表5-1 $N$, $M$ 随 $B$ 的变化规律

| $B$ | $N$ | $M$ | 说　明 |
|---|---|---|---|
| $B=0°$ | $N_0=a$ | $M_0=a(1-e^2)$ | 在赤道上，$N$ 为赤道半径 $a$，$M$ 小于赤道半径 $a$ |
| $0°<B<90°$ | $a<N<c$ | $a(1-e^2)<M<c$ | $N$,$M$ 均随 $B$ 的增大而增大 |
| $B=90°$ | $N_{90°}=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}=c$ | $M_{90°}=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}=c$ | 在极点，卯酉圈变为子午圈，$N$,$M$ 均等于极点曲率半径 $c$ |

### 5.2.2 子午圈曲率半径

图5-6所示为一段子午椭圆，其中 $DK$ 为一微小弧素，长度为 $dX$，与之相应的纬度无穷小增量是 $dB$。若弧素 $dX$ 的曲率中心为 $C$，此时线段 $CD$ 或 $CK$ 可以认为等于子午圈曲率半径 $M$。

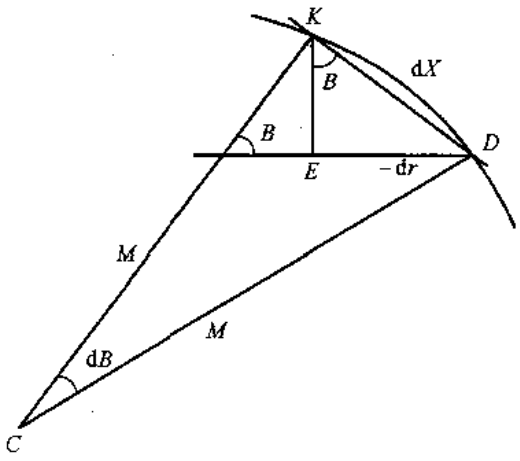


图5-6 子午圈曲率半径

根据求任意曲线曲率半径的公式可以写出

$$M=\frac{dX}{dB} \tag{5-27}$$

如图5-6所示 $DE$ 为 $D$ 点平行圈的一段半径，$KE$ 与其垂直。在直角三角形 $KED$ 中，$\angle K$ 等于 $K$ 点的纬度 $B$，边 $DE$ 是纬度增量 $dB$ 时平行圈半径的变化量 $dr$，且 $dB$ 增大 $dr$ 减小，若不考虑弧素长度 $dX$ 与其弦长 $DK$ 的区别，则有

$$dX=-\frac{dr}{\sin B} \tag{5-28}$$

代入式（5-27），得

$$M=-\frac{dr}{\sin B dB} \tag{5-29}$$

按式（5-25）求 $r$ 对于 $B$ 的导数，即

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dB}&=-a\sin B(1-e^2\sin^2B)^{-\frac{1}{2}}+ae^2\sin B\cos^2B(1-e^2\sin^2B)^{-\frac{3}{2}}\\&=-a\sin B(1-e^2\sin^2B)^{-\frac{3}{2}}\{(1-e^2\sin^2B)-e^2\cos^2B\}\\&=-a\sin B(1-e^2\sin^2B)^{-\frac{3}{2}}(1-e^2)\\&=-\frac{a(1-e^2)}{W^3}\sin B\end{aligned}$$

$$= -\frac{c}{V^3}\sin B$$

将上式代入式（5－29），得子午圈曲率半径为

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3} \tag{5-30}$$

可见，$M$ 与纬度 $B$ 有关，且随 $B$ 增加而增大。

在微分几何中，曲面上任一点的切平面上，都存在着 2 个互相垂直的特殊方向，使法截线的曲率达到最大值和最小值。这 2 个方向称为主方向，其相应的法截线曲率称为主曲率，法截线曲率半径称为主曲率半径。

由表 5－1 可以看出，在椭球面上任一点处的法截线中，卯酉圈曲率半径达到最大值，而子午圈曲率半径最小。因此，任一点的卯酉圈和子午圈的切线方向，就是椭球面在该点的主方向，其曲率半径 $N$ 和 $M$ 称为该点的主曲率半径。由于椭球面上任一点处的平行圈与卯酉圈具有公共切线，所以，经线和纬线上每一点的切线也都是椭球面在该点的主方向。

### 5.2.3 任意方向的法截线曲率半径

子午线是南北方向，方位角为 0°或 180°；卯酉线是东西方向，其方位角为 90°或 270°。这两个法截线在 $D$ 点上成正交，如图 5－7 所示。现在来讨论在 $D$ 点上方位角为 $A$ 的任意法截线曲率半径 $R_A$ 的计算公式。

根据欧拉公式，由曲面上任意一点主曲率半径计算该点任意方向（设其大地方位角

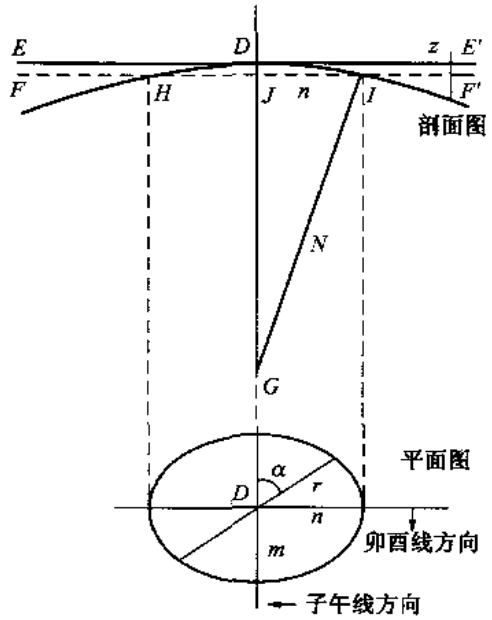



图 5－7　任意方向的法截线曲率半径

为 $A$）的法截线曲率的公式为

$$\frac{1}{R_A}=\frac{1}{M}\cos^2 A+\frac{1}{N}\sin^2 A \tag{5-31}$$

大地方位角为 $A$ 的任意方向的法截线曲率半径 $R_A$ 的计算公式为

$$R_A=\frac{MN}{N\cos^2 A+M\sin^2 A} \tag{5-32}$$

将式（5-32）除以 $M$，并顾及 $\frac{N}{M}=V^2=1+\eta^2$

于是

$$R_A=\frac{N}{1+\eta^2\cos^2 A}=\frac{N}{1+e'^2\cos^2 B\cos^2 A} \tag{5-33}$$

式（5-33）即为任意方向 $A$ 的法截线曲率半径 $R_A$ 的计算公式。

由式（5-33）可以看出，任意方向 $A$ 的法截线曲率半径 $R_A$，不仅与点的纬度 $B$ 有关，还与该点法截线的大地方位角 $A$ 有关。法截线具有下列特性：

（1）相对于主方向对称位置的法截线具有相同的曲率半径。因为在式（5-31）中，$A$ 和（$360°-A$）、（$90°+A$）和（$90°-A$）、（$180°+A$）和（$180°-A$）、（$270°+A$）和（$270°-A$）的曲率两两相等。

（2）椭球面上任一点相互垂直的两个法截线曲率之和是固定值，且等于两个主方向曲率之和。因为

$$\frac{1}{R_A+90°}=\frac{1}{M}\sin^2 A+\frac{1}{N}\cos^2 A$$

将上式与式（5-31）相加得

$$\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_A+90°}=\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{N}\right)(\sin^2 A+\cos^2 A)=\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$$

### 5.2.4 平均曲率半径

由于 $R_A$ 的数值随法截线的方向而变化，这就给测量计算带来了不便。在测量工作中常常根据一定的精度要求，将某一范围内的椭球面当作圆球面来处理，为此就要推求该圆球面的半径——平均曲率半径。

所谓平均曲率半径，就是过椭球面上一点的所有法截线，当其数目趋于无穷时，它们的曲率半径的算术平均值的极限用 $R$ 表示，其计算公式为

$$R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_{A_i}\qquad(n\to\infty)$$

式中 $R_A$——大地方位角 $A$ 的连续函数。

则其平均值为

$$R=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R_A\mathrm{d}A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{MN}{N\cos^2 A+M\sin^2 A}\mathrm{d}A \tag{5-34}$$

用 $N\cos^2 A$ 去除式（5－34）得

$$R = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\frac{M}{\cos^2 A}}{1+\frac{M}{N}\tan^2 A}\mathrm{d}A = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{MN}\times\sqrt{\frac{M}{N}}/\cos^2 A}{1+\left[\sqrt{\frac{M}{N}}\right]^2\tan^2 A}\mathrm{d}A$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}}/\cos^2 A}{1+\left[\sqrt{\frac{M}{N}}\tan A\right]^2}\mathrm{d}A$$

设 $t = \sqrt{\frac{M}{N}}\tan A$，$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{M}{N}}\times\frac{1}{\cos^2 A}\mathrm{d}A$，经换元后得

$$R = \frac{2}{\pi}\sqrt{MN}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}R = \sqrt{MN} \tag{5-35}$$

式（5－35）表明，椭球面上某一点处的法截线的平均曲率半径等于该点处子午圈和卯酉圈曲率半径 $M$，$N$ 的几何平均值。

将式（5－26）和式（5－30）中的 $N$ 和 $M$ 代入式（5－35）得

$$R = \frac{c}{V^2} = \frac{N}{V} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} = \frac{b}{W^2} \tag{5-36}$$

当纬度相同时，$N$，$M$ 及 $R$ 的大小有如下关系：

$$N > R > M$$

只有在南、北极点处，它们才相等，均等于极曲率半径 $c$。

### 5.2.5 曲率半径的数值计算公式

为了方便计算，需导出曲率半径的数值计算公式。考虑到地球椭球的扁率较小，可以将 $N$，$M$ 及 $R$ 的计算式，式（5－26）、式（5－30）和式（5－36）展开成微小参数 $e'^2\cos^2 B$ 的幂级数，并顾及式（5－23）得

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{c}{V} = c(1+\eta^2)^{-\frac{1}{2}} \\ M &= \frac{c}{V^3} = c(1+\eta^2)^{-\frac{3}{2}} \\ R &= \frac{c}{V^2} = c(1+\eta^2)^{-1} \end{aligned}\right\}$$

根据二项式定理展开式，得

$$(1+\eta)^n = 1 + n\eta^2 + \frac{n(n-1)}{2!}\eta^4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\eta^6 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\eta^8 + \cdots$$

则 $N$，$M$ 及 $R$ 的级数展开式为

$$\left.\begin{aligned} N &= c\left(1-\frac{1}{2}e'^2\cos^2B+\frac{3}{8}e'^4\cos^4B-\frac{5}{16}e'^6\cos^6B+\frac{35}{128}e'^8\cos^8B-\cdots\right)\\ M &= c\left(1-\frac{3}{2}e'^2\cos^2B+\frac{15}{8}e'^4\cos^4B-\frac{35}{16}e'^6\cos^6B+\frac{315}{128}e'^8\cos^8B-\cdots\right)\\ R &= c(1-e'^2\cos^2B+e'^4\cos^4B-e'^6\cos^6B+e'^8\cos^8B-\cdots) \end{aligned}\right\} \quad (5-37)$$

对于克拉索夫斯基椭球，其椭球几何参数为

$c=6\ 399\ 698.902\text{m}$，$e'^2=0.006\ 738\ 525\ 4$，$e'^4=0.000\ 045\ 407\ 7$，

$e'^6=0.000\ 000\ 306\ 0$，$e'^8=0.000\ 000\ 002\ 1$

代入式（5－38），整理得

$$\left.\begin{aligned} N &= 6\ 399\ 698.902-\\ &\quad\{21\ 562.267-[108.973-(0.612-0.004\cos^2B)\cos^2B]\cos^2B\}\cos^2B\\ M &= 6\ 399\ 698.902-\\ &\quad\{64\ 686.800-[544.867-(4.284-0.033\cos^2B)\cos^2B]\cos^2B\}\cos^2B\\ R &= 6\ 399\ 698.902-\\ &\quad\{43\ 124.531-[290.596-(1.958-0.013\cos^2B)\cos^2B]\cos^2B\}\cos^2B \end{aligned}\right\} \quad (5-38)$$

其中系数均以米（m）为单位，计算误差分别为$|\Delta N|<0.000\ 03\text{m}$，$|\Delta M|<0.000\ 03\text{m}$，$|\Delta R|<0.000\ 09\text{m}$。

若将1975年国际椭球的相关参数值代入式（5－38），还可得到1975年国际椭球的曲率半径计算公式，如下：

$$\left.\begin{aligned} N &= 6\ 399\ 596.652-\\ &\quad\{21\ 562.267-[109.003-(0.612-0.004\cos^2B)\cos^2B]\cos^2B\}\cos^2B\\ M &= 6\ 399\ 596.652-\\ &\quad\{64\ 695.142-[545.016-(4.285-0.032\cos^2B)\cos^2B]\cos^2B\}\cos^2B\\ R &= 6\ 399\ 596.652-\\ &\quad\{43\ 130.088-[290.675-(1.959-0.013\cos^2B)\cos^2B]\cos^2B\}\cos^2B \end{aligned}\right\} \quad (5-39)$$

## 5.3 椭球面上弧长计算

在椭球面上进行测量计算时，经常用到子午圈和平行圈的弧长计算公式。

### 5.3.1 子午圈弧长公式

子午圈本身是一个椭圆，被赤道分成对称的两部分，其端点与极点重合。因此，只需推导从赤道起到某一纬度 $B$ 间的弧长，也就是对式（5－27）中的 $\mathrm{d}X$ 求积分。

$$X=\int_0^B \mathrm{d}X=\int_0^B M\mathrm{d}B \quad (5-40)$$

将式（5－38）中的 $M$ 代入式（5－40）得

$$X = c\int_0^B \left(1 - \frac{3}{2}e'^2\cos^2 B + \frac{15}{8}e'^4\cos^4 B - \frac{35}{16}e'^6\cos^6 B + \frac{315}{128}e'^8\cos^8 B\right)\mathrm{d}B$$

根据三角函数的积分公式，得

$$\int\cos^n B\mathrm{d}B = \frac{\sin B\cos^{n-1}B}{n} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}B\mathrm{d}B$$

依次求出余弦函数各次幂的定积分，经整理得

$$X = c[\beta_0 B + (\beta_2\cos B + \beta_4\cos^3 B + \beta_6\cos^5 B + \beta_8\cos^7 B)\sin B] \tag{5-41}$$

其中 $\beta_0 = 1 - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{45}{64}e'^4 - \frac{175}{256}e'^6 + \frac{11\,025}{16\,384}e'^8$

$$\beta_2 = \beta_0 - 1$$

$$\beta_4 = \frac{15}{32}e'^4 - \frac{175}{384}e'^6 + \frac{3\,675}{8\,192}e'^8$$

$$\beta_6 = -\frac{35}{96}e'^6 + \frac{735}{2\,048}e'^8$$

$$\beta_8 = \frac{315}{1\,024}e'^8$$

将克拉索夫斯基椭球的参数代入上式，即得子午圈弧长的数值计算公式

$$X = 6\,367\,558.496\,9\frac{B}{\rho} -$$

$$\{32\,140.404\,9 - [135.330\,3 - (0.709\,2 - 0.004\,2\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B\}\sin B\cos B$$

若将 1975 年国际椭球的相关参数值代入，则有

$$X = 6\,367\,452.132\,8\frac{B}{\rho} -$$

$$\{32\,144.518\,9 - [135.364\,6 - (0.703\,4 - 0.004\,2\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B\}\sin B\cos B$$

其中 $B$，$\rho$ 均以度（°）为单位，子午圈弧长 $X$ 以米（m）为单位。

若计算已知纬度分别为 $B_1$ 和 $B_2$ 的两点间的子午圈弧长，可以按式（5－41）分别计算赤道到纬度 $B_1$ 和 $B_2$ 处的子午圈弧长 $X_1$ 和 $X_2$，然后求其差值 $\Delta X = X_2 - X_1$，即所求的两点间的子午圈弧长。可以证明，单位纬度差的子午圈弧长随纬度的升高而缓慢地增大。

### 5.3.2 平行圈弧长

平行圈本身是一个半径 $r = N\cos B$ 的圆（图 5－4）。所以，在纬度为 $B$ 的平行圈上，经度为 $L_1$ 和 $L_2$ 的两点之间的弧长，可以按下式计算，即

$$Y = N\cos B\frac{L_1 - L_2}{\rho} = N\cos B\frac{l}{\rho} \tag{5-42}$$

其中 $l = L_2 - L_1$

$N$ 值可用式（5－38）计算。

显然，对于经度差 $l$ 相同，纬度不同的平行圈，弧长是不同的。因为，平行圈的半径 $r=N\cos B$ 随着纬度 $B$ 的不同而在发生变化。纬度越高，单位经度差的平行圈弧长越短。

## 5.4 地面观测值归算至椭球面

假设野外测量时，测站点的铅垂线与法线重合，那么视准面就是法截面，它和椭球面的截线就是法截线。但事实上，测站点的铅垂线一般不可能与法线重合，不同测站点的法线也不相交，这样使2个对向观测的测站之间会出现2条不相重合的法截线。本节首先从相对法截线入手，研究大地线定义、性质及其微分方程，然后讨论如何将地面观测值归算至椭球面。

### 5.4.1 相对截线法

由图5-5中可以看出，椭球面法线在椭球短轴上的投影为 $N\sin B$，将式（5-21）代入式（5-20），又得法线在赤道面以上的椭球短半轴上的投影 $N(1-e^2)\sin B$，二者相减，即为椭球中心到法线与短轴交点之间的距离，即

$$On=N\sin B-N(1-e^2)\sin B=e^2N\sin B \tag{5-43}$$

式（5-43）表明，当点的纬度不同时，其法线与短轴的交点到椭球中心之间的距离也不相等。纬度越高，其法线与短轴的交点到椭球中心之间的距离越长，也就是说，交点位置越低。

如图5-8所示，$Q_1$ 和 $Q_2$ 两点既不位于同一平行圈上，也不位于同一子午圈上，它们的法线 $Q_1n_1$ 和 $Q_2n_2$ 并不相交，所以包含这两条法线的法截面 $Q_1n_1Q_2$ 和 $Q_2n_2Q_1$ 也不会重合，二者与椭球面的交线分别是 $Q_1m_1Q_2$ 和 $Q_2m_2Q_1$。这样，在椭球面的两点之间就出现了两条法截线，称为两点间的相对法截线。

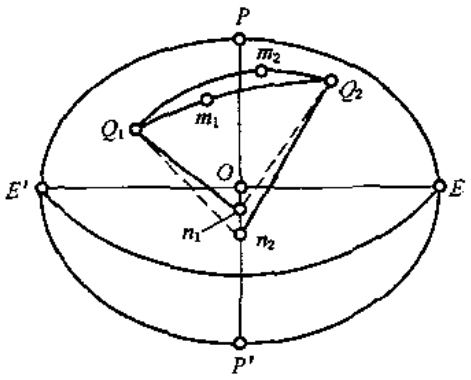


图5-8 椭球面上两点相对法截线

由式（5-43）知，当 $B_2>B_1$ 时，$On_2>On_1$。此时法截线 $Q_1m_1Q_2$ 偏南，法截线 $Q_2m_2Q_1$ 偏北。称 $Q_1m_1Q_2$ 为 $Q_1$ 点的正法截线，$Q_1m_2Q_2$ 为 $Q_1$ 点的反法截线。对于 $Q_2$ 点来说，$Q_2m_2Q_1$ 为正法截线，$Q_2m_1Q_1$ 为反法截线。只有当 $Q_1$ 和 $Q_2$ 两点位于同一平行圈或同一子午圈上时，正反法截线才合二为一，这是一种特殊情况。在通常情况下，正反法截线不相重合。

正反法截线之间的夹角 $\Delta$，可以近似地用下式表示

$$\Delta''=\frac{\rho''}{4}\frac{e^2}{N_m^2}s^2\cos^2B_m\sin 2A_1 \tag{5-44}$$

式中 $s$——两点之间的法截线长度；

$B_m$——两端点的平均纬度；

$N_m$——$B_m$ 处的卯酉圈曲率半径；

$A_1$——正法截线的大地方位角。

当 $A_1 = B_m = 45°$，$s = 100\text{km}$ 时，按式（5－44）计算的两法截线间的夹角为 0.042″。可见，Δ 数值很小，在有限范围的控制测量中，完全可以忽略其影响。然而在大地测量中，就给测量计算带来不便。如图 5－9 所示，在椭球面上的三角形 $ABC$ 中，观测角为 $\beta_A$，$\beta_B$，$\beta_C$。由于相对法截线的不重合性，造成三角形不能闭合。为了解决这个矛盾，就需要在两点间另外选择一条单一的曲线来代替相对法截线，这就是大地线。

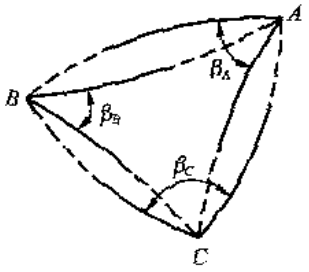



图 5－9　椭球面上 3 点相对法截线

### 5.4.2　大地线及其几何特征

椭球面上两点间的最短程曲线叫做大地线。在微分几何中，大地线（又称测地线）的定义为：大地线上每点的密切平面都包含该点的曲面法线，即大地线上各点的主法线与该点的曲面法线重合。因曲面法线互不相交，故大地线是一条空间曲面曲线。

如图 5－10 所示，$AB$ 为曲面上的一条曲线，$ds_1$，$ds_2$ 为曲线上 $P$ 点的相邻两弧素。当 $P_1$ 点无限接近 $P$ 点时，割线 $P_1P$ 的极限位置，就是曲线在 $P$ 点的切线。曲面上通过 $P$ 点的一切曲线的切线均在同一平面上，该平面就称为曲面在 $P$ 点的切平面。通过点 $P$ 而垂直于切平面的直线 $PK$，就是曲面在该点的法线。当 $ds_1$，$ds_2$ 无限小时，由 $P_1$，$P$，$P_2$ 3 点所确定的平面，就是曲线在 $P$ 点的密切平面。

曲线 $AB$ 上任一点 $P$ 的密切平面都包含着曲面在该点的法线，该曲线就是曲面上的一条大地线。

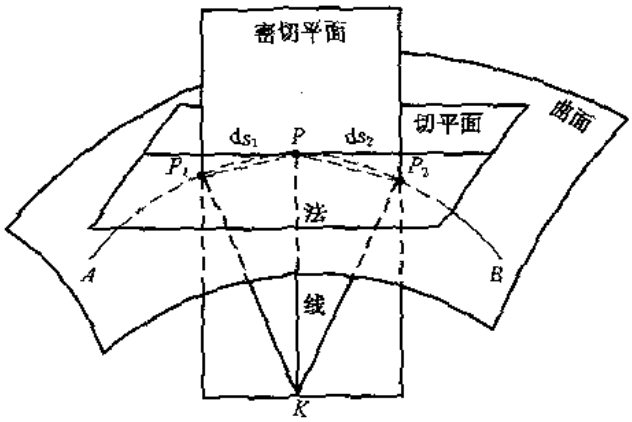



图 5－10　大地线几何特征

一般情况下，曲面上的曲线并不是大地线。如图 5－11 所示中球面上的小圆，其上任一点的密切平面为小圆平面，它并不包含球面在该点的法线，所以小圆就不是大地线。如果曲面是个球面，则大地线就是大圆弧，它相当于平面上的直线。对于椭球面，可以假想在其上拉紧一条既无重力又无摩擦力的细绳，细绳的平衡位置就是一条大地线。因此，大地线就是椭球面上两点间的最短程曲线。

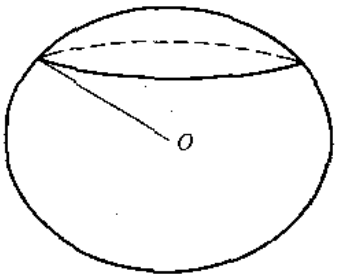



图 5－11　小圆不是大地线

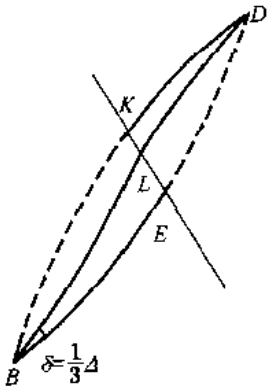



图 5－12　大地线与相对法截线

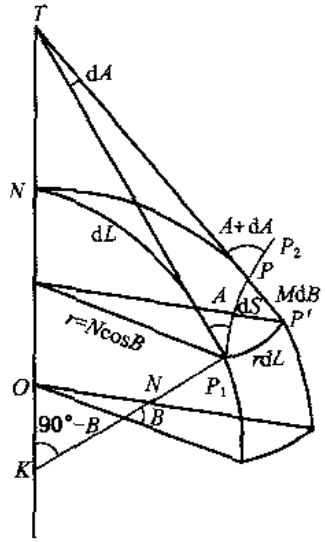



图 5－13　大地线的解析特征

大地线与法截线的方向差异如图 5－12 所示。椭球面上 $B$，$D$ 两点既不在同一子午圈上也不在同一平行圈上，两点之间的大地线居于相对法截线之间，呈一条双曲率曲线。大地线 $BLD$ 和正法截线 $BED$ 之间的角度 $\delta$，等于正反法截线之间夹角 $\Delta$ 的三分之一，即靠近正法截线。由式（5－44）可以看出，当大地线两端点位于同一子午线上时，方位角等于 0°或 180°，大地线与法截线重合，角度 $\delta$ 等于 0；当两端点位于同一平行圈上时，方位角等于 90°或 270°，正反法截线合二为一，大地线位置比法截线稍微偏北，这时大地线和法截线在端点处相切，$\delta$ 等于 0。

大地线和法截线的长度差异甚微，当长度达 600km 时，二者差异仅 0.007mm。所以，在各种测量计算中，二者之间的长度差异可以忽略不计。

### 5.4.3　大地线微分方程和克莱劳方程

如图 5－13 所示，设 $P_1$ 为大地线上任意一点，其纬度为 $B$，经度为 $L$。$P_1P$ 为大地线上的一段弧素，其长度为 $dS$，大地方位角为 $A$。当大地线由 $P_1$ 点变化到 $P$ 点时，其纬度增量为 $dB$，经度增量为 $dL$，方位角增量为 $dA$。所谓大地线微分方程，就是大地经、纬度

及大地方位角与大地线弧素间的微分关系式，即 $dB$，$dL$，$dA$ 分别与 $dS$ 的关系式。

由图 5－13 可知，大地线弧素 $dS$ 在子午圈上的分量 $P'P = MdB$，在卯酉圈上的分量为 $P_1P' = rdL = N\cos B dL$。图中 $P_1P'P$ 为一无限小的球面直角三角形，视其为平面直角三角形，则

$$MdB = dS\cos A$$

$$rdL = dS\sin A$$

由上两式分别得

$$dB = \frac{\cos A}{M}dS \tag{5-45}$$

$$dL = \frac{\sin A}{r}dS = \frac{\sin A}{N\cos B}dS \tag{5-46}$$

在图 5－13 中，设 $PP_1$ 和 $PP_2$ 为大地线上 $P$ 点相邻的两弧素，根据大地线的定义，$PP_1$ 和 $PP_2$ 应该位于 $P$ 点的同一密切平面上。$P_1$ 和 $P_2$ 无限接近 $P$ 点，它们的极限位置即为大地线过 $P$ 点的切线。如果分别过 $P$ 和 $P_1$ 作子午线的切线，由于 $P$ 和 $P_1$ 无限接近，故可视二者切线同交于椭球短轴延长线的 $T$ 点，这时 $PT$ 和 $P_1T$ 所成的平面就是过 $P$ 点的切平面，而 $P_1PP_2$ 就可视为切平面上的直线。在平面三角形 $TPP_1$ 中一外角等于两内角之和，所以 $\angle PTP_1 = dA$。如果将无限接近的 $P'$ 点也视作切平面上的点，则在三角形 $P_1TP'$ 中可以写出

$$dA = \frac{rdL}{P_1T} = \frac{N\cos B dL}{P_1T}$$

$P_1T$ 可由直角三角形 $KP_1T$ 得出　$P_1T = N\tan(90° - B) = N\cot B$

代入上式得

$$dA = \sin B dL \tag{5-47}$$

代入式（5－46）得

$$dA = \frac{\sin A}{N}\tan B dS \tag{5-48}$$

式（5－45）、式（5－46）和式（5－48）就是大地线的 3 个微分方程，这 3 个微分方程在解决与椭球体有关的一些测量计算中经常用到。下面来推导大地线的克莱劳方程式。

在式（5－48）中引入式（5－45）得

$$dA = \frac{\sin A M \sin B}{\cos A N \cos B}dB$$

根据式（5－29）又得

$$M\sin B dB = -dr$$

所以

$$dA = -\frac{\sin A}{\cos A} \times \frac{dr}{r}$$

$$\cot A dA = -\frac{dr}{r} \tag{5-49}$$

对式（5－49）进行积分得

$$\ln\sin A + \ln r = \ln c$$

即

$$r\sin A = C \text{（}C\text{ 为常数）} \tag{5-50}$$

式（5－50）即为著名的克莱劳方程式，也叫克莱劳定理。

*克莱劳定理表明：对于椭球面上一条大地线而言，每点处的平行圈半径 $r$ 与该处的大地线方位角 $A$ 正弦的乘积是一个常数 $C$。*

常数 $C$ 也叫大地线常数，不同的大地线所对应的大地线常数也不相同。例如赤道是大地线，其大地线常数等于椭球的长半径 $a$，而子午圈也是大地线，但其大地线常数则为零。如图 5－14 所示，大地线在赤道上 $E$ 点处，$r$ 最大，$A$ 则为最小。而后向北 $r$ 逐渐减小，$A$ 逐渐增大。$K$ 点处，$A=90°$，大地线与平行圈 $K'K$ 相切，大地线常数 $C$ 等于 $r$，达到最小值。然后大地线再向南，穿越赤道，在 $C$ 点，其纬度与 $K$ 点纬度相等，大地线常数 $C$ 又达到最小值。大地线再返回赤道时，一般不闭合至原出发点。

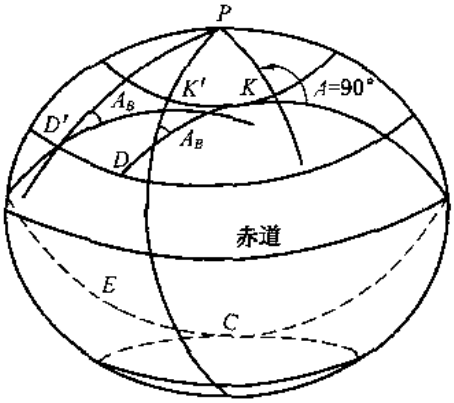



图 5－14　特殊大地线特征

克莱劳方程在椭球大地测量学中有重要意义，它是经典的大地主题解算的基础。

### 5.4.4　地面观测方向归算至椭球面

野外测量工作都是以测站点的铅垂线为基准线进行的，由于各测站点的铅垂线与法线存在着垂线偏差，因此，也就不能直接在地面上处理观测成果，而应将地面观测元素归算至椭球面。将地面观测方向归算至椭球面上，包括三个基本内容：一是将测站点铅垂线为

基准的地面观测方向换算成椭球面上以法线为准的观测方向；二是将照准点沿法线投影至椭球面，换算成椭球面上两点间的法截线方向；三是将椭球面上的法截线方向换算成大地线方向。

5.4.4.1　垂线偏差改正 $\delta_1$

测量计算的基准面和基准线是椭球面及其法线，而观测方向的基准线是测站点的铅垂线。为了求得椭球面上以法线为基准的水平方向观测值，必须对野外观测的水平方向观测值加入相应的改正数，称为垂线偏差改正，以 $\delta_1$ 表示。

本章 1.1 节已经讨论过垂线偏差对水平方向观测值的影响，由式（5－12）得垂线偏差改正的计算公式，即

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -(\xi\sin A - \eta\cos A)\cot z \\ &= -(\xi\sin A - \eta\cos A)\tan\alpha\end{aligned} \tag{5-51}$$

式中　$\xi$——测站点垂线偏差的子午分量；

$\eta$——测站点垂线偏差的卯酉分量；

$A$——观测方向的大地方位角；

$z$——观测方向的天顶距；

$\alpha$——观测方向的垂直角。

由式（5－51）可知，垂线偏差改正数的大小主要取决于测站点的垂线偏差和观测方向的天顶距（或无垂直角）。仅在国家一二等三角测量计算中，才规定加入此项改正。

5.4.4.2　标高差改正 $\delta_2$

标高差改正又称由照准点高度而引起的改正。当椭球面上两点不在同一子午面上或同一平行圈上时，过两点的法线是不共面的。这样，当进行水平方向观测时，如果照准点高出椭球面某一高度，则照准面就不能通过照准点的法线同椭球面的交点，由此引起的方向观测值的改正叫做标高差改正，以 $\delta_2$ 表示。

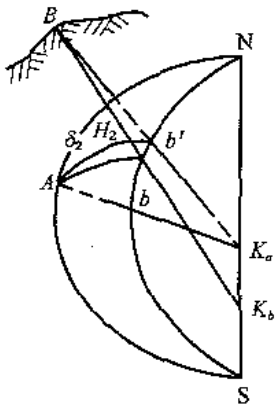



图 5－15　标高差改正示意

如图 5－15 中，设 $A$ 为测站点，在其观测方向中加入垂线偏差改正后，就可认为铅垂线同法线一致。这时测站点在椭球面上或高出椭球面某一高度，对水平方向是没有影响的，为简单起见，设 $A$ 就在椭球面上。如果照准点 $B$ 高出椭球面某一高度 $H_2$，则在 $A$ 点照准 $B$ 点得出的法截线为 $Ab'$。然而，$B$ 点沿法线至椭球面的投影点为 $b$，观测方向归算至椭球面上应该是 $Ab$ 方向。为此，将 $Ab'$ 方向换算为 $Ab$ 方向所加的改正就是标高差改正。

综上所述，标高差改正实际上是由于测站点和照准点的两

条法线不在同一平面，且照准点高出椭球面一定高度所产生的。标高差改正的计算公式为

$$\delta_2 = \frac{\rho e^2}{2M_1} H_2 \cos^2 B_2 \sin 2A_1 \qquad (5-52)$$

式中 $B_2$——照准点的大地纬度；

$A_1$——测站点至照准点的大地方位角；

$H_2$——照准点高出椭球面的高程；

$M_1$——测站点子午圈曲率半径。

由式（5－52）可知，标高差改正主要与照准点的高程有关。经过此项改正后，便将地面观测的水平方向值归算为椭球面上相应的法截线方向。由于该项改正数值也较小，在进行局部地区的控制测量时，一般不必考虑此项改正。

5.4.4.3 截面差改正 $\delta_3$

经过前面两项改正，已将地面观测的水平方向换算为椭球面上相应的法截线方向。在椭球面上纬度不同的两点，由于其法线不共面，所以在对向观测时相对法截线不重合。因此，应当用两点间的大地线代替相对法截线。这样将法截线方向换算为大地线方向应加的改正叫截面差改正，用 $\delta_3$ 表示。

如图 5－16 中，$AaB$ 和 $AsB$ 是 $A$ 至 $B$ 的法截线和大地线，它们在 $A$ 点的大地方位角分别是 $A'_1$ 和 $A_1$。$A'_1$ 与 $A_1$ 之差，就是截面差改正 $\delta_3$。

截面差改正的计算公式可由式（5－44）得出。因为大地线和正法截线之间的角度，等于正反法截线夹角 $\Delta$ 的三分之一，所以

$$\delta_3 = -\frac{\rho e^2}{12N_m^2} s^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1 \qquad (5-53)$$

其中符号意义同式（5－44）。

由式（5－53）可知，截面差改正主要与测站点至照准点间的距离 $s$ 有关。截面差改正只有在国家一等三角测量计算中才进行改正。

**5.4.5 地面观测距离归算至椭球面**

实测的电磁波测距边长在经过仪器的加常数、乘常数、大气折射、波道弯曲等项改正后，就是由仪器中心至反光镜中心的空间直线长度，应将它归算到参考椭球面上，归算为两点间的大地线长度。

如图 5－17，测站点 $A$ 和照准点 $B$ 的大地高分别为 $H_1$ 和 $H_2$，两点间使用电磁波测距仪测得的斜距为 $d$，现在要求测站点 $A$ 和照准点 $B$，沿其法线投影到椭球面上的投影点 $a$ 和 $b$ 之间的大地线的长度 $S$。

由前已知，椭球面上两点间的大地线长度与相应的法截线长度之差极其微小，可以忽略不计，这样可将两点间的法截线长度认为就是该两点间的大地线长度。另外，两点间的法截线长度与半径等于其起始点曲率半径的圆弧长度相差也很微小。例如，当法截线弧长

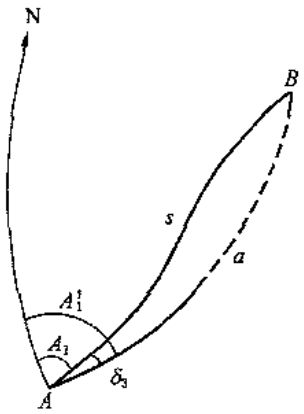



图 5－16　截面差改正示意

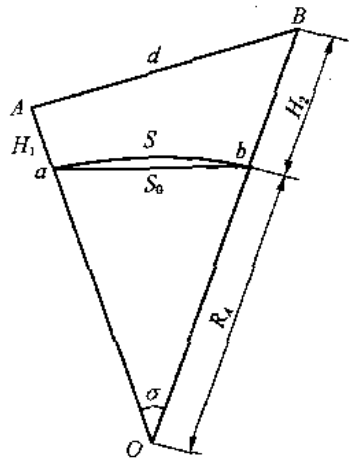



图 5－17　沿空间直线 $AB$ 的椭球剖面

达 600km 时，用球面弧长代替法截线弧长，其相对误差只有 1∶2 500 000。由于工程测量中边长一般都在几千米，最长也不过十几千米，因此，这种差异又可忽略不计。此时，所求的 $a$ 和 $b$ 两点间的大地线的长度 $S$ 可以认为就是半径等于 $R_A$ 的相应的圆弧长。

由式（5－33）得

$$R_A=\frac{N_m}{1+e'^2\cos^2A\cos^2B_m}$$

式中　$N_m$——平均纬度 $B_m=\frac{1}{2}(B_1+B_2)$ 处的卯酉圈曲率半径。

若 $A$，$B$ 两点的大地高分别为 $H_1$ 和 $H_2$，则由三角形 $AOB$ 按余弦公式可写出

$$d=(R_A+H_1)^2+(R_A+H_2)^2-2(R_A+H_1)(R_A+H_2)\cos\sigma$$

根据半角的三角函数得

$$\cos\sigma=1-2\sin^2\frac{\sigma}{2}$$

代入上式整理得

$$d^2=(H_2-H_1)^2+4R_A^2\left(1+\frac{H_1}{R_A}\right)\left(1+\frac{H_2}{R_A}\right)\sin^2\frac{\sigma}{2}$$

如图 5－17 所示，$S_0=2R_A\sin\frac{\sigma}{2}$，并设高差 $h=H_2-H_1$，代入上式得

$$d^2=h^2+\left(1+\frac{H_1}{R_A}\right)\left(1+\frac{H_2}{R_A}\right)S_0^2$$

由此可得 $ab$ 间弦长为

$$S_0 = \sqrt{\frac{d^2 - h^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)}} \tag{5-54}$$

式（5－54）即为空间直线 $d$ 换算为椭球面上弦长的计算公式。将式（5－54）展开，即

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{d^2 - h^2}\left[\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{d^2 - h^2}\left[1 + \frac{2H_m}{R_A} + \frac{H_m^2}{R_A^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{d^2 - h^2}\left(1 + \frac{H_m}{R_A}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{5-55}$$

其中

$$H_m = \frac{H_1 + H_2}{2}$$

并取

$$\frac{H_1 H_2}{R_A^2} \approx \frac{H_m^2}{R_A^2}$$

再将弦长 $S_0$ 换算为弧长 $S$。由图可知

$$S = R_A\sigma = 2R_A \arcsin\left(\frac{S_0}{2R_A}\right)$$

将上式右端的反正弦函数展开成幂级数得

$$S = S_0 + \frac{S_0^3}{24R_A^2} + \cdots \tag{5-56}$$

将式（5－55）代入式（5－56），且令

$$s = \sqrt{d^2 - h^2} \tag{5-57}$$

式（5－57）即为水平边长的计算公式。

再取 $\frac{S_0^3}{24R_A^2} \approx \frac{s^3}{24R_A^2}$，经整理得

$$S = s - s\left(\frac{H_m}{R_A} - \frac{H_m^2}{R_A^2}\right) + \frac{s^3}{24R_A^2} \tag{5-58}$$

式（5－58）右端第一项是测距仪与反光镜平均高程面上的水平距离；第二项是水平距离换算成椭球面上相应弦长的改正数；第三项是弦长换算成椭球面上圆弧长的改正数。

因为椭球面上的法截线与大地线长度相差甚微，二者可不加区别，所以经过上述换算后的长度，可以视为椭球面上的大地线长度。

### 5.4.6 椭球面上的三角形解算

将地面观测的水平方向值和距离值全部归算到椭球面后，得到了椭球面上以大地线组成的三角锁网。这些三角锁网中的未知边长度，需要通过三角形解算才能得到。

鉴于地球椭球的扁率不大，三角锁网中的三角形又比较小，当边长小于200km时，椭球面上三角形的解算完全可以在球面上进行。此时，椭球面三角形与球面三角形各对应角的差异小于0.001″，边长的差异则小于1mm。

国家一等三角网的平均边长为20～25km，最长也不超过50～60km，因此，可将椭球面三角形当作球面三角形来进行解算，球面角及边长均可保持不变。

在进行球面三角形解算时，经常用到球心角，它是球面边长与球半径的比值，如$\frac{a}{R}$，$\frac{b}{R}$，$\frac{c}{R}$，用角度来表示。因此，解算前需要将已知边长除以球半径转化为球心角，解算后再将球心角转化为长度，这显然很不方便。另外，三角网边长所对应的球心角一般都很小，而小角度的正弦函数值变化很快（即秒差较大），难以保证解算精度。

综上所述，直接采用球面三角学公式解算大地测量中的三角形是不适宜的，需要寻求一种更为简便可行的方法。

勒让德定理：对于较小的球面三角形，对其进行改化，使各个平面角等于相应的球面角减去球面角超的三分之一，而边长保持不变，使其改化为平面三角形，然后可用平面三角形公式进行解算。

勒让德定理的实质就是将球面三角形改换为对应边相等的平面三角形，以便应用平面三角公式进行解算，求出所需的球面边长。

在图5－18中，若以$R$代表球半径，根据球面三角形边的余弦定理，对于三角形$A_0B_0C_0$有

$$\cos\frac{a}{R}=\cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}+\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A_0 \tag{5-59}$$

其中$\frac{a}{R}$，$\frac{b}{R}$，$\frac{c}{R}$都是微小量，将其正弦、余弦函数展开成幂级数，则

$$\cos A_0=\frac{\left(1-\frac{a^2}{2R^2}+\frac{a^4}{24R^4}\right)-\left(1-\frac{b^2}{2R^2}+\frac{b^4}{24R^4}\right)\left(1-\frac{c^2}{2R^2}+\frac{c^4}{24R^4}\right)}{\left(\frac{b}{R}-\frac{b^3}{6R^3}\right)\left(\frac{c}{R}-\frac{c^3}{6R^3}\right)}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24R^2bc}$$

再根据平面三角形边的余弦定理，对于三角形$A_1B_1C_1$有

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A_1$$

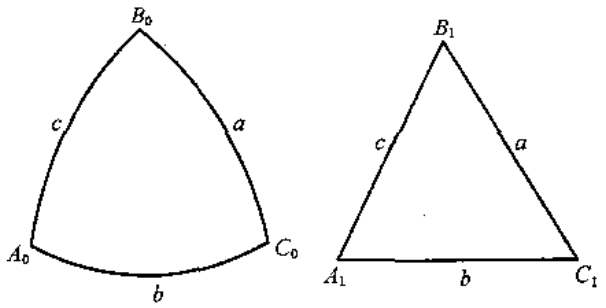



图 5－18　球面三角形与对应的平面三角形

$$\cos A_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

前面两式相减得

$$\begin{aligned}\cos A_1 - \cos A_0 &= -\frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24R^2bc} \\ &= \frac{bc}{6R^2}\left(-\frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4b^2c^2}\right) \\ &= \frac{bc}{6R^2}(1 - \cos^2 A_1) \\ &= \frac{bc}{6R^2}\sin^2 A_1\end{aligned}$$

或者

$$-2\sin\frac{A_1 - A_0}{2}\sin\frac{A_1 + A_0}{2} = \frac{bc}{6R^2}\sin^2 A_1$$

由于 $A_1 - A_0$ 为微小量，所以

$$\sin\frac{A_1 - A_0}{2} \approx \frac{A_1 - A_0}{2},\quad \sin\frac{A_1 + A_0}{2} = \sin A_1$$

则得

$$A_1 - A_0 = -\frac{bc}{6R^2}\sin A_1 \approx -\frac{\Delta}{3R^2}$$

其中 $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A_1$ 为平面三角形 $A_1B_1C_1$ 的面积。

令

$$\varepsilon'' = \frac{\Delta}{R^2}\rho'' \qquad (5-60)$$

代入式（5－60），依次可得

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_0 - \frac{\varepsilon''}{3} \\ B_1 &= B_0 - \frac{\varepsilon''}{3} \\ C_1 &= C_0 - \frac{\varepsilon''}{3} \end{aligned}\right\} \tag{5-61}$$

若将式（5－61）中3式相加又得

$$\varepsilon'' = (A_0 + B_0 + C_0) - 180° \tag{5-62}$$

式中 $\varepsilon''$——球面角超，是球面三角形3个内角之和与180°之差。

式（5－61）就是解算球面三角形的勒让德定理。该定理表明：如果将球面三角形的每个角度减去其球面角超的三分之一，就得到对应边相等的平面三角形。按平面三角形的正弦公式解算，即可得出球面三角形的边长。

## 5.5 椭球面上大地问题解算

椭球面上点的大地经度 $L$、大地纬度 $B$、两点间的大地线长度 $S$ 及其正反大地方位角 $A_{12}$，$A_{21}$，通称为大地元素。如果知道某些大地元素推求另外一些大地元素，如根据大地测量成果（角度、距离），计算点在椭球面上的大地坐标，或者根据两点的大地坐标，计算它们之间的大地线长和大地方位角，这样的问题就叫大地问题解算，或称大地坐标解算。

### 5.5.1 概述

大地问题解算依据推算的大地元素不同，分为大地问题正解和大地问题反解。

如图5－19所示，已知 $P_1$ 点的大地坐标（$B_1$，$L_1$），$P_1$ 至 $P_2$ 的大地线长 $S$ 及其大地方位角 $A_{12}$，推算 $P_2$ 点的大地坐标（$B_2$，$L_2$）和大地线在 $P_2$ 点的方位角 $A_{21}$，称为大地问题正解。如果已知 $P_1$，$P_2$ 点的大地坐标（$B_1$，$L_1$）与（$B_2$，$L_2$），反算 $P_1P_2$ 的大地线长和大地方位角 $A_{12}$，$A_{21}$，这类问题叫做大地问题反解。

大地问题正解和反解，从解析意义上讲，就是研究大地极坐标与大地坐标间的相互变换。

椭球面上的大地问题解算，远比平面坐标计算复杂得多。所以，一百多年来，许多数学家和测量学家致力于大地问题解算的研究，提出了70多种解算公式和方法。

在众多的解算方法中，若按大地线的长度分类，可分为短距离（小于400km）、中距离（400～1 000km）和长距离（大于1 000km）3种。短距离的大地问题解算，应用于传统的国家一等三角测量计算。中、长距离大地问题解算主要用于洲际联测和空间技术。

若按大地问题的解算形式来分类，可分为直接解法和间接解法。直接解法就是直接解

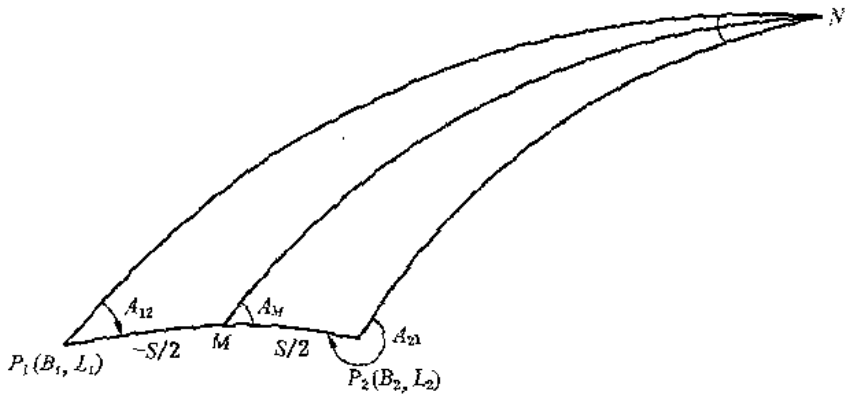



图5－19　大地问题正反算示意

算控制点的大地纬度、大地方位角和相邻起算点的大地经差。间接解法则是先求出大地经差、大地纬差和大地方位角差，进而再求控制点的大地坐标。一般说来，直接解法用于长距离大地问题解算，间接解法用于短距离大地问题解算。

鉴于大地问题解算的方法和公式繁多，在此主要介绍高斯平均引数大地问题解算公式，它是按间接解法进行的适用于短距离的大地问题解算公式。

### 5.5.2　勒让德级数式

按照台劳级数将 $P_1$ 和 $P_2$ 两点的纬差、经差和方位角差展开成为大地线长度 $S$ 的幂级数，称为勒让德级数式。

$$\left.\begin{aligned} b &= B_2 - B_1 = \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S}\right)_{S=0} S + \left(\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}S^2}\right)_{S=0} \frac{S^2}{2} + \left(\frac{\mathrm{d}^3B}{\mathrm{d}S^3}\right)_{S=0} \frac{S^3}{6} + \cdots \\ l &= L_2 - L_1 = \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}\right)_{S=0} S + \left(\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}S^2}\right)_{S=0} \frac{S^2}{2} + \left(\frac{\mathrm{d}^3L}{\mathrm{d}S^3}\right)_{S=0} \frac{S^3}{6} + \cdots \\ a &= A_2 - A_1 = \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}S}\right)_{S=0} S + \left(\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}S^2}\right)_{S=0} \frac{S^2}{2} + \left(\frac{\mathrm{d}^3A}{\mathrm{d}S^3}\right)_{S=0} \frac{S^3}{6} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (5-63)$$

其中 $B$，$L$，$A$ 对 $S$ 的各阶导数都是 $B$，$A$ 的函数，并在大地线的起点（$S=0$）处展开，即以 $B=B_1$，$A=A_1$ 之值代入求得。

其中、一阶导数即为大地线的微分关系式，如下：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S} &= \frac{1}{M}\cos A = \frac{V^3}{c}\cos A \\ \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S} &= \frac{1}{N\cos B}\sin A = \frac{V}{c}\sec S\sin A \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}S} &= \frac{\tan B}{N}\sin A = \frac{V}{c}t\sin A \end{aligned}\right\} \qquad (5-64)$$

其中

$$t=\tan B,\ V=\sqrt{1+\eta^2}=\sqrt{1+e'^2\cos^2 B},\ c=\frac{a^2}{b}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$$

显然就有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}B}=-\frac{\eta^2 t}{V},\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}B}=1+t^2,\ \frac{\mathrm{d}\eta^2}{\mathrm{d}B}=-2\eta^2 t \tag{5-65}$$

以式（5-64）为基础，可依次导出其他高阶导数。于是，对二阶导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}S^2}&=\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S}\right)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S}+\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S}\right)\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}S}\\&=\frac{\cos A}{c}3V^2\left(-\frac{\eta^2 t}{V}\right)\frac{V^3}{c}\cos A+\left(-\frac{V^3}{c}\sin A\right)\frac{V}{c}t\sin A\\&=-\frac{V^4 t}{c^2}(3\eta^2\cos^2 A+\sin^2 A)\\&=-\frac{V^2}{N^2}t(3\eta^2\cos^2 A+\sin^2 A)\end{aligned} \tag{5-66}$$

同理还可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}S^2}&=\frac{2V^2 t}{c^2}\sec B\sin A\cos A\\&=\frac{2t}{N^2}\sec B\sin A\cos A\\\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}S^2}&=\frac{V^2}{c^2}\sin A\cos A(1+2t^2+\eta^2)\\&=\frac{1}{N^2}\sin A\cos A(1+2t^2+\eta^2)\end{aligned}\right\} \tag{5-67}$$

再次求导可得三阶导数，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3 B}{\mathrm{d}S^3}&=-\frac{V^2 t}{N^3}\cos A[\sin^2 A(1+3t^2+\eta^2-9\eta^2 t^2)+3\eta^2\cos^2 A(1-t^2+\eta^2-5\eta^2 t^2)]\\\frac{\mathrm{d}^3 L}{\mathrm{d}S^3}&=\frac{2}{N^3}\sec B[\sin A\cos^2 A(1+3t^2+\eta^2)-t^2\sin^3 A]\\\frac{\mathrm{d}^3 A}{\mathrm{d}S^3}&=\frac{t}{N^3}[\sin A\cos^2 A(5+6t^2+\eta^2-4\eta^4)-\sin^3 A(1+2t^2+\eta^2)]\end{aligned}\right\} \tag{5-68}$$

将式（5-64）、式（5-66）、式（5-67）、式（5-68）代入式（5-63）即得到勒让德级数式，其可作为大地问题正解的基本公式，但只适用于短距离的大地问题解算。当取至4次项时，对于60km以内的大地线，计算经纬度可精确至0.000 1″，方位角可精确至0.001″。为解算大地问题，高斯于1846年对勒让德级数进行改化，提出了以大地线两端

点平均纬度及平均方位角为依据的高斯平均引数公式，它具有级数收敛快，公式项数少，计算精度高，计算较简便，使用范围大等优点。

### 5.5.3 高斯平均引数正解公式

高斯平均引数正解公式推导的基本思想是：首先把勒让德级数在 $P_1$ 点展开改为在大地线长度中点 $M$ 展开，以使级数公式项数减少、收敛快、精度高；其次，考虑到求定中点 $M$ 的复杂性，将 $M$ 点用大地线两端点平均纬度及平均方位角相对应的 $m$ 点来代替，并借助迭代计算，使可顺利地实现大地问题正解。

由图 5－19 可知，当 $B_1$，$L_1$，$A_{12}$ 已知时，若 $S$ 变化，则经差、纬差、方位角差将随之变化，即 $l$，$b$，$a$ 都是 $S$ 的连续函数。依据式（5－63），将 $l$，$b$，$a$ 在大地线的中点 $M$ 处展开为 $S$ 的幂级数，即

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_M &= \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S}\right)_M \frac{S}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}S^2}\right)_M \frac{S^2}{4} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3B}{\mathrm{d}S^3}\right)_M \frac{S^3}{8} + \cdots \\ B_1 - B_M &= -\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S}\right)_M \frac{S}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}S^2}\right)_M \frac{S^2}{4} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3B}{\mathrm{d}S^3}\right)_M \frac{S^3}{8} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5-69}$$

两式相减，得

$$b = B_2 - B_1 = \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}S}\right)_M S + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^3B}{\mathrm{d}S^3}\right)_M S^3 + \cdots \tag{5-70}$$

同理可得

$$\left.\begin{aligned} l = L_2 - L_1 &= \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}\right)_M S + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^3L}{\mathrm{d}S^3}\right)_M S^3 + \cdots \\ a = A_{21} - A_{12} &= \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}S}\right)_M S + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^3A}{\mathrm{d}S^3}\right)_M S^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5-71}$$

式（5－71）中虽然只写 2 项，实际上已达 4 次项的精度。其中各阶导数都是 $B$，$A$ 的函数，它们按大地线中点处的纬度 $B_M$ 和方位角 $A_M$ 计算。问题在于如何求出 $B_M$ 和 $A_M$。为此，引入大地线两端点的平均纬度和平均方位角，即

$$B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$$

$$A_m = \frac{1}{2}(A_{12} + A_{21} \pm 180°)$$

由于椭球存在着扁率，所以 $B_m \neq B_M$，$A_m \neq A_M$；由于扁率很小，故 $B_m - B_M$ 和 $A_m - A_M$ 极其微小。设法用 $B_m$ 和 $A_m$ 来表示 $B_M$ 和 $A_M$，将式（5－69）、式（5－70）中以 $B_M$ 和 $A_M$ 为依据的导数改换为以 $B_m$ 和 $A_m$ 为依据的导数，使问题得到解决。

由于 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}B}$ 是 $B$，$A$ 的函数，可以写出

$$\left(\frac{dL}{dS}\right)_{\frac{S}{2}}=f(B_m+B_M-B_m,\ A_m+A_M-A_m)$$

上式以 $B_m$ 和 $A_m$ 为依据按台劳级数展开，得

$$\left(\frac{dL}{dS}\right)_{\frac{S}{2}}=f(B_m,\ A_m)+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_m(B_M-B_m)+\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_m(A_M-A_m)+\cdots$$

即

$$\left(\frac{dL}{dS}\right)_{\frac{S}{2}}=\left(\frac{dL}{dS}\right)_m+\left[\frac{\partial\left(\frac{dL}{dS}\right)}{\partial B}\right]_m(B_M-L\qquad\left[\frac{\partial\left(\frac{dL}{dS}\right)}{\partial A}\right]_m(A_M-A_m)+\cdots\qquad(5-72)$$

由式（5－47）、式（5－48）得

$$\left(\frac{dL}{dS}\right)_m=\frac{\sin A_m}{N_m\cos B_m}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dL}{dS}\right)}{\partial B}=\sin A\left[\frac{1}{\cos B}\times\frac{d\left(\frac{1}{N}\right)}{dB}+\frac{1}{N}\times\frac{\tan B}{\cos B}\right]$$

根据式（5－64）、式（5－65），上式可简化得

$$\frac{\partial\left(\frac{dL}{dS}\right)}{\partial B}=\frac{t\sin A}{NV^2\cos B}\qquad(5-73)$$

同样还可推导出

$$\frac{\partial\left(\frac{dL}{dS}\right)}{\partial A}=\frac{\cos A}{N\cos B}\qquad(5-74)$$

另外，由式（5－69）中两式相加除以 2 得

$$\left.\begin{aligned}B_m-B_M&=\frac{1}{8}\left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_M S^2+S^4\\A_m-A_M&=\frac{1}{8}\left(\frac{d^2A}{dS^2}\right)_M S^2+S^4\end{aligned}\right\}\qquad(5-75)$$

由式（5－66）、式（5－67）知，它们仍是 $B$，$A$ 的函数，按台劳级数展开为

$$\left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_M=\left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_m+\left[\frac{\partial\left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)}{\partial B}\right]_m(B_M-B_m)+\left[\frac{\partial\left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)}{\partial A}\right]_m(A_M-A_m)+\cdots$$

将上式右端第二、第三项，代入式（5－75）后为$\frac{S}{N}$的 4 次项，再代入式（5－72），最后代入式（5－70）和式（5－71），则为$\frac{S}{N}$的 5 次项，可以略而不计，所以可取

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}S^2}\right)_M=\left(\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}S^2}\right)_m,\quad \left(\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}S^2}\right)_M=\left(\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}S^2}\right)_m$$

根据式（5－66）、式（5－67），于是式（5－75）可写为

$$\left.\begin{aligned}B_m-B_M&=-\frac{S^2V_m^2}{8N_m^2}t_m(3\eta_m^2\cos^2A_m+\sin^2A_m)\\A_m-A_M&=-\frac{S^2}{8N_m^2}\sin A_m\cos A_m(1+2t_m^2+\eta_m^2)\end{aligned}\right\}\tag{5-76}$$

将式（5－73）、式（5－74）和式（5－76）代入式（5－72），经整理可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}\right)_M=\frac{\sin A_m}{N_m\cos B_m}+\frac{S^2\sin A_m}{8N_m^3\cos B_m}t_m^2(\sin^2A_m-3\eta_m^2\cos^2A_m)-\frac{S^2}{8N_m^3\cos B_m}\sin A_m\cos^2A_m(1+2t_m+\eta_m^2)\tag{5-77}$$

还可以直接取

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3L}{\mathrm{d}S^3}\right)_m=\left(\frac{\mathrm{d}^3L}{\mathrm{d}S^3}\right)_M$$

进一步推导出

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3L}{\mathrm{d}S^3}\right)_M=\frac{2}{N_m^3\cos B_m}[\sin A_m\cos^2A_m(1+3t_m^2+\eta_m^2)-t_m^2\sin^3A_m]\tag{5-78}$$

至此解决了$\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}S}\right)_M$，$\left(\frac{\mathrm{d}^3L}{\mathrm{d}S^3}\right)_M$的计算问题，将式（5－77）、式（5－78）代入式（5－71），经过整理得

$$\left.\begin{aligned}l''&=\frac{\rho''}{N_m\cos B_m}S\sin A_m\left\{1+\frac{S^2}{24N_m^2}[t_m^2\sin^2A_m-\cos^2A_m(1+\eta_m^2-9\eta_m^2t_m^2)]\right\}\\b''&=\frac{\rho''}{M_m}S\cos A_m\left\{1+\frac{S^2}{24N_m^2}[\sin^2A_m(2+3t_m^2+2\eta_m^2)+3\eta_m^2\cos^2A_m(t_m^2-1-\eta_m^2-4\eta_m^2t_m^2)]\right\}\\a''&=\frac{\rho''}{N_m}St_m\sin A_m\left\{1+\frac{S^2}{24N_m^2}[\cos^2A_m(2+7\eta_m^2+9\eta_m^2t_m^2+5\eta_m^4)+\sin^2A_m(2+t_m^2+2\eta_m^2)]\right\}\end{aligned}\right\}\tag{5-79}$$

由上述公式求出$P_1$和$P_2$两点的经差、纬差和方位角差$l$，$b$，$a$后，即可由式（5－70）、式（5－71）求出$L_2$，$B_2$，$A_{21}$。

式（5－79）叫做高斯平均引数大地问题正解公式。公式中保持了4次项的精度，可用于225km以内的大地问题精密解算。

当距离小于70km时，上述各式中的$\eta^2$项可略去，则得简化公式为

$$\left.\begin{aligned} l'' &= \frac{\rho''}{N_m\cos B_m}S\sin A_m\left(1+\frac{S^2}{24N_m^2}t_m^2\sin^2 A_m-\cos^2 A_m\right)\\ \text{同理}\quad b'' &= \frac{\rho''}{M_m}S\cos A_m\left[1+\frac{S^2}{24N_m^2}\sin^2 A_m(2+3t_m^2)\right]\\ a'' &= \frac{\rho''}{N_m}St_m\sin A_m\left\{1+\frac{S^2}{24N_m^2}[2\cos^2 A_m+\sin^2 A_m(2+t_m^2)]\right\}\end{aligned}\right\} \tag{5-80}$$

高斯平均引数大地问题正解公式，结构比较简单，精度比较高。从公式可知，欲求 $l$，$b$，$a$，必须已知 $B_m$ 和 $A_m$。但由于 $B_2$ 和 $A_{21}$ 未知，所以 $B_m$ 和 $A_m$ 的精确值也无法知道，必须通过逐次趋近的迭代方法进行公式的计算。一般主项趋近 3 次，各改正项趋近 1～2 次就可满足要求。

### 5.5.4 高斯平均引数反解公式

大地问题反解是已知两端点的经、纬度 $L_1$，$B_1$ 和 $L_2$，$B_2$，反求两点间的大地线长度 $S$ 及正、反大地方位角 $A_1$ 和 $A_2$。这时，由于经差 $l$、纬差 $b$ 和平均纬度 $B_m$ 均为已知，依据高斯平均引数大地问题正解公式，可以很容易地导出反解算公式。

由式（5－79）的前两式可以写出

$$S\sin A_m=\frac{l''}{\rho''}N_m\cos B_m-\frac{S\sin A_m}{24N_m^2}[S^2t_m^2\sin^2 A_m-S^2\cos^2 A_m(1+\eta_m^2-9\eta_m^2t_m^2)]$$

$$S\cos A_m=\frac{b''}{\rho''}\frac{N_m}{V_m^2}-\frac{S\cos A_m}{24N_m^2}[S^2\sin^2 A_m(2+3t_m^2+2\eta_m^2)+3\eta_m^2S^2\cos^2 A_m(t_m^2-1-\eta_m^2-4\eta_m^2t_m^2)]$$

上两式右端第二项中含有 $S\sin A_m$，$S\cos A_m$，可用

$$S\sin A_m=\frac{l''}{\rho''}N_m\cos B_m,\quad S\cos A_m=\frac{b''}{\rho''}\frac{N_m}{V_m^2}$$

代入，并按 $l$，$b$ 集项得

$$\left.\begin{aligned} S\sin A_m &= r_{01}l''+r_{21}b''^2l''+r_{03}l''^3\\ S\cos A_m &= s_{10}b''+s_{12}b''l''^2+s_{30}b''^3\end{aligned}\right\}$$

其中

$$r_{01}=\frac{N_m}{\rho''}\cos B_m,\quad r_{21}=\frac{N_m}{24\rho''^3}(1-\eta_m^2-9\eta_m^2t_m^2),\quad r_{03}=-\frac{N_m}{24\rho''^3}\cos^3 B_mt_m^2$$

$$s_{10}=\frac{N_m}{\rho''V_m^2},\quad s_{12}=\frac{N_m}{24\rho''^3}\cos^2 B_m(-2-3t_m^2+3\eta_m^2t_m^2),\quad s_{30}=\frac{N_m}{8\rho''^3}(\eta_m^2-\eta_m^2t_m^2)$$

将上式代入式（5－79）的第三式，整理得

$$a''=t_{01}l''+t_{21}b''^2l''+t_{03}l''^3$$

其中

$$t_{01}=\sin B_m,\quad t_{21}=\frac{N_m}{24\rho''^2}\sin B_m(2+3\eta_m^2+9\eta_m^2t_m^2),\quad t_{03}=\frac{1}{24\rho''^2}\cos^3B_mt_m(2+t_m^2+2\eta_m^2)$$

求出 $S\sin A_m$，$S\cos A_m$ 和 $a$ 之后，按下式计算大地线长 $S$ 和正反方位角 $A_1$ 和 $A_2$，得

$$\left.\begin{aligned}A_m&=\arctan\frac{S\sin A_m}{S\cos A_m}\\S&=\frac{S\sin A_m}{\sin A_m}=\frac{S\cos A_m}{\cos A_m}\\A_1&=A_m-\frac{a}{2}\\A_2&=A_m+\frac{a}{2}\pm180^\circ\end{aligned}\right\}\tag{5-81}$$

上述反解公式同相应的正解公式一样，保持了 4 次项的精度，可用于 225km 以内的大地问题精密反解。

当距离小于 70km 时，可由式（5－80）写出

$$\left.\begin{aligned}S\sin A_m&=\frac{N_m\cos B_m l''}{\rho''\left(1+\dfrac{S^2}{24N_m^2}t_m^2\sin^2A_m-\cos^2A_m\right)}\\S\cos A_m&=\frac{M_mb''}{\rho''\left[1+\dfrac{S^2}{24N_m^2}\sin^2A_m(2+3t_m^2)\right]}\end{aligned}\right\}\tag{5-82}$$

按式（5－81）可计算大地线长 $S$ 和正反方位角 $A_1$ 和 $A_2$。

# 6 高斯投影及其计算

由于在椭球面上进行各种测量计算非常复杂和烦琐，且在椭球面上表示点、线位置的经度、纬度、大地线长度及大地方位角等大地坐标元素，对于大比例测图控制网和工程建设控制网的建立和应用也很不适应。因此，为了便于测量计算和地形测图，还需要将椭球面上的元素换算到平面上，并在平面直角坐标系中采用大家熟知的简单公式进行平面坐标计算。这样就需要通过投影方法将椭球面上的测量元素，即大地坐标、大地线长度和方向以及大地方位角等归算到投影平面上。这部分内容通常称为地图投影，简称为投影。由于我国当前采用高斯－克吕格投影（简称高斯投影），所以本章主要介绍正形投影的特性和建立高斯平面直角坐标系的方法，以解决高斯投影坐标计算以及大地线方向和长度的归算。另外，还将简单介绍墨卡脱投影和兰勃脱投影的原理和方法。本章所讨论的内容，在大地测量理论和实践中具有特别重要的意义。

## 6.1 地图投影的概念和正形投影性质

### 6.1.1 地图投影及其变形

#### 6.1.1.1 地图投影

所谓地图投影，简单说来就是将椭球面上的各元素（包括坐标、方向和长度）按一定的数学法则投影到平面上。研究这个问题的专门学科叫地图投影学。这里所说的数学法则可用下面两个方程式表示：

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1(B, L) \\ y &= F_2(B, L) \end{aligned}\right\} \tag{6-1}$$

式中 $B$，$L$——椭球面上某点的大地坐标；

$x$，$y$——该点投影在投影平面上的平面直角坐标。

式（6－1）表示椭球面上一点与投影面上对应点之间坐标的解析关系，也叫做坐标投影公式，函数 $F_1$ 和 $F_2$ 则称为投影函数。由此可见，地图投影问题也就是建立椭球面元素与投影面相对应元素之间的解析关系式。地图投影的方法有很多，根据人们对投影的要求不同，投影函数的形式也不同。

#### 6.1.1.2 投影变形

由于椭球面是一个不可展平的曲面，若将它铺展成平面，就必然会产生褶皱和破裂。或者说，人们不可能将椭球面毫无变形地投影到一个平面上。因此，无论如何选取投影函

数，仍然无法避免因投影而产生的变形。同样，椭球面上的元素（如一段距离、一个角度、一个图形）投影到平面上，也就会和原来的距离、角度、图形产生差异，这一差异称作投影变形。

投影变形一般分为角度变形、长度变形和面积变形3种。虽然地图投影产生变形是不可避免的，但是对于各种变形，人们是可以掌握和控制的。可以根据需要使某种变形为零，也可使其减小到某一适当程度。因此，地图投影中产生了所谓的等角投影（投影前后角度相等，但长度和面积有变形）、等距投影（投影前后长度相等，但角度和面积有变形）、等积投影（投影前后面积相等，但角度和长度有变形）等。

6.1.1.3 投影长度比

投影长度比，就是投影平面上的微分线段 $ds$ 与椭球面上该线段实际长度 $dS$ 之比，以 $m$ 表示，即

$$m = \frac{ds}{dS} \tag{6-2}$$

由式（6-2）可知，就一般的地图投影而言，长度比是一个变量，它不仅与点位有关，而且也随该点上线段方向的不同而变化。也就是说，不同点的长度比都不相同，而且同一点上不同方向的长度比也不相同。

长度比与1之差，称为投影长度相对变形，简称长度变形。

$$m - 1 = \frac{ds - dS}{dS}$$

在整个投影平面作任何一种投影都会或多或少产生一些长度变形，其值或正或负。当 $m-1>0$ 时，投影后长度将增大；当 $m-1<0$ 时，投影后长度则缩短。

6.1.1.4 主方向与变形椭圆

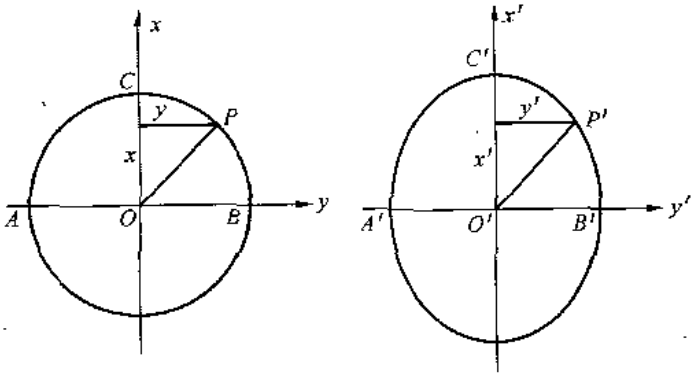
若将地球椭球面上过一点的两个互为正交的方向投影到平面上，一般不能再保持正交，但其中总有一组在椭球面上正交的方向投影后仍然保持正交，则称这两个方向为主方向。主方向另外还有一个性质，即它们投影后具有最大长度比和最小尺度比。也就是说，长度比极值所在的方向叫做主方向。

设在椭球面的 $O$ 点，有一单位半径的微分圆（图6-1a），$O$ 点的主方向是 $AOB$ 和 $CO$；在投影平面上其主方向是 $A'O'B'$ 和 $C'O'$（图6-1b）。若分别以 $O$ 点和 $O'$ 点为原点，以主方向为坐标轴，建立直角坐标系，圆上任一点 $P(x, y)$ 在投影平面的相应点为 $P'(x', y')$，如果主方向上的投影长度比分别为 $a$ 和 $b$，则

$$a = \frac{x'}{x},\ b = \frac{y'}{y}$$

椭球面上的微分圆方程式为

$$x^2 + y^2 = 1$$




(a) 椭球面上微分圆　　(b) 投影后坐标系

图 6-1　主方向与变形椭圆

将前式代入上式，得

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

由上式可知，椭球面上的一个微分单位圆，投影到平面上后成为一个以 $a$，$b$ 为长、短半轴的椭圆，这个椭圆即称为变形椭圆。$a$，$b$ 是一对主方向上的投影长度比，称为变形指标。变形椭圆是描述 $O$ 点各方向上长度比的椭圆，因此可以形象地表达点的投影变形情况，对于研究投影性质和投影变形具有重要作用。

6.1.1.5　地图投影的分类

地图投影的分类方法很多。若按投影变形的性质进行分类，有前述的等角投影、等面积投影、等距投影。若按投影面来分，有平面、圆柱、圆锥投影等。若按投影面的轴向来分，有正轴（与椭球短轴重合）、横轴（与椭球短铀正交）、斜轴（与椭球短轴斜交）投影。

等角投影是指过地球椭球面上任一点的任何两个方向所夹的角度与投影平面上的相应角度保持相等，即投影面上任何点上的角度变形为零（$a=b$），等角投影可以保持小范围内的图形相似，所以也称为正形投影。等角投影便于地形图的测绘和应用，对于工程上的定位、定线和定向都有很大的实用价值，国家基本地形图采用等角投影。

等面积投影的条件是 $ab=1$。此时，在投影平面上各点的变形椭圆成为面积相等而形状不同的椭圆，但保持与地球椭球面上的单位微分圆相同的面积。即使扩展到整个制图区域也保持相同的面积。与此同时，角度和长度也存在着较大的变形，这种投影多用于行政区划图、经济图等。

既不保持等角也不保持等面积的投影，称为任意投影，此时 $a\neq b$，3 种变形同时存在。这是包容面较广的一类投影，在此仅说明其中的一种投影，即等距离投影，它是使某

一主方向的长度比等于1的投影，即 $a=1$，或 $b=1$。例如等距离方位投影是使垂直圈上长度比为1，从而保证从投影中心至各点的距离投影后保持不变，并适合制作圆形区域的普通地图、政区图、自然地理图。又如在保持经纬线投影后正交的等距离正圆柱投影和圆锥投影中，则是使经线方向的长度比 $m_L=1$。

在按投影面进行分类的地图投影中，平面投影是将平面与椭球面在某一点相切，该点四周的各点，可依据投影函数，表象在平面上，直接成图。圆锥投影中，使圆锥体面与椭球面在某一纬圈相切，或与两纬圈相割，该纬圈附近的各点，可按一定的投影函数表象在圆锥面上，然后再将圆锥面展开成图。在圆柱投影中，使圆柱面或椭圆柱面与椭球面在赤道或某一子午圈上相切，赤道附近或相切子午圈附近的点，按一定的投影函数投影到柱面上，然后将柱面展开成图。

按投影面（圆柱面或椭圆柱面）的中心轴线方向分类时，正轴投影是圆柱面的中心轴与椭球的短轴重合，圆柱面与椭球赤道相切；横轴投影是圆柱面的中心轴与椭球长轴重合，椭圆柱面与椭球某一子午圈相切；斜轴投影是椭圆柱面的中心轴与椭球的长轴和短轴都不重合，位于两者之间。

### 6.1.2 正形投影特性

正形投影是使椭球面上的微小图形投影后保持形状相似的一种投影，必须满足两个基本要求：一是在任一投影点上，投影长度比 $m$ 为一常数，不随方向而变化。因此，任一点处的变形指标保持相同，即 $a=b$。但不同的点进行投影时，可以有不同的长度比。二是在该点上，任何两条微分线段的投影角度均与椭球面上相应角度保持相等，也就是说投影后角度不产生变形，所以正形投影也就是等角投影。正形投影在复变函数和微分几何中称为保角映射。

综上所述，正形投影具有下列特性：投影长度比 $m$ 仅与点的位置有关，而与方向无关。

采用正形投影能够保持椭球面上的角度观测元素产生变形，便于使其归算为平面角度。在有限范围内，能使地图上的图形与椭球面上相应图形保持相似，但在广大面积上保持地图与实地相似是不可能的，因为地球椭球为一不可展曲面。

正形投影在控制点坐标归算及地图测绘中获得广泛的应用。

### 6.1.3 正形投影的一般条件

现在根据正形投影的特性，来推求正形投影的一般条件。

图6-2所示为椭球面，图6-3所示为投影平面。$\mathrm{d}S$ 为椭球面上 $P_1$ 和 $P_2$ 两点间的大地线弧素，大地方位角为 $A$。其在投影平面上的投影为 $\mathrm{d}s$。过椭球面上 $P_1$ 和 $P_2$ 两点分别作子午圈和平行圈，在微分直角三角形 $P_1P_2P_3$ 和三角形 $P_1'P_2'P_3'$ 中，根据子午圈和平行圈的弧长微分公式可以写出

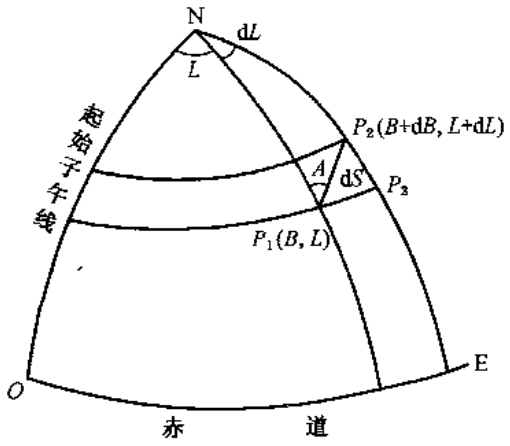



图6-2 椭球面

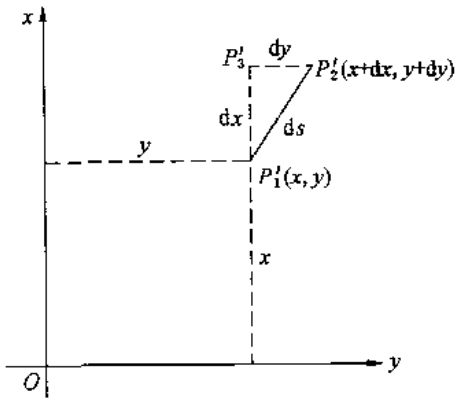



图6-3 投影平面

$$\left.\begin{aligned} dS^2 &= (M dB)^2 + (N\cos B dL)^2 \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 \end{aligned}\right\} \tag{6-3}$$

则长度比为

$$m^2 = \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(M dB)^2 + (N\cos B dL)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(N\cos B)^2\left[\left(\frac{M dB}{N\cos B}\right)^2 + dL^2\right]}$$

引入符号，得

$$dq = \frac{M dB}{N\cos B} \tag{6-4}$$

$$q = \int_0^B \frac{M dB}{N\cos B}$$

其中 $q$ 称为等量纬度，只与大地纬度 $B$ 有关，故可把 $dq$ 和 $dL$ 看作互为独立的变量的微分。当 $dq = dL$，即 $dS$ 的大地方位角为45°时，则在经线和纬线上的微分弧段相等，于是可在椭球面上划分出一个微分正方形方格，这就是等量纬度名称的由来。

将式（6-4）代入前式，并将式中的 $L$ 视为由中央子午线起算，此时 $L$ 应写成经差 $l$，$dL$ 也相应写成 $dl$，即

$$m^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{r^2[(dq)^2 + (dl)^2]} \tag{6-5}$$

地图投影就是建立平面坐标（$x$，$y$）与大地坐标（$B$，$L$）之间的函数关系，既然等量纬度 $q$ 仅与 $B$ 有确定的关系，而经差 $l = L - L_0$ 又只是大地经度 $L$ 的函数，因此投影问题也可以说是建立（$x$，$y$）与（$q$，$l$）的函数关系。设函数关系式为

$$x = f_1(q, l)$$

$$y = f_2(q,\ l)$$

对上式进行全微分

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial x}{\partial l}\mathrm{d}l,\ \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial y}{\partial l}\mathrm{d}l$$

代入式（6－3）第二式得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial x}{\partial l}\mathrm{d}l\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial y}{\partial l}\mathrm{d}l\right]^2 \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2\right](\mathrm{d}q)^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial q}\times\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial q}\times\frac{\partial y}{\partial l}\right]\mathrm{d}q\mathrm{d}l + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)\right]^2(\mathrm{d}l)^2\end{aligned}$$

令

$$\left.\begin{aligned}E &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2\right] \\ F &= \left[\frac{\partial x}{\partial q}\times\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial q}\times\frac{\partial y}{\partial l}\right] \\ G &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \tag{6-6}$$

则有

$$\mathrm{d}s^2 = E(\mathrm{d}q)^2 + 2F(\mathrm{d}q)(\mathrm{d}l) + G(\mathrm{d}l)^2$$

则式（6－5）变为

$$m^2 = \frac{E(\mathrm{d}q)^2 + 2F(\mathrm{d}q)(\mathrm{d}l) + G(\mathrm{d}l)^2}{r^2[(\mathrm{d}q)^2 + (\mathrm{d}l)^2]} \tag{6-7}$$

由图（6－2）知

$$\tan(90^\circ - A) = \frac{P_2P_3}{P_1P_3} = \frac{M\mathrm{d}B}{N\cos B\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

则

$$\mathrm{d}l = \tan A\mathrm{d}q$$

代入式（6－7），得

$$\begin{aligned}m^2 &= \frac{E(\mathrm{d}q)^2 + 2F\tan A(\mathrm{d}q)^2 + G\tan^2A(\mathrm{d}q)^2}{r^2[(\mathrm{d}q)^2 + \tan^2A(\mathrm{d}q)^2]} \\ &= \frac{E + 2F\tan A + G\tan^2A}{r^2\sec^2A} = \frac{E\cos^2A + 2F\sin A\cos A + G\sin^2A}{r^2}\end{aligned}$$

若要满足正形投影条件，使长度比 $m$ 与方向 $A$ 无关，必须使

$$F = 0,\ E = G \tag{6-8}$$

将式（6－8）代入式（6－6）得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial q}\times\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial y}{\partial q}\times\frac{\partial y}{\partial l}=0\\&\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\end{aligned}\right\}\tag{6-9}$$

由式（6-9）第一式得

$$\frac{\partial x}{\partial l}=-\frac{\frac{\partial y}{\partial q}\times\frac{\partial y}{\partial l}}{\frac{\partial x}{\partial q}}$$

代入式（6-9）中第二式得

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2\right]$$

整理得

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\tag{6-10}$$

将式（6-10）开方并代入式（6-9）得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial q}=\frac{\partial y}{\partial l}\\&\frac{\partial x}{\partial l}=-\frac{\partial y}{\partial q}\end{aligned}\right\}\tag{6-11}$$

式（6-11）就是正形投影的必要和充分条件，称为柯西（Cauchy）-黎曼（Riemann）条件。在由椭球面向平面投影时，凡满足式（6-11）的投影即为正形投影。

### 6.1.4 正形投影的一般公式

根据复变函数理论，下列复变函数满足柯西（Cauchy）-黎曼（Riemann）条件

$$x+iy=f(q+il)\tag{6-12}$$

其中$f$代表任意解析函数，证明如下：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial q}\approx\frac{\partial(x+iy)}{\partial q}=\frac{\partial x}{\partial q}+i\frac{\partial y}{\partial q}\\&\frac{\partial f}{\partial l}\approx\frac{\partial(x+iy)}{\partial l}=\frac{\partial x}{\partial l}+i\frac{\partial y}{\partial l}\end{aligned}\right\}\tag{6-13}$$

又由

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial q}=\frac{\partial f}{\partial(q+il)}\times\frac{\partial(q+il)}{\partial q}=\frac{\partial f}{\partial(q+il)}\\&\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial(q+il)}\times\frac{\partial(q+il)}{\partial l}=i\frac{\partial f}{\partial(q+il)}\end{aligned}\right\}$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial l}=i\frac{\partial f}{\partial q}$$

将式（6－13）代入上式得

$$\frac{\partial x}{\partial q}+i\frac{\partial y}{\partial q}=i\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial q}$$

再将式中的实部与虚部分开得

$$\frac{\partial x}{\partial l}=-\frac{\partial y}{\partial q},\frac{\partial x}{\partial q}=\frac{\partial y}{\partial l}$$

上式与式（6－11）完全相同。所以说，能满足式（6－12）的函数$f$，都能满足正形投影条件。式（6－12）就是正形投影的一般公式。根据该式可以导出高斯投影坐标计算公式。

## 6.2 高斯投影与国家平面直角坐标系

### 6.2.1 高斯投影的基本概念

高斯投影又称横轴椭圆柱等角投影，属于正形投影。它是德国测量学家高斯于1825～1830年首先提出的。实际上，直到1912年，由德国另一位测量学家克吕格推导出实用的坐标投影公式后，这种投影才得到推广，所以该投影又称高斯－克吕格投影（以下简称高斯投影）。

世界上最先采用高斯投影的国家是奥地利和德国，以后希腊、挪威、英国、美国也在某些测量中进行应用，原苏联、保加利亚等国1930年以后开始采用。我国于1952年正式决定采用高斯投影。

如图6－4所示，设想有一椭圆柱面横套在地球椭球体外面，并与地球椭球的某一条子午线（称中央子午线或轴子午线）相切，椭圆柱的中心轴通过椭球体中心并与椭球的长轴重合，然后用一定的投影方法将中央子午线两侧在一定经差范围内的地区投影到椭圆柱面上。

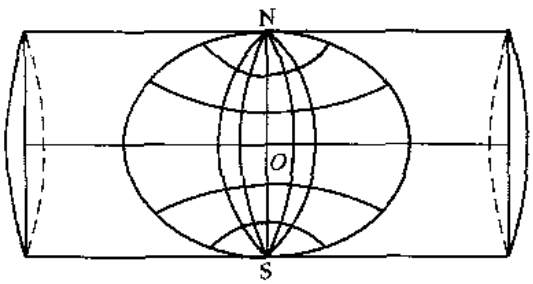



图6－4 横轴椭圆柱

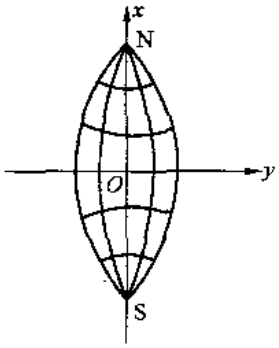



图6－5 投影后平面

然后，再将椭圆柱面沿着通过南极和北极的两条母线展开，即构成高斯投影平面，如图6－5所示。

在高斯投影平面上，中央子午线和赤道的投影都是直线。若以中央子午线与赤道的交点 $O$ 作为坐标原点，以中央子午线的投影为纵坐标轴，即 $x$ 轴，以赤道的投影为横坐标轴，即 $y$ 轴，就形成了高斯平面直角坐标系。

由上所述，形成高斯投影的条件是：

（1）投影后角度不产生变形，满足正形投影要求。

（2）中央子午线投影后是一条直线。

（3）中央子午线投影后长度不变，其投影长度比恒等于1。

高斯投影除了在中央子午线上没有长度变形外，不在中央子午线上的各点，其长度比都大于1，且离开中央子午线愈远，长度变形愈大。

### 6.2.2 高斯投影的长度比和长度变形

高斯投影尽管保持了投影后角度不变，保证了投影区域图形的相似，但只要离开中央子午线，就存在长度变形，下面讨论高斯投影的长度比和长度变形。

当 $\mathrm{d}q=0$，并考虑式（6－6）时，式（6－7）成为

$$m^2=\frac{1}{N\cos^2 B}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right] \tag{6-14}$$

为了求定 $x$ 及 $y$ 对于 $l$ 的偏导数，利用下列公式，即

$$\left.\begin{aligned} x&=X+\frac{l^2}{2}N\sin B\cos B+\frac{l^4}{24}N\sin B\cos^3 B(5-t^2+9\eta^2)\\ y&=lN\cos B+\frac{l^3}{6}N\cos^3 B(1-t^2+\eta^2)+\frac{l^5}{120}N\cos^5 B(5-18t^2+t^4)\end{aligned}\right\} \tag{6-15}$$

式（6－15）就是高斯投影坐标的正算公式，将在下节进行推证。将式（6－15）对 $l$ 求偏导数，得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial l}&=lN\sin B\cos B+\frac{l^3}{6}N\sin B\cos^3 B(5-t^2+9\eta^2)\\ \frac{\partial y}{\partial l}&=N\cos B+\frac{l^2}{2}N\cos^3 B(1-t^2+\eta^2)+\frac{l^4}{24}N\cos^5 B(5-18t^2+t^4)\end{aligned}\right\} \tag{6-16}$$

将式（6－16）代入式（6－14），略去 $l^5$ 和 $l^3\eta^2$ 及其以上项，经整理得

$$m^2=\left[l^2\sin^2 B+\frac{l^4}{3}\sin^2 B\cos^2 B(5-t^2)\right]+\left[1+l^2\cos^2 B(1-t^2+\eta^2)+\frac{l^4}{3}\cos^4 B(2-6t^2+t^4)\right]$$

其中 $t=\tan B$，合并同类项后得

$$m=\left[1+l^2\cos^2 B(1+\eta^2)+\frac{l^4}{3}\cos^4 B(2-t^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

按二项式展开并整理得

$$m = 1 + \frac{l^2}{2}\cos^2 B(1+\eta^2) + \frac{l^4}{24}\cos^4 B(5-4t^2) \tag{6-17}$$

式（6－17）就是大地坐标表示的高斯投影长度比公式。为便于实用，下面进一步推导用平面坐标表示的高斯投影长度比计算公式。

在式（6－15）第二式中略去 $l^5$ 项，得

$$y = lN\cos B\left[1 + \frac{l^2}{6}\cos^2 B(1-t^2+\eta^2)\right]$$

或者

$$l\cos B = \frac{y}{N}\left[1 - \frac{l^2}{6}\cos^2 B(1-t^2+\eta^2)\right]$$

上式等号右端第 2 项中的 $l\cos B$ 以其主项 $\frac{y}{N}$ 代之，得

$$l\cos B = \frac{y}{N} - \frac{y^3}{6N^3}(1-t^2+\eta^2)$$

将上式代入式（6－17）得

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{N^2} - \frac{y^4}{3N^4}(1-t^2+\eta^2)\right](1+\eta^2) + \frac{y^4}{24N^4}(5-4t^2) \\ &= 1 + \frac{y^2}{2N^2}(1+\eta^2) + \frac{y^4}{24N^4} \end{aligned}$$

其中

$$\frac{1+\eta^2}{N^2} = \frac{V^2}{N^2} = \frac{V^3}{CN} = \frac{1}{MN} = \frac{1}{R}$$

将上式代回前式，并用 $R^4$ 代替 $N^4$，最后得到按高斯平面坐标计算投影长度比的公式为

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2}(1+\eta^2) + \frac{y^4}{24R^4} \tag{6-18}$$

式中 $R$——投影点处的椭球平均曲率半径；

$y$——该点的横坐标。

从式（6－18）中可以看出，投影长度比 $m$ 随着点的位置不同而变化，而在同一点处与方向无关，这和正形投影的要求一致。当 $y=0$ 时，$m=1$，即中央子午线投影后长度不变。当 $y\neq 0$ 时，无论 $y$ 值为正或负，$m$ 恒大于 1，即离开中央子午线的任何位置，投影到平面上的线段将都变长。

另外，长度变形（$m-1$）与 $y^2$ 成比例地增大，随着离开中央子午线距离的增加，长度变形则急剧增大。

### 6.2.3 高斯投影的分带

为了使投影区域的长度变形不致过大，应采取一定的措施对它加以限制，使其变形影

响减小到适当程度。限制长度变形的有效方法就是“分带”。

所谓“分带”，就是按一定的经差，以子午线为界将地球椭球分成若干个狭窄的投影区域，每个投影区域按各自的中央子午线分别进行投影，形成大小相等彼此独立的投影带。位于各带中央的子午线称为该带的中央子午线，每一投影带边缘的子午线称为分带子午线。这样，各带就有自己的坐标原点和坐标轴，形成各自独立的坐标系统，如图6－6所示。

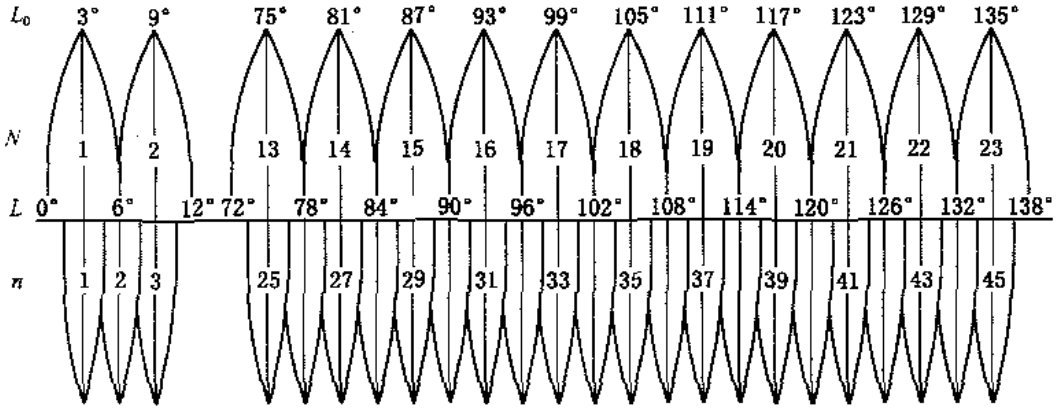



图6－6　投影分带后平面示意

我国规定按经差6°和3°进行投影分带，大比例尺测图和工程测量采用3°带投影。特殊情况下工程测量控制网也可用1.5°带或任意带。

高斯投影6°带自0°子午线起，每隔经差6°自西向东分带，依次编号1，2，3，…。其带号$N$和中央子午线的经度$L_N$的关系按下式确定，即

$$L_N = 6°N - 3°$$

高斯投影3°带自1.5°子午线起，每隔经差3°自西向东分带，依次编号1，2，3，…。其带号$n$和中央子午线的经度$L_n$的关系为

$$L_n = 3°n$$

6°带与3°带带号之间的关系为

$$n = 2N - 1$$

它们的位置关系如图6－6所示。我国地域辽阔，西自东经69°起，东至东经135°止，分跨6°带的第12带至第23带，3°的第24带至第45带。

高斯投影分带有效地限制了长度变形，但是在投影带的边缘地区，其长度变形仍然较大，以致不能满足大比例测图和工程测量的精度要求。因此，位于投影带边缘的地区或城市，为克服长度变形的影响，会选择1.5°带或任意带以及其他形式的地方坐标系统。

在我国$x$坐标均为正，$y$坐标的最大值（在赤道上）约为330km。为避免出现负的横

坐标，可在横坐标上加上500km。另外在横坐标前面再冠以带号，这种坐标称为国家统一坐标。

由此可见，由于高斯投影是正形投影，所以保证了投影的角度不变性、图形的相似性以及在某点各方向上长度比的同一性；由于采用了同样法则的分带投影，既限制了长度变形，又保证了在不同投影带中采用相同的简单公式进行由于变形引起的各项改正的计算，且带与带间的互相换算也能用相同的公式和方法进行。因此，高斯投影在国际上得到了广泛的应用。

### 6.2.4 高斯投影计算内容

地面观测值归算到椭球面上以后，可通过两种途径获得各点的高斯平面直角坐标。

（1）按第6章所述方法解算球面三角形，推算各边大地线长度 $S_i$ 和大地方位角 $A_i$，解算出各点的大地坐标（$B_i$，$L_i$）。然后利用高斯投影坐标计算公式解算出各点的高斯平面直角坐标（$x_i$，$y_i$）。

（2）将椭球面上的起算元素（已知点的大地坐标（$B_i$，$L_i$）、已知边的大地线长 $S_i$ 及大地方位角 $A_i$）和观测元素（观测角度 $\alpha_i$ 和边长 $S_i'$）归算至高斯投影平面上，然后解算平面三角形，推算各边的边长 $D_i$ 和坐标方位角 $T_i$，在平面上进行平差计算，求解各点的高斯平面直角坐标（$x_i$，$y_i$）。

两种方法的解算结果完全一样，但第一种方法的解算工作量非常大。通常采用第二种方法，将控制网直接归化到高斯投影平面上，在平面上完成平差和各种计算工作。下面以三角网为例，介绍高斯投影计算的基本程序。

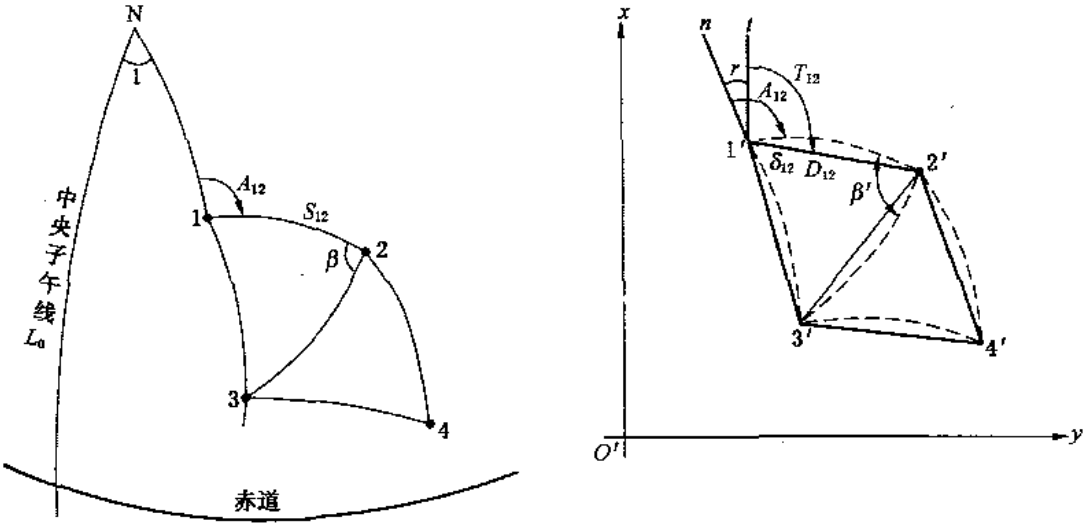
图6－7a所示为椭球面上的三角网，图6－7b所示为该三角网在高斯平面上的投影。椭球面上12，13等大地线，投影到平面上后呈曲率很小的曲线1′2′，1′3′等。由于高斯投影为等角投影，所以椭球面上大地线之间的夹角与高斯平面上相应的投影曲线之夹角相等，例如 $\beta=\beta'$。但是，各大地线的长度与它们在投影平面上的投影曲线长度并不相等，因为投影存在长度变形。

为了在平面上进行三角网的平差和计算，必须把椭球面上以大地线构成的三角网，换算成高斯投影平面上以直线边构成的三角网。为此，需要进行下列计算。

（1）将起算点（例如点1）的大地坐标（$B_1$，$L_1$），换算成高斯投影平面上其投影点的平面直角坐标（$x_1$，$y_1$），称为高斯投影坐标计算。

（2）将起算边（例如图6－7a中的12）的大地方位角 $A_{12}$，换算成高斯投影平面上的平面坐标方位角 $T_{12}$。

图6－7b中，1′$t$ 是过起算点1′平行与 $x$ 轴的纵坐标线，该方向称为1′的坐标北方向。$T_{12}$就是弦线1′2′的坐标方位角；1′$n$ 是椭球面上子午线 $1N$ 的投影线方向，称为1′的真北方向。由于高斯投影是等角投影，所以由1′$n$ 顺时针方向到投影曲线1′2′的角度，就等于椭球面上大地线12的大地方位角 $A_{12}$。




(a) 椭球面上三角网　　(b) 高斯平面上三角网

图 6－7　三角网

我们用 $\gamma$ 表示坐标北方向 $1't$ 相对于真北方向 $1'n$ 构成的夹角，称作 1′的平面子午线收敛角。再用 $\delta_{12}$ 表示投影曲线的弦线相对于投影曲线构成的夹角，称为方向改正。由图 6－7b 可知，$T_{12}$ 与 $A_{12}$ 之间的关系为

$$T_{12} = A_{12} - \gamma + \delta_{12}$$

因此，若由大地方位角转换平面坐标方位角，必须先计算该大地线起点处的平面子午线收敛角和方向改正。

（3）将起算边的大地线长度 $S_{12}$ 归算至高斯平面上的直线长度 $D_{12}$。

$$D_{12} = S_{12} + \Delta S$$

式中　$\Delta S$——由大地线长度改换为高斯平面上直线长度时加入的改正数，称为距离改正。

（4）对于椭球面上三角网的各观测方向和边长分别进行方向改正和距离改正，归算至高斯投影平面上的直线方向和直线距离，组成由平面三角形构成的三角网，进行平差计算，解算平面三角形，推求各控制点的平面直角坐标。

综上所述，高斯投影坐标计算、平面子午线收敛角计算、方向改正计算、距离改正计算，统称为高斯投影计算。

## 6.3　高斯投影坐标计算

高斯投影坐标计算，包括由大地坐标（$B$，$L$）推求高斯平面坐标（$x$，$y$），和由高斯平面坐标（$x$，$y$）推求大地坐标（$B$，$L$）。前者称为高斯投影坐标正算，后者称为高斯投影坐标反算。本节主要来推证它们的计算公式和适用情况。

### 6.3.1 高斯投影坐标正算公式

大地坐标计算平面直角坐标的一般函数式见式（6－1），由于其中的大地经度 $L$ 是从起始子午面开始起算的，所以这个投影函数也是以起始子午线作为投影的中央子午线。而高斯投影分带使得各投影带均以经度为 $L_0$ 的子午线作为中央子午线，于是式（6－1）中的 $L$ 应改为

$$l=\frac{L-L_0}{\rho} \tag{6-19}$$

式中 $l$——以弧度（rad）为单位的经度差。

此时高斯投影坐标正算的函数式则为

$$\left.\begin{aligned} x&=F_1(B,\ l)\\ y&=F_2(B,\ l)\end{aligned}\right\} \tag{6-20}$$

根据正形投影的一般公式，得

$$x+iy=f(q+il)$$

由复变函数知，任一复数 $x+iy$ 都可以用坐标为（$x$，$y$）的点来表示，$x$ 轴称为实轴，$y$ 轴称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面或 $z$ 平面。这样，复数与复平面上的点一一对应。设 $z_0$ 为复平面上收敛区内一点，$z$ 为此区域内另一点，则解析函数 $f(z)$ 按台劳级数展开后为

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots$$

现设 $z=q+il$，$z_0=q$，在高斯投影分带中，经差 $l$ 一般仅为3°或1.5°，$\frac{l}{\rho}$为一微小量。此时上式可写为下列收敛较快的 $l$ 的幂级数

$$x+iy=f(q)+il\frac{\mathrm{d}f(q)}{\mathrm{d}q}+\frac{(il)^2}{2!}\times\frac{\mathrm{d}^2f(q)}{\mathrm{d}q^2}+\frac{(il)^3}{3!}\times\frac{\mathrm{d}^3f(q)}{\mathrm{d}q^3}+\frac{(il)^4}{4!}\times\frac{\mathrm{d}^4f(q)}{\mathrm{d}q^4}+$$
$$\frac{(il)^5}{5!}\times\frac{\mathrm{d}^5f(q)}{\mathrm{d}q^5}+\frac{(il)^6}{6!}\times\frac{\mathrm{d}^6f(q)}{\mathrm{d}q^6}+\cdots$$

注意到 $i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$ 等，得

$$x+iy=\left\{f(q)-\frac{l^2}{2}\times\frac{\mathrm{d}^2f(q)}{\mathrm{d}q^2}+\frac{l^4}{24}\times\frac{\mathrm{d}^4f(q)}{\mathrm{d}q^4}-\frac{l^6}{720}\times\frac{\mathrm{d}^6f(q)}{\mathrm{d}q^6}\right\}+$$
$$i\left\{l\frac{\mathrm{d}f(q)}{\mathrm{d}q}-\frac{l^3}{6}\times\frac{\mathrm{d}^3f(q)}{\mathrm{d}q^3}+\frac{l^5}{120}\times\frac{\mathrm{d}^5f(q)}{\mathrm{d}q^5}\right\}$$

如图6－8所示，椭球面上一点投影到平面后为 $d$ 点，椭球面上该点的平行圆（$B$ 或 $q$ 为一常数）与中央子午线的交点为 $e$ 点，若将上式中的展开点 $z_0$ 设于 $e$ 处，则根据高斯投影条件，中央子午线的长度比 $m=1$，且纵坐标 $x$ 等于从赤道起到该平行圈（纬度等于 $B$）间的子午线弧长 $X$。就是说，当 $l=0$ 时，$y=0$，$x=f(q)=X$。其次，在对解析函数求

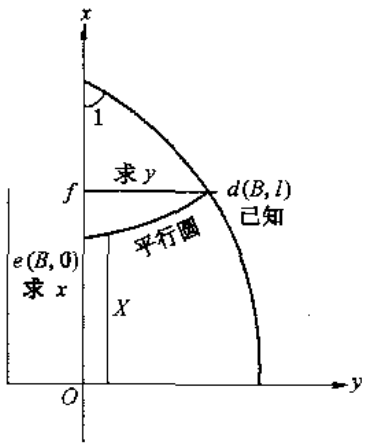



图 6－8　由大地坐标推导平面坐标示意

导时与方向无关，为方便计算，可以沿中央子午线方向求导。此时，再将上式等号两端的实部和虚部分开，可以写出如下方程：

$$\left.\begin{aligned} x &= X - \frac{l^2}{2}\times\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}q^2} + \frac{l^4}{24}\times\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}q^4} - \frac{l^6}{720}\times\frac{\mathrm{d}^6X}{\mathrm{d}q^6} \\ y &= l\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q} - \frac{l^3}{6}\times\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}q^3} + \frac{l^5}{120}\times\frac{\mathrm{d}^5X}{\mathrm{d}q^5} \end{aligned}\right\} \tag{6-21}$$

式（6－21）就是高斯投影坐标正算的基本公式。要推导出计算平面坐标 $x$，$y$ 的实用公式，须求出式中各阶导数$\frac{\mathrm{d}^nX}{\mathrm{d}q^n}$的数值。

由式（5－27）和式（6－3）可得

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q} = N\cos B = \frac{c}{V}\cos B \tag{6-22}$$

对式（6－22）再次求二阶导数得

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}q^2} = \frac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}q}}{\mathrm{d}q} = -c\left\{\frac{\cos B}{V^2}\times\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}B}\times\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} + \frac{\sin B}{V}\times\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q}\right\}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}B}$可以对公式 $V^2 = 1 + e'^2\cos^2 B$ 进行微分求得

$$2V\mathrm{d}V = -2e'^2\cos B\sin B\mathrm{d}B \quad 或 \quad V\mathrm{d}V = -e'^2\cos^2 B\tan B\mathrm{d}B$$

由此

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}B} = -\frac{\eta^2}{V}t$$

根据式（6－3），又有

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} = \frac{N}{M}\cos B = V^2\cos B = (1+\eta^2)\cos B$$

于是求得

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}q^2} = c\left\{\frac{\cos^2 B}{V}\eta^2\tan B - V\sin B\cos B\right\}$$

$$= \frac{c}{V}\sin B\cos B(\eta^2 - V^2) = -N\sin B\cos B \tag{6-23}$$

考虑到式（6－22）、式（6－23），可得式（6－21）的主项为

$$\left.\begin{aligned} x &= X + \frac{l^2}{2}N\sin B\cos B + \cdots \\ y &= lN\cos B + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6-24}$$

为了得到满足控制网计算需要的精确公式，还需要按式（6－23）依次对 $q$ 进行求导，可得到$\frac{dX}{dq}$的3阶以上的各阶导数值，如下：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX^3}{dq^3} &= -N\cos^3 B(1+\eta^2-t^2)\\
\frac{dX^4}{dq^4} &= N\sin B\cos^3 B(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4)\\
\frac{dX^5}{dq^5} &= N\cos^5 B(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58\eta^2t^2)\\
\frac{dX^6}{dq^6} &= -N\sin B\cos^5 B(61-58t^2+t^4)
\end{aligned}\right\} \qquad (6-25)$$

式（6－25）中，5阶导数中略去了 $\eta^4$ 项，6阶导数中略去了 $\eta^2$ 和 $\eta^4$ 项。将式（6－22）、式（6－23）和式（6－25）一并代入式（6－21），得到高斯投影坐标正算公式为

$$\left.\begin{aligned}
x &= X+\frac{l^2}{2}N\sin B\cos B+\frac{l^4}{24}N\sin B\cos^3 B(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4)+\\
&\quad \frac{l^6}{720}N\sin B\cos^5 B(61-58t^2+t^4)\\
y &= lN\cos B+\frac{l^3}{6}N\cos^3 B(1-t^2+\eta^2)+\\
&\quad \frac{l^5}{120}N\cos^5 B(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58\eta^2t^2)
\end{aligned}\right\} \qquad (6-26)$$

式中 $B$——$d$ 点的大地纬度；

$X$——由赤道至纬度 $B$ 的子午线弧长；

$l$——$d$ 点与中央子午线间的经差。可由已知的经度 $L$ 按式（6－19）计算，$d$ 点在中央子午线以东为正，以西为负。

当 $l<3.5°$ 时，使用式（8－26）由大地坐标（$B$，$L$）推求高斯平面坐标（$x$，$y$）的精度为0.001m。

### 6.3.2 高斯投影坐标反算公式

在进行高斯投影坐标反算时，原面是高斯投影平面，投影面是椭球面，已知高斯投影平面直角坐标（$x$，$y$），求该点椭球面上相应的大地坐标（$B$，$L$）。高斯投影坐标反算公式的推导方法与正算时相似，将正形投影的一般式（6－12）写成反函数的形式，即

$$q+il=F(x+iy) \qquad (6-27)$$

将解析函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 点附近展开成台劳级数，即

$$f(z)=f(z_0)+\left[\frac{df(z)}{dz}\right]_0(z-z_0)+\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2f(z)}{dz^2}\right]_0(z-z_0)^2+\cdots$$

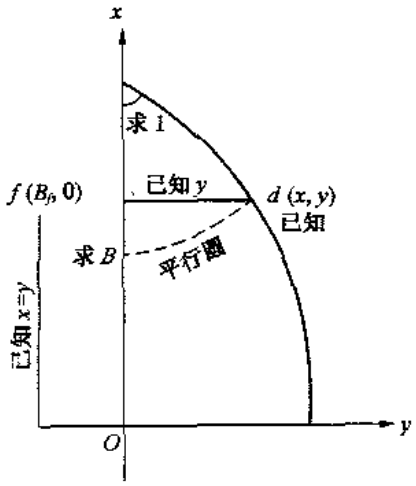



图 6－9　由平面坐标推导大地坐标示意

其中各阶导数的下标 0 表明它们是 $z_0$ 点上的导数。

由于高斯分带，横坐标 $y$ 值与椭球半径相比相对较小，因此可将式（6－27）按上式展开成 $y$ 的幂级数。为此仍将高斯投影平面视为复平面，其纵坐标轴为实轴，横坐标轴为虚轴。设已知点 $d$ 的平面坐标为（$x$，$y$）（图 6－9），将展开点 $z_0$ 选在纵坐标轴上的 $f$ 点，该点的纵坐标与已知点 $d$ 的纵坐标相同，均为 $x$。可见 $f$ 点是从 $d$ 点到纵坐标轴的垂直线的垂足（也称底点），该点的纬度 $B_f$ 就称为垂足纬度（或底点纬度）。$f$ 点在复平面上的坐标为 $x$；再令 $d$ 点是上式中的 $z$ 点，其在复平面上的坐标为 $(x+iy)$。设 $F(x+iy)$ 为上式中的 $f(z)$，则 $z-z_0=(x+iy)-x=iy$。

沿中央子午线方向求解 $f$ 点处的导数，这时 $y=0$，$l=0$，而 $x=X$。则上式可写为

$$F(x+iy)=[F(x)]_f+iy\left[\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}X}\right]_f+\frac{1}{2!}(iy)^2\left[\frac{\mathrm{d}^2F(x)}{\mathrm{d}X^2}\right]_f+\cdots$$

对于 $f$ 点而言，式（6－27）成为 $F(x)=q$，$[F(x)]_f=q_f$，其中 $q_f$ 是 $f$ 点的等量纬度。于是上式又可以写为

$$q+il=q_f+iy\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}X}\right)_f+\frac{(iy)^2}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}X^2}\right)_f+\frac{(iy)^3}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3q}{\mathrm{d}X^3}\right)_f+$$
$$\frac{(iy)^4}{4!}\left(\frac{\mathrm{d}^4q}{\mathrm{d}X^4}\right)_f+\frac{(iy)^5}{5!}\left(\frac{\mathrm{d}^5q}{\mathrm{d}X^5}\right)_f+\frac{(iy)^6}{6!}\left(\frac{\mathrm{d}^6q}{\mathrm{d}X^6}\right)_f+\cdots$$

将实部和虚部分开，得

$$\left.\begin{aligned}q&=q_f-\frac{y^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}X^2}\right)_f+\frac{y^4}{24}\left(\frac{\mathrm{d}^4q}{\mathrm{d}X^4}\right)_f-\frac{y^6}{720}\left(\frac{\mathrm{d}^6q}{\mathrm{d}X^6}\right)_f+\cdots\\ l&=y\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}X}\right)_f-\frac{y^3}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3q}{\mathrm{d}X^3}\right)_f+\frac{y^5}{120}\left(\frac{\mathrm{d}^5q}{\mathrm{d}X^5}\right)_f-\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(6-28)$$

由式（6－22）得

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}X}=\frac{1}{N\cos B}=\frac{1}{r}\qquad(6-29)$$

并考虑式（5－28），得

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}X^2}=-\frac{1}{r^2}\times\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin B}{r^2}=\frac{t}{N^2\cos B}\qquad(6-30)$$

依次求导，还可得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3q}{\mathrm{d}X^3}&=\frac{1}{N^3\cos B}(1+2t^2+\eta^2)\\
\frac{\mathrm{d}^4q}{\mathrm{d}X^4}&=\frac{t}{N^4\cos B}(5+6t^2+\eta^2-4\eta^4)\\
\frac{\mathrm{d}^5q}{\mathrm{d}X^5}&=\frac{1}{N^5\cos B}(5+28t^2+24t^4+6\eta^2+8\eta^2t^2)\\
\frac{\mathrm{d}^6q}{\mathrm{d}X^6}&=\frac{t}{N^6\cos B}(61+180t^2+120t^4+46\eta^2+48\eta^2t^2)
\end{aligned}\right\}\qquad(6-31)$$

以上各阶导数均为在$f$点处的数值，因此将它们代入式（6－28）时，有关的$B$，$N$，$t$，$\eta$也都是$f$点处的数值，以$B_f$，$N_f$，$t_f$，$\eta_f$表示。

将式（6－30）、式（6－31）中的偶阶导数代入式（6－28）的第一式，简化后得

$$\begin{aligned}
q-q_f&=-\frac{y^2}{2N_f^2\cos B_f}t_f+\frac{y^4}{24N_f^4\cos B_f}t_f(5+6t_f^2+\eta_f^2-4\eta_f^4)\\
&=\frac{y^6}{720N_f^6\cos B_f}t_f(61+180t_f^2+120t_f^4+46\eta_f^2+48\eta_f^2t_f^2)
\end{aligned}\qquad(6-32)$$

式（6－32）中$q-q_f$还应变为$B-B_f$。

由于等量纬度$q$仅是大地纬度$B$的函数，其反函数可以写成

$$B=\varphi(q)$$

按台劳级数将$\varphi(q)$在$q_f$附近展开，得

$$B=B_f+\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q}\right)_f(q-q_f)+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}q^2}\right)_f(q-q_f)^2+\cdots\qquad(6-33)$$

求式中导数的公式为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q}&=\frac{N}{M}\cos B=V^2\cos B\\
\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}q^2}&=-V^2\sin B\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q}+2V\cos B\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}B}\times\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q}\\
&=-V^4\sin B\cos B+2V^3\cos^2B\left(-\frac{\eta^2t}{V}\right)\\
&=-\sin B\cos B[(1+\eta^2)+2(1+\eta^2)\eta^2]\\
&=-t\cos^2B(1+4\eta^2+3\eta^4)
\end{aligned}$$

将上列导数和式（6－32）代入式（6－33），即得到大地纬度$B$的计算公式；再将式（6－29）和式（6－31）中的奇阶导数代入式（6－28）第二式，又得经差$l$的计算公式，简化后的公式为

$$\left.\begin{aligned} B &= B_f - \frac{y^2}{2M_fN_f}t_f + \frac{y^4}{24M_fN_f^3}t_f(5+3t_f^2+\eta_f^2-9\eta_f^2t_f^2) - \\ &\quad \frac{y^6}{720M_fN_f^5}t_f(61+90t_f^2+45t_f^4) \\ l &= \frac{y}{N_f\cos B_f} - \frac{y^3}{6N_f^3\cos B_f}(1+2t_f^2+\eta_f^2) + \\ &\quad \frac{y^5}{120N_f^5\cos B_f}(5+28t_f^2+24t_f^4+6\eta_f^2+8\eta_f^2t_f^2) \end{aligned}\right\} \quad (6-34)$$

其中 $N_f$，$t_f$，$\eta_f$ 均为 $B_f$ 的函数，也就是说将垂足纬度 $B_f$ 的数值代入相应公式后求得。而垂足纬度 $B_f$ 可以根据子午线弧长公式，由 $x=X$ 很快反算求出。这样，根据式（6－34）就可以计算 $d$ 点的大地纬度 $B$ 和经差 $l$，进而求出大地经度 $L$。式（6－34）就是高斯投影坐标的反算公式，其中的 $B$，$L$ 均以弧度（rad）为单位表示，若以度（°）为单位，等号右端应乘以 $\frac{180°}{\pi}$。

当 $l<3.5°$ 时，按式（6－34）计算的大地坐标的精度为 0.000 1″，与正算式（6－26）的计算精度 0.001m 相适应。

### 6.3.3 高斯投影坐标正算的数值公式

在高斯投影坐标计算的实际工作中，可以采用查表和电算两种方法。查表计算是通过《高斯克吕格投影计算表》进行，计算量大，程序繁杂。另外，现行的高斯投影用表都是采用克拉索夫斯基椭球参数，而我国 1980 年国家大地坐标系采用 1975 年国际椭球参数，现有各种数表已不再适用。因此，有必要讨论适合电算的高斯投影坐标计算公式。

将式（6－26）改写为

$$\left.\begin{aligned} x &= X + \frac{l^2}{2}N t\cos^2 B + \frac{l^4}{24}N t\cos^4 B(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4) + \\ &\quad \frac{l^6}{720}N t\cos^6 B(61-58t^2+t^4) \\ y &= lN\cos B + \frac{l^3}{6}N\cos^3 B(1-t^2+\eta^2) + \\ &\quad \frac{l^5}{120}N\cos^5 B(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58\eta^2t^2) \end{aligned}\right\}$$

若令 $m = l\cos B\frac{\pi}{180}$，则上式可写为

$$\left.\begin{aligned} x &= X + Nt\left\{\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{24}(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.\frac{1}{720}(61 - 58t^2 + t^4)m^2\right)m^2\right]m^2\right\} \\ y &= N\left\{\left[1 + \left(\frac{1}{6}(1 - t^2 + \eta^2\right) + \frac{1}{120}(5 - 18t^2 + \right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)m^2\right)m^2\right]m\right\} \end{aligned}\right\} \tag{6-35}$$

将克拉索夫斯基椭球参数代入式（6－35），经整理得

$$\left.\begin{aligned} x &= 6\,367\,558.496\,9\frac{B}{\rho} - \{a_0 - [0.5 + (a_4 + a_6 l^2)l^2]l^2 N\}\sin B\cos B \\ y &= N\cos B[1 + (a_3 + a_5 l^2)l^2]l \end{aligned}\right\} \tag{6-36}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 32\,140.404\,8 - [135.330\,3 - (0.709\,2 - 0.004\,1\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B \\ a_4 &= (0.25 + 0.002\,53\cos^2 B)\cos^2 B - 0.041\,67 \\ a_6 &= (0.167\cos^2 B - 0.083)\cos^2 B \\ a_3 &= (0.333\,333\,3 + 0.001\,123\cos^2 B)\cos^2 B - 0.166\,666\,7 \\ a_5 &= 0.008\,33 - [0.166\,7 - (0.196\,7 + 0.004\,0\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B \end{aligned}\right\} \tag{6-37}$$

其中 $N$ 按式（5－38）计算，$l$ 按式（6－19）计算。高斯平面坐标的计算精度可达0.001m。

当把1975年国际椭球参数代入式（6－35），并整理得

$$\left.\begin{aligned} x &= 6\,367\,452.132\,8\frac{B}{\rho} - \{a_0 - [0.5 + (a_4 + a_6 l^2)l^2]l^2 N\}\sin B\cos B \\ y &= N\cos B[1 + (a_3 + a_5 l^2)l^2]l \end{aligned}\right\} \tag{6-38}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 32\,144.518\,9 - [135.364\,6 - (0.703\,4 - 0.004\,1\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B \\ a_4 &= (0.25 + 0.002\,53\cos^2 B)\cos^2 B - 0.041\,67 \\ a_6 &= (0.167\cos^2 B - 0.083)\cos^2 B \\ a_3 &= (0.333\,333\,3 + 0.001\,123\cos^2 B)\cos^2 B - 0.166\,666\,7 \\ a_5 &= 0.008\,78 - (0.170\,2 - 0.203\,82\cos^2 B)\cos^2 B \end{aligned}\right\} \tag{6-39}$$

其中 $N$ 按式（5－39）计算，$l$ 按式（6－19）计算。

### 6.3.4 高斯投影坐标反算的数值公式

若以度（°）为单位表示 $B$ 和 $l$，则式（6－34）可写为

$$\left.\begin{aligned} B &= B_f - \left[1 + \frac{y^2}{12N_f^2}t_f(5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2) - \right. \\ &\quad \left. \frac{y^4}{720N_f^4}t_f(61 + 90t_f^2 + 45t_f^4)\right]\frac{y^2\rho}{2M_fN_f}t_f \\ l &= \frac{y\rho}{N_f\cos B_f}\left[1 - \frac{y^2}{6N_f^2}(1 + 2t_f^2 + \eta_f^2) + \right. \\ &\quad \left. \frac{y^4}{120N_f^4}(5 + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2)\right] \end{aligned}\right\} \tag{6-40}$$

考虑$\frac{N_f}{M_f} = V_f^2 = 1 + \eta_f^2$，并令$z = \frac{y}{N_f\cos B_f}$，将克拉索夫斯基椭球参数代入式（6-40）经整理得高斯投影坐标反算式

$$\left.\begin{aligned} B &= B_f - [1 - (b_4 - 0.125z^2)z^2]z^2 b_2\rho \\ l &= [1 - (b_3 - b_5 z^2)z^2]z\rho \\ L &= L_0 + l \end{aligned}\right\} \tag{6-41}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} B_f &= \beta + \{50\ 221\ 746 + [293\ 622 + \\ &\quad (2\ 350 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\}\rho\sin\beta\cos\beta \times 10^{-10} \\ \beta &= \frac{x\rho}{6\ 367\ 558.496\ 9} \\ z &= \frac{y}{N_f\cos B_f} \\ N_f &= 6\ 399\ 698.902 - \{21\ 562.267 - [108.973 - (0.612 - \\ &\quad 0.004\cos^2 B_f)\cos^2 B_f]\cos^2 B_f\}\cos^2 B_f \\ b_2 &= (0.5 + 0.003\ 369\cos^2 B_f)\sin B_f\cos B_f \\ b_3 &= 0.333\ 333 - (0.166\ 667 - 0.001\ 123\cos^2 B_f)\cos^2 B_f \\ b_4 &= 0.25 + (0.161\ 61 + 0.005\ 62\cos^2 B_f)\cos^2 B_f \\ b_5 &= 0.2 - (0.166\ 7 - 0.008\ 8\cos^2 B_f)\cos^2 B_f \end{aligned}\right\} \tag{6-42}$$

运用式（6-41）、式（6-42）计算大地坐标的精度可达0.000 1″。

同样将1975年国际椭球参数值代入，经整理得高斯投影坐标反算的计算式

$$\left.\begin{aligned} B &= B_f - [1 - (b_4 - 0.147z^2)z^2]z^2 b_2\rho \\ l &= [1 - (b_3 - b_5 z^2)z^2]z\rho \\ L &= L_0 + l \end{aligned}\right\} \tag{6-43}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
B_f &= \beta + \{50\ 228\ 976 + [293\ 697 + \\
&\quad (2\ 383 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\}\rho\sin\beta\cos\beta \times 10^{-10} \\
\beta &= \frac{x\rho}{6\ 367\ 452.133} \\
z &= \frac{y}{N_f\cos B_f} \\
N_f &= 6\ 399\ 596.652 - \{21\ 565.047 - [109.003 - (0.612 - \\
&\quad 0.004\cos^2 B_f)\cos^2 B_f]\cos^2 B_f\}\cos^2 B_f \\
b_2 &= (0.5 + 0.003\ 369\ 75\cos^2 B_f)\sin B_f\cos B_f \\
b_3 &= 0.333\ 333 - (0.166\ 666\ 7 - 0.001\ 123\cos^2 B_f)\cos^2 B_f \\
b_4 &= 0.25 + (0.161\ 612 + 0.005\ 617\cos^2 B_f)\cos^2 B_f \\
b_5 &= 0.2 - (0.166\ 67 - 0.008\ 78\cos^2 B_f)\cos^2 B_f
\end{aligned}\right\} \qquad (6-44)
$$

### 6.3.5 高斯投影坐标反算时 $B_f$ 的迭代公式

高斯投影坐标反算问题的关键是求解垂足纬度 $B_f$，只要求出 $B_f$，即可按反算公式进行计算。$B_f$ 也可以采用迭代法计算，对于克拉索夫斯基椭球，可由其子午线弧长计算公式建立迭代公式。

$$
X = 6\ 367\ 558.496\ 9\frac{B}{\rho} - \{32\ 140.404\ 9 - [135.330\ 3 - (0.709\ 2 - 0.004\ 2\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B\}\sin B\cos B
$$

迭代开始时，按下式计算 $B_f$ 的初值，即

$$
B_f^0 = \frac{x}{6\ 367\ 558.496\ 9}
$$

式中 $x$——待转换点 $d$ 的纵坐标值，就是垂足点 $f$ 的子午线弧长 $X$。

以后各次迭代计算的公式为

$$
B_f^{i+1} = \frac{x - f(B_f^i)}{6\ 367\ 558.496\ 9} \qquad (6-45)
$$

其中

$$
f(B_f^i) = -\{32\ 140.404\ 9 - [135.330\ 3 - (0.709\ 2 - 0.004\ 2\cos^2 B)\cos^2 B_f^i]\cos^2 B_f^i\}\sin B_f^i\cos B_f^i
$$

重复迭代直至 $|B_f^{i+1} - B_f^i| < \varepsilon$ 时，停止迭代。当要求垂足纬度 $B_f$ 的计算精度达到 0.000 1″ 时，可选 $\varepsilon = 10^{-8}$，一般迭代 5 次即可。

同理，也可以根据下式建立 1975 年国际椭球的垂足纬度 $B_f$ 的迭代公式，即

$$
X = 6\ 367\ 452.132\ 8\frac{B}{\rho} -
$$

$$\{32\ 144.518\ 9-[135.364\ 6-(0.703\ 4-0.004\ 2\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B\}\sin B\cos B$$

迭代初值为

$$B_f^0=\frac{x}{6\ 367\ 452.132\ 8}$$

以后各次迭代计算的公式为

$$B_f^{i+1}=\frac{x-f(B_f^i)}{6\ 367\ 452.132\ 8} \tag{6-46}$$

其中

$$f(B_f^i)=-\{32\ 144.518\ 9-[135.364\ 6-(0.703\ 4-0.004\ 2\cos^2 B)\cos^2 B]\cos^2 B\}\sin B\cos B$$

## 6.4 椭球面上的方向和长度归算至高斯投影平面

将椭球面上的方向和距离归算至高斯投影平面，也就是将大地方位角改化为平面坐标方位角，将大地线长度改换为平面上的直线长度。因此，需要计算平面子午线收敛角、方向改正数和距离改正数。

### 6.4.1 平面子午线收敛角的计算

如图6-10所示，$d$ 点处的平面子午线收敛角 $\gamma$ 就是通过该点的子午线投影像与过该点的纵坐标线之间的夹角，自子午线投影像量至纵坐标轴方向，顺时针为正，逆时针为负。

平面子午线收敛角可以由大地坐标（$B$，$L$）进行计算，也可由平面坐标（$x$，$y$）计算。

#### 6.4.1.1 由大地坐标（$B$，$L$）计算平面子午线收敛角 $\gamma$ 的公式

在椭球面上子午线与平行圈成正交，由于高斯投影具有等角性质，所以 $d$ 点的子午线投影像 $dn$ 也与平行圈的投影像 $de$ 垂直（图6-10）。平面子午线收敛角 $\gamma$ 也就等于平行圈投影像在 $d$ 点处的切线与横坐标轴正向所成的夹角。若 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 为无限小的坐标增量，则可写出

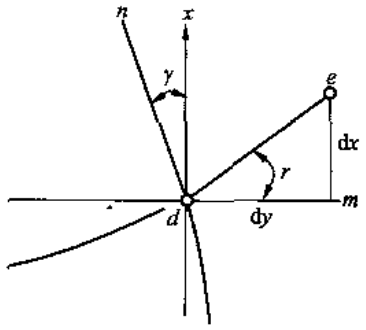



图6-10 由大地坐标计算子午线收敛角

$$\tan r=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

对 $x=f_1(q,\ l)$，$y=f_2(q,\ l)$ 全微分，并考虑 $d$ 点和 $e$ 点位于同一平行圈上，纬度相等，故得

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial f_1}{\partial l}\mathrm{d}l+\frac{\partial f_1}{\partial q}\mathrm{d}q=\frac{\partial x}{\partial l}\mathrm{d}l,\ \mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial l}\mathrm{d}l$$

因此有

$$\tan r = \frac{\frac{\partial x}{\partial l}}{\frac{\partial y}{\partial l}}$$

按式（6－16）中的偏导数$\frac{\partial x}{\partial l}, \frac{\partial y}{\partial l}$，将$\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^{-1}$按$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3$展开，得

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^{-1} = \frac{1}{N\cos B}\left[1-\frac{l^2}{2}\cos^2 B(1-t^2+\eta^2)+\frac{l^4}{24}\cos^4 B(1+6t^2+5t^4)\right]$$

将$\frac{\partial x}{\partial l}$，$\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^{-1}$代入前式，经整理得

$$r = l\sin B\left[1+\frac{l^2}{3}\cos^2 B(1+t^2+3\eta^2+2\eta^4)+\frac{l^4}{15}\cos^4 B(2+4t^2+2t^4)+\cdots\right] \qquad (6-47)$$

根据反三角函数的幂级数展开式得

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

设$x=\tan\gamma$，则

$$r = \tan\gamma-\frac{1}{3}\tan^3\gamma+\frac{1}{5}\tan^5\gamma-\cdots \qquad (6-48)$$

将式（6－47）代入式（6－48），并整理得

$$r = l\sin B\left[1+\frac{l^2}{3}\cos^2 B(1+3\eta^2+2\eta^4)+\frac{l^4}{15}\cos^4 B(2-t^2)\right] \qquad (6-49)$$

由式（6－49）可知，$\gamma$为$l$的奇函数，在北半球$\gamma$与$l$同号，即当点在中央子午线以东时$\gamma$为正，以西时为负；经差$l$愈大，$\gamma$值也愈大；当经差$l$不变时（即点在同一经线上），纬度愈大，$\gamma$值也愈大，在极点处$\gamma$达到最大。

6.4.1.2　由平面坐标（$x$，$y$）计算平面子午线收敛角$\gamma$的公式

如图6－11所示，$d$点和$e$点位于同一平行圈上且无限接近，$dn$，$ec$分别为过$d$点和$e$点的子午线投影像，$fc$为垂直与纵坐标轴的直线。

设$\mathrm{d}B$和$\mathrm{d}l$为$d$点到$c$点的大地坐标增量，此时纬度减小（即$\mathrm{d}B$为负值），经度增加。根据子午圈和平行圈的弧长微分公式可以写出

$$\tan\gamma = \frac{ec}{de} = \frac{-M\mathrm{d}B}{N\cos B\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \qquad (6-50)$$

位于直线$dc$上各点的垂足纬度$B_f$都相等，于是

$$\mathrm{d}q = \frac{\partial q}{\partial y}\mathrm{d}y, \mathrm{d}l = \frac{\partial l}{\partial y}\mathrm{d}y$$

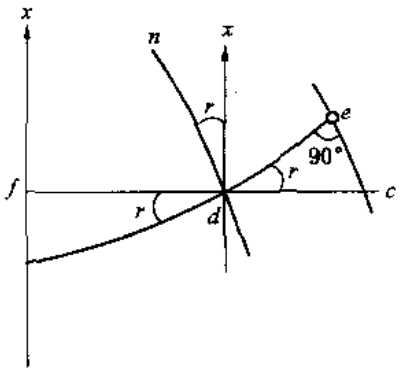



图6－11　由平面坐标计算子午线收敛角

则

$$\tan r = \frac{\dfrac{\partial q}{\partial y}}{\dfrac{\partial l}{\partial y}}$$

分别按式（6－21）和式（6－34）的第二式对 $y$ 求偏导数，将其值代入上式，经过变换得

$$\tan\gamma = \frac{\gamma}{N_f}t_f - \frac{\gamma^3}{3N_f^3}t_f(1-\eta_f^2-2\eta_f^4) + \frac{2t_f}{15N_f^5}\gamma^5 \tag{6-51}$$

将式（6－51）代入式（6－48），简化后得

$$\gamma = \frac{\gamma}{N_f}t_f - \frac{\gamma^3}{3N_f^3}t_f(1+t_f^2-\eta_f^2-2\eta_f^4) + \frac{\gamma^5}{15N_f^5}t_f(2+5t_f^2+3t_f^4) \tag{6-52}$$

按式（6－52）计算 $\gamma$ 可精确至0.001″，若只计算前两项，则可精确至1″。其中 $B_f$，$N_f$ 可按式（6－42）或式（6－44）计算，$\gamma$ 以弧度（rad）为单位。

6.4.1.3　计算平面子午线收敛角 $\gamma$ 的数值公式

将克拉索夫斯基椭球的有关参数代入式（6－49），经整理后得到由大地坐标（$B$，$L$）计算平面子午线收敛角 $\gamma$ 的数值公式，即

$$\begin{aligned}\gamma = \{1 + [&(0.333\,33 + 0.006\,74\cos^2 B) - \\ &(0.066\,7 - 0.2\cos^2 B)l^2]l^2\cos^2 B\}l\sin B\rho''\end{aligned} \tag{6-53}$$

代入式（6－52），并经整理得由平面坐标（$x$，$y$）计算平面子午线收敛角 $\gamma$ 的数值公式，即

$$\begin{aligned}\gamma = \{1 + [&(0.333\,33 + 0.002\,25\cos^4 B_f) - \\ &(0.2 - 0.066\,7\cos^2 B_f)z^2]z^2\}z\sin B_f\rho''\end{aligned} \tag{6-54}$$

其中

$$z = \frac{y}{N_f\cos B_f}$$

将1975国际椭球参数代入上式，则得由大地坐标（$B$，$L$）计算平面子午线收敛角 $\gamma$ 的数值公式，即

$$\begin{aligned}\gamma = \{1 + [&(0.333\,32 + 0.006\,78\cos^2 B) - \\ &(0.066\,7 - 0.2\cos^2 B)l^2]l^2\cos^2 B\}l\sin B\rho''\end{aligned} \tag{6-55}$$

其中 $\gamma$ 以秒（″）为单位。

### 6.4.2　方向改正计算

椭球面上的三角网是由大地线组成，大地线在高斯投影平面上的投影是曲线，在平面上解算曲边三角形是相当复杂的，为了在平面上利用平面三角学公式进行计算，须把大地线的投影曲线用其弦线来代替，因此需要在水平方向观测值中加入由于“曲改直”而带来的所谓“方向改正数”。方向改正就是指大地线的投影曲线与连接大地线两端点的弦线

之间的夹角。在传统的大地测量中，三角网是布设国家平面控制网的主要形式，水平方向就成为最大量、最基本的观测元素。而每个方向都必须进行方向改正，因此方向改正计算是三角测量概算中的一项基本工作。

如图 6－12 所示，1*AB*2 为大地线在椭球面上的投影像，其中 *A*，*B* 为无限接近的两点，其长度为 d$\sigma$，*r* 为弧素 d$\sigma$ 的曲率半径，*T* 为弦长 1－2 的方位角。

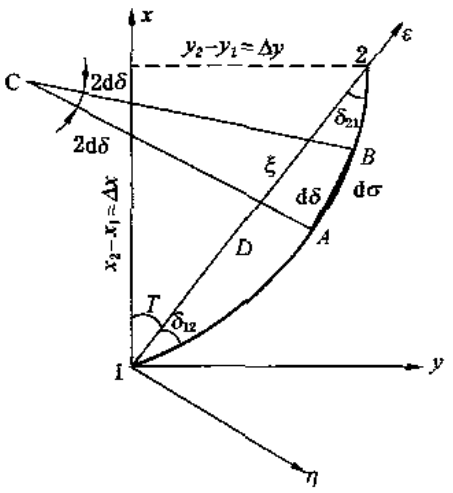


图 6－12　大地线投影像

现建立以 1 为原点的 $\xi$，$\eta$ 坐标系，其中 $\xi$ 轴与弦线 1－2 重合。根据微分学中曲率的计算公式

$$\frac{1}{r}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

若设 d$\sigma$ 和 $\xi$ 轴的夹角为 $\delta$，则根据导数的性质，$\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\tan\delta$，所以

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=1+\tan^2\delta=\frac{1}{\cos^2\delta}$$

代入前式，考虑 $\delta$ 为微小值，可取 $\cos\delta\approx1$，于是

$$\frac{1}{r}=\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}\cos^2\delta=\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2} \tag{6-56}$$

若弧素 d$\sigma$ 与其弦线 *AB* 均成小角 d$\delta$，则其所对应的圆心角为 2d$\delta$。由三角形 *ABC* 可得

$$\mathrm{d}\sigma=r2\mathrm{d}\delta$$

由于 $\delta$ 角很小，可以认为 d$\sigma$＝d$\xi$，此时上式写成

$$\frac{1}{r}=\frac{2\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\xi} \tag{6-57}$$

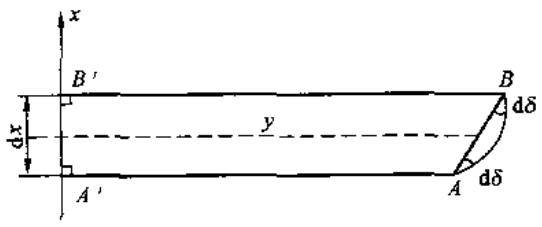


图 6－13　球面交差与方向改正关系

如果自无限接近的两点 *A*，*B* 分别作 *x* 轴的垂直线，交 *x* 轴于 *A'*，*B'* 两点，两点间的坐标差为 d*x*，如图 6－13 所示。由于高斯投影具有保角性，图中四边形 *ABB'A'* 的内角和公式为

$$360°+2\mathrm{d}\delta=360°+\varepsilon$$

式中　$\varepsilon$——四边形 *ABB'A'* 在椭球面上的球面角超。

因为 $\varepsilon$ 的数值不大，故可用近似方法计算。将四边形视为梯形，其面积等于 $F=y\mathrm{d}x$，取椭球的平均曲率为 $R$，根据球面角超计算公式和上列关系，得

$$\varepsilon=\frac{F}{R^2}=\frac{y\mathrm{d}x}{R^2}=2\mathrm{d}\delta$$

式（6－56）、式（6－57）相等，并考虑上式，即得大地线 1*AB*2 的曲率微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}=\frac{y\mathrm{d}x}{R^2\mathrm{d}\xi} \tag{6-58}$$

若用 $x_1$ 和 $y_1$ 表示 1 点的坐标，可以写出弦 1－2 上的动点坐标为

$$x=x_1+\xi\cot T,\quad y=y_1+\xi\sin T$$

又

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}\xi\cos T$$

考虑上列公式，式（6－58）又有如下形式，即

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}=\frac{\cos T}{R^2}(y_1+\xi\sin T) \tag{6-59}$$

其中 $T$ 和 $y_1$ 具有确定值。

对式（6－59）进行两次积分，并将 $R$ 视为常数，取为弦长 1－2 中点处的椭球面平均曲率半径，依次得到

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\cos T}{R^2}\left(y_1\xi+\frac{1}{2}\xi^2\sin T\right)+c_1 \tag{6-60}$$

$$\eta=\frac{\cos T}{R^2}\left(\frac{1}{2}y_1\xi^2+\frac{1}{6}\xi^3\sin T\right)+c_1\xi+c_2 \tag{6-61}$$

利用 1 点的如下特性，确定式（6－61）中的积分常数 $c_1$，$c_2$，由于

$$\xi=0,\ \eta=0,\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\tan\delta_{12}=\delta_{12}$$

将它们代入式（6－60）和式（6－61）得

$$c_1=\delta_{12},\quad c_2=0$$

对于 2 点有：$\eta=0$，$\xi=D$，代入式（6－61）并考虑积分常数得

$$\delta''_{12}=-\frac{\rho''}{2R^2}D\cos T\left(y_1+\frac{D\sin T}{3}\right)$$

注意到 $D\cos T=x_2-x_1$，$D\sin T=y_2-y_1$，最终得

$$\delta''_{12}=\frac{\rho''}{2R^2}(x_1-x_2)\left(y_m+\frac{y_1-y_2}{6}\right) \tag{6-62}$$

其中

$$y_m=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

对于 2－1 方向，同理得其方向改正数

$$\delta''_{21}=\frac{\rho''}{2R^2}(x_2-x_1)\left(y_m+\frac{y_2-y_1}{6}\right) \tag{6-63}$$

式（6－62）和式（6－63）就是方向改正数的计算公式。当两点的横坐标中数 $y_m<250\text{km}$ 时，其计算精度为 0.01″，故通常用于二等三角测量计算。

对于三四等三角测量，边长在 10km 范围内，可用下列简化公式，即

$$\left.\begin{aligned}\delta''_{21}&=\frac{\rho''}{2R^2}(x_1-x_2)y_m\\ \delta''_{12}&=\frac{\rho''}{2R^2}(x_2-x_1)y_m\end{aligned}\right\} \tag{6-64}$$

式（6－64）的计算精度为 0.1″。

### 6.4.3 距离改正计算

将椭球面上的大地线长度 $S$ 改化为高斯投影平面上投影曲线两端点间的弦长 $D$，称为距离改正。$D$ 与 $S$ 的差异，就是距离改正数 $\Delta S$。将地面测量的距离换算到高斯投影平面，或根据高斯平面上的长度换算为实地距离时，都需要计算这个距离改正数。

图 6－14 中 $s$ 为大地线在平面上投影曲线的长度，由于投影曲线上弧素 $\mathrm{d}s$ 与弦线 $D$ 之间的夹角 $\delta$ 非常微小，以至于可以忽略 $s$ 和 $D$ 的长度差异。

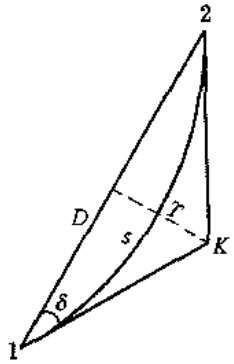



图 6－14　大地投影

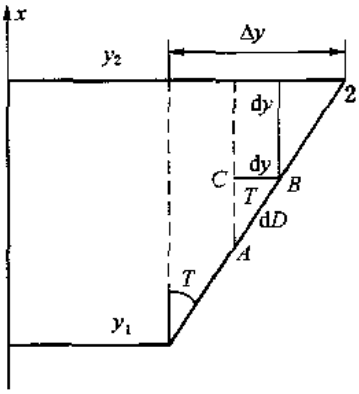



图 6－15　大地线换算到高斯平面上距离改正

投影长度比公式可写为

$$m=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}S}=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}S}$$

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}D}{m}$$

$$S=\int_0^D\frac{\mathrm{d}D}{m} \tag{6-65}$$

其中 $\mathrm{d}D$ 可根据图 6－15 解算三角形 $ABC$ 得出

$$dD = \frac{dy}{\sin T}$$

取式（6－18）中 $m$ 的前两项与上式一起代入式（6－65）得

$$S = \frac{1}{\sin T}\int_{y_1}^{y_2}\left(1 - \frac{y^2}{2R^2}\right)dy$$

上式中的 $R$ 值随纬度 $B$ 的不同而变化。不过椭球扁率较小，这种变化也较小，以致可以视其为固定值，且取其等于大地线中点处的平均曲率半径 $R_m$。这时，上式的积分结果为

$$S = \frac{1}{\sin T}\left[y - \frac{y^3}{6R^2}\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{\sin T}\left[(y_2 - y_1) - \frac{y_2^3 - y_1^3}{6R^2}\right]$$

其中 $$y_2^3 - y_1^3 = (y_2 - y_1)(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2),\ \frac{(y_2 - y_1)}{\sin T} = D$$

于是得

$$S = D\left(1 - \frac{y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2}{6R^2}\right)$$

$$D = S\left(1 + \frac{y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2}{6R^2}\right)$$

其中

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 &= (y_2 + y_1)^2 - y_1y_2 \\ &= \frac{1}{4}[3(y_2 + y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \\ &= 3\left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)^2 \\ &= 3y_m^2 + \frac{1}{4}\Delta y^2 \end{aligned}$$

所以上式可以写为

$$D = S\left(1 + \frac{y_m^2}{2R^2} + \frac{\Delta y^2}{24R^2}\right) \tag{6－66}$$

式中 $R$——测区中点的平均曲率半径；

$y_m$——三角网边长两端点的横坐标平均值。

式（6－66）即为大地线长度 $S$ 归算到高斯平面上直线距离 $D$ 的计算公式，其计算精度可达0.01m，要使计算精度达到0.001m，则可采用更精确的距离改换公式，即

$$D = \left(1 + \frac{y_m^2}{2R^2} + \frac{\Delta y^2}{24R^2} + \frac{y_m^4}{24R^2}\right)S \tag{6－67}$$

式（6－67）对于一等边长的归算完全可满足要求，对于二等边长的归算可略去 $y_m^4$

项，对于三四等边长的归算又可再略去 $\Delta y^2$ 项。

## 6.5 高斯投影坐标换带计算

高斯投影虽然保证了角度投影前后没有变形，但其长度变形仍然存在，且距离中央子午线愈远，长度变形愈大。为了限制高斯投影的长度变形，将椭球面按一定经度的子午线划分成不同的投影带，把投影范围限制在中央子午线东、西两侧一定的狭长带内分别进行投影。由于中央子午线的经度不同，使得椭球面上统一的大地坐标系，分割成为各带独立的平面坐标系。为了解决不同投影带之间测量成果的转换和联系，就需要将一个投影带的平面直角坐标，转换成另外一个投影带的平面直角坐标，简称为高斯投影坐标的换带计算。

以下情况需要进行坐标换带计算：

（1）当控制网位于两个相邻投影带的边缘地区并横跨两个投影带时，为了能在同一带内进行平差计算，必须把控制网起算点的坐标换算到同一个投影带内。

（2）在分带子午线附近地区测图或进行测量工程时，往往需要用到另一带内的控制成果，因此，也需要将这些点的坐标换算到同一带内。

（3）当大比例尺测图时，特别是在工程测量中，为了限制投影变形，常要求采用3°带、1.5°带或任意带投影，而国家控制点成果通常只有6°带坐标，这时就产生了6°带与3°带（或1.5°带、任意带）之间的相互坐标换算问题。

综上所述，高斯投影换带计算是由高斯投影分带所带来的必然结果，没有分带就不会存在换带问题。

高斯投影换带计算，有以下几种情况：①国家6°带坐标在相邻投影带之间的换算（6°→6°带）；②国家6°带坐标换算成3°带坐标（6°→3°带）；③国家3°带坐标在相邻投影带之间的换算（3°→3°带）；④国家6°带（或3°带）坐标换算成任意投影带内的坐标。

3°带的中央子午线中，有半数与6°带的中央子午线重合，另外半数与6°带的分带子午线重合。所以，由6°带到3°带的坐标换带计算分为两种情况：

（1）3°带与6°带的中央子午线重合。如图6－16所示，3°带第41带与6°带第21带的中央子午线重合，中央子午线经度均为123°。既然中央子午线一致，坐标系统也就一致。所以，图6－16中 $P_1$ 点在6°带第21带内的坐标，也就是该点在3°带第41带的坐标。在这种情况下，6°带与3°带之间，不存在坐标换带计算问题。

（2）3°带中央子午线与6°带的分带子午线重合。如图6－16所示，若已知 $P_2$ 点在6°带第21带的坐标，求它在3°带第42带的坐标。由于这两个投影带的中央子午线不同，坐标系统不一致，必须进行坐标换代计算。不过 $P_2$ 点在6°带第21带的坐标与它在3°带第41带的坐标相同，所以6°带到3°带的坐标换带计算，也可以看做是两个3°带之间的坐标换带计算。

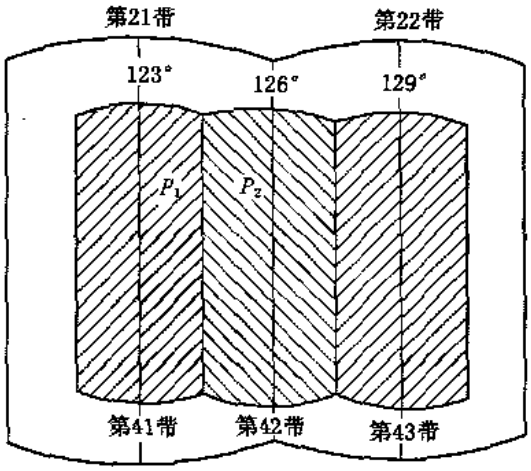



图 6-16　不同投影关系

高斯投影坐标换带计算的方法有很多种，过去通常应用《高斯－克吕格坐标换带表》进行换带计算，计算量大，程序繁杂。随着计算机的广泛应用，目前已广泛应用高斯投影坐标正、反算公式进行换带计算，它具有精度高、通用和便于计算等优点。

利用高斯投影坐标正、反算公式进行换带计算的实质就是把椭球面上的大地坐标作为过渡坐标。计算程序如下：首先将某投影带内已知点的平面坐标（$x_1$，$y_1$），按高斯投影坐标反算公式求得其在椭球面上的大地坐标（$B$，$L$）；然后根据纬度 $B$ 和所需换算的投影带的中央子午线经度 $L_0$，计算该点在新投影带内的经差$\left(l=\dfrac{L-L_0}{\rho}\right)$，再按高斯投影坐标正算公式该点在新投影带内的高斯平面坐标（$x_2$，$y_2$）。至此，就完成了高斯投影坐标的换带计算问题。

利用高斯投影坐标正反算公式进行坐标换带计算，理论上最简明严密，精度最高，通用性最强。它不仅适用于6°→6°带、6°→3°带、3°→3°带相互之间的邻带坐标换算，而且也适用于任意带之间的坐标换算。虽然计算的工作量稍大一些，但当使用计算机计算时，计算工作量已不成问题。因此，该法已成为高斯投影坐标换带计算的最基本方法。

## 6.6　通用横轴墨卡托投影和兰勃脱投影简介

高斯投影具有许多优点，我国和世界上许多国家都采用它作为大地测量和地图投影的数学基础。但是，高斯投影也存在长度、面积变形较大的缺点。特别是纬度愈低、愈靠近投影带边缘的地区，投影变形过大。我国地处中低纬度地区，过大的投影变形，显然不能满足大比例尺测图和工程测量的精度要求。本节将简单介绍横轴墨卡托投影和兰勃脱投影。

### 6.6.1 通用横轴墨卡托投影概念

墨卡托投影（等角正圆柱投影）是由荷兰制图学家墨卡托创制，从1569年起就开始用于编制海图。常用的是等角正割圆柱投影，圆柱与椭球面上的两条纬线相割（称为标准纬线，其纬度为 $\pm B_0$），标准纬线投影后不产生变形，两条标准纬线间的区域，投影后产生负变形，两条标准纬线以外的区域投影后产生正变形，距离标准纬线越远，投影变形越大。赤道上的长度比最小，两极的长度比最大。墨卡托投影具有地球椭球面上的等角航线投影后成为直线的特性，等角航线是指椭球面上各点的大地方位角均相同的一条曲线。因此，普遍采用墨卡托投影编制海图，以便于领航。

通常横轴墨卡托投影（Universal Transverse Mercator Projection）取其前面3个英文单词的大写字母而称UTM投影。从几何意义上讲，UTM投影属于横轴等角割椭圆柱投影（图6-17），高斯克吕格投影为横轴等角切椭圆柱投影，两者非常相似。满足等角条件和中央子午线投影后成为直线，并为纵坐标轴，只是在通用横轴墨卡托投影中，中央子午线投影长度比不再等于1，而是等于0.999 6，投影后两条割线上没有变形，它的平面直角系与高斯投影相同，且和高斯投影坐标有一个简单的比例关系，因而有的文献上也称它为 $m_0=0.999\ 6$ 的高斯投影。该投影由美国军事测绘局1938年提出，1945年开始采用。已被许多国家、地区采用作为大地测量和地形图的投影基础。

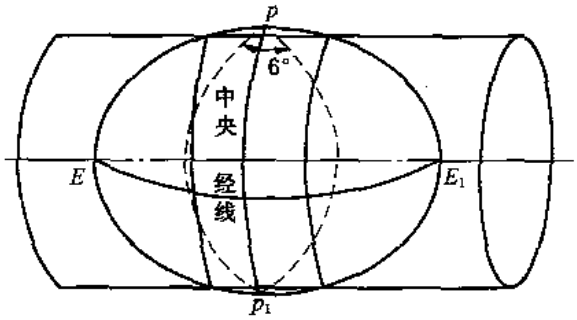



图6-17 UTM投影

UTM投影的基本公式可由高斯投影坐标计算公式直接写出正算公式，即

$$\left.\begin{aligned} x &= 0.999\ 6\left[X+\frac{l^2}{2}N\sin B\cos B+\frac{l^4}{24}N\sin B\cos^3 B(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4)+\right.\\ &\left.\frac{l^6}{720}N\sin B\cos^5 B(61-58t^2+t^4)\right]\\ y &= 0.999\ 6\left[lN\cos B+\frac{l^3}{6}N\cos^3 B(1-t^2+\eta^2)+\right.\\ &\left.\frac{l^5}{120}N\cos^5 B(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58\eta^2t^2)\right] \end{aligned}\right\} \quad (6-68)$$

长度比公式为

$$m = 0.999\,6\left[1 + \frac{l^2}{2}\cos^2 B(1+\eta^2) + \frac{l^4}{24}\cos^4 B(5-4t^2)\right] \tag{6-69}$$

平面子午线收敛角公式为

$$r = l\sin B\left[1 + \frac{l^2}{3}\cos^2 B(1+3\eta^2+2\eta^4) + \frac{l^4}{15}\cos^4 B(2-t^2)\right] \tag{6-70}$$

UTM 投影与高斯投影之间是一种相似变换的关系，$x$，$y$ 坐标只有一个常系数 0.999 6 的差异。

由于高斯投影存在着比较大的长度变形，导致面积变形也比较大。在纬度 30°以下的 6°带边缘地区，长度变形值超过了千分之一。而对于 3°带边缘地区，长度变形值也仅减小至万分之三左右。

UTM 投影采用了 0.999 6 作为中央子午线的长度比，使整个投影带的长度比普遍地减小了万分之四，以至整个 6°带边缘地区的长度变形都小于千分之一，而对于 3°带而言，边缘地区的长度变形小于中央子午线上万分之四的长度变形。

在 UTM 投影中，横轴椭圆柱面与地球椭球面的两条割线（在赤道上离中央子午线约 180km，或经差约 ±1°40′）上没有任何变形，在这两条割线之间长度变形为负值，中央子午线上长度变形为 −0.000 4，在两条割线以外长度变形为正值。

表 6−1 列出了在我国范围内（纬度 20°～60°），经度差为 0°、1.5°、3°的高斯投影及 UTM 投影的长度变形，UTM 投影的长度变形以括号中的数字来表示。

表 6−1　高斯投影与 UTM 投影的长度变形比较

| $B$ \ $l$ | 0° | 1.5° | 3° |
|---|---|---|---|
| 60° | 0 (0.000 40) | 0.000 09 (−0.000 31) | 0.000 34 (−0.000 06) |
| 50° | 0 (0.000 40) | 0.000 14 (−0.000 26) | 0.000 57 (0.000 17) |
| 40° | 0 (0.000 40) | 0.000 20 (−0.000 20) | 0.000 81 (0.000 41) |
| 30° | 0 (0.000 40) | 0.000 26 (−0.000 14) | 0.001 03 (0.000 63) |
| 20° | 0 (0.000 40) | 0.000 30 (−0.000 10) | 0.001 22 (0.000 82) |

由表 6−1 可以看出，UTM 投影在 6°带边缘的长度变形，不像高斯投影那样都大于或等于零，而是有正有负，并且比高斯投影的长度变形显著减小，尤其是在低纬度地区。但在 3°带边缘的长度变形，UTM 投影的最大长度变形发生在中央子午线上，达到万分之四，普遍高于高斯投影，而且均为负值。因此，若按照 3°带进行投影，则采用 UTM 投影不比高斯投影有利。

目前许多国家和地区采用 UTM 投影，用于全球自北纬 84°至南纬 80°之间地区的制

图，可作为对高斯投影的改进。

### 6.6.2 兰勃脱投影概述

#### 6.6.2.1 兰勃脱投影基本概念

我国在新中国成立之前曾采用兰勃脱（Lambert）割圆锥投影作为全国统一投影。现在世界上仍有不少国家，特别是中纬度地区的国家仍采用兰勃脱圆锥投影作为地图制图和大地测量的基本投影，为此对这种投影作一简要介绍。

兰勃脱投影是正形正轴圆锥投影。如图 6－18a、图 6－18b 所示，设想用一个圆锥套在地球椭球面上，使圆锥轴与椭球自转轴相一致，使圆锥面与椭球面的一条纬线（纬度 $B_0$）相切，按照正形投影的一般条件和兰勃脱投影的特殊条件，将椭球面上的纬线投影到圆锥面上成为同心圆，子午线投影到圆锥面上成为从圆心发出的辐射直线，然后沿圆锥面某条母线（一般为中央子午线 $L_0$），将圆锥面切开而展成平面，从而实现了兰勃脱切圆锥投影。如果圆锥面与椭球面上两条纬线（纬度分别为 $B_1$ 及 $B_2$）相割，则称之为兰勃脱割圆锥投影，如图 6－19a、图 6－19b 所示。

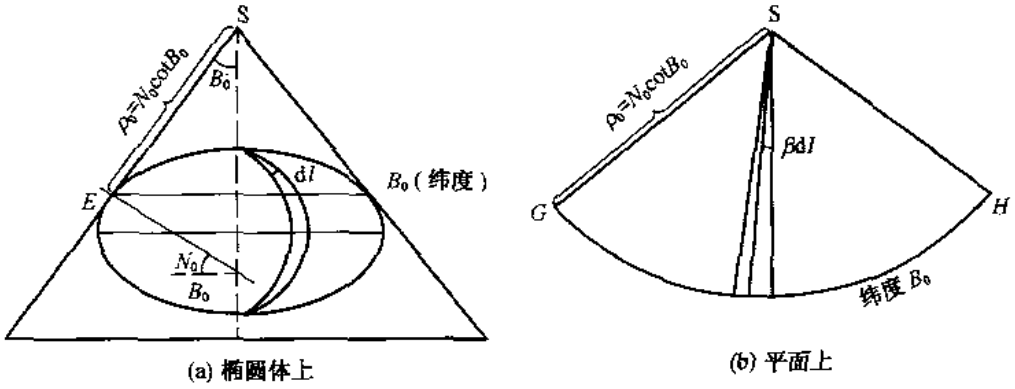



图 6－18　兰勃脱投影示意

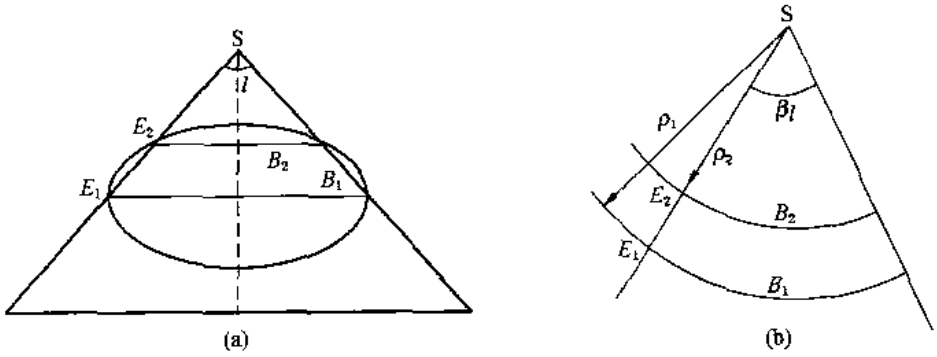



图 6－19　兰勃脱割圆锥投影

6.6.2.2　兰勃脱切圆锥投影直角坐标系的建立

圆锥面与椭球面相切的纬线（纬度 $B_0$）称之为标准纬线。将中央子午线的投影作为该投影平面直角坐标系的纵坐标轴 $x$；将中央子午线与标准纬线相交的投影点作为坐标原点 $O$，过原点 $O$ 与标准纬线投影相切的直线，即从原点 $O$ 作 $x$ 轴的垂线，作为该投影直角坐标系 $y$ 轴指向东为正，从而构成兰勃脱切圆锥投影平面直角坐标系（图 6－20）。很显然，在该坐标系中任意点 $P$ 的坐标（$x$，$y$）与极坐标有如下关系式：

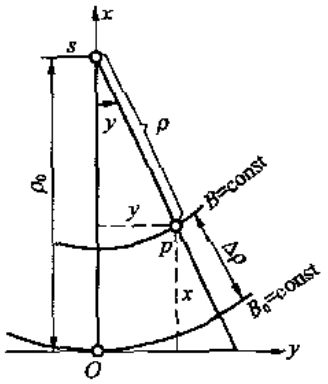


图 6－20　兰勃脱切圆锥投影平面直角坐标系

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho_0 - \rho\cos\gamma \\ y &= \rho\sin\gamma \end{aligned}\right\} \tag{6-71}$$

式中　$\rho_0$——标准纬线的极距，由图 6－20 可知 $\rho_0 = N_0\cot B_0$；

$\rho$——$P$ 点的极径，它是 $P$ 点纬度 $B$ 的函数，$\rho = f(B)$；

$\gamma$——$P$ 点的子午线收敛角，它是经差 $l$ 的函数，$\gamma = \beta l$，$\beta$ 为兰勃脱投影条件所确定的常系数。

根据长度比的定义，沿子午线方向的长度比为

$$m_B = -\frac{\mathrm{d}\rho}{M\mathrm{d}B} \tag{6-72}$$

沿纬线方向的长度比为

$$m_L = \frac{\rho\mathrm{d}\gamma}{N\cos B\mathrm{d}l} = \frac{\rho\beta\mathrm{d}l}{N\cos B\mathrm{d}l} = \frac{\rho\beta}{N\cos B} \tag{6-73}$$

在正形投影中，要求以上经、纬线方向上的长度比相等，即

$$m = -\frac{\mathrm{d}\rho}{M\mathrm{d}B} = \frac{\rho\beta}{N\cos B}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\beta\frac{M\mathrm{d}B}{N\cos B} \tag{6-74}$$

因为

$$\mathrm{d}q = \frac{M\mathrm{d}B}{N\cos B}$$

式（6－74）可写为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\beta\mathrm{d}q \tag{6-75}$$

将式（6－75）两端积分得

$$\ln\rho = -\beta\Delta q + \ln k$$

或
$$\rho = ke^{-\beta\Delta q} \tag{6-76}$$
式中 $k$——积分常数；

$e$——自然对数底。

如果确定了公式中的 $\Delta q$ 及常数 $\beta$ 和 $k$，那么，就可以计算任意点的极径 $\rho$，进而可以根据式（6－71）计算该点的平面直角坐标（$x$，$y$）。

6.6.2.3 $\Delta q$，$\beta$ 和 $k$ 的计算公式

由于
$$q = q_0 + \Delta q = f(B_0 + \Delta B) \tag{6-77}$$
将 $P$ 点的等量纬度 $q$ 在标准纬线的纬度 $B_0$ 处展开成级数形式有
$$\Delta q = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}B}\right)_0 \Delta B + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}B^2}\right)_0 \Delta B^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{d}^3 q}{\mathrm{d}B^3}\right)_0 \Delta B^3 + \cdots$$
其中
$$\Delta B = B - B_0$$
设
$$t_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^n q}{\mathrm{d}B^n}\right)_0 \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$
则前式可写成
$$\Delta q = t_1\Delta B + t_2\Delta B^2 + t_3\Delta B^3 + t_4\Delta B^4 + t_5\Delta B^5 + \cdots \tag{6-78}$$
根据
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}B} = \frac{M}{N\cos B},\quad \frac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}B} = -2\eta^2\tan B$$
逐次求导，可依次得
$$\left.\begin{aligned}
t_1 &= \frac{1}{\cos B_0}(1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6)\\
t_2 &= \frac{1}{2\cos B_0}\tan B_0(1 + \eta_0^2 - 3\eta_0^4)\\
t_3 &= \frac{1}{6\cos B_0}(1 + 2\tan B_0 + \eta_0^2 - 3\eta_0^4 + 6\eta_0^4\tan^2 B_0)\\
t_4 &= \frac{1}{24\cos B_0}\tan B_0(5 + 6\tan^2 B_0 - \eta_0^2)\\
t_5 &= \frac{1}{120\cos B_0}(5 + 28\tan^2 B_0 + 24\tan^4 B_0)
\end{aligned}\right\} \tag{6-79}$$
式（6－78）即为由大地纬度差 $\Delta B$ 计算等量纬度差 $\Delta q$ 的公式。

同理，可求出式（6－78）的反算公式为
$$\Delta B = t_1'\Delta q + t_2'\Delta q^2 + t_3'\Delta q^3 + t_4'\Delta q^4 + t_5'\Delta q^5 + \cdots \tag{6-80}$$
其中

$$\left.\begin{aligned}
t_1' &= \cos B_0(1+\eta_0^2)\\
t_2' &= \frac{1}{2}\cos^2 B_0 \tan B_0(-1-4\eta_0^2-3\eta_0^4)\\
t_3' &= \frac{1}{6}\cos^3 B_0(-1+\tan^2 B_0-5\eta_0^2+13\eta_0^2\tan^2 B_0-7\eta_0^4+27\eta_0^4\tan^2 B_0)\\
t_4' &= \frac{1}{24}\cos^4 B_0 \tan B_0(5-\tan^2 B_0+56\eta_0^2-40\eta_0^2\tan^2 B_0)\\
t_5' &= \frac{1}{120}\cos^5 B_0(5-18\tan^2 B_0+\tan^4 B_0)
\end{aligned}\right\} \quad (6-81)$$

式（6－80）即为由等量纬度差 $\Delta q$ 计算大地纬度差 $\Delta B$ 的公式。

兰勃脱切圆锥投影 $\beta$ 和 $k$ 的计算公式为

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= \sin B_0\\
k &= N_0 \cot B_0 e^{q_0 \sin B_0}
\end{aligned}\right\} \quad (6-82)$$

兰勃脱割圆锥投影 $\beta$ 和 $k$ 的计算公式为

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{q_2-q_1}\ln\frac{N_1\cos B_1}{N_2\cos B_2}\\
K &= \frac{N_1\cos B_1}{\beta e^{-\beta q_1}} = \frac{N_2\cos B_2}{\beta e^{-\beta q_2}}
\end{aligned}\right\} \quad (6-83)$$

6.6.2.4 兰勃脱投影坐标正反算公式

当已知某点的大地坐标（$B$，$L$），计算其在兰勃脱投影平面上的直角坐标（$x$，$y$）的正算公式为

$$\left.\begin{aligned}
\gamma &= \beta l\\
\rho &= \rho_0 e^{\beta(q_0-q)}\\
x &= \rho_0-\rho\cos\gamma\\
y &= \rho\sin\gamma
\end{aligned}\right\} \quad (6-84)$$

当进行切圆锥投影时，$\beta$ 和 $k$ 按式（6－82）计算；当为割圆锥投影时，$\beta$ 和 $k$ 按式（6－83）计算，再计算 $\rho_1$，$\rho_2$，一般取 $\rho_2=\rho_0$。

当已知某点在兰勃脱投影平面上的直角坐标$(x,y)$，计算其大地坐标$(B,L)$的反算公式为

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma = \arctan\frac{y}{\rho_0-x},\quad l=\frac{\gamma}{\beta},\quad L=L_0\\
&\rho = \sqrt{(\rho_0-x)^2+y^2}\\
&\Delta q = q-q_0 = -\frac{1}{\beta}\ln\frac{\rho}{\rho_0}\\
&\Delta B = B-B_0 = t_1'\Delta q+t_2'\Delta q^2+t_3'\Delta q^3+t_4'\Delta q^4+t_5'\Delta q^5
\end{aligned}\right\} \quad (6-85)$$

其中$\beta$和$k$的计算与正算时一样。

当采用兰勃脱投影时，除了坐标的正反算外，也需要将椭球面上的大地线方向及长度归算到投影平面上，改化为平面方向和直线距离，然后按平面坐标公式进行计算。这些方向及长度的归算方法，公式及步骤，与高斯投影时相似，下面给出其简化计算公式。

方向改正数计算公式为

$$\begin{aligned}\delta''_{12} &= \frac{\rho''}{6R_0^2}(y_2-y_1)(2x_1+x_2) \\ &= \delta_0(y_2-y_1)(2x_1+x_2)10^{-10}\end{aligned} \tag{6-86}$$

距离改正数计算公式为

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{S}{6R_0^2}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2) \\ &\approx \frac{S}{2R_0^2}x_m^2\end{aligned} \tag{6-87}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} R_0^2 &= M_0N_0 = \frac{N_0^2}{V_0^2},\ \delta_0 = \frac{\rho''}{6R_0^2}10^{10} \\ x_m &= \frac{1}{2}(x_1+x_2),\ \Delta_0 = \frac{10^{15}}{2R_0^2}\end{aligned}\right\} \tag{6-88}$$

6.6.2.5　兰勃脱投影长度比及投影带划分

将长度比公式

$$m = \frac{\beta\rho}{N\cos B}$$

在$\rho_0$处展开成$\Delta\rho$的幂级数，即

$$m = 1+\frac{V_0^2}{2N_0^2}\Delta\rho^2+\frac{V_0^2\tan B_0}{6N_0^3}(1-4\eta_0^2)\Delta\rho^3+\frac{V_0^2}{24N_0^4}(1+3\tan^2B_0-3\eta)\Delta\rho^4+\cdots$$

如将$\Delta\rho = x-\frac{y^2}{2\rho_0}-\frac{xy^2}{2\rho_0^2}+\cdots$代入上式得

$$m = 1+\frac{V_0^2}{2N_0^2}x^2+\frac{V_0^2\tan B_0}{6N_0^3}(1-4\eta_0^2)x^3+\frac{V_0^2\tan B_0}{2N_0^3}xy^2+\cdots \tag{6-89}$$

式（6-89）为用直角坐标计算长度比的公式，当$B=B_0$时，$x=0$，则$m_0=1$。说明在标准纬线$B_0$处，长度比为1，没有变形。当离开标准纬线时，就会产生投影变形，且随着与标准纬线的纬度差$\Delta B$的增大，长度比$m$将迅速增大，长度变形（$m-1$）也迅速增大。因此，为了限制长度变形，必须限制标准纬线南北的投影宽度，故兰勃脱投影采用按纬度进行分带投影的方法。

对于兰勃脱割圆锥投影，其南标准纬线（$B_1$）上的长度比为

$$m_1 = \frac{\beta\rho_1}{N_1\cos B_1} \tag{6-90}$$

将 $\rho_1 = ke^{-\beta q_1}$，$\beta = \frac{N_1\cos\beta_1}{ke^{-\beta q_1}}$ 代入式（6-90）得

$$m_1 = 1$$

同理，北标准纬线（$B_2$）上的长度比 $m_2$ 也等于1。在兰勃脱割圆锥投影中，南、北标准纬线上的长度比都等于1，即在这两条标准纬线上没有长度变形。显然，当点位于区域 $B_1 < B < B_2$ 时，长度比 $m$ 必小于1；当点位于两标准纬线平均纬度的平行圈上时，长度比 $m$ 达到最小；当点位于两标准纬线之外的区域，即 $B < B_1$ 或 $B > B_2$ 时，长度比 $m$ 必大于1。同样，为限制长度变形，也必须限制投影区域的南北宽度，即采用按纬度进行分带投影。

由上可知，兰勃脱投影的长度比 $m$ 与经差无关。

为了限制长度变形，可按纬圈进行分带投影。即取不同的圆锥与各投影带的标准纬线相切或相割，分别进行投影，然后再将各投影带拼接成整体。投影带的纬度宽，即纬度差，过大过小都不好。纬度宽过大，长度变形大，影响测图及工程建设应用；纬度宽过小，长度变形虽小，但给测量计算及投影带的拼接等带来诸多的麻烦和不便。为此，每个国家应根据自己的实际情况，适当地选取投影带的宽度。

我国新编百万分之一地图采用兰勃脱割圆锥投影，按纬差4°进行分带，自赤道由南向北将我国分成14个投影带，采取每带的中纬和边纬的长度变形绝对值相等的条件确定投影常数。

综上所述，兰勃脱投影是正形正袖圆锥投影，它的长度变形（$m-1$）与经度无关，但随纬差 $\Delta B$，即纵坐标 $x$ 的增大而迅速增大，为限制长度变形，采用按纬度的分带投影，因此，这种投影适宜南北狭窄，东西延伸的国家和地区。但与高斯投影相比较，兰勃脱投影子午线收敛角有时过大，精密的方向改化和距离改化公式也较高斯投影要复杂，故目前国际上还是建议采用高斯投影。

# 7 坐标转换与坐标系的选择

大地测量常用的基本坐标系包括大地坐标系、空间直角坐标系、平面坐标系等，这些坐标系间的关系及转换是大地测量计算中非常重要的问题，同时，如何正确地选择坐标系也是一个重要的现实问题，本章将重点讨论以上内容。

## 7.1 大地坐标系之间换算

对于不同大地坐标系的换算，除了包含3个平移参数、3个旋转参数和1个尺度变化参数外，还包含两个地球椭球元素变化参数。下面将推导不同大地坐标系的换算公式。

由于

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+H)\cos B\cos L \\ (N+H)\cos B\sin L \\ [N(1-e^2)+H]\sin B \end{bmatrix}$$

取全微分可得

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}X \\ \mathrm{d}Y \\ \mathrm{d}Z \end{bmatrix} = J\begin{bmatrix} \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}B \\ \mathrm{d}H \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} \tag{7-1}$$

其中

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial L} & \frac{\partial X}{\partial B} & \frac{\partial X}{\partial H} \\ \frac{\partial Y}{\partial L} & \frac{\partial Y}{\partial B} & \frac{\partial Y}{\partial H} \\ \frac{\partial Z}{\partial L} & \frac{\partial Z}{\partial B} & \frac{\partial Z}{\partial H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(N+H)\cos B\sin L & -(M+H)\sin B\cos L & \cos B\cos L \\ (N+H)\cos B\cos L & -(M+H)\sin B\sin L & \cos B\sin L \\ 0 & (M+H)\cos B & \sin B \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial X}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Z}{\partial a} & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N}{a}\cos B\cos L & \frac{M}{1-\alpha}\cos B\cos L\sin^2 B \\ \frac{N}{a}\cos B\sin L & \frac{M}{1-\alpha}\cos B\sin L\sin^2 B \\ \frac{N}{a}(1-e^2)\sin B & -\frac{M}{1-\alpha}\sin B(1+\cos^2 B-e^2\sin^2 B) \end{bmatrix} \tag{7-2}$$

式（7-2）两端乘上 $J^{-1}$ 并加以整理可得

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}B \\ \mathrm{d}H \end{bmatrix} = J^{-1}\begin{bmatrix} \mathrm{d}X \\ \mathrm{d}Y \\ \mathrm{d}Z \end{bmatrix} - J^{-1}A\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} \tag{7-3}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}X \\ \mathrm{d}Y \\ \mathrm{d}Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}B \\ \mathrm{d}H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \\ B_2 \\ H_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ B_1 \\ H_1 \end{bmatrix}$$

顾及式（7-2）以及

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin L}{(N+H)\cos B} & \dfrac{\cos L}{(N+H)\cos B} & 0 \\ -\dfrac{\sin B\cos L}{M+H} & -\dfrac{\sin B\sin L}{M+H} & \dfrac{\cos B}{M+H} \\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B \end{bmatrix} \tag{7-4}$$

式（7-3）可写成

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}B \\ \mathrm{d}H \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin L}{(N+H)\cos B}\rho'' & \dfrac{\cos L}{(N+H)\cos B}\rho'' & 0 \\ -\dfrac{\sin B\cos L}{M+H}\rho'' & -\dfrac{\sin B\sin L}{M+H}\rho'' & \dfrac{\cos B}{M+H}\rho'' \\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \tan B\cos L & \tan B\sin L & -1 \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \dfrac{Ne^2\sin B\cos B\sin L}{\rho''} & \dfrac{Ne^2\sin B\cos B\cos L}{\rho''} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{N}{M+H}e^2\sin B\cos B\rho'' \\ N(1-e^2\sin^2 B)+H \end{bmatrix} m + \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{N}{(M+H)a}e^2\sin B\cos B\rho'' & \dfrac{M(2-e^2\sin^2 B)}{(M+H)(1-\alpha)}\sin B\cos B\rho'' \\ -\dfrac{N}{a}(1-e^2\sin^2 B) & \dfrac{M}{1-\alpha}(1-e^2\sin^2 B)\sin^2 B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7-5}$$

式（7－5）通常称为广义大地坐标微分公式或广义变换椭球微分公式。如略去旋转参数和尺度变化参数的影响，即简化为一般的大地坐标微分公式。

根据3个以上公共点的两套大地坐标值，可列出9个以上式（7－5）方程，采用最小二乘原理可求出其中8个转换参数（$\Delta X_0$，$\Delta Y_0$，$\Delta Z_0$，$\varepsilon_X$，$\varepsilon_Y$，$\varepsilon_Z$，$\Delta a$，$\Delta\alpha$）。

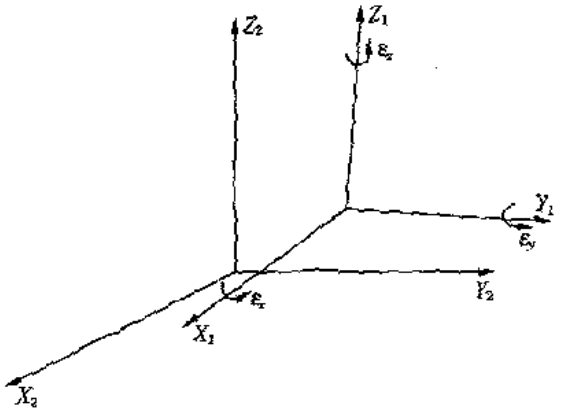



图7－1 两个空间直角坐标系关系

## 7.2 空间直角坐标系之间换算

下面讨论既有旋转又有平移的两个空间直角坐标系的坐标换算。如图7－1所示，图中存在3个平移参数和3个旋转参数，顾及两个坐标系尺度不一致，因而还存在一个尺度变换参数，共计7个参数。相应的坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = (1+m)\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} \tag{7-6}$$

式中 $\Delta X_0$，$\Delta Y_0$，$\Delta Z_0$——3个平移参数；

$\varepsilon_X$，$\varepsilon_Y$，$\varepsilon_Z$——3个旋转参数；

$m$——尺度变化参数。

式（7－6）为两个不同空间直角坐标系的转换模型，其中包括7个转换参数，即$\Delta X_0$，$\Delta Y_0$，$\Delta Z_0$，$\varepsilon_X$，$\varepsilon_Y$，$\varepsilon_Z$，$m$。为了求得这7个转换参数，至少需要3个公共点，当多于3个公共点时，可按最小二乘法求得7个参数的最或然值。

令$a_1 = m+1$，$a_2 = a_1\varepsilon_X$，$a_3 = a_1\varepsilon_Y$，$a_4 = a_1\varepsilon_Z$，则可将式（7－6）写为

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}_{\text{转换值}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \tag{7-7}$$

取
$$\begin{bmatrix} V_{X_2} \\ V_{Y_2} \\ V_{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}_{已知值} - \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}_{转换值} \tag{7-8}$$

则可写出如下形式的误差方程：

$$\begin{bmatrix} V_{X_2} \\ V_{Y_2} \\ V_{Z_2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}_{已知值} \tag{7-9}$$

改写成矩阵形式为
$$V = B\delta X + L \tag{7-10}$$

式中 $\delta X = (\Delta X_0,\ \Delta Y_0,\ \Delta Z_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)^T$——待求的转换参数向量；

$V = (V_{X_2},\ V_{Y_2},\ V_{Z_2})^T$——改正数向量；

$L = (X_2,\ Y_2,\ Z_2)^T_{已知值}$——常数项向量；

$B$——系数阵。

根据最小二乘法 $V^TPV = \min$ 的原则，可列出法方程为
$$B^TPB\delta X + B^TPL = 0 \tag{7-11}$$

其解为
$$\delta X = -(B^TPB)^{-1}B^TPL \tag{7-12}$$

由 $\delta X$ 可进一步求得

$$m = a_1 - 1,\ \varepsilon_X = \frac{a_2}{a_1},\ \varepsilon_Y = \frac{a_3}{a_1},\ \varepsilon_Z = \frac{a_4}{a_1}。$$

由于公共点的坐标存在误差，求得的转换参数将受其影响。公共点坐标误差对转换参数的影响与点位的几何分布及点数的多少有关，因而为了求得较好的转换参数，应选择一定数量的精度较高且分布较均匀并有较大覆盖面的公共点。

当利用3个以上的公共点求解转换参数时存在多余观测，原因是公共点误差的影响使得转换的公共点坐标值与已知值不完全相同，而实际工作中又往往要求所有已知点的坐标值保持固定不变。为了解决这一矛盾，可采用配置法，将公共点的转换值改正为已知值，对非公共点的转换值进行相应的配置。具体方法是：

（1）计算公共点转换值的改正数 $V$ = 已知值 − 转换值，公共点的坐标采用已知值。

（2）采用配置法计算非公共点转换值的改正数，即

$$V' = \frac{\sum_{1}^{n} P_i V_i}{\sum_{1}^{n} P_i}$$

式中 $n$——公共点的个数；

$P$——权。

可根据非公共点的距离（$S_i$）来定权，常取 $P_i = \frac{1}{S_i^2}$。

## 7.3 大地坐标与空间三维直角坐标的关系及其转换

大地坐标系用大地纬度 $B$、大地经度 $L$ 和大地高 $H$ 来表示点的位置。这种坐标系是经典大地测量的一种通用坐标系。根据地图投影理论，大地坐标系可以通过一定的投影转化为投影平面上的直角坐标系，为地形测图和工程测量提供控制基础。同时，这种坐标系还是研究地球形状大小的一种有用坐标系，所以大地坐标系在大地测量中始终有着重要的作用。

### 7.3.1 大地坐标与空间三维直角坐标的关系

空间大地直角坐标系是一种以地球质心为原点的右手直角坐标系，一般用 $X$，$Y$，$Z$ 表示点的位置。由于人造地球卫星及其他宇宙飞行器围绕地球运转时，其轨道平面随时通过地球质心，对他们的跟踪测量也以地球质心为坐标原点，所以空间大地直角坐标系是卫星大地测量中一种常用的基本坐标系。现今，利用卫星大地测量手段，可以迅速地测定点的空间大地直角坐标，其广泛应用于导航定位等空间技术。同时，经过数学变换，还可以求出点的大地坐标，用以加强和扩展地面大地网，进行岛屿和洲际联测，使传统的大地测量方法发生了深刻地变化，所以说，空间大地直角坐标系对现今大地测量的发展具有重要的意义。

如图 7－3 所示，$P$ 点的位置用空间大地直角坐标（$X$，$Y$，$Z$）表示，其相应的大地坐标为（$B$，$L$）。

将图 7－3 与图 7－2 加以比较可见，如图 7－3 所示的子午椭圆平面相当于如图 7－2 所示的 $ONP$ 平面，其中 $PP_2 = Z$，相当于如图 7－2 所示的 $Y$；$OP_2$ 相当于如图 7－2 所示的 $X$。两平面的经度 $L$ 可视为相同，等于 $\angle P_1 OP_2$，于是可以直接写出

$$X = x\cos L,\quad Y = x\sin L,\quad Z \approx Y$$

得

$$\left.\begin{aligned} X &= N\cos B\cos L \\ Y &= N\cos B\sin L \\ Z &= N(1-e^2)\sin B \end{aligned}\right\} \tag{7-13}$$

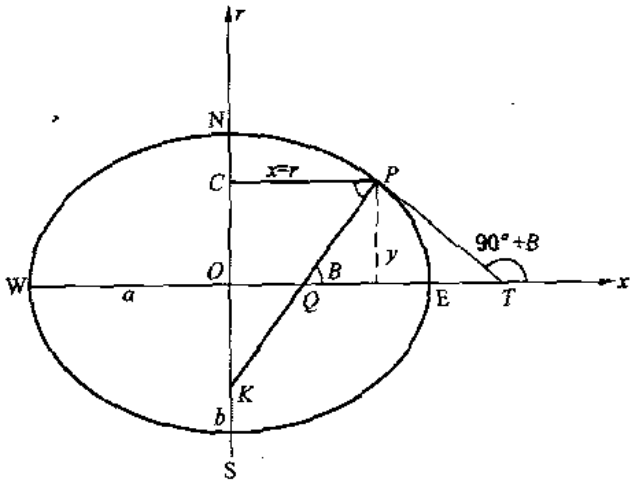



图 7－2　椭球剖面

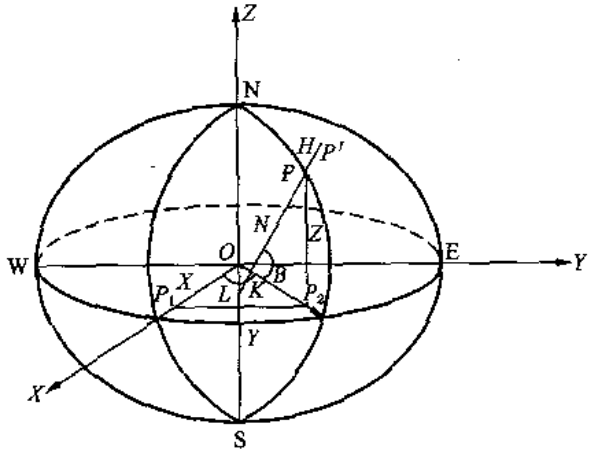



图 7－3　大地坐标与空间直角坐标系关系

式中　$N$——卯酉圈曲率半径；

　　$e$——子午椭圆第一偏心率。

式（7－13）表明了两种基本坐标系之间的关系。

### 7.3.2　大地坐标系和空间大地直角坐标系的转换

7.3.2.1　由大地坐标求空间大地直角坐标

当已知椭球面上任一点 $P$ 的大地坐标（$B$，$L$）时，可以按式（7－13）直接求该点的空间大地直角坐标（$X$，$Y$，$Z$）。

如果 $P$ 点恰好不位于椭球面上，例如，位于大地高为 $H$ 的 $P'$ 点处，此时由大地坐标求空间大地直角坐标的公式则为

$$\left.\begin{aligned} X &= (N+H)\cos B\sin L \\ Y &= (N+H)\cos B\sin L \\ Z &= [N(1-e^2)+H]\sin B \end{aligned}\right\} \tag{7-14}$$

*7.3.2.2 由空间大地直角坐标求大地坐标*

当已知 $X$，$Y$，$Z$ 反求 $B$，$L$，$H$ 时，可以采用直接解法或迭代解法。

由式（7-14）第一、第二式得

$$L = \arctan\frac{Y}{X} \tag{7-15}$$

利用式（7-15）可直接由空间大地直角坐标 $X$，$Y$ 求出大地经度 $L$。

为求出 $B$ 和 $H$，还应对公式做些变化，以适应迭代计算的需要。

由式（7-14）第一、第三式得

$$\tan B = \frac{(N+H)Z\cos L}{[N(1-e^2)+H]X}$$

其中 $\cos L$ 仍由式（7-14）得出

$$\cos L = \frac{X}{(N+H)\cos B} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

代入前式

$$B = \arctan\left[\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(1-\frac{e^2N}{N+H}\right)^{-1}\right] \tag{7-16}$$

又由式（7-14）得

$$H = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos B} - N \tag{7-17}$$

式（7-16）、式（7-17）就是求 $B$，$H$ 的迭代公式。迭代开始时设 $N_0 = a$

$$H_0 = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} - \sqrt{ab}$$

$$B_0 = \arctan\left[\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(1-\frac{e^2N_0}{N_0+H_0}\right)^{-1}\right]$$

随后，每次迭代按下列公式进行

$$N_i = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_{i-1}}}$$

$$H_i = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos B_{i-1}} - N_i$$

$$B_i = \arctan\left[\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(1-\frac{e^2 N_i}{N_i+H_i}\right)^{-1}\right]$$

直至 $B_i - B_{i-1}$小于要求的限值为止。一般要求 $H$ 精确至 0.001、$B$ 精确至 0.000 01″时，需要迭代 4 次。

## 7.4 我国的坐标系统与平面坐标系统之间的转换

我国测绘生产实践中广泛采用高斯平面直角坐标统。但是，由于所采用的参考椭球不同、依据的基准不同、椭球的定位方法不同，又会出现不同的平面直角系统。这些坐标系统的情况以及不同坐标系统之间的转换，就是以下所要介绍的主要内容，涉及的有关概念和知识，同样具有重要的实用价值。

### 7.4.1 我国采用的坐标系统

测量中所应用的某种坐标系统，是借助一定的观测手段，采用一定的数学法，在一个实在运动和变化的物理空间中建立起来的。因此，关于一个坐标系的定义及其描述并不像数学中坐标系那样简单明确，而是通过几组基准数据来描述和体现的，其包括：①基本常数系统。包括地球椭球的 4 个基本参数，采用天文和物理常数，如基本星辰、光行差常数、真空光速等。②地极及经度零点系统。其定义值通常由若干个天文台的天文观测和一定时间系统共同体现和维持。③位置和方位基准。通过大地原点的精密天文观测数据（$\phi_0$，$\lambda_0$，$\alpha_0$）和大地坐标（$B_0$，$L_0$，$H_0$）来确定。④长度基准。由天文大地网中所有起始边的共同尺度来体现和维持。⑤高程基准。根据国家验潮站的平均海水面确定。

一个坐标系的定义就是依据上述 5 个基准来描述的，这些基准的取向和取值的不同，就会出现不同的坐标系统。例如，我国现行的坐标系统有：1954 年北京坐标系、1980 年国家大地坐标系、新 1954 年北京坐标系等。

#### 7.4.1.1 1954 年北京坐标系

20 世纪 50 年代，我国正处于天文大地网建立初期，为了加速社会主义建设和国防建设、全面开展测图工作，迫切需要建立一个参心大地坐标系。

鉴于当时的历史条件，首要任务是将我国东北地区的一等锁与前苏联远东一等锁相连接，然后以连接处的呼玛、吉拉林、东宁基线网扩大边端点的前苏联 1942 年普尔科沃坐标系坐标为起算数据，平差我国东北及东部地区一等锁，这样换算来的坐标系，定名为 1954 年北京坐标系。1954 年北京坐标系可以认为是前苏联 1942 年坐标系的延伸，但又不完全属于该坐标系。因为高程异常是以前苏联 1955 年大地水准面重新平差结果为起算值，按我国天文水准路线推算出来的；大地点高程是以 1956 年青岛验潮站求出的黄海平均海平面为基准。

1954 年北京坐标系在我国近 50 年的测绘生产实践中发挥了巨大的作用。15 万个国家大地点和数百万加密控制点均在该系统内完成了计算工作。以该系统为基础测制完成了全

国 1∶50 000 及 1∶100 000 比例尺地形图，1∶10 000 比例尺地形图也在相当范围内完成。可以说，以 1954 年北京坐标系为基础的测绘成果和文档资料，已经渗透到国民经济建设和国防建设的各个领域。

随着科学技术的发展，1954 年北京坐标系已经难以适应现代化建设的需要，突出问题是：

（1）所采用的克拉索夫斯基椭球，其参数同国际大地测量与地球物理联（IUGG）1983 年第 18 届大会大地测量常数推荐值相比较，长半轴约大 109m，这不仅对研究地球几何形状有影响，而且只涉及两个几何性质的椭球参数（$a$，$f$），不能满足当今理论研究和实际工作中需要用 4 个基本参数（长半轴 $a$、地球重力场二阶带球谐系数 $J_2$、地心引力常数 $GM$、地球自转角速度 $\omega$）描述地球椭球的要求。

（2）椭球定向不明确。椭球短轴的指向既不是国际上普遍采用的国际协议原点 CIO，也不是我国对地极运动长期研究结果所确定的地极原点 JYD1968.0，起始大地子午面也不是国际时间局（BIH）所定义的格林尼治平均天文台子午面，从而给坐标换算带来较大误差和不便。椭球定位时大地原点位于前苏联西部列宁格勒附近的普尔科沃，这一定位结果使椭球面与我国大地水准面呈西高东低的系统性倾斜，东部地区高程异常最大达 +65，我国范围平均差值达 29m，如图 7－4 所示。

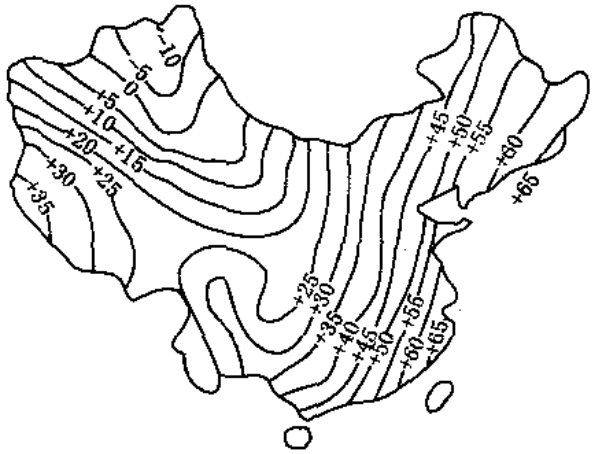



图 7－4　1954 年坐标系椭球高程异常分布

（3）该坐标系统的大地点坐标是经局部平差逐次得到的，全国所有大地控制点的坐标值不能连成统一整体，区与区的结合部存在较大间距，同一点在不同区的坐标之差可达 1～2m。而且自东北至西南，误差愈积愈大。这种情况对于发展我国空间技术和大规模经济建设是很不利的。

7.4.1.2　1980 年国家大地坐标系

1978 年，我国决定对全国天文大地网施行整体平差，这项工作要在新坐标系的参考椭球面进行。为此，首先要建立一个新的大地坐标系统，并且命名为 1980 年国家大地坐标系。1980 年国家大地坐标系的含义可以描述如下：

（1）采用了既含几何参数又含物理参数的 4 个椭球基本参数，其数值采用 1975 年国际大地测量与地球物理联合会（IUGG）第 16 届大会的推荐值。

（2）大地原点位于我国中部的陕西省泾阳永乐镇，西安市以北 60km 处，简称西安原点。

（3）大地点高程是以 1956 年青岛验潮站求出的黄海平均海水面为基准的正常高程系统。

（4）椭球定位满足 3 个条件：①短轴平行于地球质心指向我国确定的地极原点 JYD1968 .0 方向；②起始大地子午面平行于我国定义的起始天文子午面；③椭球面与似大地水准面在我国地域最为密合。

为此，在全国按 1°×1°间隔，均匀选取了 922 点，组成弧度测量方程式，即

$$\zeta_{80} = \cos B_{54}\cos L_{54}X_0 + \cos B_{54}\sin L_{54}Y_0 + \sin B_{54}Z_0 - M_{54}\mathrm{d}a + \frac{1}{2}N_{54}\sin^2 B_{54}\mathrm{d}e^2 + \zeta_{54} \tag{7-18}$$

因为 IUGG 在 1975 年推荐的椭球参数和克拉索夫斯基椭球参考均为已知值，故其中 $\mathrm{d}a = a_{75} - a_{克}$，$\mathrm{d}e^2 = e^2_{75} - e^2_{克}$ 为已知值。其中 $\zeta_{54}$ 的求解方法是：用 1167 个天文点和约 15 万个重力点成果，在全国由天文重力水准路线、短边天文水准路线和天文水准加均衡改正的路线构成 21 个环，进行不等权平差，求得各路线高程异常差，再以原点的 $\zeta$ 为起算值逐一推求，最后绘制成全国高程异常 $\zeta$ 图。

根据上述 922 点的弧度测量方程式（7－18），按

$$\sum_{1}^{922}\xi^2_{80} = \min$$

求解定位元素 $X_0$，$Y_0$，$Z_0$，进而求出大地原点上的 $\varepsilon_0$，$\eta_0$ 和 $\zeta_0$，联系大地原点上测得的天文经纬度、天文方位角和正常高，求得大地原点上的椭球参数 $B_0$，$L_0$，$A_0$ 和 $H_0$，将此作为 1980 年国家大地坐标系的大地起算数据。

由上所述，1980 年国家大地坐标系完全符合建立经典参心大地坐标系的原理。椭球参数的个数合理、数值准确，椭球面与大地水准面获得了较好密合，全国范围的平均差值由 1954 年北京坐标系的 29m 减小至 10m，全国多数地区 15m 以内，如图 7－5 所示。

7.4.1.3　新 1954 年北京坐标系

1980 年国家大地坐标系建立后，各大地点的坐标与 1954 年北京坐标系的原坐标出现了较大差异。这种差异是由两种因素引起的：一种因素是由于椭球参数和定位不同导致的系统性差异；另一因素是由于全网整平平差和只经局部平差所导致的偶然性差异，其中系

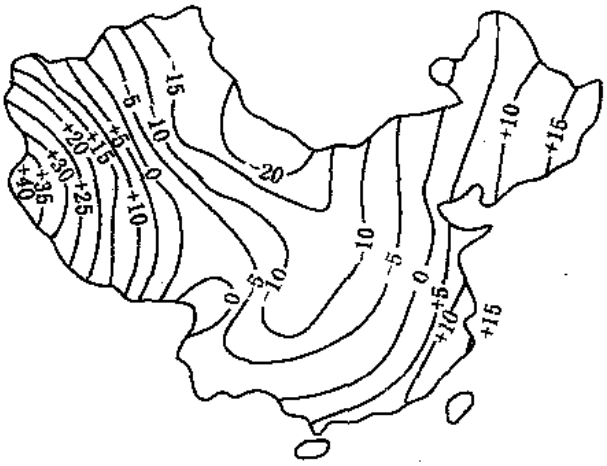



图7－5　80椭球高程异常分布

表7－1　两种坐标系之间的系统性

| 属　区 | 属　地 | dB/m | dL/m |
|---|---|---|---|
| 东北区 | 哈尔滨 | －44.62 | 33.59 |
| 华东区 | 上　海 | －4.92 | 43.59 |
| 华南区 | 广　州 | 19.48 | 63.91 |
| 华中区 | 武　汉 | 0.80 | 61.60 |
| 西南区 | 拉　萨 | 17.01 | 103.20 |
| 西北区 | 喀　什 | －5.85 | 115.03 |

统性差异估算大致见表7－1。

从表7－1看出，两种坐标系之间的系统性差异还是比较大的，这样的差异势必造成成果换算的不便和地形图图廓线方里线位置的较大变化。一些部门认为，在变更我国坐标系统时，既要考虑其科学性和严密性，又要考虑其实用性和可行性，要照顾40多年来的测绘历史和现状，从我国国情出发，易于操作，便于被众多部门和单位接受。新1954年北京坐标系，就是在这种背景下产生的。

新1954年北京坐标系的形成，是将1980年国家大地坐标系采用的IUGG在1975年椭球参数变换为克拉索夫斯基椭球参数，并且在空间进行平移，其平移量等于1980年国家大地坐标系按式（7－18）解得的定位参数$X_0$，$Y_0$，$Z_0$的反号。

因此说，新1954年北京坐标系是在1980年国家大地坐标系的基础上，改变IUGG1975年椭球为原来的克拉索夫斯基椭球，同时沿空间3个坐标轴上进行平移而来的，其定位定向的依据依然与1980年国家大地坐标系相同，只不过大地基准数据$B_0$，$L_0$，$\zeta_0$与80坐标系相差了一个由弧度方程表示的常数。它的精度和1980年国家大地坐标系的精度一样。

新54坐标系的点位坐标与80坐标系的同一点坐标，仅仅是两系统定义不同导致的系统性差异。

新54坐标系与原54坐标系的椭球定位方式尽管不同，但由于$X_0$，$Y_0$，$Z_0$，$da$，$de^2$这5个转换参数对新54坐标系和原54坐标系都是一样的，所以新54坐标系与原54坐标系不存在椭球差异和定位差异，两系统的相同点坐标差异主要是由于全国统一平差和原来局部平差所造成的偶然性差异，这种差异远远小于前述的椭球参数和定位不同所产生的系统性差异。据统计，两者坐标差值在全国约80%地区在5m以内，超过5m的主要集中在东北地区，其中大于10m的仅在少数边沿地区，最大值为12.9m。纵坐标$x$差值在-6.5～+7.8m之间，横坐标$y$差值在-12.9～+9.0m之间。这样的差异实际并没有超过现有坐标与平差坐标的差值范围。反映在1∶500 000比例尺地形图上，绝大部分不超过0.1mm，将来新图与原来拼接时不会产生明显裂隙。所以，新图既达到了使用精度好的整体平差成果作为控制基础，原有旧图也不必作特殊处理仍可以相互利用，具有明显的经济效益。

综上所述，对新1954年北京坐标系可以归纳为：①采用了克拉索夫斯基椭球参数；②采用了多点定位，参考椭球中心与原54坐标系的参心不一致，但十分接近；③定向明确，椭球短轴平行于由地球质心指向JYD1968.0方向，起始大地子午面平行于我国定义的起始天文子午面；④大地原点仍然是西安原点，但和1980年大地坐标系大地原点的大地起算数据不同；⑤大地点高程是以1956年青岛验潮站求出的黄海平均海水面为基准；⑥该系统提供的坐标是1980年国家大地坐标系整体平差转换值，两者的坐标精度完全一样。

### 7.4.2 平面坐标系统的转换

新的坐标系统建立以后，对没有参与全国天文大地网整体平差的近8万个三四等点的坐标换算，以及更多其他低等级点的坐标换算是一个庞大的计算任务，许多转换工作必须由不同部门不同单位自行完成。下面介绍由1954年北京坐标系转换成1980年国家大地坐标系的方法。

根据前面的介绍，新54坐标系与原54坐标系的椭球参数与定位方式是一致的；新54坐标系与80坐标系的坐标差异是由于椭球参数和定位不同所产生的系统性差异。根据这样两个特点，可以将新54坐标系视为一种过渡性坐标系，即先由原54坐标系转换成新54坐标系，再由新54坐标系转换成80坐标系。具体实施步骤：

（1）以新54坐标系中高一级的已知点作为固定点，对原54坐标系中的控制网（因椭球参数和定位相一致、无须再对观测数据进行改化）重新平差，得到原网在新54坐标系的严密平差结果。

（2）将新54坐标系中的平面坐标成果，按照高斯投影坐标反算公式可以换算成大地坐标（$B_{54}$，$L_{54}$）。

（3）将各控制点的大地坐标（$B_{54}$，$L_{54}$）换算成80坐标系中的大地坐标（$B_{80}$，$L_{80}$）。

此项换算可利用式（7－19）

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}B &= \frac{\rho}{M+H}\Big[-\sin B\cos L\mathrm{d}X-\sin B\sin L\mathrm{d}Y+\\ &\quad \cos B\mathrm{d}Z+Ne^2\sin B\cos B\frac{\mathrm{d}a}{a}+M(2-e^2\sin^2 B)\times\\ &\quad \sin B\cos B\frac{\mathrm{d}e^2}{2(1-e^2)}\Big]\\ \mathrm{d}L &= \frac{\rho}{(N+H)}[-\sin B\mathrm{d}X+\cos L\mathrm{d}Y] \end{aligned}\right\} \tag{7-19}$$

由此

$$\left.\begin{aligned} B_{80} &= B_{54}+\mathrm{d}B\\ L_{80} &= L_{54}+\mathrm{d}L \end{aligned}\right\}$$

式（7－19）中，$\mathrm{d}a=-105\mathrm{m}$，$\mathrm{d}e^2=9.633\,766\times10^{-7}$；公式中计算系数用的 $B$，$L$ 均取新54坐标系中的数值；$\mathrm{d}X$，$\mathrm{d}Y$，$\mathrm{d}Z$ 由国家提供，也可以根据变换区内高级点的新54坐标系和80坐标系的大地坐标反算求得。

（4）根据高斯投影坐标正算公式，将全部控制点的大地坐标（$B_{80}$，$L_{80}$）换算成平面坐标（$X_{80}$，$Y_{80}$）。此项计算不能直接应用公式，因为它们是根据可拉索夫斯基椭球参数导出的。

按上述方法进行坐标转换，由于从新54坐标系转换至80坐标系时所用到的转换参数都是定义值，均为常数，不存在由转换参数误差引起的误差传播。所以新54坐标系与80坐标系的有关点位进行转换无须再对观测值进行改化，所考虑的转换因素比较简单。

### 7.4.3 平面坐标系统之间转换的近似方法

对于较低等级的大量控制点来说，按上述方法重新平差工作量太大，没有必要强求一定要用严密方法施行坐标转换。相比之下，采用某些近似转换方法，在保持与高级网有较好符合性的情况下，能够快速得到转换结果。以下主要介绍其中的相似变换法。研究表明，在每一局部范围内，例如在每十万分之一图幅内，同一点在80坐标系和原54坐标系的高斯平面直角坐标系，在米级精度上都只相差一个常数。对于米级以下的微小差异，可以看成是这个局部区域内的两个平面坐标系统之间存在着某种旋转和尺度伸缩造成的。这样，就可以用平面相似变换公式来模拟两个平面坐标系的变换关系。

假设在原54坐标系中有个控制网，已知其中少数点在80坐标系中的坐标为（$X_i$，$Y_i$）。它们的原54坐标系中的坐标是（$x_i$，$y_i$），如图7－6所示。根据相似变换的一般式得

$$\left.\begin{aligned} X_i &= X_0+x_i m\cos\alpha-y_i m\sin\alpha\\ Y_i &= Y_0+x_i m\sin\alpha+y_i m\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7-20}$$

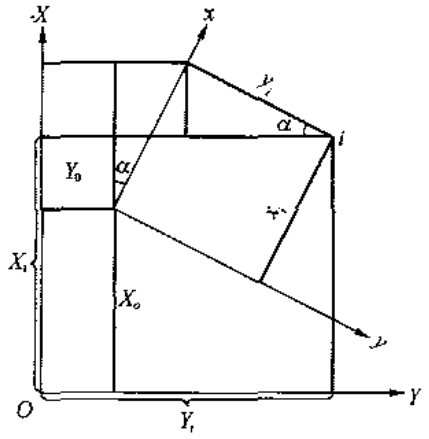



图7-6 平面坐标系之间的关系

式中 $X_0$，$Y_0$——坐标变换的平移参数；

$m$——尺度比参数；

$\alpha$——旋转角参数。

公共点在两个坐标系的坐标之差为

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_i &= X_i - x_i = X_0 + x_i m\cos\alpha - y_i m\sin\alpha - x_i\\ \Delta y_i &= Y_i - y_i = Y_0 + x_i m\sin\alpha + y_i m\cos\alpha - y_i\end{aligned}\right\}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_i &= X_0 + x_i(m\cos\alpha - 1) - y_i m\sin\alpha\\ \Delta y_i &= Y_0 + x_i m\sin\alpha + y_i(m\cos\alpha - 1)\end{aligned}\right\}$$

若令 $m\cos\alpha - 1 = u$，$m\sin\alpha = \delta$，上式又可写为

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_i &= X_0 - y_i\delta + x_i u\\ \Delta y_i &= Y_0 + x_i\delta + y_i u\end{aligned}\right\} \tag{7-21}$$

在实施变换的局部区域内，均匀选取若干公共点。将这些公共点的坐标差 $\Delta x_i$，$\Delta y_i$ 视为“观测量”。在这些“观测量”中，除了用上述相似变换参数模拟的系统误差以外，还包含偶然误差。若设这些“观测量”的改正数为 $v_{x_i}$，$v_{y_i}$，此时根据最小二乘原理，应该在

$$\sum(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2) = \min$$

的条件下，由观测值方程式（7-21）列出误差方程式，进而组成法方程式求解变换参数 $X_0$，$Y_0$，$\delta$ 和 $\mu$。

由式（7-21）列出的误差方程式为

$$\begin{bmatrix}v_{x_i}\\ v_{y_i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -y_i & +x_i\\ 0 & 1 & +x_i & +y_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_0\\ Y_0\\ \delta\\ \mu\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\Delta x_i\\ \Delta y_i\end{bmatrix}$$

法方程式为

$$\begin{bmatrix}n & 0 & -\sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i\\ & n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i\\ & & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) & 0\\ & & & \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\\ \delta\\ \mu\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\\ \sum_{i=1}^{n}\Delta y_i\\ \sum_{i=1}^{n}(x_i\Delta y_i - y_i\Delta x_i)\\ \sum_{i=1}^{n}(x_i\Delta x_i + y_i\Delta y_i)\end{bmatrix} = 0$$

解上列方程组，求得变换参数。

最后按下式对所有控制点逐一实行坐标旋转，得

$$\left.\begin{aligned} X_k &= x_k + \Delta x_k = x_k + X_0 - y_k\delta + x_k\mu \\ Y_k &= y_k + \Delta y_k = y_k + Y_0 + x_k\delta + y_k\mu \end{aligned}\right\} \tag{7-22}$$

相似变换法的特点是将原网经过平移、旋转、缩放而符合新的坐标系。它的优点是不变更原有网的几何形状，避免原有网发生变形而改变控制点间相对位置关系。其缺点是公共点上已知的新系坐标不等于按式（7-2）计算的转换值，出现有隙距。此时最好采用坐标转换值，以保证整个控制网的几何形状不变。

## 7.5 工程控制网实用的坐标系统选择

我国《国家三角测量和精密导线测量规范》规定："所有大地测量的观测成果，都须归化到参考椭球面上，……所有国家大地点均按高斯正形投影计算其在6°带内的平面直角坐标（一般称为高斯-克吕格平面坐标）。在1∶10 000和更大比例尺测图的地区，还应加算其在3°带内的平面直角坐标。"根据这种规定所采用的高斯投影6°带或3°带坐标系统，我们通常称作国家统一坐标系统。

工程控制网采用国家统一坐标系统的结果，常常改变控制网各条边的真实长度，引起长度的变形，这对于大比例尺地形测图和工程测量是十分不利的。为了有效地控制投影长度变形，就需要分析长度变形的来源和容许数值、国家统一坐标系统的适用程度和范围，以及抵偿长度变形的坐标系统建立方法。

### 7.5.1 长度变形的产生和容许数值

将实地测量的真实长度归化到国家统一的椭球面上时，应加如下改正数，即

$$\Delta s = -\frac{H_m}{R_A}s \tag{7-23}$$

式中 $R_A$——长度所在方向的椭球曲率半径；

$H_m$——长度所在高程对于椭球面的高差；

$s$——实地测量的水平距离。

然后再将椭球面上的长度投影至高斯平面，加入如下改正数，即

$$\Delta S = +\frac{y_m^2}{2R^2}S \tag{7-24}$$

式中 $R$——测区中点的平均曲率半径；

$y_m$——两端点横坐标值；

$S$——大地线长。

这样，地面上的一段距离，经过上列两次改正计算被改变了真实长度。这种高斯投影平面上的长度与地面长度之差，称之为长度综合变形，其计算公式为

$$\delta = +\frac{y_m^2}{2R^2}S - \frac{H_m}{R_A}s$$

为了方便计算，又不致损害必要精度，可以将椭球视为圆球，取圆球半径 $R \approx R_A \approx 6\,371\text{km}$，又取不同投影面上的同一距离近似相等，即 $S \approx s$，将上式写成相对变形的形式，则为

$$\frac{\delta}{s} = (0.001\,23y^2 - 15.7H)10^{-5} \qquad (7-25)$$

式中 $y$——测区中心的横坐标（自然值）；

$H$——测区平均高程，$y$ 与 $H$ 均以千米（km）作单位。

式（7－25）表明，采用国家统一坐标系统所产生的长度综合变形，与测区所处投影带内的位置和测区平均高程有关。利用式（7－25），可以便捷地计算出测区所用坐标系统的长度相对变形大小。

控制网是直接服务于城镇和工矿地区大比例尺测图和工程施工测量的，因此，由控制网所提供的距离应尽可能保持其真实性。这样，地面施测的距离可以直接绘图，图纸上量取的距离也可直接标设于实地。所以就控制网的实用性而言，长度综合变形越小越好。

对此，我国《城市测量规范》、《工程测量规范》均对控制网的长度综合变形的容许范围作了明确规定，一致确立了平面控制网的坐标系统应该保证长度综合变形不超过 2.5cm/km（相对变形 1：40 000）这一原则。这样的长度变形，与四等平面控制网边长的必需精度相适应，对于测量精度为 1：5 000～1：20 000 的施工放样，也能起到良好的控制作用。

### 7.5.2 国家统一坐标系统的局限性

将长度综合变形的容许数值 1：40 000 代入式（7－25），即可得到下列方程

$$H = 0.78y^2(10^{-4}) \pm 0.16 \qquad (7-26)$$

对于某已知高程面的测区，利用式（7－26）可以计算出相对变形不超过 1：40 000 的国家统一 3°带内 $y$ 坐标取值范围；同理，对于 3°带内的不同投影区域（用 $y$ 坐标表示最为直观简便），可以算出综合变形不超过容许数值时测区平均高程的取值范围。

如果取测区中心的 $\pm y$ 坐标为横轴，取测区平均高程 $H$ 为纵轴，根据式（7－26）就可以画出相对变形恒为容许数值的两条曲线。这两条曲线就是适用于控制测量的投影带范围，如图 7－7 所示 。

利用图 7－7 可以直观形象地判断国家 3°带统一坐标系是否适合本测区的需要。如果根据本测区的平均高程和 3°带的 $y$ 坐标所确定的位置，处于两曲线以外的“不适用区”，就应该考虑另行选择坐标系统。

为了保证投影的长度综合变形不超过 2.5/km（1：40 000）。必将极大降低 3°带国家统一坐标系统的适用范围。从图 7－7 可以看出，在 3°投影带的大部分区域，长度综合变形均超出了以上两规范界定的范围，均不适宜测图和工程测量的需求。所以如何选择能够

抵偿长度综合变形的坐标系统，就是一个必须解决的问题。

### 7.5.3 工程控制网局部坐标系统的选择

如果说高斯投影分带是限制长度变形的有效措施，那么正确地选择工程控制网的坐标系统，则是抵偿长度综合变形的有效途径。

由于以椭球面作为计算表面（投影面）、按正形投影3°分带或6°分带计算的平面坐标称为国家统一坐标系统，那么对投影面或投影带作出其他选择，计算出的坐标就不再属于国家统一坐标系统，我们称这种坐标系统为局部坐标系统，有时也称为独立坐标系统。下面讨论几种局部坐标系统可供选择的方案。

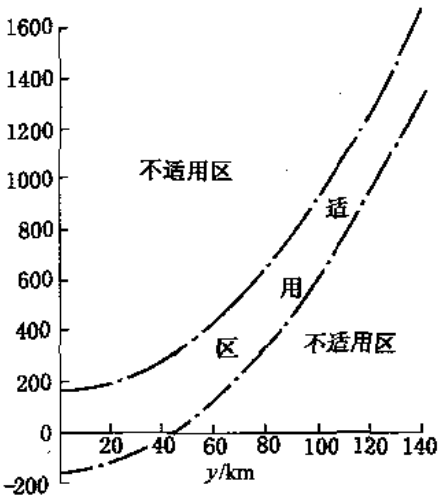



图7-7 3°投影带变形分布

1）选择“抵偿高程面”作为投影面，按高斯正形投影3°带计算平面直角坐标

式（7-23）表明，将距离由较高的高程面换算至较低的椭球面时，长度总是减小的；式（7-24）又表明，将椭球面上的距离换算至高斯平面时，长度总是增加的。所以两个投影过程对长度变形具有抵偿的性质。如果选择适当的椭球半径，使距离换算到这个椭球面上所减小的数值，恰好等于由这个椭球面换算至高斯平面所增加的数值，那么高斯平面上的距离同实地距离就一致了。这个适当半径的椭球面，就称为“抵偿高程面”。

欲使长度综合变形得以抵偿，必须

$$\frac{H_m}{R_A}S=\frac{y_m^2}{2R^2}S$$

将推证式（7-25）时所引用的关系和数据代入，则

$$H=\frac{y^2}{2\times 6\ 371\ 000}\ \mathrm{m}$$

其中若 $y$ 以 $10^5$m 作单位，$H$ 以 m 作单位，则

$$H=785y^2 \tag{7-27}$$

利用式（7-27）可以确定抵偿高程面的位置。例如，某地中心在高斯投影3°带坐标 $y=91$km，该地平面高程为400m，按式（7-27）算得

$$H=785\times 0.91^2=650\mathrm{m}$$

即抵偿面应比平均高程面低650m，如图7-8所示。于是，抵偿面的高程为

$$H_{抵}=400\mathrm{m}-650\mathrm{m}=-250\mathrm{m}$$

抵偿面位置确定后，就可以选择其中一个国家大地点作“原点”，保持它在3°带的国家统一坐标系（$x_0$，$y_0$）不变，大地控制点坐标（$x$，$y$）换算到抵偿高程面相应的坐标系

中去。换算公式为

$$\left.\begin{aligned} x_{抵} &= x + (x - x_0)\frac{H_{抵}}{R} \\ y_{抵} &= y + (y - y_0)\frac{H_{抵}}{R} \end{aligned}\right\} \qquad (7-28)$$

式中 $R$——该地平均纬度处的椭球平面曲率半径。

这样，经过式（7－29）换算的大地控制点坐标就可以作为控制测量的起算数据。

需要时，还可以将控制点在局部坐标系中的坐标，按下式换算成国家统一坐标系内的坐标，即

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{抵} - (x - x_0)\frac{H_{抵}}{R} \\ y &= y_{抵} - (y - y_0)\frac{H_{抵}}{R} \end{aligned}\right\} \qquad (7-29)$$

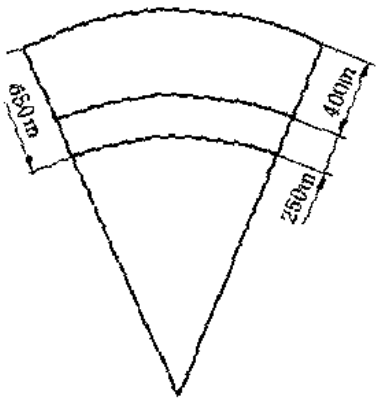



图7－8 椭球面、抵偿面与平均高程面关系

2）保持国家统一的椭球面作投影面不变，选择“任意投影带”，按高斯投影计算平面直角坐标

不同投影带的出现，是因为选择了不同经度的中央子午线的缘故。如果我们合理选择中央子午线的位置，使长度投影到该投影带所产生的变形，恰好抵偿这一长度投影到椭球面所产生的变形，此时高斯投影平面上的长度仍和实地长度保持一致，称这种抵偿长度变形的投影带为“任意投影带”。

为了确定任意投影带的中央子午线位置，需要在式（7－27）中引入经度差“$l$”。取高斯投影坐标正算公式

$$y = \frac{l''}{\rho''}N\cos B$$

代入式（7－27），略加变换即得

$$\left.\begin{aligned} l'' &= 7\,362''\frac{\sqrt{H}}{N\cos B} \\ L_0 &= L - l \end{aligned}\right\} \qquad (7-30)$$

式中 $B$，$L$——测区中心位置的纬度和经度；

$N$——椭球在纬度 $B$ 处的卯酉圈曲率半径；

$H$——测区的平面高程；

$l$——经度 $L$ 与任意带的中央子午线经度 $L_0$ 之差。

利用式（7－30）可以便捷地确定任意投影带的中央子午线经度 $L_0$。任意带确定后，应用高斯投影坐标计算的方法，将国家大地点坐标换算成大地坐标（$B$，$L$）。再由大地坐

标计算这些点在任意带内的平均直角坐标（$x$，$y$）。实际上这仅仅是一个换带计算问题。反之，已知某点在任意带内的坐标，也可以方便地求出它在国家统一坐标系统内的坐标值。

3）选择平均高程面作投影面

通过测区中心的子午线作为中央子午线，按高斯投影起算平面直角坐标。选择这种局部坐标系统的实质，在于保证测区中心处 $y\approx 0$，$H\approx 0$，使得按式（7－25）计算的 $\delta\approx 0$，做到测区范围内的长度综合变形为最小。为此，应对用作控制测量起算数据的国家大地点坐标进行如下处理：

（1）利用高斯投影坐标正反算的方法，将国家点的平面坐标换算成大地坐标（$B$，$L$）；并由大地坐标计算这些点在选定的中央子午线投影带内的平面直角坐标（$x$，$y$）。

（2）选择其中一个国家点作为“原点”，保持该点在选定的投影带内的坐标（设为 $x_0$，$y_0$）不变，其他国家点按下式将坐标换算到选定的坐标系中去。

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + (x - x_0)\frac{H}{R} \\ y' &= y + (y - y_0)\frac{H}{R} \end{aligned}\right\} \tag{7-31}$$

其中符号意义同前。按式（7－31）换算的坐标值（$x'$，$y'$），均可作为控制网的起算数据。

将上述3种选择局部坐标系统的方法加以比较可以看出：第一种方法是通过变更投影面来抵偿长度综合变形，具有换算简便、概念直观等优点，而且换系后的新坐标与原国家统一坐标系坐标十分接近，有利于测区内外之间的联系。第二种方法是通过变更中央子午线、选择任意带来抵偿长度综合变形，同样具有概念清晰、换算简便等优点，但是换系后的新坐标与原坐标系坐标差异较大。第三种是用既改变投影面，又改变投影带的方法来抵偿长度综合变形，这种既换面又换带的方法不够简便、不易施行，同时换算系后的新坐标与原国家统一坐标差异较大，不利于与国家统一坐标系之间的联系。

# 8 常用大地控制网数据处理

## 8.1 概述

### 8.1.1 条件平差基本原理

8.1.1.1 条件平差概述

在一个测量平差的内业数据处理工程中，如果观测值的总数为 $n$，必要观测个数为 $t$，则此工程的外业多余观测个数为 $r=n-t$；在用条件平差法进行数据处理时的条件方程个数就等于多余观测个数 $r$。设有 $n$ 个观测值组成的列向量 $L$，观测值的真值向量 $\tilde{L}$，则观测值的真误差向量为：$\Delta=L-\tilde{L}$，条件平差数学模型为

$$A\Delta+W=0 \tag{8-1}$$

$$D=\delta_0^2Q=P^{-1} \tag{8-2}$$

由于 $r<n$，由上式不能求得 $\Delta$ 的唯一解，但可按最小二乘原理求 $\Delta$ 的最或然值，从而求出观测量的最或然值 $\hat{L}$，又称平差值。将上式中的 $\Delta$ 改写为其估值 $V$，得到条件方程为

$$AV+W=0 \tag{8-3}$$

$V$ 的求得要求满足 $V^TPV=\min$ 的原理。则观测值的平差值为

$$\hat{L}=L+V \tag{8-4}$$

条件平差就是要求在满足 r 个条件方程下求函数 $V^TPV=\min$ 的 $V$ 值，在数学中是求函数的条件极值问题。

8.1.1.2 条件平差问题的求解方法

设有 $r$ 个平差值条件方程，则

$$\begin{aligned}
&a_{11}\hat{L}_1+a_{12}\hat{L}_2+\cdots+a_{1n}\hat{L}_n+a_{10}=0\\
&a_{21}\hat{L}_1+a_{22}\hat{L}_2+\cdots+a_{2n}\hat{L}_n+a_{20}=0\\
&\cdots\cdots\\
&a_{r1}\hat{L}_1+a_{r2}\hat{L}_2+\cdots+a_{rn}\hat{L}_n+a_{r0}=0
\end{aligned} \tag{8-5}$$

将式（8-4）代入式（8-5），得

$$a_{11}V_1+a_{12}V_2+\cdots+a_{1n}V_n+W_1=0$$

$$a_{21}V_1 + a_{22}V_2 + \cdots + a_{2n}V_n + W_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{r1}V_1 + a_{r2}V_2 + \cdots + a_{rn}V_n + W_r = 0$$

其中

$$W_1 = a_{11}L_1 + a_{12}L_2 + \cdots + a_{1n}L_n$$
$$W_2 = a_{21}L_1 + a_{22}L_2 + \cdots + a_{2n}L_n$$
$$W_r = a_{r1}L_1 + a_{r2}L_2 + \cdots + a_{rn}L_n$$

令

$$\underset{r\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix}, \quad \underset{r\times 1}{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_r \end{bmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\hat{L}} = \begin{bmatrix} \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \\ \vdots \\ \hat{L}_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{n\times 1}{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{A_0} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix}$$

得条件方程

$$AV + W = 0$$

其中

$$W = AL + A_0$$

联立条件方程和最小二乘原理 $V^TPV = \min$，构造拉格朗日条件极值函数，即

$$\Phi = V^TPV - 2K^T(AV + W) \tag{8-6}$$

其中联系数向量为

$$K = (k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r)^T$$

令

$$\frac{d\Phi}{dV} = 0 = 2V^TP - 2K^TA$$

则

$$V^TP = K^TA$$

转置后得

$$PV = A^TK$$

即

$$V = P^{-1}A^TK = QA^TK$$

所以

$$\begin{cases} AV + W = 0 \\ V = P^{-1}A^TK \end{cases} \tag{8-7}$$

条件平差的

基础方程中有 $r$ 个条件方程，$n$ 个改正数方程，共有 $n$ 个改正数 $V$ 和 $r$ 个联系数 $K$，故可以求出唯一解。

将改正数方程带入条件方程中，得条件平差的法方程

$$AP^{-1}A^TK + W = 0 \tag{8-8}$$

令 $N_{aa} = AP^{-1}A^T$（在条件方程独立条件下 $N_{aa}$ 满秩可逆）

$$K = -N_{aa}^{-1}W \tag{8-9}$$

$$V = P^{-1}A^{\mathrm{T}}N_{aa}^{-1}W \tag{8-10}$$

公式中的 $P$ 即是观测值的权阵。

### 8.1.2 间接平差基本原理

间接平差法是以控制网中所有待定点的坐标（或高程）为未知参数来消除各观测值之间的不符值，并用求自由极值的方法解出未知参数的最或然值，也即求出待定点坐标（或高程）的平差值，然后求得各观测量的平差值，故也叫参数平差法。

假定平差问题中有 $n$ 个观测值 $L_n$，观测值的改正数向量为 $V$，观测平差值 $\hat{L} = L + V$，已知各观测量相应的权为 $P_i$（$i = 1, 2, \cdots, n$），必要观测数（即相应的未知参数个数）为 $t$，用 $\tilde{X}$ 表示未知参数的真值，其估值为

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}$$

式中 $X^0$——相应的近似值；

$\hat{x}$——未知参数的改正数。

将各观测量平差值用 $t$ 个未知参数的方程表示（即列出观测值的平差值方程），如下：

$$\left.\begin{aligned}
L_1 + v_1 &= b_{11}\hat{X}_1 + b_{12}\hat{X}_2 + \cdots + b_{1t}\hat{X}_t + d_1 \\
L_2 + v_2 &= b_{21}\hat{X}_1 + b_{22}\hat{X}_2 + \cdots + b_{2t}\hat{X}_t + d_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_n + v_n &= b_{n1}\hat{X}_1 + b_{n2}\hat{X}_2 + \cdots + b_{nt}\hat{X}_t + d_n
\end{aligned}\right\} \tag{8-11}$$

令

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix},\quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},\quad \hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \vdots \\ \hat{X}_t \end{bmatrix},\quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nt} \end{bmatrix}$$

则有平差值方程的矩阵形式为

$$L + V = B\hat{X} + d \tag{8-12}$$

令

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}$$

$$l = -L - (BX^0 + d)$$

则间接平差的误差方程为

$$V = B\hat{x} - l \tag{8-13}$$

按最小二乘原理，式（8－13）的 $\hat{x}$ 必须满足 $V^TPV = \min$ 的要求，因为 $t$ 个参数为独立量，故可按求自由极值的方法得

$$\frac{\partial V^TPV}{\partial \hat{x}} = 2V^TP\frac{\partial V}{\partial \hat{x}} = 2V^TPB = 0$$

转置后得

$$B^TPV = 0 \tag{8-14}$$

在式（8－13）和式（8－14）中待求量为 $n$ 个观测值的改正数 $V$ 和 $t$ 个未知参数的改正数 $\hat{x}$，而方程个数也是 $n+t$ 个，所以有唯一解，此两方程为间接平差的基础方程。

由上式可得

$$B^TPB\hat{x} - B^TPl = 0 \tag{8-15}$$

令

$$N_{bb} = B^TPB,\quad W = B^TPl$$

则式（8－15）可写成

$$N_{bb}\hat{x} - W = 0 \tag{8-16}$$

系数阵 $N_{bb}$ 满秩可逆，$\hat{x}$ 有唯一解，式（8－16）称为间接平差的法方程。解得

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1}W = (B^TPB)^{-1}B^TPl \tag{8-17}$$

### 8.1.3 附有限制条件的间接平差基本原理

间接平差（或参数平差法）是通过选定 $t$ 个独立参数，将每个观测量分别表达成这 $t$ 个独立参数的函数，建立函数模型，按最小二乘原理，用求自由极值的方法解出参数的最或然值，从而求得各观测量的平差值。在一个平差问题中，多余观测数 $r = n - t$，如果在平差中又增选了 $u > t$ 个量作为参数，其中包含了 $t$ 个独立量，则参数间存在 $s = u - t$ 个限制条件。平差时列出 $n$ 个观测方程和 $s$ 个限制参数间关系的条件方程，以此为函数模型的平差方法，就是附有限制条件的间接平差。

在测角网、测边网、边角网等类型的测量网平差中，列出的观测方程和条件方程很多是非线性的，因此必须按泰勒公式将其化为线性形式。附有限制条件的间接平差的线性或线性化后的函数模型为

$$\underset{n,1}{\Delta} = \underset{n,u}{B}\ \underset{u,1}{\tilde{x}} - \underset{n,1}{l} \tag{8-18}$$

$$\underset{s,u}{C}\ \underset{u,1}{\tilde{x}} - \underset{s,1}{W_x} = 0 \tag{8-19}$$

其中 $R(B) = u$，$R(C) = s$，$u < n$，$s < u$，即 $B$ 为列满秩阵，$C$ 为行满秩阵。用 $\hat{x}$ 和 $V$ 分别代替上面公式中的 $\tilde{x}$ 和 $\Delta$，得误差方程和限制条件方程为

$$\underset{n,1}{V}=\underset{n,u}{B}\underset{u,1}{\hat{x}}-\underset{n,1}{l} \tag{8-20}$$

$$\underset{s,u}{C}\underset{u,1}{\hat{x}}-\underset{s,1}{W_x}=0 \tag{8-21}$$

随机模型为

$$D=\sigma_0^2\underset{n,n}{Q}=\sigma_0^2\underset{n,n}{P^{-1}} \tag{8-22}$$

在式（8-20）和式（8-21）中，待求量是 $n$ 个改正数和 $u$ 个参数，而方程个数为 $n+s$，少于待求量的个数 $n+u$，且系数阵的秩等于其增广矩阵的秩，即

$$R\begin{bmatrix}-I & B\\ 0 & C\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}-I & B & \cdots & l\\ 0 & C & \cdots & W_x\end{bmatrix}=n+s \tag{8-23}$$

其为有无穷多组解的一组相容方程。为此，应在无穷多组解中求出能满足最小二乘原理的一组解。按求条件极值法组成函数，即

$$\Phi=V^TPV+2K_S^T(C\hat{x}-W_X) \tag{8-24}$$

式中 $K_S$——对应于限制条件方程的联系数向量。

由式（8-20）可知，$V$ 是 $\hat{x}$ 的显函数，为求 $\Phi$ 的极小值，将其对 $\hat{x}$ 取偏导数并令其为零，则有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{x}}=2V^TP\frac{\partial V}{\partial\hat{x}}+2K_s^TC=2V^TPB+2K_s^TC=0$$

转置后得

$$B^TPV+C^TK_s=0 \tag{8-25}$$

在式（8-20）、式（8-21）、式（8-25）3 式中，方程的个数是 $n+s+u$，待求未知数的个数是 $n$ 个改正数，$u$ 个参数和 $s$ 个联系数，即方程个数等于未知数个数，故有唯一解，称这 3 个方程为附有限制条件的间接平差法的基础方程。

解此基础方程通常是先将式（8-20）代入式（8-25），得

$$B^TPB\hat{x}+C^TK_s-B^TPl=0 \tag{8-26}$$

令 $N=B^TPB$，$W=B^TPl$，故式（8-26）可写成

$$N\hat{x}+C^TK_s-W=0 \tag{8-27}$$

式（8-27）与式（8-21）称为附有限制条件的间接平差法的法方程。$N$ 为一满秩对称方阵，是可逆阵。用 $CN^{-1}$ 左乘式（8-27），并减去式（8-21）得

$$CN^{-1}C^TK_s-(CN^{-1}W-W_x)=0 \tag{8-28}$$

令 $N_{cc}=CN^{-1}C^T$，则式（8-28）可写成

$$N_{cc}K_s-(CN^{-1}W-W_x)=0 \tag{8-29}$$

其中 $R(N_{cc})=s$，且 $N_{cc}^T=(CN^{-1}C^T)^T=CN^{-1}C^T$，故 $N_{cc}$ 为一满秩对称方阵，是可逆阵。于是

$$K_s=N_{cc}^{-1}(CN^{-1}W-W_x) \tag{8-30}$$

将式（8－30）代入式（8－27），经整理可得

$$\underset{u,1}{\hat{x}} = (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1}C^{T}N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1})W + N_{bb}^{-1}C^{T}N_{cc}^{-1}W_{x} \tag{8-31}$$

## 8.2 平面控制网平差

常规的平面控制网按其施测手段一般分为三角网、三边网、边角网、导线网等，控制网的平差计算既可以在椭球面上进行，也可在高斯投影平面上进行。我国的天文大地网平差是在椭球面上进行的，而局部的加密控制网都在高斯投影平面上平差。

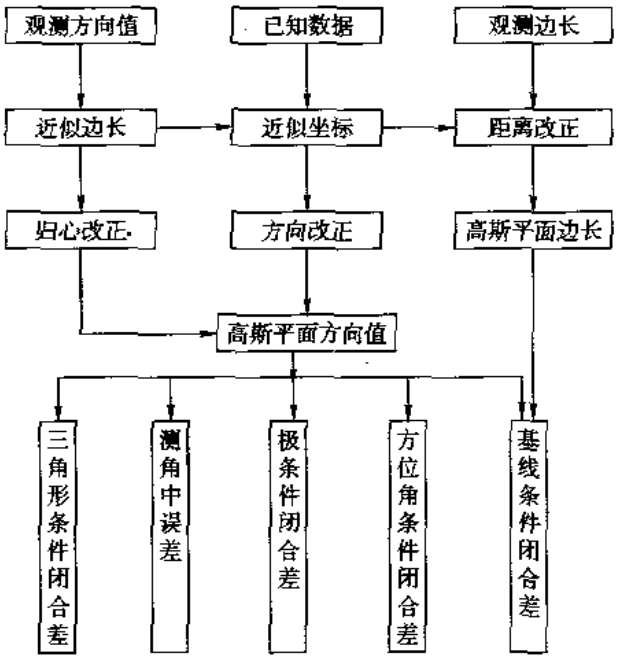



图 8－1 经典控制网概算流程

平面控制网的内业计算通常包括概算、平差计算、编制控制点成果表等工作。平面控制网概算的流程如图 8－1 所示。概算后获得了归算到标石中心并归化到高斯投影平面上的方向观测值和边长观测值，这些是进入平差的独立观测元素；同时可以进行各种条件闭合差的计算，检核外业观测数据是否合格。控制网的起算数据包括控制点的已知坐标，由精密测距获得的已知边长，由天文测量或其他精密测角手段获得的已知坐标方位角等信息，这些必要的起算数据也称为平差基准。

随着计算机技术的发展，对于不适于计算机编程实现的条件平差方法将不再做介绍，而是把重点放在适于计算机操作的间接平差原理及其实现上。由于导线网是特殊形式的边角网，目前，甚至以后相当长的时期内，仍可能存在广泛的应用前景，因此该节将对其做

详细地讨论，对其他形式的平面网只是讨论其观测值的平差值误差方程式的列立原理。基于附有限制条件的间接平差原理，编写了运行于 VC + +6.0 平台的可视化控制网平差程序包，实现了控制网的概算、平差、成果的可视化，以及平差结果的 Access 数据库集中管理。

### 8.2.1 平面控制网平差原理

#### 8.2.1.1 方向误差方程式的列立原理

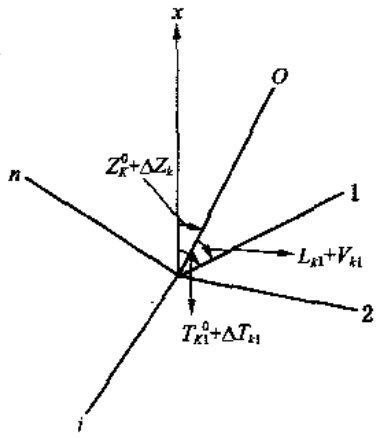



图 8-2 方向观测示意图

如图 8-2 所示，方向观测值 $L_{Ki}$ 及其改正数 $V_{Ki}$ 和待定点近似坐标（$X^0$，$Y^0$）及其未知数改正数 $\delta_x$，$\delta_y$ 之间，可通过方位角 $T_{Ki}$ 建立函数关系。方向观测值的平差值 $L_{Ki}+V_{Ki}$ 和 $ki$ 方向的坐标方位角平差值 $T_{Ki}$ 的关系式为

$$T_{Ki}=(L_{ki}+V_{Ki})+Z_K \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_K) \tag{8-32}$$

式中 $Z_K$——测站 $K$ 上零方向的方位角平差值，通常称为定向角未知数。

方位角平差值 $T_{Ki}$ 是坐标平差值（$X_K^0+\delta_{xK}$，$Y_K^0+\delta_{yK}$），（$X_i^0+\delta_{xi}$，$Y_i^0+\delta_{yi}$）的函数，即

$$T_{Ki}=\tan^{-1}\frac{(Y_i^0+\delta_{yi})-(Y_K^0+\delta_{yK})}{(X_i^0+\delta_{xi})-(X_K^0+\delta_{xK})} \tag{8-33}$$

式（8-33）按泰勒级数展开，舍去二次和二次以上各微小项，得

$$T_{Ki}=T_{Ki}^0+a_{Ki}\delta_{xK}+b_{Ki}\delta_{yK}-a_{Ki}\delta_{xi}-b_{Ki}\delta_{yi}$$

其中

$$T_{Ki}^0=\arctan\frac{Y_i^0-Y_K^0}{X_i^0-X_K^0}$$

$$a_{Ki}=\left(\frac{\mathrm{d}T_{Ki}}{\mathrm{d}X_K}\right)_0=-\left(\frac{\mathrm{d}T_{Ki}}{\mathrm{d}X_i}\right)_0=+\frac{\Delta Y_{Ki}^0}{(D_{Ki}^0)^2}$$

$$b_{Ki}=\left(\frac{\mathrm{d}T_{Ki}}{\mathrm{d}Y_K}\right)_0=-\left(\frac{\mathrm{d}T_{Ki}}{\mathrm{d}Y_i}\right)_0=-\frac{\Delta X_{Ki}^0}{(D_{Ki}^0)^2}$$

设定向角的近似值为 $Z_K^0$，其改正量为 $\delta Z_K$，则

$$Z_K=Z_K^0+\delta Z_K \tag{8-34}$$

将式（8-33）、式（8-34）代入式（8-32）中，得方向观测值误差方程式

$$V_{Ki}=-\delta Z_K+a_{Ki}\delta_{xK}+b_{Ki}\delta_{yK}-a_{Ki}\delta_{xi}-b_{Ki}\delta_{yi}-l_{Ki} \tag{8-35}$$

$$l_{Ki}=T_{ki}^0-Z_K^0-L_{Ki} \tag{8-36}$$

式（8－35）表示测站点 $k$ 至照准点 $i$ 的观测方向误差方程式，每个测站的方向误差方程个数等于该站的方向观测值个数 $n_K$，全网方向误差方程总数等于全网各测站方向观测值的总和。未知数的总数等于待定点的个数乘以 3 再加上已知点的个数。

平面控制网坐标平差时，由于有的测站是已知点，其坐标改正数为零。因此，列出的误差方程式有以下几种特殊情况：

（1）$k$ 为已知点，$i$ 为待定点时为

$$V_{Ki} = -\delta Z_K - a_{Ki}\delta_{xi} - b_{Ki}\delta_{yi} + l_{Ki}。$$

（2）$k$ 为待定点，$i$ 为已知点时为

$$V_{Ki} = -\delta Z_K + a_{Ki}\delta_{xK} + b_{Ki}\delta_{yK} + l_{Ki}。$$

（3）$k$，$i$ 均为已知点时为

$$V_{Ki} = -\delta Z_K + l_{Ki}。$$

8.2.1.2　边长误差方程式的列立原理

在边角网、三边网、导线网等控制网中，除了观测有方向外，还有观测边长。如图8－3所示，设边长观测值为 $D_K$，边长平差值为 $\hat{D}_K$，改正数为 $V_K$，两端点的坐标近似值为（$X_i^0$，$Y_i^0$），（$X_j^0$，$Y_j^0$），相应的改正数为 $\delta X_i$，$\delta Y_i$，$\delta X_j$，$\delta Y_j$，平差值为 $\hat{X}_i$，$\hat{Y}_i$，$\hat{X}_j$，$\hat{Y}_j$，由近似坐标算得的近似边长为 $D_K^0$，则边长平差值方程式为

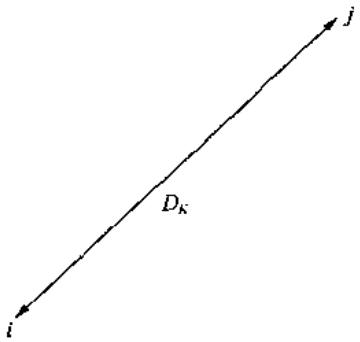


图 8－3　边长观测示意图

$$D_K + V_K = \sqrt{(X_j^0 + \delta X_j - X_i^0 - \delta X_i)^2 + (Y_j^0 + \delta Y_j - Y_i^0 - \delta Y_i)^2} \tag{8-37}$$

将式（8－37）按泰勒级数展开，并舍去二次和二次以上各微小项，略加整理得观测边误差方程式，即

$$V_K = -\frac{\Delta X_{ij}^0}{D_K^0}\delta X_i - \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_K^0}\delta Y_i + \frac{\Delta X_{ij}^0}{D_K^0}\delta X_j + \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_K^0}\delta Y_j + l_K \tag{8-38}$$

$$l_K = D_K^0 - D_K$$

其中

$$D_K^0 = \sqrt{(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2}$$

$$\Delta X_{ij}^0 = X_j^0 - X_i^0,\ \Delta Y_{ij}^0 = Y_j^0 - Y_i^0$$

在实际作业中，可能会遇到下述情况：

（1）$i$ 为已知点，$j$ 为待定点时为

$$V_K = \frac{\Delta X_{ij}^0}{D_K^0}\delta X_j + \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_K^0}\delta Y_j + l_K。$$

（2）$i$ 为待定点，$j$ 为已知点时为

$$V_K = -\frac{\Delta X_{ij}^0}{D_K^0}\delta X_i - \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_K^0}\delta Y_i + l_K。$$

（3）$i$，$j$ 均为已知点时，该边的长度为已知，没有边长改正数，所以也就没有该边长

误差方程式。

8.2.1.3 固定边条件方程式的列立

在三角网中，如果加测某些高精度边（如基线边、高精度光电测距边），这些边作为控制网的起算数据，在平差过程中数值保持不变。这就要求平差后两端点坐标平差值反算的边长等于原起算边长，这就构成了边长约束条件。设第 $i$ 点和第 $j$ 点之间的边长为起算边，用 $D_K$ 表示固定边长度，则固定边条件为

$$D_K = \sqrt{(X_j^0 + \delta X_j - X_i^0 - \delta X_i)^2 + (Y_j^0 + \delta Y_j - Y_i^0 - \delta Y_i)^2} \tag{8-39}$$

将式（8-39）按泰勒级数展开，取一次项得

$$-\frac{\Delta X_{ij}^0}{D_K^0}\delta X_i - \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_K^0}\delta Y_i + \frac{\Delta X_{ij}^0}{D_K^0}\delta X_j + \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_K^0}\delta Y_j + W_d = 0 \tag{8-40}$$

其中 $W_d = D_K^0 - D_K$，$D_K^0$ 是由近似坐标计算而得。

在实际作业中，可能会遇到下述情况：

（1）$i$ 为已知点，$j$ 为待定点时为

$$\frac{\Delta X_{ij}^0}{D_K^0}\delta Y_j + \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_K^0}\delta Y_j + W_d = 0。$$

（2）$i$ 为待定点，$j$ 为已知点时为

$$-\frac{\Delta X_{ij}^0}{D_K^0}\delta X_i - \frac{\Delta Y_{ij}^0}{D_K^0}\delta Y_i + W_d = 0。$$

（3）$i$，$j$ 均为已知点时，该边虽然也是已知边，但是由于已知点坐标已经参与平差，所以也就没有该边的条件方程式。

8.2.1.4 坐标方位角条件方程式的列立

高精度的方位角（如天文方位角，矿井导线的陀螺方位角）在平差过程中其值保持不变，平差后两端点坐标应该满足方位角条件，即

$$T_{ij} = T_{ij}^0 + \delta T_{ij} \quad 或 \quad \delta T_{ij} + (T_{ij}^0 - T_{ij}) = 0 \tag{8-41}$$

式中 $T_{ij}$——高精度方位角；

$T_{ij}^0$——近似坐标方位角；

$\delta T_{ij}$——近似坐标方位角改正数。

式（8-41）也可写为

$$\delta T_{ij} = a_{ij}\delta_{xi} + b_{ij}\delta_{yi} - a_{ij}\delta_{xj} - b_{ij}\delta_{yj}$$

则方位角条件方程式为

$$a_{ij}\delta_{xi} + b_{ij}\delta_{yi} - a_{ij}\delta_{xj} - b_{ij}\delta_{yj} + W_T = 0 \tag{8-42}$$

其中 $W_T = T_{ij}^0 - T_{ij}$ 是方位角条件闭合差。

在实际作业中，可能会遇到下述情况：

（1）$i$ 是已知点，$j$ 是待定点时为

$$-a_{ij}\delta x_j - b_{ij}\delta y_j + W_T = 0。$$

（2）$i$ 是待定点，$j$ 是已知点时为

$$a_{ij}\delta x_i + b_{ij}\delta y_i + W_T = 0。$$

（3）$i$，$j$ 均为已知点时，该方位角虽然也是已知的，但是由于已知点坐标已经参与平差，所以也就没有该方位角的条件方程式。

方位角条件方程式系数计算公式与方向误差方程式系数计算公式相同。其闭合差计算公式为

$$W_T = 10^4(T_{ij}^0 - T_{ij}) \tag{8-43}$$

式中 $T_{ij}^0$——近似方位角，由近似坐标反算而得；

$T_{ij}$——固定方位角。

### 8.2.2 平面控制网间接平差算法设计

#### 8.2.2.1 误差方程与法方程的组成

在平面控制网平差程序设计中，各待定点的平差坐标和观测了方向值的测站定向角为平差未知参数，无论是方向、边长还是限制条件误差方程式，它们的方程中有一个共同的特点，就是每一个误差方程式至多有 4 个坐标参数（如果观测方向则多一个定向角参数），并且形式固定，所不同的是未知参数的系数和误差方程的常数项计算公式。

在程序设计中，要求观测量权阵为对角阵，即各观测量是相互独立的，它们之间不存在线性或非线性的函数关系。每读取一行观测量信息，即列出一个误差方程式，然后累加到法方程。这是因为法方程系数阵和常数项可以累加的特点，从下面的两个公式中可以证明这一点。（假设法方程系数和常数项为 $n$ 维）

法方程系数阵

$$N_{bb} = B^TPB = \sum_{i=1}^{n}(B_i^TP_iB_i) \tag{8-44}$$

法方程常数项

$$U = B^TPL = \sum_{i=1}^{n}(B_i^TP_iL_i) \tag{8-45}$$

#### 8.2.2.2 方向误差方程式的约化与和方程的组成

在平面控制网按方向间接平差时，由于每个控制点上都有一个定向角未知数，加上各待定点的两个坐标改正未知数，因此，全网未知数的总数为

$$N_x = 2(N_p - N_0) + N_p \tag{8-46}$$

式中 $N_p$——总控制点点数；

$N_0$——已知点点数。

为了节省法方程系数的存储单元和解算时间，应尽量减少未知数的数目，因此应用史赖伯第一约化法则消去定向角未知数。

假设在测站 $k$ 上观测了 $n$ 个方向，可以列出一组方向误差方程式及其相应观测值的权为

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -\delta Z + a_1\delta_{x1} + b_1\delta_{x2} + \cdots + t_1\delta_{xt} + l_1 \\ V_2 &= -\delta Z + a_2\delta_{x1} + b_2\delta_{x2} + \cdots + t_2\delta_{xt} + l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ V_n &= -\delta Z + a_n\delta_{x1} + b_n\delta_{x2} + \cdots + t_n\delta_{xt} + l_n \end{aligned}\right\} \tag{8-47}$$

这一组误差方程式中，都包含有相同的定向角未知数 $\delta Z$，史赖伯第一约化法则是用下列方程式来代替上面的方程组，其结果为

$$\left.\begin{aligned} V'_1 &= a_1\delta_{x1} + b_1\delta_{x2} + \cdots + t_1\delta_{xt} + l_1 \\ V'_2 &= a_2\delta_{x1} + b_2\delta_{x2} + \cdots + t_2\delta_{xt} + l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ V'_n &= a_n\delta_{x1} + b_n\delta_{x2} + \cdots + t_n\delta_{xt} + l_n \\ V'_\Sigma &= [pa]\delta_{x1} + [pb]\delta_{x2} + \cdots + [pt]\delta_{xt} + [pl] - 1/[p] \end{aligned}\right\} \tag{8-48}$$

该方程组称为约化方程组，其中最后一式称为“和方程式”。与上一方程组相比，少了一个共同的未知数 $\delta Z$，增加了一个“和方程式”。但是约化误差方程式已失去了误差方程式的本来含义，仅是一组数学计算式，其中 $V'_1$ 已不是观测值的改正数，只是数学计算中的一个符号。

测站 $k$ 上定向角改正数的计算公式为

$$\delta Z = \frac{V'_\Sigma}{n} = \frac{1}{n}\left\{[a]x_k + [b]y_k - \sum_{i=1}^{n}(a_i\delta x_i + b_i\delta y_i)\right\} \tag{8-49}$$

约化误差方程组之所以能代替原有的误差方程组，是因为二者所组成的法方程对于解算未知数是等价的，证明见附录参考文献。

当应用史赖伯法则时，需强调以下几点：

（1）当按式 $V^TPV = l^TPl + B^TPl\delta x$ 计算 $V^TPV$ 时，其中 $l^TPl$ 一般应用未经约化的误差方程式中的常数项 $l$ 计算。如果平差中仅使用了第一法则，则 $l^TPl$ 可直接用改化后的常数项计算。（$B^TPl\delta x$ 一项则按改化后的方程计算）

（2）当计算单位权中误差时，即使采用了史赖伯法则，网的未知数总数仍为两倍待定点的个数与测站点总数之和。

（3）方向改正数 $V_i$ 的计算，应将定向角改正数和坐标未知数代入未经约化的误差方程式计算。

应用史赖伯第一约化法则也有缺点，消去定向角未知数后的约化误差方程组和原方程组相比，由于在数值计算方面，组成的约化法方程组的制约性较差，因此在使用逐渐趋近法解算法方程组时需要多次逼近，增加了计算的时间，但对于大内存计算机来说已经不是大的问题。

8.2.2.3 *法方程式的答解与求逆*

法方程式是一线性对称方程组，它的解算方法有很多，如高斯约化法，平方根法，赛德尔迭代法等。在这些方法中，高斯约化法是最基本的，也是最常用的一种。其原理是利用连续的加减消元法，依次消去未知数，方程组系数变成一个上三角阵，然后按未知数编号的相反次序逐个回代，从而解出全部未知数。

假设法方程为 $Nx=W$，其中 $N$ 为 $t$ 阶方阵，其形式为

$$N=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1t} \\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{t1} & N_{t2} & \cdots & N_{tt} \end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_t \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix}$$

将法方程的第 1 行乘以$\left(-\frac{N_{2t}}{N_{11}}\right)$，加到第 2 行上去，使第 2 行第 1 个元素变为零，同样方法，将第 1 行乘以$\left(-\frac{N_{it}}{N_{11}}\right)$，使第 $i$ 行的第 1 个元素变为零，这个过程称为约化。经一次约化后的法方程为

$$\left.\begin{aligned} &N_{11}^{(1)}\hat{x}_1+N_{12}^{(1)}\hat{x}_2+\cdots+N_{1t}^{(1)}\hat{x}_t-W_1^{(1)}=0 \\ &N_{22}^{(2)}\hat{x}_2+\cdots+N_{2t}^{(2)}\hat{x}_t-W_2^{(2)}=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &N_{t2}^{(2)}\hat{x}_2+\cdots+N_{tt}^{(2)}\hat{x}_t-W_t^{(2)}=0 \end{aligned}\right\} \tag{8-50}$$

其中

$$N_{1i}^{(1)}=N_{1i},\quad W_1^{(1)}=W_1$$

$$N_{ij}^{(2)}=N_{ij}^{1}-\frac{N_{i1}^{(1)}N_{1i}^{(1)}}{N_{11}^{(1)}},\quad W_i^{(2)}=W_i^{(1)}-\frac{N_{i1}^{(1)}W_1^{(1)}}{N_{11}^{(1)}}$$

同理，可用式（8－50）中第2个方程乘以$\left(-\frac{N_{i2}^{(1)}}{N_{11}^{(1)}}\right)$加到第 $i$ 个方程上（$i=3$，4，…，$t$）消去相应行的第 3 个变量。以此类推，经高斯约化后的方程组变为

$$\left.\begin{aligned} &N_{11}^{(1)}\hat{x}_1+N_{12}^{(1)}\hat{x}_2+\cdots+N_{1i}^{(1)}\hat{x}_i+N_{1j}^{(1)}\hat{x}_j+N_{1K}^{(1)}\hat{x}_K+\cdots+N_{1t}^{(1)}\hat{x}_t-W_1^{(1)}=0 \\ &N_{22}^{(2)}\hat{x}_2+\cdots+N_{2i}^{(2)}\hat{x}_i+N_{2j}^{(2)}\hat{x}_j+N_{2K}^{(2)}\hat{x}_K+\cdots+N_{2t}^{(2)}\hat{x}_t-W_2^{(2)}=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &N_{ii}^{(i)}\hat{x}_i+N_{ij}^{(i)}\hat{x}_j+N_{iK}^{(i)}\hat{x}_k+\cdots+N_{it}^{(i)}\hat{x}_t-W_i^{(i)}=0 \\ &N_{ij}^{(i+1)}\hat{x}_j+N_{jK}^{(i+1)}\hat{x}_K+\cdots+N_{jt}^{(i+1)}\hat{x}_t-W_j^{(i+1)}=0 \\ &N_{KK}^{(K)}\hat{x}_K+\cdots+N_{Kt}^{(K)}\hat{x}_t-W_K^{(K)}=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &N_{tt}^{(t)}\hat{x}_t-W_t^{(t)}=0 \end{aligned}\right\} \tag{8-51}$$

式（8－51）又称为等值方程组，其中 $N_{jk}^{(i)}$ 为约化系数，按约化规则可写出下列递推公式

$$\left.\begin{aligned} N_{jk}^{(i+1)} &= N_{jk} - \sum_{r=1}^{i} N_{rj}^{(r)} N_{rk}^{(r)} / N_{rr}^{(r)} \\ W_j^{(i+1)} &= W_j - \sum_{r=1}^{i} N_{rj}^{(r)} W_r^{(r)} / N_{rr}^{(r)} \end{aligned}\right\} \tag{8-52}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t-1;\ j=i+1,\ i+2,\ \cdots,\ t;\ k=j;\ j=1,\ \cdots,\ t)$$

求解的过程与约化的过程相反，先求出 $\hat{x}_t$，然后依次求出 $\hat{x}_{t-1}$，$\hat{x}_{t-2}$，$\hat{x}_1$，这个过程称为回代过程。回代过程可写成表达式为

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_t &= W_t^t / N_{tt}^t \\ \hat{x}_i &= (W_i^{(i)} - \sum_{r=1}^{t} N_{ir}^{(i)} \hat{x}_r) / N_{ii}^{(i)} \end{aligned}\right\} \tag{8-53}$$

$$(i=t-1,\ t-2,\ \cdots,\ 2,\ 1)$$

高斯约化法的计算工作主要是按计算的约化系数，回代求解。因此，它们是高斯约化法的基本计算公式。在用计算机进行程序设计时，可以将这些递推公式写成赋值的形式。间接平差实际上是一个反复迭代的过程，直至坐标改正数的绝对值小于一个给定的极小值（一般为1mm），其迭代次数取决于近似坐标的精确程度，一般来讲是2～3次。

### 8.2.3 平差主要子模块流程图及代码实现

（1）方向误差方程式及法方程的组成流程，如图8－4所示。

（2）边长误差方程式及法方程的组成流程，如图8－5所示。

（3）限制条件方程式及法方程的组成流程，如图8－6所示。

### 8.2.4 导线网算例

#### 8.2.4.1 程序主要功能流程

该软件设计时采用附有限制条件的间接平差原理，利用C++语言编写，在Visual C++ 6.0平台上调试通过。程序主模块有平面控制网概算、平面控制网平差、平面控制网检核、Access数据库集中管理、平差结果的可视化等。其中控制网概算模块又分为测角网概算、导线网概算、测边网概算、边角网概算4个子模块，程序执行概算模块后生成了概算数据库文件，以观测的方向和边长值、概算的近似坐标、固定方位角和基线边为平差元素，可以在控制网平差模块中进行各种类型经典控制网的平差计算和精度评定。平差结果数据库文件中包含了坐标平差值、方向平差值和边长平差值，精度评定包括了点位中误差、方向和边长中误差、边长相对中误差、点位误差椭圆、相对误差椭圆等信息。利用平差后的数据库文件，可以实现控制网网形显示、点位类型设定、点位误差椭圆以及相对误差椭圆显示等功能。利用平差后生成的检核数据文件（以平差后的坐标、方向和边长等信息组成的文本文件）可以再次进行平差，以检核平差结果是否有误。控制网平差主界面如图8－7所示。

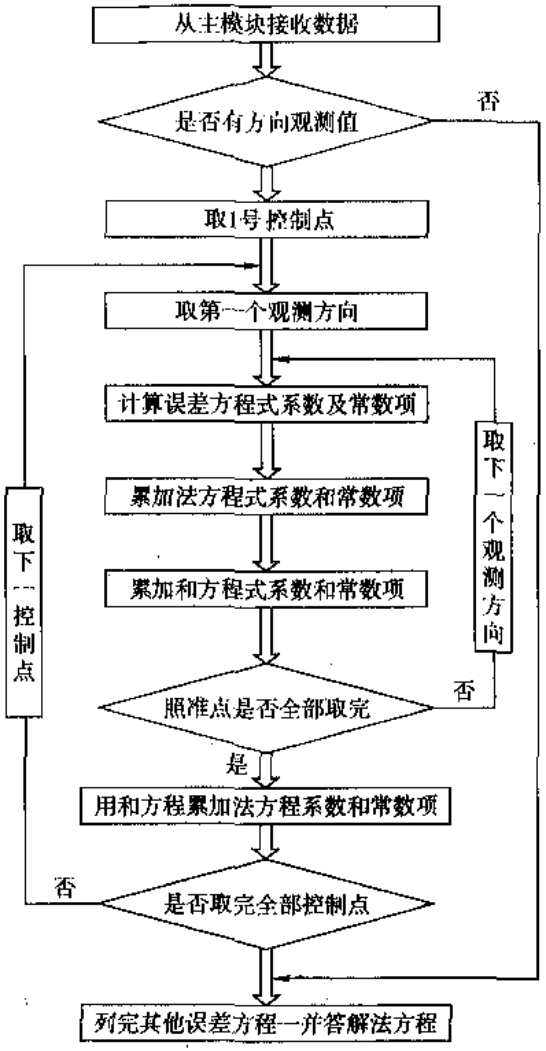



图8-4 方向误差方程式及法方程组成流程

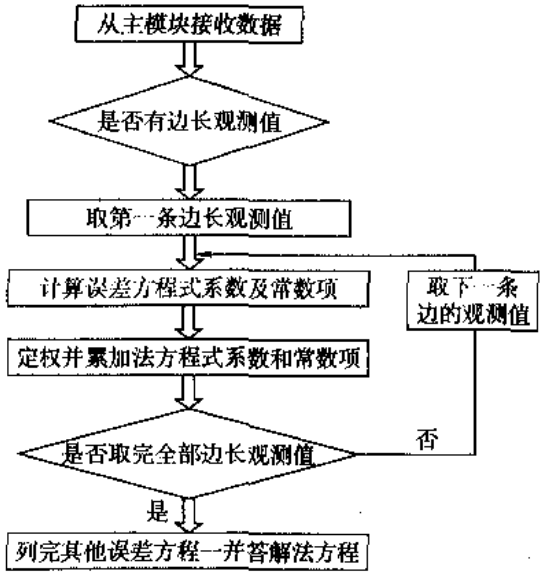



图8-5 边长误差方程式及法方程组成流程

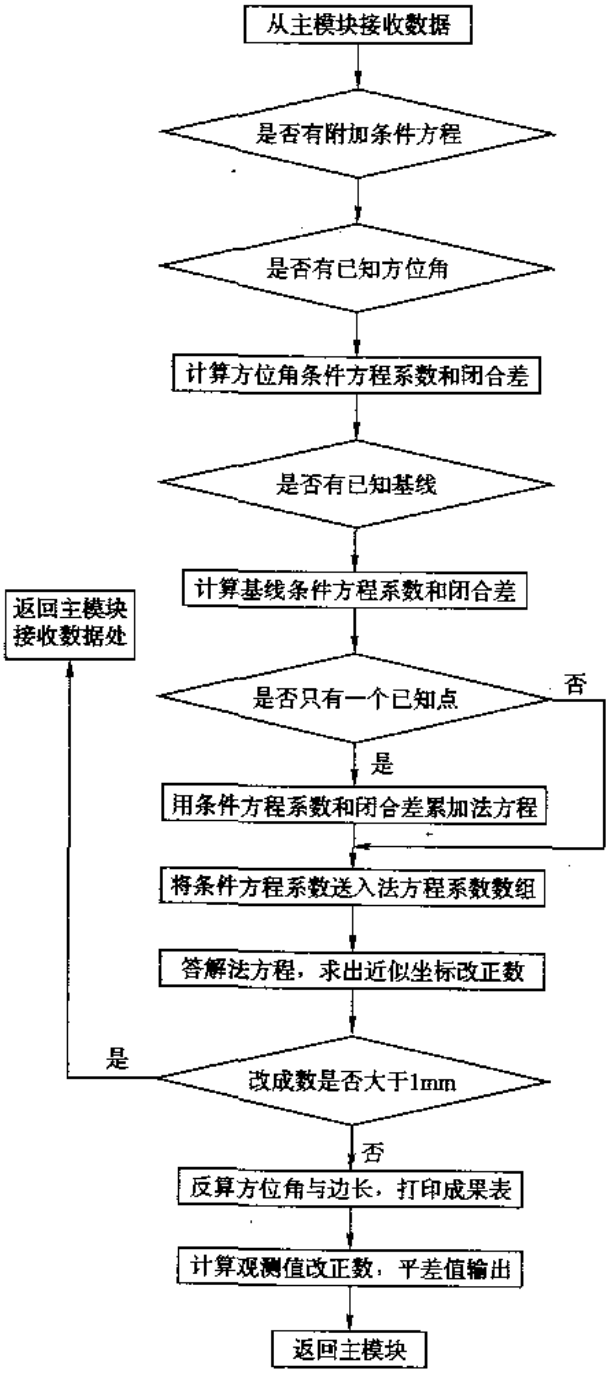



图 8-6　限制条件方程式及法方程组成流程

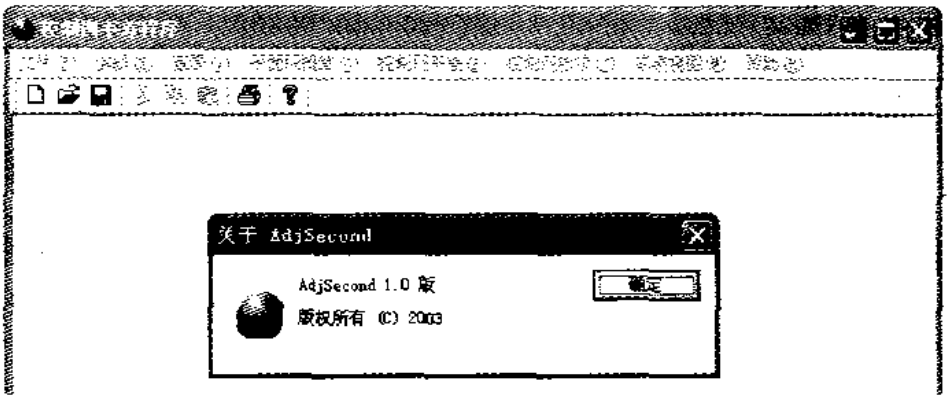



图 8-7　控制网平差主界面

无论哪种类型的平面控制网，原始数据库文件的格式都一样，数据库采用 Access2000，向上兼容 2003 等版本。以某地一导线控制网为例来说明平面网平差的流程。

8.2.4.2　原始数据库文件的编制

原始 Access 数据库中有 6 个表文件（记录表），如图 8-8 所示，分别为：控制网信息表、控制点数据表、限制条件值表、方向观测值表、边长观测值表、限制条件推算线路表。另外还有一个导线网中各线路的数据文件，其入径与存原始数据的数据库的入径相同。只有导线网平差才需要这个线路文本文件，其他平面网均不需要，按表中的各个字段

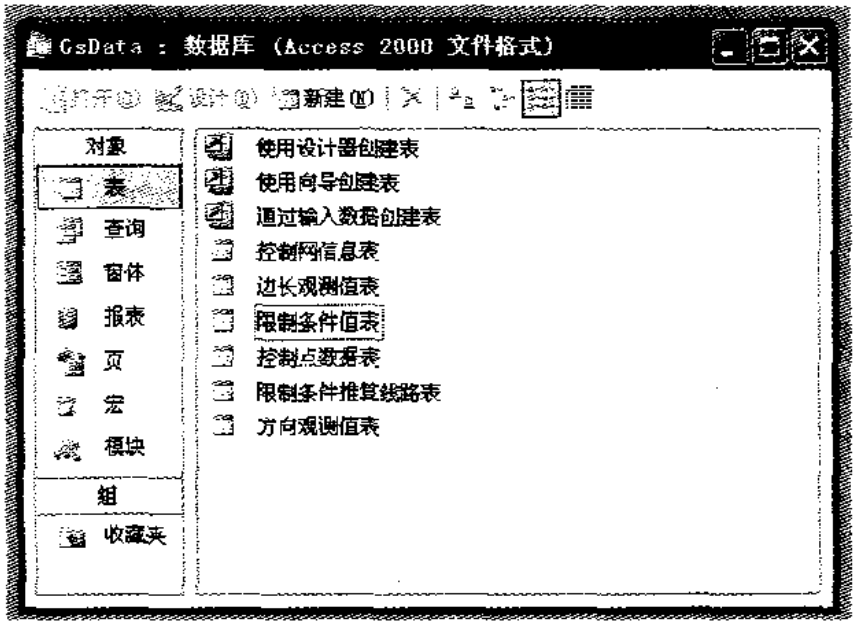



图 8-8　概算原始数据库

名含义填写有关数据。

（1）控制网信息表。控制网信息表如图 8－9 所示，只有一行信息。

控制网信息表 : 表

| 总点数 | 未知点数 | 方向观测值个数 | 边长观测值个数 | 限制条件数 | 测距固定误差 | 测距比例误差 | 测角中误差 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 28 | 13 | 0 | 5.0 | 3 | 2.5 |

记录: 1 共有记录数: 1

图 8－9　控制网信息表

（2）控制点数据表。在控制点数据表中点的编号应从已知点编起，中间不允许出现断号；未知点的平面坐标输入－1.0 和－1.0（图 8－10）。

控制点数据表 : 表

| 点号 | 点名 | x坐标 | y坐标 |
|---|---|---|---|
| 1 | III01 | 4555300.580 | 540525.439 |
| 2 | III02 | 4558752.939 | 537378.407 |
| 3 | IV3 | -1.0 | -1.0 |
| 4 | IV4 | -1.0 | -1.0 |
| 5 | IV5 | -1.0 | -1.0 |
| 6 | IV6 | -1.0 | -1.0 |
| 7 | IV7 | -1.0 | -1.0 |
| 8 | IV8 | -1.0 | -1.0 |
| 9 | IV9 | -1.0 | -1.0 |
| 10 | IV10 | -1.0 | -1.0 |
| 11 | IV11 | -1.0 | -1.0 |
| 12 | IV12 | -1.0 | -1.0 |

记录: 1 共有记录数: 12

图 8－10　控制点数据表

（3）在限制条件值表的条件类型字段中，方位条件输入 1，条件值是方位角，按度－分－秒格式输入，基线条件输入 2，基线边长度输入以米（m）为单位，无条件可越过（图 8－11）。

限制条件值表 : 表

| 条件类型 | 起点号 | 终点号 | 条件值 |
|---|---|---|---|

图 8－11　限制条件值表

（4）方向观测值表。设站点的点号是从小到大依次排列（未设站点的可越过），在每一设站处的照准点是按零方向起顺时针依次排列（方向值是经过改正后的高斯平面上的方向值，边长值也是如此），如图 8－12 所示。

方向观测值表 : 表

| 设站点号 | 照准点号 | 观测方向值 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0.0 |
| | 6 | 262.49568 |
| 2 | 1 | 0.0 |
| | 3 | 39.301057 |
| | 12 | 82.043655 |
| 3 | 2 | 0.0 |
| | 4 | 141.10033 |
| 4 | 3 | 0.0 |
| | 5 | 180.55512 |
| 5 | 4 | 0.0 |
| | 6 | 219.382207 |
| 6 | 8 | 0.0 |
| | 7 | 23.202921 |
| | 5 | 34.471317 |
| | 1 | 76.22483 |
| 7 | 6 | 0.0 |
| | 8 | 41.415288 |
| 8 | 9 | 0.0 |
| | 7 | 49.452907 |
| | 6 | 164.42591 |
| 9 | 8 | 0.0 |
| | 10 | 155.175499 |
| 10 | 9 | 0.0 |
| | 11 | 188.131262 |
| 11 | 10 | 0.0 |
| | 12 | 182.57440 |
| 12 | 11 | 0.0 |
| | 2 | 253.512596 |

记录: 1 共有记录数: 28

图 8－12　方向观测值表

（5）限制条件推算线路表。输入各推算线路的点号，此处指的是限制条件表中列出的限制条件，没有限制条件，此表可不用输入信息（图 8－13）。

（6）边长观测值表（图 8－14）。

（7）线路数据文本文件。文件第一行前一个数为闭合线路数，后一个为附合线路数。从第二行开始输入各线路经过的点号，负号表示前点顺序排列至该点，例如，3 －12 相当于 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12，12 －6 相当于 12 11 10 9 8 7 6（图 8－15）。

8.2.4.3　平面网概算

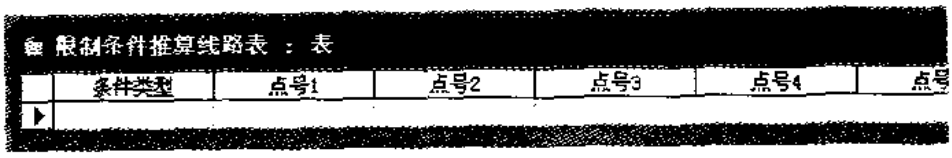



图 8-13 限制条件推算线路表




图 8-14 边长观测值表

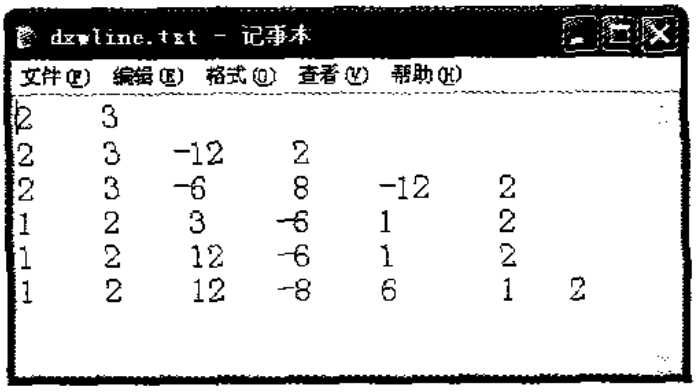



图 8-15 线路数据文本文件

执行概算功能模块，自动生成了可以进行平差的数据库文件 gsout. mdb，概算后的数据库文件中共有 5 个表（或者记录集），如图 8-16 所示；同时生成了一个导线网线路计算结果的文本文件（图 8-17），可以进行导线网方位角闭合差、导线全长相对闭合差的检核。

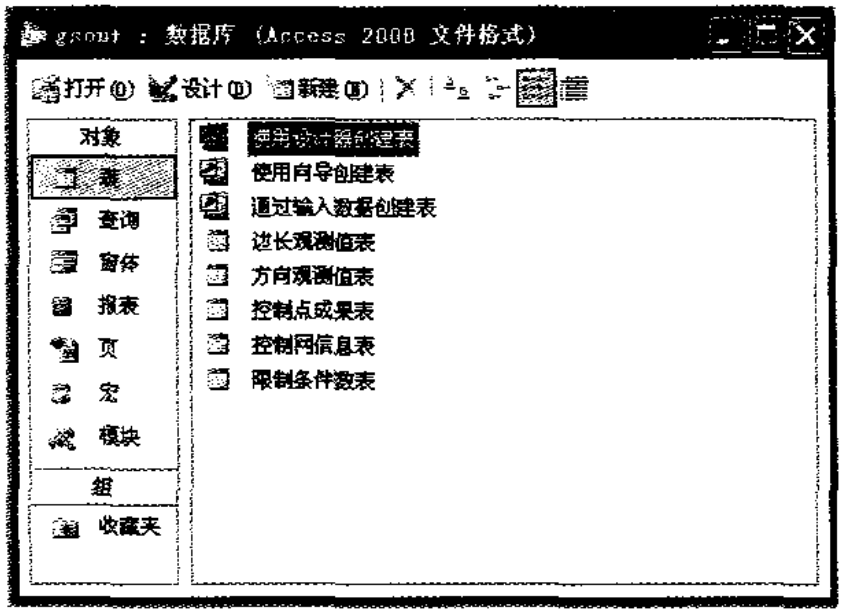
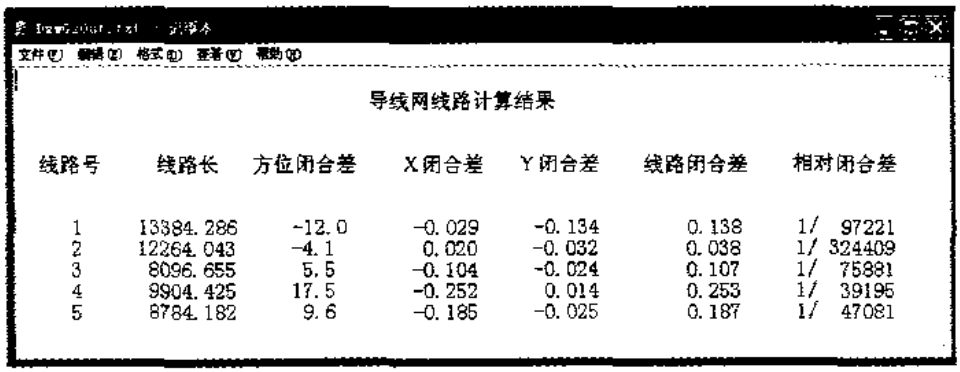



图 8-16 概算后的数据库



导线网线路计算结果

| 线路号 | 线路长 | 方位闭合差 | X闭合差 | Y闭合差 | 线路闭合差 | 相对闭合差 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 13384.286 | -12.0 | -0.029 | -0.134 | 0.138 | 1/ 97221 |
| 2 | 12264.043 | -4.1 | 0.020 | -0.032 | 0.038 | 1/ 324409 |
| 3 | 8096.655 | 5.5 | -0.104 | -0.024 | 0.107 | 1/ 75881 |
| 4 | 9904.425 | 17.5 | -0.252 | 0.014 | 0.253 | 1/ 39195 |
| 5 | 8784.182 | 9.6 | -0.185 | -0.025 | 0.187 | 1/ 47081 |

图 8-17 概算结果文本文件

在控制点成果表中，存放着已知点的坐标，对未知点，坐标是经过概算之后的近似值。其他记录集的内容与原始数据库文件完全相同（图 8-18）。

8.2.4.4 平差成果的数据库集中管理

概算后生成的数据库文件，进行平差时，只需使用 VC 的消息驱动机制，利用菜单进行操作，非常方便。在平差结果输出时，用户可以选择输出结果的保存格式。选择文本文件单选按钮，平差结果以文本的形式保存在磁盘指定位置上，选择 Access 文件单选钮，平差结果将以数据库格式保存在计算机上（图 8-19）。

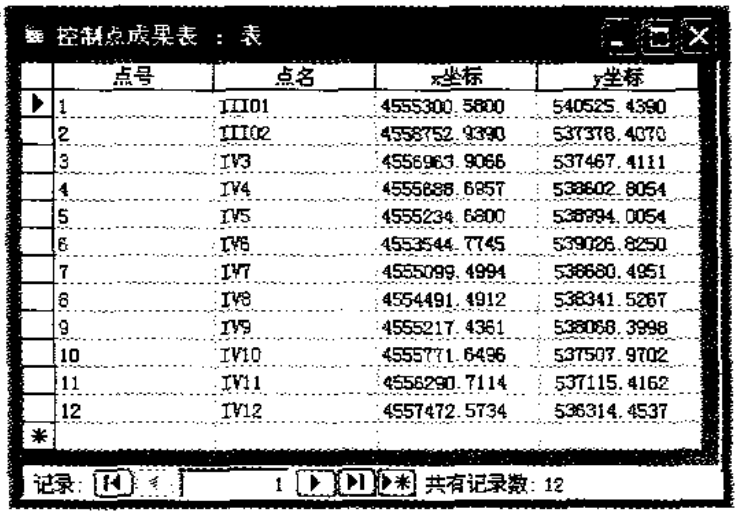



图 8－18　概算平面坐标

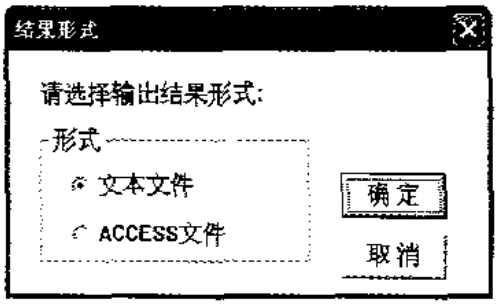



图 8－19　输出结果对话框

如果选择文本保存结果的形式，则生成了如下的平差结果文本文件。

平差结果文件

| 测站点号 | 测站点名 | X 坐标 | Y 坐标 | 平差边长 | 平差方位 | 照准点号 | 照准点名 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | III01 | 4 555 300.580 0 | 540 525.439 0 | 4 671.465 8 | 317.385 623 | 2 | III02 |
| | | | | 2 308.400 0 | 220.285 029 | 6 | IV6 |
| 2 | III02 | 4 558 752.939 0 | 537 378.407 0 | 4 671.465 8 | 137.385 624 | 1 | III01 |
| | | | | 1 791.241 9 | 177.090 525 | 3 | IV3 |
| | | | | 1 664.731 6 | 219.433 251 | 12 | IV12 |
| 3 | IV3 | 4 556 963.910 3 | 537 467.424 6 | 1 791.241 9 | 357.090 524 | 2 | III02 |
| | | | | 1 707.417 4 | 138.190 610 | 4 | IV4 |
| 4 | IV4 | 4 555 688.723 4 | 538 602.841 9 | 1 707.417 4 | 318.190 609 | 3 | IV3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 599.304 6 | 139.145 630 | 5 | IV5 |
| 5 | IV5 | 4 555 234.718 3 | 538 994.052 0 | 599.304 6 | 319.145 629 | 4 | IV4 |
| | | | | 1 690.284 1 | 178.531 787 | 6 | IV6 |
| 6 | IV6 | 4 553 544.752 4 | 539 026.846 4 | 1 168.719 2 | 324.060 326 | 8 | IV8 |
| | | | | 1 592.831 4 | 347.263 583 | 7 | IV7 |
| | | | | 1 690.284 1 | 358.531 786 | 5 | IV5 |
| | | | | 2 308.400 0 | 40.285 030 | 1 | III01 |
| 7 | IV7 | 4 555 099.485 3 | 538 680.555 5 | 1 592.831 4 | 167.263 584 | 6 | IV6 |
| | | | | 696.130 3 | 209.083 123 | 8 | IV8 |
| 8 | IV8 | 4 554 491.474 4 | 538 341.556 8 | 775.623 5 | 339.230 540 | 9 | IV9 |
| | | | | 696.130 3 | 29.083 124 | 7 | IV7 |
| | | | | 1 168.719 2 | 144.060 328 | 6 | IV6 |
| 9 | IV9 | 4 555 217.431 9 | 538 068.468 0 | 775.623 5 | 159.230 541 | 8 | IV8 |
| | | | | 788.182 3 | 314.410 288 | 10 | IV10 |
| 10 | IV10 | 4 555 771.680 0 | 537 508.074 9 | 788.182 3 | 134.410 289 | 9 | IV9 |
| | | | | 650.785 4 | 322.541 804 | 11 | IV11 |
| 11 | IV11 | 4 556 290.770 3 | 537 115.561 3 | 650.785 4 | 142.541 805 | 10 | IV10 |
| | | | | 1 427.734 7 | 325.520 448 | 12 | IV12 |
| 12 | IV12 | 4 557 472.572 3 | 536 314.455 6 | 1 427.734 7 | 145.520 449 | 11 | IV11 |
| | | | | 1 664.731 6 | 39.433 252 | 2 | III02 |

| 测站点号 | 测站点名 | 观测方向值 | 改正数 | 平差方向值 | Ri | Wi | 照准点名 | 照准点号 | 粗差定位 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | III01 | 0.000 000 | 1.37 | 0.000 000 | 0.41 | 1.22 | III02 | 2 | ^ |
| | | 262.495 680 | −1.37 | 262.495 406 | 0.41 | 1.22 | IV6 | 6 | ^ |
| 2 | III02 | 0.000 000 | 0.62 | 0.000 000 | 0.48 | 0.50 | III01 | 1 | ^ |
| | | 39.301 057 | −0.95 | 39.300 900 | 0.40 | 0.85 | IV3 | 3 | ^ |
| | | 82.043 655 | 0.33 | 82.043 626 | 0.40 | 0.30 | IV12 | 12 | ^ |
| 3 | IV3 | 0.000 000 | 1.22 | 0.000 000 | 0.18 | 1.61 | III02 | 2 | ^ |
| | | 141.100 330 | −1.22 | 141.100 086 | 0.18 | 1.61 | IV4 | 4 | ^ |
| 4 | IV4 | 0.000 000 | 0.49 | 0.000 000 | 0.11 | 0.83 | IV3 | 3 | ^ |
| | | 180.555 120 | −0.49 | 180.555 021 | 0.11 | 0.83 | IV5 | 5 | ^ |
| 5 | IV5 | 0.000 000 | 0.25 | 0.000 000 | 0.15 | 0.36 | IV4 | 4 | ^ |
| | | 219.382 207 | −0.25 | 219.382 158 | 0.15 | 0.36 | IV6 | 6 | ^ |
| 6 | IV6 | 0.000 000 | −0.88 | 0.000 000 | 0.52 | 0.69 | IV8 | 8 | ^ |
| | | 23.202 921 | 2.48 | 23.203 257 | 0.52 | 1.94 | IV7 | 7 | ^ |
| | | 34.471 317 | 0.54 | 34.471 459 | 0.35 | 0.52 | IV5 | 5 | ^ |
| | | 76.224 830 | −2.14 | 76.224 703 | 0.42 | 1.87 | III01 | 1 | ^ |
| 7 | IV7 | 0.000 000 | −1.26 | 0.000 000 | 0.37 | 1.17 | IV6 | 6 | ^ |
| | | 41.415 288 | 1.26 | 41.415 539 | 0.37 | 1.17 | IV8 | 8 | ^ |
| 8 | IV8 | 0.000 000 | 1.48 | 0.000 000 | 0.16 | 2.10 | IV9 | 9 | ^ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 49.452 907 | -1.74 | 49.452 585 | 0.26 | 1.94 | IV7 | 7 | ^ |
| | | 164.425 910 | 0.26 | 164.425 788 | 0.30 | 0.27 | IV6 | 6 | ^ |
| 9 | IV9 | 0.000 000 | -1.24 | 0.000 000 | 0.10 | 2.22 | IV8 | 8 | ^ |
| | | 155.175 499 | 1.24 | 155.175 747 | 0.10 | 2.22 | IV10 | 10 | ^ |
| 10 | IV10 | 0.000 000 | -1.27 | 0.000 000 | 0.09 | 2.41 | IV9 | 9 | ^ |
| | | 188.131 262 | 1.27 | 188.131 515 | 0.09 | 2.41 | IV11 | 11 | ^ |
| 11 | IV11 | 0.000 000 | -1.21 | 0.000 000 | 0.10 | 2.13 | IV10 | 10 | ^ |
| | | 182.574 400 | 1.21 | 182.574 643 | 0.10 | 2.13 | IV12 | 12 | ^ |
| 12 | IV12 | 0.000 000 | -1.03 | 0.000 000 | 0.22 | 1.26 | IV11 | 11 | ^ |
| | | 253.512 596 | 1.03 | 253.512 803 | 0.22 | 1.26 | III02 | 2 | ^ |

| 点号 | 点名 | 观测边长 | 改正数 | 平差边长 | Ri | Wi | 点名 | 点号 | 粗差定位 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | III01 | 2 308.397 0 | 0.003 0 | 2 308.400 0 | 0.04 | 1.74 | IV6 | 6 | ^ |
| 2 | III02 | 1 791.245 0 | -0.003 1 | 1 791.241 9 | 0.13 | 1.14 | IV3 | 3 | ^ |
| 2 | III02 | 1 664.732 0 | -0.000 4 | 1 664.731 6 | 0.03 | 0.29 | IV12 | 12 | ^ |
| 3 | IV3 | 1 707.420 0 | -0.002 6 | 1 707.417 4 | 0.14 | 0.98 | IV4 | 4 | ^ |
| 4 | IV4 | 599.306 0 | -0.001 4 | 599.304 6 | 0.08 | 0.98 | IV5 | 5 | ^ |
| 5 | IV5 | 1 690.287 0 | -0.002 9 | 1 690.284 1 | 0.12 | 1.15 | IV6 | 6 | ^ |
| 6 | IV6 | 1 168.720 0 | -0.000 8 | 1 168.719 2 | 0.35 | 0.24 | IV8 | 8 | ^ |
| 6 | IV6 | 1 592.832 0 | -0.000 6 | 1 592.831 4 | 0.42 | 0.13 | IV7 | 7 | ^ |
| 7 | IV7 | 696.131 0 | -0.000 7 | 696.130 3 | 0.19 | 0.30 | IV8 | 8 | ^ |
| 8 | IV8 | 775.625 0 | -0.001 5 | 775.623 5 | 0.05 | 1.19 | IV9 | 9 | ^ |
| 9 | IV9 | 788.184 0 | -0.001 7 | 788.182 3 | 0.05 | 1.32 | IV10 | 10 | ^ |
| 10 | IV10 | 650.787 0 | -0.001 6 | 650.785 4 | 0.05 | 1.28 | IV11 | 11 | ^ |
| 11 | IV11 | 1 427.737 0 | -0.002 3 | 1 427.734 7 | 0.08 | 1.27 | IV12 | 12 | ^ |

精度评定结果

| 点号 | 点名 | 点位误差 | | | 误差椭圆元素 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | MX | MY | MP | E | F | AE |
| 3 | IV3 | 0.008 5 | 0.015 3 | 0.017 5 | 0.015 3 | 0.008 5 | 88.221 06 |
| 4 | IV4 | 0.011 3 | 0.017 9 | 0.021 1 | 0.018 0 | 0.011 0 | 80.012 05 |
| 5 | IV5 | 0.011 5 | 0.017 1 | 0.020 5 | 0.017 1 | 0.011 4 | 85.041 38 |
| 6 | IV6 | 0.010 5 | 0.015 0 | 0.018 3 | 0.015 6 | 0.009 6 | 110.304 64 |
| 7 | IV7 | 0.012 7 | 0.017 4 | 0.021 5 | 0.017 4 | 0.012 7 | 90.060 74 |
| 8 | IV8 | 0.013 3 | 0.014 8 | 0.019 9 | 0.014 9 | 0.013 2 | 104.480 59 |
| 9 | IV9 | 0.014 0 | 0.017 0 | 0.022 0 | 0.017 1 | 0.013 9 | 77.420 32 |
| 10 | IV10 | 0.013 8 | 0.018 3 | 0.022 9 | 0.018 5 | 0.013 6 | 78.135 39 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | IV11 | 0.012 8 | 0.017 7 | 0.021 8 | 0.017 7 | 0.012 8 | 87.595 10 |
| 12 | IV12 | 0.011 4 | 0.012 2 | 0.016 7 | 0.014 2 | 0.008 7 | 131.041 36 |

相对精度评定结果

| 点号 | 点名 | 方位误差 | 边长误差 | 相对误差 | 相对 | 误差 | 椭圆 | 元素 | 点名 | 点号 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | E | F | MP | AE | | |
| 1 | III01 | 1.34 | 0.010 | 1/ 221 189 | 0.015 6 | 0.009 6 | 0.018 3 | 110.304 64 | IV6 | 6 |
| 2 | III02 | 1.77 | 0.009 | 1/210 172 | 0.015 3 | 0.008 5 | 0.017 5 | 88.221 06 | IV3 | 3 |
| 2 | III02 | 1.76 | 0.009 | 1/ 191 614 | 0.014 2 | 0.008 7 | 0.016 7 | 131.041 36 | IV12 | 12 |
| 3 | IV3 | 1.57 | 0.008 | 1/ 205 856 | 0.013 0 | 0.008 3 | 0.015 4 | 51.275 35 | IV4 | 4 |
| 4 | IV4 | 2.15 | 0.006 | 1/ 940 74 | 0.006 4 | 0.006 3 | 0.008 9 | 128.265 33 | IV5 | 5 |
| 5 | IV5 | 2.08 | 0.008 | 1/203 181 | 0.017 0 | 0.008 3 | 0.019 0 | 89.495 82 | IV6 | 6 |
| 6 | IV6 | 2.08 | 0.006 | 1/ 189 780 | 0.011 8 | 0.006 1 | 0.013 3 | 58.141 37 | IV8 | 8 |
| 6 | IV6 | 2.09 | 0.007 | 1/ 243 352 | 0.016 2 | 0.006 5 | 0.017 4 | 79.435 28 | IV7 | 7 |
| 7 | IV7 | 2.59 | 0.006 | 1/ 114 483 | 0.008 8 | 0.006 0 | 0.010 7 | 110.321 86 | IV8 | 8 |
| 8 | IV8 | 2.29 | 0.007 | 1/ 115 968 | 0.008 7 | 0.006 6 | 0.010 9 | 79.375 01 | IV9 | 9 |
| 9 | IV9 | 2.21 | 0.007 | 1/ 117 373 | 0.008 4 | 0.006 7 | 0.010 8 | 47.145 08 | IV10 | 10 |
| 10 | IV10 | 2.19 | 0.007 | 1/ 998 27 | 0.006 9 | 0.006 5 | 0.009 5 | 48.420 47 | IV11 | 11 |
| 11 | IV11 | 2.03 | 0.008 | 1/181 143 | 0.014 1 | 0.007 8 | 0.016 1 | 51.442 09 | IV12 | 12 |

如果选择数据库输出的结果形式（图8－20），则平差输出的成果数据库文件中共有7

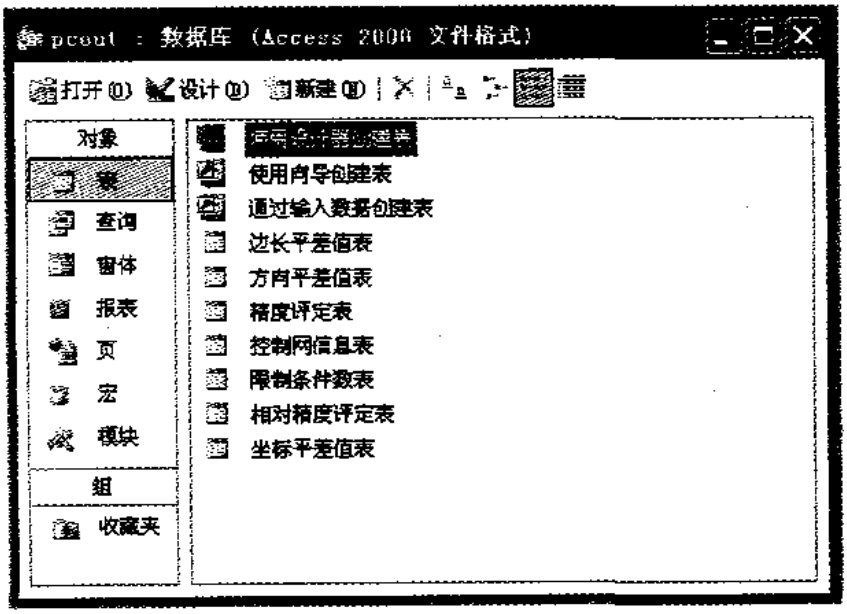
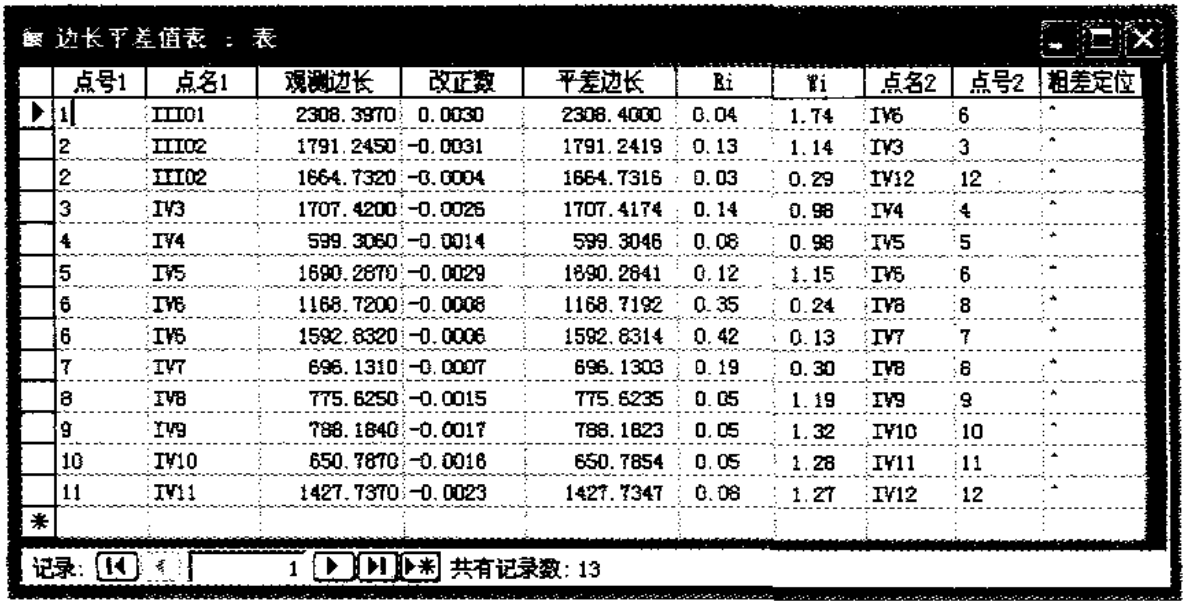



图8－20　平差结果数据库



边长平差值表 : 表

| | 点号1 | 点名1 | 观测边长 | 改正数 | 平差边长 | Ri | Wi | 点名2 | 点号2 | 粗差定位 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ▶ | 1 | III01 | 2308.3970 | 0.0030 | 2308.4000 | 0.04 | 1.74 | IV6 | 6 | * |
| | 2 | III02 | 1791.2450 | -0.0031 | 1791.2419 | 0.13 | 1.14 | IV3 | 3 | * |
| | 2 | III02 | 1664.7320 | -0.0004 | 1664.7316 | 0.03 | 0.29 | IV12 | 12 | * |
| | 3 | IV3 | 1707.4200 | -0.0026 | 1707.4174 | 0.14 | 0.98 | IV4 | 4 | * |
| | 4 | IV4 | 599.3060 | -0.0014 | 599.3046 | 0.08 | 0.98 | IV5 | 5 | * |
| | 5 | IV5 | 1690.2670 | -0.0029 | 1690.2641 | 0.12 | 1.15 | IV6 | 6 | * |
| | 6 | IV6 | 1168.7200 | -0.0008 | 1168.7192 | 0.35 | 0.24 | IV8 | 8 | * |
| | 6 | IV6 | 1592.8320 | -0.0006 | 1592.8314 | 0.42 | 0.13 | IV7 | 7 | * |
| | 7 | IV7 | 696.1310 | -0.0007 | 696.1303 | 0.19 | 0.30 | IV8 | 8 | * |
| | 8 | IV8 | 775.6250 | -0.0015 | 775.6235 | 0.05 | 1.19 | IV9 | 9 | * |
| | 9 | IV9 | 788.1840 | -0.0017 | 788.1823 | 0.05 | 1.32 | IV10 | 10 | * |
| | 10 | IV10 | 650.7870 | -0.0016 | 650.7854 | 0.05 | 1.28 | IV11 | 11 | * |
| | 11 | IV11 | 1427.7370 | -0.0023 | 1427.7347 | 0.08 | 1.27 | IV12 | 12 | * |
| * | | | | | | | | | | |

记录: 1 共有记录数: 13

图 8-21 边长平差值

个表,如图 8-21 ~ 图 8-27 所示。在方向平差值表和边长平差值表中，包含了观测值、平差改正数、平差值、内外可靠性、粗差定位等平差信息。在坐标平差值表中，包含有各待定点的平差坐标，测站点与照准点的平差边长，平差方位等信息。在精度评定表中，包含有每个待定点的误差椭圆元素 $E$，$F$，$AE$，还有点的 $X$，$Y$ 方向的中误差，点位中误差等信息。在控制网信息表中，最后的一个元素是平差后的单位权中误差。在相对精度评定表中，每一条记录是观测了方向和边长的两个端点的方位误差，边长误差，相对误差，相对误差椭圆元素 $E$，$F$，$AE$，点位误差 $MP$ 等信息。边的单位为米（m），方向的单位为度分秒（°′″）。

8.2.4.5 平差成果的可视化

选择网形显示功能，打开平差后的数据库结果文件，能自动生成控制网的网形图，同时可以设定控制点的类型，例如 GPS 点、三角点、导线点等。另外，在图形显示的同时还会生成一个后缀为 SCR 的数据文件，在 CAD 的命令栏中键入 SCR 后根据提示选取文件，会自动生成控制网图，用户只需进行适当的修饰后便可用于输出。

用鼠标在屏幕上框选出要放大的区域即可见到放大后的图形，如果还显示不清可继续框选放大。单击右键可缩小放大的图形直到初始显示状态。通过成果视图菜单中的“字体…”选项可对点名或点号的大小颜色等进行设置。通过边属性、点属性菜单项，可直观地看到平差后各边、点的精度。控制网、控制网点属性、控制网边长属性如图 8-28、

方向平差值表 : 表

| | 测站点号 | 测站点名 | 观测方向值 | 改正数 | 平差方向值 | Ri | Yi | 照准点名 | 照准点号 | 粗差定位 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ▶ | 1 | III01 | 0.000000 | 1.37 | 0.000137 | 0.41 | 1.22 | III02 | 2 | |
| | | | 262.495680 | -1.37 | 262.495543 | 0.41 | 1.22 | IV6 | 6 | |
| | 2 | III02 | 0.000000 | 0.82 | 0.000082 | 0.48 | 0.50 | III01 | 1 | |
| | | | 39.301057 | -0.95 | 39.300962 | 0.40 | 0.85 | IV3 | 3 | |
| | | | 82.043655 | 0.33 | 82.043688 | 0.40 | 0.30 | IV12 | 12 | |
| | 3 | IV3 | 0.000000 | 1.22 | 0.000122 | 0.18 | 1.61 | III02 | 2 | |
| | | | 141.100330 | -1.22 | 141.100208 | 0.18 | 1.61 | IV4 | 4 | |
| | 4 | IV4 | 0.000000 | 0.49 | 0.000049 | 0.11 | 0.83 | IV3 | 3 | |
| | | | 180.555120 | -0.49 | 180.555071 | 0.11 | 0.83 | IV5 | 5 | |
| | 5 | IV5 | 0.000000 | 0.25 | 0.000025 | 0.15 | 0.36 | IV4 | 4 | |
| | | | 219.382207 | -0.25 | 219.382182 | 0.15 | 0.36 | IV6 | 6 | |
| | 6 | IV6 | 0.000000 | -0.88 | -0.000088 | 0.52 | 0.69 | IV8 | 8 | |
| | | | 23.202921 | 2.48 | 23.203169 | 0.52 | 1.94 | IV7 | 7 | |
| | | | 34.471317 | 0.54 | 34.471371 | 0.35 | 0.52 | IV5 | 5 | |
| | | | 76.224830 | -2.14 | 76.224616 | 0.42 | 1.87 | III01 | 1 | |
| | 7 | IV7 | 0.000000 | -1.26 | -0.000126 | 0.37 | 1.17 | IV5 | 6 | |
| | | | 41.415288 | 1.26 | 41.415414 | 0.37 | 1.17 | IV8 | 8 | |
| | 8 | IV8 | 0.000000 | 1.48 | 0.000148 | 0.16 | 2.10 | IV9 | 9 | |
| | | | 49.452907 | -1.74 | 49.452733 | 0.26 | 1.94 | IV7 | 7 | |
| | | | 164.425910 | 0.26 | 164.425936 | 0.30 | 0.27 | IV5 | 6 | |
| | 9 | IV9 | 0.000000 | -1.24 | -0.000124 | 0.10 | 2.22 | IV8 | 8 | |
| | | | 155.175499 | 1.24 | 155.175623 | 0.10 | 2.22 | IV10 | 10 | |
| | 10 | IV10 | 0.000000 | -1.27 | -0.000127 | 0.09 | 2.41 | IV9 | 9 | |
| | | | 188.131262 | 1.27 | 188.131389 | 0.09 | 2.41 | IV11 | 11 | |
| | 11 | IV11 | 0.000000 | -1.21 | -0.000121 | 0.10 | 2.13 | IV10 | 10 | |
| | | | 182.574400 | 1.21 | 182.574521 | 0.10 | 2.13 | IV12 | 12 | |
| | 12 | IV12 | 0.000000 | -1.03 | -0.000103 | 0.22 | 1.26 | IV11 | 11 | |
| | | | 253.512596 | 1.03 | 253.512699 | 0.22 | 1.26 | III02 | 2 | |
| * | | | | | | | | | | |

记录: 1 共有记录数: 28

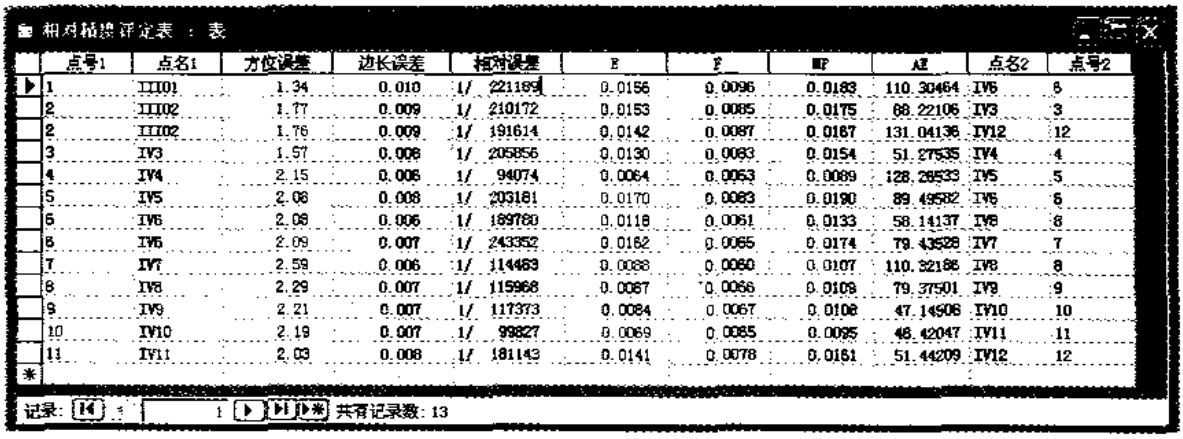
图 8-22 方向平差值

精度评定表 : 表

| | 点号 | 点名 | MX | MY | MP | E | F | AZ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ▶ | 3 | IV3 | 0.0085 | 0.0153 | 0.0175 | 0.0153 | 0.0085 | 88.22106 |
| | 4 | IV4 | 0.0113 | 0.0179 | 0.0211 | 0.0180 | 0.0110 | 80.01205 |
| | 5 | IV5 | 0.0115 | 0.0171 | 0.0205 | 0.0171 | 0.0114 | 85.04138 |
| | 6 | IV6 | 0.0105 | 0.0150 | 0.0183 | 0.0156 | 0.0096 | 110.30464 |
| | 7 | IV7 | 0.0127 | 0.0174 | 0.0215 | 0.0174 | 0.0127 | 90.06074 |
| | 8 | IV8 | 0.0133 | 0.0148 | 0.0199 | 0.0149 | 0.0132 | 104.48059 |
| | 9 | IV9 | 0.0140 | 0.0170 | 0.0220 | 0.0171 | 0.0139 | 77.42032 |
| | 10 | IV10 | 0.0138 | 0.0163 | 0.0229 | 0.0165 | 0.0136 | 78.13539 |
| | 11 | IV11 | 0.0128 | 0.0177 | 0.0218 | 0.0177 | 0.0128 | 87.59510 |
| | 12 | IV12 | 0.0114 | 0.0122 | 0.0167 | 0.0142 | 0.0087 | 131.04136 |
| * | | | | | | | | |

记录: 1 共有记录数: 10

图 8-23 精度评定

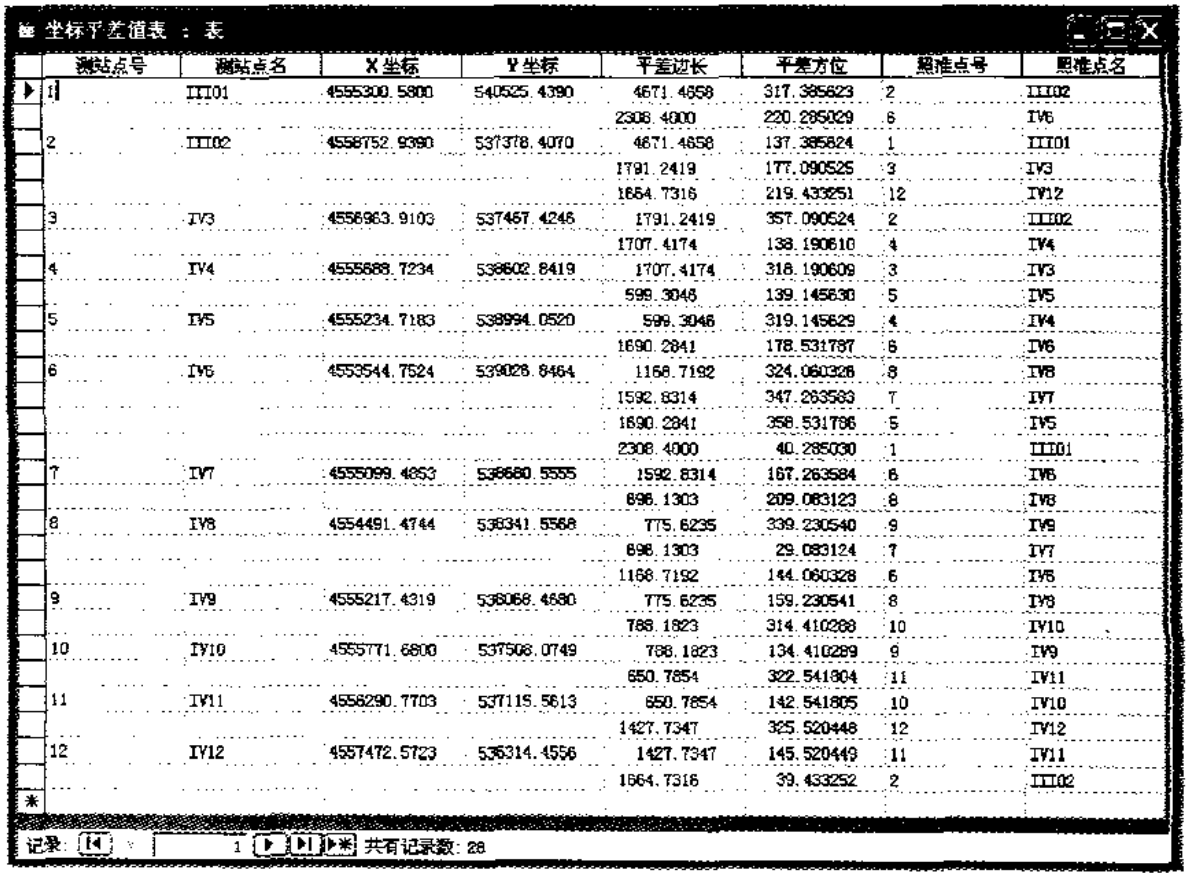


相对精度评定表 : 表

| 点号1 | 点名1 | 方位误差 | 边长误差 | 相对误差 | E | F | MF | AE | 点名2 | 点号2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | III01 | 1.34 | 0.010 | 1/ 221189 | 0.0156 | 0.0096 | 0.0183 | 110.30464 | IV6 | 6 |
| 2 | III02 | 1.77 | 0.009 | 1/ 210172 | 0.0153 | 0.0085 | 0.0175 | 68.22106 | IV3 | 3 |
| 2 | III02 | 1.76 | 0.009 | 1/ 191614 | 0.0142 | 0.0087 | 0.0167 | 131.04136 | IV12 | 12 |
| 3 | IV3 | 1.57 | 0.008 | 1/ 205856 | 0.0130 | 0.0083 | 0.0154 | 51.27535 | IV4 | 4 |
| 4 | IV4 | 2.15 | 0.006 | 1/ 94074 | 0.0064 | 0.0053 | 0.0089 | 128.28533 | IV5 | 5 |
| 5 | IV5 | 2.08 | 0.008 | 1/ 203181 | 0.0170 | 0.0063 | 0.0190 | 89.49582 | IV6 | 6 |
| 6 | IV6 | 2.08 | 0.006 | 1/ 169780 | 0.0118 | 0.0061 | 0.0133 | 58.14137 | IV8 | 8 |
| 8 | IV6 | 2.09 | 0.007 | 1/ 243352 | 0.0162 | 0.0065 | 0.0174 | 79.43528 | IV7 | 7 |
| 7 | IV7 | 2.59 | 0.006 | 1/ 114483 | 0.0088 | 0.0060 | 0.0107 | 110.32186 | IV8 | 8 |
| 8 | IV8 | 2.29 | 0.007 | 1/ 115968 | 0.0087 | 0.0066 | 0.0109 | 79.37501 | IV9 | 9 |
| 9 | IV9 | 2.21 | 0.007 | 1/ 117373 | 0.0084 | 0.0067 | 0.0108 | 47.14908 | IV10 | 10 |
| 10 | IV10 | 2.19 | 0.007 | 1/ 99827 | 0.0069 | 0.0085 | 0.0095 | 48.42047 | IV11 | 11 |
| 11 | IV11 | 2.03 | 0.008 | 1/ 181143 | 0.0141 | 0.0078 | 0.0161 | 51.44209 | IV12 | 12 |

记录: 1 共有记录数: 13

图 8-24　相对精度评定



坐标平差值表 : 表

| 测站点号 | 测站点名 | X坐标 | Y坐标 | 平差边长 | 平差方位 | 照准点号 | 照准点名 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | III01 | 4555300.5800 | 540525.4390 | 4671.4658 | 317.385623 | 2 | III02 |
| | | | | 2308.4000 | 220.285029 | 6 | IV6 |
| 2 | III02 | 4558752.9390 | 537378.4070 | 4671.4658 | 137.385624 | 1 | III01 |
| | | | | 1791.2419 | 177.090525 | 3 | IV3 |
| | | | | 1654.7316 | 219.433251 | 12 | IV12 |
| 3 | IV3 | 4556963.9103 | 537457.4246 | 1791.2419 | 357.090524 | 2 | III02 |
| | | | | 1707.4174 | 138.190610 | 4 | IV4 |
| 4 | IV4 | 4555688.7234 | 538602.8419 | 1707.4174 | 318.190609 | 3 | IV3 |
| | | | | 599.3048 | 139.145630 | 5 | IV5 |
| 5 | IV5 | 4555234.7183 | 538994.0520 | 599.3048 | 319.145629 | 4 | IV4 |
| | | | | 1690.2841 | 178.531787 | 6 | IV6 |
| 6 | IV6 | 4553544.7524 | 539028.8464 | 1168.7192 | 324.060328 | 8 | IV8 |
| | | | | 1592.8314 | 347.263583 | 7 | IV7 |
| | | | | 1690.2841 | 358.531786 | 5 | IV5 |
| | | | | 2308.4000 | 40.285030 | 1 | III01 |
| 7 | IV7 | 4555099.4853 | 538680.5555 | 1592.8314 | 167.263584 | 6 | IV6 |
| | | | | 898.1303 | 209.083123 | 8 | IV8 |
| 8 | IV8 | 4554491.4744 | 538341.5568 | 775.6235 | 339.230540 | 9 | IV9 |
| | | | | 898.1303 | 29.083124 | 7 | IV7 |
| | | | | 1168.7192 | 144.060328 | 6 | IV6 |
| 9 | IV9 | 4555217.4319 | 538068.4680 | 775.6235 | 159.230541 | 8 | IV8 |
| | | | | 788.1823 | 314.410288 | 10 | IV10 |
| 10 | IV10 | 4555771.6800 | 537508.0749 | 788.1823 | 134.410289 | 9 | IV9 |
| | | | | 650.7854 | 322.541804 | 11 | IV11 |
| 11 | IV11 | 4556290.7703 | 537115.5613 | 650.7854 | 142.541805 | 10 | IV10 |
| | | | | 1427.7347 | 325.520448 | 12 | IV12 |
| 12 | IV12 | 4557472.5723 | 536314.4556 | 1427.7347 | 145.520449 | 11 | IV11 |
| | | | | 1664.7316 | 39.433252 | 2 | III02 |

记录: 1 共有记录数: 28

图 8-25　坐标平差值

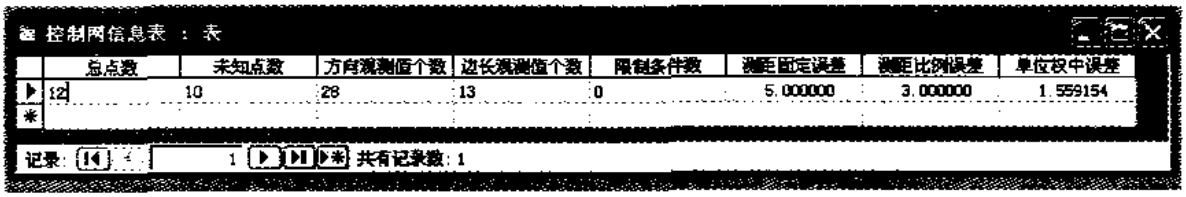



图 8-26　平差后的控制网信息

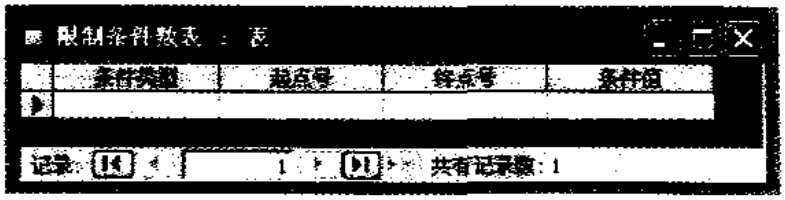



图 8-27　限制条件数

图 8-29、图 8-30 所示。

## 8.3　高程控制网平差

### 8.3.1　高程控制网平差概述

8.3.1.1　平差原理

水准网平差程序采用间接平差法，以未知点高程 $H$ 的改正量 $dH$ 为改正数，列误差方程式，组成和解算法方程，得未知点的高程改正数，并进行观测值和平差值函数的精度评定，求出各待定高程点的高程中误差。

（1）列出高差误差方程式。

$$V_{ik} = -\delta H_i + \delta H_k + l_{ik} \qquad (8-54)$$

$$l_{ik} = -h_{ik} + H_k^0 - H_i^0 \qquad (8-55)$$

式中　$H_i^0$，$H_k^0$——$i$ 点和 $k$ 点的近似高程；

$h_{ik}$——观测高差。

（2）组成并答解法方程。组成并答解法方程的方法与水平控制网类似，水准路线高差的权为

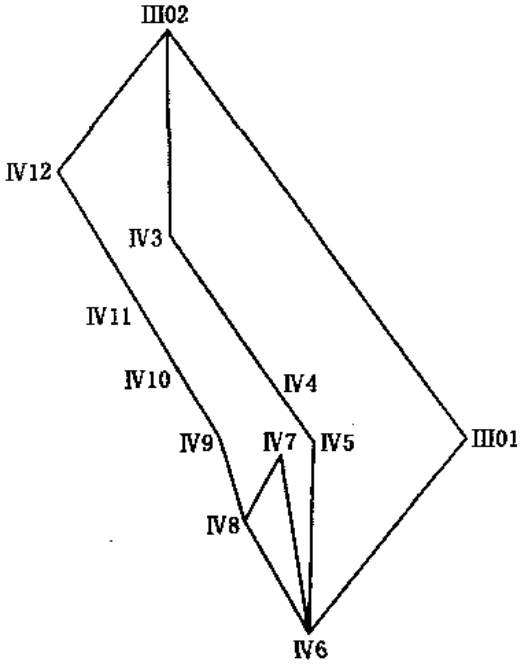



图 8-28　控制网

$$P_i = \frac{C}{S_i} \qquad (8-56)$$

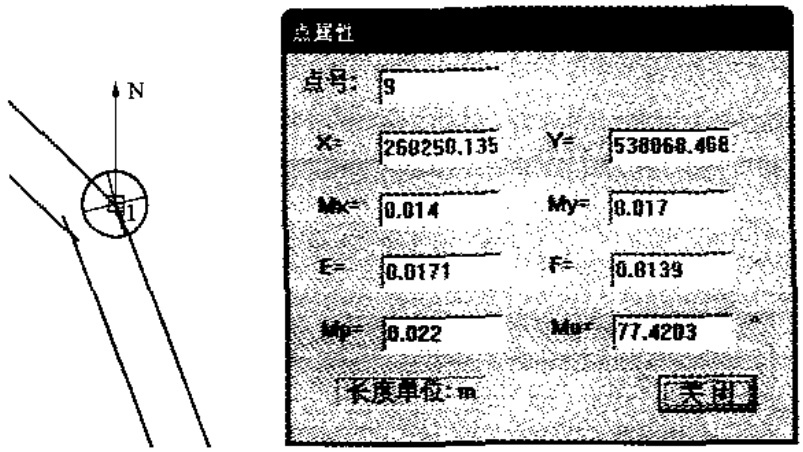



图 8－29　控制网点属性

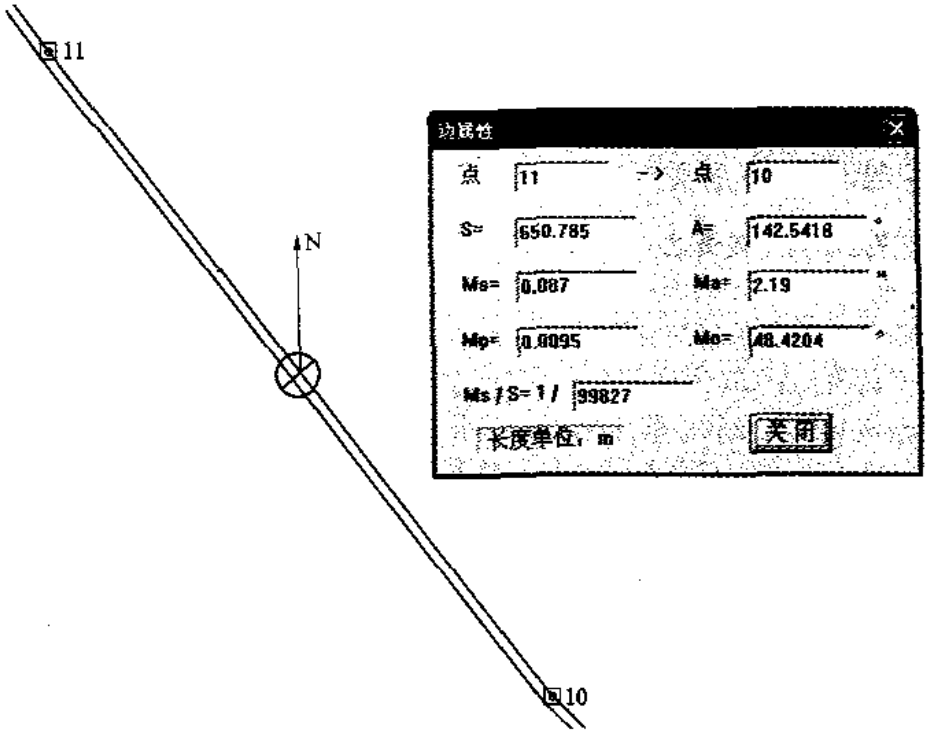



图 8－30　控制网边长属性

式中　$C$——任意常数；

$S_i$——第 $i$ 个测段的长度，以千米（km）为单位。

（3）评定精度。验后单位权中误差计算如下：

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{V^T PV}{r}} \tag{8-57}$$

式中 $r$——多余观测数。

未知点高程中误差计算如下：

设

$$Z_i = \delta H_i \tag{8-58}$$

即有

$$F = (0,\ 0,\ \cdots,\ f_i = 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

$$\frac{1.0}{P_{Z_i}} = q_{ii} \tag{8-59}$$

式中 $q_{ii}$——矩阵 $Q_{xx}$第 $i$ 行对角元素。

$$M_i = \mu\sqrt{q_{ii}} \tag{8-60}$$

8.3.1.2 三角高程网平差与水准网平差的区别

本高程控制网平差程序，能对各种水准网和三角高程网进行平差。前面已经介绍了水准网的平差模型，三角高程网在测量过程中，测量数据主要是边长 $s$（平距）和垂直角 $\alpha$，两点之间的高差 $h$ 可由公式 $h = s\tan\alpha$ 计算得到。本程序中，对于三角高程网，它的处理与水准网相似，它要求输入的数据与水准网完全相同（输入高差时要直接输入由边长和垂直角计算后的高差，即由上述公式计算后得到的高差）。

另外，三角高程网和水准网平差的一个不同之处在于它们的定权方式不同。本程序中对于水准网，它的定权方式为 $p_i = \frac{C}{S_i}$（$C$ 为常数，在本设计中令 $C = 1$），而对于三角高程网，它的定权方式为 $p_i = \frac{C}{S_i^2}$（$C$ 为常数，在本设计中令 $C = 1$）。在程序中对这一点的处理是用一个对话框让用户选择，如图 8－31 所示。如果您选择了“水准网平差”，则程序会按 $p_i = \frac{C}{S_i}$进行定权，如果您选择了“三角高程平差”，则程序会按 $p_i = \frac{C}{S_i^2}$进行定权，从而完成对定权方式的处理。

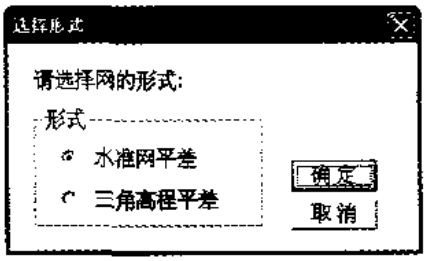



图 8－31 高程控制网平差形式对话框

8.3.1.3 程序算法

高程控制网平差的数据流程，如图 8－32 所示。

由于考虑到用 Access 数据库处理数据的方便简捷，所以本程序要求将起算数据和观测数据全部以 Access 数据库的文件格式存放在磁盘中。

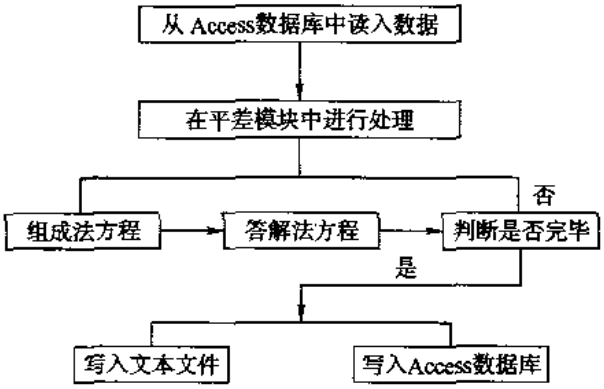



图 8-32　高程网平差计算流程

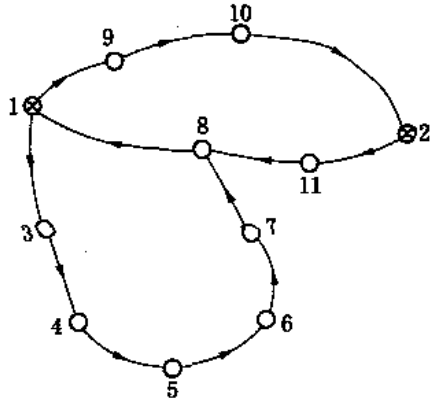



图 8-33　某地水准网

编号规则：水准点或三角高程点先编已知高程点，后编未知高程点，为了节省内存，要尽量使一个点与之周围点的点号差最小，水准线路不编号。

### 8.3.2　水准网平差算例

下面就以一个实际的水准网为例（图 8-33），进行水准网平差计算，以了解本程序的运行情况。

按程序要求准备水准网平差原始数据库文件。建立一个数据库，并在其中建立 4 个表，分别起名为“控制条件表”、“高程表”、“观测高差表”、“路线表”，并按上述要求输入数据，如图 8-34～图 8-37 所示。

控制条件表 : 表

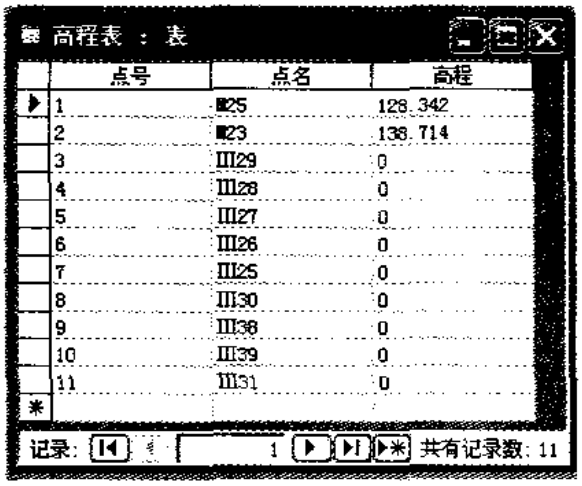
| | 总点数 | 未知点数 | 测段数 | 闭和环数 | 附合线路数 |
|---|---|---|---|---|---|
| ▶ | 11 | 9 | 12 | 2 | 1 |
| * | | | | | |

记录: 1　共有记录数: 1

图 8-34　控制条件

打开“控制网平差”可执行程序，在该窗口中选择“高程控制网平差”菜单，程序会询问何种平差类型（图 8-31）。

初步计算后，程序首先给出附合和闭合水准路线的闭合差计算结果，检核外业观测数据是否合格，闭合差是否超过规范的规定值。

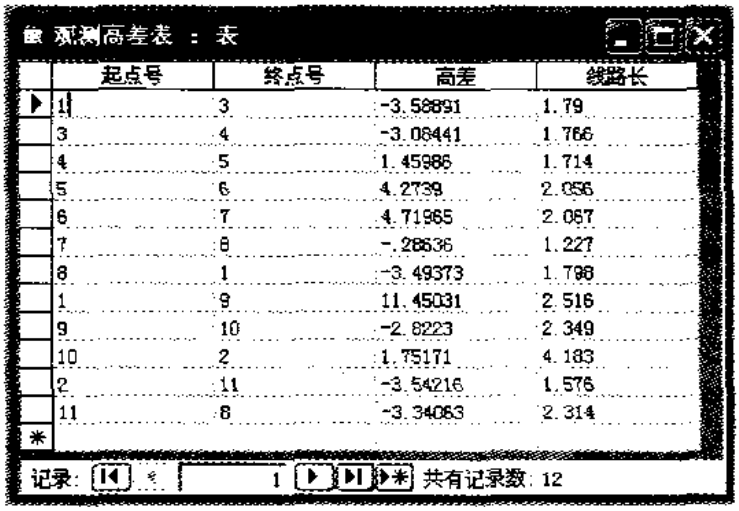


高程表 : 表

| | 点号 | 点名 | 高程 |
|---|---|---|---|
| ▶ | 1 | ■25 | 128.342 |
| | 2 | ■23 | 138.714 |
| | 3 | III29 | 0 |
| | 4 | III28 | 0 |
| | 5 | III27 | 0 |
| | 6 | III26 | 0 |
| | 7 | III25 | 0 |
| | 8 | III30 | 0 |
| | 9 | III38 | 0 |
| | 10 | III39 | 0 |
| | 11 | III31 | 0 |
| * | | | |

记录: 1 共有记录数: 11

图 8-35 原始高程

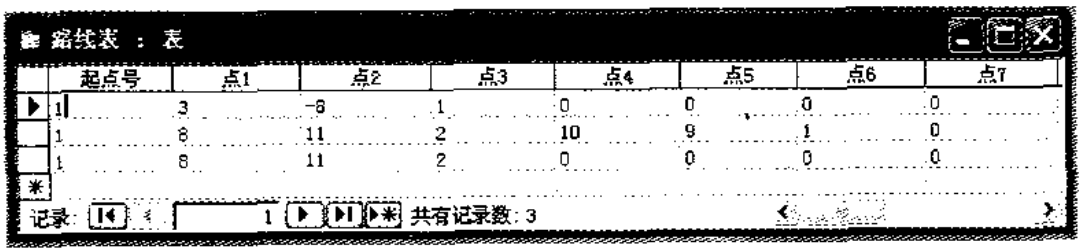


观测高差表 : 表

| | 起点号 | 终点号 | 高差 | 线路长 |
|---|---|---|---|---|
| ▶ | 1 | 3 | -3.58891 | 1.79 |
| | 3 | 4 | -3.08441 | 1.766 |
| | 4 | 5 | 1.45986 | 1.714 |
| | 5 | 6 | 4.2739 | 2.056 |
| | 6 | 7 | 4.71965 | 2.067 |
| | 7 | 8 | -.28636 | 1.227 |
| | 8 | 1 | -3.49373 | 1.798 |
| | 1 | 9 | 11.45031 | 2.516 |
| | 9 | 10 | -2.8223 | 2.349 |
| | 10 | 2 | 1.75171 | 4.183 |
| | 2 | 11 | -3.54216 | 1.576 |
| | 11 | 8 | -3.34063 | 2.314 |
| * | | | | |

记录: 1 共有记录数: 12

图 8-36 观测高差



路线表 : 表

| | 起点号 | 点1 | 点2 | 点3 | 点4 | 点5 | 点6 | 点7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ▶ | 1 | 3 | -8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 8 | 11 | 2 | 10 | 9 | 1 | 0 |
| | 1 | 8 | 11 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| * | | | | | | | | |

记录: 1 共有记录数: 3

图 8-37 水准路线

计 算 线 路 闭 合 差 结 果

第1条线路（闭合）：总长=12.418km　闭合差=-0.00mm

第2条线路（附合）：总长=5.688km　闭合差=4.52mm

第3条线路（附合）：总长=9.048km　闭合差=-7.72mm

检查闭合差均不超限的情况下，进行控制网的平差计算。如图8-19所示，程序提示输出平差结果的保存格式。若用户选择文本文件的保存格式，则平差后的结果文件如下：

| 点名 No | ~ | 点名 No | 线路长/km | 观测高差/m | 平差改正数/m | 最终平差值/m |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M25 | | Ⅲ29 | 1.790 | -3.588 9 | -0.000 2 | -3.589 1 |
| Ⅲ29 | | Ⅲ28 | 1.766 | -3.084 4 | -0.000 2 | -3.084 6 |
| Ⅲ28 | | Ⅲ27 | 1.714 | 1.459 9 | -0.000 2 | 1.459 7 |
| Ⅲ27 | | Ⅲ26 | 2.056 | 4.273 9 | -0.000 2 | 4.273 7 |
| Ⅲ26 | | Ⅲ25 | 2.067 | 4.719 6 | -0.000 2 | 4.719 4 |
| Ⅲ25 | | Ⅲ30 | 1.227 | -0.286 4 | -0.000 1 | -0.286 5 |
| Ⅲ30 | | M25 | 1.798 | -3.493 7 | 0.001 3 | -3.492 4 |
| M25 | | Ⅲ38 | 2.516 | 11.450 3 | -0.002 1 | 11.448 2 |
| Ⅲ38 | | Ⅲ39 | 2.349 | -2.822 3 | -0.002 0 | -2.824 3 |
| Ⅲ39 | | M23 | 4.183 | 1.751 7 | -0.003 6 | 1.748 1 |
| M23 | | Ⅲ31 | 1.576 | -3.542 2 | 0.001 3 | -3.540 8 |
| Ⅲ31 | | Ⅲ30 | 2.314 | -3.340 6 | 0.001 9 | -3.338 7 |

单位权中误差 $u=\pm 1.86$mm

| 点号 | 点名 | 平差高程/m | 中误差/mm |
|---|---|---|---|
| 3 | Ⅲ29 | 124.752 9 | 2.3 |
| 4 | Ⅲ28 | 121.668 3 | 2.9 |
| 5 | Ⅲ27 | 123.127 9 | 3.2 |
| 6 | Ⅲ26 | 127.401 6 | 3.1 |
| 7 | Ⅲ25 | 132.121 0 | 2.6 |
| 8 | Ⅲ30 | 131.834 4 | 1.9 |
| 9 | Ⅲ38 | 139.790 2 | 2.5 |
| 10 | Ⅲ39 | 136.965 9 | 2.8 |
| 11 | Ⅲ31 | 135.173 2 | 2.0 |

若用户保存为Access数据库格式，则其结果形式为Access数据库中的两个表："平差值表"与"精度评定表"（图8-38、图8-39）。

同时，此程序还自动生成了一个用来进行检核的文件，文件名称为用户所取的平差结果名称加上"JH"的文本文件。例如，用户给平差结果文件取名为"111.txt"则该检核文件名为"111JH.txt"。该文件的格式如下所示。

平差值表 : 表

| | 起点名 | 终点名 | 线路长 | 观测高差 | 平差改正数 | 最终平差值 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ▶ | M25 | Ⅲ29 | 1.7900 | -3.5889 | -0.0002 | -3.5891 |
| | Ⅲ29 | Ⅲ28 | 1.7660 | -3.0844 | -0.0002 | -3.0846 |
| | Ⅲ28 | Ⅲ27 | 1.7140 | 1.4599 | -0.0002 | 1.4597 |
| | Ⅲ27 | Ⅲ26 | 2.0580 | 4.2739 | -0.0002 | 4.2737 |
| | Ⅲ26 | Ⅲ25 | 2.0670 | 4.7196 | -0.0002 | 4.7194 |
| | Ⅲ25 | Ⅲ30 | 1.2270 | -0.2864 | -0.0001 | -0.2865 |
| | Ⅲ30 | M25 | 1.7980 | -3.4937 | 0.0013 | -3.4924 |
| | M25 | Ⅲ38 | 2.5160 | 11.4503 | -0.0021 | 11.4482 |
| | Ⅲ38 | Ⅲ39 | 2.3490 | -2.8223 | -0.0020 | -2.8243 |
| | Ⅲ39 | M23 | 4.1830 | 1.7517 | -0.0036 | 1.7481 |
| | M23 | Ⅲ31 | 1.5760 | -3.5422 | 0.0013 | -3.5408 |
| | Ⅲ31 | Ⅲ30 | 2.3140 | -3.3406 | 0.0019 | -3.3387 |
| * | | | | | | |

记录: 1 共有记录数: 12

图 8-38 高差平差值

精度评定表 : 表

| | 点号 | 点名 | 平差高程 | 中误差 |
|---|---|---|---|---|
| ▶ | 3 | Ⅲ29 | 124.7529 | 2.29 |
| | 4 | Ⅲ28 | 121.6683 | 2.93 |
| | 5 | Ⅲ27 | 123.1279 | 3.18 |
| | 6 | Ⅲ26 | 127.4016 | 3.11 |
| | 7 | Ⅲ25 | 132.1210 | 2.59 |
| | 8 | Ⅲ30 | 131.8344 | 1.95 |
| | 9 | Ⅲ38 | 139.7902 | 2.50 |
| | 10 | Ⅲ39 | 136.9659 | 2.79 |
| | 11 | Ⅲ31 | 135.1732 | 1.96 |
| * | | | | |

记录: 1 共有记录数: 9

图 8-39 待定点高程精度评定

11 9 12 2 1

1 M25 128.342 0

2 M23 138.714 0

3 Ⅲ29 124.752 9

4 Ⅲ28 121.668 3

5 Ⅲ27 123.127 9

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | Ⅲ26 | 127.401 6 | | | | | | | | | | | | |
| 7 | Ⅲ25 | 132.121 0 | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Ⅲ30 | 131.834 4 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | Ⅲ38 | 139.790 2 | | | | | | | | | | | | |
| 10 | Ⅲ39 | 136.965 9 | | | | | | | | | | | | |
| 11 | Ⅲ31 | 135.173 2 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 3 | -3.589 1 | 1.790 0 | | | | | | | | | | | |
| 3 | 4 | -3.084 6 | 1.766 0 | | | | | | | | | | | |
| 4 | 5 | 1.459 7 | 1.714 0 | | | | | | | | | | | |
| 5 | 6 | 4.273 7 | 2.056 0 | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 4.719 4 | 2.067 0 | | | | | | | | | | | |
| 7 | 8 | -0.286 5 | 1.227 0 | | | | | | | | | | | |
| 8 | 1 | -3.492 4 | 1.798 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 9 | 11.448 2 | 2.516 0 | | | | | | | | | | | |
| 9 | 10 | -2.824 3 | 2.349 0 | | | | | | | | | | | |
| 10 | 2 | 1.748 1 | 4.183 0 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 11 | -3.540 8 | 1.576 0 | | | | | | | | | | | |
| 11 | 8 | -3.338 7 | 2.314 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 3 | -8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 8 | 11 | 2 | 10 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 8 | 11 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

其中

第一行数据的5个数分别为总点数、未知点数、测段数、闭合环数、附合线路数；

第二数据段为点号、点名和高程；

第三数据段为测段起点号、测段终点号、观测高差和路线长；

第四数据段为线路的编号，先为闭合路线，后为附合路线。

然后，用户可以选择“高程控制网检核”菜单，选择上述生成的检核数据文件111JH.txt再次进行平差解算，生成名称为GCWJHOUT.txt文本文件，其格式与平差结果的文本形式完全相同，若平差无误，则其中的路线闭合差和各待定点高程中误差应与零接近，平差后的高差改正数也基本为零。以例子生成的检核数据文件进行平差后结果如下。

计 算 线 路 闭 合 差 结 果

第1条线路（闭合）：总长=12.418km　闭合差=0.20mm

第2条线路（闭合）：总长=14.736km　闭合差=-0.10mm

第3条线路（附合）：总长=5.688km　闭合差=-0.10mm

| 点名 | 点名 | 线路长/km | 观测高差/m | 平差改正数/m | 最终平差值/m |
|---|---|---|---|---|---|
| M25 | Ⅲ29 | 1.790 | -3.589 1 | -0.000 0 | -3.589 1 |
| Ⅲ29 | Ⅲ28 | 1.766 | -3.084 6 | -0.000 0 | -3.084 6 |
| Ⅲ28 | Ⅲ27 | 1.714 | 1.459 7 | -0.000 0 | 1.459 7 |
| Ⅲ27 | Ⅲ26 | 2.056 | 4.273 7 | -0.000 0 | 4.273 7 |
| Ⅲ26 | Ⅲ25 | 2.067 | 4.719 4 | -0.000 0 | 4.719 4 |
| Ⅲ25 | Ⅲ30 | 1.227 | -0.286 5 | -0.000 0 | -0.286 5 |
| Ⅲ30 | M25 | 1.798 | -3.492 4 | -0.000 0 | -3.492 4 |
| M25 | Ⅲ38 | 2.516 | 11.448 2 | -0.000 0 | 11.448 2 |
| Ⅲ38 | Ⅲ39 | 2.349 | -2.824 3 | 0.000 0 | -2.824 3 |
| Ⅲ39 | M23 | 4.183 | 1.748 1 | -0.000 0 | 1.748 1 |
| M23 | Ⅲ31 | 1.576 | -3.540 8 | -0.000 0 | -3.540 8 |
| Ⅲ31 | Ⅲ30 | 2.314 | -3.338 7 | -0.000 0 | -3.338 7 |

单位权中误差 $u=\pm 0.04$mm

| 点号 | 点名 | 平差高程/m | 中误差/mm |
|---|---|---|---|
| 3 | Ⅲ29 | 124.752 9 | 0.0 |
| 4 | Ⅲ28 | 121.668 2 | 0.1 |
| 5 | Ⅲ27 | 123.127 9 | 0.1 |
| 6 | Ⅲ26 | 127.401 6 | 0.1 |
| 7 | Ⅲ25 | 132.121 0 | 0.1 |
| 8 | Ⅲ30 | 131.834 4 | 0.0 |
| 9 | Ⅲ38 | 139.790 2 | 0.1 |
| 10 | Ⅲ39 | 136.965 9 | 0.1 |
| 11 | Ⅲ31 | 135.173 2 | 0.0 |

## 8.4 GPS控制网平差软件概述

以美国Trimble 5700GPS接收机后的处理软件为例介绍如下。

### 8.4.1 建立坐标系统

在主界面中点击“功能”菜单下的“坐标系统管理器”（coordinate system manager），进入其界面：

（1）增加椭球（建立新的椭球），输入椭球参数。

（2）增加基准变换，选取“Molodensky”模型、创建新的基准转换组、输入参数。

（3）“增加坐标系统组”、输入参数。

（4）“增加坐标系统”、点选“横轴墨卡托投影”、选择建立的坐标系统组，输入参数；点选“无大地水准面模型”、输入投影参数（注意：中心纬度输“0”），完成，保存退出。

### 8.4.2 基线解算

（1）新建项目。在项目属性界面的“坐标系统”标签内，点击“坐标系统设置”栏中的“改变…”选项，改变坐标系统；选择新系统，在“选择坐标系统类型界面”中点选“坐标系统和投影带”，点击“下一步”；在“选择大地水准面模型”界面点选“无大地水准面模型”（如有选择需要的），完成。在项目属性界面，点击“应用”及“确定”。

（2）调入数据，选择数据类型；选择存储路径并选择数据，然后单击打开；根据时段命名点，输入天线高、天线类型、量高方法；在“视图”菜单条下，点选“点标记”及“名称”；在“视图”菜单条下，选“timeline”，进行周跳编辑。

（3）基线解算。“测量”菜单条下处理 GPS 基线；双击每条记录可查。看基线解算报告，如各卫星的相位残差等，保存退出；在“报告”菜单条下可查看环闭和差等。

### 8.4.3 无约束平差

选取“平差”菜单下的平差命令（或 F10）。查看“报告”菜单条网平差报告，若网参考因子为 1，且 $X$ 方检验通过则完成，否则进行加权平差（“平差”菜单条下“加权策略”命令，选“交替的”单选按钮），再进行网平差，直到上述两项条件符合，最后查看网平差报告中的边长中误差、误差椭圆等。

### 8.4.4 约束平差

改变坐标系统。在“平差”菜单下点选“基准”后点击“投影基准”；加入已知点。在“平差”菜单下选“点”，输入已知点坐标，选“2D”或“2D 加高度”；进行平差，最后查看网平差报告，看边长中误差、点位中误差是否超限，最终得到结果。

# 参 考 文 献


[1] 孔祥元，郭际明，等. 大地测量学基础［M］. 武汉：武汉大学出版社，2006.
[2] 宁津生，等. 测绘学概论［M］. 武汉：武汉大学出版社，2004.
[3] 张凤举，等. 控制测量学［M］. 北京：煤炭工业出版社，1999.
[4] 胡明城，等. 现代大地测量［M］. 北京：测绘出版社，1993.
[5] 徐正扬，刘振华，等. 大地控制测量学［M］. 北京：解放军出版社，1992.
[6] 徐绍铨，等. 大地测量学［M］. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，1996.
[7] 孔祥元，梅是义. 控制测量学：上、下册［M］. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，1996.
[8] 边少锋，等. 大地坐标系与大地基准［M］. 北京：国防工业出版社，2005.
[9] 苏瑞祥，等. 大地测量仪器［M］. 北京：测绘出版社，1979.
[10] 李玉宝，等. 控制测量［M］. 北京：中国建筑工业出版社，2003.
[11] 朱华统. 大地坐标系的建立［M］. 北京：测绘出版社，1986.
[12] 北京市测绘设计研究院. 城市测量规范［S］. 北京：中国建筑工业出版社，1999.
[13] 中国有色金属工业总公司. 工程测量规范［S］. 北京：中国计划出版社，1993.
[14] 国家技术监督局. 国家三、四等水准测量规范［S］. 北京：中国标准出版社，1992.
[15] 国家技术监督局. 中、短程光电测距规范［S］. 北京：中国标准出版社，1998.
[16] 杨启和. 地图投影变换原理与方法［M］. 北京：解放军出版社，1989.
[17] 陈健，薄志鹏. 应用大地测量学［M］. 北京：测绘出版社，1989.
[18] 陈健，等. 椭球大地测量学［M］. 北京：解放军出版社，1988.

**图书在版编目（CIP）数据**

大地测量学基础/王佩贤主编．—北京：煤炭工业出版社，2007.11

普通高等教育地矿、安全类“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5020-3195-4

Ⅰ．大… Ⅱ．王… Ⅲ．大地测量学-高等学校-教材 Ⅳ．P22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 153172 号

煤炭工业出版社 出版
（北京市朝阳区芍药居 35 号 100029）
网址：www.cciph.com.cn
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行

*

开本 787mm×960mm 1/16 印张 20 1/4
字数 418 千字 印数 1—3,000
2007 年 11 月第 1 版 2007 年 11 月第 1 次印刷
社内编号 5996 定价 45.00 元

**版权所有 违者必究**

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，本社负责调换

责任编辑：史　彦　李　佳
乔　俏　梁晓平
封面设计：晓　杰



ISBN 978-7-5020-3195-4
9 787502 031954 >
定价：45.00 元