

6.3 极限平衡法

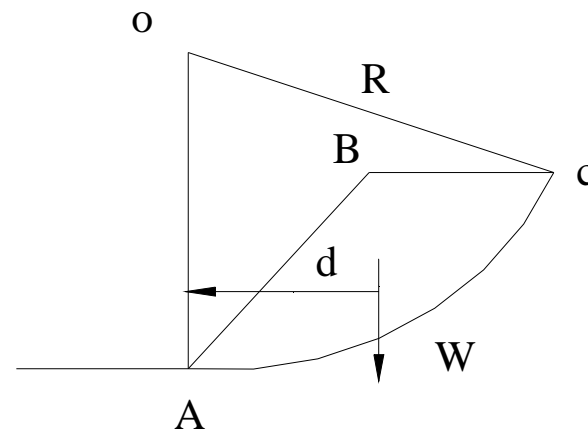
- 6.3.1 概述
- 6.3.2 简单（瑞典）条分法
- 6.3.3 简化毕肖甫法
- 6.3.4 Janbu法
- 6.3.5 Spencer方法
- 6.3.6 Morgenstern-Price方法
- 6.3.7 陈祖煜的通用条分法
- 6.3.8 总结
- 6.3.9 孔隙水压力的考虑
- 6.3.10 最小滑裂面的搜索

6.3.1 概述

- 极限平衡法是建立在（刚体）极限状态时的静力平衡基础上；
- 不考虑变形协调条件与变形过程；
- 假设滑裂面（圆形或者任意）；
- 由于求解条件不足，需要一些假设；

圆弧滑裂面的稳定分析

- (1) 滑动力矩: $M_s = w d$
- (2) 抗滑力矩:



$$M_R = \int_0^e \tau_f de \cdot R = \int_0^e (c + \sigma_n tg \varphi) de \cdot R = [c\hat{A}c + \int_0^e \sigma_n tg \varphi de \cdot R$$

(3) 安全系数: $F = \frac{M_R}{M_s}$

其中 $\sigma_n = \sigma_n(l)$ 是未知函数

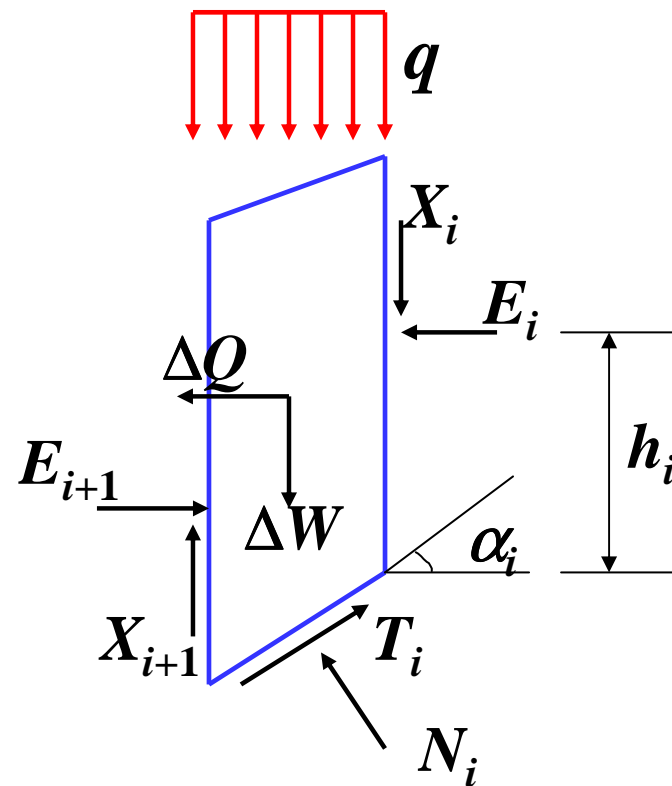
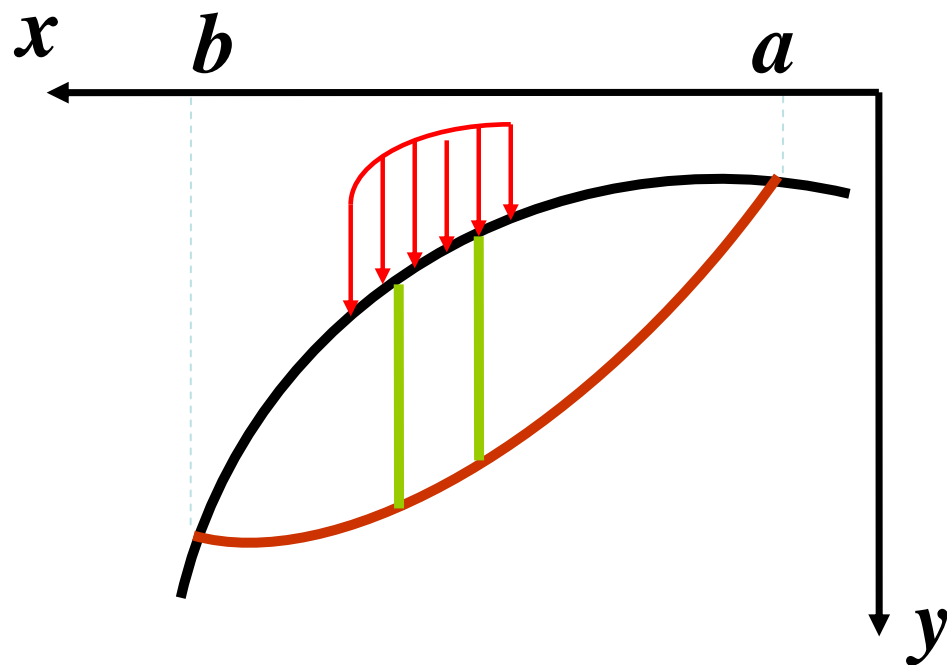


图6-64

方程数：静力平衡 + 力矩平衡 = $3n$
 滑动面上极限平衡条件 = n } $4n$

未知数：条块间力 + 水平力作用点位置
 = $2(n-1) + (n-1) = 3n-3$
 滑动面上的力 = $2n$
 安全系数 $F = 1$ } $5n-2$

未知数 - 方程数 = $n-2$

忽略土条体底部力 N_i 的作用
 点位置

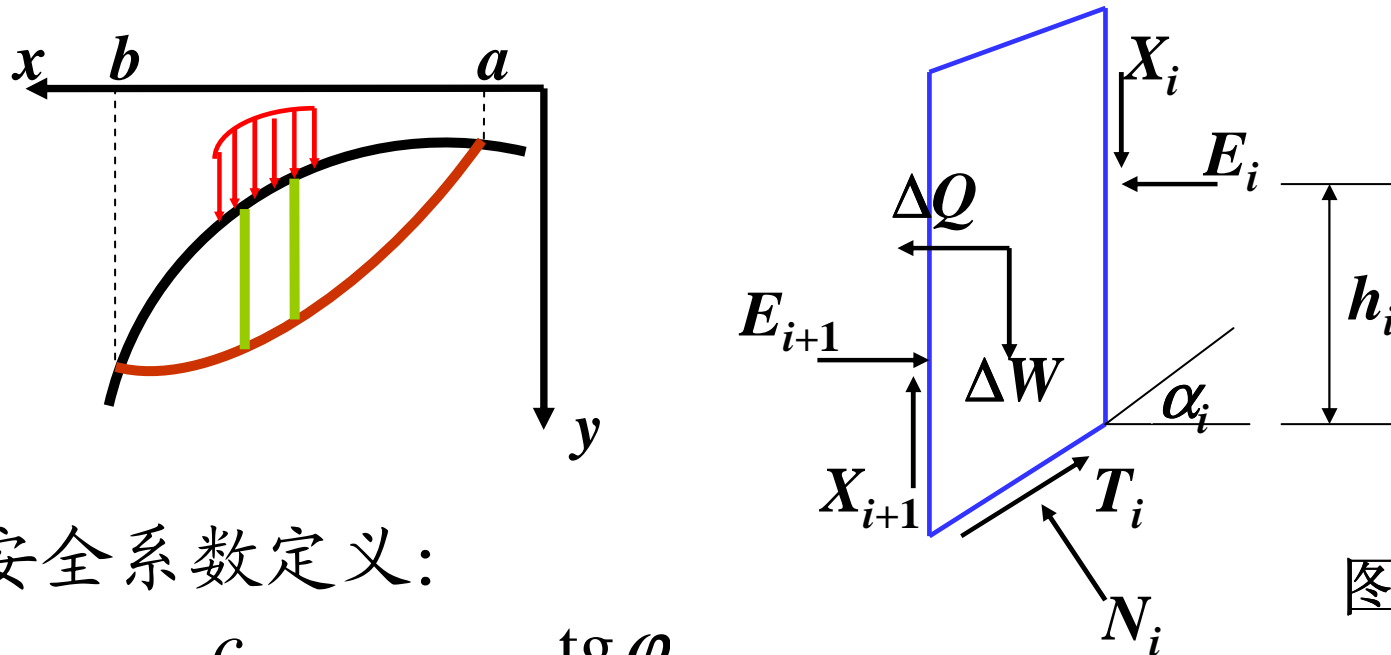


图6—65

安全系数定义:

$$c_e = \frac{c}{F} \quad \text{tg } \varphi_e = \frac{\text{tg } \varphi}{F}$$

$$\tau_f = c_e + \sigma_n \text{tg } \varphi_e$$

条块底部:

$$T_i = \tau_f \cdot l_i = c_e l_i + N_i \text{tg } \varphi_e = c_e \Delta x \sec \alpha_i + N_i \text{tg } \varphi_e$$

极限平衡条件

几种极限平衡法

方法	整体圆弧法	简单条分法	毕肖普法	普遍条分法 (简布)	Spencer 法	Morgenstern-Price 法
滑裂面形状	圆弧	圆弧	圆弧	任意	任意	任意
假设	刚性滑动体滑动面上极限平衡	忽略条间力	考虑条间力, $\Delta H_i=0$	推力作用点	条间力的方向 (比值常数)	条间力的方向为一个函数
条件	软粘土不排水 $\varphi_n=0$	一般均质土	一般均质土	任意土 (分层土)	任意土	任意土
精度		F_s 偏小 10%	$\Delta H_i=0$, 误差 2%-7%	比较难确定		
平衡条件	整体力矩	√	√	√	√	√
	各条力矩	√	×	√	√	√
	各条垂直力	√	(法向)	√	√ (法向)	√
	各条水平力	√	×	×	√ (切向)	√

6.3.2 瑞典条分法

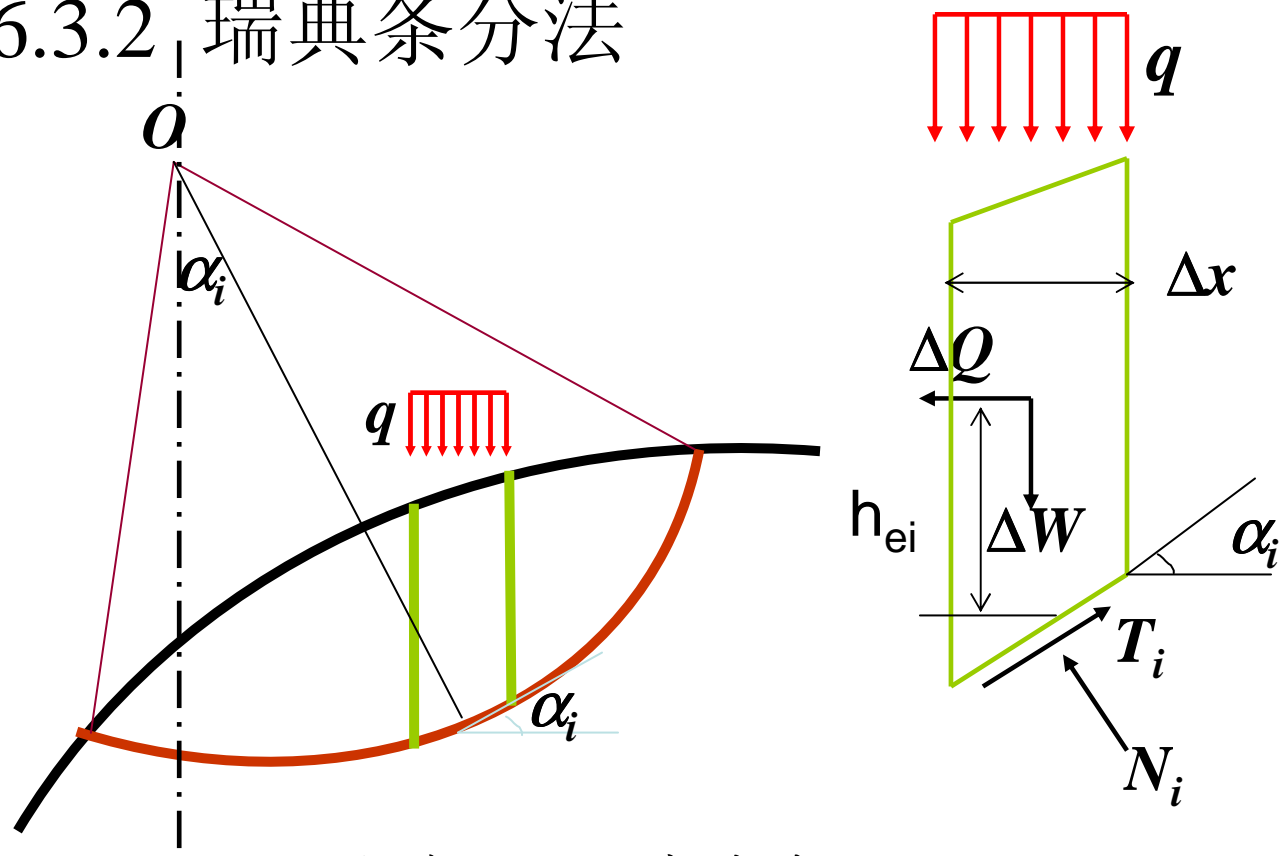


图6—66

假定：圆弧滑裂面；不考虑条间力；只满足整体力矩平衡

未知数：

$$(5n-2)-3(n-1)=2n+1$$

方程数：

$$4n$$

瑞典条分法

$$F_s = \frac{\sum (c\Delta x \sec \alpha_i + N_i \operatorname{tg} \varphi)}{\sum (\Delta W_i + q\Delta x) \sin \alpha_i + \sum \Delta Q_i \left(\cos \alpha_i - \frac{h_{ei}}{R} \right)} = \frac{M_R}{M_S}$$

6.3.3 毕肖普法

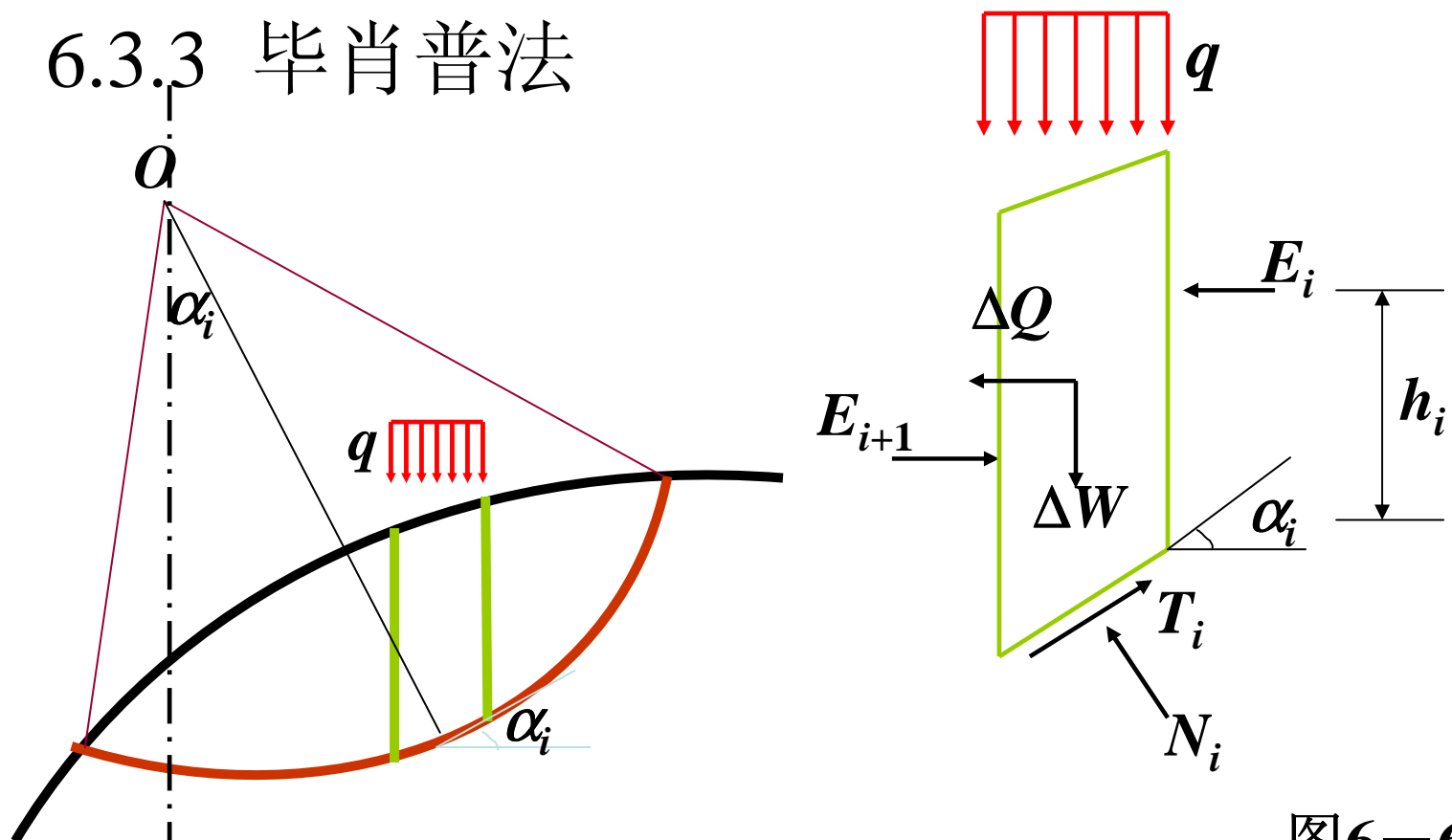


图6—69

假定:

圆弧滑裂面; 条间切向力=0

未知数:

$$(5n-2)-(n-1)=4n-1$$

方程数:

$$4n$$

毕肖普法

$$\sum \frac{(\Delta W_i + q\Delta x) \operatorname{tg} \varphi_e + c_e \Delta x}{\cos \alpha_i + \sin \alpha_i \operatorname{tg} \varphi_e} - \sum (\Delta W_i + q\Delta x) \sin \alpha_i - \sum \Delta Q_i \left(\cos \alpha_i - \frac{h_e}{R} \right) = 0$$

$$c_e = \frac{c}{F}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_e = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{F}$$

一个方程，一个未知数 F ，可解，
需试算。

6.3.4 Janbu法

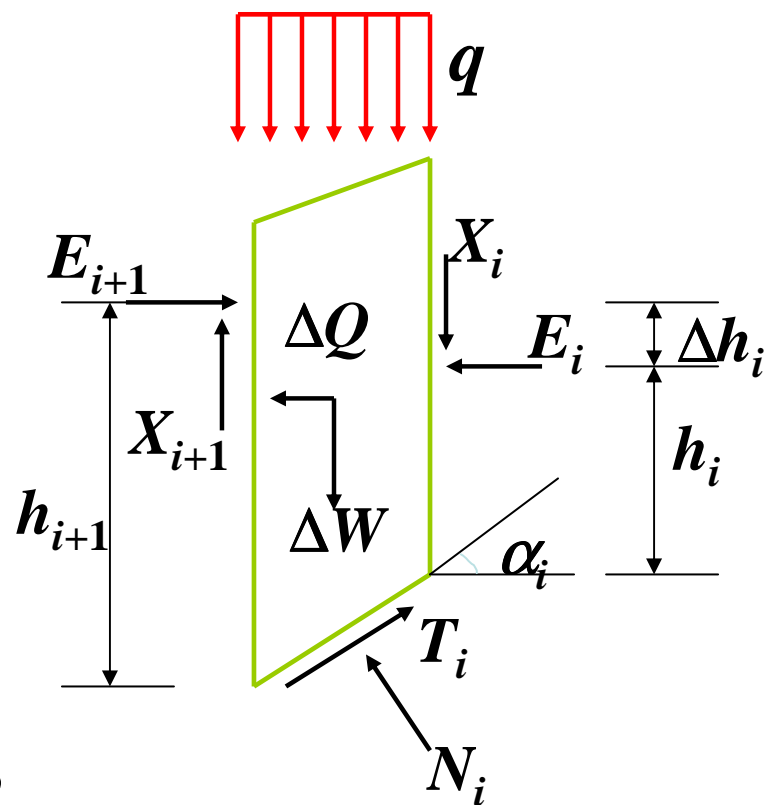
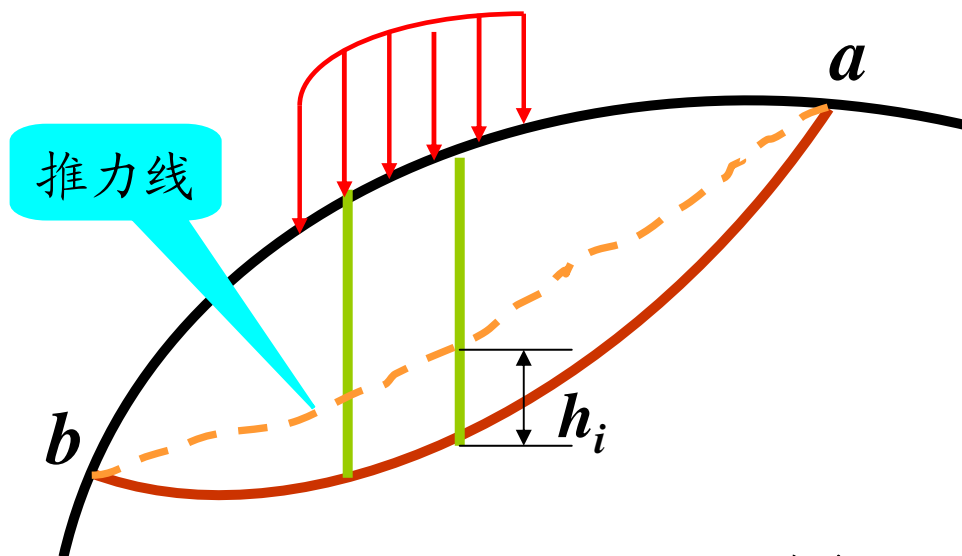


图6—73

假定：

假定各土条间推力作用点连线为光滑连续曲线 \leftrightarrow “推力作用线”
即假定了条块间力的作用点位置

未知数：

$$(5n-2)-(n-1)=4n-1$$

方程数：

$$4n$$

Janbu法

$$\sum \{ \Delta Q_i - c_e \Delta x [1 + \operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg}(\alpha_i - \varphi_e)] + (\Delta W_i + q \Delta x - \Delta X_i) \operatorname{tg}(\alpha_i - \varphi_e) \} = 0$$

此式可用于迭代求解安全系数 F_s ，但尚须先得到 ΔX_i

6.3.5 Spencer法

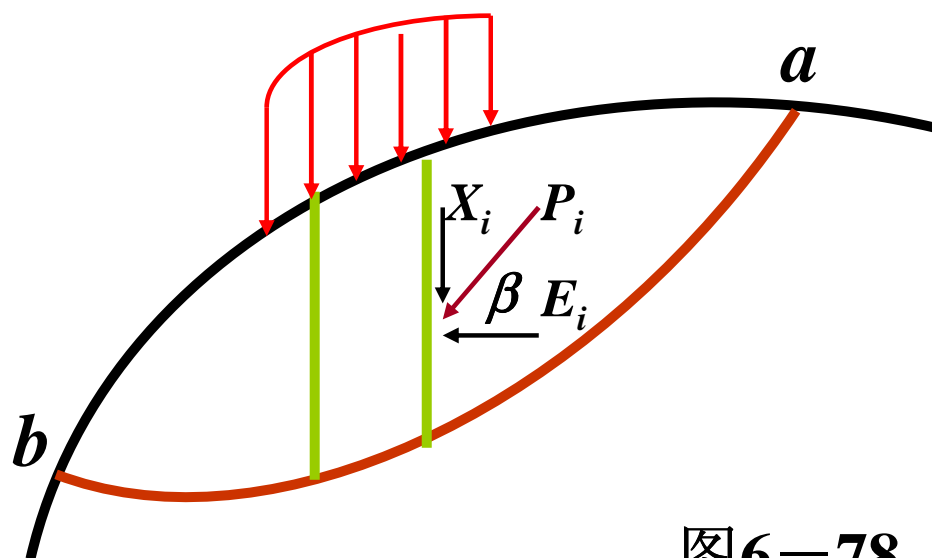
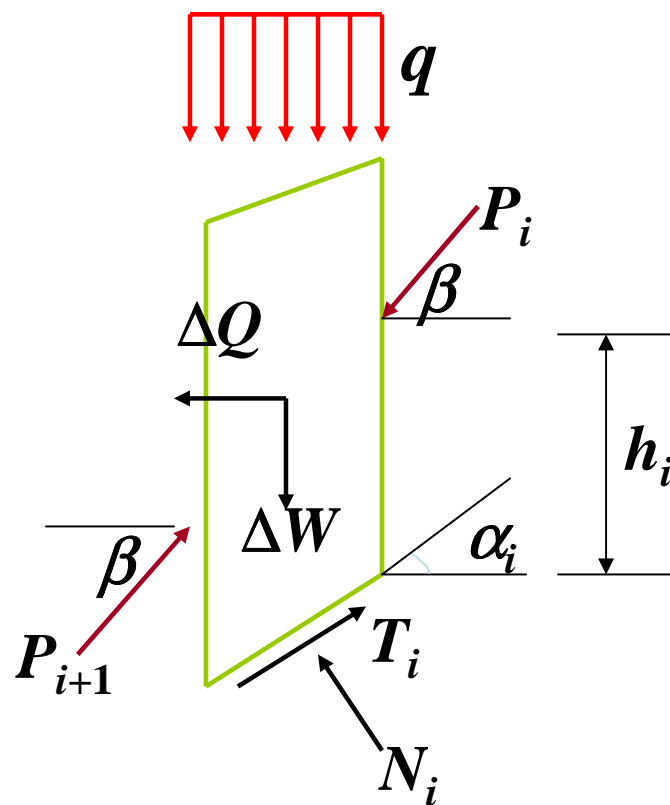


图6—78



假定： 假定土条间的切向力与法向力之比为常数，即

$$X_i / E_i = \operatorname{tg} \beta = \lambda$$

其中 λ 待求

未知数： $(5n-2)-(n-1)+1=4n$

方程数： $4n$

Spencer法

$$\sum \sec(\alpha_i - \beta - \varphi_e) [\Delta W_i \sin(\alpha_i - \varphi_e) + \Delta Q_i \cos(\alpha_i - \varphi_e) - c_e \Delta x \sec \alpha_i \cos \varphi_e] = 0$$

两个未知数： F 、 β

$$\begin{aligned} \tan \beta &= f_0(x) + \lambda f_1(x) \\ f_0(x) &= 0, f_1(x) = 1 \end{aligned}$$

补充一个方程： 根据力矩平衡条件得到

优点： β 不必指定 缺点： 在边界处 β 已知

6.3.6 Morgenstern-Price方法

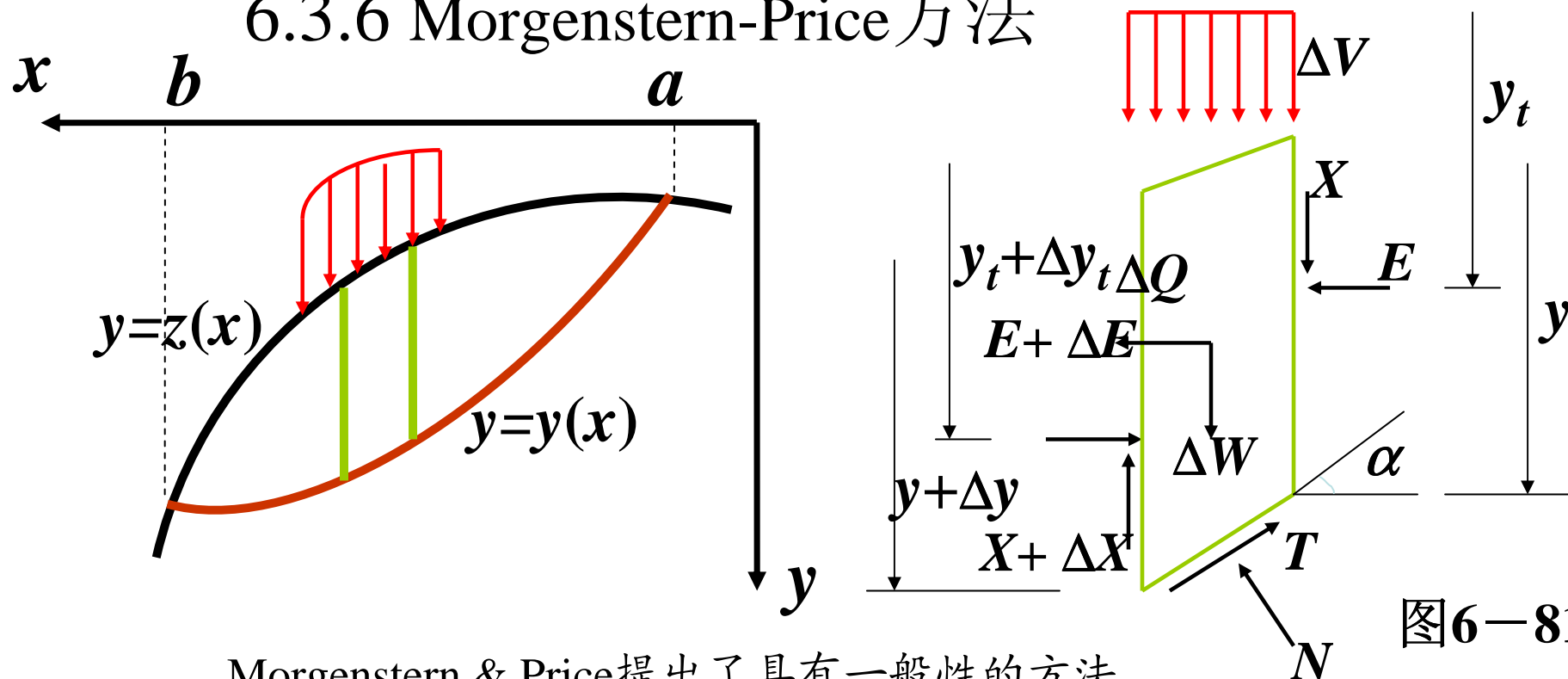


图6-81

Morgenstern & Price提出了具有一般性的方法

假定: $X/E = \tan \beta = f_0(x) + \lambda f_1(x)$ λ 待求, $f_1(x)$ 为人为假定函数

$$f_1(x) = kx + m$$

其中 k 、 m 为常数

$f_1(x)=1$ Spencer方法

$f_1(x)=0$ Bishop方法

Morgenstern-Price方法

$$\begin{aligned} & -\frac{dE}{dx}(1+\operatorname{tg} \varphi_e \operatorname{tg} \alpha)+\frac{dX}{dx}(\operatorname{tg} \varphi_e-\operatorname{tg} \alpha) \\ & =c_e \sec ^2 \alpha+\left(\frac{dW}{dx}+\frac{dV}{dx}\right)(\operatorname{tg} \varphi_e-\operatorname{tg} \alpha)-\frac{dQ}{dx}(1+\operatorname{tg} \varphi_e \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned}$$

$$\int_a^b(\lambda f(x) E-E \operatorname{tg} \alpha) d x=\int_a^b \frac{d Q}{d x} h_e d x$$

两个未知数 F λ 、两个方程，于是可以求解

6.3.7 陈祖煜的通用条分法

Figure 6-8 illustrates Chen Zuyi's General Slice Method. The left diagram shows a cross-section of a slope with a failure surface $y=z(x)$ and a trial failure surface $y=y(x)$. The right diagram shows a slice of soil with forces: weight G , interslice shear forces T and N , interslice moments Q and W , interslice horizontal forces Q and W , interslice vertical forces G and $G+\Delta G$, interslice angles β and $\beta+\Delta\beta$, interslice heights y and $y+\Delta y$, interslice widths y_t and $y_t+\Delta y_t$, and interslice lengths ΔQ and ΔW .

假定: $X/E = \operatorname{tg} \beta = f_0(x) + \lambda f(x)$

其中 λ 待求, $f_0(x)$ 、 $f(x)$ 为人为假定函数

6.3.8 总结

方法	整体圆弧法	简单条分法	毕肖普法	普遍条分法 (简布)	Spencer 法	Morgenstern-Price 法
滑裂面形状	圆弧	圆弧	圆弧	任意	任意	任意
假设	刚性滑动体滑动面上极限平衡	忽略条间力	考虑条间力, $\Delta H_i=0$	推力作用点	条间力的方向 (比值常数)	条间力的方向为一个函数
条件	软粘土不排水 $\phi_u=0$	一般均质土	一般均质土	任意土 (分层土)	任意土	任意土
精度		F_s 偏小 10%	$\Delta H_i=0$, 误差 2%-7%	比较难确定		
平衡条件	整体力矩	√	√	√	√	√
	各条力矩	√	×	×	√	√
	各条垂直力	√	(法向)	√	√ (法向)	√
	各条水平力	√	×	×	√	√ (切向)

图6—97 几种计算方法小结

极限平衡法边坡稳定分析的一些结论

Duncan 关于边坡稳定分析方法的结论（1980、1996）：

（1）瑞典条分法所得安全系数较小，在圆弧中心角较大和孔隙水压力较大时，安全系数的误差较大。

（2）对于圆弧滑动面，Bishop法是足够精确的（除非遇到数值分析困难）。对于土质比较均匀的边坡，Bishop法是实用可靠的。其缺点是不能用于任意形状滑裂面。

（3）在很多情况下，需要使用任意形状滑裂面。仅使用静力平衡方法的结果对所假定的条间力方向极为敏感。条间力假定不合适将导致安全系数严重偏离正常值。

（4）满足全部平衡条件（静力平衡、力矩平衡）在任何情况下都是精确的。相互误差 为12%，一般可认为与正确解误差值不大于6%。

其它应注意的问题

1) 局部极小值问题

2) 孔压，地震力

3) 强度指标选择

有效应力指标、总应力指标？

不排水、固结不排水、不固结不排水？

峰值强度、残余强度？

4) 非线性强度指标

无粘性土：

$$\phi = \phi_0 - \Delta\phi \lg \frac{\sigma_3}{P_a}$$

5) 条分法的延伸——计算挡土墙土压力、地基承载力等

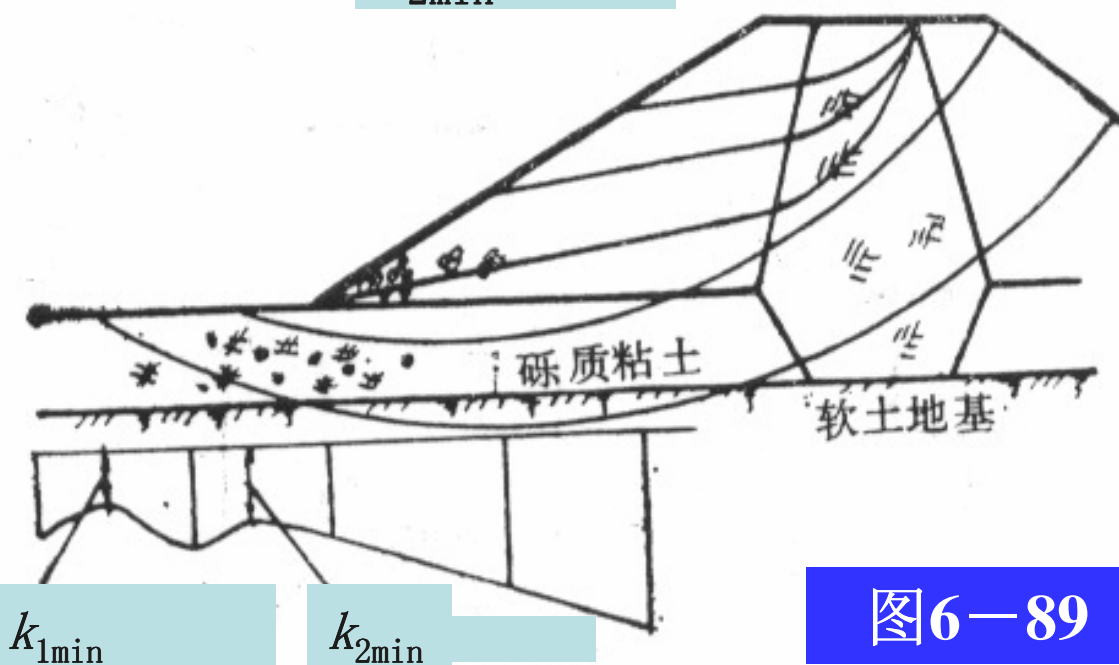
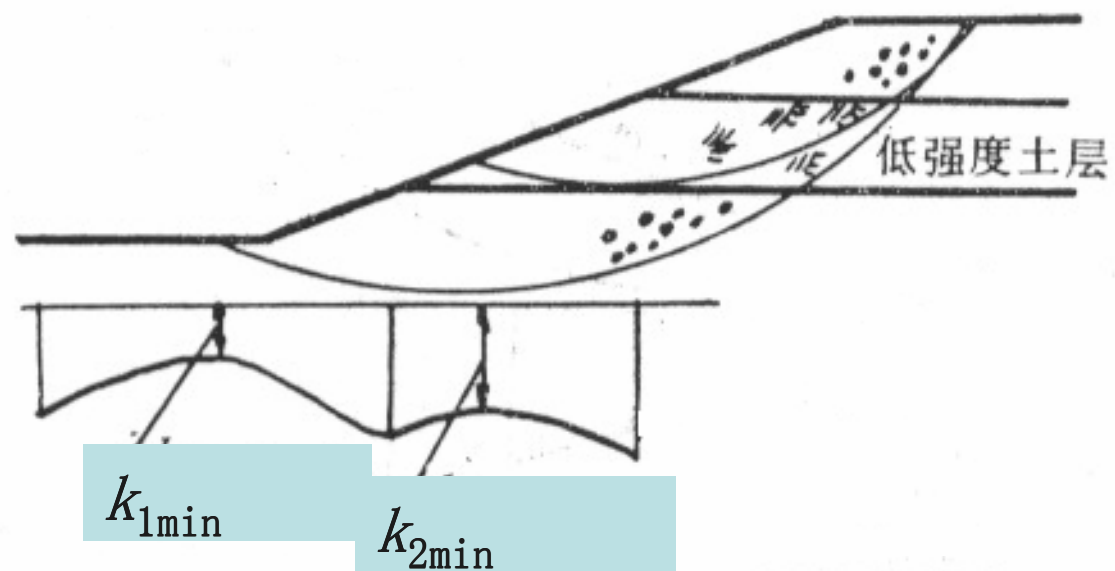


图6—89

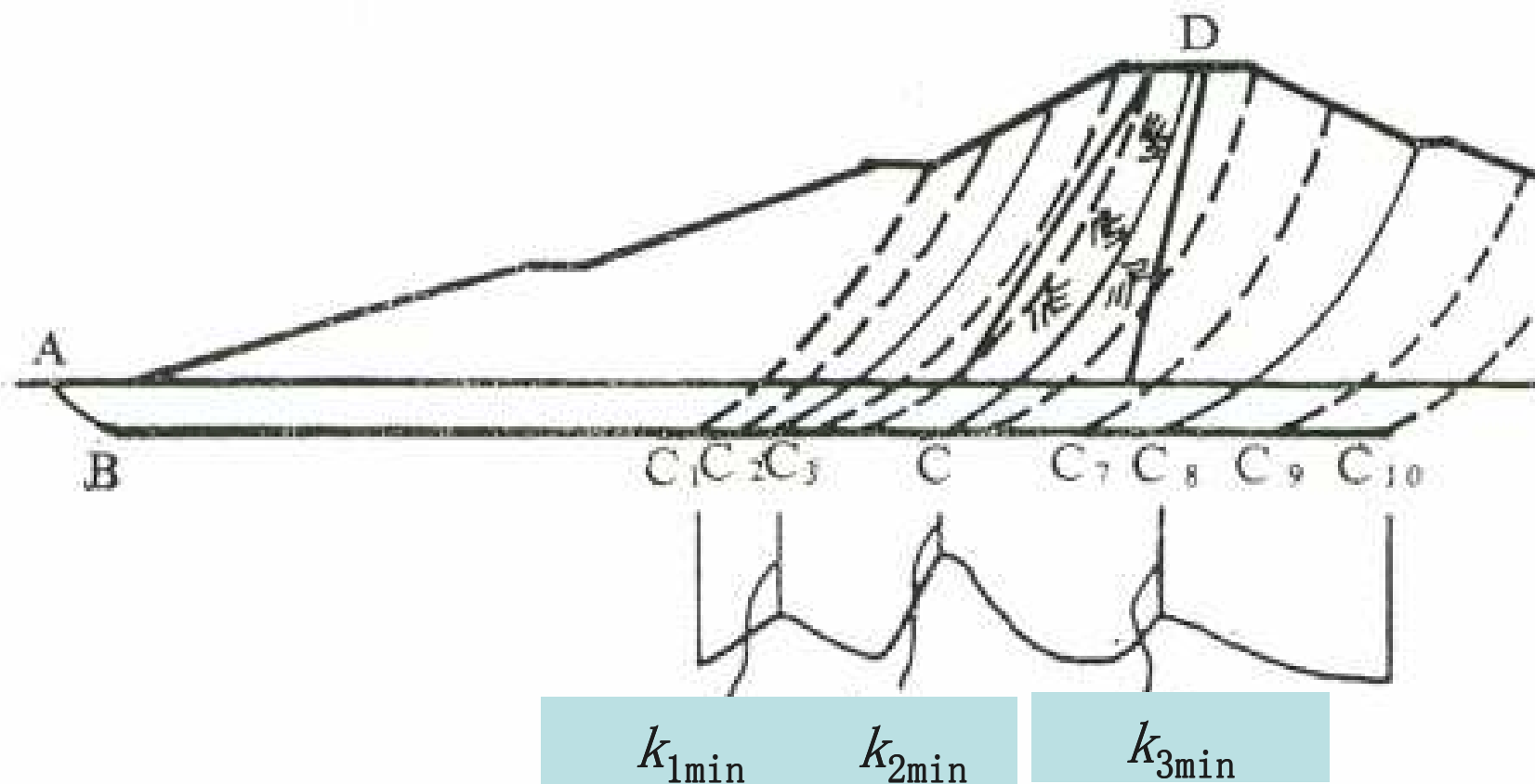


图6—90

一些体会

- (1) 多用几种计算方法、多用几种搜索方法比较一下
- (2) 滑裂面不同， F 也可能很接近；也就是，相近的 F 可能对应大不相同的滑裂面
- (3) 目前在条分方式、条间力假定上再研究似乎意义不大，值得研究的可能是：
 - 避免局部极小值的搜索方法
 - 三维边坡稳定分析
 - 基于有限单元法的稳定分析

问题：

- (4) 稳定分析不考虑边坡变形，而监测边坡稳定与否主要依靠变形监测，问题：如何建立变形与稳定的关系？
- (5) 三维计算比二维计算所得安全系数为大，但实际崩岸、滑坡却均为三维情况，怎么解决这一悖论？

6.3.10 对应最小安全系数滑裂面的搜索

- 计算机被广泛应用之前，由于计算能力限制，一般限于圆弧滑裂面，对于不很复杂情况可以通过经验进行简单的搜索；
- 计算机大大增强了计算搜索能力；
- 仿生学的理论方法引进：遗传算法、蚂蚁算法等。

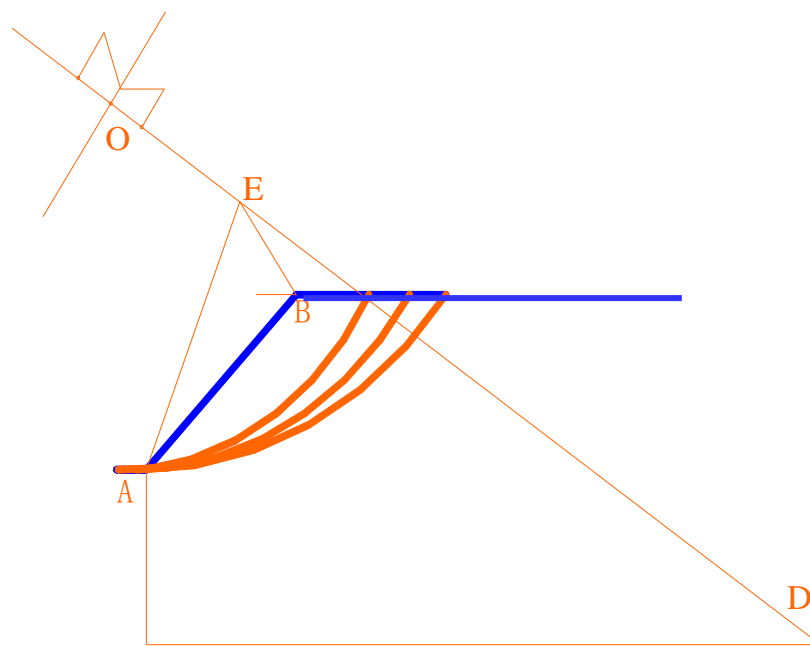


图 6-96 经验方法

基本原理

滑裂面曲线 $y=y(x)$ ，求 F_{\min} 即为求泛函 $F = F(y(x))$ 的极值问题。

泛函：函数的函数。

泛函来源：

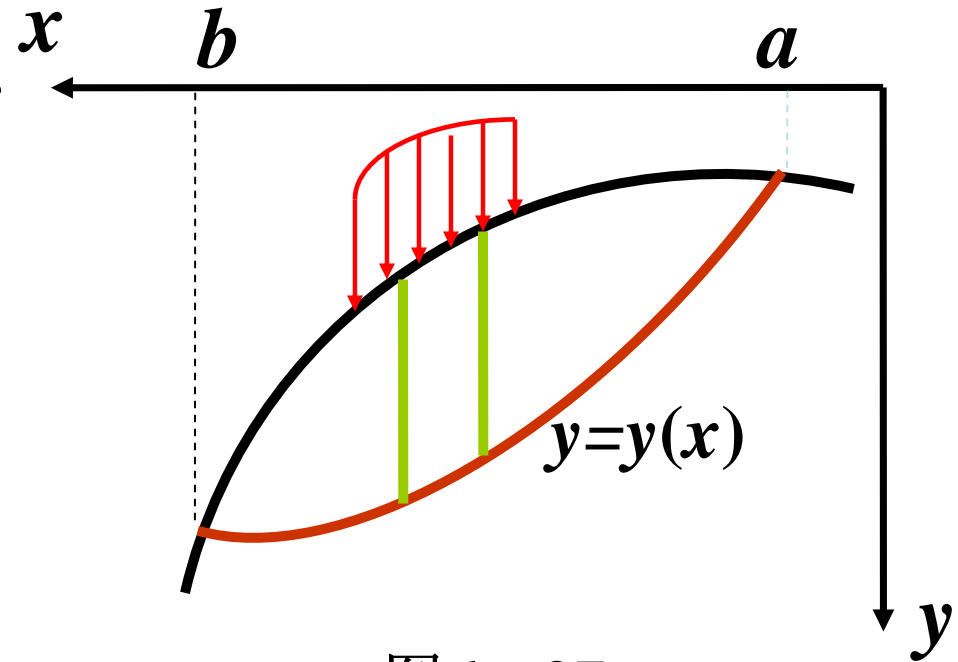


图6—97

滑裂面的描述

圆弧滑裂面:

圆心坐标 (x_0, y_0) 和半径 r
能够唯一确定, 于是有

$$F = F(y(x)) = F(x_0, y_0, r)$$

此为三个自由度的函数。

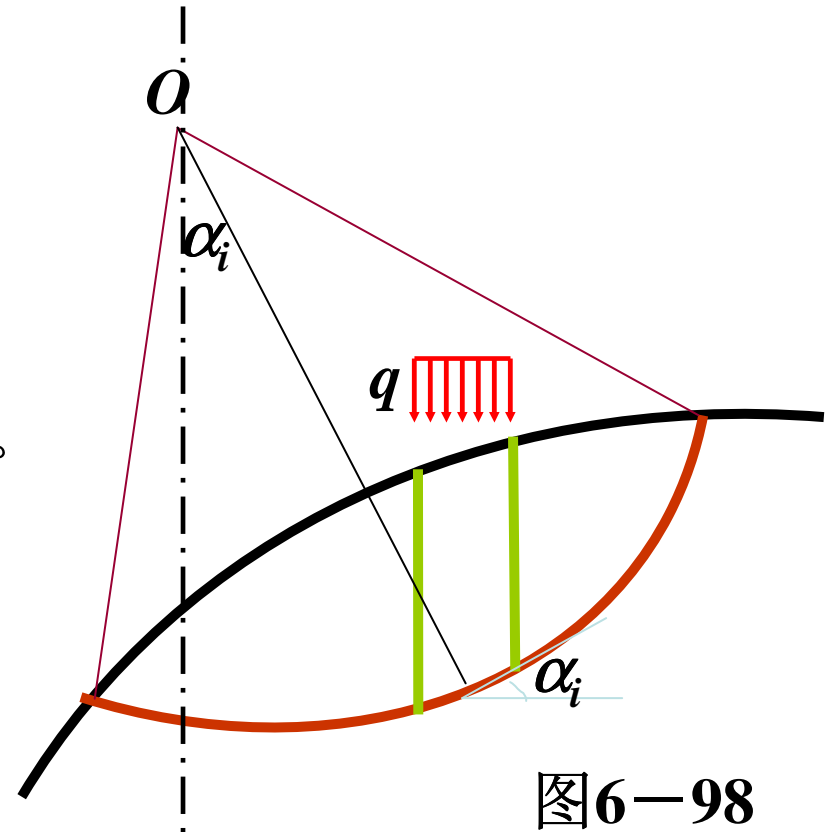


图6—98

任意形状滑裂面:

滑裂面 $y=y(x)$, 用 m 个点离散。

记坐标 $z_i = (x_i, y_i)^T$, $i=1, 2, \dots, m$

于是

$$F = F(y(x)) = F(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m)$$

m 个点可以直线相连, 也可以用曲线 (如样条函数) 光滑连接。

具体操作时, 个别点固定, 个别点按某一要求或某一方向移动。

滑裂面上任一点的坐标 z_i 也可以用一个初始滑裂面的相对坐标来代表, 即

$$z_i^0 = (x_i^0, y_i^0)^T$$

$$z_i = z_i^0 + d_i \begin{Bmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \end{Bmatrix}$$

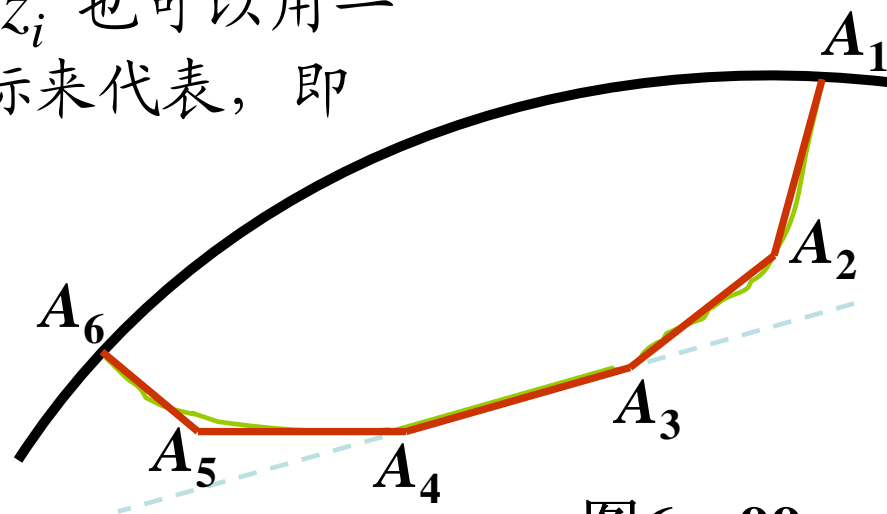


图6-99

6.4.2 滑裂面的搜索方法

1. 原始：区格法、枚举法

2. 数值分析方法：

1) 模式搜索法：单形法、Powell法

2) 牛顿法：负梯度法—只利用一阶导数
DEP法—利用二阶导数信息

4. 其它方法：

1) 随机搜索法

2) 模拟退火方法

3) 遗传算法

4) 蚂蚁算法

5) 粒子群优化算法

6) 动态规划法

7) 神经网络二分法

主要为了避免
局部极小问题

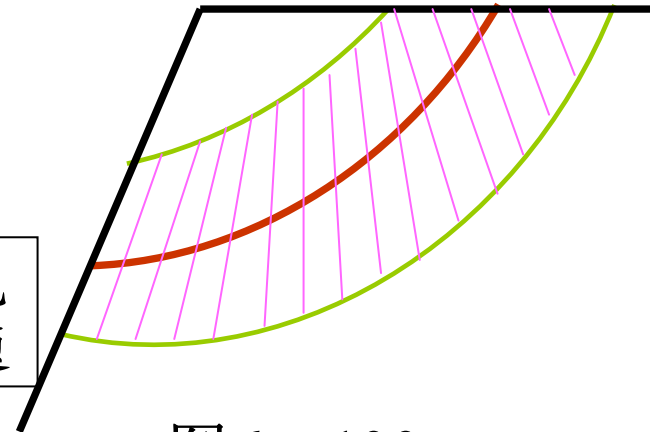


图6—100

区格法

- 区格法又称扫描法，
- 常用的适于圆弧滑动面的搜索方法。
- 区格法在固定搜索区域按照空间坐标进行增量循环叠代搜索最小安全系数对应的临界圆弧面。
- 计算极为费时，但能绝对保证一定精度上的全局计算能力，主要是用来作为方法评价的工具。

区格法

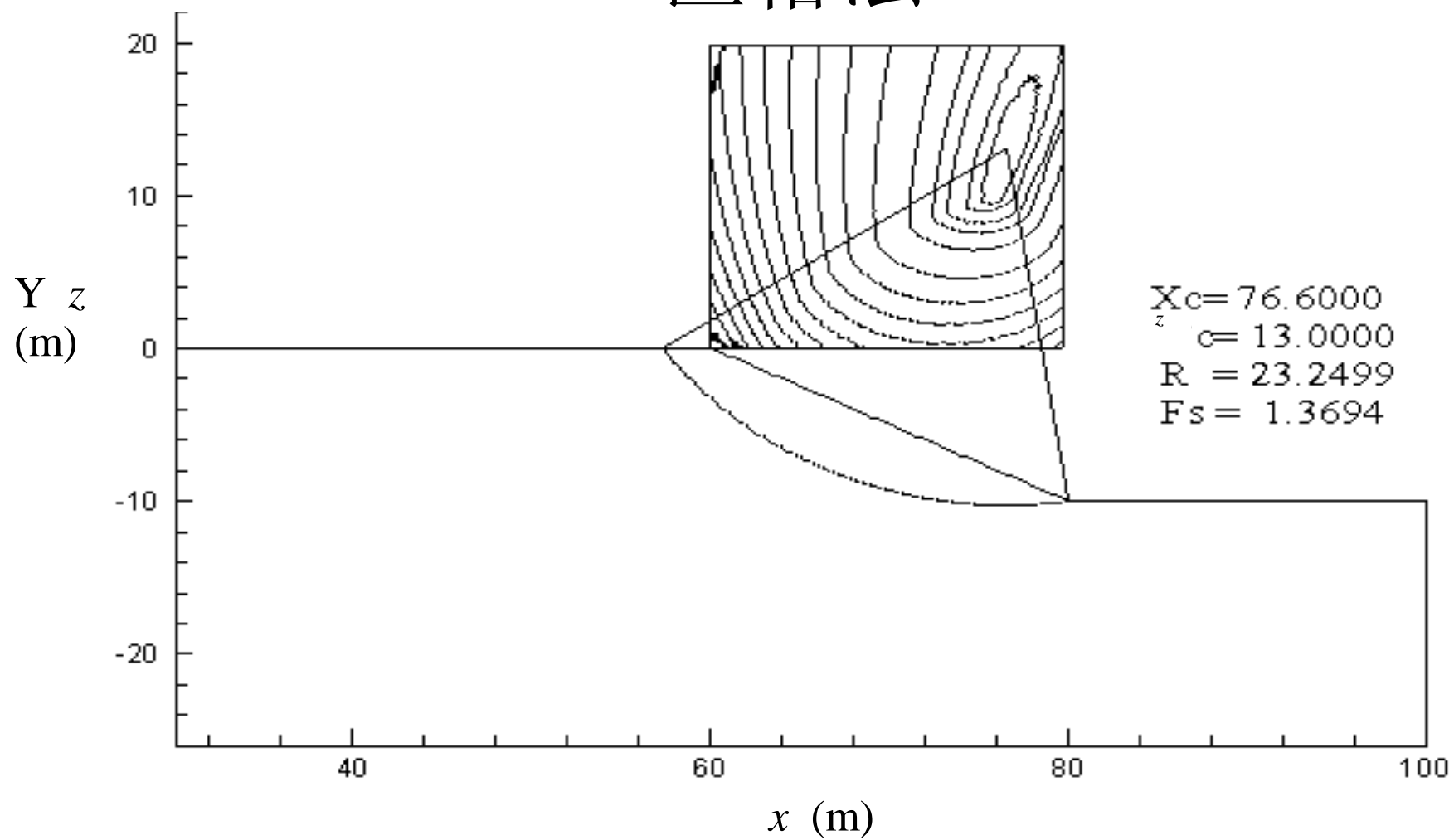


图6-101 临界滑裂面

枚举法

- 是一种原始和简单的方法;
- 根据一定的模式比较不同自变量 $F(x, y, R)$ 的目标函数, 筛选以后找到最小安全系数.
- 也常常配合一些优化方法, 如优选法(0.618)提高效率。

数值分析方法

- 基于数学理论方法：
- 包括：模式搜索法与牛顿法。
- 模式搜索法：单形法、Powell法，
- 牛顿法是一种求导数的方法：负梯度法、DEP法

单（纯）形法

- 将一个初始向量 Z^0 ，按一定模式构成 n 个向量 Z^i ，选定步长，使单形不断逼近极值。

$$Z^i = [z_1^0 + q, z_2^0 + q, \dots, p]^T$$

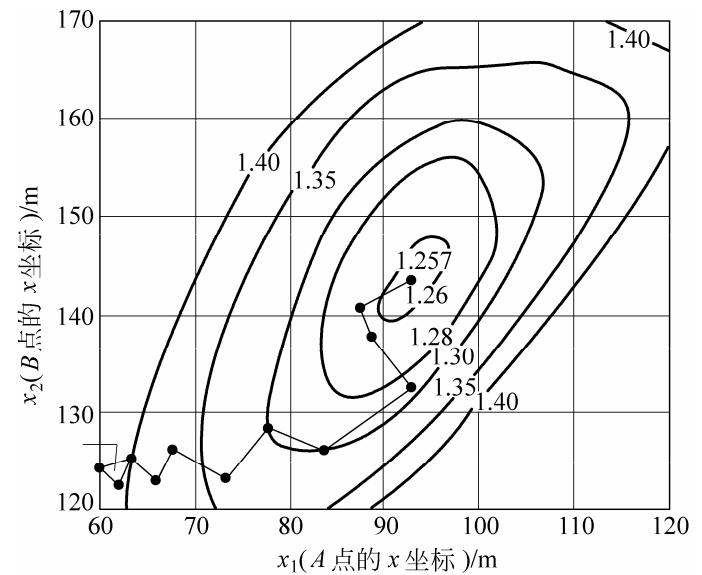
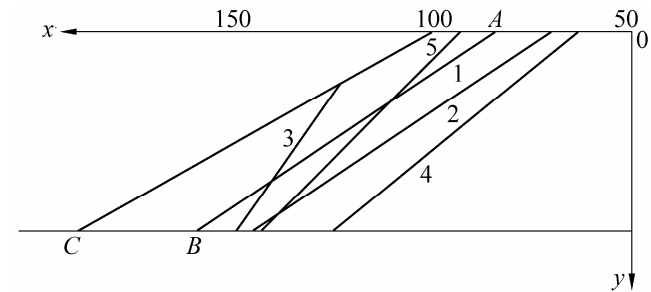


图6-102单形法搜索结果（ABC）

负梯度法

- 是牛顿法一种，寻找一个点使安全系数减少速率最大的方向。

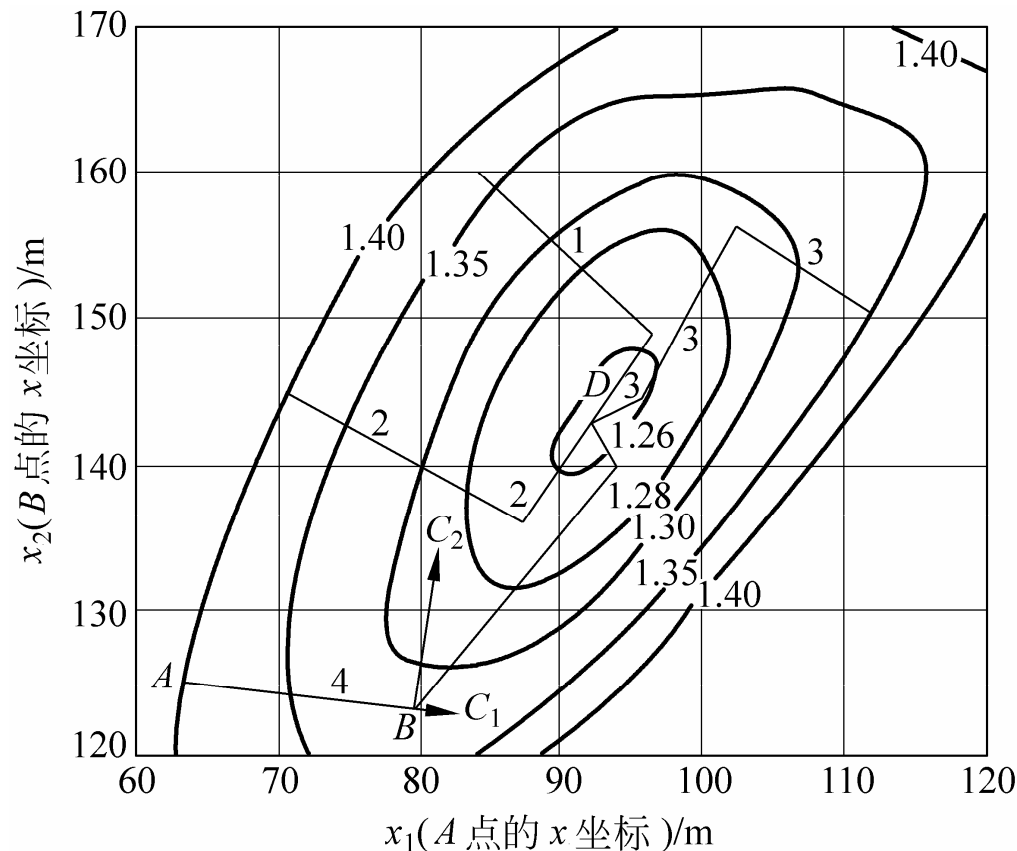


图 6-103

1、2、3负梯度法搜索

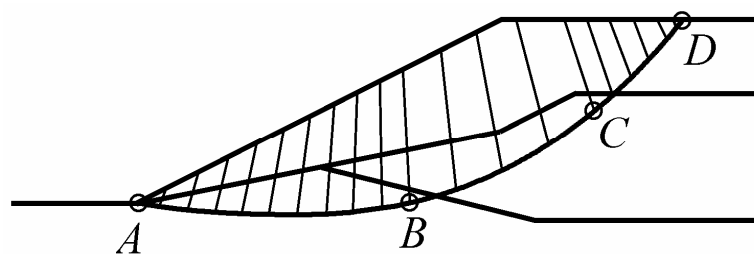
遗传算法

- 20多年前密执安大学John. H. Holland等研究出一种叫遗传算法的搜索算法;
- 设计一个体现自然界机理的软件系统, 后来这一算法被广泛应用于各种优化问题。
- 遗传算法是基于Darwin的进化论即适者生存的原理和 Mendal的遗传学说。
- 将“优胜劣汰, 适者生存”的生物进化原理引入待优化参数形成的编码串群体中, 按照一定的适应值函数及一系列遗传操作对个体进行筛选, 从而使适应值高的个体被保留下来, 组成新的群体,
- 新的群体中包含上一代大量信息, 并且引入了新的优于上一代的个体, 群体中各个体适应度不断提高, 直至满足一定的极限条件。此时群体中适应值最高的个体即为待优化参数的最优解。

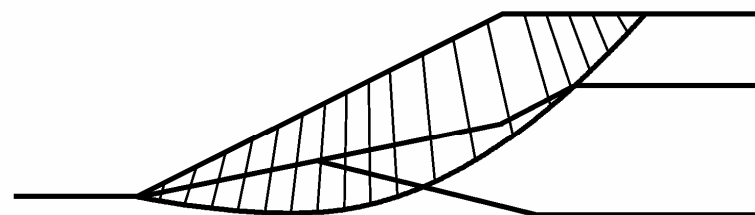
遗传算法

- 遗传算法从一组随机产生的初始解，称为“种群（Population）”，开始搜索过程；
- 种群中每个个体是问题的一个解，称为“染色体（Chromosome）”。
- 这些染色体在后续迭代中不断进化，称为遗传。
- 生成的下一代染色体，称为“后代（Offspring）”。
- 后代是由前一代染色体通过“交叉（Crossover）”或“变异（Mutation）”运算形成的。
- 新一代形成中根据适值的大小选择部分后代，淘汰部分后代，从而保持种群的大小是常数。适值高的染色体被选中的概率较高。
- 这样经过若干代之后，算法收敛于最好的染色体，它很可能就是问题的最优解或次优解。

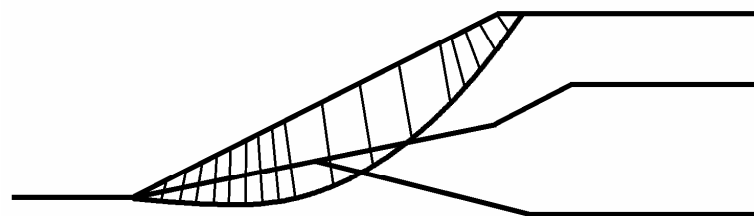
不同搜索方法的结果



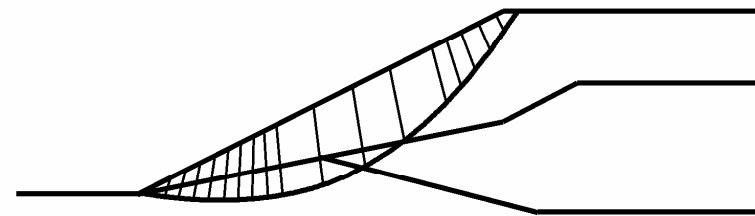
(a)



(b)



(c)



(d)

图6-104 计算结果

(a) 初始解

(b) 单形法

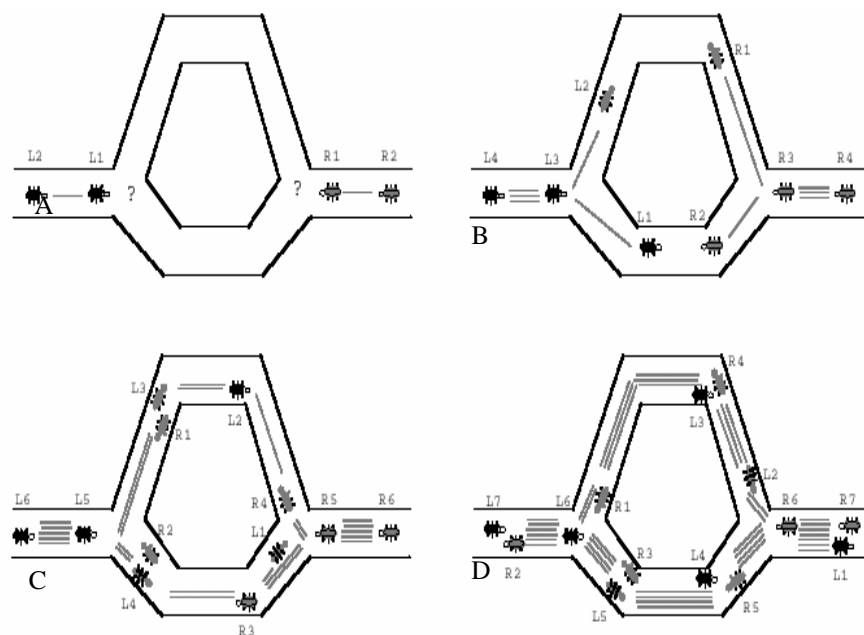
(c) 遗传算法 (1000代) (d) 遗传 (200) + 单形法

蚂蚁算法

- 1992年，由Macro Dorigo在其博士论文作为一个最主要的部分提出来的；
- 首先是针对路径优化方面用旅行商问题（TSP）来进行验证的；
- 应用于互联网络的寻址方面也获得了很大的成功；
- 这一算法思想也被引入到土坡稳定临界滑动面搜索中来。

基本原理

- 下面一条线路的路程要比上面那条线路要短，每只蚂蚁要爬行的时间走下面那条路径时间要少，
- 走下面线路的蚂蚁就要比走上面那条线路的蚂蚁的数量要多，下面这条线路的信息素积累的速度就要比上面线路信息素积累的速度要快，
- 经过很短一段时间，两条线路上蚂蚁信息素的差异就大到足够影响新的下一只进入这个系统的蚂蚁选择路径的决策，



6-105 蚂蚁搜索最短路径示意