha} \sin K_m x \quad (52)$$

式中, α 为水位变化指数, 可按文献 [3] 的公式确定, 即

$$\alpha = \ln \left(\frac{h_0 - h_1}{h - h_1} \right) / t \quad (53)$$

根据江河水位过程线(见图2)可得到 h_0 、 h_1 及任意时刻 t 之水位 h , 于是就可按式(53)求得 α 。

当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, $e^{-\alpha t} \rightarrow 0$, 则 $h(0, t) = h_1$, 把问题转化为

“二、”中所讨论的问题，则式 (52) 可转化为式 (33)。

式 (52) 中的无穷级数项可近似展开为

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha}}{c - \alpha} \sin K_x \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-m^2 D t}}{m^2 D - \alpha} \sin \frac{m \pi x}{L} \approx \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{-D t}}{D - \alpha} \right. \\ & \quad \times \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-4 D t}}{4 D - \alpha} \sin \frac{2 \pi x}{L} + \frac{1}{3} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-9 D t}}{9 D - \alpha} \\ & \quad \times \sin \frac{3 \pi x}{L} + \frac{1}{4} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-16 D t}}{16 D - \alpha} \sin \frac{4 \pi x}{L} + \dots \left. \right) \end{aligned}$$

式 (52) 对 x 偏微分得任意点的地下水面坡降 J_x

$$\begin{aligned} J_x = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{L} [h_0 - (h_1 + \Delta h e^{-\alpha t})] \\ &+ \frac{2}{L} \alpha \Delta h \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha}}{c - \alpha} \right) \cos K_x \end{aligned} \quad (54)$$

当 $x=0$ 时

$$J_0 = \frac{1}{L} [h_0 - (h_1 + \Delta h e^{-\alpha t})] + \frac{2}{L} \alpha \Delta h \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha}}{c - \alpha} \right) \quad (55)$$

当 $x=L$ 时

$$\begin{aligned} J_L &= \frac{1}{L} [h_0 - (h_1 + \Delta h e^{-\alpha t})] \\ &+ \frac{2}{L} \alpha \Delta h \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha}}{c - \alpha} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

自左侧河道渗入含水层之流量

$$q_0 = -k h_{cp} J_0 \quad (57)$$

自含水层流入右侧排水河沟之流量

$$q_L = -k h_{cp} J_L \quad (58)$$

在 $0 \sim t$ 时期内，自左侧河道补给含水层之总水量

$$W_0 = \int_0^t q_0 dt = -k h_{cp} \left[\left(\frac{\Delta h}{L} t - \frac{\Delta h}{L} \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) + \frac{2}{L} \alpha \Delta h \right]$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} - \frac{1-e^{-\alpha t}}{c} \right) \quad (59)$$

在 $0 \sim t$ 时期内, 自含水层流入右侧排水河沟之总水量

$$W_L = \int_0^t q_L dt = kh_{cp} \left[\left(\frac{\Delta h}{L} t - \frac{\Delta h}{L} \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) + \frac{2}{L} \alpha \Delta h \right. \\ \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{c-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} - \frac{1-e^{-\alpha t}}{c} \right) \right] \quad (60)$$

在 $0 \sim t$ 时期内, 贮存在含水层中之水量

$$\Delta W = W_0 - W_L \\ = -kh_{cp} \frac{2}{L} \alpha \Delta h \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{c-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} - \frac{1-e^{-\alpha t}}{c} \right) \quad (61)$$

这部分水量使得地下水位上升, 直至形成稳定的浸润线为止。

为了计算方便, 分别将式 (52)、式 (59)、式 (60)、式 (61) 中无穷级数项可近似写为

$$\frac{e^{-\alpha} - e^{-Dt}}{D-\alpha} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2} \frac{e^{-\alpha} - e^{-4Dt}}{4D-\alpha} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3} \frac{e^{-\alpha} - e^{-9Dt}}{9D-\alpha} \\ \times \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{4} \frac{e^{-\alpha} - e^{-16Dt}}{16D-\alpha} \sin \frac{4\pi x}{L} + \dots \quad (62)$$

$$\frac{1}{D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-Dt}-1}{D} \right) + \frac{1}{4D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-4Dt}-1}{4D} \right) \\ + \frac{1}{9D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-9Dt}-1}{9D} \right) + \frac{1}{16D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-16Dt}-1}{16D-\alpha} \right) \\ + \frac{1}{25D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-25Dt}-1}{25D-\alpha} \right) + \dots \quad (63)$$

$$- \frac{1}{D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-Dt}-1}{D} \right) + \frac{1}{4D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-4Dt}-1}{4D} \right) \\ - \frac{1}{9D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-9Dt}-1}{9D} \right) + \frac{1}{16D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-16Dt}-1}{16D-\alpha} \right) \\ - \frac{1}{25D-\alpha} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{e^{-25Dt}-1}{25D-\alpha} \right) + \dots \quad (64)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{D-a} \left(\frac{1-e^{-at}}{a} + \frac{e^{-Dt}-1}{D} \right) + \frac{1}{9D-a} \left(\frac{1-e^{-at}}{a} + \frac{e^{-9Dt}-1}{9D} \right) \\
 & + \frac{1}{25D-a} \left(\frac{1-e^{-at}}{a} + \frac{e^{-25Dt}-1}{25D} \right) + \frac{1}{49D-a} \\
 & \times \left(\frac{1-e^{-at}}{a} + \frac{e^{-49Dt}-1}{49D} \right) + \dots
 \end{aligned} \quad (65)$$

四、地下水移动距离与时间关系

由一侧河水位上升而引起地下水位上升且逐步向另一侧延伸时,需经历一段时间。在这个过程中地下水向另一侧延伸的前锋面随时间向前推移,该前锋面离开左侧河道距离 x_0 与时间 t 的关系可用文献 [2] 中公式表示

$$x_0 = 4a\sqrt{t} \quad (66)$$

该式假定条件是, $x_0 < L$ 及前锋面与起始地下水面的高差为 $5(h_1 - h_2)\%$ 。

地下水延伸的前锋面从一侧河流到另一侧河流所需的时间为

$$t_0 = \frac{L^2}{16a^2} \quad (67)$$

当 $t \geq t_0$ 时,地下水自由面才能延伸到另一侧河岸。上述算例的 $t_0 = 31.25d$ 。

五、结语

本节讨论了一侧江河水位骤变和缓变两种情况下所引起的附近地区地下水动态变化问题。对缓变情况仅讨论了水位成指数规律上升的情况,对不常见的地下水位均速上升的情况未加讨论。本节着重研究了地下水位、坡降、流量、总水量及地下水移动的变化,提出的计算公式和表格使计算更为简便。从地下水位计算实例可见,本节公式符合精度要求,对农田排水工程规划、渠道渗漏水量计算及地区水量平衡计算等方面具有实用意义。



参 考 文 献

- 1 雷姆森等. 地下水文学数值法. 北京: 地质出版社, 1977
- 2 张蔚榛. 地下水非稳定流计算和地下水资源评价. 北京: 科学出版社, 1983
- 3 沙金焯. 农田地下水排水计算. 北京: 水利电力出版社, 1983

非线性渗流问题

众所周知，在管道水力学中通过 π 定理的推求，可得到下列两个无尺度参数： $\frac{\rho u D}{\mu}$ 及 $\frac{P}{L} \frac{D}{\rho u^2}$ 。其中 P 为压力差； L 为管长； D 为管径； u 为流速； μ 为液体动力粘滞系数； ρ 为液体密度。 $\frac{\rho u D}{\mu}$ 称为雷诺数以 Re 表示， $\frac{P}{L} \frac{D}{\rho u^2}$ 称为阻力系数 η ，水力学家蔡克司大和尼古拉池都曾通过他们各自的实验，绘制了著名的曲线， $Re \sim \eta$ 。

$$Re = \Phi(\eta) \quad (1)$$

渗流运动可用细管中的流动来解释，文献 [1] 认为需将多孔介质中孔道通过的流速 $\frac{v}{m}$ 及表征孔隙形状大小的水力半径 R 分别代替上述流速 u 和管径 D ，于是得

$$Re = \frac{\rho v R}{\mu m} \quad \eta = \frac{P R m^2}{L \rho v^2} \quad (2)$$

前苏联学者明滋曾求得水力半径 R 为

$$R = \frac{m d_{3\pi}}{6\alpha(1-m)} \quad (3)$$

其中

$$\frac{1}{d_{3\pi}} = \sum \frac{p_i \%}{d_i} \quad (4)$$

上三式中： m 为多孔介质的孔隙率； $d_{3\pi}$ 为颗粒的等效粒径^[1]； $P_i \%$ 为 d_i 级颗粒的所有颗粒占总土重的百分数，可查颗分曲线； α 为颗粒的形状系数，它表示了不规则颗粒所具有的表面积与同体积球形颗粒所具有表面积之比。由于球粒表面积总是小于同体积非球粒表面积，故 $\alpha = 1$ ，其值可查表 1。

将 R 的表达式 (3) 代入式 (2) 中便可得到渗流运动中雷诺数与阻力系数的表达式

表 1 各种砂粒的形状系数 α

砂粒	球粒	河砂	海砂	锐角石英砂	颗粒异常混乱
α	1.0	1.17	1.17~1.16	1.5~1.67	1.7~1.87

$$Re = \frac{\gamma v d_{3\kappa}}{6\alpha\mu(1-m)g} \quad (5)$$

$$\eta = \frac{P}{L} \frac{gm^3 d_{3\kappa}}{6\alpha(1-m)\gamma v^2} \quad (6)$$

式中： γ 为水容重取 $\gamma = 1\text{g/cm}^3$ ； $g = 981\text{cm/s}^2$ ； μ 为动力粘滞系数（查表 2）； v 为渗流断面的平均流速； P 为水头损失； L 为渗径长度； $d_{3\kappa}$ 为颗粒的等效粒径。

表 2 不同温度时的运动粘滞系数 ν 及动力粘滞系数

t ($^{\circ}\text{C}$)	0	4	8	12	14	16	18
$\mu(10^{-4}\text{g}\cdot\text{s}/\text{cm}^2)$	0.181	0.16	0.142	0.126	0.119	0.113	0.108
t ($^{\circ}\text{C}$)	20	22	24	28	30	40	
$\mu(10^{-4}\text{g}\cdot\text{s}/\text{cm}^2)$	0.103	0.098	0.094	0.0855	0.0825	0.067	

各国学者对渗流中的 Re 及 η 进行了试验，求得了相类似的 $Re-\eta$ 关系曲线。见图 1。

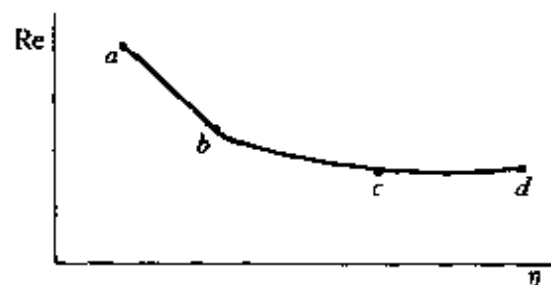


图 1

此曲线可用式 (7) 表示^[1]

$$\eta = \frac{A}{Re} + B \quad (7)$$

$$\sqrt{B} = \left(\frac{\gamma_m \tau}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\gamma_m \tau}{2} \right)^2 + \eta_{np}} \quad (8)$$

式中：A 为层流阻力系数， $A = 5.1$ ；B 为紊流阻力系数； γ_m 、 τ 、 η_{np} ，由表 3、表 4 查出^[1]。

表 3 不同孔隙率 m 时的 γ_m

孔隙率 m (%)	25	30	35	40	45	50
γ_m	64	45	33	25	19.5	15

表 4 不同粒径 d 时的 τ 及 η_{np} 值

d (cm)	0.025	0.034	0.0464	0.063	0.0847	0.0907	0.101
η_{np}	0.755	0.618	0.45	0.35	0.333	0.334	0.264
τ	0	0	0.0103	0.0185	0.0151	0.0135	0.0174
d (cm)	0.137	0.218	0.329	0.366	0.517	0.541	
η_{np}	0.245	0.195	0.195	0.195	0.195	0.20	
τ	0.0133	0.0158	0.0172	0.0262	0.0287	0.0208	

现在我们来分析式 (7)，当作层流时，雷诺数 Re 很小，此时 $\frac{A}{Re} \gg B$ ， B 可忽略不计，由此可得

$$\eta = \frac{A}{Re} \quad (9)$$

在图 1 中也可看出， a 、 b 段是直线变化，其斜率为 -1 ，当 Re 很大时，此时 $B \gg \frac{A}{Re}$ ， $\frac{A}{Re}$ 可忽略，于是可得

$$\eta = B \quad (10)$$

运动为紊流。若将前面求得的 Re 及 η 代入到 $\eta = \frac{A}{Re} + B$ 中去，并经过一番演算后便可得到

$$J = \frac{36A\alpha^2 (1-m)^2 \mu}{\gamma d_{3\alpha}^2 m^3} v + \frac{6B\alpha (1-m)}{g d_{3\alpha} m^3} v^2 \quad (11)$$

式中: μ 为液体的动力粘滞系数, 查表 2; g 为重力加速度, $g = 981 \text{ cm/s}^2$; $A = 5.1$; α 为形状系数, 查表 1; γ 为水容重, $\gamma = 1$ 。另一方面, 福希海默的非线性渗流方程式为

$$J = av + bv^2 \quad (12)$$

比较式 (11)、式 (12) 不难发现^[2]

$$a = \frac{36A\alpha^2(1-m)^2\mu}{\gamma d_{\text{ex}} m^3} \quad (\text{s/cm}) \quad (13)$$

$$b = \frac{6B\alpha(1-m)}{gd_{\text{ex}} m^3} \quad (\text{s}^2/\text{cm}^2) \quad (14)$$

系数 a , b 取决于颗粒组成及流体性质, 据现有文献表明, 都是根据试验求得, 比较麻烦, 而式 (13)、式 (14) 可直接计算求得, 避免了进行试验。

在式 (12) 中, 当 v 较小时, 则 v^2 将更小, 以致可忽略不计, 此时化为线性渗透

$$J = av$$

$$\text{或} \quad v = \frac{1}{a}J = kf \quad (15)$$

此即还原成达西方程。

由此可得层流时的渗流系数 k 为

$$k = \frac{1}{a} = \frac{\gamma d_{\text{ex}}^2 m^3}{36A\alpha^2(1-m)^2\mu} \quad (16)$$

在缺乏实测资料时, 渗透系数 k 可用式 (16) 求出。由式 (16) 可见, k 与流体性质、多孔介质有关。在式 (12) 中, 若当流速 v 较大时, v^2 将更大, 则此时, av 可忽略, 于是得到

$$J = bv^2 = \frac{6B(1-m)v^2}{m^3 gd}$$

$$\text{或} \quad v = \sqrt{\frac{m^3 gd}{6B(1-m)}J} \quad (17)$$

J 与 v 的二次方成比例, 此即阻力平方区的紊流运动。

综上所述, 可知 $J = av + bv^2$ 是既适用于层流也适用于紊流及介于层流和紊流之间的过渡区流动的统一方程。

例 1 有一矩形土坝如图2所示 (以 cm 计)。该土坝均匀粒径 $d=0.166\text{cm}$ 组成。孔隙率 $m=0.25$, 颗粒形状系数 $\alpha=1.0$ (即圆粒), 水温 $t=15^\circ\text{C}$, 动力粘滞系数 $\mu=0.0000116$ ($\text{g}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$), 水头差 $H=10$ 。

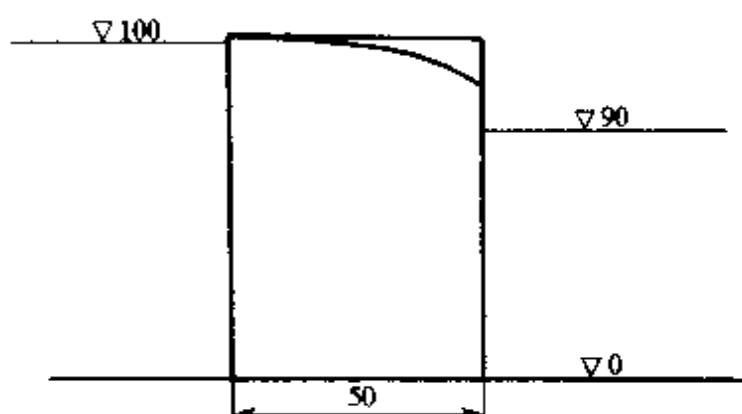


图 2

今采用数值法求解式 (12)、式 (13)、式 (14), 并结合式 (4), 求得浸润线如表 5 所示。

表 5

x	y	H (水头)	%
0	0	100 (100)	100 (100)
10	98.5	98.5 (98.5)	84.7 (84.6)
20	96.6	96.6 (96.6)	66.8 (66.7)
30	94.7	94.7 (94.7)	47.4 (47.2)
40	92.6	92.6 (92.6)	26.1 (25.9)
50	91.4	91.4 (91.4)	14.2 (14.1)

若将该例采用线性达西定律求解则得表 5 括号内数据。由此可见, 两者结果相同, 这是因为该算例土粒很细, 水头差很小, 实际上是层流运动, 用线性方程或用本节非线性方程求解, 其结果没有什么差别。

例 2 将上例原始数据改为大粒径 $d=0.87\text{cm}$, 孔隙率 $m=0.3$, 颗粒形状系数 $\alpha=1$, 水温 $t=15^\circ\text{C}$, $\mu=0.0000116$ ($\text{g}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$), 加大水头差使 $H=100$, 其解见表 6。

表 6

x	y	H (水头)	%
0	0	100 (100)	100 (100)
10	97.3 (96.6)	97.3 (96.6)	97.3 (96.6)
20	93.0 (91.6)	93.0 (91.6)	93.0 (91.6)
30	87.4 (85.1)	87.4 (85.1)	87.3 (85)
40	79.9 (76.2)	79.9 (76.2)	79.8 (76.2)
50	70.7 (64.2)	70.7 (65.2)	70.8 (65.1)

若将该例采用线性达西公式计算求解, 则得表 6 括号内数据。两者相差较大。说明了按非线性公式求得的浸润线高于按线性公式求得的浸润线。这是因为本例土粒粗, 且水头差大, 已越出层流范围了, 在这种情况下, 不能采用达西线性方程求解了, 而必须采用本节非线性方程求解了。

在堆石坝或高山峡谷中修建高土石坝以及大颗粒砂卵石地基中的渗流运动, 早已越出了层流范围, 作为渗流理论的达西定律已不适用于上述介质, 而必须采用非线性渗流方程求解。文中介绍的福希海默方程既可用于层流也可用于紊流, 当然也能用于从层流到紊流的过渡流, 由于文中已将福希海默方程中的两个系数 a 及 b 给出了表达式 (不必通过试验求取), 这就极大地方便采用数值解求解了。

参 考 文 献

- 1 明滋舒别尔特. 粒状材料水力学. 北京: 水利出版社, 1957
- 2 沙金焯. 多孔介质中的渗流和管涌. 水利水运科学研究, 1981 (3)
- 3 李春华. 非线性渗流的有限元计算. 北京: 水利水电科学研究院, 1989
- 4 丁留谦. 粗粒料中非线性渗流的有限元计算. 北京: 水利水电科学研究院, 1989