

在子结构一级水平上实施 Guyan 凝聚,就形成了最简单的界面位移综合法。

Guyan 凝聚方法用于子结构中,将子结构的交界面自由度作为主自由度,而将其内部自由度作为副自由度,下面以两个子结构 α 和 β 的对接说明其过程。

根据式(10-82),子结构 α 的坐标转换矩阵为 $[T_G]^\alpha$,子结构 β 的坐标转换矩阵为 $[T_G]^\beta$ 。子结构 α 和 β 的交界面位移分别为

$$\{X^\alpha\} = \begin{Bmatrix} X_{jm}^\alpha \\ X_{is}^\alpha \end{Bmatrix} = [T_G]^\alpha \{X_{jm}^\alpha\} \quad (10-85)$$

$$\{X^\beta\} = \begin{Bmatrix} X_{jm}^\beta \\ X_{is}^\beta \end{Bmatrix} = [T_G]^\beta \{X_{jm}^\beta\} \quad (10-86)$$

式中, X_{jm} 为交界面主自由度的物理位移; X_{is} 为交界面副自由度的物理位移。子结构 α 和 β 向交界面凝聚后的动力方程为

$$[M_G^\alpha] \{\ddot{X}_{jm}^\alpha\} + [K_G^\alpha] \{X_{jm}^\alpha\} = \{f_{jm}^\alpha\} \quad (10-87)$$

$$[M_G^\beta] \{\ddot{X}_{jm}^\beta\} + [K_G^\beta] \{X_{jm}^\beta\} = \{f_{jm}^\beta\} \quad (10-88)$$

交界面需满足如下的协调条件:

位移协调条件

$$X_{jm}^\alpha = X_{jm}^\beta = X_{jm} \quad (10-89)$$

力协调条件

$$f_{jm}^\alpha + f_{jm}^\beta = \{0\} \quad (10-90)$$

将式(10-89)并代入式(10-87)和式(10-88)后并相加,然后将式(10-90)代入可得

$$[M_G^\alpha + M_G^\beta] \{\ddot{X}_{jm}\} + [K_G^\alpha + K_G^\beta] \{X_{jm}\} = \{0\} \quad (10-91)$$

上式通过 Guyan 凝聚方法将两个子结构的内部自由度全部凝聚到交界面上,缩减了体系的自由度,求解上式即可得到结构的低阶特征对。

2. 子结构的 Kuhar 动力凝聚

Guyan 静力凝聚方法假定静变位模式计算动能,忽略了惯性效应。而 Kuhar 考虑了这种近似误差,提出了 Kuhar 动力凝聚方法,也称为动力变换法。下面介绍 kuhar 方法。

式(10-79)可重写为

$$\begin{pmatrix} K_{mm} - \omega_i^2 M_{mm} & K_{ms} - \omega_i^2 M_{ms} \\ K_{sm} - \omega_i^2 M_{sm} & K_{ss} - \omega_i^2 M_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_m \\ X_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10-92)$$

将上式第二行展开得

$$(K_{sm} - \omega_i^2 M_{sm}) X_m + (K_{ss} - \omega_i^2 M_{ss}) X_s = \{0\} \quad (10-93)$$

或

$$X_s = (K_{ss} - \omega_i^2 M_{ss})^{-1} (K_{sm} - \omega_i^2 M_{sm}) X_m = [\eta] X_m \quad (10-94)$$

式中,副自由度向主自由度映射的矩阵为 $[\eta]$,且

$$[\eta] = (K_{ss} - \omega_i^2 M_{ss})^{-1} (K_{sm} - \omega_i^2 M_{sm}) \quad (10-95)$$

总体坐标变换为

$$\begin{Bmatrix} X_m \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \eta \end{pmatrix} \{X_m\} = [T_K] \{X_m\} \quad (10-96)$$

于是,式(10-92)简化为

$$[M_K] \ddot{\{X_m\}} + [K_K] \{X_m\} = \{0\} \quad (10-97)$$

式中, M_K 和 K_K 为 Kuhar 凝聚质量矩阵和刚度矩阵,即

$$\begin{aligned} [M_K] &= [T_K]^T [M] [T_K] \\ [K_K] &= [T_K]^T [K] [T_K] \end{aligned} \quad (10-98)$$

可见,Guyan 静力凝聚是 Kuhar 动力凝聚当 $\omega_i = 0$ 的特殊形式。在计算时先估计一个特征值,一般采用 Guyan 计算的特征值作为估计值而迭代计算,可以证明其结果收敛于系统的真实解。

10.5 结构动力分析中的物理非线性问题

结构动力分析中的物理非线性主要是指结构恢复力的非线性问题。恢复力是指结构或构件在外荷载去除后恢复原来形状的能力。恢复力曲线模型一般包括骨架曲线、滞回特性、刚度退化规律三个组成部分。确定恢复力曲线的方法有试验拟合法、系统识别法、理论计算法。

已提出的结构非线性恢复力模型大体上可分为曲线型模型和折线型模型。曲线型恢复力模型是由连续曲线构成,刚度变化连续,符合工程需要,但刚度计算复杂。折线型恢复力模型由若干直线段所构成,刚度变化不连续,存在拐点或突变点,但由于刚度计算简单,因而在工程中得到了广泛应用。常用的恢复力模型有兰伯格-奥斯古德(Romberg-Osgood)模型、克拉夫(Clough)退化双线性模型、武田(Tekeda)模型等。

10.5.1 几个重要的恢复力曲线模型

1. 双线性模型

双线性恢复力模型是结构分析中最简单、最基本的恢复力模型。该模型的滞回规律是:加载时先沿骨架曲线进行,屈服后的加载刚度为屈服刚度,无论是否达到屈服,卸载刚度和初始加载刚度相同。卸载至零载后进行反向加载,反向加载时的刚度为初始刚度,达到屈服后变为屈服刚度,如图 10-1 所示。

2. 克拉夫(Clough)退化双线性模型

克拉夫退化双线性模型(见图 10-2)是较早提出的刚度退化模型,主要是作为

钢筋混凝土结构受弯构件的恢复力特性模型提出来的。该模型刚度退化方程为

$$K_r = K_y \left| \frac{u_m}{u_y} \right|^{-\alpha} \quad (10-99)$$

式中, u_y 和 K_y 分别为屈服位移和初始刚度; u_m 为最大位移; K_r 为对应于 u_m 的退化刚度; α 为刚度退化指数。

克拉夫模型的滞回规律是:加载时先沿骨架曲线进行,在进入屈服段以后,卸载刚度按式(10-99)采用。卸载至零载进行反向加载时则指向反向位移的最大点,如反向未屈服则指向反向屈服点。次滞回规则与主滞回规则相同,克拉夫模型的骨架曲线可根据实际需要取为平顶或坡顶两种。

克拉夫模型能较好地符合钢筋混凝土构件动力性能的主要特性,同时,其滞回规则又比较简单,因此得到广泛的应用。一般情况下,对坡顶型骨架曲线,屈服后的刚度通常取为屈服前刚度的 5% ~ 10%。

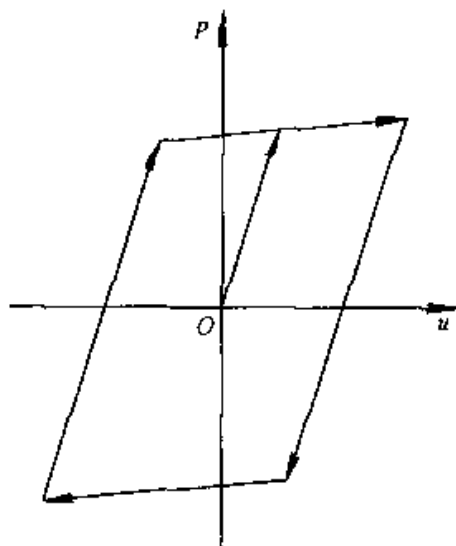


图 10-1 双线性模型

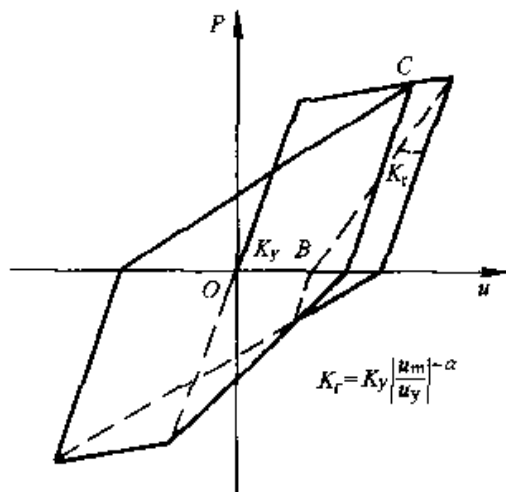


图 10-2 克拉夫退化双线性模型

3. 武田(Tekeda)模型

武田模型是根据较多的钢筋混凝土构件试验所得的恢复力特性抽象出来的,适用于以弯曲破坏为主的情况。主要特性有:

(1) 考虑开裂所引起的构件刚度降低,骨架曲线取为三折线:开裂前直线用于线弹性阶段,混凝土受拉开裂后用第二段直线,纵向受拉钢筋屈服后用第三段直线。

(2) 卸载刚度退化规律与克拉夫模型近似,即卸载刚度随变形增加而降低,具体形式为

$$K_r = \frac{P_f + P_y}{u_f + u_y} \left| \frac{u_m}{u_y} \right|^{-\alpha} \quad (10-100)$$

式中, $C(u_f, P_f)$ 为开裂点; $Y(u_y, P_y)$ 为屈服点。

(3) 采用了较为复杂的主、次滞回规律。其核心可概括为:卸载刚度按式(10-100)计算,主滞回反向加载按反方向是否开裂、屈服分别考虑,次滞回反向加载指向外侧滞回曲线的峰点,如图 10-3 所示。

4. 兰伯格-奥斯古德(Romberg-Osgood)模型

兰伯格-奥斯古德模型(见图 10-4)最初是为表示金属材料的恢复力模型而提出来的,后来广泛用作土体、钢筋材料的非线性恢复力模型。模型骨架曲线用屈服强度 P_y 、屈服位移 u_y 和形状指数 γ 三个基本参数确定,即

$$\frac{u}{u_y} = \frac{P}{P_y} \left(1 + \eta \left| \frac{P}{P_y} \right|^{\gamma-1} \right) \quad (10-101)$$

式中, η 为常系数,根据材料特性的不同而确立。当 $\gamma = 1$ 时,为线弹性情况;当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时,为理想塑性情况。 γ 值对结构动力反应有重要影响,较大的指数 γ 对应于较高的滞回耗能和较大的塑性残余变形。

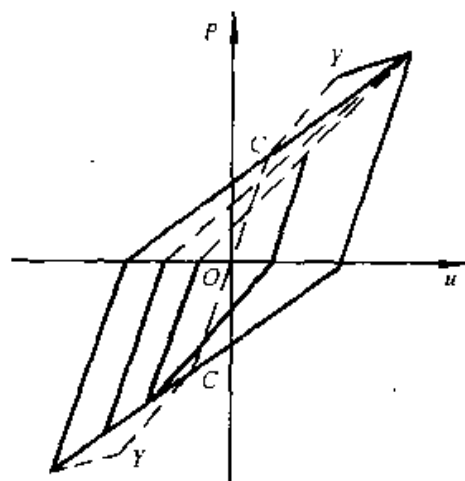


图 10-3 武田模型

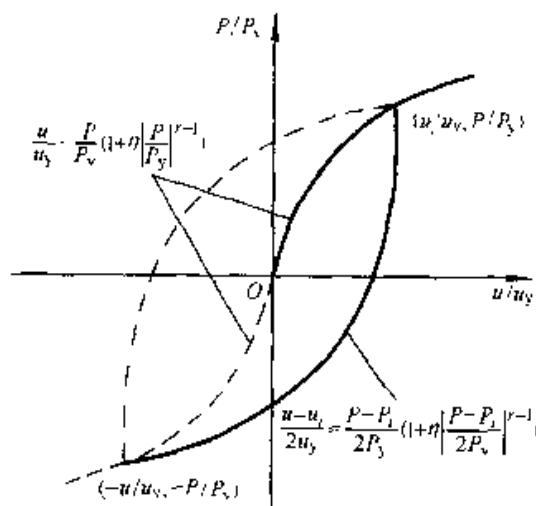


图 10-4 兰伯格-奥斯古德模型

滞回曲线的形状定义为

$$\frac{u - u_i}{2u_y} = \frac{P - P_i}{2P_y} \left(1 + \eta \left| \frac{P - P_i}{2P_y} \right|^{\gamma-1} \right) \quad (10-102)$$

式中, u_i 和 P_i 为卸载时的位移和荷载坐标值。

兰伯格-奥斯古德(Romberg-Osgood)模型假定主、次滞回曲线都服从式(10-102)的规律。

10.5.2 双向恢复力模型

以上所介绍的三个模型基本上都属于平面力系的恢复力模型,而实际上,结构和结构构件都是处于空间受力状态,因此要进一步考虑多向力作用下的结构性能和相应的恢复力模型。

利用塑性力学模型构造双向恢复力模型,本质上是一种比拟法,即以内力空间来代替应力空间,以截面曲率代替应变。这种比拟法并没有严格的证明,然而它是一种可行的方案,特别是这方面的探索性研究获得了试验结果的初步支持之后,基于这一方法的研究与应用日渐增多。

本节以钢筋混凝土双轴受弯柱为例,介绍利用塑性力学模型构造双向恢复力模型的过程。

1. 基本假定

(1) 截面任一主轴方向的弯矩曲率骨架曲线为三折线,如图 10-5 所示。

(2) 杆件轴力 N 为常量。

2. 加载曲面函数

设构件承受双轴弯矩 M_x 和 M_y 与轴力 N 作用。显然, M_x 和 M_y 与 N 构成内力空间。加载过程中构件截面上的任一内力组合 (m_x, m_y, n) 为内力空间加载点,根据第一条假定,加载过程中,构件截面受力状态可分为弹性状态、开裂状态和屈服状态三种。由于假定轴力为常量,因而可用双轴弯矩空间中的开裂曲面和屈服曲面来描述三种受力状态。

考虑到截面屈服属截面破坏阶段,因而屈服曲面可用构件破坏的相关曲线形式来描述。根据试

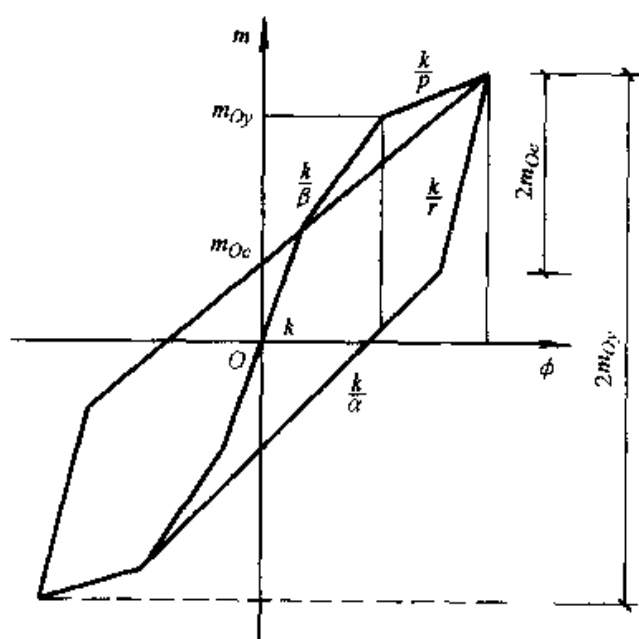


图 10-5 单轴受力三折线恢复力模型

验分析,双轴弯矩作用的钢筋混凝土构件截面破坏相关曲线可表示为

$$\left(\frac{m_x}{m_{ux}}\right)^{\rho_1} + \left(\frac{m_y}{m_{uy}}\right)^{\rho_2} = 1 \quad (10-103)$$

式中, m_{ux} 和 m_{uy} 分别表示单轴加载时 x 轴和 y 轴的极限弯矩; ρ_1 和 ρ_2 为曲面指数。

参照式(10-103),可将构件的开裂加载面 F_c 表示为

$$F_c = \left(\frac{|m_x - m_x^c|}{m_{0x}^c}\right)^{\rho} + \left(\frac{|m_y - m_y^c|}{m_{0y}^c}\right)^{\rho} - 1 = 0 \quad (10-104)$$

式中, m_x^c 和 m_y^c 分别表示开裂加载曲面中心坐标; m_{0x}^c 和 m_{0y}^c 分别表示单轴加载时 x 轴和 y 轴的开裂弯矩。

同样,屈服加载面 F_y 可表示为

$$F_y = \left(\frac{|m_x - m_x^y|}{m_{0x}^y} \right)^\rho + \left(\frac{|m_y - m_y^y|}{m_{0y}^y} \right)^\rho - 1 = 0 \quad (10-105)$$

式中, m_x^y 和 m_y^y 分别表示屈服加载曲面中心坐标; m_{0x}^y 和 m_{0y}^y 分别表示单轴加载时 x 轴和 y 轴的屈服弯矩。

3. 强化理论

假设构件在双轴弯矩空间中的开裂与屈服加载曲面的运动规律符合随动强化理论, 加载过程中, 随着塑性应变的增加, 加载曲面仅发生无旋转的刚性位移, 形状和大小不发生改变。显然, 随动强化理论包含了包兴格效应。根据加载曲面运动方式不同, 已提出的随动强化理论可分为三种: Prager 强化理论、Ziegler 强化理论和 Mroz 强化理论。

根据 Mroz 强化理论, 加载点位于开裂面内时截面处于弹性阶段, 加载面不发生移动; 加载点位于开裂面上时, 截面开裂; 继续加载, 开裂面与加载点一起移动, 加载点达到屈服面时截面屈服。此时, 屈服面与开裂面在加载点相切, 继续加载时, 开裂面和屈服面随加载点一起移动。

根据 Mroz 强化理论, 可得加载曲面中心移动增量向量表达式为

$$\{dM_c\} = \frac{[(\{M_u\} - [I])\{M\} - (\{M_u\}\{M_c\} - \{M_y\})] \frac{\partial F_y}{\partial \{M\}} \{dM\}}{\left(\frac{\partial F_y}{\partial \{M\}} \right)^T [(\{M_u\} - [I])\{M\} - (\{M_u\}\{M_c\} - \{M_y\})]} \quad (10-106)$$

和

$$\{dM_y\} = \frac{(\{M\} - \{M_y\}) \frac{\partial F_y}{\partial \{M\}} \{dM_y\}}{\left(\frac{\partial F_y}{\partial \{M\}} \right)^T (\{M\} - \{M_y\})} \quad (10-107)$$

式中, $\{dM\}$ 为弯矩增量向量; $\{dM_c\}$ 和 $\{dM_y\}$ 分别为开裂和屈服加载曲面中心移动增量向量; $[I]$ 为单位矩阵; $\{M_u\}$ 为对角矩阵, $\{M_u\} = \text{diag} \left[\frac{m_{0x}^y}{m_{0x}^c}, \frac{m_{0y}^y}{m_{0y}^c} \right]$ 。

4. 截面本构模型

构件截面本构关系是描述截面变形增量 $\{du\}$ 与内力增量 $\{dM\}$ 之间的数学表达式。考虑到截面塑性变形增量为加载点所在的各加载曲面塑性变形增量之和, 故截面总变形增量可表示为

$$\{du\} = \{du_e\} + \{du_c\} + \{du_y\} \quad (10-108)$$

式中, $\{du_e\}$ 为截面弹性变形增量向量; $\{du_c\}$ 和 $\{du_y\}$ 分别表示开裂面与屈服面塑性变形增量向量。

利用塑性力学的正交流动法则, 可导出

$$\{du_i\} = \frac{\left(\frac{\partial F_i}{\partial \{M\}}\right) \left(\frac{\partial F_i}{\partial \{M\}}\right)^T}{\left(\frac{\partial F_i}{\partial \{M\}}\right)^T [K_i] \left(\frac{\partial F_i}{\partial \{M\}}\right)} \{dM\} \quad (i = c, y) \quad (10-109)$$

其中,塑性刚度矩阵可表示为

$$[K_i] = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_x}{\partial u_{ix}} & \frac{\partial m_x}{\partial u_{iy}} \\ \frac{\partial m_y}{\partial u_{ix}} & \frac{\partial m_y}{\partial u_{iy}} \end{pmatrix} \quad (i = c, y) \quad (10-110)$$

上式 $[K_i]$ 中非对角元素不为零,反映了双轴弯矩间存在相互作用和影响。

将式(10-109)代入式(10-110),可得截面本构关系为

弹性阶段

$$\{du\} = [K_e]^{-1} \{dM\} \quad (10-111a)$$

开裂阶段

$$\{du\} = \left[[K_e]^{-1} + \frac{\left(\frac{\partial F_c}{\partial \{M\}}\right) \left(\frac{\partial F_c}{\partial \{M\}}\right)^T}{\left(\frac{\partial F_c}{\partial \{M\}}\right)^T [K_c] \left(\frac{\partial F_c}{\partial \{M\}}\right)} \right] \{dM\} \quad (10-111b)$$

屈服阶段

$$\{du\} = \left[[K_e]^{-1} + \frac{\left(\frac{\partial F_c}{\partial \{M\}}\right) \left(\frac{\partial F_c}{\partial \{M\}}\right)^T}{\left(\frac{\partial F_c}{\partial \{M\}}\right)^T [K_c] \left(\frac{\partial F_c}{\partial \{M\}}\right)} + \frac{\left(\frac{\partial F_y}{\partial \{M\}}\right) \left(\frac{\partial F_y}{\partial \{M\}}\right)^T}{\left(\frac{\partial F_y}{\partial \{M\}}\right)^T [K_y] \left(\frac{\partial F_y}{\partial \{M\}}\right)} \right] \{dM\} \quad (10-111c)$$

一般来说,确定 $[K_i]$ 中非对角元素较为困难,目前实用中通常取非对角元素为零,而对角线元素利用单轴三折线恢复力模型确定。于是,各阶段刚度矩阵可表示为

$$[K_e] = \text{diag} \left[\frac{k_x}{r_x}, \frac{k_y}{r_y} \right] \quad (10-112a)$$

$$[K_c] = \text{diag} \left[\frac{k_x}{\alpha_x - r_x}, \frac{k_y}{\alpha_y - r_y} \right] \quad (10-112b)$$

$$[K_y] = \text{diag} \left[\frac{k_x}{p_x - \alpha_x}, \frac{k_y}{p_y - \alpha_y} \right] \quad (10-112c)$$

考虑到双轴恢复力特性间存在的相互耦合影响,令

$$r'_x = r'_y = \max(r_x, r_y) \quad (10-113a)$$

$$\alpha'_x = \alpha_x + q\alpha_y \quad (10-113b)$$

$$\alpha'_y = \alpha_y + q\alpha_x \quad (10-113c)$$

式中, q 为截面的双轴恢复力特性耦合系数。用 r_x' 、 r_y' 、 α_x' 和 α_y' 代替 r_x' 、 r_y' 、 α_x 和 α_y , 则有

$$[K_c] = \text{diag} \left[\frac{k_x}{r_x'}, \frac{k_y}{r_y'} \right] \quad (10-114a)$$

$$[K_c] = \text{diag} \left[\frac{k_x}{\alpha_x' - r_x'}, \frac{k_y}{\alpha_y' - r_y'} \right] \quad (10-114b)$$

$$[K_y] = \text{diag} \left[\frac{k_x}{p_x - \alpha_x'}, \frac{k_y}{p_y - \alpha_y'} \right] \quad (10-114c)$$

5. 加、卸载判别准则

加载点沿不同的开裂曲面或屈服曲面继续移动而材料继续产生塑性变形称为加载; 加载点沿同一开裂曲面或屈服曲面移动, 材料既不产生塑性变形和强化, 也不进入弹性区, 称为中性变载; 加载点由开裂曲面或屈服曲面进入弹性区域称为卸载。

根据塑性理论中的 Drucker 塑性公设, 可导出加、卸载判别准则为

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial \{M\}} \right)^T [K_c] \{du\} \begin{cases} > 0 & \text{加载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (i = c, y) \quad (10-115)$$

10.6 结构动力分析中的几何非线性问题

结构的几何非线性是我们所遇到的另外一种非线性现象, 非线性方程的求解方法已经在 6.5 节中进行了介绍, 本节以结构的 $P-\Delta$ 效应为例, 初步介绍结构的几何非线性问题。

10.6.1 $P-\Delta$ 效应

$P-\Delta$ 效应是指结构在水平侧力作用下, 结构发生侧向位移 Δ 时, 竖向力 P 的作用会使结构产生附加弯矩和附加侧移, 从而使总弯矩和总侧移增加的现象。

如图 10-6 所示的单质点力学体系, 其中质点的质量为 m , 考虑它为两个自由度。为方便起见, x 方向的相对位移表示为 u_x , y 方向的相对位移表示为 u_y ; 水平荷载用 $P_x(x)$ 表示, 竖向荷载用 $P_y(x)$ 表示; 模型的水平和竖向刚度分别为 k_x 和 k_y ; 相应的阻尼为 c_x 和 c_y ; 杆长为 l 。

由图 10-6 可知, 当结构发生较大水平位移后, 竖向外荷载和竖向惯性力在基底产生的弯矩为

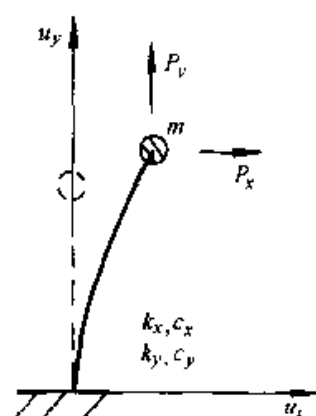


图 10-6 单质点体系

$$M = -P_y u_x - m \ddot{u}_y u_x = -(P_y + m \ddot{u}_y) u_x \quad (10-116)$$

附加弯矩可用质点上一个能产生同样大小弯矩的等效水平力来替代, 等效水平力为

$$F_{eq} = M/l = -(P_y + m \ddot{u}_y) u_x / l = k_p u_x \quad (10-117)$$

式中, k_p 为影响刚度。

这样, 包含 $P-\Delta$ 效应的质点水平运动方程为

$$m \ddot{u}_x + c_x \dot{u}_x + k_x u_x = P_x + P_{eq} \quad (10-118)$$

将式(10-117)代入上式, 则有

$$m \ddot{u}_x + c_x \dot{u}_x + (k_x - k_p) u_x = P_x \quad (10-119)$$

竖向运动方程为

$$m \ddot{u}_y + c_y \dot{u}_y + k_y u_y = P_y \quad (10-120)$$

从以上运动方程可以看出, 竖向运动方程是独立的, 因此可以在给定初始条件下求出 u_y 后, 代入水平运动方程, 联合相应的初始条件, 便可求解水平位移 u_x 。

一般来说, 考虑 $P-\Delta$ 效应等于降低了结构的刚度, 通常情况下这会使结构的反应增大。同时, 我们应该注意到, 由于水平位移虽然随着水平外荷载的增加而增加, 但它们之间并不是正比关系, 因此, 式(10-129)虽然形式上是线性的, 但实质上它是一个非线性方程。

10.6.2 多自由度体系的 $P-\Delta$ 效应问题

超高层建筑、电视塔及烟囱等一些高耸结构, 由于所承受的风荷载、地震作用等水平荷载较大, 因而会产生较大的水平位移。这种情况下, 结构的 $P-\Delta$ 效应比较明显, 在进行动力分析和抗震设计时都应该考虑到 $P-\Delta$ 效应的影响。

考虑如图 10-7 所示的多自由度体系, 按 10.6.1 所述的计算等效侧向力的方法, 可以导出多自由度体系等效侧向力向量为

$$\{P_{eq}\} = [K_p] \{u\} \quad (10-121)$$

式中, $\{u\}$ 为体系的侧向位移向量; $[K_p]$ 为体系的影响刚度矩阵。这样, 多自由度体系的运动方程即可表示为

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + ([K] - [K_p]) \{u\} = \{P(t)\} \quad (10-122)$$

按照上节所述求解多自由度体系非线性运动方程的方法, 则可求解该体系的动力反应。

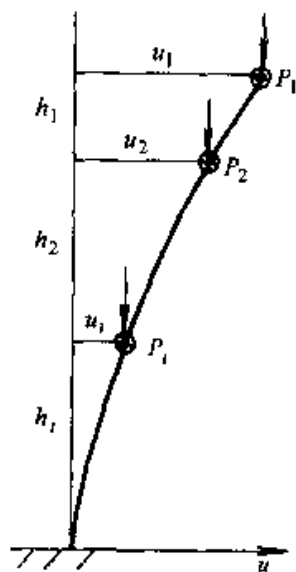


图 10-7 多自由度体系

算例 10.1 电视塔由塔座、塔身、塔楼和塔杆组成,结构对称性好,总高度为 408m,地面输入为 EL Centro 地震波,南北向输入,最大地震动加速度调整为 100cm/s^2 。以此为例,说明 $P-\Delta$ 效应对结构动力反应的影响。

解: 将整个塔沿高度分成 26 段,形成有 26 个质点的弯曲串联多自由度体系,其刚度矩阵由直接刚度法形成,阻尼采用瑞雷阻尼,阻尼比取为 0.02,采用体系合适的两阶频率计算阻尼系数。通过计算得到体系的最大位移和最大弯矩如表 10-1 所示。

表 10-1 电视塔计算结果

质 点 号	最大位移/m			质 点 号	最大弯矩/ $10^8\text{N}\cdot\text{m}$		
	不考虑 $P-\Delta$ 效应	考虑 $P-\Delta$ 效应	差值 (%)		不考虑 $P-\Delta$ 效应	考虑 $P-\Delta$ 效应	差值 (%)
1	0.899	0.912	1.49	14	1.162	1.154	-0.71
2	0.679	0.710	4.66	15	1.142	1.137	-0.41
3	0.516	0.540	4.71	16	1.612	1.610	-0.09
4	0.399	0.414	3.61	17	1.805	1.790	-0.88
5	0.324	0.329	1.54	18	1.883	1.802	-4.32
6	0.258	0.258	-0.08	19	1.814	1.725	-4.88
7	0.203	0.213	5.03	20	1.694	1.604	-5.34
8	0.177	0.187	6.00	21	1.861	1.732	-6.93
9	0.154	0.164	6.50	22	2.736	2.637	-3.62
10	0.133	0.142	6.55	23	3.760	3.593	-4.45
11	0.118	0.124	4.57	24	4.810	5.145	6.96
12	0.107	0.111	4.13	25	6.627	6.613	5.53
13	0.095	0.099	4.09	26	9.475	9.843	3.89

由表中数据可以看出,考虑 $P-\Delta$ 效应时的反应值不一定在每个自由度上都比不考虑时的大;另外,考虑与不考虑 $P-\Delta$ 效应时,位移的最大差别为 6.5% 左右,弯矩的最大差别接近 7%,它们都没有达到 10%。形成这种情况是因为地震作用下结构的变形过程十分复杂,在这一过程中,竖向力产生的附加弯矩在结构的某些部位可以和水平地震力产生的弯矩反号;再者,对超高层结构来说,地震反应中的高振型含量丰富,那种蛇形变形会使各质点重量对体系下方部位产生的附加弯矩也出现反号现象。上述两者都会减弱 $P-\Delta$ 效应。但是,6%~7% 的差别对电视塔这样重要的设施来说,是一个不容忽视的问题。

10.7 结构动力参数识别和动力检测

随着计算能力和计算方法的发展,结构分析模型的精度越来越高。但是由于认识水平和结构复杂性的限制,理论模型和实际结构之间总是存在一定的差距。其中最主要的是边界条件不完全符合实际,复杂结构中的某些材料特性也随着环境条件而变化,还有设计和施工误差造成理论模型与实际结构不符等。同时,使用期间的疲劳与退化也改变了结构的特性。因此需要对结构进行动力参数识别和检测,以评估其实际的运行状态,并为维护、加固提供可靠的依据。

动力检测是指利用结构的动力响应进行结构性态识别的方法,包括对结构进行激励的方式、响应量(位移、速度和加速度)和测量位置的选择,以及对测量信号的处理方式和结构识别方法。结构的性态在物理空间内通过结构的刚度、质量和阻尼等物理参数,或者在模态空间内通过固有频率、阻尼比和振型等模态参数来描述。结构动力参数识别是指利用通过动力测试得到的结构动力响应来识别结构参数的方法,可分为时域和频域两种方法,本节介绍模态参数频域识别方法的基本概念和原理,以及动力检测基本内容。

10.7.1 动力参数频域识别方法

多自由度体系结构的动力方程为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\} \quad (10-123)$$

式中, $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 的意义同前; $\{P(t)\}$ 为激振力向量; u 、 \dot{u} 和 \ddot{u} 分别为结构的位移、速度和加速度反应向量。对式(10-123)进行 Laplace 变换(拉氏变换),可得

$$([M]s^2 + [C]s + [K])\{u(s)\} = \{P(s)\} = [H_d(s)]^{-1}\{u(s)\} \quad (10-124)$$

式中, $\{P(s)\}$ 和 $\{u(s)\}$ 分别为结构的 $\{P(t)\}$ 和 $\{u(t)\}$ 的拉氏变换; $[H_d(s)]^{-1}$ 的表达式如下

$$[H_d(s)]^{-1} = [M]s^2 + [C]s + [K] \quad (10-125)$$

式中, $[H_d(s)]$ 为结构的位移传递函数,该函数建立了在复数 s 域内结构的位移反应和激励之间的映射关系。将式(10-125)两边同乘以振型矩阵 $[\Phi]$,则

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [H_d(s)]^{-1} [\Phi] &= [\Phi]^T ([M]s^2 + [C]s + [K]) [\Phi] \\ &= \text{diag}(M_j)s^2 + \text{diag}(C_j)s + \text{diag}(K_j) \end{aligned} \quad (10-126)$$

式中,振型矩阵 $[\Phi]$ 由各阶振型向量 $\{\phi_j\}$ ($j=1, 2, \dots, N$)组成,即 $[\Phi] = [\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \dots, \{\phi\}_N]$; M_j 、 C_j 和 K_j 分别为结构的第 j 阶振型质量、振型阻尼和振型刚度; $\text{diag}(\cdot)$ 表示对角矩阵。

对式(10-126)求逆,并两边分别左乘和右乘 $[\Phi]$ 和 $[\Phi]^T$,得

$$[H_d(s)] = [\Phi] (\text{diag}(1/(M_j s^2 + C_j s + K_j))) [\Phi]^T$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{\{\phi\}_i \{\phi\}_i^T}{M_i s^2 + C_i s + K_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\{\phi\}_i \{\phi\}_i^T}{M_i (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2)} \quad (10-127)$$

上式为位移传递函数的表达式。当结构在零初始条件下(速度和加速度均为零时),由拉氏变换的性质可得

$$H_a(s) = s \quad H_v(s) = s^2 H_d(s) \quad (10-128)$$

由于傅里叶变换是拉氏变换当 $s = i\omega$ 时的特例,因此由式(10-127)和式(10-128)可得

$$[H_a(i\omega)] = i\omega [H_v(i\omega)] = (i\omega)^2 [H_d(i\omega)] = -\omega^2 \sum_{i=1}^N \frac{\{\phi\}_i \{\phi\}_i^T}{M_i (-\omega^2 + 2i\zeta_i \omega_i \omega + \omega_i^2)} \quad (10-129)$$

式中, $[H_a(i\omega)]$, $[H_v(i\omega)]$ 和 $[H_d(i\omega)]$ 分别为结构的加速度、速度和位移传递函数,该函数建立了在频域 ω 内结构的反应和激励之间的映射关系。

下面以加速度传递函数为例说明其意义。传递函数的任一元素 $[H_a^p(i\omega)]$ 表示 r 点激振、 p 点拾振的分量,其表达式为

$$[H_a^p(i\omega)] = -\omega^2 \sum_{i=1}^N \frac{\{\phi_r\}_i \{\phi_p\}_i^T}{M_i (-\omega^2 + 2i\zeta_i \omega_i \omega + \omega_i^2)} \quad (10-130)$$

式中, ϕ_r 和 ϕ_p 分别为结构第 i 阶振型的 r 和 p 自由度的分量。传递函数的任一列元素 $[H_a^p(i\omega)]$ 表示各自由度分别激振、 p 点拾振的加速度反应;而任一行元素 $[H_a^r(i\omega)]$ 表示在 r 自由度激振、所有自由度同时拾振的加速度反应。由于 $[H_a(i\omega)] = [H_a(i\omega)]^T$, 即传递函数矩阵为对称阵,所以 $[H_a^p(i\omega)] = [H_a^r(i\omega)]$, 即传递函数矩阵中 r 点激振、 p 点拾振的元素与 p 点激振、 r 点拾振的元素相等,这就是传递函数的互易性定理,常在试验中据此检查试验设置的好坏和测量数据的质量。

传递函数 $[H(j\omega)]$ 是频率的函数,为复数,可以通过幅值和相位表示,也可以通过实部和虚部表示,为复平面上的矢量。传递函数反映了结构的特性,通过它可以了解结构的特征,频域识别方法就是通过传递函数对结构参数进行识别。试验时,通过同时测量激励和加速度响应的时程信号,经过放大器和抗混滤波器后进行模/数转换和快速 Fourier 变换(FFT)变成频域信号,获得传递函数后按照参数辨识方法识别模态参数。

对于多自由度结构体系,在传递函数幅值谱的曲线中会出现多个峰值(峰值数量与结构的自由度数相同),但由式(10-130)可以看出,在某阶固有频率附近,其他模态的贡献可以忽略而按照单自由度体系处理。下面介绍参数识别最基本的幅值法和分量分析法。

1. 幅值法

传递函数的幅值与结构的动力放大系数是等价的,可以按照半功率带宽法的

步骤识别结构的固有频率和阻尼比。下面说明振型的识别方法,在 r 自由度激振、所有自由度同时拾振可得到传递函数的一列(或一行)元素 $[H_a^r(j\omega)]$,由式(10-130)可知,当频率等于第 i 阶固有频率时,传递函数幅值可以近似表示为

$$|H_a^r(j\omega)| \cong |H_a^r(j\omega_i)| = \frac{\phi_{ri}\phi_{pi}}{2M_i\zeta_i} = \frac{\phi_{ri}}{2M_i\zeta_i} \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix} \quad (10-131)$$

式中,只有 ϕ_{pi} 随测点位置不同而变化,其余皆为由激振自由度 r 和第 i 阶模态所决定的常数,因而传递函数幅值与 ϕ_{pi} 成正比,这里 ϕ_{pi} 为结构的第 i 阶模态。所以各自由度加速度传递函数幅频曲线在某阶模态频率处的峰值之比近似等于该阶模态在各自由度处的分量之比。

2. 分量分析法

分量分析法通过将传递函数分解为实部和虚部进行分析来识别模态参数。将式(10-131)中的传递函数分解为实部和虚部

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(H_a^r(j\omega)) &= \omega^2 \sum_{i=1}^N \frac{(\omega^2 - \omega_i^2) \{\phi_{ri}\} \{\phi_{pi}\}^T}{M_i((\omega^2 - \omega_i^2)^2 + (2\zeta_i\omega_i\omega)^2)} \\ &= \frac{(\omega^2 - \omega_i^2) \{\phi_{ri}\} \{\phi_{pi}\}^T}{M_i((\omega^2 - \omega_i^2)^2 + (2\zeta_i\omega_i\omega)^2)} + \omega^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{(\omega^2 - \omega_j^2) \{\phi_{ri}\} \{\phi_{pj}\}^T}{M_j((\omega^2 - \omega_j^2)^2 + (2\zeta_j\omega_j\omega)^2)} \\ &= \frac{(\omega^2 - \omega_i^2) \phi_{ri} \phi_{pi}^T}{M_i((\omega^2 - \omega_i^2)^2 + (2\zeta_i\omega_i\omega)^2)} + H_{\operatorname{Re}} \end{aligned} \quad (10-132)$$

和

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(H_a^r(j\omega)) &= \omega^2 \sum_{i=1}^N \frac{2\zeta_i\omega_i\omega \{\phi_{ri}\} \{\phi_{pi}\}^T}{M_i((\omega^2 - \omega_i^2)^2 + (2\zeta_i\omega_i\omega)^2)} \\ &= \omega^2 \frac{2\zeta_i\omega_i\omega \{\phi_{ri}\} \{\phi_{pi}\}^T}{M_i((\omega^2 - \omega_i^2)^2 + (2\zeta_i\omega_i\omega)^2)} + \omega^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{2\zeta_j\omega_j\omega \{\phi_{ri}\} \{\phi_{pj}\}^T}{M_j((\omega^2 - \omega_j^2)^2 + (2\zeta_j\omega_j\omega)^2)} \\ &= \omega^2 \frac{2\zeta_i\omega_i\omega \phi_{ri} \phi_{pi}^T}{M_i((\omega^2 - \omega_i^2)^2 + (2\zeta_i\omega_i\omega)^2)} + H_{\operatorname{Im}} \end{aligned} \quad (10-133)$$

当频率在第 i 阶固有频率附近时,该阶模态起主导作用,称为主模态。若各固有频率间隔较大,在主模态附近其余模态的影响较小,可以用常数来表示,即上式中的 H_{Re} 、 H_{Im} 称为剩余模态的实部与虚部。在远离固有频率处,剩余模态曲线比较平坦,几乎不随频率而变化。剩余模态使实频和虚频图相对于坐标轴平移一段距离,称为剩余柔度线。

在固有频率附近,传递函数实部与剩余柔度线的交点为零,而传递函数虚部达到极值,据此可确定固有频率。由于虚频曲线的峰值估计较准且不受剩余柔度的

影响,一般采用虚频曲线峰值确定固有频率。而阻尼比系数可对虚频曲线的峰值采用半功率带宽法进行计算。在主模态处如果不计剩余柔度的影响,传递函数虚频的一系列可表示为

$$\operatorname{Im}(H'_a(j\omega_i)) = \frac{\phi_{ri}\phi_{pi}}{M_i 2\zeta_i} = \frac{\phi_{ri}}{M_i 2\zeta_i} \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{N_i} \end{Bmatrix} \quad (10-134)$$

由于 $\frac{\phi_{ri}}{M_i 2\zeta_i}$ 为由激振自由度 r 和第 i 阶模态决定的常数,这样由式(10-134)即可确定结构的第 i 阶模态 ϕ_i 。因此,各自由度加速度传递函数虚频曲线在某阶模态频率处的峰值之比等于该阶模态振型在各自由度处的坐标之比。虽然式(10-134)与式(10-131)在表达式形式上相同,但二者有本质的区别。在式(10-134)中剩余模态的影响已经去除,因而传递函数虚频曲线所确定的振型是准确的。

在频域中的参数识别方法还有导纳圆法,即将传递函数的实部和虚部分别作为实轴和虚轴而形成一个圆形(也称为 Nyquist 图),通过圆的特征而识别各参数。其他的频域参数识别方法还有正交多项式拟合法、非线性加权最小二乘法和 Levy 法等。

10.7.2 动力检测的激励和测量方面的考虑

1. 激励方法

为了测量结构的传递函数,需要对其激励而产生振动,激励方式一般有两种:人工激励和环境激励。人工激励是利用激振器或者其他激振装置对待测结构施加稳定正弦激励的方式。缺点在于普通的激振器能量较小,而土木工程结构一般比较庞大,难以使结构有效地激振起来,可激发出的模态数量相对较少。而待测结构周围大地环境的微小振动(称为地脉动)、风以及结构的活载荷可引起工程结构的低幅振动,称为环境激励。自然地脉动的位移幅值从千分之几到几微米,频带从 0.1Hz 到 100Hz,而脉动风能激励起结构的幅值相对较大。采用环境激励时响应的信噪比较低,试验需要时间较长。

2. 数字信号分析中的迭混与泄漏

在数字信号分析过程中可能出现各种各样的误差,主要有过载、数字变换噪声、量化、动态范围限制等因素引起的误差,但最重要的两类误差是迭混和泄漏。

迭混是在采样过程中将连续信号转变为时间域的离散信号时造成的,采样在数学上相当于用一个单位脉冲序列组成的梳状函数去乘以原始的连续信号。经过采样后,采样信号的频谱包含着原始信号频谱以及附加的无限个经过平移的原始信号频谱(频谱的幅值均乘以常数倍个采样频率),平移量等于采样频率及其各次

倍频。理论分析表明,当连续信号的频谱的最大频率小于采样频率的一半时,经过采样后的信号频谱与原信号频谱完全一致,即信号无失真;但当信号的频谱的最大分析频率大于采样频率的一半时,平移频谱将与原始信号频谱重叠,使采样后的某些频带的幅值与原始信号频谱不同,这种现象称为迭混。频率迭混使采样信号产生失真,造成误差。其物理意义是,采样频率太低,采样点过少,以致采样后的信号不能复员原始信号。这就要求分析信号中的最高频率 f_{\max} 满足著名的香农(Shannon)采样定理,即

$$f_{\max} \leq f_s/2 \quad (10-135)$$

式中, f_s 为采样频率。滤除所有高于 $f_s/2$ 的频率分量即可避免迭混现象的发生。

泄漏是指在时间信号经过傅里叶变换后,在频域中出现了本不属于原始信号的附加分量,相当于能量“泄漏”到附加的频率分量上去了。泄漏产生的根源在于测量必须在有限的观测时间内进行,相当于人为地将连续的时间信号加了一个矩形窗,破坏了离散傅里叶变换的基本假定:即被观测信号在观测时间内必须是周期的。泄漏可以通过根据信号类型的不同而加不同的窗函数来解决。常用的窗函数有:矩形窗(Rectangle Window)、平顶窗(Flat Top Window)、汉宁窗(Hanning Window)、海明窗(Hamming Window)、高斯窗(Gauss Window)、力窗和指数窗等。加窗实质上是在进行傅里叶变换前将观测时间内非周期的信号乘上一个两端近似为零窗函数,使其满足傅里叶变换的周期性要求。在随机振动分析中,一般采用汉宁窗或者海明窗;锤击试验中,对力信号要加力窗,对响应信号加指数窗。采用非矩形窗函数有一个弊端,它们使信号中的总能量减少,从而降低了频域中的幅值,也相当于增加了结构中的阻尼。

3. 环境激励时的参数识别方法

参数识别的基本原理是建立在已知系统的输出和输入来求得频率响应函数(频域)或脉冲响应函数(时域),从而实现对系统参数的识别。对土木工程结构而言,结构的振动响应(输出)由安置在结构各部位的传感器记录得到,然而工作环境条件下大型复杂实际结构的激励(输入)却不是那么容易可以测到的。虽然有一些专用的激振设备和相应输入-输出测试装置,但现场实验条件、结构的复杂性和实测数据质量等因素往往限制了这类专用激振设备的使用。一些重型的激振装置均很贵,势必增加了系统识别的成本,且用这种方法必然影响结构或线路的正常工作,这对使用繁忙的结构会带来诸多不便。另一方面,像车辆、行人、风及其组合等是作用于结构上的环境或自然激励,用环境激励引起的振动对结构系统进行识别显然具有许多优点:无需贵重的激励设备,不打断结构的正常使用,方便省时,只需测定响应数据。同时直接从结构工作状态的振动响应数据识别模态参数更符合实际情况和边界条件,可以实现对结构的参数识别、在线损伤检测和实时健康监测,因此已成为土木工程结构系统识别十分活跃的课题。由于此时仅仅有环境振动响

应的输出数据,对真正的输入情况是不知道的,因此系统识别过程是只知输出的系统识别。环境振动系统识别对传统系统识别的方法也是一种挑战,需要应用一些特殊的识别技术,因为环境振动响应一般振动幅值很小,随机性很强,噪声影响和数据量大等。

环境激励时地脉动、风以及结构活载荷往往同时作用在结构上,而且分布在结构不同位置,通常很难甚至无法测量其输入信号。此时,只能利用输出信号来识别结构的参数。在频域识别时假定输入为平稳白噪声,其功率谱为一常数,这样结构响应的自功率谱与传递函数的平方成正比(由 9.7 节随机振动公式可知),通过结构各测点响应的功率谱进行参数识别。响应功率谱的峰值所对应的频率一般是结构的固有频率,但由于噪声和激励并非完全平稳的影响,需要测量多个测点响应的功率谱进行比较才能最终确定结构的各阶固有频率。其判别原则为:①多个测点响应的自功率谱峰值位于同一频率处;②模态频率处各测点间的相干函数较大;③各测点在模态频率附近具有近似同相位或反相位的特点。在阻尼较小和频率间隔较大的情况下,振型可以认为是各测点响应信号的互功率谱与自功率谱的比值。

环境激励时的参数识别方法发展历史不长,其中时域识别方法具有较大的优越性,因为时域法仅采用结构反应的时间历程,无需知道激励即可进行识别。时域识别方法有:基于离散时间数据的 ARMA 模型,特征实现算法(ERA),自然激励技术(NET),随机子空间法(SSI)等。其中随机子空间方法具有较大的优越性,即将结构系统的二阶控制微分方程写成为状态方程形式,构成了一个动力学系统的离散时间状态空间模型,并假定过程噪声和测量噪声为零均值的白噪声。然后采用矩阵的 QR 分解和奇异值分解(SVD)以及最小二乘等来识别系统状态矩阵和观测矩阵,并由它们的特征值分解最终确定结构的模态参数,即自振频率、阻尼比和振型。

参 考 文 献

- 1 A. K. Chopra. Dynamics of Structures. Prentice Hall, 1995
- 2 A. K. Chopra. Dynamics of Structures. Prentice Hall, 2000
- 3 R. W. Clough and J. Penzien. Dynamics of Structures. McGraw-Hill, 1993
- 4 R. W. Clough and J. Penzien. Dynamics of Structures. McGraw-Hill, 1995
- 5 克拉夫,彭津著.结构动力学.王光远等译.北京:科学出版社,1981
- 6 Mario. Paz 著.结构动力学-理论与计算.李裕澈等译.北京:地震出版社,1993
- 7 唐友刚编著.高等结构动力学.天津:天津大学出版社,2002
- 8 龙驭球,包世华,匡文起,袁驷编著.结构力学教程.北京:高等教育出版社,2001
- 9 大崎顺彦著.振动理论.谢礼立等译.北京:地震出版社,1990
- 10 沃伯顿著.结构的动力性态.金成成,戴宗信译.北京:地震出版社,1983
- 11 王勖成,邵敏编著.有限单元法基本原理和数值方法.北京:清华大学出版社,1997
- 12 胡细宝,孙洪祥编著.概率论与随机振动.北京:北京邮电大学出版社,2001
- 13 盛聚,谢式千,潘承毅编.概率论与数理统计.北京:高等教育出版社,2002
- 14 李宏男著.结构多维抗震理论与设计方法.北京:科学出版社,1998
- 15 王光远编著.应用分析动力学.北京:人民教育出版社,1981
- 16 李国强,李杰著.工程结构动力检测理论与应用.北京:科学出版社,2002
- 17 朱镜清著.结构抗震分析原理.北京:地震出版社,2002
- 18 林家浩,曲乃泗,孙焕纯编著.计算结构动力学.北京:高等教育出版社,1989
- 19 李桂青著.抗震结构计算理论和方法.北京:地震出版社,1985
- 20 楼梦麟编著.结构动力分析的子结构方法.上海:同济大学出版社,1997
- 21 王文亮,杜作润编著.结构振动与动态子结构方法.上海:复旦大学出版社,1985
- 22 张新培编著.钢筋混凝土抗震结构非线性分析.北京:科学出版社,2003
- 23 D. J. Ewins. Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press Ltd, 1984
- 24 傅志方主编.振动模态分析与参数辨识.北京:机械工业出版社,1990
- 25 Peter Avitabile, Modal Space-In our little world, SEM Experimental Techniques, 1998 ~ 2002
- 26 张令弥著.振动测试与动态分析.北京:航空工业出版社,1992
- 27 李方泽,刘馥清,王正编著.工程振动测试与分析.北京:高等教育出版社,1992
- 28 李德葆,陆秋海著.试验模态分析及其应用.北京:科学出版社,2001
- 29 沃德·海伦,斯蒂芬·拉门兹,波尔·萨斯著.模态分析理论与试验.白化同,郭继忠译.北京:北京理工大学出版社,2001
- 30 J. N. Juang. Applied system identification. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc, 1994