石油地球物理勘探丛书

大地电磁测深资料处理与解释

陈乐寿　刘　任　王天生　编著

石油工业出版社

070924

P.3.1/09

石油地球物理勘探丛书

大地电磁测深资料处理与解释

陈乐寿　刘　任　王天生 编著

S37.6/1

0069-2021

石油大学图书馆(北京)藏书

200401467

石 油 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书共分五章，分别论述了大地电磁测深的原理、资料处理、一维模型大地电磁测深曲线的反演解释及二维正反演问题等。每一部分都是以作者亲自参加并完成的科研成果为基础，较系统地介绍了各种方法的基本理论、在计算机上实现及应用效果等，并给出了一些重要的程序选段，可供读者引用。

前言、第一章由刘任编写，第二章、第三章由王天生编写，第四章、第五章由陈乐寿编写。

本书可供地球物理勘探工作者，特别是从事大地电磁测深工作的同行们及有关院校师生参考。

石油地球物理勘探丛书

大地电磁测深资料处理与解释

陈乐寿　刘　任　王天生 编著

*

石油工业出版社出版

（北京安定门外安华里二区一号楼）

北京市顺义县华富屯福利印刷厂排版

北京顺义燕华营印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

787×1092 毫米16开本 15¼印张 2插页 378千字 印1—2,000

1989年1月北京第1版 1989年1月北京第1次印刷

ISBN 7-5021-0181-0/TE·178

定价：3.10元

出版者的话

近二十年来，石油地球物理勘探技术日新月异，发展迅速。为了总结地球物理与地质相结合的经验，推广石油物探方法的新技术，我们组织有关专家、教授编写了这套《石油地球物理勘探丛书》，供石油地球物理工程师学习参考，以期做到物探工作中设计的合理性、采集的可靠性、处理的正确性、解释的科学性，提高解决各种复杂问题的能力。

这套丛书以应用为主，对基本概念和基础理论只做简要阐述，侧重于介绍各种新技术、新方法在实际工作中的应用。内容包括石油重、磁、电、地球化学、放射性、地震各种方法的资料采集、数字处理、成果解释、应用等，预计编写二十余册，每册都力图讲述清楚一个课题，它既是石油物探工作者施展才能的园地，又是您工作案旁的良师益友。让我们为发展石油物探技术，来共同编好和使用好这套丛书吧！

前　言

大地电磁测深法是研究地质结构的一种地球物理方法。它是以天然交变电磁场为场源。当交变电磁场在地中传播时，由于集肤效应的作用，不同周期的信号具有不同的穿透深度，在地面上观测大地电磁场，它的频率响应将反映着地壳内电性的垂向分布情况。

苏联 A. H. 吉洪诺夫于 1950 年提出以下三点设想：① 大地电磁场本身结构虽然比较复杂，但可以近似地看作是平面波垂直入射到地球；②在地电学中可引入阻抗的概念，它反映了地球电性分布对大地电磁场的影响；③有可能利用单个点上的大地电磁场观测信息探测地球。

1953 年法国 L. 卡尼尔发表了一篇有关大地电磁法的比较系统的论文，给出了电磁场源为向地球垂直入射的平面波、地球为水平均匀各向同性层状介质条件下，大地电磁场的解。他将阻抗的频率特性变换为习惯的视电阻率形式：

$$\rho_s = 0.2T\,|Z|^2$$

式中　ρ_s——视电阻率；

T——周期；

Z——波阻抗。

$$|Z| = \frac{|E_x|}{|H_y|} = \frac{|E_y|}{|H_x|}$$

式中　E_x——电场在 x 方向的水平分量；

E_y——电场在 y 方向的水平分量；

H_x——磁场在 x 方向的水平分量；

H_y——磁场在 y 方向的水平分量。

E_x、E_y、H_x、H_y 为地面正交的电磁场测量分量。在水平层状介质情况下波阻抗 Z 是一标量，它是和介质电阻率 ρ 的分布以及信号周期 T 有关的函数。

A. H. 吉洪诺夫和 L. 卡尼尔的论点构成了大地电磁测深法的理论基础。从此，大地电磁测深在世界范围内引起了地球物理工作者的普遍重视。从方法理论的提出，到野外实验性的探测经过了将近 10 年的时间，这是因为大地电磁测深法需要较宽频带并具有较高测量精度的仪器，而且噪音背景的影响使观测结果分散。随着电子计算机的广泛应用，使得上述问题才逐渐得到解决。

60年代苏联、美国、加拿大、法国等都着手进行研制数字电磁测深仪器的工作，从光点模拟记录发展为模拟磁带记录到数字磁带记录，对获取微弱的大地电磁信息和提高资料整理的速度及精度起到了重要作用。80 年代发展了先进的大地电磁探测系统，配有微型电子计算机装置控制观测和实现实时处理或现场处理，这对于保证记录的可靠性和提高野外探测效率具有重要作用。

大地电磁测深资料处理解释方法也是随着数字计算机技术的发展和应用而得以发展。资料的整理工作最初是由光点记录选择电磁场的谐变成分，量取它们的振幅和周期，计

算相应的标量阻抗及视电阻率，进而发展到引入最小二乘法，建立起以频谱分析和数字滤波为基础的估算张量阻抗的资料整理方法。资料的解释工作，由一般的选择曲线对比法发展为在电子计算机上实现了曲线自动拟合的解释方法，极大地提高了解释的可靠性和地质效果。因此使大地电磁测深方法获得了比以前更为广泛的应用。

由于大地电磁测深法是利用天然电磁场源，不需人工场源，所以野外施工简便、成本低廉，此外具有探测深度大，不受高阻层屏蔽影响，对低阻层有较高的分辨能力等优点，这使大地电磁测深法迅速发展成为一种重要的勘探手段。但由于天然电磁场源的信号比较微弱，尤其1赫兹频段附近的信号就更弱，往往难以检测到可靠信号，影响测深资料的完整性。

这种方法在国内外的能源勘探中都获得了广泛的应用。在含油气沉积盆地研究方面，可用以划分沉积岩系的不同电性层，确定高阻基岩构造，在有利条件下还可圈定沉积岩系中的局部构造和断层等。由于它对高导层反映灵敏，在地热勘探中具有独特的能力，对探测深部或浅部热源都能发挥很好的作用。由于其探测深度大，所以在深部地质及地球物理研究中也具有特别重要的作用，其地位仅次于地震方法，是当代综合物探中不可缺少的一种勘探手段。

本书内容涉及的研究项目经历了约10年的发展过程。参加数字大地电磁测深仪器研制的单位有：石油工业部石油地球物理勘探局仪器厂、石油地球物理勘探局研究院、石油地球物理勘探局普查大队、国家地震局地质研究所。参加资料数字处理解释方法研究及程序编制工作的单位有：石油工业部石油地球物理勘探局研究院、国家地震局地质研究所、武汉地质学院北京研究生部和石油物探教研室。

自1973年开始至1980年完成了SD－I型数字大地电磁测深仪器样机的研制和几种资料数字处理方法及一维反演解释方法的研究，并在Cyber-1724机上全部自动化地实现了数字大地电磁测深仪观测记录的数据处理。这一成果为我国在大地电磁测深法中应用数字技术奠定了基础，使该方法能在我国迅速发展并应用于石油勘探、地热勘探及深部地质结构研究等方面。

至1984年底已研制成一套具有高灵敏度、低噪音、高精度、大动态范围、宽频带等特点的SD-Ⅱ型数字大地电磁测深仪和一套完整且功能较强、接近国际先进水平的大地电磁资料数据处理解释系统，它包括资料的预处理和数据处理方法及程序、一维正反演解释方法及程序、二维正反演解释方法及程序、绘图程序等，这些都是本书要介绍的主要内容。

大地电磁测深法是一种新兴的物探方法，其技术正处于发展阶段，今后应重视以下几方面问题的研究：

①仪器设备应向低功耗、轻便、温度适应范围大等方面发展，这样可缩小野外施工条件的限制，扩大方法的适用范围；

②要提高方法的地质效果，必须不断地研究能有效压制噪音干扰的数据处理方法和提高精度的解释方法；

③为确保原始记录的质量，需具有现场处理能力的或实时处理能力的观测记录系统。

目　录

第一章　大地电磁测深原理简介…… 1
第一节　大地电磁测深的标量阻抗理论…… 1
第二节　大地电磁测深的张量阻抗理论…… 8
第三节　大地电磁测深资料的获取…… 15
第二章　大地电磁测深资料的处理…… 23
第一节　综述…… 23
第二节　数字带的预处理与标定…… 26
第三节　大地电磁测深资料的最小二乘处理方法…… 28
第四节　抑制随机噪声影响的几种处理方法…… 39
第五节　大地电磁测深资料的窄带滤波处理方法…… 49
第六节　大地电磁测深资料的广义最小二乘处理方法…… 53
第七节　大地电磁测深资料的瞬态谱分析方法…… 63
第八节　大地电磁测深资料的级联分样处理方法…… 72
第三章　一维模型大地电磁测深曲线的反演解释…… 80
第一节　大地电磁测深曲线一维反演解释的数学描述…… 80
第二节　用马夸特法做大地电磁测深资料的一维反演解释…… 81
第三节　用广义逆方法反演解释一维大地电磁测深资料…… 88
第四节　博斯蒂克反演解释方法…… 102
第五节　几种类似博斯蒂克方法的快速反演解释方法…… 109
第四章　大地电磁测深的二维正演问题…… 120
第一节　二维模型条件下大地电磁场的基本公式及边界条件…… 120
第二节　用有限元法解大地电磁场二维正演问题…… 124
第三节　矩形单元剖分有限元法的实现…… 126
第四节　矩形-直角三角形混合剖分有限元计算法的实现…… 150
第五节　直角三角形剖分二次插值有限元计算法的实现…… 156
第六节　任意三角形剖分二次插值有限元计算法的实现…… 160
第五章　大地电磁测深二维反演问题…… 171
第一节　初始模型的确定…… 171
第二节　应用样条函数插值的快速二维正反演方法…… 173
第三节　用解析法求取偏导数的二维反演方法…… 201
第四节　二维反演举例…… 224
参考文献…… 236

第一章　大地电磁测深原理简介

任何地球物理方法，都必须对实际情况做出某些理想化的假设，在此基础上建立基本理论和科学依据。

第一节　大地电磁测深的标量阻抗理论

一、对场源及地质模型的假设

大地电磁场来源于高空，可以近似地看作是在地球表面垂直入射的平面波，并假设大地介质由水平均匀层状介质所组成。这种介质模型的电性参数只随深度"z"变化，亦称一维介质模型（图1-1）。

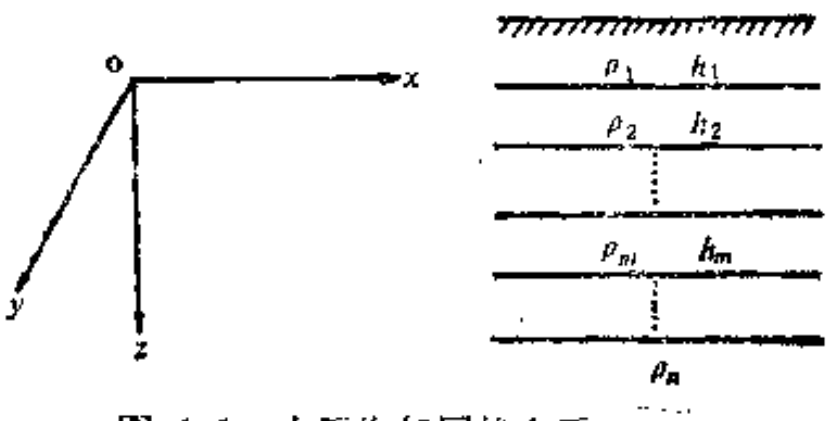


图 1-1　水平均匀层状介质

二、均匀半无限空间表面上的大地电磁阻抗

由于地球的磁场随时间而变化，在地球内感应产生电流，构成统一的电磁感应现象，为研究其传播特性，必须从麦克斯韦方程出发。当电磁场变化比较缓慢时，可忽略位移电流的影响。取直角坐标系（见图1-1），oxy平面为地面，z轴垂直向下。麦克斯韦方程可写为：

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{1—1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} \tag{1—2}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{1—3}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{1—4}$$

式中　μ——导磁率；

σ——导电率；

$\vec{E}$——电场强度；

$\vec{H}$——磁场强度；

∇——哈密顿算子。

取一般岩石中的导磁率与真空中的相同。假若电场强度与磁场强度都是谐变场，可表示成：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\omega t}$$

式中 $e^{-i\omega t}$——谐变场的时间因子。

对上式求导后则有：

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -i\omega \vec{H}_0 e^{-i\omega t} = -i\omega \vec{H} \qquad (1-5)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -i\omega \ (-i\omega) \ \vec{H}_0 e^{-i\omega t} = -\omega^2 \vec{H} \qquad (1-6)$$

对电场 E 也有同样的表达式。将（1—5）式代入（1—1）式，便得到：

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu \vec{H} \qquad (1-7)$$

现对（1—7）式的两边取旋度，并将（1—2）式代入，得到：

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\sigma \ \vec{E} \qquad (1-8)$$

根据矢量分析公式有：

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \ (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \qquad (1-9)$$

将（1—9）式代入（1—8）式，得到：

$$\nabla^2 \vec{E} - K^2 \vec{E} = 0 \qquad (1-10)$$

上式中：

$$k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma} = \left(\frac{-i\omega\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1-11)$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

式中 k——传播常数；

ρ——岩石的电阻率。

传播常数“k”是一个复数，亦称为复波数。

用类似的方法可以推出磁场的具有相似形式的方程：

$$\nabla^2 H - k^2 H = 0 \qquad (1-12)$$

（1—10）和（1—12）式是谐变电磁场的波动方程，也称为亥姆霍兹方程。

∇^2 是拉普拉斯算符，在直角坐标系中为：

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

对于矢量场的拉普拉斯运算，按矢量的加法原理分别对其分量进行。即有：

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 E_x \ \vec{i} + \nabla^2 E_y \ \vec{j} + \nabla^2 E_z \ \vec{k}$$

式中 $\vec{i}$——为坐标轴 x 方向上的单位矢量；

$\vec{j}$——为坐标轴 y 方向上的单位矢量；

$\vec{k}$——为坐标轴 z 方向上的单位矢量；

E_x——是电场 $\vec{E}$ 在坐标轴 x 方向上的分量；

E_y——是电场 $\vec{E}$ 在坐标轴 y 方向上的分量；

E_z——是电场 $\vec{E}$ 在坐标轴 z 方向上的分量。

它们分别满足下列关系式：

$$\nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

对磁场来说也具有类似的关系式。从这些关系式中很容易看出，式（1—10）和(1—12)描述了电磁场（$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$）随空间（x、y、z）和时间 t 的变化规律。也就是电磁波在空间传播的规律。

我们再回到垂直入射的平面电磁波在水平均匀介质中传播的问题上来。将（1—1）式和（1—2）式展成分量形式后有：

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x \qquad (1—13)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu H_y \qquad (1—14)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu H_z \qquad (1—15)$$

及

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{\rho} E_x \qquad (1—16)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{\rho} E_y \qquad (1—17)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} E_z \qquad (1—18)$$

由于在我们所选取的坐标系中，oxy 平面与地面一致，平面电磁波的波前沿 xy 平面，显然电场和磁场的任一分量沿水平面上的变化率为零，所以有：

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$$

因此（1—13）到（1—18）诸式可简化为：

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x \qquad (1—13)'$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y \qquad (1—14)'$$

$$H_z = 0 \qquad (1—15)'$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{\rho} E_x \qquad (1—16)'$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{1}{\rho} E_y \qquad (1—17)'$$

$$E_z = 0 \qquad (1—18)'$$

从此可以看出，电磁场各分量间的关系。在给定情况下，E_y 只与 H_x 有关，H_y 只与

E_x有关，即电场与磁场都没有垂直分量。设在真空中波前与 y 轴平行，这时可以将电磁场分解成为两组独立的极化波分别进行讨论，一组是含（E_y、H_x）分量的 E 极化波，另一组是只含（E_x、H_y）分量的 H 极化波，它们的关系式为：

E 极化（E_y、H_x）	H 极化（E_x、H_y）
$\frac{-\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x$	$\frac{-\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{\rho} E_x$
$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{1}{\rho} E_y$	$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y$

$$E_x = H_x = 0$$

$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - k^2 E_y = 0$	$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - k^2 H_y = 0$
$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - k^2 H_x = 0$	$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - k^2 E_x = 0$

$$k = \sqrt{-i\frac{\omega\mu}{\rho}}$$

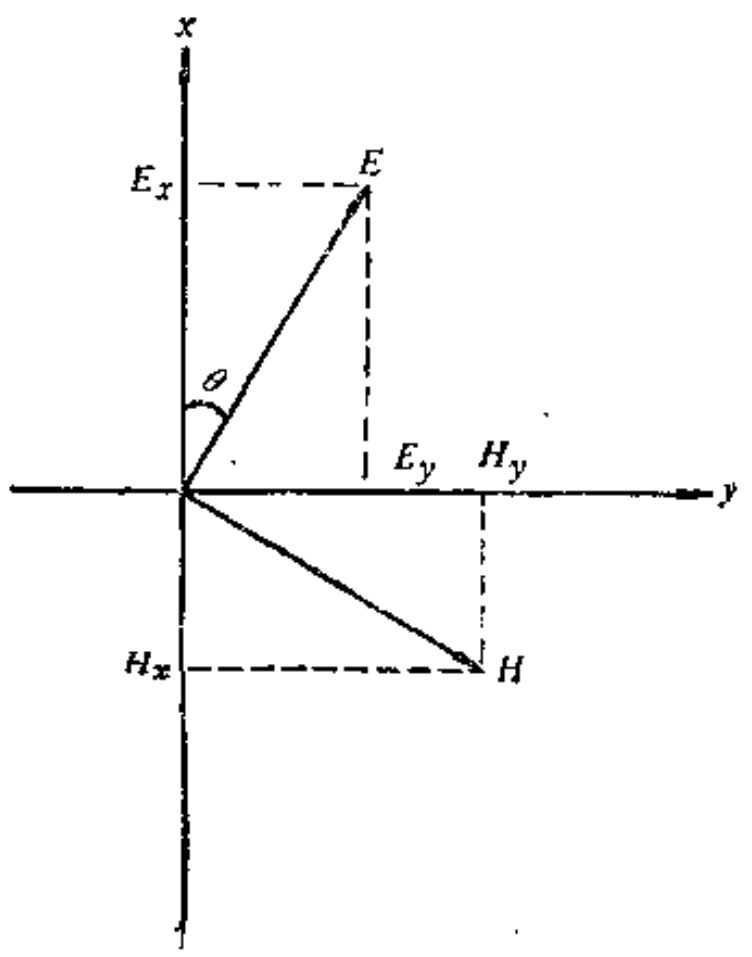


图 1-2　平面电磁波在地面上沿任意直角坐标系的分解

平面电磁波的 E 极化波，即入射波中 E 波沿 y 方向极化，也称为 *TE* 波。同样，H 极化波相当于入射波中的 H 波沿 y 方向极化，亦称为 *TM* 波。由此看来，水平均匀介质中电场和磁场本身是正交的，这是大地电磁场在这种介质中的基本特征。

平面电磁波的波阻抗定义为：

$$Z = \frac{E}{H}$$

在实用单位制中波阻抗的单位为：

$$[Z] = \frac{[E]}{[H]} = \frac{\text{伏/米}}{\text{安/米}} = \text{欧姆}$$

它与电阻具有相同的单位。

在水平均匀各向同性介质中，由于 E_y 和 H_x 以及 E_x 和 H_y 之间是正交的，故在地表上沿任意测量轴 x 和 y 有如下关系（见图 1-2）。

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E\cos\theta}{H\cos\theta} = \frac{E}{H}$$

$$Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} = -\frac{E\sin\theta}{H\sin\theta} = -\frac{E}{H}$$

$$Z_{xy} = -Z_{yx}$$

式中　Z_{xy} 和 Z_{yx}——标量阻抗；

θ——电场强度与 x 轴夹角。

这表明，沿任意正交测量轴上所测得的波阻抗的数值都是相等的。或者说在一维介质中，波阻抗是与测量轴方位无关的一个标量，具有这种性质的阻抗称为标量阻抗。

我们再以（E_x、H_y）型偏振波为例来讨论波阻抗与介质电阻率之间的关系。根据 H 极化波方程有：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - k^2 E_x = 0$$

这是一个二阶常微分方程，它的一般解为：

$$E_x = Ae^{-kz} + Be^{kz} \qquad (1-19)$$

式中 A 和 B——由边界条件确定的积分常数。

现在我们考虑电阻率为 ρ 的无限均匀半空间，在无限远处，即 $z\to\infty$ 时应有 $E_x = 0$，于是要求 $B = 0$。因此有：

$$E_x = Ae^{-kz} \qquad (1-20)$$

再根据 $\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y$ 有：

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad (1-21)$$

因此：

$$H_y = \frac{1}{\sqrt{-i\omega\mu\rho}} Ae^{-kz}$$

由此导出波阻抗表达式为：

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = +\sqrt{-i\omega\mu\rho} \qquad (1-22)$$

它是一个复数，又可写成：

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = +\sqrt{\omega\mu\rho}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

我们如果只考虑阻抗的振幅，则有：

$$\rho = \frac{1}{\omega\mu}|Z|^2 \qquad (1-23)$$

同样对（E_y、H_x）型极化波也可得出相同的结论，因此可以将 Z 的下标省去。Z 是地面上任意正交的电磁场分量之比，又称为输入阻抗或表面阻抗。

（1—23）式是大地电磁测深中非常重要的公式。由它建立了表面阻抗 Z 与地下介质电阻率之间的关系，也就是说地下介质的电性完全可以通过地表电磁场的观测而确定。

在实际工作中，通常采用的单位：电场为毫伏／公里，磁场为伽马，周期为秒，地下介质电阻率为欧姆米，于是（1—23）式可写为：

$$\rho\ (\Omega\cdot\mathrm{m}) = 0.2T\ (\mathrm{s})\left|\frac{E\ (\mathrm{mV/km})}{H\ (\gamma)}\right|^2$$

我们再来讨论（1—20）式，当 $z = 0$ 时：

$$E_x^{(0)} = A$$

它是大地表面的电场强度，按上面的假定应为谐变场，可令：

$$A = E_x^{(0)} e^{-i\omega t}$$

将传播常数 k 写成复数形式。考虑到：

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

因此：

$$k=\sqrt{-\frac{i\omega\mu}{\rho}}=(1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\rho}}=\alpha-i\beta$$

式中 α——介质的吸收系数；

β——圆波数。

$$\alpha=\beta=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\rho}}$$

在深度 z 处时，电场强度可写成：

$$E_x(z)=Ae^{-kz}=E_x^{(0)}e^{-i\omega t}e^{i\beta z}e^{-\alpha z} \qquad (1-24)$$

式中：$e^{-i\omega t}$ 和 $e^{i\beta z}$ 因子说明电场 E_x 在传播中呈谐变规律变化。$e^{-i\omega t}$ 表示它随时间呈谐波变化，变化周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，圆频率 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，表示单位时间内振动次数的 2π 倍。$e^{i\beta z}$ 表示波沿传播方向 z 也呈谐波变化。我们把空间传播方向上相邻同相点的距离称为波长，以 λ 表示，则圆波数 $\beta=\frac{2\pi}{\lambda}$，它表示单位长度内波数的 2π 倍。

波长 λ 是电磁波的一个重要参数，因为它同时含有场的频率因子和介质电性参数：

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=2\pi\sqrt{\frac{\rho T}{\pi\mu}}$$

在合理化实用单位制中，$\mu=4\pi\times10^{-7}$ 亨利 / 米。则有：

$$\lambda=\sqrt{10\rho T}\times10^3\ (\text{米})$$

或：

$$\lambda=\sqrt{10\rho T}\ (\text{公里})$$

在（1—24）式中，$e^{-\alpha z}$ 因子表示电场 E_x 的振幅随深度 z 呈指数规律衰减，α 是介质的吸收系数，可用波长来表示：

$$\alpha=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{\sqrt{10\rho T}}$$

上式表明，短波即高频波衰减得快，这和下述趋肤深度引出的结果是一致的。

我们定义当振幅衰减到地面处数值的 $\frac{1}{e}$ 的深度为电磁波的穿透（或趋肤）深度，显然，穿透深度与吸收系数成反比，即：

$$p=\frac{1}{\alpha}=\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{\sqrt{10\rho T}}{2\pi} \qquad (1-25)$$

式中 p——穿透深度。

穿透深度 p 与介质电阻率 ρ 及周期 T 有关，ρ 值愈高，周期愈大，则穿透深度 p 也愈大，这对讨论大地电磁法的勘探深度具有很重要的实际意义。

三、水平层状模型上的大地电磁阻抗公式

在上面的讨论中将介质电阻率 ρ 看成是一个常数，也就是均匀半无限空间。下面进一步讨论水平层状介质上的阻抗表达式。

假若有一个如图 1-1 所示的水平均匀各向同性层状介质。根据(1—14)′式和(1—19)式，对第 m 层来说可以写出其中深度 z 上的电场和磁场的表达式为：

$$E_x(z) = A_m e^{-k_m z} + B_m e^{k_m z}$$

$$H_y(z) = -\frac{k_m}{i\omega\mu}\left(A_m e^{-k_m z} - B_m e^{k_m z}\right)$$

阻抗表达式则为：

$$Z_m(z) = -\frac{i\omega\mu}{k_m}\cdot\frac{A_m e^{-k_m z} + B_m e^{k_m z}}{A_m e^{-k_m z} - B_m e^{k_m z}} \tag{1—26}$$

式中 A_m 和 B_m——第 m 层的积分常数。

取 $Z_{om} = -\frac{i\omega\mu}{k_m}$，为第 m 层的特征阻抗，并假定第 m 层顶面深度为 z_m，底面深度为 z_{m+1}，则第 m 层中这些深度处的阻抗可以分别表示为：

$$Z_m = Z_{om}\frac{e^{-k_m z_m} + \frac{B_m}{A_m}e^{k_m z_m}}{e^{-k_m z_m} - \frac{B_m}{A_m}e^{k_m z_m}} \tag{1—27}$$

$$Z_{m+1} = Z_{om}\frac{e^{-k_m z_{m+1}} + \frac{B_m}{A_m}e^{k_m z_{m+1}}}{e^{-k_m z_{m+1}} - \frac{B_m}{A_m}e^{k_m z_{m+1}}} \tag{1—28}$$

将（1—27）式与（1—28）式联立，消掉$\frac{B_m}{A_m}$，可得到：

$$Z_m = Z_{om}\frac{1 + \frac{Z_{m+1} - Z_{om}}{Z_{m+1} + Z_{om}}e^{-2k_m(z_{m+1} - z_m)}}{1 - \frac{Z_{m+1} - Z_{om}}{Z_{m+1} + Z_{om}}e^{-2k_m(z_{m+1} - z_m)}}$$

式中 $(Z_{m+1} - Z_m)$——第 m 层的厚度。

令 $Z_{m+1} - Z_m = h_m$，将其代入上式后则得到：

$$Z_m = Z_{om}\frac{1 + \frac{Z_{m+1} - Z_{om}}{Z_{m+1} + Z_{om}}e^{-2k_m h_m}}{1 - \frac{Z_{m+1} - Z_{om}}{Z_{m+1} + Z_{om}}e^{-2k_m h_m}}$$

还可以写成：

$$Z_m = Z_{om}\frac{Z_{om}(1 - e^{-2k_m h_m}) + Z_{m+1}(1 + e^{-2k_m h_m})}{Z_{om}(1 + e^{-2k_m h_m}) + Z_{m+1}(1 - e^{-2k_m h_m})} \tag{1—29}$$

因为电磁场的水平分量在界面上是连续的，所以阻抗 Z 也是连续的，因此，Z_{m+1} 即是 $m+1$ 层顶面的波阻抗。这样（1—29）式说明，对任何水平均匀层状介质而言，任一层顶面处的波阻抗 Z 均可通过其下一层顶面处的波阻抗来描述，只要知道了这一层的电阻率和厚度。对于最下面的第 n 层，则可看成是无限均匀的半空间，其阻抗表达式可由（1—22）式给出。这样，如地电断面已知，则利用（1—22）式和（1—29）式就可以从第

n 层开始逐层向上一直递推到地面，求得地球表面处的波阻抗 $Z_{(0)}$。它是各层电阻率、厚度以及电磁场信号周期 T 的函数，可用一般关系式表示成：

$$Z(0) = f(\rho_1、\rho_2、\cdots\rho_n,\ h_1、h_2、\cdots h_{n-1},\ T)$$

四、视电阻率的概念

视电阻率的概念，是从均匀介质中的电阻率和波阻抗之间的关系式引伸出来的。

在均匀介质中有：

$$\rho = \frac{1}{\omega\mu}|Z|^2$$

借用这一关系式，把不均匀介质情况下的地面波阻抗代入，称其相应的“电阻率值”为视电阻率。因而视电阻率和均匀介质中的电阻率相比较，它们与地面波阻抗之间的关系式是相同的：

$$\rho_s = \frac{1}{\omega\mu}|Z_{1,n}|^2$$

这里阻抗 Z 的脚码的含义是：第一个脚码表示波阻抗所在层面的位置，第二个脚码表示层状介质的总层数，即 $Z_{1,n}$ 是表示 n 层介质的第一层顶面处的波阻抗。

一般来说，视电阻率 ρ_s 不是某层介质的真正电阻率，它是层状介质电性参数分布的综合反映，它与地电断面参数及观测电磁场信号的周期有关。一定频段的大地电磁场有一定的穿透深度与影响范围，而视电阻率 ρ_s 则表示这一范围内地电断面的“平均”效应。显然，高频电磁场分量分布范围小，平均效应涉及的范围也小；而低频电磁场分量的分布范围大，平均效应涉及的范围也大，即穿透深度大。可见在大地电磁测深中视电阻率与周期之间的关系和直流电测深中视电阻率与供电极距之间的关系极为相似。这就是应用大地电磁场能够探测地下地电性质随深度变化的物理基础。

第二节　大地电磁测深的张量阻抗理论

一、张量阻抗

在水平非均匀构造及各向异性介质影响下，阻抗随时间及测量方向而变化，这时它具有张量性质。

非一维构造的电阻率分布，不但沿垂向 z 方向变化，而且在水平方向上也是不均匀的，这时在一定的观测坐标下，在地面沿两个正交方向所测量的视电阻率是不等的，即：

$$\rho_{xy} \neq \rho_{yx}$$

式中

$$\rho_{xy} = 0.2T|Z_{xy}|^2 = 0.2T\left|\frac{E_x}{H_y}\right|^2$$

$$\rho_{yx} = 0.2T|Z_{yx}|^2 = 0.2T\left|\frac{E_y}{H_x}\right|^2$$

显然，上一节所阐述的理论在实际应用中是有局限性的。对具有明显构造走向方向的

介质分布而言，其电阻率沿走向 x 方向是稳定的，而沿垂向 z 方向和倾向 y 方向是变化的，显然，这是二维的电阻率分布。如果电阻率沿 x、y、z 三个方向都有变化，则为更复杂的三维电阻率分布。与一维介质相比二维和三维介质都具有水平不均匀分布的特点。大地电磁平面波垂直入射到这类介质后，会发生什么样的情况呢？我们还从麦克斯韦方程出发来讨论。

现将麦克斯韦方程（1—1）和（1—2）式展开后得到：

$$\vec{i}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)-\vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$=i\omega\mu\ (\vec{i}\,H_x+\ \vec{j}\,H_y+\ \vec{k}H_z)$$

及

$$i\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$=\sigma\ (\vec{i}\ E_x+\ \vec{j}\ E_y+\ \vec{k}\ E_z)$$

式中 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ ——表示单位矢量。

上两式中对应的矢量分量应相等，同时注意到凡是对 x 的偏导数皆为零，于是有：

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=i\omega\mu H_x \tag{1—30}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}=i\omega\mu H_y \tag{1—31}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}=-i\omega\mu H_z \tag{1—32}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\sigma E_x \tag{1—33}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}=\sigma E_y \tag{1—34}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y}=-\sigma E_z \tag{1—35}$$

从上面诸式中可以看出，（1—30）、（1—34）、（1—35）式中只含有 E_y、E_z 和 H_x 分量，而（1—31）、（1—32）、（1—33）式中只含有 H_y、H_z 和 E_x 分量，这说明对任何一个垂直入射的平面电磁波来说，沿构造方向（即走向 x 轴方向和倾向 y 轴方向）可以分解为两组独立的线性偏振波，分别称为 $H_{/\!/}$ 极化波和 $E_{/\!/}$ 极化波。

$H_{/\!/}$——表示磁场平行构造走向；

$E_{/\!/}$——表示电场平行构造走向。

一组含有的分量为（0，E_y，E_z）、（H_x，0，0）；另一组为（E_x，0，0）、（0，H_y，H_z）。x、y 轴又称为电性主轴。在二维介质中出现了电磁场的垂直分量 E_z 和 H_z，这是与一维介质之间的主要区别之一，它是由于 y 方向上介质的不均匀性引起的。

现将（1—30）～（1—35）式按与 $H_{/\!/}$ 极化波组及与 $E_{/\!/}$ 极化波组有关的归纳如下：

$H_{//}$ 极化波

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{1}{\rho} E_y$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} E_z$$

$E_{//}$ 极化波

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{\rho_x} E_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z$$

对以上两类极化波可分别写出相应的表面阻抗表达式。

$H_{//}$ 极化时表面阻抗 Z_{TM} 为：

$$Z_{TM} = \frac{-E_y}{H_x} \tag{1—36}$$

$E_{//}$ 极化时表面阻抗 Z_{TE} 为：

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} \tag{1—37}$$

在一般情况下，$Z_{TE} \neq Z_{TM}$，因而就有：$\rho_{TE} \neq \rho_{TM}$。这表明在非一维即水平非均匀构造情况下沿电性主轴方向观测时会得到两条完全不相同的视电阻率曲线。这时电磁场分量之间的关系可以通过阻抗 Z_{TE} 与 Z_{TM} 来确定：

$$\left.\begin{aligned} E_x &= Z_{TE} H_y \\ E_y &= -Z_{TM} H_x \end{aligned}\right\} \tag{1—38}$$

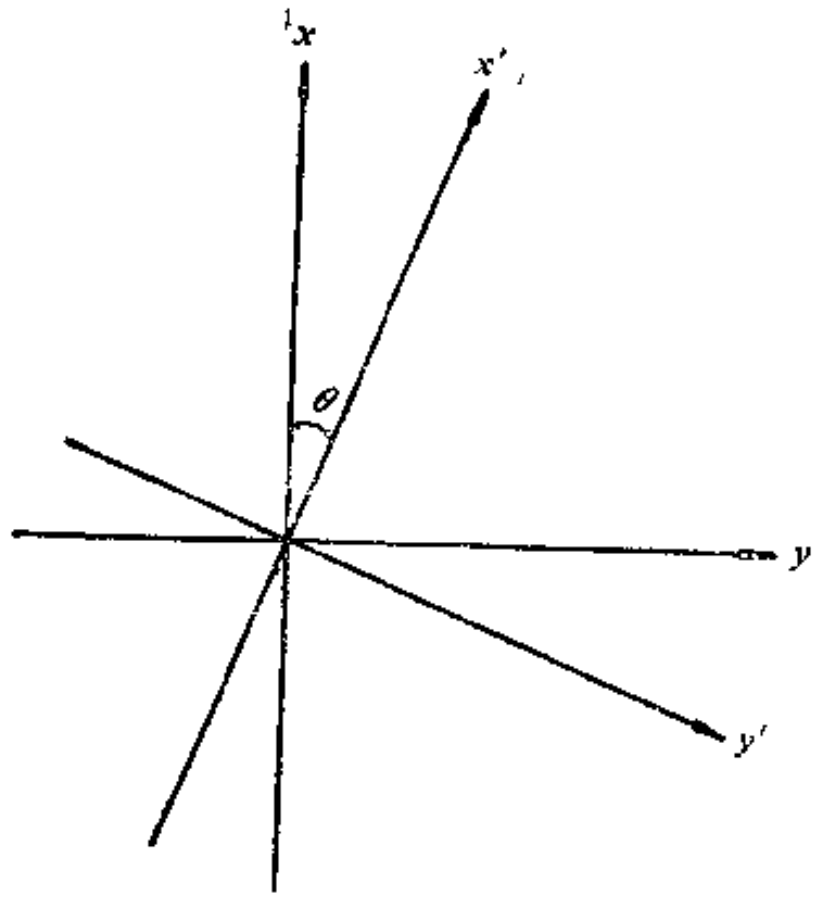


图 1-3　地面上观测坐标轴方位

但实际观测时却不可能沿电性主轴方向进行，对任意二个正交的观测方向来说，大地电磁场之间的关系又怎样呢？

设 x、y 为电性主轴方位，而 x'、y' 为观测方位，两坐标系间的夹角为 θ，如图1-3所示。根据矢量投影关系沿 x'、y' 方位上测量的电场分量与电性主轴方位上的电场分量之间的关系为：

$$\left.\begin{aligned} E'_x &= E_x\cos\theta + E_y\sin\theta \\ E'_y &= -E_x\sin\theta + E_y\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1—39}$$

同样也可以写出相应磁场分量之间的关系为：

$$\left.\begin{aligned} H_x &= H'_x\cos\theta - H'_y\sin\theta \\ H_y &= H'_x\sin\theta + H'_y\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1—40}$$

将(1—38）式和（1—40）式代入（1—39）式，得到：

$$E_x = Z_{TE}(H'_x\sin\theta + H'_y\cos\theta)\cos\theta - Z_{TM}(H'_x\cos\theta - H'_y\sin\theta)$$

$$= \frac{Z_{TE} - Z_{TM}}{2}\sin 2\theta H'_x + (Z_{TE}\cos^2\theta + Z_{TM}\sin^2\theta)\, H'_y \tag{1—41}$$

和

$$E'_y = -Z_{TE}(H'_x\sin\theta + H'_y\cos\theta)\sin\theta - Z_{TM}(H'_x\cos\theta - H'_y\sin\theta)\cos\theta$$

$$= -(Z_{TE}\sin^2\theta + Z_{TM}\cos^2\theta)H'_x - \frac{Z_{TE} - Z_{TM}}{2}\sin2\theta H'_y \qquad (1—42)$$

（1—41）式和（1—42）式描述了在任意一个测量方位上测得的电场与磁场分量间的关系。如果省去“′”，则可将它们写成如下的简化形式：

$$\left.\begin{aligned} E_x &= Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y \\ E_y &= Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y \end{aligned}\right\} \qquad (1—43)$$

式中：

$$Z_{xx} = \frac{Z_{TE} - Z_{TM}}{2}\sin2\theta \qquad (1—44)$$

$$Z_{xy} = Z_{TE}\cos^2\theta + Z_{TM}\sin^2\theta \qquad (1—45)$$

$$Z_{yx} = -(Z_{TE}\sin^2\theta + Z_{TM}\cos^2\theta) \qquad (1—46)$$

$$Z_{yy} = -\frac{Z_{TE} - Z_{TM}}{2}\sin2\theta \qquad (1—47)$$

显然，若 $\theta=0$，即测量方位与电性主轴方位正好重合时，（1—43）式就是（1—38）式。（1—43）式说明，任意方向上的电场不只与其垂直方向上的磁场有关，而且与其同方向上的磁场也有关，这时电场与磁场并不总是正交的。

（1—43）式与（1—44）～（1—47）式还说明，当测量轴为任意取向时，电场分量与磁场分量间的关系必须通过 Z_{xx}、Z_{xy}、Z_{yx}、Z_{yy}四个量来描述，而且这四个量都与测量轴的取向（即 θ 角）有关，这正是非均匀介质中大地电磁场阻抗的重要特性。它符合张量的定义，所以我们将 Z_{xx}、Z_{xy}、Z_{yx}、Z_{yy} 四个量所确定的阻抗称为张量阻抗。

二、张量阻抗的旋转性质

电场矢量$\vec{E}$ 与磁场矢量$\vec{H}$ 不正交时，大地电磁场水平分量之间应满足（1—43）式中的关系。这时每一个电场水平分量分别与两个磁场水平分量有关。可将（1—43）式写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \mathbf{Z}\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \qquad (1—48)$$

式中

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \qquad (1—49)$$

此时，矩阵 Z 表示的阻抗为二阶张量。式中 Z_{xx}、Z_{xy}、Z_{yx}、Z_{yy} 称为张量阻抗要素，均为复数。在场源为垂直入射均匀平面电磁波的条件下，不同频率的张量阻抗要素与地下电性分布和测量坐标方向有关。标量阻抗却与坐标选择无关。即任凭坐标轴怎样旋转其值始终不变。矢量与坐标的选择有关，当坐标轴旋转时其分量将发生变化，但其长度维持不变。张量在坐标旋转时各分量也发生变化。

坐标系 x'、y' 是相对原任意坐标系 x、y 顺时针旋转了一个 θ 角（见图 1-3），在新的坐标系 x'、y' 中电磁场分量之间有如下关系式：

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H'_x \\ H'_y \end{bmatrix} \qquad (1—50)$$

由此可得：

$$\begin{bmatrix} Z'_{xx} & Z'_{xy} \\ Z'_{yx} & Z'_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1—51}$$

亦可写成：

$$Z'_{xx}(\theta) = Z_1 + Z_2\cos 2\theta + Z_3\sin 2\theta \tag{1—52}$$

$$Z'_{xy}(\theta) = Z_4 + Z_3\cos 2\theta - Z_2\sin 2\theta \tag{1—53}$$

$$Z'_{yx}(\theta) = -Z_4 + Z_3\cos 2\theta - Z_2\sin 2\theta \tag{1—54}$$

$$Z'_{yy}(\theta) = Z_1 - Z_2\cos 2\theta - Z_3\sin 2\theta \tag{1—55}$$

式中

$$Z_1 = \frac{Z_{xx} + Z_{yy}}{2} \tag{1—56}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{yy} - Z_{xx}}{2} \tag{1—57}$$

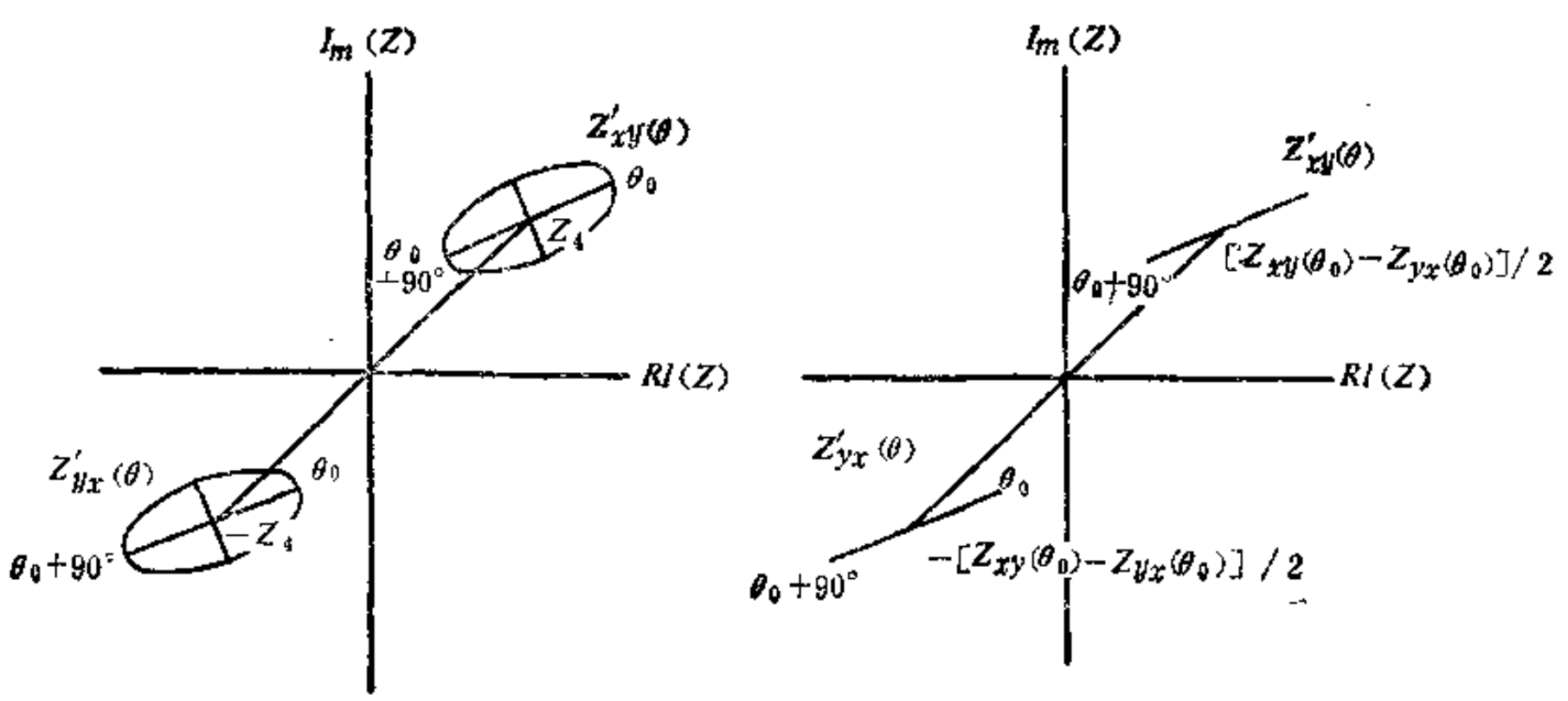


图 1-4　张量阻抗要素在复数平面中相对于旋转角 θ 的轨迹

（a）三维介质的；（b）二维介质的

$$Z_3 = \frac{Z_{xy} + Z_{yx}}{2} \tag{1--58}$$

$$Z_4 = \frac{Z_{xy} - Z_{yx}}{2} \tag{1—59}$$

我们规定：

$$Z_0(\theta) = Z_3\cos 2\theta - Z_2\sin 2\theta \tag{1—60}$$

这意味着当坐标轴旋转时，$Z_0(\theta)$ 在复数平面中的轨迹为一中心在原点的椭圆，轨迹的旋转周期为180°。这时（1—52）～（1—55）式可以改写为以下形式：

$$Z'_{xx}(\theta) = Z_1 - Z_0(\theta + 45°) \tag{1—61}$$

$$Z'_{xy}(\theta) = Z_4 + Z_0(\theta) \tag{1—62}$$

$$Z'_{yx}(\theta) = -Z_4 + Z_0(\theta) \tag{1—63}$$

$$Z'_{yy}(\theta) = Z_1 + Z_0(\theta + 45°) \tag{1—64}$$

由此可见，所有阻抗要素在复数平面中的轨迹都是以 θ 角变化 180° 为周期的椭圆，只是中心位置不同而已。Z'_{yx} 和 Z'_{xy} 轨迹的椭圆中心分别在 Z_4 和 $-Z_4$，Z'_{xx} 和 Z'_{yy} 轨迹的椭圆中心在 Z_1（见图 1-4）。由此还可以得出，当坐标轴旋转时：

$$Z'_{xx} + Z'_{yy} = Z_{xx} + Z_{yy} = 常数 \tag{1—65}$$

$$Z'_{xy} - Z'_{yx} = Z_{xy} - Z_{yx} = 常数 \tag{1—66}$$

另外，由（1—61）～（1—64）式还可以看出，当坐标轴旋转时：

$$Z'_{yx}(\theta) = -Z'_{xy}(\theta + 90°) \tag{1—67}$$

$$Z'_{xx}(\theta) = Z'_{yy}(\theta + 90°) \tag{1—68}$$

三、主轴方位的确定

在一个二维构造上观测将得出四个阻抗值，而每一个值都依赖于观测方向，因此，不能给出地电断面的确切概念。要取得与地电断面有确定关系的数值必须沿构造的电性主轴方向进行观测。可是在实际工作中我们无法事先知道地质构造的走向或倾向，这是一个很大的困难。但由前面讨论中可以看出，在电性主轴上观测时将有：

$$Z_{xx} = Z_{yy} = 0$$

或者都接近于零。如果我们能在一个观测点将坐标轴按某一方向旋转。每转一个一定的角度，例如5°，按式（1—52）～（1—55）求出相应的阻抗值，那么满足上述条件的方向必然是电性主轴方位。

根据旋转前后张量阻抗要素之间的关系式（1—56）～（1—59），如果 Z_{xx}、Z_{xy}、Z_{yx}、Z_{yy} 代表旋转前的阻抗要素，而 $Z'_{xx}(\theta)$、$Z'_{xy}(\theta)$、$Z'_{yx}(\theta)$、$Z'_{yy}(\theta)$ 则是旋转 θ 角以后的阻抗要素，那么在已知任一观测坐标下的 Z_{xx}、Z_{xy}、Z_{yx}、Z_{yy} 等四个阻抗值时，就可以此为基础，逐次将坐标旋转求出相应的旋转后的张量阻抗要素。

例如：每次改变 $\theta = 5°$，计算一组新的阻抗值，一直到坐标方向与电性主轴方向重合，即 $\theta = \theta_0$ 时，出现：

$$Z'_{xx}(\theta_0) = 0$$

$$Z'_{yy}(\theta_0) = 0$$

这时相应的坐标方位即是电性主轴方位，同时有：

$$Z'_{xy}(\theta) = Z_{TE}$$

$$Z'_{yx}(\theta) = Z_{TM}$$

即可求得电性主轴上的阻抗要素，从而可以确定视电阻率曲线ρ_{xy}与ρ_{yx}。考虑到观测误差及三维性的可能存在，$Z'_{xx}(\theta)$、$Z_{yy}(\theta)$、$Z'_{yy}(\theta)$不一定能为零，但必然是一个最小的数值。

用这种方法计算起来比较麻烦，通常可以利用简便的解析法，直接根据观测轴上的张量阻抗要素来求取主轴方位角。在近似二维介质的电性主轴方向上有：

$$|Z'_{xx}(\theta_0)|^2 + |Z'_{yy}(\theta_0)|^2 = \min$$

或

$$|Z'_{xy}(\theta_0)|^2 + |Z'_{yx}(\theta_0)|^2 = \max$$

可定义：

$$M = |Z'_{xx}(\theta)|^2 + |Z'_{yy}(\theta)|^2$$

或

$$M = |Z'_{xy}(\theta)|^2 + |Z'_{yx}(\theta)|^2$$

如代入式（1—53）和（1—54），得到：

$$M = |Z_4 - Z_2\sin 2\theta + Z_3\cos 2\theta|^2 + |-Z_4 + Z_3\cos 2\theta - Z_2\sin 2\theta|^2$$

对M求极值，要求：

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = 0 \qquad (1—69)$$

结果可求得电性主轴方位上相应的θ角为：

$$\mathrm{tg}4\theta_0 = \frac{(Z_{xx} - Z_{yy})(Z_{xy} + Z_{yx})^* + (Z_{xx} - Z_{yy})^*(Z_{xy} + Z_{yx})}{|Z_{xx} - Z_{yy}|^2 - |Z_{xy} + Z_{yx}|^2}$$

$$= \frac{2(X_2X_3 + Y_2Y_3)}{(X_2^2 + Y_2^2) - (X_3^2 + Y_3^2)} \qquad (1—70)$$

同时应满足条件：

$$|Z'_{xy}(\theta)|^2 + |Z'_{yx}(\theta)|^2 > |Z'_{xy}(\theta \pm 45°)|^2 + |Z'_{yx}(\theta \pm 45°)|^2 \qquad (1—71)$$

式中 *——共轭。

X_i和Y_i分别是Z_i的实部和虚部。（1—70）式给出由测量的阻抗要素确定电性主轴方位角的方法，继而通过（1—52）～(1—55）式即可求得电性主轴方位上的阻抗要素。

四、二维判别参数

1．构造二维（各向异性的对称性）指数

根据上述张量阻抗的性质，用计算张量阻抗的方法来处理大地电磁资料时，可以用二维指数（又叫二维偏离度）来评价地下电性结构近似二维的程度：

$$S = \frac{|Z_{xx} + Z_{yy}|}{|Z_{xy} - Z_{yx}|} = \frac{|Z_1|}{|Z_4|} \qquad (1—72)$$

式中 S——二维性指数（二维偏离度）。

从图1—4我们知道，Z_4是$Z_{xy}(\theta)$与$Z_{yx}(\theta)$在旋转过程中构造的椭圆轨迹（三维）或直线轨迹（二维）的中心点，而Z_1对三维介质来说是$Z_{xx}(\theta)$与$Z_{yy}(\theta)$椭圆轨迹的中心，在二维情况下则$Z_1 = 0$（即在坐标原点），所以在二维介质中$S = 0$，或者说S愈小构造愈接近于二维，否则反之。通常认为$S < 0.2 \sim 0.4$的电性结构都可作为二维介质来对待。

2．椭率

椭率是旋转椭圆短轴与长轴之比。当电性结构接近二维时，$Z_0(\theta)$ 椭圆逐渐蜕化为一直线，所以，电性结构的二维性可以用椭率来评价。由（1—57）式和（1—58）式及(1—61)～(1—64）式可以得到：

$$\beta = \frac{|Z_0(\theta_0+45°)|}{|Z_0(\theta_0)|} = \frac{|Z'_{yy}(\theta_0)-Z'_{xx}(\theta_0)|}{|Z'_{xy}(\theta_0)+Z'_{yx}(\theta_0)|} = \frac{|Z_2|}{|Z_3|} \qquad (1—73)$$

式中 β——椭率。

当 β 愈趋于零时，电性结构愈接近二维。β 接近于 1 时，椭圆近似等轴，为圆，反映三维构造的特点。

五、倾子的定义及作用

我们知道，在一维介质中 $H_z=0$，而在水平非均匀介质中则 $H_z\neq 0$，为此我们利用磁场的垂直分量 H_z 可以判断介质的结构性质。利用它与磁场水平分量之间的线性关系，H^z 一般可表示成：

$$H_z = AH_x + BH_y \qquad (1—74)$$

式中 A 和 B——为倾子。

它们对岩层的产状反应非常灵敏，因此可以根据倾子的大小以及在坐标旋转过程中的变化规律来判断介质的特征。

实际工作中在观测 E_x、E_y、H_x、H_y 和 H_z 五个分量的情况下，可以根据（1—74）式求出倾子。

对于二维介质，在电性主轴方位上时，磁场垂直分量 H_z 仅存在于 E_z 极化波组（E_x，0，0）（0，H_y，H_z）之中，这时有：

$$H_z = BH_y$$

$$A = 0$$

对（1—74）式进行坐标旋转有：

$$H'_z = H_z = A'H'_x + B'H'_y$$

$$A' = A\cos\theta - B\sin\theta \qquad (1—75)$$

$$B' = B\cos\theta + A\sin\theta \qquad (1—76)$$

使 A' 等于最小时，即在主轴方位上，Y' 对应构造的倾向方向。

第三节　大地电磁测深资料的获取

大地电磁测深法是利用天然电磁场作为场源的勘探方法，它所应用的是较低频率范围内的天然瞬变电磁场，信号十分微弱，频率范围较宽，动态范围也大。因此要求具有低噪音、高灵敏度、宽频带、动态范围大、抗干扰能力强的观测仪器，才能有效的获取反映地下地质特征的电磁信息。随着数字技术的应用和发展，大地电磁测深系统日臻完善。

现代大地电磁测深仪器系统，由接近系统（包括电接收器——电极和磁传感器——磁棒），逻辑记录系统（包括多路转换器、瞬时浮点放大器、模数和数模转换器、存贮器、键盘等），记录系统（包括采集回放、9 轨格式控制器、9 轨接口控制器、盒式磁带记录

器、9轨磁带记录器、打印机、笔式绘图仪），电源系统（包括各种电源部件）等组成。

一、大地电磁测深仪器的功能、主要结构及框图

由于方法理论和检测电磁信号设备的不断发展，使大地电磁测深法在地质勘探方面得到广泛的应用，从而又不断地促进了仪器采用各种现代科学技术发展的成果。至80年代初，苏联、加拿大、美国、法国、西德等技术先进国家已研制成具有现代科学技术水平的数字磁带大地电磁观测系统。我国也加速了这方面的研究工作，石油工业部石油地球物理勘探局仪器厂研制出的SD-Ⅱ型数字大地电磁测深仪器与国外同类先进产品的质量相当。

1．仪器总方框图

SD-Ⅱ型数字大地电磁测深仪的主要结构如图1-5所示。

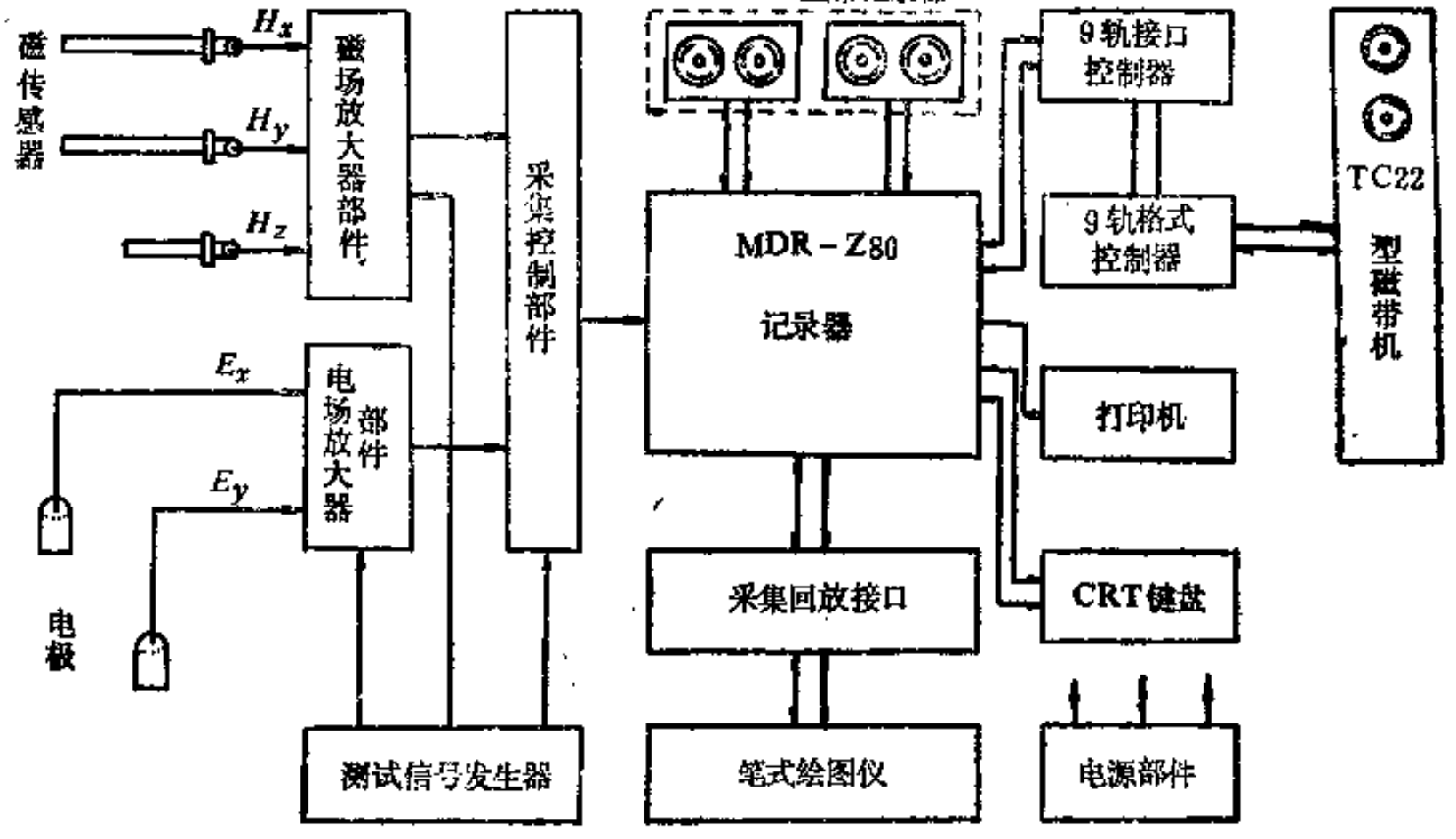


图 1-5　SD-Ⅱ型大地电磁测深仪框图

该仪器可分为模拟采集系统（包括接收系统在内）、逻辑控制系统、磁带记录系统、电源系统等部分。

该仪器具有六个模拟信号道，其中三个磁信号道，分别为H_x、H_y、H_z；两个电信号道，分别为E_x、E_y；另外设有一个备用道。六个道可以同时记录，也可以记录其中的任意道数。

采用MDR-Z80微型计算机作为逻辑控制系统，提高了仪器的稳定性。

从框图看出，该仪器备有盒式磁带记录器，增加了野外记录方式的选择。

由于大地电磁测深法所检测的电磁信号频带较宽，跨越了七个数量级，如若采用一个频段档设置滤波器和采样间隔是不易适应全频段特性的，为此该仪器分为如表1-1中的四个频段记录。

2．观测系统的主要技术指标

（1）磁传感器

①　分辨率为0.002伽马/赫兹；

表 1-1 频 段 档

频 段 档	频 带 范 围 (s)	采 样 率 (ms)
第 一 档	0.001～0.1	1
第 二 档	0.04～10	8
第 三 档	2.0～100	200
第 四 档	20.0～1587	5000

② 类型为感应式；

③ 灵敏度为 140 微伏 / 伽马·赫兹；

④ 长度：水平分量为 2000 毫米，垂直分量为 1000 毫米；

⑤ 直径为 85.0 毫米。

（2）电场接收器

为 30.0 毫米×30.0 毫米×0.3 毫米的铅板或硫酸铜与铜构成的不极化电极。

（3）模拟采集

① 频带分四段，各段的频率范围及采样率在前面已给出；

② 系统输入噪音：

磁系统 ≤ 0.2 微伏，

电系统 ≤ 1.0 微伏；

③ 偏移：

磁道 ≤ 0.1 微伏，

电道 ≤ 0.2 微伏；

④ 浮点放大器增益台阶精度：

前 10 个台阶精度 ≤ ± 0.05%，

后 5 个台阶精度 ≤ ± 0.5%；

⑤ A / D 转换精度为 ±0.05% 最小有效位～ ±0.5% 最小有效位。

⑥ 串音优于 80 分贝；

⑦ 共模抑制比：

磁道为 140 分贝（10 赫兹），

电道为 120 分贝（10 赫兹），

电道为 100 分贝（5 千赫兹），

⑧ 去假频滤波器陡度为 72 分贝 / 倍频程；

⑨ 动态范围为 162 分贝；

⑩ 仪器稳定性较好。

3．仪器主要功能

① 分别可以进行 4 道、5 道、6 道数据的观测记录；

② 具有盒式磁带记录和回放；

③ 具有 9 轨磁带记录和回放；

④ 盒式磁带到 9 轨磁带的转录；

⑤ 在野外观测时可以打印各项技术指标；

⑥ 具有多台站同步测量功能。

二、大地电磁测深野外工作布置、避免干扰的措施及对精度的要求

大地电磁测深法所检测的信号是由地球外部场源所引起的天然电磁场的变化，故只需布置接收系统（包括电接收装置和磁接收装置），野外施工简单方便，但对测点的选择，装置的铺设等应特别加以注意，因为观测的电磁场信号的频带范围很宽，从0.0006赫兹到250赫兹，信号强度非常微弱。所以要严格执行规定的操作方法，有效地压制各种干扰，这对提高原始记录质量甚为重要。

1．布点

测点的布设应根据地质任务确定，但在实际工作中还应考虑地形环境。测区地形应该开阔、平坦，地形起伏高差尽量不要超过电极距的10％，同时应避免在小丘、河谷、地质构造复杂处布点，以免造成视电阻率曲线严重畸变，给资料解释带来困难。测点周围环境也很重要，不要靠近公路、铁路、高压传输电线和供电设备、电台、雷达等工业设施，以避免游散电流所带来的干扰。布极时应根据地形条件合理选择装置方案。接收电场的装置可归纳为三种形式：即十字形排列装置、T形排列装置和L形排列装置。一般都采用十字形布极方式，该装置中E_x与E_y互为垂直（特殊情况下E_x与E_y夹角θ可在$70°<\theta<90°$范围内）。H_x和H_y磁棒（磁传感器）方向应与E_y、E_x水平分量的方向互为垂直，即E_x垂直于H_y；E_y垂直于H_x，H_x则垂直于电磁场水平分量，由此构成接收电、磁场信号的装置系统，如图1-6所示。

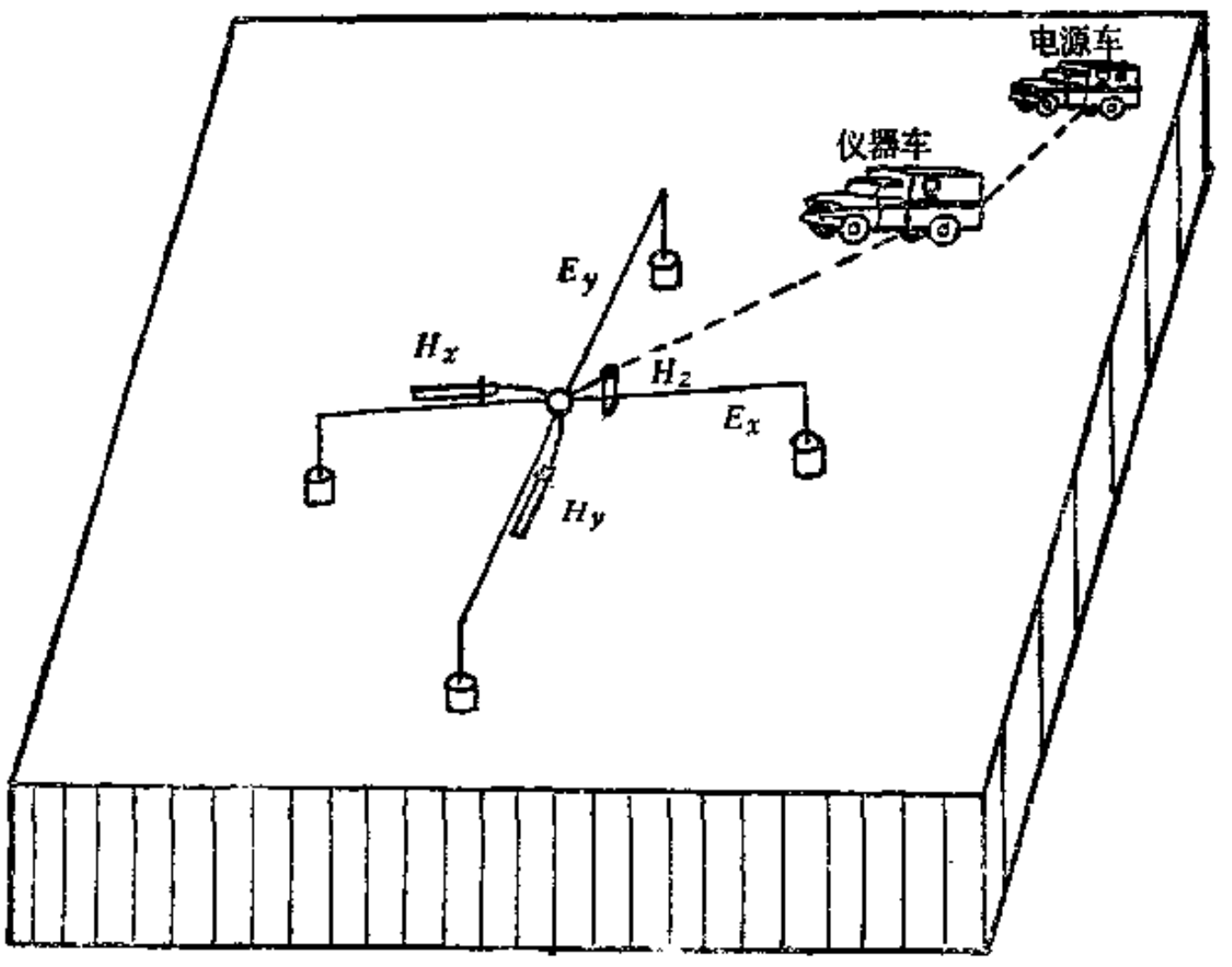


图 1-6　装置布置图

根据以上要求铺设电、磁场的接收装置。电场信号接收装置取两条等长的测量电线分

别连接 E_x 方向和 E_y 方向的电极，铺设在地面上。中心交点处设一中心桩，即为测点坐标位置。E_x 方向和 E_y 方向的接收导线分别输入到中心接线盒，再通过屏蔽电缆输入到仪器电场放大器的输入端。水平磁棒一般埋入地下 30 厘米深，垂直磁棒垂直埋入地下。为避免磁棒之间的感应干扰，通常均离中心点 10 米左右。水平磁棒和垂直磁棒的输出端通过屏蔽电缆传输至仪器的磁场放大器输入端。

电极距的选择根据大地电磁场强度而定，这与天然电磁场信号源的强弱以及当地的地质构造（如隆起或凹陷）等因素有关。采用长极距可以得到较大的电位差，地表不均匀性影响也小，但干扰随着增大，不便于野外施工，同时也不符合理论要求，通常采用 100 米至 200 米。

2．野外观测

仪器接通电源后首先检查各部件的工作是否正常，在确认仪器工作正常后再开始记录。正式记录之前必须进行以下测试记录：

① 系统噪音测试记录；

② 电极比较测试记录；

③ 极性测试记录；

④ 增益测试记录。

通过以上测试可以了解外界干扰情况和电磁场的极化状态等因素是否符合技术要求，这是很有用的。

在一观测点上记录时间的长短取决于地质任务所规定的要了解的目的层的深度，可由如下公式确定：

$$T = \frac{4p^2}{\rho}$$

式中 p——趋肤深度。

电磁场的趋肤深度至少应为目的层深度的 8 倍，所以：

$$T = \frac{256}{\rho}h^2$$

式中 h——目的层的深度（单位为公里）；

ρ——地层平均电阻率（单位为欧姆米）；

T——能达到目的层的最短信号周期（单位为秒）。

由于考虑到截断效应对资料数字处理的影响，观测记录的长度不应小于上述周期的 8 倍。譬如：探测目的层深度为 5 公里，岩层平均电阻率为10欧姆米，那么电磁场信号记录的长度至少应为 5000 秒。为保证数据处理质量，每个频段都应有必要的重复观测记录。

3．避免干扰的措施

大地电磁测深法所检测的电磁场信号，通常是很微弱的，很容易被外界的各种干扰因素所淹没，因此要求尽可能地避免外界干扰源的影响。

（1）点位的选择

观测点的布极范围应离公路或高压传输电线在 500 米以上，离铁路的距离应大于 1 公里，这样可以避免车辆和列车的来往对信号的干扰。为避免自行车、手推车、兽力车的来往干扰磁信号，磁传感器（磁棒）的安放位置应离人行道 30 米以上。电力水泵和变压器

也是不可忽视的干扰源，应离装置 500 米以外。电极不要埋置在芦苇地或沼泽地。电台、雷达、变电所、发电厂等设施都是较强的干扰源，布点时应离这些设施数公里以上。

（2）电极的埋置

接收地面天然电场信号的接收器——电极，一般都采用 30 厘米×30 厘米×0.3 厘米的铅板，并在引线的焊接处用硅胶封闭，可以防止电极埋入土壤后产生电解氧化作用的干扰。电极必须使其与大地保持良好的接触，这是拾取有效信号的关键。埋置方法是：挖40厘米见方深 50 厘米的土坑，在坑底用水与泥土搅拌成泥浆，将铅板电极平放入内，用土盖好，再倒些水用土压实，这样可使铅板电极的板面与大地土壤保持良好的接触。

（3）磁棒的安置

接收天然磁场信号的磁传感器——磁棒，是围高导磁合金芯绕制而成的线圈，它具有以较高的灵敏度接收微弱磁场信号的功能，但必须注意避免外界的干扰，如工厂、火车、汽车、钻井、雷达等。

为了避免温差和风动对磁信号接收的干扰，可采取如下办法：将水平磁棒埋入地面以下 30 厘米深的土壤中水平放置，垂直磁棒则垂直埋入地下或用泥、砂等堆积来保持成垂直方位。

为不影响有效电磁信号的采集，避免电极极化电位和磁棒的磁质扰动等干扰因素，电极和磁棒布置好后，必须经过六小时以上的稳定时间，才能开始观测记录。

（4）信号的传输

对微弱电、磁场信号的采集，不但要有信噪比高的采集系统和性能好的接收器（即电极和磁棒），而且要注意信号的传输措施。电、磁信号从中心点分别用多芯金属隔离导线传输到仪器采集箱体输入端。传输导线的金属隔离线必须在中心点接地，否则失去屏蔽作用。传输导线必须用石头或泥土压住，避免微动感应干扰。

4．对记录的精度要求

进行野外测量的仪器，必须具有仪器对外场信号的响应特性的资料，可以采用二种方法取得：①采用人工数据合成记录确定仪器系统响应特性曲线的性能；②采用标定方法确定仪器系统对外场信号的响应特性。

观测记录时虽有时也可以根据模拟监视图形识别干扰特征，选择信噪比大、频谱丰富的记录，但从直观上是难以判别线性极化这种不利状况的，只能粗略的加以分析。可以由以下标志加以分辨：

① 一道振幅基本为零，另一道强弱不定；

② 两道相位始终一致；

③ 两道信号始终相反。

当场源为非线性极化时，电场或磁场信号的幅值和方向都有所变化，当然各种变异的关系是很复杂的。

根据数字处理的要求，对 SD-Ⅱ 型数字大地电磁仪观测记录的要求见表 1-2。

三、野外（监视或回放）记录简介

野外观测最终是获得电磁场信号的数字磁带记录。可以采用两种记录方式：

① 由 MDR-Z80 记录器输入盒式磁带记录器记录，然后再转入 9 轨磁带机记录；

② 由 MDR-Z80 记录器直接输入 9 轨磁带机记录。

表 1-2　SD-II 型大地电磁仪观测记录的要求标准

频段号	频段范围 (Hz)	采样间隔 (ms)	记录道数	记录数据单道长	每张记录时间	记录张数	总记录时间
第一频段	250.0 — 10.0	1	4	5504	5.5 s	8	44.0 s
			5	4403	4.4 s	8	35.2 s
			6	3669	3.7 s	8	29.6 s
第二频段	25.0 — 0.1	8	4	5504	44.0 s	8	5.9 min
			5	4403	35.2 s	8	4.7 min
			6	3669	29.4 s	8	3.9 min
第三频段	0.5 — 0.01	200	4	5504	18.3 min	4	1h 12min
			5	4403	13.0 min	4	52.0 min
			6	3669	12.2 min	4	48.0 min
第四频段	0.05 — 0.00063	5000	4	5504	7h 36min	1—2	
			5	4403	6h 6min	1—2	
			6	3669	5h 6min	1—2	

在记录过程中，要随时监视外场电磁信号的变化情况。监视方法是：

① 从采集系统的模拟输出端输入到笔式绘图仪显示出电，磁信号的模拟记录（见图1-7）；

② 在第二、第三、第四频段记录时，可边录边放，由笔式绘图仪显示出电、磁信号图形（见图 1-7）；

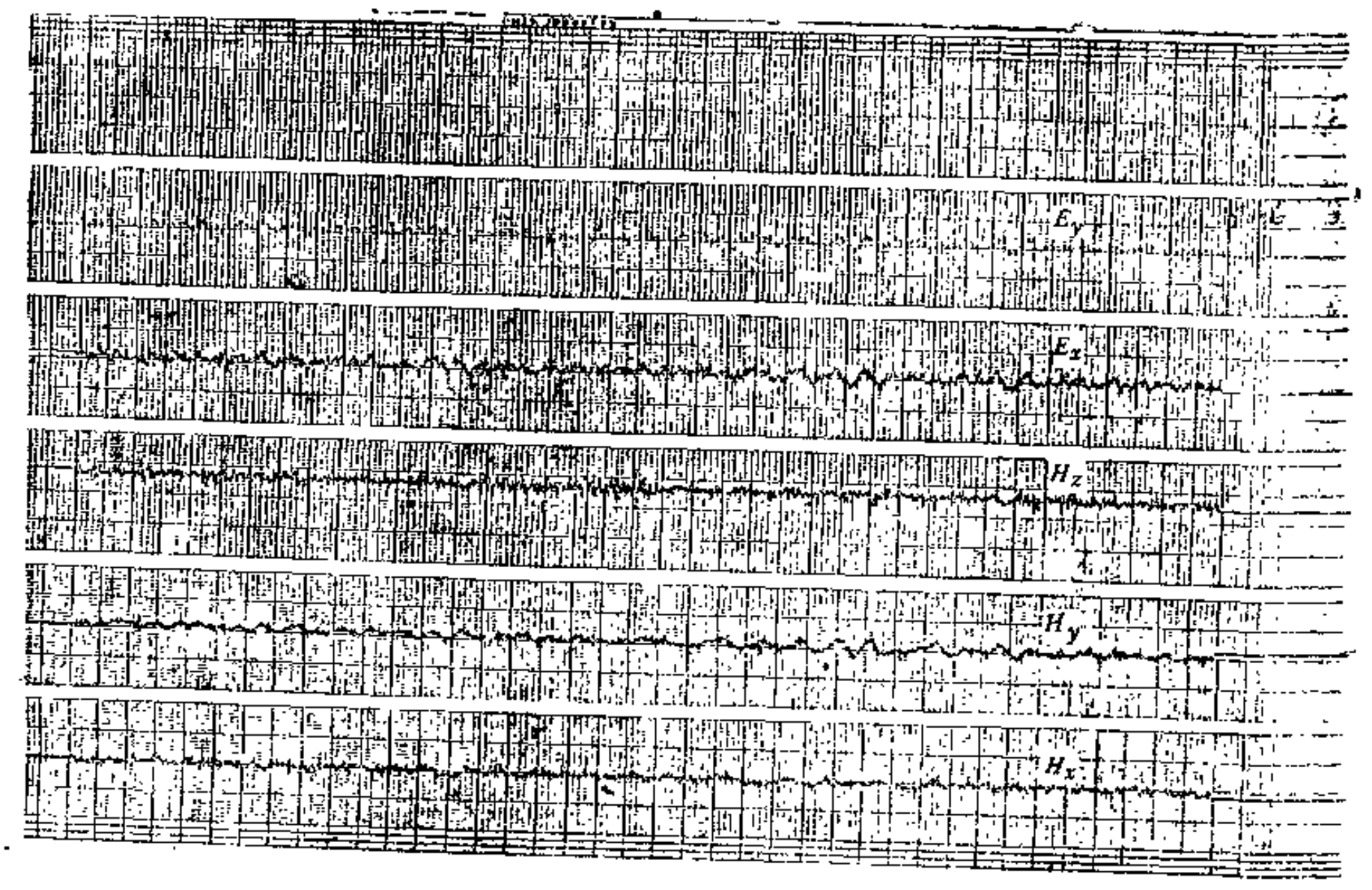


图 1-7　电磁信号模拟记录图形

③ 也可用示波器直接测试各信号道在瞬时浮点放大器上的台阶跳动波形图（见图 1-8）。

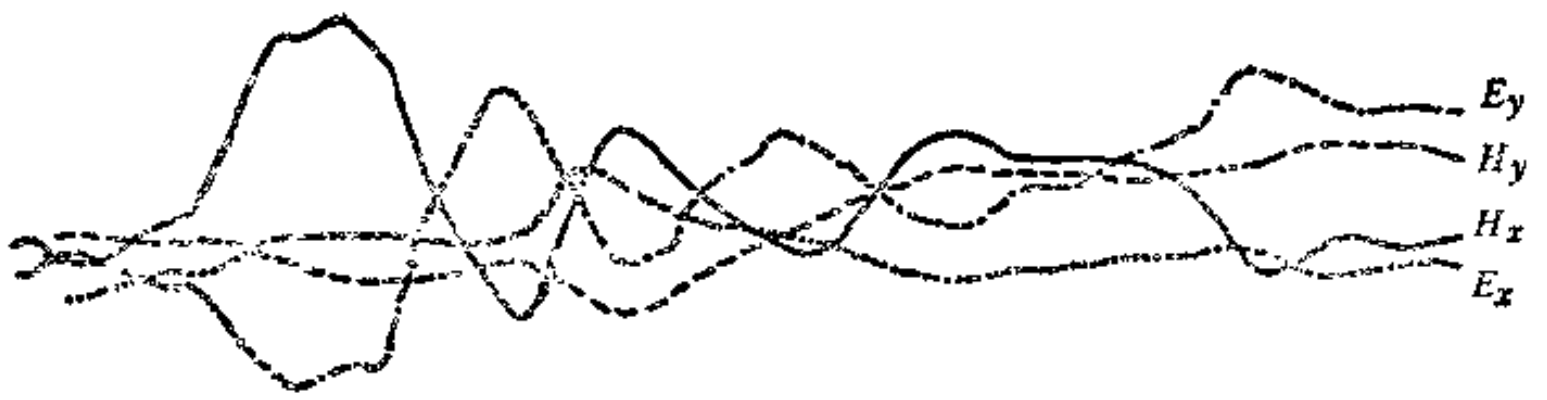


图 1-8　电磁信号示波图形

在记录结束时再按要求将所有（各频段）记录通过数 / 模转换器进行回放，给出模拟记录（见图 1-7），做为数字处理时衡量记录质量的原始资料。

第二章　大地电磁测深资料的处理

第一节　综　　述

一、资料处理的目的

资料处理的目的是通过对野外观测记录的处理，取得可靠的张量阻抗要素、视电阻率、相位及其他有关的大地电磁响应函数，供资料解释使用。

资料处理包括下述工作内容：

①　对野外记录带进行解编。这项工作可以在资料处理主机上进行，也可以在较小的预处理机上完成。解编工作须完成两项任务，一项是记录格式转换，即将野外带的记录格式转换成处理主机所允许的格式；另一项是将多路转换方式的原始数据按资料处理的要求重排成道顺序方式。如果解编工作是在预处理机上进行的，则要求输出解编带，供处理主机使用。

②　识别记录质量。野外记录过程中经常会出现某种干扰，即使没有干扰，也不能保证每张记录自始至终都有强信号。因此在进行资料处理之前，对每张记录的质量情况加以识别是必要的。

识别方法主要是观察原始波形图，看有效信号的强弱、各道之间的相关性以及是否有强烈干扰等。

③　对于仪器标定带，使用标定处理程序在处理主机上进行处理。处理结果给出仪器各道在各个给定频率上的格值和相移数据，供资料处理时使用。

④　对于观测资料带，使用一种或几种资料处理程序在主机上进行处理。处理结果给出根据多张记录求得的对应于各给定频率的张量阻抗、视电阻率、相位等数据及其平均数据，宽行打印机以列表形式给出这些数据，并给出由这些数据形成的图形。也可以将这些数据记录到另一盘磁带上，然后用专门的绘图仪绘制精确的图形。

二、资料处理中需要考虑的一些问题

1．截断效应

大地电磁场信号在时间上是无限延续的，以$x(t)$表示。观测记录是在某一有限时间段内记录下来的，以$\overline{x(t)}$表示。因此，观测记录是从真实的大地电磁场信号中截取的一部分。设记录延续时间为$T_0\left(-\frac{T_0}{2},\ \frac{T_0}{2}\right)$，则$\overline{x(t)}$是$x(t)$与矩形函数$d_0(t)$的乘积：

$$\overline{x(t)} = x(t) \cdot d_0(t)$$

式中

$$d_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{当} \quad |t| \leqslant \dfrac{T_0}{2} \\ 0, & \text{当} \quad |t| > \dfrac{T_0}{2} \end{cases}$$

于是$\overline{x}(t)$的傅氏变换为：

$$\overline{X}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)d_0(t)e^{-i\omega t}dt=X(\omega)*D_0(\omega)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega-\lambda)D_0(\lambda)d\lambda \qquad (2-1)$$

式中 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$，是真实大地电磁场信号的频谱；

$$D_0(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}d_0(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}e^{-i\omega t}dt$$

$=\frac{2\pi\sin(\pi\omega/\omega_0)}{\omega_0(\pi\omega/\omega_0)}$，是矩形时窗的频谱，亦即频谱窗口；

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$；

ω——名义频率；

λ——频率变量。

式（2－1）说明截断信号$\overline{x}(t)$的傅氏变换$\overline{X}(\omega)$不是真实信号的频谱$X(\omega)$，而是$X(\omega)$与频谱窗口$D_0(\omega)$的褶积。这种因将真实信号截断而产生的对大地电磁场频谱的影响称为截断效应。对于资料处理来说，获得尽可能准确的频谱是整个处理工作的基础，因此必须设法减小截断效应的影响。

增大记录长度显然可以减小截断效应，但是这会影响工作效率。因此需要在保持一定记录长度（一般要求记录长度不短于最低名义频率的周期的6倍）的前提下，再通过其他途径进一步减小截断效应。

（1）修改大地电磁场频谱的形状

由式（2—1）可见，当大地电磁场频谱$X(\omega)$的形状起伏很大时，对于某一频率ω而言，可能会出现$X(\omega-\lambda)\gg X(\omega)$，致使$X(\omega-\lambda)\cdot D_0(\lambda)>X(\omega)\cdot D_0(0)$，即$(\omega-\lambda)$频率上的谱密度比$\omega$频率上的谱密度对$\overline{X}(\omega)$的贡献更大，这就会使计算值$\overline{X}(\omega)$偏离$X(\omega)$的基本特征。为了使$\overline{X}(\omega)$接近于$X(\omega)$，需要在傅氏变换之前，根据对工区大地电磁场频谱形状的初步了解，通过一个滤波器改变它们的频谱形状，使其尽量平坦。这种办法称为预先白噪声化（简称预白）。所用的滤波器称为预白滤波器。加预白滤波器后，对傅氏变换的结果再进行相应的校正，除以滤波器的频率响应。如果各个场分量使用相同的预白滤波器，可以不进行这种校正，因为计算阻抗时，校正因子会自动约掉。

在华北地区，根据对该区大地电磁场频谱形状的了解，采用了3个加权系数c_{-1}，c_0，c_1的零相移数字滤波器进行预白。预白公式为：

$$\hat{x}_n=c_{-1}x_{n+1}+c_0x_n+c_1x_{n-1}$$

式中 $\hat{x}_n$——预白后的输出；

$c_{-1}=c_1=-0.243$；

$c_0=0.514$。

（2）改变频谱窗口的形状

根据一般文献的介绍，多采用汉宁窗口：

$$d_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\cos\omega_0 t), & \text{当} \quad |t|\leqslant\frac{T_0}{2}\\ 0, & \text{当} \quad |t|>\frac{T_0}{2}\end{cases}$$

对应的频谱窗口是：

$$D_1(\omega)=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos\omega_0 t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{\omega_0^2\sin(\pi\omega/\omega_0)}{(\omega_0^2-\omega^2)(\pi\omega/\omega_0)}$$

2．克服噪声影响问题

这是提高资料处理质量的关键问题。用张量阻抗分析方法计算大地电磁地面张量阻抗要素的基本关系式是：

$$\begin{aligned}E_x(\omega)&=Z_{xx}(\omega)H_x(\omega)+Z_{xy}(\omega)H_y(\omega)\\E_y(\omega)&=Z_{yx}(\omega)H_x(\omega)+Z_{yy}(\omega)H_y(\omega)\end{aligned}\qquad(1-43)$$

每个方程中分别含有两个张量阻抗要素，似乎只需要有两组独立的测量数据（两组傅氏变换值）即可算出阻抗要素了。但是实际上观测数据中常包含一些噪声，为了提高估算阻抗要素的精度不直接用（1－43）式求解，而是采用一些能克服某种类型干扰的计算方法。关于这些计算方法，在后面几节中有专门的叙述。

三、目前资料处理的发展情况

首先是为了抑制相关噪声对功率谱估算的影响，现在在很多大地电磁测深工作中采用了带参考站的工作方法和资料处理过程。在这种工作方式中，于距离测站几公里到十几公里处设一参考测站，与基站同步但独立地遥测该站上的二道信号，一般是两个磁场水平分量H_x^R和H_y^R作为同步检测信号道A^*和B^*。由于场源具有平面波性质，所以在相距为上述距离的两点处可以认为信号之间仍是相关的，但噪声源一般是局部性的，即远参考道中的噪声与基站上各道的信号及其中的噪声是不相关的。所以一般可保证互功率谱是无偏估计，从而可认为阻抗张量元素的估计值也是无偏的。

另外一个趋势是发展实时处理技术。过去数据处理都是在记录完成后将数据磁带拿到计算中心去进行，一般距离野外现场很远，所以当时不能确定记录资料的质量和数量是否都已达到要求。近期发展起来的实时处理是在采集数据的同时就在现场通过程序控制用微型计算机完成数据处理，算出各种大地电磁响应函数，进行近似的博斯蒂克一维反演解释并绘图显示结果，使操作员在现场就可及时了解资料的质量和初步解释结果。还可通过对最小特征值及对应的资料特征矢量及参数特征矢量的分析，判断对条件最差的参数来说是否已采集到足够的资料。如还不够，则只要再采集对应频段的资料就可提高条件最差的参数的分辨程度，而无需普遍增加采集数量。这样就可提高生产效率，并保证达到所需的观测精度。

一个值得注意的最近提出的新方法是通过估算相位来估算阻抗函数。可以证明，相位的估计值一般是无偏的。由于大地电磁阻抗是最小相位的响应函数，故可利用相位求出振幅，最终求出无偏的阻抗。这样就回避了由自功率谱的有偏估计造成的阻抗估计中的偏倚

误差。

资料处理中还有一个重要问题是质量的定量评价问题。为此，有的学者研究了大地电磁响应函数方差的性质及其确定，并以置信区间的形式直观地表示在视电阻率曲线上。这对定量评价大地电磁测深资料解释成果的可靠性是很有意义的。

第二节　数字带的预处理与标定

一、野外记录带的格式与解编

野外记录带采用9轨半英寸磁带，记录密度为800BPI；每个数据16位，占2个字节；每张记录前面有一个16位字的分离式头块段；每张记录由多个块组成，每块2046个字；工作周期范围是0.1秒至1000秒，分为三档记录。

以上是SD-I型大地电磁测深仪的野外记录带情况，由于该记录格式在处理主机(CYBER 172)上不能直接识读，故需将其解编成处理主机规定的格式，并将数据按处理程序要求以道顺序进行重新排列。如果解编工作是在处理主机上进行时，可以将解编程序编排成整个处理程序的首段；如果为了减轻处理主机的负担而在其他计算机(目前是用RDS-500预处理机）上进行时，需编制专用的解编程序，并输出可供处理主机使用的解编带。

二、仪器标定的物理意义

在野外工作中，电场强度是由两组接地电极测量经电锁送入仪器的电道，磁场强度是由感应线圈将磁信号转换成电信号再经电锁送入仪器的磁道进行记录的。在资料处理中为了计算阻抗要素，需要知道电磁场强度。若想由记录数据（的傅氏变换）求得电、磁场强度，需要知道仪器各道的格值和相移特性。为此需要对仪器进行标定。SD-I型大地电磁测深仪采用的标定方法是给仪器的各道输入给定频率的已知信号并进行记录，然后由计算机对记录进行处理，取得仪器各道的格值和相移数据，供资料处理时作道的校准使用。

三、标定记录的处理方法

标定记录处理的目的是求出所记录到的正弦波的振幅和初相位。由振幅和已知的信号强度，可以求得格值；将初相位与标准道的相位进行比较，可得相移。

为了算出正弦波的振幅和初相位，对于模拟记录来说，可以采用直观量图的办法，但是对于数字记录，由于受采样间隔的限制，采样点不一定刚好落在极值点上，因而不能采用这种简单的办法。

对于数字记录，用曲线拟合法效果较好。设与记录数据重合得最好的正弦曲线为：

$$Y_i = A\sin(\omega t_i + \varphi)$$

式中　Y_i——对应于采样时间 t_i 的纵座标值；

ω——正弦曲线的圆频率；

A——正弦曲线的振幅；

φ——正弦曲线的初相位。

设对应于采样时间 t_i 的样点值为 y_i，根据最小二乘原理，取均方差函数为：

$$\Phi(A,\varphi)=\sum_{i=1}^{N}(y_i-Y_i)^2=\sum_{i=1}^{N}[y_i-A\sin(\omega t_i+\varphi)]^2$$

令 $$\frac{\partial\Phi}{\partial A}=0 \text{ 及 } \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=0$$

得
$$\begin{aligned}&\sum[y_i-A\sin(\omega t_i+\varphi)]\cdot A\cos(\omega t_i+\varphi)=0\\&\sum[y_i-A\sin(\omega t_i+\varphi)]\cdot\sin(\omega t_i+\varphi)=0\end{aligned}\qquad (A\neq 0)$$

将上述二式展开，并令：

$$\sum y_i\cos\omega t_i=a \qquad \sum y_i\sin\omega t=b$$

$$\sum\sin\omega t_i\cos\omega t_i=c \qquad \sum\cos^2\omega t_i=d$$

$$\sum\sin^2\omega t_i=e$$

可得：

$$b\cos\varphi+a\sin\varphi=A[e\cos^2\varphi+d\sin^2\varphi+2c\cos\varphi\sin\varphi] \qquad (2—2)$$

$$a\cos\varphi-b\sin\varphi=A[\cos^2\varphi-c\sin^2\varphi+(d-e)\cos\varphi\sin\varphi] \qquad (2—3)$$

解联立方程(2—2)、(2—3)，得：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{bc-ae}{ac-bd} \qquad 或 \qquad \varphi=\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{bc-ae}{ac-bd}\right)$$

这个φ值可能使均方差极小，也可能使均方差极大，但是φ与$\varphi+\pi$之中必有一个使均方差极小。故可将φ代入计算均方差的公式得Φ_1，再将$\varphi+\pi$代入得Φ_2，若$\Phi_1<\Phi_2$，则初相位为φ，否则为$\varphi+\pi$（计算Φ_1、Φ_2时，可任意假设A值）。

求出初相位后，代入式（2—2）或（2—3）即可求得振幅A。

如果信号发生器的频率准确，而且记录的正弦波无直流分量时，用上述方法能求得准确的振幅A和初相位φ。当信号发生器的频率不准或记录波形有较大的直流分量时，可以用更一般的带直流分量的正弦曲线：

$$Y_i=A\sin(\omega t_i+\varphi)+C$$

与记录数据相拟合。这时不仅A与φ是待求量，而且圆频率ω与直流分量C也是待求量。为了能较准确地求出这四个待求量，我们采用了改进的阻尼最小二乘法（马夸特法）。关于这种方法，在第三章第二节中将有详细的叙述。

求得振幅A和初相位φ后，就可求出格值GZ和相移$\Delta\varphi$：

$$GZ=\frac{P}{2A}$$

$$\Delta\varphi=\varphi-\varphi_{标准道}$$

式中 P——已知的电磁场强度；

$\varphi_{标准道}$——标准道的初相位。

第三节　大地电磁测深资料的最小二乘处理方法

一、方法原理与数学模型

最小二乘处理方法是传统的大地电磁资料处理方法，目前仍被广泛使用。该方法是从大地电磁场的基本关系式（1—43）出发，应用最小二乘法建立起来的。设有 n 组电磁场观测数据 $E_{xi}, E_{yi}, H_{xi}, H_{yi}, (i=1,2,\cdots,n)$，定义由（1—43）式中任意两个场分量计算出来的其他场分量为该场分量的预测值，例如由H_{xi} 和H_{yi} 按（1—43）式可以算得两个电场分量的预测值：

$$E_{xi}^{预测} = Z_{xx}H_{xi} + Z_{xy}H_{yi}$$

$$E_{yi}^{预测} = Z_{yx}H_{xi} + Z_{yy}H_{yi}$$

应用最小二乘法，使两个电场分量的测量值与它们的预测值之间的差方和最小，即

$$\Phi_{E_x} = \sum_{i=1}^{n} |E_{xi} - E_{xi}^{预测}|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (E_{xi} - Z_{xx}H_{xi} - Z_{xy}H_{yi})(E_{xi}^{*} - Z_{xx}^{*}H_{xi}^{*} - Z_{xy}^{*}H_{yi}^{*})$$

$$= \min,$$

$$\Phi_{E_y} = \sum_{i=1}^{n} |E_{yi} - E_{yi}^{预测}|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (E_{yi} - Z_{yx}H_{xi} - Z_{yy}H_{yi})(E_{yi}^{*} - Z_{yx}^{*}H_{xi}^{*} - Z_{yy}^{*}H_{yi}^{*})$$

$$= \min,$$

式中*号表示复共轭。使Φ_{Ex}对Z_{xx}与Z_{xy}的偏导数及Φ_{Ey}对Z_{yx}与Z_{yy} 的偏导数等于零，可得 4 个方程式，由前两个方程式可以解得Z_{xx}和Z_{xy}的最佳估算值，由后两个方程式可以解得Z_{yx}和 Z_{yy} 的最佳估算值。

以上是由两个电场预测值导出的一种计算阻抗要素的算法。任选另一对电磁场预测值，可以类似地导出另一种计算张量阻抗要素的算法。由于有四个电磁场预测值，可以构成六种不同的组合对，因而可以得到六种计算张量阻抗要素的算法，这六种算法可以统一地写成：

$$Z_{xx} = \frac{\langle E_x A^* \rangle \langle H_y B^* \rangle - \langle E_x B^* \rangle \langle H_y A^* \rangle}{\langle H_x A^* \rangle \langle H_y B^* \rangle - \langle H_x B^* \rangle \langle H_y A^* \rangle} \tag{2—4}$$

$$Z_{xy} = \frac{\langle E_x A^* \rangle \langle H_x B^* \rangle - \langle E_x B^* \rangle \langle H_x A^* \rangle}{\langle H_y A^* \rangle \langle H_x B^* \rangle - \langle H_y B^* \rangle \langle H_x A^* \rangle} \tag{2—5}$$

$$Z_{yx} = \frac{\langle E_y A^* \rangle \langle H_y B^* \rangle - \langle E_y B^* \rangle \langle H_y A^* \rangle}{\langle H_x A^* \rangle \langle H_y B^* \rangle - \langle H_x B^* \rangle \langle H_y A^* \rangle} \tag{2—6}$$

$$Z_{yy} = \frac{\langle E_y A^* \rangle \langle H_x B^* \rangle - \langle E_y B^* \rangle \langle H_x A^* \rangle}{\langle H_y A^* \rangle \langle H_x B^* \rangle - \langle H_y B^* \rangle \langle H_x A^* \rangle} \tag{2—7}$$

式中A^*和B^*表示四个场分量E_x, E_y, H_x, H_y中任意两个的共轭复数；（ ）号表示n组数据的平均。

在上述六种算法中，其中有两种算法是不稳定的，即当A^*和B^*等于E_x^*和H_y^*或者等于E_y^*和H_x^*时，对于入射场是不规则极化的而地下构造又是一维的情况，会导致（2—4）至（2—7）式的分母趋于零。因此，实际可行的算法只有四种。

无噪声时，四种算法的结果是一样的，有噪声时（这里指不相关噪声），噪声对各种算法的影响是不同的。以计算Z_{xy}为例，当电磁场存在噪声时，对于$A^*=E_x^*$，$B^*=E_y^*$及$A^*=E_x^*$，$B^*=H_x^*$这两种算法而言，可推导出：

$$Z_{xy}=\frac{\langle E_{xs}E_{xs}^*\rangle+\langle E_{xn}E_{xn}^*\rangle}{\langle H_{ys}E_{xs}^*\rangle}=\frac{\langle E_{xs}E_{xs}^*\rangle}{\langle H_{ys}E_{xs}^*\rangle}\left(1+\frac{\langle E_{xn}E_{xn}^*\rangle}{\langle E_{xs}E_{xs}^*\rangle}\right)$$

$$=Z_{xy信号}\left(1+\frac{\text{电场的噪声功率密度}}{\text{电场的信号功率密度}}\right)$$

上式说明，当用上述两种算法时，电场噪声使计算的Z_{xy}比真值($Z_{xy信号}$)偏高；而对于$A^*=E_y^*$, $B^*=H_y^*$及$A^*=H_x^*$, $B^*=H_y^*$这两种算法，可推导出：

$$Z_{xy}=\frac{\langle E_{xs}H_{ys}^*\rangle}{\langle H_{ys}H_{ys}^*\rangle+\langle H_{yn}H_{yn}^*\rangle}$$

$$=Z_{xy信号}\Big/\left(1+\frac{\text{磁场的噪声功率密度}}{\text{磁场的信号功率密度}}\right)$$

上式说明，这时磁场噪声使计算的Z_{xy}比真值偏低。显然，当电场噪声与磁场噪声水平相当时，取四种算法的平均值作为最终结果，可将噪声影响抵销，从而获得较正确的结果。当然，如果电场与磁场的噪声水平相差较大时，平均的方法是不能完全消除噪声影响的。实际上，当电场噪声明显较强时，只用$A^*=H_x^*$，$B^*=H_y^*$计算阻抗要素，常能得到较好的结果。

采用四种算法计算张量阻抗要素时，可以利用四种算法结果之间的差异来衡量噪声影响的程度。为此，引入全信息矢量相干度CP：

$$CP=1-\frac{D}{|R|} \qquad (2—8)$$

式中 R——四种算法结果的平均值；

D——各种算法结果与平均值之差的模的平均。

噪声越小，CP值越接近于1。可以把CP值作为筛选数据的依据，例如处理资料时，只取$CP\geqslant 0.5$的数据作为合格数据，参加后面的运算。

以上是最小二乘处理方法的基本原理和计算方法。在实际实现时，还需要考虑克服截断效应和计算主轴方位、主轴阻抗要素等工作。现将资料处理的具体步骤及有关计算公式叙述如下：

① 对记录数据加预白和汉宁窗口，预白公式为：

$$y_i=-0.243x_{i-1}+0.514x_i-0.243x_{i+1}$$

$$(i=1,2,\cdots,N-2)$$

式中 x_i——记录数据；

y_i——预白后的数据；

N——记录数据长度。

汉宁窗口公式为：

$$\hat{y}_i = y_i \cdot \left(1 - \cos\frac{2\pi i}{N'}\right), \qquad (i = 1, 2, \cdots, N')$$

式中 y ——预白后数据；

$\hat{y}_i$——加汉宁窗口后的数据；

N' ——预白后数据长度。

② 进行傅氏变换。考虑到阻抗随频率变化的特点，所取频率点的间隔应在对数比例尺上均匀分布，而不是按频率等间隔，这就不能采用快速傅氏变换而只能采用递推算法。设某一频谱密度的实部为C_i，虚部为S_i，递推公式为：

$$C_i = \sum_{n=1}^{N} x_n \cos 2\pi n \frac{\Delta}{T_i} = u_{,1} \cos 2\pi \frac{\Delta}{T_i} - u_{i,2} ;$$

$$S_i = \sum_{n=1}^{N} x_n \sin 2\pi n \frac{\Delta}{T_i} = u_{i,1} \sin 2\pi \frac{\Delta}{T_i} 。$$

式中

$$u_{i,1} = x_1 + 2u_{\cdot,2} \cos 2\pi \frac{\Delta}{T_i} - u_{i,3} ;$$

$$u_{i,2} = x_2 + 2u_{\cdot,3} \cos 2\pi \frac{\Delta}{T_i} - u_{i,4} ;$$

$$\vdots$$

$$u_{i,N-1} = x_{N-1} + 2u_{i,N} \cos 2\pi \frac{\Delta}{T_i} ;$$

$$u_{i,N} = x_N 。$$

其中Δ和T_i分别为采样间隔和计算频率的周期。

③ 道的校准，即进行格值校正和相移校正。由前面求得的频谱密度的实部C_i和虚部S_i可算出振幅Q_i和相位φ_i：

$$Q_i = \sqrt{C_i^2 + S_i^2} ,$$

$$\varphi_i = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{S_i}{C_i}\right) 。$$

经格值校正后的振幅$\hat{Q}_i$为：

$$\hat{Q}_i = Q_i \cdot GZ_i$$

经相移校正后的相位$\hat{\varphi}_i$为：

$$\hat{\varphi}_i = \varphi_i - \Delta\varphi_i$$

④ 按（2—4）至（2—7）式计算测量轴上的阻抗要素$Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yx}, Z_{yy}$及按(2—?)式计算全信息矢量相干度$CP$。

⑤ 计算主轴方向和主轴方向上的阻抗要素。根据第一章第二节中关于张量阻抗理论的叙述，主轴方位角θ_0根据下式计算：

$$\theta_0 = \frac{1}{4}\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{(Z_{xx} - Z_{yy})(Z_{xy} + Z_{yx})^* - (Z_{xx} - Z_{yy})^*(Z_{xy} + Z_{yx})}{|Z_{xx} - Z_{yy}|^2 - |Z_{xy} + Z_{yx}|^2}\right]$$

求出主轴方位角θ_0后，由下式计算出主轴阻抗要素：

$$Z'_{xx}=[(Z_{xx}+Z_{yy})+(Z_{xx}-Z_{yy})\cos2\theta_0+(Z_{xy}+Z_{yx})\sin2\theta_0]/2;$$

$$Z'_{xy}=[(Z_{xy}-Z_{yx})+(Z_{xy}+Z_{yx})\cos2\theta_0-(Z_{xx}-Z_{yy})\sin2\theta_0]/2;$$

$$Z'_{yx}=[-(Z_{xy}-Z_{yx})+(Z_{xy}+Z_{yx})\cos2\theta_0-(Z_{xx}-Z_{yy})\sin2\theta_0]/2;$$

$$Z'_{yy}=[(Z_{xx}+Z_{yy})-(Z_{xx}-Z_{yy})\cos2\theta_0-(Z_{xy}+Z_{yx})\sin2\theta_0]/2。$$

⑥ 计算视电阻率。为了便于解释，常把阻抗要素变换成视电阻率：

$$\rho_{ij}=0.2T|Z'_{ij}|^2$$

式中 ij——表示下标xx, xy, yx, yy；

T——周期。

⑦ 计算二维判别指数。目前采用的二维判别指数有二维偏离度S和椭率β，其计算公式分别为：

$$S=\frac{|Z_{xx}+Z_{yy}|}{|Z_{xy}-Z_{yx}|}\qquad\text{(在任意方位上)；}$$

$$\beta=\frac{|Z'_{xx}-Z'_{yy}|}{|Z'_{xy}+Z'_{yx}|}\qquad\text{(在主轴方位上)。}$$

S和β值越小，说明地下构造越接近于二维。

二、程序框图

程序框图见图2-1。

三、程序段选录

1。程序段功能

计算自、互功率谱，测量轴上的阻抗要素，主轴方位角，主轴阻抗要素，视电阻率及二维判别指数。

2。数组说明

HEXY　二维复数组，存放600个频点的E_x, H_x, E_y, H_y场值。

HER1　二维复数组，存放第一种算法（$A^*=H_x^*, B^*=H_y^*$）24个中心周期上的8组自、互功率。

HER2　二维复数组，存放第二种算法（$A^*=E_x^*, B^*=H_x^*$）24个中心周期上的8组自、互功率。

HER3　二维复数组，存放第三种算法（$A^*=E_y^*, B^*=E_y^*$）24个中心周期上的8组自、互功率。

HER4　二维复数组，存放第四种算法（$A^*=E_y^*, B^*=H_y^*$）24个中心周期上的8组自、互功率。

IIER　二维复数组，中间工作单元，最后4行存放主轴阻抗要素。

ZR1　二维复数组，中间工作单元，存放四种算法求得的测量轴阻抗要素。

ZR　二维复数组，存放四种算法得到的测量轴阻抗要素的平均值。

ST　一维实数组，存放主轴方位角。

RO　二组实数组，先存放视电阻率，后存放二维判别指数。

CP　二维实数组，存放全信息矢量相干度。

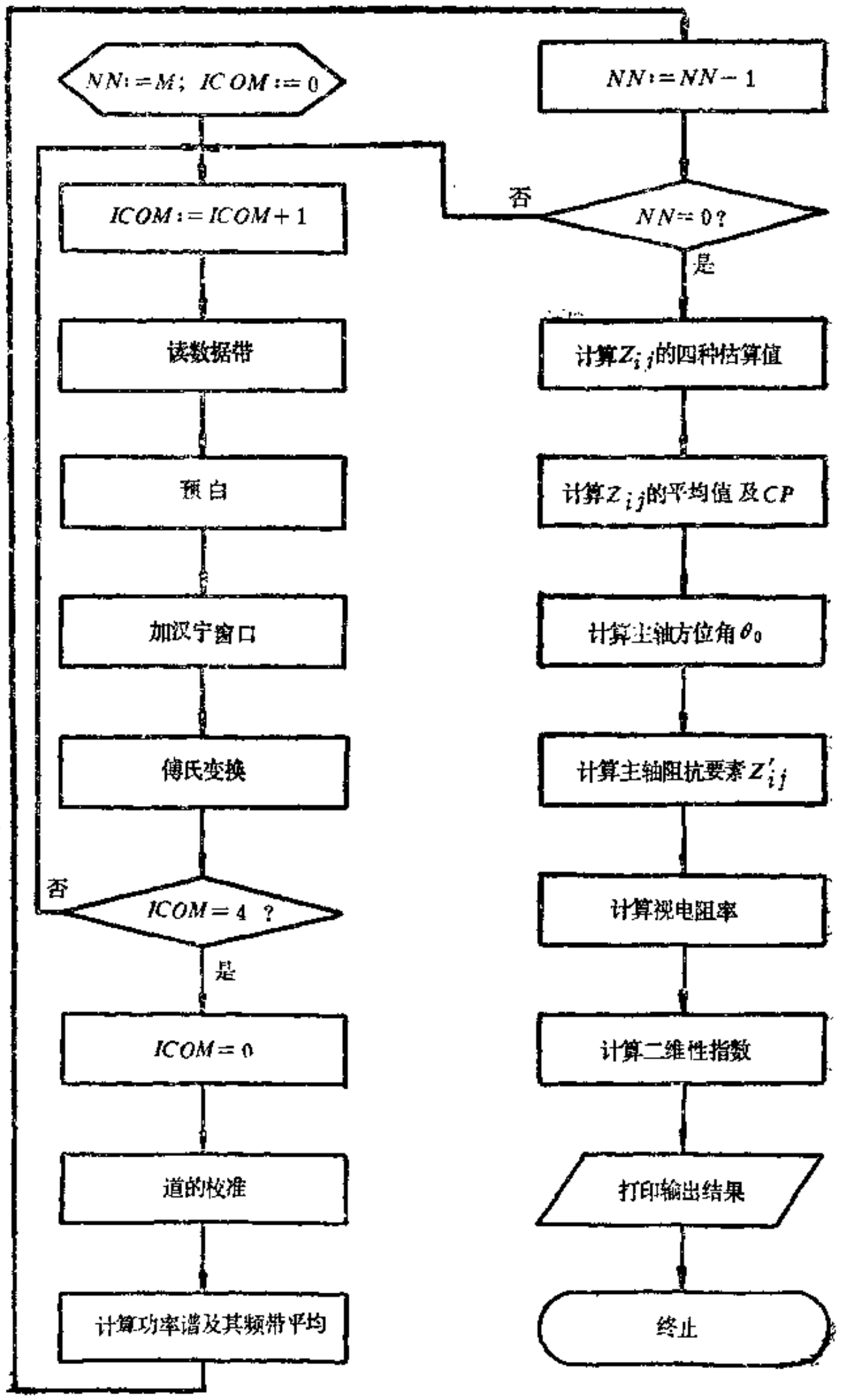


图 2-1　最小二乘法处理程序框图

M——处理记录张数；ICOM—记录道号，道顺序是E_x，H_x，E_y，H_y

T　　一维实数组，存放600个频点的周期值。

Q　　二维实数组，存放四种算法中有几种算法是可行的。

S、Z　　一维实数组，为列表输出使用。

3. 程序

```
      SUBROUTINE DZ
      INTEGER G,C,W,Q(4,24)
      DIMENSION RO(4,24),ST(24),Z(168),S(144),CP(4,24)
      COMPLEX HER,HER1,HER2,HER3,HER4,ZR,ZR1,AR1,AR2,AR3,
     $        AR4,XC1,XC2,XC3,XC4,HEXY
      COMMON /V/ HER1(8,24),HER2(8,24),HER3(8,24),HER4(8,24),NO
      DIMENSION ZR(4,24),ZR1(4,24),HER(8,24)
      COMMON /V1/ HEXY(4,600)
      COMMON /V2/ N1,T(600)
      COMMON /V3/ T1(26,3)
      COMMON /V5/ NN1
      BP=57.29578
      DO 322 J=1,24
322   ST(J)=25.
      IF(NO) 323,335
323   DO 333 I=1,4
      DO 333 J=1,24
333   ZR1(I,J)=ZR(I,J)=(0.,0.)
      DO 334 I=1,8
      DO 334 J=1,24
334   HER1(I,J)=HER2(I,J)=HER3(I,J)=HER4(I,J)=(0.,0.)
335   D=NN1
      DO 399 II=1,4
      GO TO (336,338,340,341) II
336   L1=2  $  L3=4  $  GO TO 342
338   L1=1  $  L3=2  $  GO TO 342
340   L1=1  $  L3=3  $  GO TO 342
341   L1=3  $  L3=4
342   DO 350 I=1,4
342   DO 350 L=1,2
      IF(L.EQ.1) 343,344
343   L2=L1  $  GO TO 345
344   L2=L3
345   DO 350 J=1,24
      XC1=(0.,0.)  $  G=ST(J)
      DO 346 K=1,G
      C=(J-1)*25+K
      XC1=XC1+HEXY(I,C)*CONJG(HEXY(L2,C))
346   CONTINUE
      HER((I-1)*2+L,J)=XC1/G
350   CONTINUE
      GO TO (351,354,357,359) II
351   DO 352 I=1,8
      DO 352 J=1,24
352   HER1(I,J)=HER1(I,J)+HER(I,J)/D
      GO TO 399
354   DO 355 I=1,8
      DO 355 J=1,24
355   HER2(I,J)=HER2(I,J)+HER(I,J)/D
      GO TO 399
357   DO 358 I=1,8
      DO 358 J=1,24
358   HER3(I,J)=HER3(I,J)+HER(I,J)/D
      GO TO 399
359   DO 360 I=1,8
      DO 360 J=1,24
360   HER4(I,J)=HER4(I,J)+HER(I,J)/D
399   CONTINUE
      IF(NN1.NE.1) 900,400
400   WRITE(6,401) ((HER1(I,J),J=1,24),I=1,8)
      WRITE(6,402) ((HER2(I,J),J=1,24),I=1,8)
      WRITE(6,403) ((HER3(I,J),J=1,24),I=1,8)
      WRITE(6,404) ((HER4(I,J),J=1,24),I=1,8)
```

```
401   FORMAT(2X,6H HER1=/8(1X,E12.5))
402   FORMAT(2X,6H HER2=/8(1X,E12.5))
403   FORMAT(2X,6H HER3=/8(1X,E12.5))
404   FORMAT(2X,6H HER4=/8(1X,E12.5))
      DO 410 I=1,4
      DO 410 J=1,24
410   Q(I,J)=4
      DO 541 II=1,4
      GO TO (412,416,419,501) II
412   DO 414 I=1,8
      DO 414 J=1,24
414   HER(I,J)=HER1(I,J)
      GO TO 505
416   DO 417 I=1,8
      DO 417 J=1,24
417   HER(I,J)=HER2(I,J)
      GO TO 505
419   DO 500 I=1,8
      DO 500 J=1,24
500   HER(I,J)=HER3(I,J)
      GO TO 505
501   DO 502 I=1,8
      DO 502 J=1,24
502   HER(I,J)=HER4(I,J)
505   A=1.E+10
      DO 506 I=1,8
      DO 506 J=1,24
506   HER(I,J)=HER(I,J)*A
      DO 525 J=1,24
      AR1=HER(3,J)*HER(8,J)
      AR2=HER(4,J)*HER(7,J)
      D=CABS(AR1-AR2)**2
      D1=0.
      IF(D1.LT.(REAL(HER(3,J))*REAL(HER(8,J)))**2)
     $      D1=(REAL(HER(3,J))*REAL(HER(8,J)))**2
      IF(D1.LT.(AIMAG(HER(3,J))*AIMAG(HER(8,J)))**2)
     $      D1=(AIMAG(HER(3,J))*AIMAG(HER(8,J)))**2
      IF(D1.LT.(REAL(HER(4,J))*REAL(HER(7,J)))**2)
     $      D1=(REAL(HER(4,J))*REAL(HER(7,J)))**2
      IF(D1.LT.(AIMAG(HER(4,J))*AIMAG(HER(7,J)))**2)
     $      D1=(AIMAG(HER(4,J))*AIMAG(HER(7,J)))**2
      IF(D1.LT.(REAL(HER(3,J))*AIMAG(HER(8,J)))**2)
     $      D1=(REAL(HER(3,J))*AIMAG(HER(8,J)))**2
      IF(D1.LT.(AIMAG(HER(3,J))*REAL(HER(8,J)))**2)
     $      D1=(AIMAG(HER(3,J))*REAL(HER(8,J)))**2
      IF(D1.LT.(REAL(HER(4,J))*AIMAG(HER(7,J)))**2)
     $      D1=(REAL(HER(4,J))*AIMAG(HER(7,J)))**2
      IF(D1.LT.(AIMAG(HER(4,J))*REAL(HER(7,J)))**2)
     $      D1=(AIMAG(HER(4,J))*REAL(HER(7,J)))**2
      D1=D1*1.E-4
      IF(D.LT.1.E-31) 507,510
507   WRITE(6,508) J
508   FORMAT(2X,2HJ=,I3)
      DO 509 I=1,4
509   Q(I,J)=Q(I,J)-1
      GO TO 525
510   IF(D.LT.D1) 511,514
511   WRITE(6,512) J
512   FORMAT(2X,3HJJ=,I3)
      DO 513 I=1,4
513   Q(I,J)=Q(I,J)-1
```

```
      GO TO 525
S14   DO 524 I=1,5,4
      DO 524 K=4,8,4
      AR3=HER(I,J)*HER(K,J)
      AR4=HER(I+1,J)*HER(K-1,J)
      IF(I.LT.3) 515,518
515   IF(K.LT.5) 516,517
516   W=2  $  E=-1.  $  GO TO 523
517   W=1  $  E= 1.  $  GO TO 523
518   IF(K.LT.5) 519,520
519   W=4  $  E=-1.  $  GO TO 523
520   W=3  $  E= 1.
523   ZR1(W,J)=(AR3-AR4)/(AR1-AR2)*E
524   CONTINUE
525   CONTINUE
      GO TO (526,529,532,534) II
526   DO 527 I=1,4
      DO 527 J=1,24
527   HER1(I,J)=ZR1(I,J)
      GO TO 540
529   DO 530 I=1,4
      DO 530 J=1,24
530   HER2(I,J)=ZR1(I,J)
      GO TO 540
532   DO 533 I=1,4
      DO 533 J=1,24
533   HER3(I,J)=ZR1(I,J)
      GO TO 540
534   DO 535 I=1,4
      DO 535 J=1,24
535   HER4(I,J)=ZR1(I,J)
540   DO 541 I=1,4
      DO 541 J=1,24
      ZR(I,J)=ZR(I,J)+ZR1(I,J)
      ZR1(I,J)=(0.,0.)
541   CONTINUE
      DO 550 I=1,4
      DO 550 J=1,24
      IF(Q(I,J)) 546,545
545   ZR(I,J)=(0.,0.)
      GO TO 550
546   ZR(I,J)=ZR(I,J)/Q(I,J)
550   CONTINUE
      WRITE(6,551) ((ZR(I,J),J=1,24),I=1,4)
551   FORMAT(2X,4H ZR=/10(2X,F11.3))
      G=25
      DO 600 J=1,24
      DO 600 I=1,4
      IF(Q(I,J)) 554,552
552   CP(I,J)=0.  $  GO TO 600
554   IF(Q(I,J)-1) 556,555
555   CP(I,J)=2.  $  GO TO 600
556   AR1=HER1(I,J)-ZR(I,J)
      AR2=HER2(I,J)-ZR(I,J)
      AR3=HER3(I,J)-ZR(I,J)
      AR4=HER4(I,J)-ZR(I,J)
      A=CABS(AR1)+CABS(AR2)+CABS(AR3)+CABS(AR4)
      B=CABS(ZR(I,J))
      IF(Q(I,J)-2) 558,557
557   A=A-2.*B  $  GO TO 559
558   IF(Q(I,J)-3) 559,858
858   A=A-B
559   A=A/Q(I,J)
      CP(I,J)=1.-A/B
600   CONTINUE
      J1=N1
      DO 610 J=1,24
      S((J-1)*6+1)=T(J*G-12)
      S((J-1)*6+2)=Q(1,J)
```

```
      DO 610 K=1,4
610   S((J-1)*6+2+K)=CP(K,J)
      WRITE(6,611) S
611   FORMAT(5X,*S=*,12F10.5)
      Q=25
      DO 700 J=1,24
      IF(Q(1,J).EQ.0) 612,614
612   ST(J)=0.
      DO 613 I=5,8
613   HER(I,J)=(0.,0.)
      GO TO 700
614   AR1=ZR(1,J)-ZR(4,J)
      AR2=ZR(2,J)+ZR(3,J)
      AR3=ZR(1,J)+ZR(4,J)
      PH=AR1*CONJG(AR2)+AR2*CONJG(AR1)
      PE=CABS(AR1)**2-CABS(AR2)**2
      IF(ABS(PE).GT.1.E-5) GO TO 619
      IF(PH.LT.0.) 616,618
616   FE=-90.  $  GO TO 620
618   FE= 90.  $  GO TO 620
619   FE=ATAN(PH/PE)*BP
620   CONTINUE
      F=0.
      ST(J)=FE/4.
621   FB=FE/(4.*BP)
      FH=COS(2.*FB)
      FE=SIN(2.*FB)
      AR1=ZR(1,J)+ZR(4,J)
      AR2=ZR(1,J)-ZR(4,J)
      AR3=ZR(2,J)+ZR(3,J)
      AR4=ZR(2,J)-ZR(3,J)
      HER(5,J)=(AR1+AR2*FH+AR3*FE)*.5
      HER(6,J)=(AR4+AR3*FH-AR2*FE)*.5
      HER(7,J)=(-AR4+AR3*FH-AR2*FE)*.5
      HER(8,J)=(AR1-AR2*FH-AR3*FE)*.5
      F=F+1.
      IF(F.LT.2.5) 622,700
622   F2=(CABS(HER(5,J)))**2+CABS(HER(8,J)))**2
      IF(F.LT.1.5) 623,626
623   F1=F2
      IF(ST(J).LT.0.) 624,625
624   FE=ST(J)*4.+180.  $  GO TO 621
625   FE=ST(J)*4.-180.  $  GO TO 621
626   IF(F2.LT.F1) 627,628
627   ST(J)=FB*BP  $  GO TO 700
628   FE=ST(J)*4.  $  GO TO 621
700   CONTINUE
      WRITE(6,631) ((HER(I,J),J=1,24),I=5,8)
631   FORMAT(2X,5H HER=/10(1X,F12.5))
      DO 632 I=1,4
      DO 632 J=1,24
632   RO(I,J)=.2*T(J*G-12)*CABS(HER(I+4,J))**2
      DO 640 J=1,24
      Z((J-1)*7+1)=T(J*G-12)
      Z((J-1)*7+2)=Q(1,J)
      Z((J-1)*7+3)=ST(J)
      DO 635 K=1,4
635   Z((J-1)*7+3+K)=RO(K,J)
640   CONTINUE
      WRITE(6,641) Z
641   FORMAT(2X,2HZ=/7(3X,F10.3))
```

```
      DO 650 J=1,24
       AR1=ZR(1,J)+ZR(4,J)
       AR2=ZR(2,J)-ZR(3,J)
       A=CABS(AR1)
       B=CABS(AR2)
       IF(B.LT.1.E-5) 643,645
643    RO(1,J)=1.E+5  $  GO TO 646
645    RO(1,J)=A/B
646    AR3=HER(5,J)-HER(8,J)
       AR4=HER(6,J)+HER(7;J)
       A=CABS(AR3)
       B=CABS(AR4)
       IF(B.LT.1.E-5) 647,648
647    RO(2,J)=1.E+5  $  GO TO 650
648    RO(2,J)=A/B
650    CONTINUE
       WRITE(6,660) RO
660    FORMAT(2X,3HRO=/10(1X,F12.4))
900    CONTINUE
       RETURN
       END
```

四、处理结果实例

最小二乘法是经过长期实践检验的传统处理方法，尽管在研究和评价其他处理方法的效果时，常与最小二乘法的处理结果做比较，但在实际资料处理中，仍然广泛、普遍地采用最小二乘法。

自1980年国产SD-Ⅰ型数字大地电磁测深仪投入野外试验后，先后在河北、内蒙及湖南等地作过一些工作。这里仅给出内蒙二连地区三个测点上的处理结果。

三个测点分别位于相邻的三个不同的构造单元上。MT1号测点位于凹陷中部的地质参数井旁，MT2和MT3号测点分别位于该凹陷北、南两侧的凸起上。以往在该区作过直流电测深工作，邻近一条测线的解释成果见图 2-2。在凹陷中部，电法标誌层顶面埋藏深度约

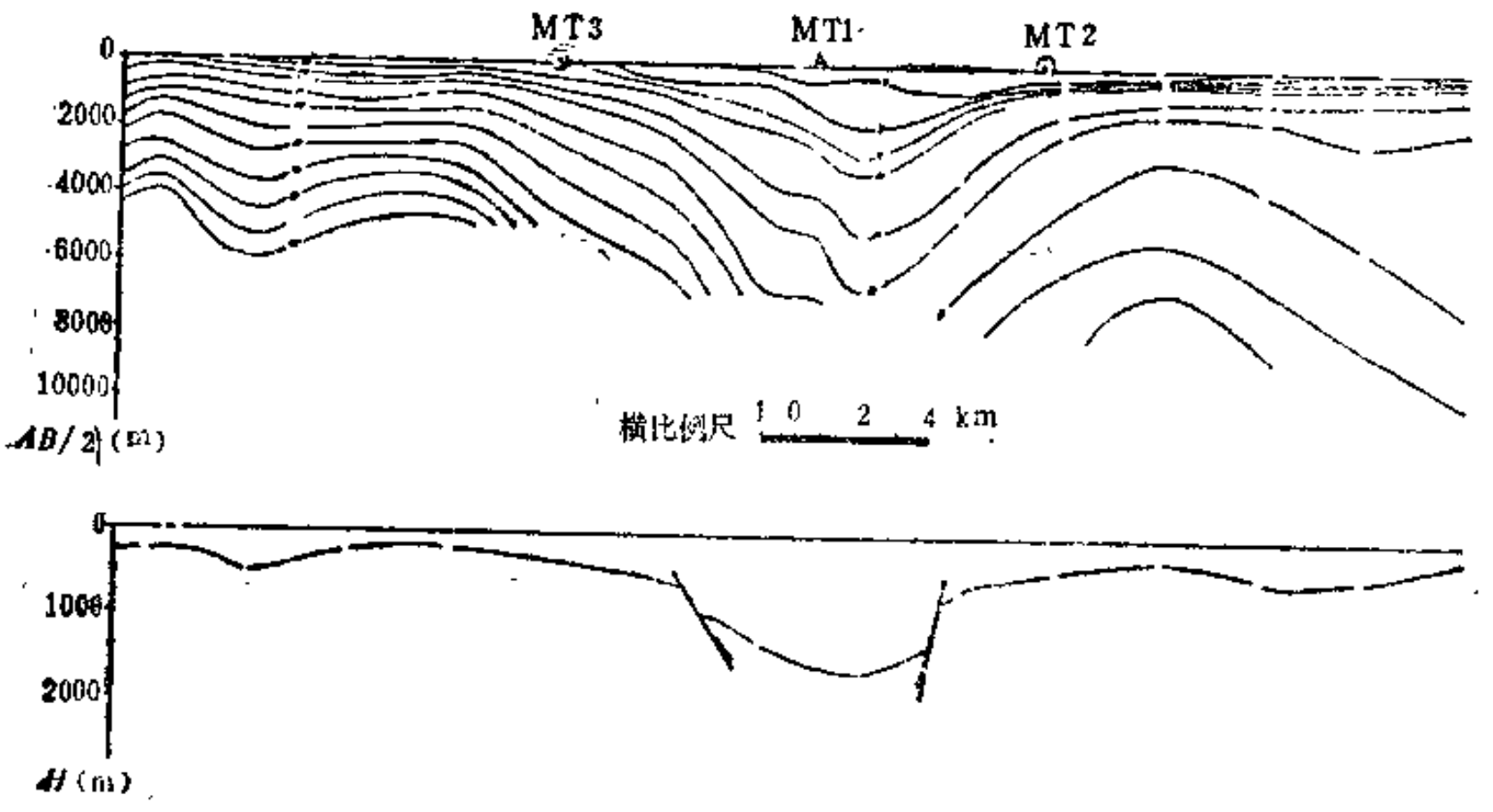


图 2-2　内蒙二连地区直流电测深剖面成果图

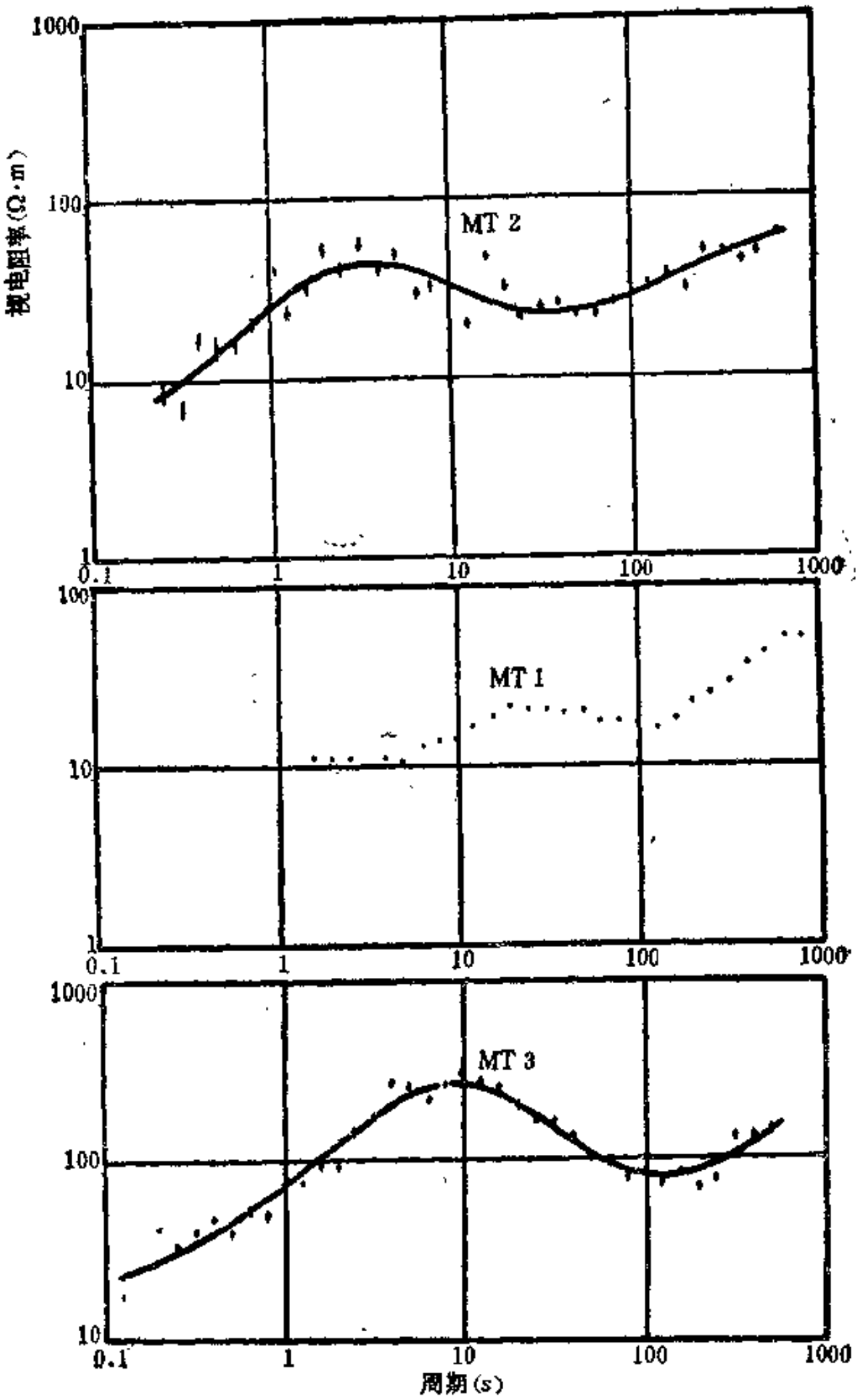


图 2-3　内蒙二连地区大地电磁测深曲线

为1600米，与钻井地层对比，大致相当于侏罗系上部地层。因受高电阻层屏蔽，直流电测深无法提供更深的资料。三个测点上用最小二乘法处理得到的大地电磁测深曲线（电场平行于构造走向的）示于图2-3。经过自动反演解释得到的电剖面见图2-4，可以看到，大地电磁测深资料不仅给出凹陷和凸起的形态，而且给出深层的资料。在后面的章节中，我们还将给出这一解释结果与钻井中电测井资料的对比情况。

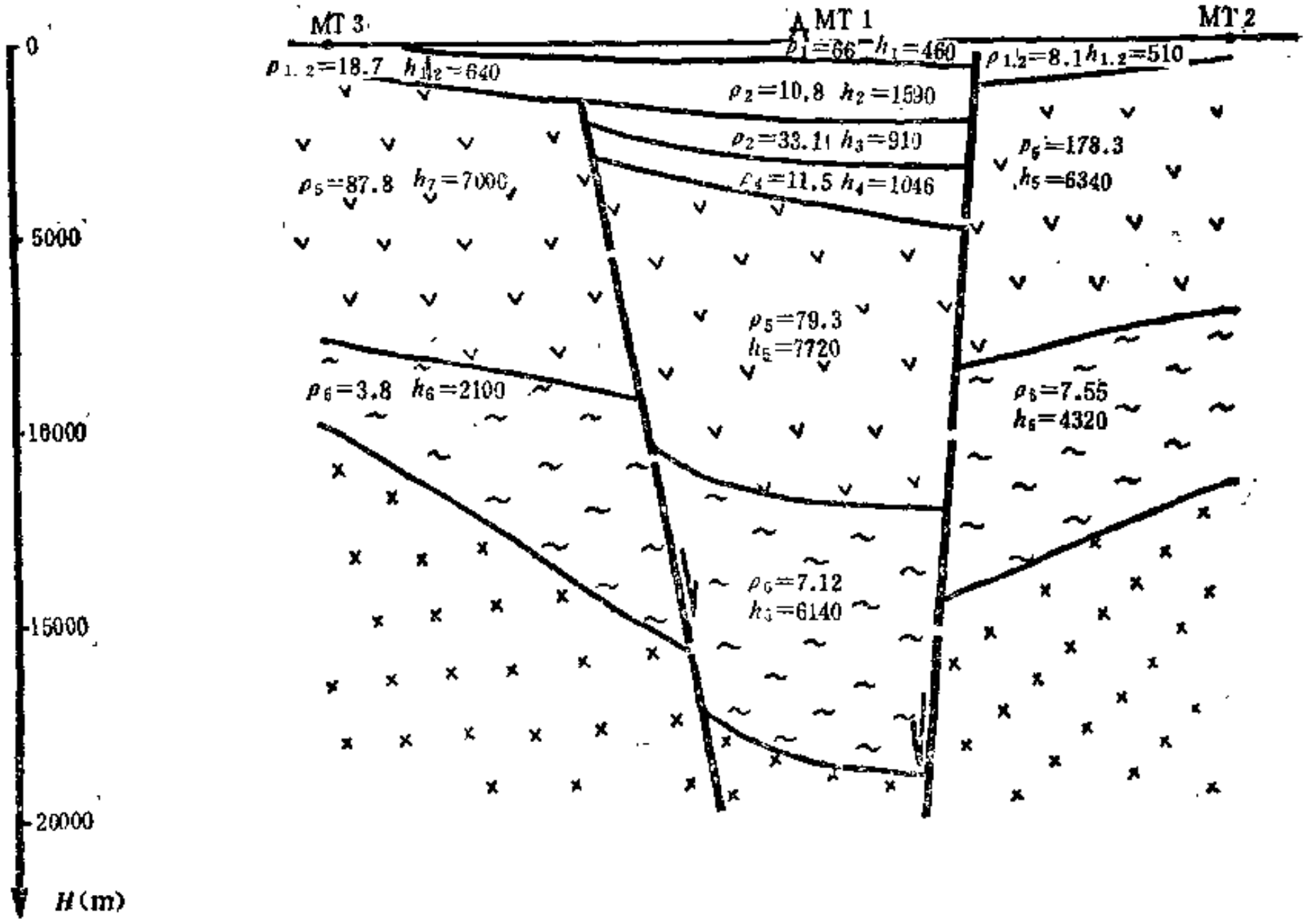


图 2-4 内蒙二连地区大地电磁测深解释剖面

第四节 抑制随机噪声影响的几种处理方法

一、噪声分类

从资料处理的角度来说，噪声可以分为两类。一类是不相关噪声，即噪声与信号无关，道与道之间的噪声也无关；另一类是相关噪声，即道与道之间的噪声相关或噪声与信号相关。

当大地电磁资料中存在噪声时，观测的电磁场分量是信号与噪声的和：

$$E_x = E_{xs} + E_{xn}, \qquad E_y = E_{ys} + E_{yn},$$
$$H_x = H_{xs} + H_{xn}, \qquad H_y = H_{ys} + H_{yn}。$$

由(2—4)至(2—7)式可以看出，阻抗要素是由互功率谱 $\langle E_xH_x^*\rangle$、$\langle E_xH_y^*\rangle$、……及自功率谱 $\langle E_xE_x^*\rangle$、$\langle E_yE_y^*\rangle$、……等计算出来的。现在讨论噪声对自、互功率谱的影响。以 $\langle E_xH_y^*\rangle$ 为例，有噪声时：

$$\langle E_xH_y^*\rangle = \langle (E_{xs} + E_{xn})(H_{y}^* + H_{yn}^*)\rangle$$
$$= \langle E_{xs}H_{ys}^*\rangle + \langle E_{xs}H_{yn}^*\rangle + \langle E_{xn}H_{ys}^*\rangle + \langle E_{xn}H_{yn}^*\rangle$$

如果噪声是不相关噪声，当数据组数足够多时，由于各道噪声之间不相关，噪声与信号之间也不相关，故上式中：

$$\langle E_{xs}H_{yn}^*\rangle = \langle E_{xn}H_{ys}^*\rangle = \langle E_{xn}H_{yn}^*\rangle = 0$$

因此有：

$$\langle E_x H_y^* \rangle = \langle E_{xs} H_{yt}^* \rangle$$

上式说明互功率估算值不受不相关噪声的影响。

再以$\langle E_x E_x^* \rangle$为例，这时：

$$\langle E_x E_x^* \rangle = \langle (E_{xs} + E_{xn})(E_{xs}^* + E_{xn}^*) \rangle$$
$$= \langle E_{xs} E_{xs}^* \rangle + \langle E_{xs} E_{xn}^* \rangle + \langle E_{xn} E_{xs}^* \rangle + \langle E_{xn} E_{xn}^* \rangle$$

对于不相关噪声，上式中：

$$\langle E_{xs} E_{xn}^* \rangle = \langle E_{xn} E_{xs}^* \rangle = 0$$

因此有：

$$\langle E_x E_x^* \rangle = \langle E_{xs} E_{xs}^* \rangle + \langle E_{xn} E_{xn}^* \rangle$$

可见自功率估算值受不相关噪声的影响而偏离真值。

显然，如果有相关噪声存在时，用单站观测记录是不能求得准确的自、互功率谱估算值的。

二、克服不相关噪声影响的几种处理方法

1. 互功率处理方法

从关于噪声影响的讨论可以看出，不相关噪声只对自功率的估算有影响，对互功率的影响不大。显然，如果能建立一种或几种只用互功率谱计算阻抗要素的方法，便能在一定程度上消除不相关噪声的影响。互功率法就是根据这种思想提出来的。

用E_x^*、E_y^*、H_x^*、H_y^*分别乘（1－43)式，并取 n组数据平均，可得下述八个方程式：

$$\langle E_x E_x^* \rangle = Z_{xx} \langle H_x E_x^* \rangle + Z_{xy} \langle H_y E_x^* \rangle$$
$$\langle E_x E_y^* \rangle = Z_{xx} \langle H_x E_y^* \rangle + Z_{xy} \langle H_y E_y^* \rangle$$
$$\langle E_x H_x^* \rangle = Z_{xx} \langle H_x H_x^* \rangle + Z_{xy} \langle H_y H_x^* \rangle$$
$$\langle E_x H_y^* \rangle = Z_{xx} \langle H_x H_y^* \rangle + Z_{xy} \langle H_y H_y^* \rangle$$
$$\langle E_y E_x^* \rangle = Z_{yx} \langle H_x E_x^* \rangle + Z_{yy} \langle H_y E_x^* \rangle$$
$$\langle E_y E_y^* \rangle = Z_{yx} \langle H_x E_y^* \rangle + Z_{yy} \langle H_y E_y^* \rangle$$
$$\langle E_y H_x^* \rangle = Z_{yx} \langle H_x H_x^* \rangle + Z_{yy} \langle H_y H_x^* \rangle$$
$$\langle E_y H_y^* \rangle = Z_{yx} \langle H_x H_y^* \rangle + Z_{yy} \langle H_y H_y^* \rangle$$

在这八个方程式中，有四个阻抗要素和四个自功率项，其余均为互功率项。因此可以用这八个方程对四个阻抗要素和四个自功率求解，得到全部用互功率谱表示的计算阻抗要素的表达式。

令
$$a = \langle E_x E_y^* \rangle, \quad b = \langle E_x H_x^* \rangle, \quad c = \langle E_x H_y^* \rangle,$$
$$d = \langle E_y H_x^* \rangle, \quad e = \langle E_y H_y^* \rangle, \quad f = \langle H_x H_y^* \rangle.$$

四个自功率谱的解为：

$$\langle H_y H_y^* \rangle = u[1 \pm (1 + W/u^2)^{1/2}] \qquad (2—9)$$

式中

$$u = \frac{I_m[d^* c^* e b + a^*(d^* c f^* + e^* b f)]}{2 I_m(d^* b a^*)}$$

$$W = \frac{-\{I_m[e c^*(d^* c f^* + e^* b f)] + |f|^2 I_m(e^* c a^*)\}}{I_m(d^* b a^*)}$$

$$\langle H_xH_x^*\rangle = \frac{1}{I_m(e^*ca^*)}\{-I_m(d^*ba^*)\langle H_yH_y^*\rangle + I_m[a^*(d^*cf^* + e^*bf)]\}$$

$$\langle E_xE_x^*\rangle = [|c|^2\langle H_xH_x^*\rangle + |b|^2\langle H_yH_y^*\rangle - 2R_e(e^*bf)]/D$$

$$\langle E_yE_y^*\rangle = [|e|^2\langle H_xH_x^*\rangle + |d|^2\langle H_yH_y^*\rangle - 2R_e(e^*fd)]/D$$

式中

$$D = \langle H_xH_x^*\rangle\langle H_yH_y^*\rangle - |f|^2$$

阻抗要素的解为：

$$Z_{xx} = (b\langle H_yH_y^*\rangle - cf^*)/D$$

$$Z_{xy} = (c\langle H_xH_x^*\rangle - bf)/D$$

$$Z_{yx} = (d\langle H_yH_y^*\rangle - ef^*)/D$$

$$Z_{yy} = (e\langle H_xH_x^*\rangle - fd)/D$$

确定（2—9）式中正负符号的准则为：

① 用两种符号计算所有的自功率，如果一种符号计算出来的自功率全是正的，而另一种符号导致出现一个或多个负的自功率，则取前一种符号；如果两种符号都导致出现一个或几个负的自功率，则舍弃这些资料。

② 如果两种符号计算出的自功率都是正的，就用两种符号进一步计算比值$\langle E_xE_x^*\rangle_c/\langle E_xE_x^*\rangle_m$，$\langle E_yE_y^*\rangle_c/\langle E_yE_y^*\rangle_m$，$\langle H_xH_x^*\rangle_c/\langle H_xH_x^*\rangle_m$，$\langle H_yH_y^*\rangle_c/\langle H_yH_y^*\rangle_m$的对数的绝对值，下标$c$和$m$分别表示计算和测量的量。产生最小值的符号被认为是正确的。

③ 如果计算的自功率比测量的自功率高得多，则说明噪声造成了显著的误差。可以适当选择一个截止值$S(\geqslant 1)$，将上述比值大于S的资料舍弃。S取得越接近1，计算的阻抗要素越精确，但能达到标准的资料就更少了。

2．加权平均互功率处理方法

这是通过另一种途径使计算阻抗要素的公式中不含自功率项。

用$A^* = \rho E_y^*$和$B^* = \eta E_y^*$分别乘（1—43）式中的第一个方程式，用$C^* = \mu E_x^*$和$D^* = \nu E_x^*$分别乘（1—43）式中的第二个方程式，n组数据平均后得：

$$\langle E_xA^*\rangle = Z_{xx}\langle H_xA^*\rangle + Z_{xy}\langle H_yA^*\rangle$$

$$\langle E_xB^*\rangle = Z_{xx}\langle H_xB^*\rangle + Z_{xy}\langle H_yB^*\rangle$$

$$\langle E_yC^*\rangle = Z_{yx}\langle H_xC^*\rangle + Z_{yy}\langle H_yC^*\rangle$$

$$\langle E_yD^*\rangle = Z_{yx}\langle H_xC^*\rangle + Z_{yy}\langle H_yD^*\rangle$$

解上述方程组，可得计算阻抗要素的公式如下：

$$Z_{xx} = \frac{\langle E_xA^*\rangle\langle H_yB^*\rangle - \langle H_yA^*\rangle\langle E_xB^*\rangle}{\langle H_xA^*\rangle\langle H_yB^*\rangle - \langle H_xB^*\rangle\langle H_yA^*\rangle}$$

$$Z_{xy} = \frac{\langle H_xA^*\rangle\langle E_xB^*\rangle - \langle H_xB^*\rangle\langle E_xA^*\rangle}{\langle H_xA^*\rangle\langle H_yB^*\rangle - \langle H_xB^*\rangle\langle H_yA^*\rangle}$$

$$Z_{yx} = \frac{\langle E_yC^*\rangle\langle H_yD^*\rangle - \langle H_yC^*\rangle\langle E_yD^*\rangle}{\langle H_xC^*\rangle\langle H_yD^*\rangle - \langle H_xD^*\rangle\langle H_yC^*\rangle}$$

$$Z_{yy} = \frac{\langle H_xC^*\rangle\langle E_yD^*\rangle - \langle H_xD^*\rangle\langle E_yC^*\rangle}{\langle H_xC^*\rangle\langle H_yD^*\rangle - \langle H_xD^*\rangle\langle H_yC^*\rangle}$$

式中$\langle E_xA^*\rangle = \langle \rho E_xE_y^*\rangle$，……等项是带权函数$\rho$（或$\eta, \mu, \nu$）的互功率，因此把这种方法称

为加权互功率法。适当选择权函数 ρ, η, μ, ν 可以使上述公式中不含自功率项。例如可用下述三种取值：

① $\rho=1$，$\eta=H_xE_y^*$，$\mu=1$，$\nu=H_xE_x^*$；

② $\rho=1$，$\eta=H_yE_y^*$，$\mu=1$，$\nu=H_yE_x^*$；

③ $\rho=H_xE_y^*$，$\eta=H_yE_y^*$，$\mu=H_xE_x^*$，$\nu=H_yE_x^*$。

互功率法和加权互功率法对于消除不相关噪声的影响是有理论依据的，不过这种方法也有一定的局限性，即当地下构造是一维情况或虽为二维情况但测量方位与构造走向一致时，它是无解的。以方程式：

$$\langle E_xA^*\rangle = Z_{xx}\langle H_xA^*\rangle + Z_{xy}\langle H_yA^*\rangle$$

为例，这时$Z_{xx}=0$，若取$A^*=E_y^*$(即$\rho=1$)，上式变成：

$$\langle E_xE_y^*\rangle = Z_{xy}\langle H_yE_y^*\rangle$$

在所述条件下，H_y与E_y无关，故$\langle H_yE_y^*\rangle=0$，导致上式无解，即该方法不适用于这种情况。

3．带参考道的互功率处理方法

为了克服前述两种互功率法的局限性，提出了带参考道的办法，即在原测量座标系中再增加一个参考道记录。增加的参考道可以是电场信号，也可以是磁场信号的记录，我们以磁参考道记录H_r为例。

将基本关系式（1—43）改写成导纳形式：

$$H_x=G_{xx}E_x+G_{xy}E_y \tag{2—10}$$

$$H_y=G_{yx}E_x+G_{yy}E_y \tag{2—11}$$

用H_r^*和H_y^*分别乘（2—10）式，用H_r^*和H_x^*分别乘（2—11）式，取n组数据平均，可得：

$$\langle H_xH_r^*\rangle = G_{xx}\langle E_xH_r^*\rangle + G_{xy}\langle E_yH_r^*\rangle \tag{2—12}$$

$$\langle H_xH_y^*\rangle = G_{xx}\langle E_xH_y^*\rangle + G_{xy}\langle E_yH_y^*\rangle \tag{2—13}$$

$$\langle H_yH_r^*\rangle = G_{yx}\langle E_xH_r^*\rangle + G_{yy}\langle E_yH_r^*\rangle \tag{2—14}$$

$$\langle H_yH_x^*\rangle = G_{yx}\langle E_xH_x^*\rangle + G_{yy}\langle E_yH_x^*\rangle \tag{2—15}$$

解上述方程组即可得到不含自功率项的导纳要素。阻抗要素可以由导纳要素换算出来，换算公式为：

$$Z_{xx}=G_{yy}/(G_{xx}G_{yy}-G_{xy}G_{yx})$$

$$Z_{xy}=-G_{xy}/(G_{xx}G_{yy}-G_{xy}G_{yx})$$

$$Z_{yx}=-G_{yx}/(G_{xx}G_{yy}-G_{xy}G_{yx})$$

$$Z_{yy}=G_{xx}/(G_{xx}G_{yy}-G_{xy}G_{yx})$$

为了充分发挥参考道技术的优越性，在算法上作了一些扩充，建立了两种带参考道的互功率处理方法。

（1）参考道互功率法 I

对于四个场分量 E_x, E_y, H_x, H_y 而言，每两个一组可以有六种组合。若用A、B表示其中任意两个分量，用P、Q表示另两个分量，用R表示参考道测量，则基本关系式可以写成更一般的形式：

$$A=T_{xx}P+T_{xy}Q \tag{2—16}$$

$$B=T_{yx}P+T_{yy}Q \tag{2—17}$$

暂时称T_{ij}为“中间关系系数”。用R^*和B^*分别乘(2—16)式，用R^*和A^*分别乘(2—17)式，取n组数据平均，可得：

$$\langle AR^*\rangle = T_{xx}\langle PR^*\rangle + T_{xy}\langle QR^*\rangle$$
$$\langle AB^*\rangle = T_{xx}\langle PB^*\rangle + T_{xy}\langle QB^*\rangle$$
$$\langle BR^*\rangle = T_{yx}\langle PR^*\rangle + T_{yy}\langle QR^*\rangle$$
$$\langle BA^*\rangle = T_{yx}\langle PA^*\rangle + T_{yy}\langle QA^*\rangle$$

解上述方程组，得：

$$T_{xx} = \frac{\langle AR^*\rangle\langle QB^*\rangle - \langle AB^*\rangle\langle QR^*\rangle}{\langle PR^*\rangle\langle QB^*\rangle - \langle PB^*\rangle\langle QR^*\rangle}$$

$$T_{xy} = \frac{\langle PR^*\rangle\langle AB^*\rangle - \langle PB^*\rangle\langle AR^*\rangle}{\langle PR^*\rangle\langle QB^*\rangle - \langle PB^*\rangle\langle QR^*\rangle}$$

$$T_{yx} = \frac{\langle BR^*\rangle\langle QA^*\rangle - \langle BA^*\rangle\langle QR^*\rangle}{\langle PR^*\rangle\langle QA^*\rangle - \langle PA^*\rangle\langle QR^*\rangle}$$

$$T_{yy} = \frac{\langle PR^*\rangle\langle BA^*\rangle - \langle PA^*\rangle\langle BR^*\rangle}{\langle PR^*\rangle\langle QA^*\rangle - \langle PA^*\rangle\langle QR^*\rangle}$$

T_{ij}完全由互功率项表示。

式中A、B、P、Q可以有六种取值，从而得到六种不同的“中间关系系数”T_{ij}的估计值。当取：

$$A = E_x,\ B = E_y,\ P = H_x,\ Q = H_y,\ R = H_r$$

时，由（2—16）、（2—17）式可以看出，这时T_{ij}就是阻抗要素Z_{ij}；当取：

$$A = H_x,\ B = H_y,\ P = E_x,\ Q = E_y,\ R = H_r$$

时，这时T_{ij}就是导纳要素G_{ij}，经过变换就可得到阻抗要素；当取：

$$A = E_x,\ B = H_x,\ P = E_y,\ Q = H_y,\ R = H_r$$

时，代入（2—16）、（2—17）式，经过整理后可得：

$$E_x = \frac{T_{xx}}{T_{yx}}H_x + \left(T_{xy} - \frac{T_{xx}T_{yy}}{T_{yx}}\right)H_y$$

$$E_y = \frac{1}{T_{yx}}H_x + \left(-\frac{T_{yy}}{T_{yx}}\right)H_y$$

由此可得：

$$Z_{xx} = \frac{T_{xx}}{T_{yx}}\quad ,\qquad Z_{xy} = T_{xy} - \frac{T_{xx}T_{yy}}{T_{yx}},$$

$$Z_{yx} = \frac{1}{T_{yx}}\quad ,\qquad Z_{yy} = -\frac{T_{yy}}{T_{yx}}。$$

经过类似的推导，可以得到其他三种取值时由T_{ij}计算出的Z_{ij}的表达式。现将推导结果统一列入表2-1中。

（2）参考道互功率方法Ⅱ

这是把参考道方法与加权互功率法相结合而建立起来的处理方法。取权函数ρ、η、μ、ν为下述三组值：

① $\rho = 1,\ \eta = E_xH_y^*,\ \mu = 1,\ \nu = E_xH_x^*;$

表 2-1　由 T_{ij} 计算 Z_{ij} 的表达式

	A	B	P	Q	K	Z_{xx}	Z_{xy}	Z_{yx}	Z_{yy}
1	E_x	E_y	H_x	H_y	H_r	T_{xx}	T_{xy}	T_{yx}	T_{yy}
2	H_x	H_y	E_x	E_y	H_r	$\dfrac{T_{yy}}{T_{xx}T_{yy}-T_{yx}T_{xy}}$	$\dfrac{-T_{xy}}{T_{xx}T_{yy}-T_{yx}T_{xy}}$	$\dfrac{-T_{yx}}{T_{xx}T_{yy}-T_{yx}T_{xy}}$	$\dfrac{T_{xx}}{T_{xx}T_{yy}-T_{yx}T_{xy}}$
3	E_x	H_x	E_y	H_y	H_r	$\dfrac{T_{xx}}{T_{yx}}$	$T_{xy}-\dfrac{T_{xx}T_{yy}}{T_{yx}}$	$\dfrac{1}{T_{yx}}$	$\dfrac{-T_{yy}}{T_{yx}}$
4	E_x	H_y	E_y	H_x	H_r	$T_{xy}-\dfrac{T_{xx}T_{yy}}{T_{yx}}$	$\dfrac{T_{xx}}{T_{yx}}$	$\dfrac{-T_{yy}}{T_{yx}}$	$\dfrac{1}{T_{yx}}$
5	E_y	H_x	E_x	H_y	H_r	$\dfrac{1}{T_{yx}}$	$\dfrac{-T_{yy}}{T_{yx}}$	$\dfrac{T_{xx}}{T_{yx}}$	$T_{xy}-\dfrac{T_{xx}T_{yy}}{T_{yx}}$
6	E_y	H_y	E_x	H_x	H_r	$\dfrac{-T_{yy}}{T_{yx}}$	$\dfrac{1}{T_{yx}}$	$T_{xy}-\dfrac{T_{xx}T_{yy}}{T_{yx}}$	$\dfrac{T_{xx}}{T_{yx}}$

② $\rho=1$，$\eta=E_yH_y^*$，$\mu=1$，$\nu=E_yH_x^*$；

③ $\rho=E_xH_y^*$，$\eta=E_yH_y^*$，$\mu=E_xH_x^*$，$\nu=E_yH_x^*$。

根据（2—12）和（2—14）式，可以得到下述四个方程式：

$$\langle H_xH_r^*\rho^*\rangle=G_{xx}\langle E_xH_r^*\rho^*\rangle+G_{xy}\langle E_yH_r^*\rho^*\rangle$$

$$\langle H_xH_r^*\eta^*\rangle=G_{xx}\langle E_xH_r^*\eta^*\rangle+G_{xy}\langle E_yH_r^*\eta^*\rangle$$

$$\langle H_yH_r^*\mu^*\rangle=G_{yx}\langle E_xH_r^*\mu^*\rangle+G_{yy}\langle E_yH_r^*\mu^*\rangle$$

$$\langle H_yH_r^*\nu^*\rangle=G_{yx}\langle E_xH_r^*\nu^*\rangle+G_{yy}\langle E_yH_r^*\nu^*\rangle$$

解上述方程组，得导纳要素的解为：

$$G_{xx}=\frac{\langle H_xH_r^*\rho^*\rangle\langle E_yH_r^*\eta^*\rangle-\langle H_xH_r^*\eta^*\rangle\langle E_yH_r^*\rho^*\rangle}{\langle E_xH_r^*\rho^*\rangle\langle E_yH_r^*\eta^*\rangle-\langle E_xH_r^*\eta^*\rangle\langle E_yH_r^*\rho^*\rangle}$$

$$G_{xy}=\frac{\langle H_xH_r^*\eta^*\rangle\langle E_xH_r^*\rho^*\rangle-\langle H_xH_r^*\rho^*\rangle\langle E_xH_r^*\eta^*\rangle}{\langle E_xH_r^*\rho^*\rangle\langle E_yH_r^*\eta^*\rangle-\langle E_xH_r^*\eta^*\rangle\langle E_yH_r^*\rho^*\rangle}$$

$$G_{yx}=\frac{\langle H_yH_r^*\mu^*\rangle\langle E_yH_r^*\nu^*\rangle-\langle H_yH_r^*\nu^*\rangle\langle E_yH_r^*\mu^*\rangle}{\langle E_xH_r^*\mu^*\rangle\langle E_yH_r^*\nu^*\rangle-\langle E_xH_r^*\nu^*\rangle\langle E_yH_r^*\mu^*\rangle}$$

$$G_{yy}=\frac{\langle H_yH_r^*\nu^*\rangle\langle E_xH_r^*\mu^*\rangle-\langle H_yH_r^*\mu^*\rangle\langle E_xH_r^*\nu^*\rangle}{\langle E_xH_r^*\mu^*\rangle\langle E_yH_r^*\nu^*\rangle-\langle E_xH_r^*\nu^*\rangle\langle E_yH_r^*\mu^*\rangle}$$

再经变换，便可得到阻抗要素Z_{ij}。

三、程 序 框 图

互功率和加权互功率这两种算法合编在同一个处理程序中，其框图见图 2-5。图中符号M及$ICOM$的含义与图2-1中的相同；符号I可取值 1，2，3，分别表示三种不同的权函数。

带参考道的互功率处理程序框图见图2-6，符号I可取值 1 和 2，分别表示文中介绍的参考道互功率方法 I 和方法 II。

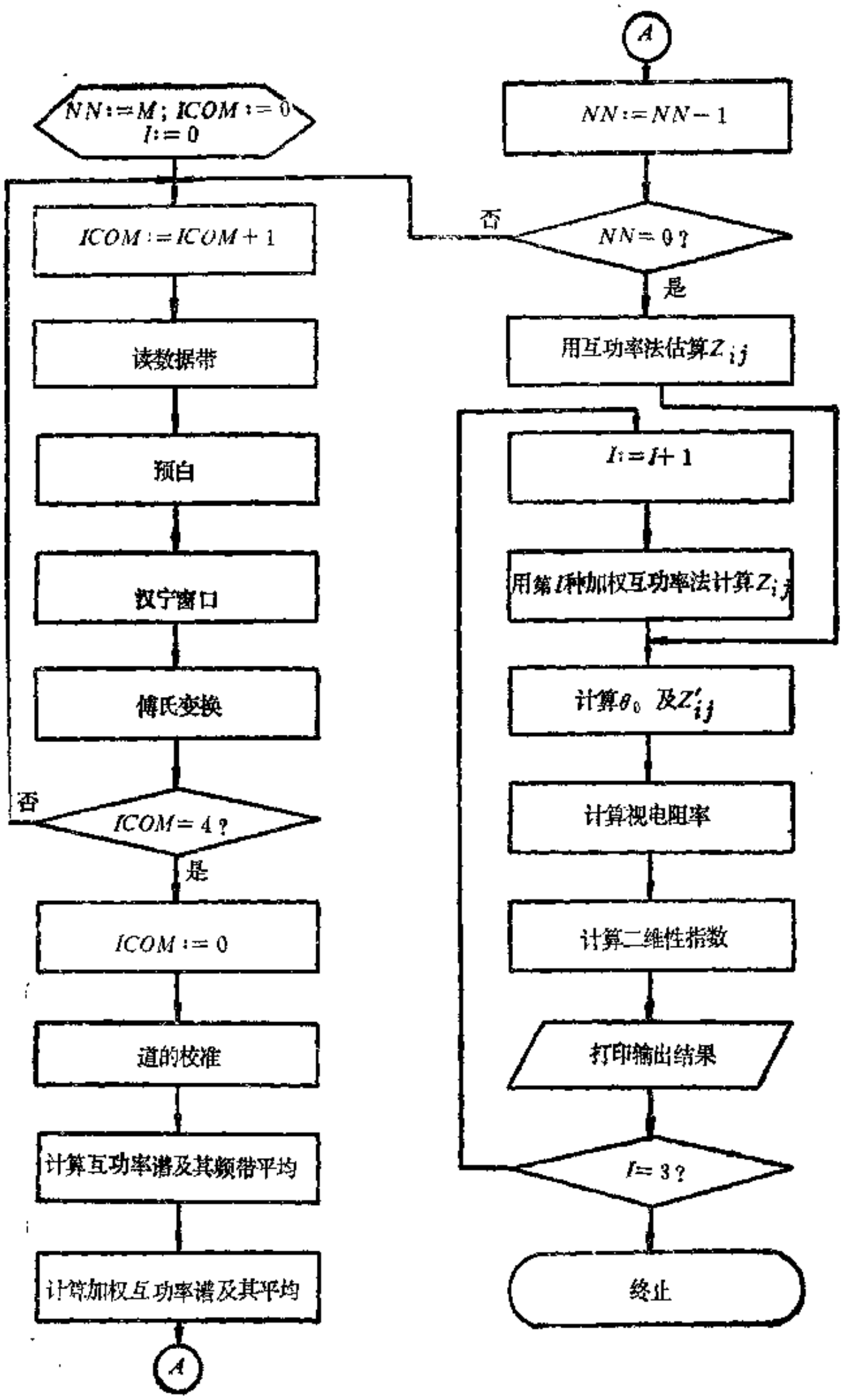


图 2-5　互功率、加权互功率处理程序框图

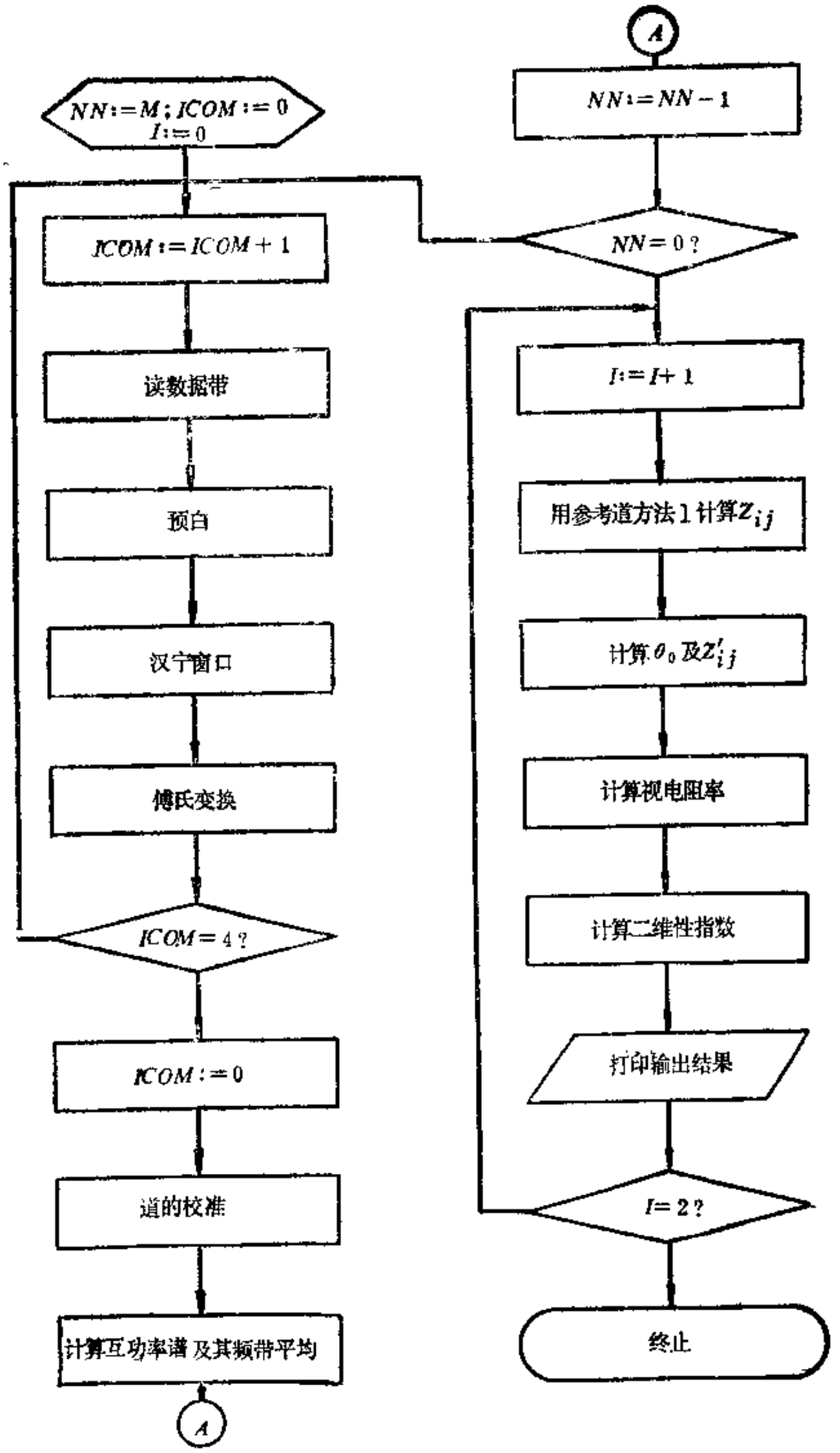


图 2-6　参考道互功率处理程序框图

四、处理结果实例

以内蒙二连地区MT1号测点为例，互功率法的处理结果见图 2-7，最小二乘法的处理结果见图2-8。为了醒目，用竖线给出各频点视电阻率数据的分布范围。从图中可以看到，互功率法仅在周期为0.25秒处未取得数据，而最小二乘法用CP相干度大于或等于0.5筛选数据后，在周期为0.16,0.25,0.65及0.8秒处无数据。就视电阻率数据的分散性来看，在周期为1.6～12.5秒区间上，互功率法的数据优于最小二乘法的数据；而在周期16秒以后，最小二乘法优于互功率法。

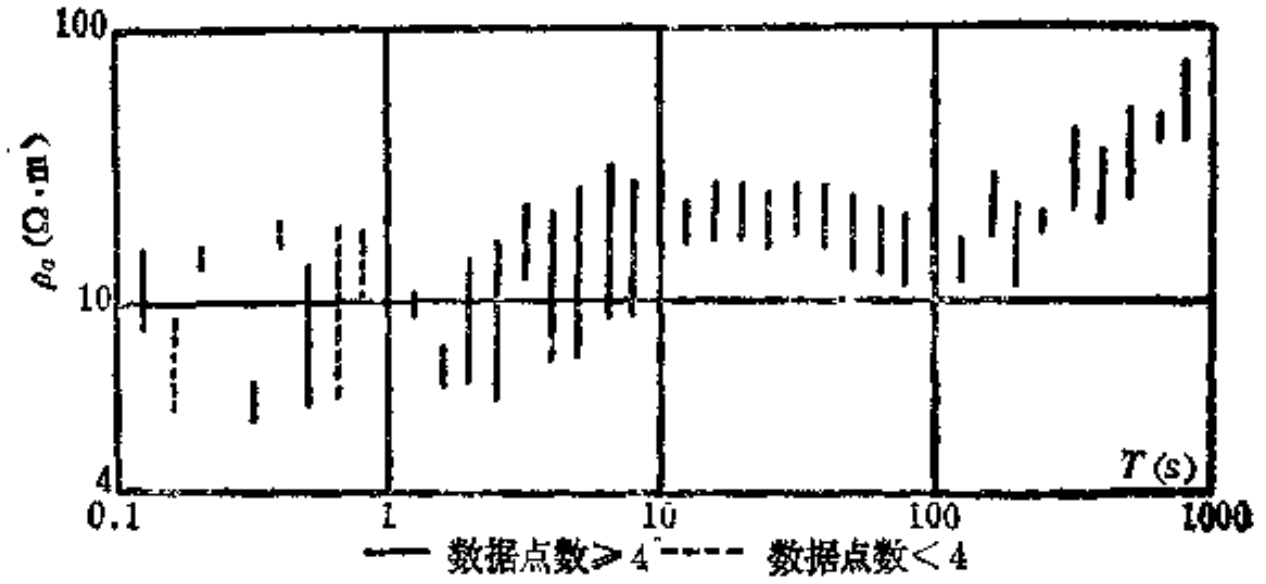


图 2-7　内蒙二连MT1ρ_{yx}曲线(互功率法)

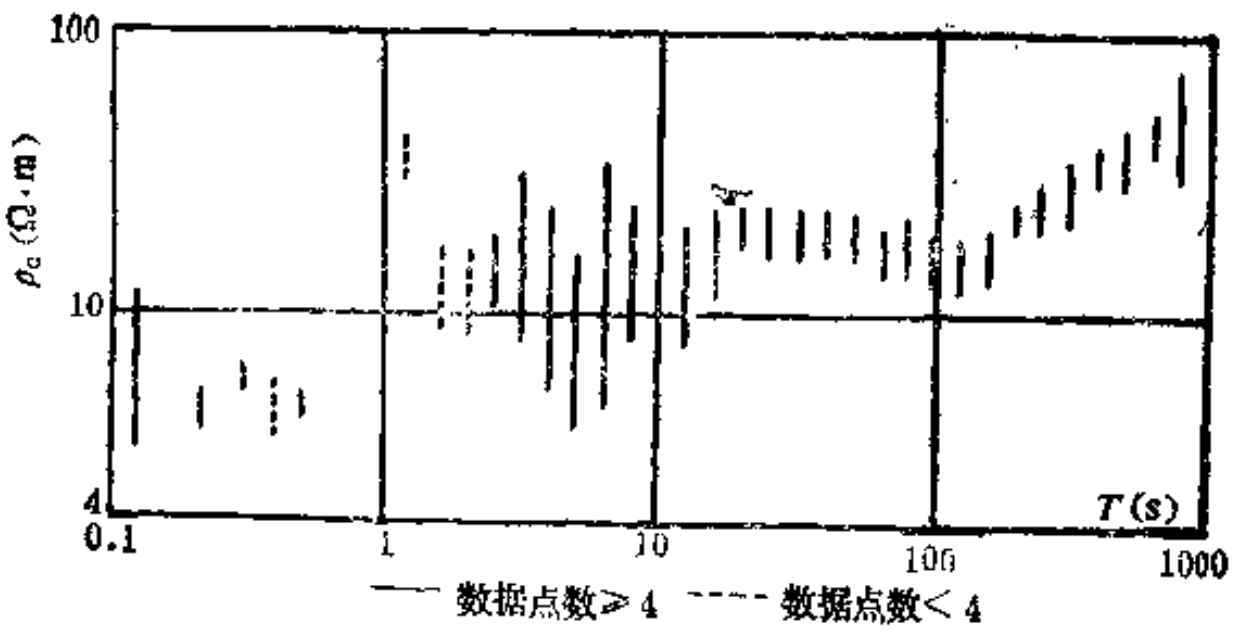


图 2-8　内蒙二连MT1ρ_{yx}曲线(最小二乘法)

关于参考道互功率法，仅在河北固安一处作过带参考道的试验。将观测记录用参考道互功率方法Ⅱ进行处理，所得结果见图 2-9，最小二乘法的结果见图 2-10。从图中显然可以看出前者优于后者。虽然带参考道的观测只有固安一个测点，但是我们依然相信这种方法对于克服不相关噪声的影响是有效的。当然，这种有效性是以增加一道观测记录为代价的。

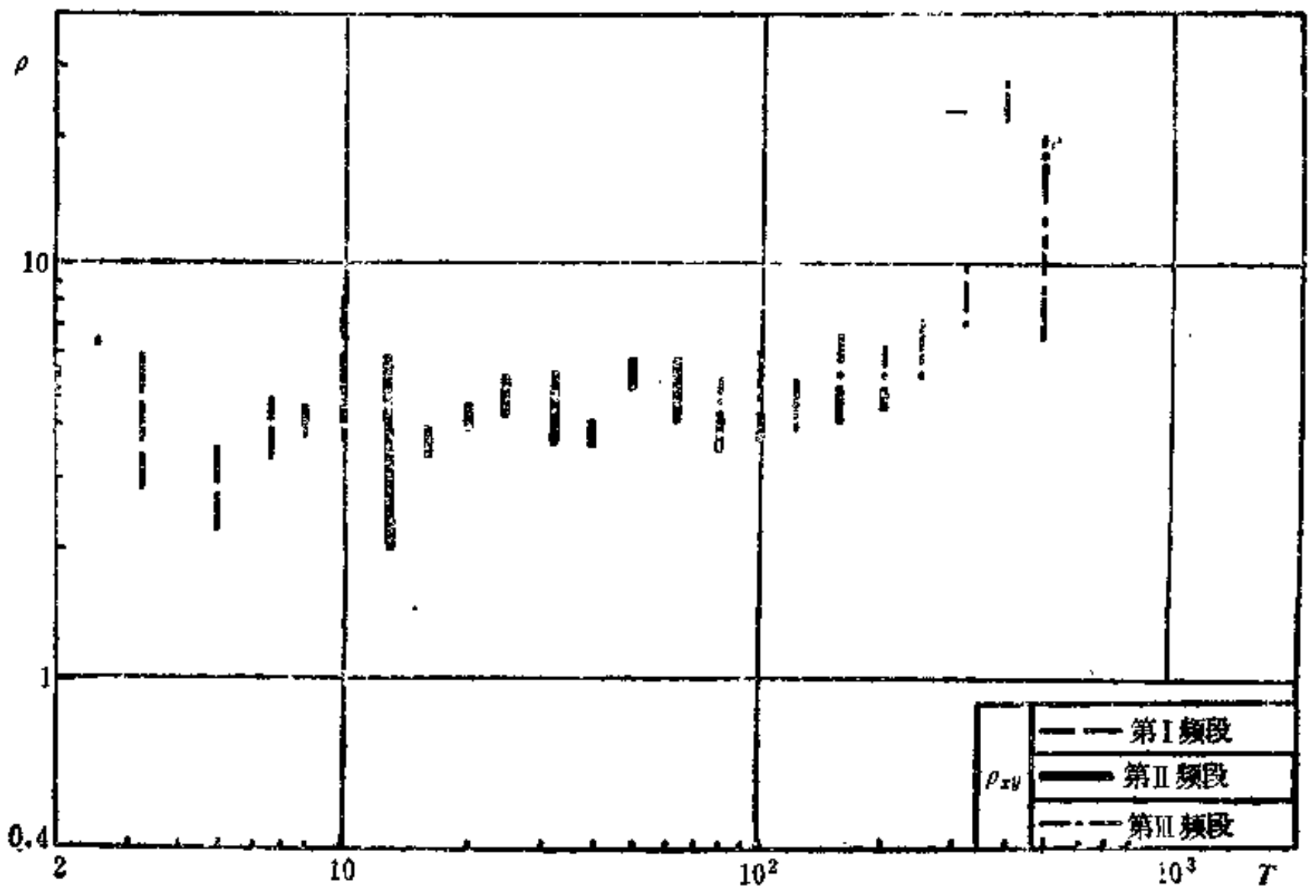


图 2-9　固安ρ_{xy}曲线(参考道互功率)

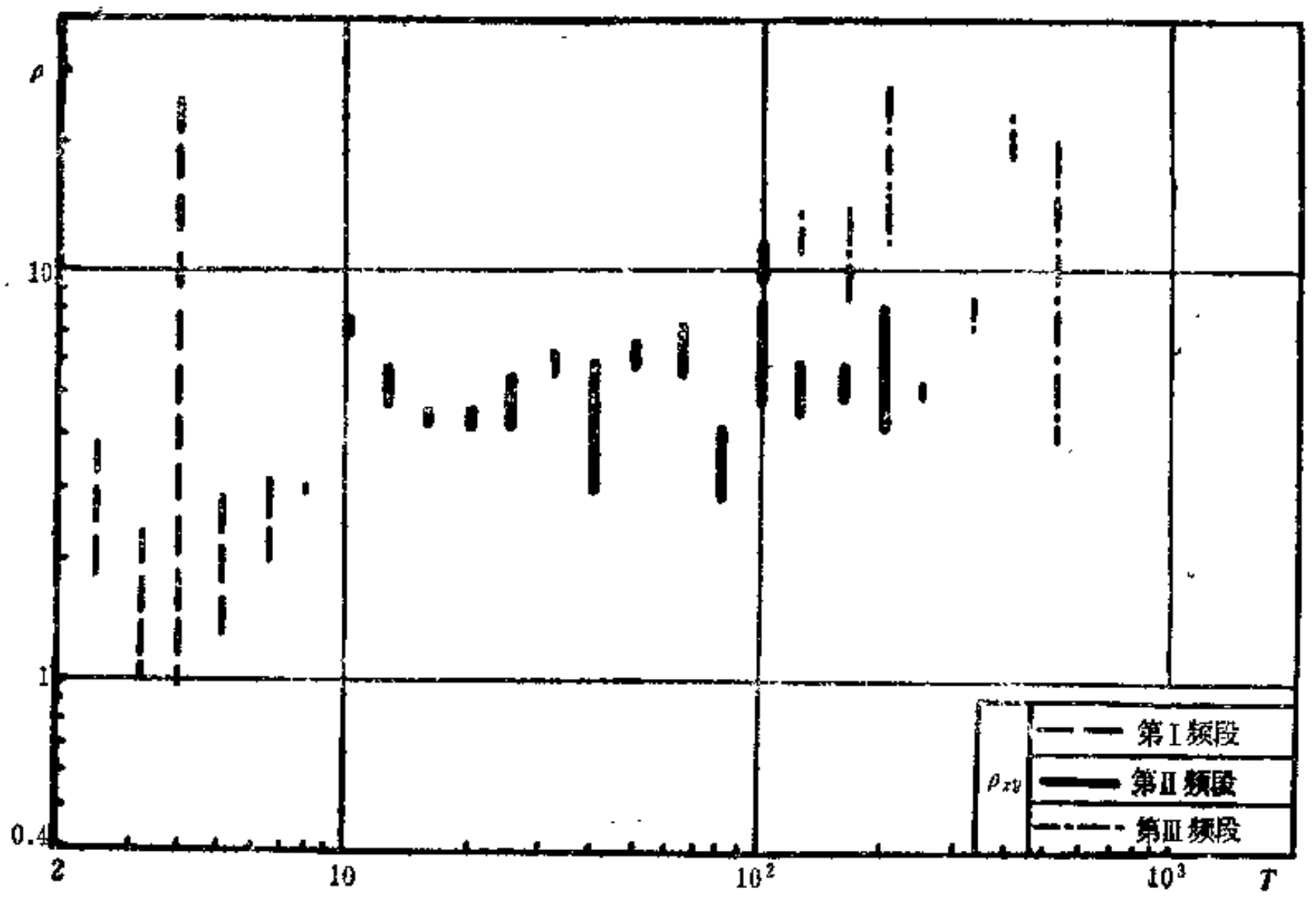


图 2-10　固安ρ_{xy}曲线(最小二乘法)

第五节　大地电磁测深资料的窄带滤波处理方法

一、窄带滤波法的前提

前面叙述的处理方法都是建立在这样一个基本假设之上的，即大地电磁场信号是由一些正弦波组构成的，这些波组涉及很宽的频带，并且在一定程度上可以把大地电磁场信号看成是平稳的和各态遍历的随机过程。这就是说，根据每一相当长的记录得到的谱分析结果，都可以表征这一过程。

提出窄带滤波选段处理的思想与上述认识不同，认为大地电磁场信号有明显的脉冲性，即信号波组在时间上的分布是间歇性的，每个波组的长度仅为其周期的几倍到十几倍，波组与波组之间常被非常弱的信号区间隔开。基于这种认识提出了，经过窄带滤波后选强信号水平及极化方向不同的信号短段(或段对)进行分析处理及计算阻抗要素。这种方法的特点是既考虑了信号的能量条件又考虑到极化方向条件，从而达到抑制噪声影响，提高信噪比的目的。

二、递归滤波器的选择

为了加快计算速度，采用递归滤波法求取所需频率的时间序列。这种滤波器的频率特性应该是通频带非常窄的，接近于点通的。

为了得到点通滤波器，先设计点阻滤波器。设需要压制的频率为f_0，在z平面上对应的角度为：

$$\Omega = 2\pi f_0 \Delta t = 2\pi \Delta t / T_0$$

式中　Δt——离散时间序列的采样间隔；

T_0——与f_0对应的周期。

在单位圆上相应于Ω角处设置一个零点P，并在其向经延长线上距P很小距离ε处设置一个极点S，由此构成的点阻滤波器的频率特性为：

$$H'(z) = \frac{z - e^{-i\Omega}}{z - (1+\varepsilon)e^{-i\Omega}}$$

为了使滤波得以实现，必须使上式中分子与分母上多项式的系数都变为实数，为此将分子与分母同乘以其共轭复数，得：

$$H''(z) = \frac{z^2 - 2z\cos\Omega + 1}{z^2 - 2z(1+\varepsilon)\cos\Omega + (1+\varepsilon)^2}$$

虽然$H''(f)$不是纯振幅(零相位)滤波，但由于用同一滤波器去对各道记录进行处理，各道产生的相移是相同的，而且由于没有利用相位特性，因此不必再把上式化成纯振幅滤波了。

根据上式，求得点通滤波器的频率特性为：

$$H(z) = 1 - H''(z) = \frac{1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{2\varepsilon\cos\Omega}{(1+\varepsilon)^2} z}{1 - \frac{2z\cos\Omega}{1+\varepsilon} + \frac{z^2}{(1+\varepsilon)^2}}$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^{1} a_m z^m}{1 - \sum_{m=1}^{2} b_m z^m}$$

其中滤波器系数为：

$$a_0 = 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \quad , \quad a_1 = -\frac{2\varepsilon\cos\Omega}{(1+\varepsilon)^2},$$

$$b_1 = \frac{2\cos\Omega}{1+\varepsilon} \quad , \quad b_2 = -\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}。$$

这里$\varepsilon = 1.84 f_0 q \Delta t$，若取滤波器的选择性 $q = 0.1$，则 $\varepsilon = 0.184 f_0 \Delta t = 0.184 \Delta t / T_0$。

滤波后的输出时间序列为：

$$y_t = \sum_{m=0}^{1} a_m x_{t-m} + \sum_{m=1}^{2} b_m y_{t-m}$$

在方法试验中发现，滤波输出有过冲现象，即开始幅度很大，然后慢慢衰减，中间延续了很长时间。这种过冲现象是由于滤波器的边端效应引起的。采用类似于减小截断效应的办法，在滤波之前加汉宁窗口，可以减轻过冲的程度。

三、数学模型与程序框图

这种方法的主要特点是，经过窄带滤波后选择能量较强而且极化方向差异较大的短段或段对进行处理。现将具体步骤简述如下：

① 在进行窄带滤波之前，先对记录数据加汉宁窗口，以减弱因滤波器的边端效应引起的过冲现象。汉宁窗口的公式已在前面最小二乘处理方法一节中给出。

② 进行窄带递归滤波。对于每档记录，在该档工作频段内确定24个在对数座标上均匀分布的频点。对每个频点用前面叙述过的递归滤波器进行窄带滤波。

③ 选取能量大的信号段。用下述公式计算电磁信号总强度：

$$E(t_i) = \sqrt{E_x^2(t_i) + E_y^2(t_i)} \quad , \quad H(t_i) = \sqrt{H_x^2(t_i) + H_y^2(t_i)}$$

先选出磁场信号的极大值，再选出它的包络的极大值，然后对所有包络极值进行平均，并选出大于平均值的作为合格的包络极值。如果这些包络所对应的电场信号也有较大的能量，就在这些包络极大值两侧各取1.5倍于周期长的区间构成选中的信号段作下一步处理。

④ 进行傅氏变换和道的校准。先讨论一下短信号段傅氏变换的效果。设滤波后的时间序列为$x(t)$，截取出 3 倍于周期长的短信号段 $x_m(t)$，其长度为T，则：

$$x_m(t) = x(t) \cdot w(t)$$

式中

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |t| \leqslant T/2 \\ 0, & \text{当 } |t| > T/2 \end{cases}$$

若$x(t)$和$w(t)$的傅氏变换分别为$X(f)$和$W(f)$，则$x_m(t)$的傅氏变换为：

$$X_m(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_m(t) e^{-i2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f') W(f - f')\, df'$$

式中

$$W(f)=T\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]=T\mathrm{sinc}(\pi fT)$$

$X_m(f)$是$X(f)$和$W(f)$的褶积。由于T为滤波器中心周期的3倍，而滤波后资料的带宽小于函数$\mathrm{sinc}(\pi fT)$的主叶宽度，故边叶没有影响，因此$X_m(f)$非常接近于$X(f)$。

傅氏变换和道校准的具体方法与最小二乘法中的相同。

⑤ 选择磁场极化方向不同的短段或段对计算阻抗要素。先求出与上述各个合格包络的极大值对应的磁场极化方向，然后挑选两两之差大于规定标准的信号短段或段对，并选

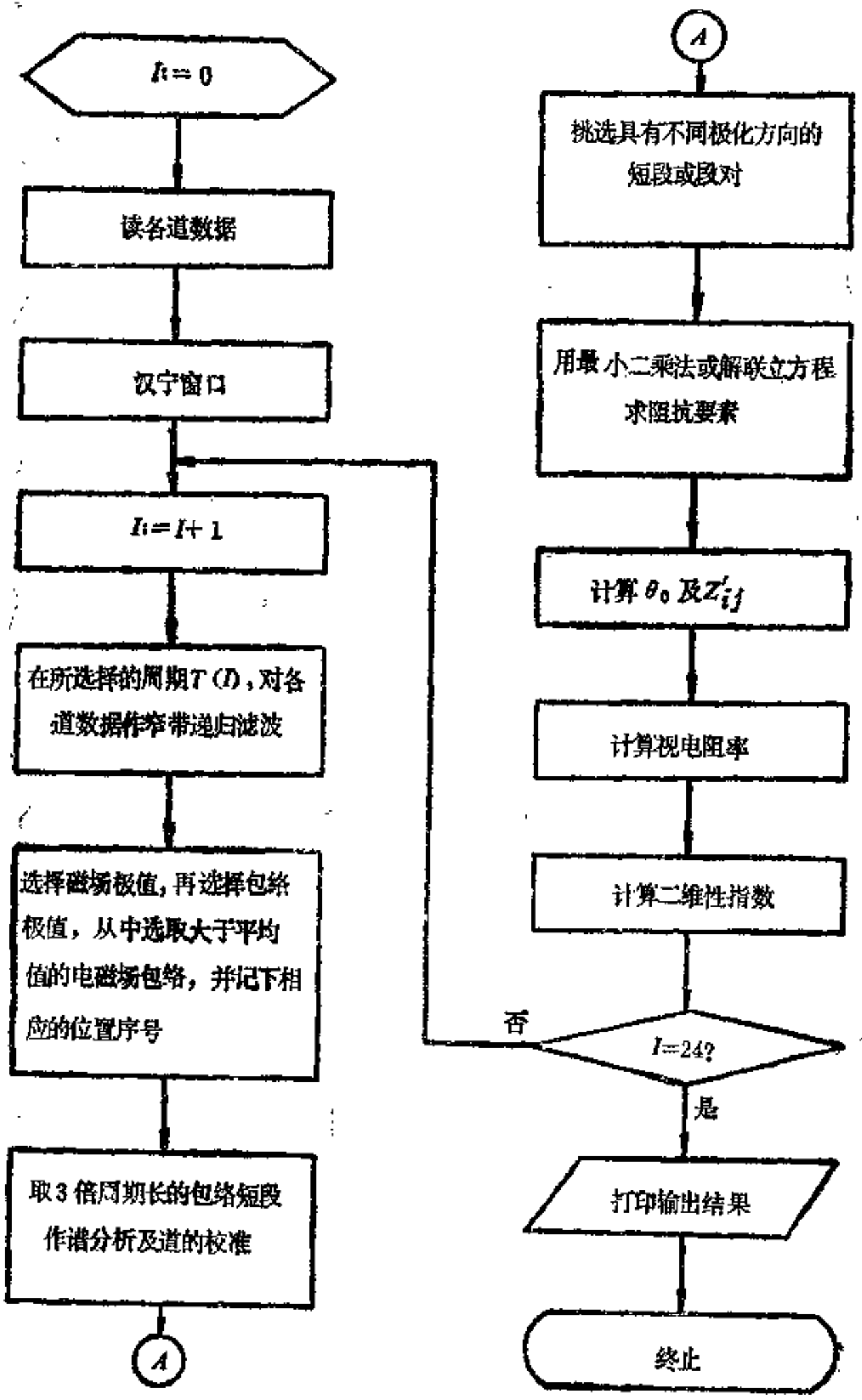


图 2-11 窄带滤波处理程序框图

出相应的电场信号短段或段对。

分别以下标 1 和 2 表示第 i 个段对中前后两个信号段，则有如下方程组：

$$E_{xi1} = H_{xi1}Z_{xx} + H_{yi1}Z_{xy},$$
$$E_{xi2} = H_{xi2}Z_{xx} + H_{yi2}Z_{xy},$$
$$E_{yi1} = H_{xi1}Z_{yx} + H_{yi1}Z_{yy},$$
$$E_{yi2} = H_{xi2}Z_{yx} + H_{yi2}Z_{yy}。$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

解此方程组即可求得阻抗要素。也可以用最小二乘法求阻抗要素，即用极化方向不同的信号短段的频谱构成电磁场分量的功率谱，代入（2—4）至（2—7）式，求得阻抗要素。

⑥ 计算全信息矢量相干度或相对误差。如果用最小二乘法求阻抗要素，就采用全信息矢量相干度来衡量资料的好坏。计算全信息矢量相干度的方法与最小二乘法中的相同。如果用解联立方程求阻抗要素时，可采用相对误差CP_{ij}作为判断资料好坏的依据：

$$CP_{ij} = \frac{D_{ij}}{|\overline{Z}_{ij}|}$$

式中 $\overline{Z}_{ij}$是n 组 Z_{ij}的平均值；

$$D_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} |(Z_{ij})_l - \overline{Z}_{ij}|。$$

⑦ 计算主轴方向、主轴阻抗要素、视电阻率及二维判别指数。计算方法与最小二乘法中的相同。

窄带滤波处理程序框图见图2-11。符号 I 有24个取值，分别代表第 1 个到第24个给定频率点的顺序号。

四、处理结果实例

仍以二连地区MT1 测点为例，窄带滤波处理结果见图2-12，图2-13。将其与图2-7、图2-8进行比较可以看出，窄带滤波法的结果是好的。另外，在具体实现该方法时，应注意到：

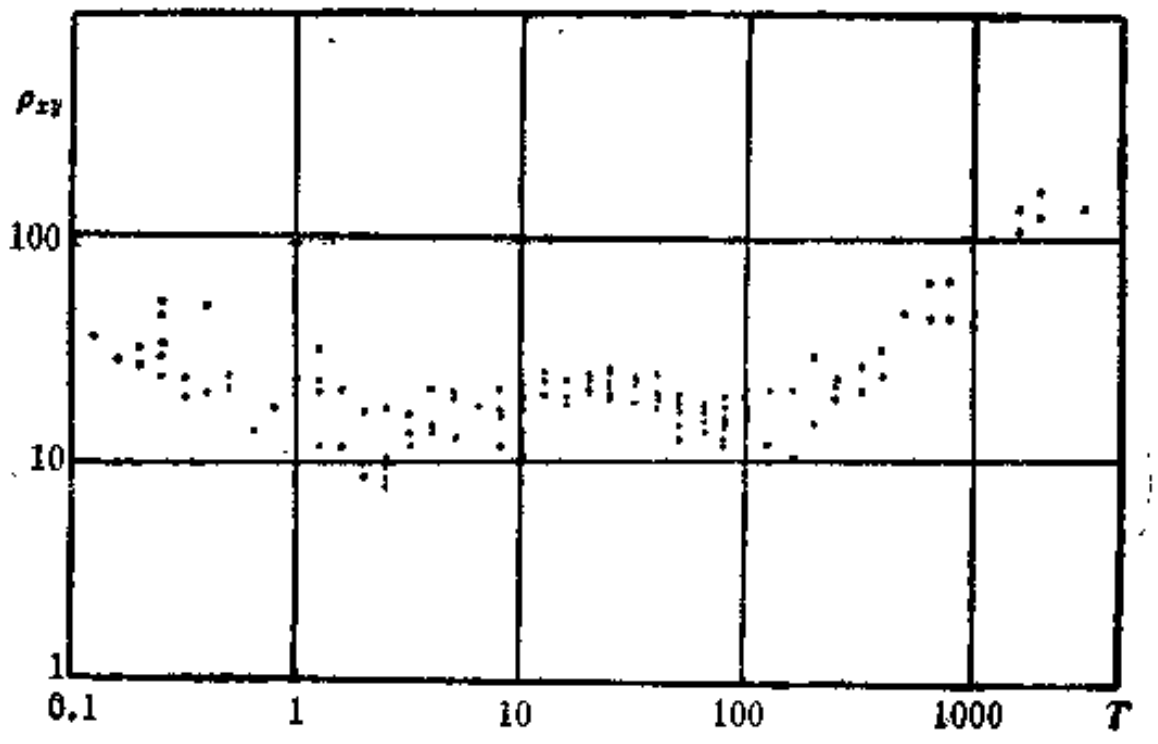


图 2-12 二连MT1ρ_{yx}曲线(窄带滤波法a)

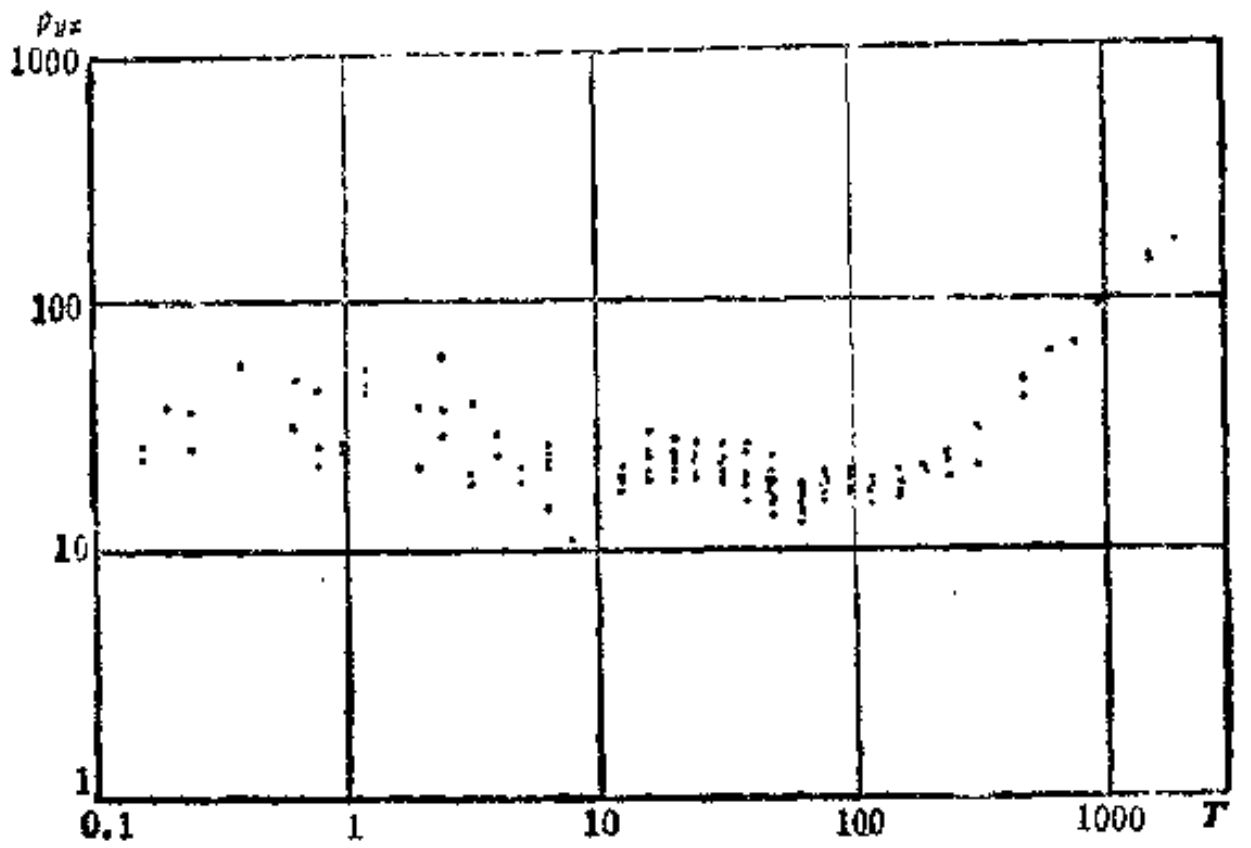


图 2-13　二连MT1ρ_{yx}曲线(窄带滤波法b)

①　在对各道记录作窄带滤波之前加汉宁窗口能使结果得到改善，特别是高频档的资料更为明显。

②　同时选取电场与磁场总强度均大于其平均值的包络，能更加突出能量条件，提高信噪比，同时也更符合电磁场之间的感应关系。

③　选出高能量的信号短段后，可以按极化方向的不同组成段对，通过解联立方程得到阻抗要素，也可以将极化方向不同的信号短段用最小二乘法求得阻抗要素。试算结果表明，后者效果更好（图2-12是解联立方程结果，图2-13是最小二乘法结果）。

④　试验结果证明，作谱分析的信号段长度取3倍于周期长已经足够，而加大到5倍周期长，结果并无多大改善。

第六节　大地电磁测深资料的广义最小二乘处理方法

一、方法原理与数学模型

广义最小二乘法是基于使四个或五个场分量的测量值与预测值的总方差为最小，即使总的噪声影响为最小而建立起来的处理方法。

若把多次重复观测的NR个记录段上得到的场分量H_x、H_y、E_x、E_y、H_z(其中第 j 个记录段在以 f_c 为中心频率的窄带上有NF_j个频点)数据堆放在一起，可以组成 $M\times 5$ 阶的局部数据矩阵$\mathbf{A}_i$：

$$\mathbf{A}=[H_x\ H_y\ E_x\ E_y\ H_z]_{M\times 5}$$

式中

$$M=\sum_{j=1}^{NR}NF_j$$

对于一个任意的 $M\times N(M\geqslant N)$阶复数矩阵，通过奇异值分解 (CSVD)，可以唯一地

分解成下列形式：

$$\mathbf{A}=\mathbf{USV}^{h}\approx\sum_{i=1}^{N}s_{i}u_{i}v_{i}^{h}$$

其中u_i与v_i分别是正交矩阵$\mathbf{U}_{M\times N}$与$\mathbf{V}_{N\times N}$的第 i 列元素，s_i 为实对角阵$S_{N\times N}$的第 i 个对角元素（即奇异值），且有$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_N\geqslant 0$；上角标$H$表示复共轭转置。

根据关于矩阵的 Eckat-Young 定理得知，在秩小于或等于A的秩p的所有$M\times N$阶矩阵中，满足范数$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|$为最小的矩阵B为：

$$\mathbf{B}=\mathbf{US}_{p}\mathbf{V}^{H}=\sum_{i=1}^{p}s_{i}u_{i}v_{i}^{h}$$

B即为A的广义最小二乘矩阵，它的列向量可以解释成为A的列向量在通过原点的p维最佳拟合平面上的投影。

于是令：

$$\mathbf{A}\approx\mathbf{B}+\mathbf{E}$$

即

$$\sum_{i=1}^{N}s_{i}u_{i}v_{i}^{H}=\sum_{i=1}^{p}s_{i}u_{i}v_{i}^{H}+\sum_{i=p+1}^{N}s_{i}u_{i}v_{i}^{H}$$

式中

$$\mathbf{E}=\sum_{i=p+1}^{N}s_{i}u_{i}v_{i}^{H}$$

称E为噪声矩阵。

求得广义最小二乘矩阵B后，阻抗要素Z_{ij}可由B($p=2$)按下列方式导出，

$$\begin{aligned}\mathbf{B}&=\sum_{i=1}^{p}s_{i}u_{i}v_{i}^{h}\\&=\begin{bmatrix}s_1u_1v_{11}^{*}+s_2u_2v_{12}^{*} & s_1u_1v_{21}^{*}+s_2u_2v_{22}^{*}\\ s_1u_1v_{31}^{*}+s_2u_2v_{32}^{*} & s_1u_1v_{41}^{*}+s_2u_2v_{42}^{*}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3 & b_4\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}H'^{\text{前}}_{x} & H'^{\text{前}}_{y} & E'^{\text{前}}_{x} & E'^{\text{前}}_{y}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

利用基本关系式：

$$E'^{\text{前}}_{x}=Z_{xx}H'^{\text{前}}_{x}+Z_{xy}H'^{\text{前}}_{y}$$

$$E'^{\text{前}}_{y}=Z_{yx}H'^{\text{前}}_{x}+Z_{yy}H'^{\text{前}}_{y}$$

得：

$$b_j=p_jb_1+q_jb_2\qquad(j=3,4)$$

即：

$$s_1\mathbf{u}_1v_{j1}^{*}+s_2\mathbf{u}_2v_{j2}^{*}=p_j(s_1\mathbf{u}_1v_{11}^{*}+s_2u_2v_{12}^{*})+q_j(s_1\mathbf{u}_1v_{21}^{*}+s_2\mathbf{u}_2v_{22}^{*})$$

式中 p_3，q_3——分别为Z_{xx}，Z_{xy}；

p_4，q_4——分别为Z_{yx}，Z_{yy}。

将上式两边取共轭分别乘以$\mathbf{u}_1^T$和$\mathbf{u}_2^T$，由于$\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1^{*}=1$，$\mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_2^{*}=1$及$\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_2^{*}=0$，$\mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_1^{*}=0$，可得：

$$v_{j1}=p_j^{*}v_{11}+q_j^{*}v_{21}$$

$$v_{j2}=p_j^{*}v_{12}+q_j^{*}v_{22}$$

解此方程组可求得p_j和q_j（$j=3,4$）的值。当然，在实际资料处理中，要对数据矩阵A作些定标工作，而在求阻抗时，还需要将定标影响消除。现将具体处理步骤及数学模型叙述如下：

①对记录数据进行预白，再加汉宁窗口，然后进行傅氏变换及道的校准工作。使用的公式与一般最小二乘法中的相同。

②对数据矩阵A进行定标。由于各道噪声水平不尽相同，电道与磁道的单位也不相同，所以在求广义最小二乘矩阵B之前，要对数据矩阵A进行定标，即对A的每一列数据进行归一，使其平方和为1：

$$\hat{a}_{ij}=a_{ij}/\|\mathbf{a}_j\|$$

式中

$$\|\mathbf{a}_j\|=\left(\sum_{i=1}^{M}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

此外，为了突出中心频率处频谱成份的作用，减小频带内阻抗及数据局部变化的影响，加了三角形衰减窗口。

③对定标后的局部数据矩阵进行奇异值分解，求得广义最小二乘矩阵B及各个分解矩阵S, U, V。

④定标影响的消除及阻抗要素的计算。

定标影响的消除可通过对矩阵V的转换来完成：

$$\begin{aligned}v'_{j1}&=\|\mathbf{a}_j\|\cdot v_{j1}\\ v'_{j2}&=\|\mathbf{a}_j\|\cdot v_{j2}\end{aligned}\qquad(j=1,2,3,4)$$

测量轴上的阻抗要素由下式计算：

$$Z^*_{xx}=\begin{vmatrix}v'_{31}&v'_{21}\\ v'_{32}&v'_{22}\end{vmatrix}/D\qquad Z^*_{xy}=\begin{vmatrix}v'_{11}&v'_{31}\\ v'_{12}v'_{32}\end{vmatrix}/D$$

$$Z^*_{yx}=\begin{vmatrix}v'_{41}&v'_{21}\\ v'_{42}&v'_{32}\end{vmatrix}/D\qquad Z^*_{yy}=\begin{vmatrix}v'_{11}&v'_{41}\\ v'_{12}&v'_{42}\end{vmatrix}/D$$

式中*表示复共轭，

$$D=\begin{vmatrix}v'_{11}&v'_{31}\\ v'_{12}&v'_{32}\end{vmatrix}$$

⑤计算主轴方向、主轴阻抗要素、视电阻率及二维判别指数。计算方法与一般最小二乘法中的相同。

二、几种筛选数据的判别指数

1.局部相干矩阵

用定标后的数据矩阵$\hat{\mathbf{A}}'$可以得到数据的局部相干矩阵的近似估算值：

$$[\hat{\mathbf{A}}'^{T}\ \hat{\mathbf{A}}'^{*}]=\mathrm{Coh}(\mathbf{a},\mathbf{a})$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\hat{a}'_{kt}\cdot\hat{a}'_{kl}$$

式中上角标T表示矩阵转置。

相干矩阵元素的积为相干度，用以评价数据的独立性，其中H_x与H_y的相干度 Coh（H_x, H_y）反映了原始场的线性极化程度，它越接近于1，场源越趋于线性极化，程序中以其小于0.5作为筛选数据的标准之一。

2.多道相关系数与噪信比

前面已经谈到，数据矩阵$\hat{\mathbf{A}}'$可以表示成为广义最小二乘矩阵**B**与噪声矩阵 **E**之和：

$$\hat{\mathbf{A}}' = \mathbf{B} + \mathbf{E}$$

式中

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{p} s_i \overrightarrow{u_i}\,\overrightarrow{v}_i^{H}$$

如果场源是理想的垂直入射的平面电磁波，则必然$p=2$，**A**就可以最佳地分解成一个信号矩阵和一个噪声矩阵。这时多道相干系数R的平方可表示成：

$$R^2 = \sum_{i=1}^{2} s_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{4} s_i^2$$

用于描述噪声干扰强弱的噪信比为

$$\mathrm{NSR} = [(1-R^2)/R^2]^{1/2} \times 100\%$$

无噪声时，$R^2=1$，NSR = 0。在实际工作中，一般取$R^2 \geqslant 0.941$或NSR$\leqslant$25%作为筛选资料的另一标准。

.,噪声矩阵E的范数及预测度

为了了解噪声对每道的干扰程度，计算了噪声矩阵E的范数：

$$\| \overrightarrow{e_j} \| = \left(\sum_{i=1}^{M} |e_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

式中 e_{ij}——$E = \sum_{i=3}^{4} s_i \overrightarrow{u_i}\,\overrightarrow{v_i^H}$ 的第i行第j列元素。

测量场与预测场之间的相干性或预测度由下式计算：

$$c_j = \mathrm{Coh}(a_j, b_j) = \left(\sum_{i=1}^{2} |v_{ji}|^2 s_i^2 \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{4} |v_{ji}|^2 s_i^2 \right)$$

三、程序框图及程序段选录

1.程序框图

广义最小二乘处理程序框图见图2-14，符号K表示给定的中心频率点的序号。

2.程序段选录

(1)程序段功能

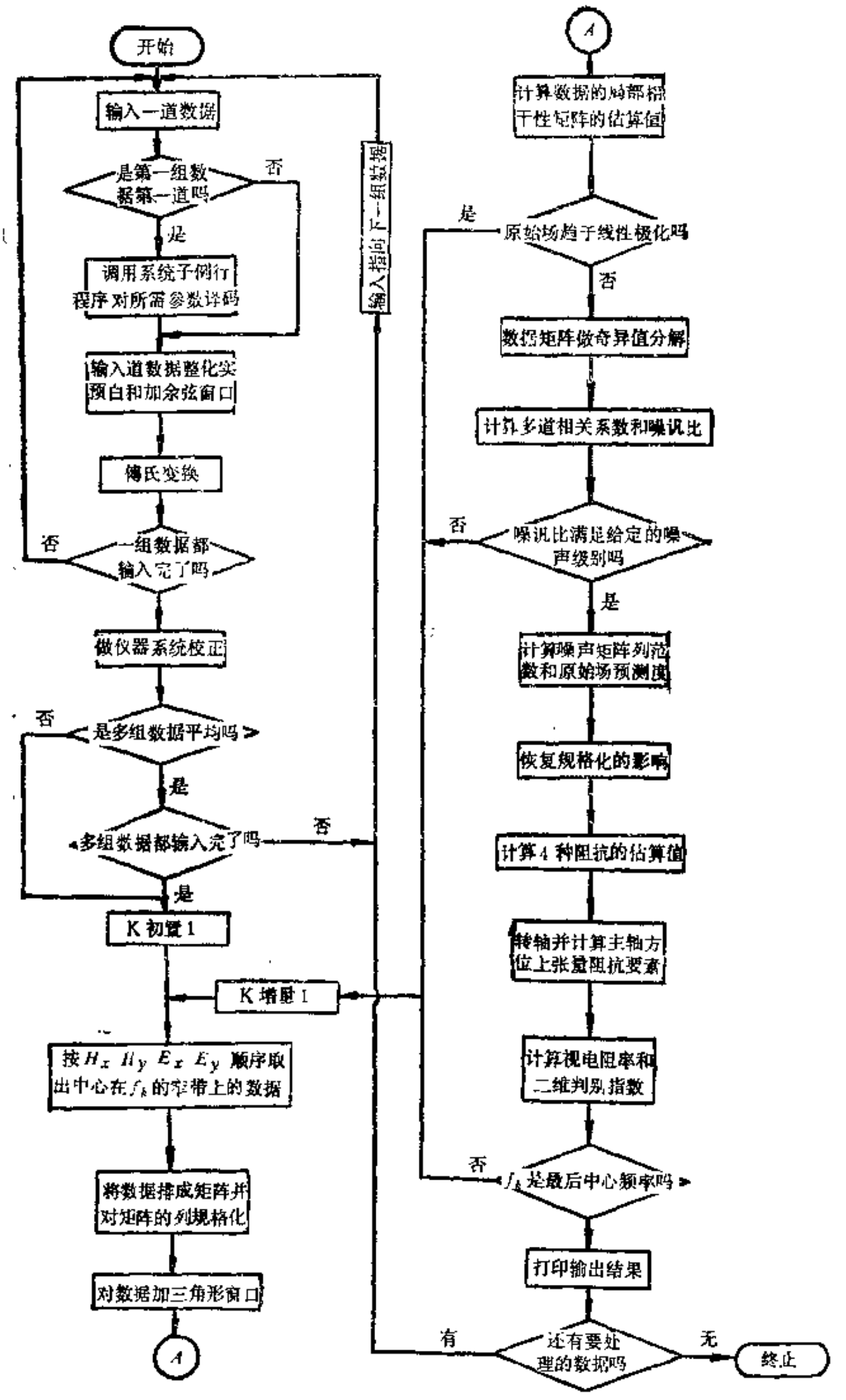


图 2-14　广义最小二乘处理程序框图

对数据矩阵定标，计算有关的判别指数，计算阻抗要素、视电阻率及二维判别指数。

（2）数组说明

ICOM　　一维实数组，ICOM（7）存放数据组数NN.

SBT　一维实数组，中间工作单元，存放周期值，相干度，阻抗相位等。

BB　一维实数组，中间工作单元，存放主轴方位角，多道相关系数，噪信比，视电阻率等。

T　一维实数组，存放600个频点的周期值。

HEXY　二维复数组，存放H_x, H_y, E_x, E_y场值。

U　二维复数组，存放经奇异值分解得到的矩阵U的元素。

MM　整变量，赋值为$25 \times NN$。

ICX　整变量，表示电磁场数据在扩存中的起始地址。

CP　二维实数组，存放相关系数。

T1　一维实数组，存放24个中心周期值。

RO　一维实数组，存放24个中心周期处的视电阻率值。

Q　一维实数组，存放经奇异值分解得到的奇异值。

V　二维复数组，存放经奇异值分解得到的矩阵V的元素。

(3) 调用子程序说明

CALL　LOCK　打印语句前的专用语句。

CALL　DELOCK　打印语句后的专用语句。

CALL　READEC　从扩存中读取所需的数据。

CALL　CSVD　调用复矩阵奇异值分解子程序。

(4) 程序

```
      SUBROUTINE DZ2(ICOM,BB,SBT,HEXY,U,MM,I2,LX,T,ICX)
      DIMENSION ICOM(1),T(1),BB(1),SBT(1),CP(4,4)
      DIMENSION T1(24),RO(24),Q(4),A1234(4)
      COMPLEX HEXY(MM,1),U(MM,1),Z(4),V(4,4)
      COMPLEX AR1,AR2,AR3,AR4,ZXX,ZXY,ZYX,ZYY,CPHE
      EQUIVALENCE (NSR,SNR)
      BP=57.29578
      NSR=ICOM(13)
      DO 99 I=1,24
      I1=I-1
      I8=I1*8  $  I25=I1*25
      NN1=0  $  NU=0  $  IFLG=0  $  NN3=1
      IJ=1  $  IMM=25  $  NN2=ICOM(7)
      IF(NN2.EQ.1) NU=4
   93 CONTINUE
      II=(IJ-1)*4800+2*I25
      DO 199 J=1,4
      M=J+J
      IF(J.EQ.3) M=1
      IF(J.EQ.4) M=3
      IE=(M-1)*1200+II
  199 CALL READEC(HEXY(1,J),ICX+IE,50)
  600 CONTINUE
C --- NORMALIZATION ---
      DO 201 J=1,4
      AJ=0.
      DO 202 K=1,IMM
  202 AJ=AJ+CABS(HEXY(K,J))**2
      AJ=SQRT(AJ)  $  A1234(J)=AJ
      DO 203 K=1,IMM
  203 HEXY(K,J)=HEXY(K,J)/AJ
  201 CONTINUE
```

```
C   -- LOCALIZATION--TRIANGULAR WINDOW --
      T12=2.*T(I25+1)-T(I25+2)
      DO 204 K=1,25
      IF(K.GT.13) T12=2.*T(I25+25)-T(I25+24)
      FF1=T(I25+K)-T12
      FK1=T(I25+13)-T12
      WO=FF1/FK1
      DO 204 IM=1,NN3
      KK=(IM-1)*25+K
      DO 204 J=1,4
204   HEXY(KK,J)=HEXY(KK,J)*WO
C   -- LOCAL COHERENCY MATRIX CP --
      DO 213 J=1,4
      DO 213 M=1,4
      CPHE=(0.,0.)
      DO 205 K=1,IMM
205   CPHE=CPHE+HEXY(K,J)*CONJG(HEXY(K,M))
213   CP(J,M)=CABS(CPHE)
      SBT(I8+2)=CP(1,2)
      IF(CP(1,2).GT..5) GO TO 336
      CALL CSVD(HEXY,MM,4,IMM,4,0,NU,NU,Q,U,V)
      SP=Q(1)*Q(1)+Q(2)*Q(2)
      SN=SP+Q(3)*Q(3)+Q(4)*Q(4)
C   -- SQUARED MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT --
      R2=SP/SN
C   -- NOISE-TO-SIGNAL RATIO (%) --
      R3=SQRT((1.-R2)/R2)*100.
      BB(I8+3)=R2
      BB(I8+4)=R3
      IF(R3.GT.SNR) 336,334

336   IF(NN2.EQ.1.AND.CP(1,2).GT..5) GO TO 343
      IF(NN2.EQ.1) GO TO 333
      IF(IFLG) 333,335
335   IJ=IJ+1
      IF(IJ.GT.NN2) 81,93
81    IF(NN1) 444,333
334   IF(IFLG) 445,337
337   NN1=NN1+1
      IF(NN2.EQ.1) GO TO 445
      IJ=IJ+1
      IMN=(NN1-1)*25
      DO 501 J=1,4
      M=J+J
      IF(J.EQ.3) M=1
      IF(J.EQ.4) M=3
      IE=II+(M-1)*1200
501   CALL READEC(U(IMN+1,J),ICX+IE,50)
      IF(IJ.GT.NN2) 444,93
444   IFLG=1  $  NU=4
      NN3=NN1  $  IMM=25*NN1
      DO 500 J=1,4
      DO 500 M=1,IMM
500   HEXY(M,J)=U(M,J)
      GO TO 600
445   CONTINUE
      DO 224 J=1,4
      AJ=BJ=0.
C   -- CALCULATE PARTIAL NOISE-TO-SIGNAL RATIO
      DO 222 IP=3,4
222   BJ=BJ+(CABS(V(J,IP))*Q(IP))**2
      DO 225 M=1,2
225   AJ=AJ+(CABS(V(J,M))*Q(M))**2
      IF(BJ.LE.1.E-200) 50,51
50    CP(1,J)=1.111111
```

```
      GO TO 52
51    CP(1,J)=SQRT(AJ/BJ)
52    CONTINUE
C  -- CALCULATE COH(A,B) FOR J=1,4 --
      AJ=BJ=0.
      DO 226 N=1,4
226   AJ=AJ+(CABS(V(J,N))*Q(N))**2
      DO 227 IP=1,2
227   BJ=BJ+(CABS(V(J,IP))*Q(IP))**2
      IF(AJ.LE.1.E-200) 111,113
111   CP(2,J)=1.111111
      GO TO 224
113   CP(2,J)=BJ/AJ
224   CONTINUE
      CALL LOCK
      PRINT 228,I,NN3,((CP(K,J),J=1,4),K=1,2),Q
211   FORMAT(1X*CY NO.*2X*NN NO.*18X* NSR(J) *35X
     $  *COH(A,B)*28X*Q(I),I=1,4*/)
228   FORMAT(3X,I2,5X,I2,4X4F10.5,3X4F10.7,3X,4F8.5)
      CALL DELOCK
      DO 229 J=1,4
      AJ=A1234(J)
      DO 229 K=1,2
229   V(J,K)=V(J,K)*AJ
      CPHE=V(1,1)*V(2,2)-V(1,2)*V(2,1)
      IF(CABS(CPHE).LE.1.E-200) GO TO 333
      ZXX=CONJG((V(3,1)*V(2,2)-V(2,1)*V(3,2))/CPHE)
      ZXY=CONJG((V(1,1)*V(3,2)-V(3,1)*V(1,2))/CPHE)
      ZYX=CONJG((V(4,1)*V(2,2)-V(2,1)*V(4,2))/CPHE)
      ZYY=CONJG((V(1,1)*V(4,2)-V(4,1)*V(1,2))/CPHE)
      AR1=ZXX+ZYY
      AR2=ZXX-ZYY
      AR3=ZXY+ZYX
      AR4=ZXY-ZYX
      PH=AR2*CONJG(AR3)+CONJG(AR2)*AR3
      PE=CABS(AR2)**2-CABS(AR3)**2
      FE=ATAN2(PH,PE)*BP
      F=0.
      ST=FE/4.
231   FB=FE/(4.*BP)
      FH=COS(2.*FB)
      FE=SIN(2.*FB)
      Z(1)=(AR1+AR2*FH+AR3*FE)*.5
      Z(2)=(AR4+AR3*FH-AR2*FE)*.5
      Z(3)=(-AR4+AR3*FH-AR2*FE)*.5
      Z(4)=(AR1-AR2*FH-AR3*FE)*.5
      F=F+1.
      IF(F.LT.2.5) 232,233
232   F2=CABS(Z(1))**2+CABS(Z(4))**2
      IF(F.LT.1.5) 234,235
234   F1=F2
      IF(ST.LT.0.) 236,237
236   FE=ST*4.+180.   $  GO TO 231
237   FE=ST*4.-180.   $  GO TO 231
235   IF(F2.LT.F1) 238,239
239   FE=ST*4.   $  GO TO 231
238   ST=FB*BP
233   CONTINUE
      BB(I8+2)=ST
      DO 244 K=1,4
      WO=ATAN2(AIMAG(Z(K)),REAL(Z(K)))*BP
      SBT(I8+4+K)=WO
244   BB(I8+4+K)=.2*T(I25+13)*CABS(Z(K))**2
      RO(1)=BB(I8+5)   $  RO(2)=BB(I8+6)
```

```
      RO(3)=BB(I8+7)  $  RO(4)=BB(I8+8)
      IF(RO(2).LE.RO(1).OR.RO(2).LE.RO(4)) GO TO 262
      IF(RO(3).LE.RO(1).OR.RO(3).LE.RO(4)) 262,261
262   DO 263 K=5,8
263   SBT(I8+K)=BB(I8+K)=0.
261   CONTINUE
      A=CABS(AR1)
      B=CABS(AR4)
      IF(B.LE.1.E-200) 245,246
245   S=11.1111  $  GO TO 247
246   S=A/B
247   A=CABS(Z(1)-Z(4))
      B=CABS(Z(2)+Z(3))
      IF(B.LE.1.E-200) 248,249
248   BT=11.1111  $  GO TO 990
249   BT=A/B
990   SBT(I8+3)=S
      SBT(I8+4)=BT
      GO TO 250
343   BB(I8+3)=0.
      BB(I8+4)=0.
333   BB(I8+2)=0.
      DO 260 K=5,8
      SBT(I8+K)=0.
260   BB(I8+K)=0.
      SBT(I8+3)=0.
      SBT(I8+4)=0.
250   SBT(I8+1)=T(I25+13)
      BB(I8+1)=T(I25+13)
99    CONTINUE
      CALL LOCK
      PRINT 302
      PRINT 301,(SBT(I),I=1,192)
      PRINT 304
      PRINT 301,(BB(I),I=1,192)
      PRINT 305
      DO 400 I=1,24
400   T1(I)=BB((I-1)*8+1)
      DO 401 J=2,3
      DO 402 I=1,24
402   RO(I)=BB((I-1)*8+4+J)
      CALL PLOTR(T1,RO,24)
401   CONTINUE
      CALL DELOCK
      RETURN
301   FORMAT((5X,8(F12.3,2X)))
304   FORMAT(/13X1HT,13X,2HST,11X,3HMCC,11X,3HNSR,10X,4HROXX,10X,
     $          4HROXY,10X,4HROYX,10X,4HROYY/)
302   FORMAT(/13X1HT12X4HHXHY11X1HS13X2HBT11X3HPXX11X3HPXY,
     $          11X3HPYX11X3HPYY/)
305   FORMAT(3X,125(1H=)/)
      END
```

四、处理结果实例

以河北易县测点为例，广义最小二乘法的处理结果见图2-15，一般最小二乘法的处理结果见图2-16。从图中可以看到，两种方法的处理结果基本上是一致的。周期为1秒至10秒的数据质量较差，广义最小二乘法的数据与一般最小二乘法的相比，分散度较小一些，曲线形态也更明确一些。至于其他频段，由于资料质量较好，两种方法的处理结果都较好。

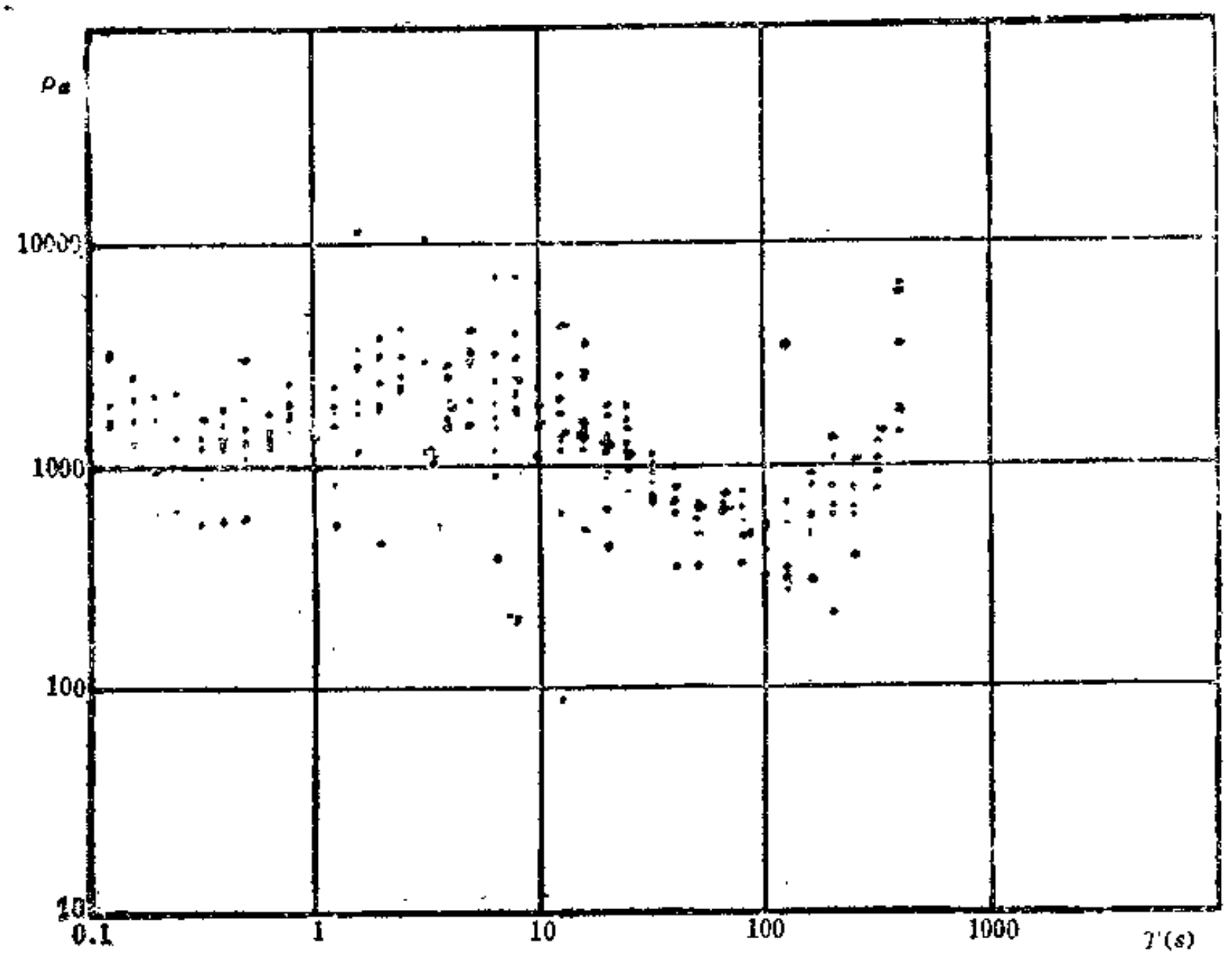


图 2-15　河北易县ρ_s曲线(广义最小二乘法)

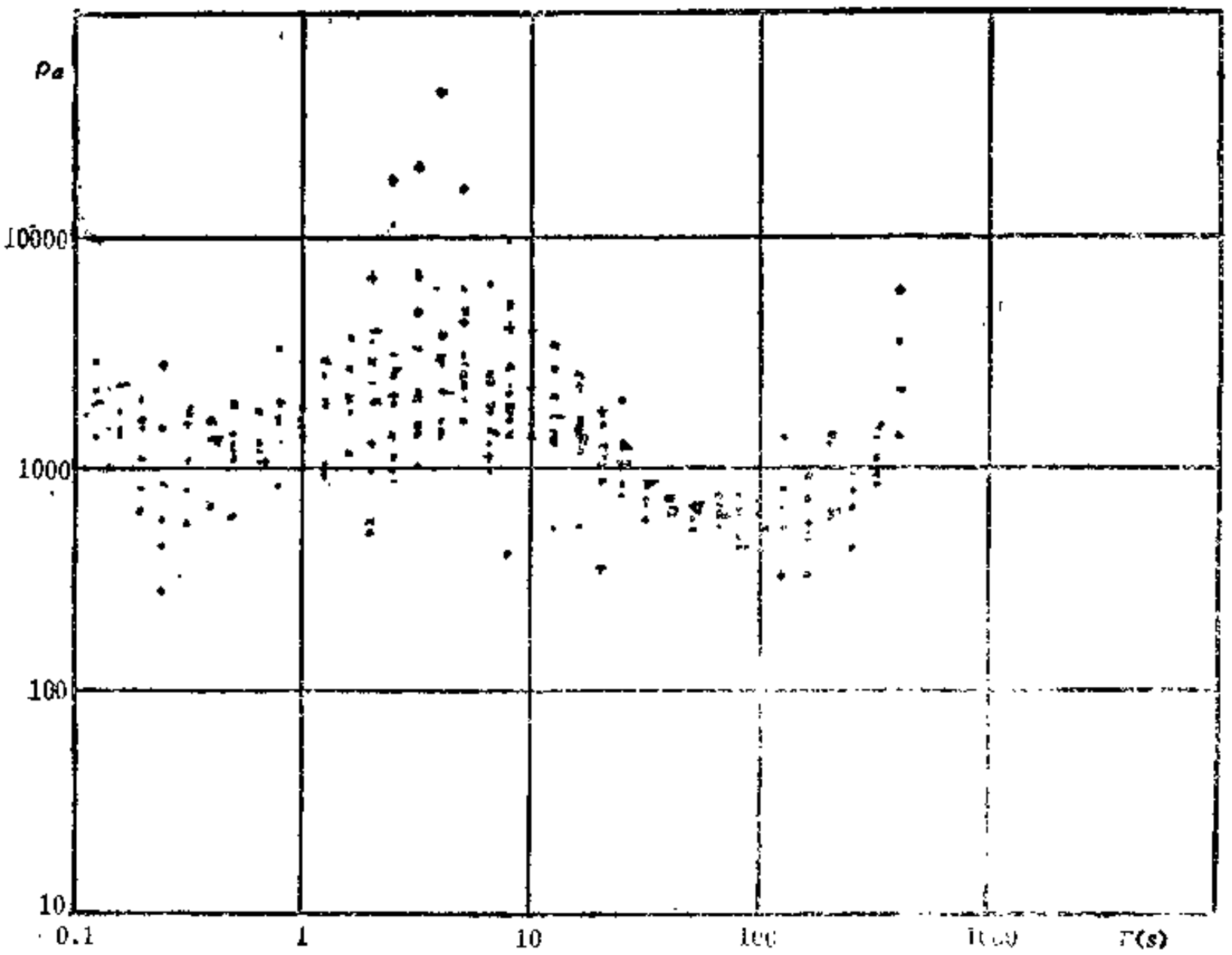


图 2-16　河北易县ρ_s曲线(最小二乘法)

第七节　大地电磁测深资料的瞬态谱分析方法

一、实连续信号的复数表示和希尔伯特变换

1.实信号的复数表示

对于一般的实信号$x(t)$而言，由于它的谱$X(f)$满足$X(-f)=\overline{X(f)}$，所以有：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{i2\pi ft}df=\int_{0}^{\infty}X(f)e^{i2\pi ft}\,df+\int_{-\infty}^{0}X(f)e^{i2\pi ft}\,df$$

$$=\int_{0}^{\infty}X(f)e^{i2\pi ft}\,df+\int_{0}^{\infty}X(f)e^{-i2\pi ft}df$$

$$=\int_{0}^{\infty}X(f)e^{i2\pi ft}\,df+\overline{\int_{0}^{\infty}X(f)e^{i2\pi ft}\,df}$$

$$=2\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty}X(f)e^{i2\pi ft}\,df=\mathrm{Re}\left\{\int_{0}^{\infty}2X(f)e^{i2\pi ft}\,df\right\}$$

式中“——”号表示复共轭。令：

$$q(t)=\int_{0}^{\infty}2X(f)e^{i2\pi ft}\,df$$

我们称$q(t)$为实信号$x(t)$的复信号，即$x(t)=\mathrm{Re}\{q(t)\}$。

设$q(t)$的谱为$Q(f)$，则：

$$Q(f)=\begin{cases}2X(f), & f>0\\ 0, & f<0\end{cases}$$

由上式可见，所讨论的这种类型的复信号的谱$Q(f)$在$f<0$处为零。

2.希尔伯特变换

现在讨论$Q(f)$和$X(f)$间的关系。设：

$$Q(f)=H_1(f)\cdot X(f)$$

则：

$$H_1(f)=\begin{cases}2, & f>0\\ 0, & f<0\end{cases}$$

即相当于一个幅度为2的阶跃函数，其逆傅氏变换为：

$$h_1(t)=\delta(t)+i\frac{1}{\pi t}$$

所以在时域上有：

$$q(t)=h_1(t)*x(t)=\left(\delta(t)+i\frac{1}{\pi t}\right)*x(t)$$

$$=x(t)+i\frac{1}{\pi t}*x(t)$$

令：

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

我们称 $\hat{x}(t)$ 为$x(t)$ 的希尔伯特变换。从上式可以看出，对一个信号作希尔伯特变换，相当于作一次滤波，滤波因子为$h(t) = \frac{1}{\pi t}$，变换后的函数 $\hat{x}(t)$相当于实信号 $x(t)$ 的复信号的虚部。

已知有下列傅氏变换对：

$$i\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow \operatorname{sign} f = \begin{cases} 1, & f>0 \\ -1, & f<0 \end{cases}$$

故有：

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow H(f) = \frac{\operatorname{sign} f}{i} = \begin{cases} \frac{1}{i} = -i, & f>0 \\ -\frac{1}{i} = i, & f<0 \end{cases}$$

也可以写成：

$$H(f) = e^{i\phi(f)}$$

式中

$$\phi(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f>0 \\ \frac{\pi}{2}, & f<0 \end{cases}$$

由此可见，一个信号经希尔伯特变换后，相位谱要作90°相移，因此希尔伯特变换又称为90°相移滤波或垂直滤波。

3.希尔伯特反变换

因为

$$H(f) = \begin{cases} -i, & f>0 \\ i, & f<0 \end{cases}$$

故有：

$$H^2(f) = -1$$

又因：

$$\hat{X}(f) = H(f) \cdot X(f)$$

故：

$$X(f) = \frac{\hat{X}(f)}{H(f)} = -H(f) \cdot \hat{X}(f)$$

因此有：

$$x(t) = -\frac{1}{\pi t} * \hat{x}(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

称上式为希尔伯特反变换。这一变换对为：

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

$$x(t) = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

由上式还可以看出，若$x(t)$的希尔伯特变换为$\hat{x}(t)$，则$\hat{x}(t)$的希尔伯特变换为$-x(t)$。

二、实连续信号的包络、瞬时相位和瞬时频率

1.一种窄带信号

$$x(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

其中$a(t)$和$\varphi(t)$变化缓慢，$a(t)$起到包络的作用，而$\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$相当于快速振荡函数。

令其中：

$$2\pi f_0 t + \varphi(t) = \theta(t)$$

$$\mu(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = 2\pi f_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$\theta(t)$反映了随时间非线性变化的相位，称为窄带信号$x(t) = a(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$的瞬时相位，而$\mu(t)$则反映了随时间变化的频率的特点（因$\varphi(t)$随时间不变或缓慢变化时，$\mu(t) = 2\pi f_0$），称为窄带信号的瞬时频率。

下面讨论$a(t)$、$\theta(t)$、$\mu(t)$与$x(t)$及其希尔伯特变换$\hat{x}(t)$之间的关系。由上例可见：

$$x(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$
$$\hat{x}(t) = a(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

因此

$$\sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} = |a(t)|$$

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} = 2\pi f_0 t + \varphi(t)$$

$$\mu(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} = 2\pi f_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

由此看出，上述类型窄带信号的包络、瞬时相位和瞬时频率可以通过窄带信号本身及其希尔伯特变换表示出来。

2.任意实连续信号的包络、瞬时相位和瞬时频率

设有一般信号$x(t)$，其希尔伯特变换为$\hat{x}(t)$，复信号为$q(t) = x(t) + i\hat{x}(t)$，类似窄带信号，定义：

$$|a(t)| = |q(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

为$x(t)$的包络；

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}$$

为$x(t)$的瞬时相位；

$$\mu(t)=\frac{d\theta(t)}{dt}$$

为$x(t)$的瞬时频率。

已知：

$$q(t)=|q(t)|e^{i\theta(t)}=\sqrt{x^2(t)+\hat{x}^2(t)}\cdot e^{i\arctan\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}}$$

因而：

$$\theta(t)=\mathrm{Im}[\ln q(t)]$$

$$\mu(t)=\mathrm{Im}\frac{d\ln q(t)}{dt}\approx\mathrm{Im}\frac{2[q(t)-q(t-\Delta t)]}{\Delta t[q(t)+q(t-\Delta t)]}$$

3.实离散信号的希尔伯特变换及其包络、瞬时相位和瞬时频率

当实连续信号$x(t)$的谱有截频f_c，而采样间隔Δ满足$\frac{1}{2\Delta}\geqslant f_c$时，为了求得离散的$\hat{x}(n\Delta)$，可以通过对$x(n\Delta)$进行滤波来实现。设连续信号滤波的滤波器的谱为$H(f)$，这时相应的离散滤波器的谱$H_\Delta(f)$定义为：

$$H_\Delta(f)=H(f),\qquad -\frac{1}{2\Delta}\leqslant f\leqslant\frac{1}{2\Delta}$$

因此：

$$H_\Delta(f)=\begin{cases}-i, & 0<f\leqslant\frac{1}{2\Delta},\\ i, & \frac{-1}{2\Delta}\leqslant f<0,\end{cases}$$

离散希尔伯特滤波因子$h(n\Delta)$为：

$$h(n\Delta)=\Delta\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}}H_\Delta(f)e^{i2\pi n\Delta f}df$$

$$=-i\Delta\int_0^{\frac{1}{2\Delta}}e^{i2\pi n\Delta f}df+i\Delta\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{0}e^{i2\pi n\Delta f}df$$

$$=\begin{cases}0, & n=0\\ \frac{1-e^{in\pi}+1-e^{-in\pi}}{2n\pi}=\frac{2(1-(-1)^n)}{2n\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}, & n\neq 0\end{cases}$$

区分偶数和奇数情况，可写成：

$$h(n\Delta)=\begin{cases}0, & n=2m\ (\text{包括}0)\\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2m-1}, & n=2m-1,\ m\text{为整数}\end{cases}$$

相应地，$H_\Delta(f)$也可以用$h(n\Delta)$来表示：

$$H_\Delta(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n\Delta)e^{-i2\pi n\Delta f}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[(2m-1)\Delta]e^{-i2\pi(2m-1)\Delta f}$$

$$= \frac{e^{i2\pi\Delta t}}{\pi} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m-\frac{1}{2}} e^{-i4\pi m\Delta t} = \begin{cases} -i, & 0 < f < \dfrac{1}{2\Delta} \\ i, & \dfrac{-1}{2\Delta} < f < 0 \end{cases}$$

于是得到：

$$\hat{x}(n\Delta) = h(n\Delta) * x(n\Delta) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau\Delta) \cdot x[(n-\tau)\Delta]$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m-1} x[(n-2m+1)\Delta]$$

定义：

$$q(n\Delta) = x(n\Delta) + i\hat{x}(n\Delta)$$

为复信号：

$$\theta(n\Delta) = \operatorname{arctg} \frac{\hat{x}(n\Delta)}{x(n\Delta)}$$

为$x(n\Delta)$的瞬时相位；

$$e(n\Delta) = |q(n\Delta)| = \sqrt{x^2(n\Delta) + \hat{x}^2(n\Delta)}$$

为$x(n\Delta)$的包络；

$$\mu(n\Delta) = I_m \frac{2}{\Delta} \frac{q(n\Delta) - q[(n-1)\Delta]}{q(n\Delta) + q[(n-1)\Delta]}$$

为$x(n\Delta)$的近似瞬时频率（因瞬时频率是局部微商概念，故在离散信号情况下，只能求得瞬时频率的近似值）。

希尔伯特反变换公式为：

$$h(n\Delta) * \hat{x}(n\Delta) = h(n\Delta) * h(n\Delta) * x(n\Delta)$$

$$= -\delta(n\Delta) * x(n\Delta) = -x(n\Delta)$$

由此得：

$$x(n\Delta) = -h(n\Delta) * \hat{x}(n\Delta) = \frac{-2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \hat{x}[(n-2m+1)\Delta]$$

三、希尔伯特变换在大地电磁测深资料处理中的应用

1.利用瞬时谱分析处理大地电磁测深资料

苏联别尔季切夫斯基等人曾提出了一种实质上是利用瞬时谱分析处理大地电磁测深资料的方法。这种方法是以窄带滤波为基础，采用单边频谱的复数滤波器（进行双重褶积运算），它由两个滤波器并联组成，一个是同相滤波器W_{tr}，一个是90°相移滤波器iW_H，即

$$W_{tr}(\omega) = F(\omega) \quad \text{（偶函数）}$$

$$g_{tr}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos\omega t d\omega$$

和：

$$W_H(\omega) = -i(\operatorname{sign}\omega) F(\omega) \quad \text{（奇函数）}$$

$$g_H(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_H(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\sin\omega t d\omega$$

如果合成一个滤波器的话，则得到：

$$W_f(\omega) = W_{fr}(\omega) + iW_{fi}(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \qquad (2\text{—}18)$$

$$g_f(t) = g_{fr}(t) + ig_{fi}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} 2F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

也就是说，$W_f(\omega)$是与谱为$F(\omega)$（对称偶函数）的实滤波器相对应的复数滤波器（类似对应于实信号的复信号）。

如定义上面的$F(\omega)$为：

$$F(\omega) = W(f - f_0) + W(f + f_0)$$

其中$W(f)$是一低通滤波器的频率特性，定义为：

$$W(f) = 1 - \frac{|f|}{\delta f/2} = 1 - \frac{2|f|}{\delta f}$$

相应的时域脉冲响应为：

$$g(n\Delta) = \frac{1}{\pi^2\delta\lambda n^2\Delta}(1 - \cos\pi n\delta\lambda)$$

式中 $\delta\lambda = \delta f\Delta$；

$\lambda = f\Delta$。

在这种情况下，根据式(2—18)可知，合成的复数滤波器的频率响应为：

$$W_f(\omega) = \begin{cases} 2W(f - f_0), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

$$= 2W(f - f_0)$$

相应的时域脉冲响应函数为：

$$g_f(n\Delta) = 2 \cdot e^{i2\pi f_0 n\Delta} \cdot g(n\Delta)$$

$$= 2 \cdot \cos 2\pi n\lambda_0 \left(\frac{1 - \cos n\pi\delta\lambda}{\pi^2 n^2\delta\lambda\Delta}\right) + i2 \cdot \sin 2\pi n\lambda_0 \left(\frac{1 - \cos n\pi\delta\lambda}{n^2\pi^2\delta\lambda\Delta}\right)$$

$$= g_{fr}(n\Delta) + ig_{fi}(n\Delta)$$

而：

$$g_f(0) = \frac{\sin^2\frac{n\pi\delta\lambda}{2}}{\left(\frac{\pi n\delta\lambda}{2}\right)^2} \cdot \delta f \xrightarrow{n\to 0} \delta f$$

一实信号$x(t)$经过上述复系数滤波器后，输出信号$x_f(t)$为：

$$x_f(t) = \mathrm{Re}x_f(t) + i\mathrm{Im}x_f(t) = |x_f^*(t)|e^{i\varphi(t)}e^{i\omega t}$$
$$= x_f^*(t) \cdot e^{i\omega t}$$

根据前面给出过的求任意实连续信号的包络、瞬时相位和瞬时频率的公式，可求得信号$\mathrm{Re}[x_f(t)]$的包络$a(t)$、瞬时初相位$\varphi(t)$、瞬时相位$\theta(t)$和瞬时频率$\mu(t)$。瞬时振幅则定义为：

$$x_f^*(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$$

它与经复数滤波器后产生的窄带复信号$x_f(t)$之间的关系为：

$$x_f(t) = x_f^*(t)e^{i\omega_0 t}$$

别尔季切夫斯基等人还证明了，当下列条件之一，即

①被分析的滤波后的记录段近似为规则的正弦波；

②在窄带滤波器通频带范围内阻抗变化不大，近似为常数；

③在窄带滤波器通频带范围内信号的功率谱变化不大，得到满足时，可在常规的最小二乘法的方程中，用窄带复信号的瞬时复振幅值$x_f^*(t)$或滤波后生成的窄带复信号的瞬时值$x_f(t)$代替原信号的傅氏谱，求出张量阻抗要素，其具体公式为：

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N} E_{xf}^*(t_n)A_f^*(t_n) \\ \sum_{n=0}^{N} E_{yf}^*(t_n)A_f^*(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx}(\omega_0) & Z_{xy}(\omega_0) \\ Z_{yx}(\omega_0) & Z_{yy}(\omega_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N} H_{xf}^*(t_n)A_f^*(t_n) \\ \sum_{n=0}^{N} H_{yf}^*(t_n)A_f^*(t_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N} E_{xf}^*(t_n)B_f^*(t_n) \\ \sum_{n=0}^{N} E_{yf}^*(t_n)B_f^*(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx}(\omega_0) & Z_{xy}(\omega_0) \\ Z_{yx}(\omega_0) & Z_{yy}(\omega_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N} H_{xf}^*(t_n)B_f^*(t_n) \\ \sum_{n=0}^{N} H_{yf}^*(t_n)B_f^*(t_n) \end{pmatrix} \quad (2—19)$$

或

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N} E_{xf}(t_n)A_f(t_n) \\ \sum_{n=0}^{N} E_{yf}(t_n)A_f(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx}(\omega_0) & Z_{xy}(\omega_0) \\ Z_{yx}(\omega_0) & Z_{yy}(\omega_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N} H_{xf}(t_n)A_f(t_n) \\ \sum_{n=0}^{N} H_{yf}(t_n)A_f(t_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N} E_{xf}(t_n)B_f(t_n) \\ \sum_{n=0}^{N} E_{yf}(t_n)B_f(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx}(\omega_0) & Z_{xy}(\omega_0) \\ Z_{yx}(\omega_0) & Z_{yy}(\omega_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N} H_{xf}(t_n)B_f(t_n) \\ \sum_{n=0}^{N} H_{yf}(t_n)B_f(t_n) \end{pmatrix} \quad (2—20)$$

上面各式中$E_{xf}(t)$，$E_{yf}(t)$，$H_{xf}(t)$，$H_{yf}(t)$及$E_{xf}^*(t)$，$E_{yf}^*(t)$，$H_{xf}^*(t)$，$H_{yf}^*(t)$分别表示相应电磁场分量的时间序列经过窄带通复数滤波器后生成的复信号的瞬时值或瞬时复振

幅。$A_i(t)$和$B_i(t)$表示$E_{xi}(t)$，$E_{yi}(t)$，$H_{xi}(t)$，$H_{yi}(t)$中任意两道的数据。

2.对上述方法的改进

实现上述复数滤波需要作两次褶积运算，计算时间较长，为了提高计算速度，我们采用了递归滤波技术及快速褶积运算，发展了两种新的算法。

（1）时域实现希尔伯特变换的方法

首先对实信号加汉宁窗[1]，然后在24个中心周期上进行窄带递归滤波，具体方法已在本章第五节中叙述过。

对滤波后的窄带信号要作格值和相移校正。格值校正与常规方法相同，即每次滤波后乘以相应道的相应中心周期上的仪器格值。相移校正要在时间域进行，改正量可采用下式计算：

$$\frac{\alpha_{ij}\cdot T_i}{2\pi\cdot\Delta T}=\frac{\alpha_{ij}\cdot T_i}{360^\circ\cdot\Delta T}$$

式中 α_{ij}——第j道第i个中心周期处的仪器相移值。

然后对各道各中心周期的窄带信号按下式作离散希尔伯特变换，即：

$$x(n\Delta T)=\frac{2}{\pi}\sum_{m=\frac{(n+1)-(-2)}{2}}^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{2m-1}\hat{x}[(n-2m+1)\Delta T]$$

由此可以构成窄带复信号$x_i(n\Delta T)=x(n\Delta T)+i\hat{x}(n\Delta T)$，也可以利用前面谈过的公式求出瞬时复振幅值，再由式(2—19)或式(2—20)计算出张量阻抗元素。这种方法减少了一次褶积运算，相对复数滤波方法有了改进，但仍比一般处理大地电磁资料的最小二乘法所需要的计算时间长一些。为了进一步提高这种方法的效率，我们引用了快速褶积，在频率域实现希尔伯特变换。

（2）频率域实现希尔伯特变换的方法

首先对各道原始数据$x(t)$作快速傅氏变换，求出其频谱$X(f)$，然后乘以希尔伯特变换的频率传递函数$H(f)$，得：

$$\hat{X}(f)=X(f)\cdot H(f)$$

再对$\hat{X}(f)$作快速傅氏反变换，求出$\hat{x}(t)$，分别对$x(t)$和$\hat{x}(t)$进行窄带递归滤波，作格值和相移校正，构成窄带复信号或计算出瞬时复振幅，求出张量阻抗元素。

四、程序框图及处理结果实例

瞬态谱分析处理程序框图见图2-17。符号M表示处理记录张数，$ICOM$表示道号，I用来控制给定的24个频率点的循环。

图2-18与图2-19分别给出用瞬态谱分析法和最小二乘法对河北易县测点资料的处理结果。相对地说，用瞬态谱分析方法的数据比用最小二乘法的数据稍集中一点。前者存在的问题是，一档数据与二档数据在重叠频段内的重合性不好，这一频段也正是各种算法得到的数据都很分散的频段，说明该频段信噪比较低。

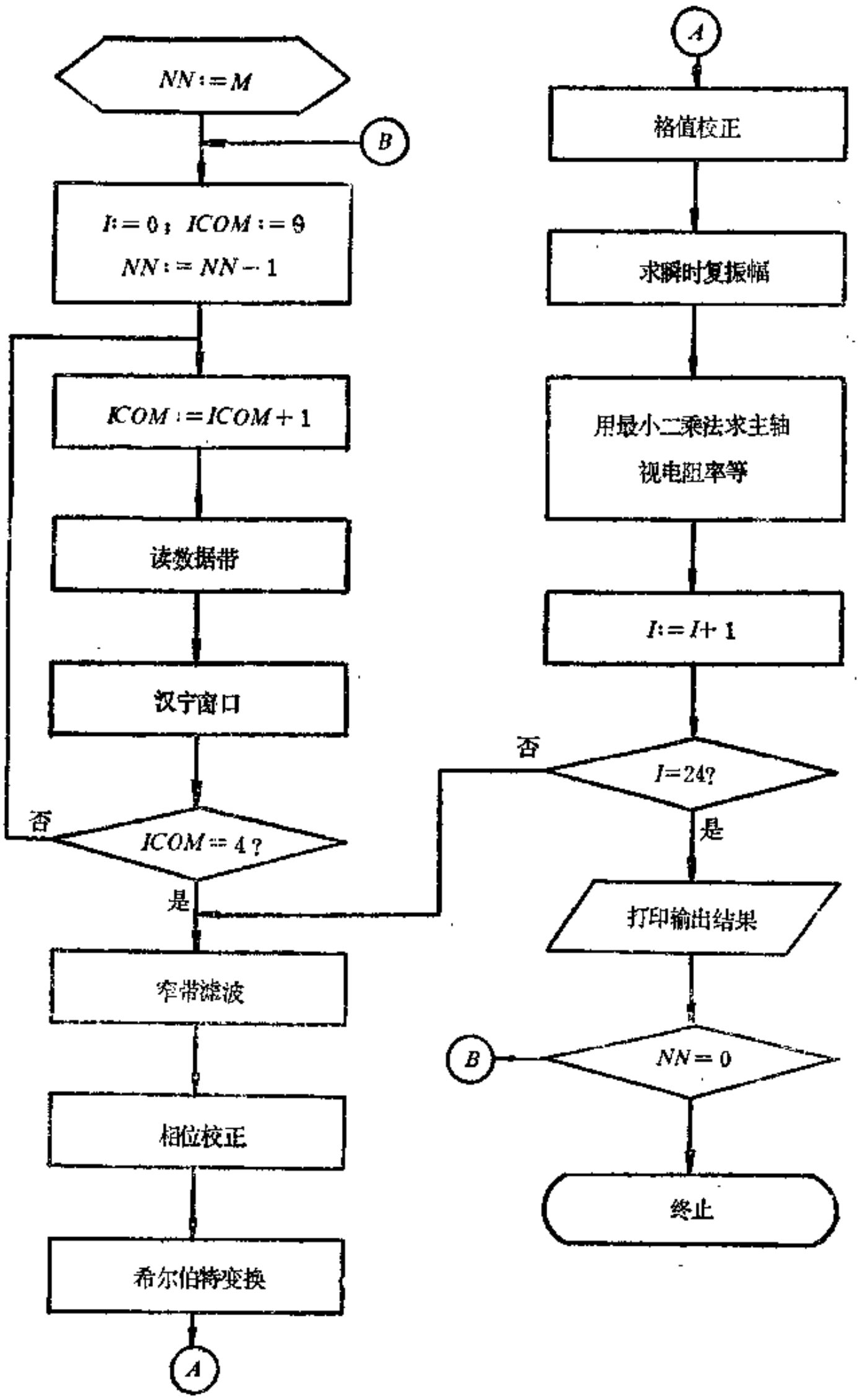


图 2-17　瞬态谱分析处理程序框图

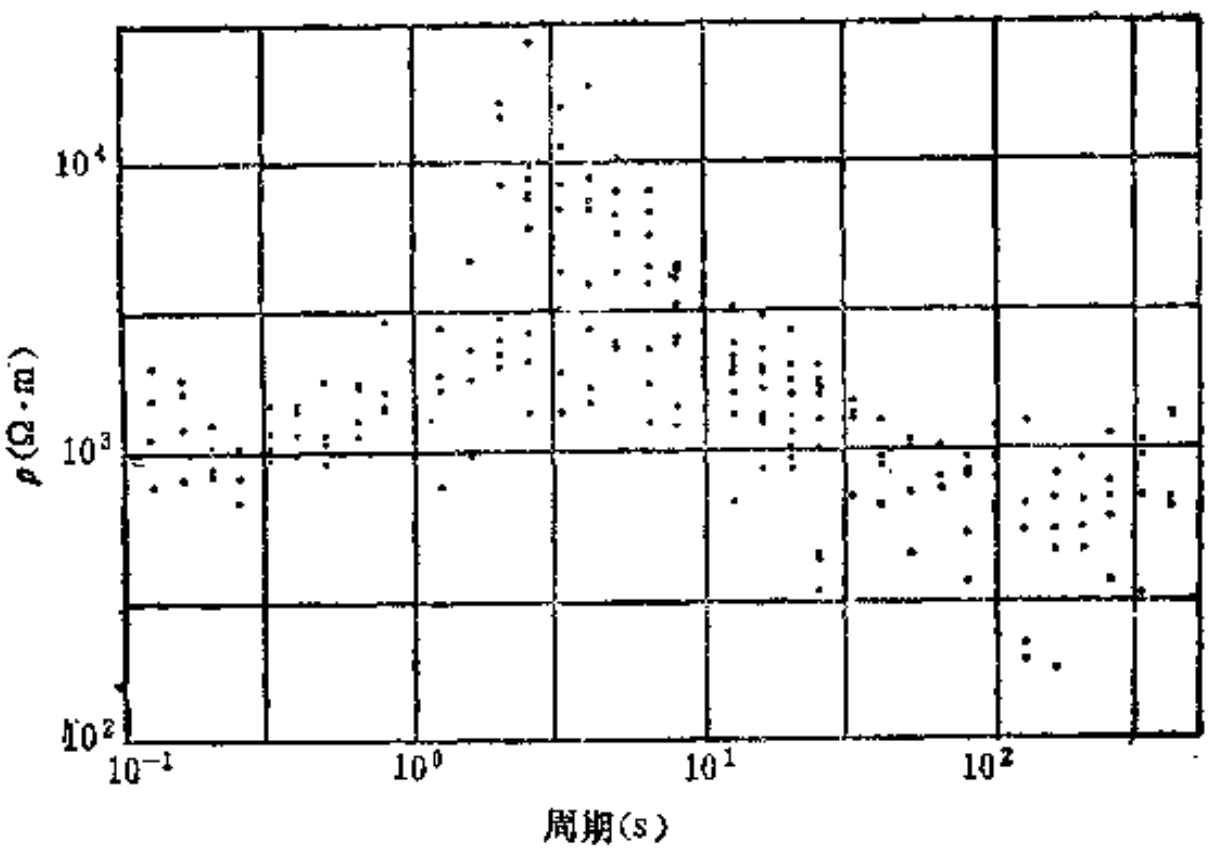


图 2-18　河北易县ρ_s、曲线（瞬态谱分析法）

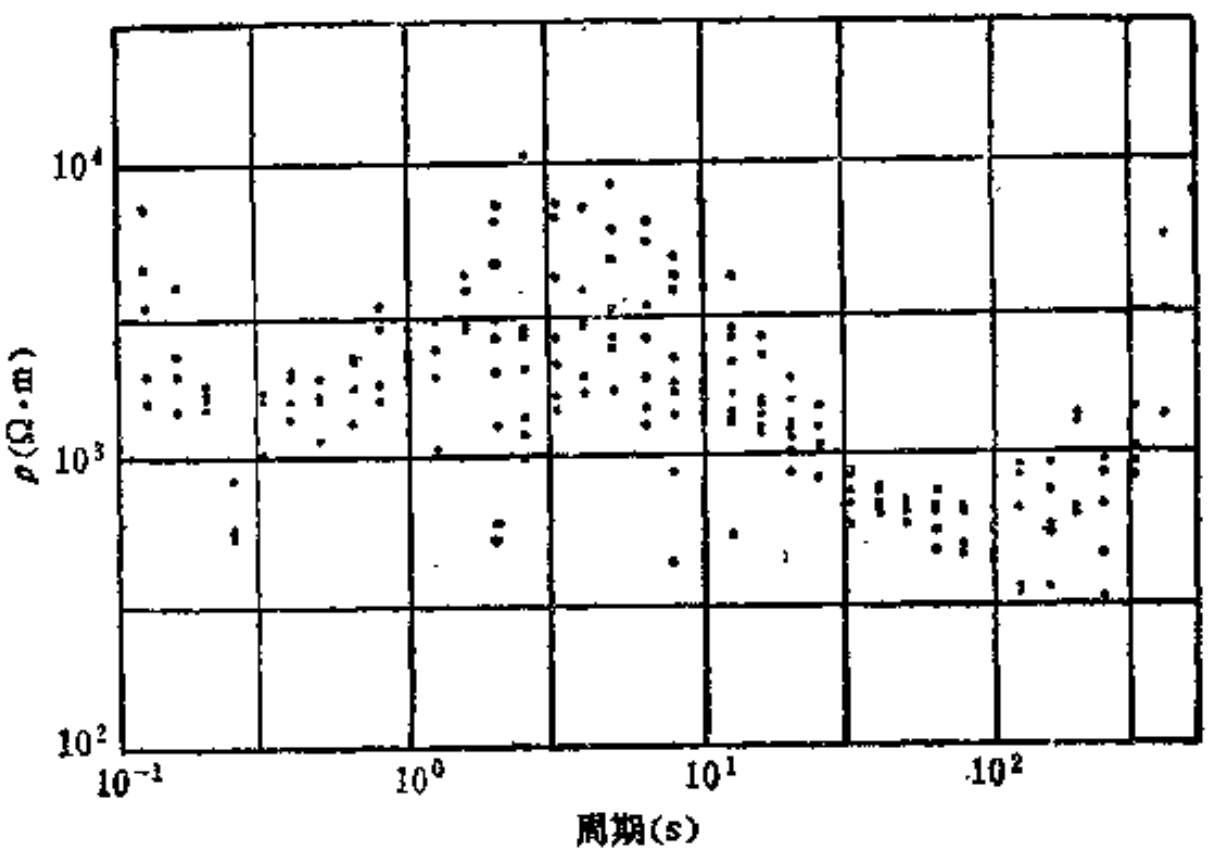


图 2-19　河北易县ρ_s、曲线（最小二乘法）

第八节　大地电磁测深资料的级联分样处理方法

一、方法原理与数学模型

1.级联分样谱估算

谱估算工作分三步进行。

第一步是级联分样，即从输入数据中连续地隔点取数并通过一个数字去假频滤波器产生一组新的数据。零级数据本是原始数据。第一级是对原始数据串进行假频滤波，并对这

一数据串隔点取数，产生一新的数据串。第二级产生的数据串是对一级数据串进行去假滤波后隔点取数获得的。每一级选数都重复这一过程。本程序用了7级分样。

第二步是对每一级数据序列加汉宁窗口和对每一级序列中的数据进行分组，每32点构成一组，进行余弦和正弦变换，计算第六和第八谐波的傅氏系数。在较高的分样级中，要在该级上产生一个32点数据串需要很长的时间，因此采取了交错取数方案，也就是32点数据段中有一部分被交错使用，一个数据点可分布在两个数据串中。这时相邻的数据串不是完全独立的，但这样交错取数可以使数据得到充分利用。

第三步是计算4个道的自、互功率谱。从第二步得到的每一个电磁分量的傅氏系数中，取出相同频率的傅氏系数，就可以求出该频率的自、互功率谱。运用*H*预测相干度和两个互相垂直的水平磁场间的常相干度来衡量大地电磁场受噪声污染的程度。可以规定一个门槛值来决定资料的取舍，用合格的信噪比大的功率谱来估算张量阻抗要素。

现将具体作法及有关公式叙述如下。

（1）选数和去假频滤波

对于一数据序列隔点选数将产生一个采样间隔两倍于原始数据序列的新数据序列。这样折叠频率也相应减小一倍。因此在选数之前，有必要对原数据进行去假频滤波。所用滤波器系数是：

$$h_0 = 1.0$$
$$h_1 = 3.41421356$$
$$h_2 = 4.87100924$$
$$h_3 = 3.41421356$$
$$h_4 = 1.0$$

在以下的讨论中将上述滤波器系数简单表示成1.，3.，4.，3.，1.。

每一级数据序列的构成如图2-20所示。其中每一水平点线表示所给定的选数级的数据点序列。零级数据串就是原始数据。一级数据串每一个数据点是零级相邻5个数据点的加

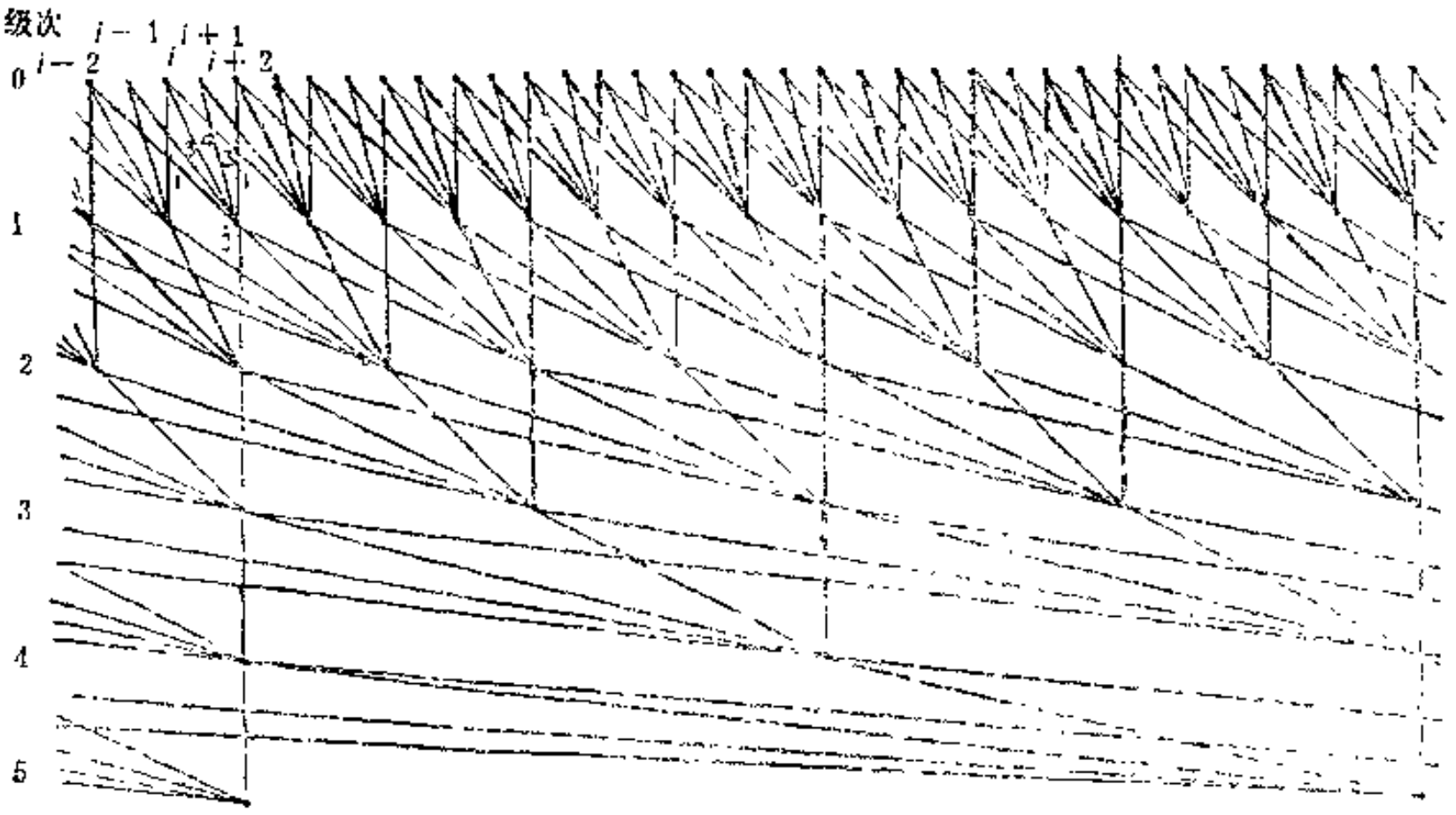


图 2-20　分段分选法图示

权和。用x_{1i}表示第一级的第i个数据点的值：

$$x_{1i} = 1. \times x_{0i-2} + 3. \times x_{0i-1} + 4. \times x_{0i} + 3. \times x_{0i+1} + 1. \times x_{0i+2}$$

式中 x_{0i}——表示零级第i个数据点。

图2-21是级联分样的原理图。它说明了如何利用分样和去假频滤波产生新的数据序列以及如何应用汉宁窗口及余弦、正弦变换产生傅氏系数的过程。

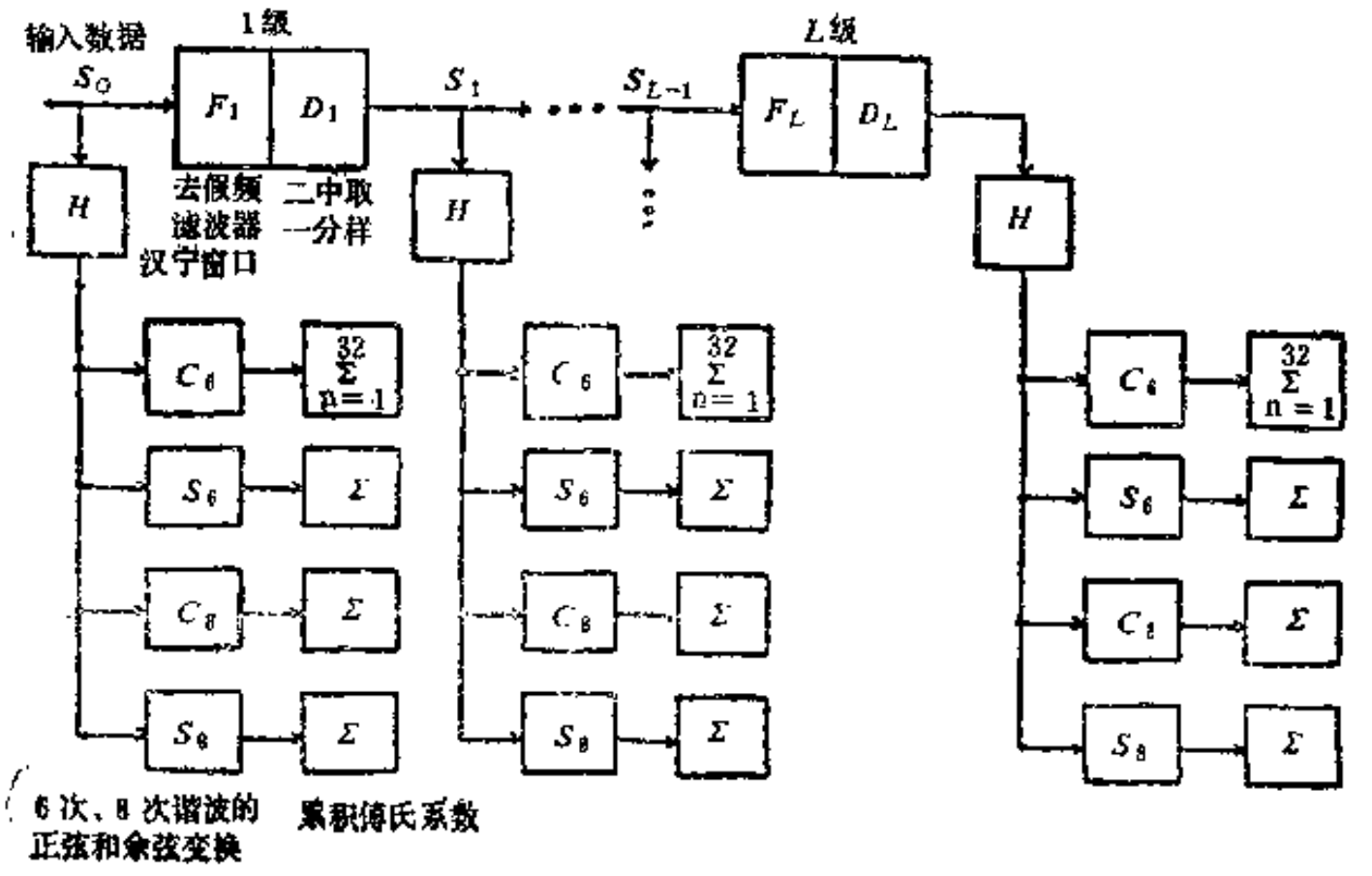


图 2-21 级联分样原理框图

（2）计算傅氏系数

对任意级上的数据每取32个相邻点作为一组，通过汉宁窗口和正弦、余弦变换，求出第六和第八谐波的傅氏系数的实部和虚部。用k表示谐波数，ΔT 表示采样间隔，L表示采样级，则第k谐波的频率f_k由下式计算：

$$f_k = \frac{k}{32\Delta T \times 2^L}$$

用C_{kr}表示第k谐波的傅氏系数的实部，C_{ki}表示虚部，S_n为待变换的数据，则：

$$C_{kr} = \sum_{n=0}^{31} S_n \cdot \frac{1}{2}\left[1 - \cos\frac{n\pi}{16}\right]\left[\cos\frac{kn\pi}{16}\right]$$

$$C_{ki} = \sum_{n=0}^{31} S_n \cdot \frac{1}{2}\left[1 - \cos\frac{n\pi}{16}\right]\left[-\sin\frac{kn\pi}{16}\right]$$

（3）交错

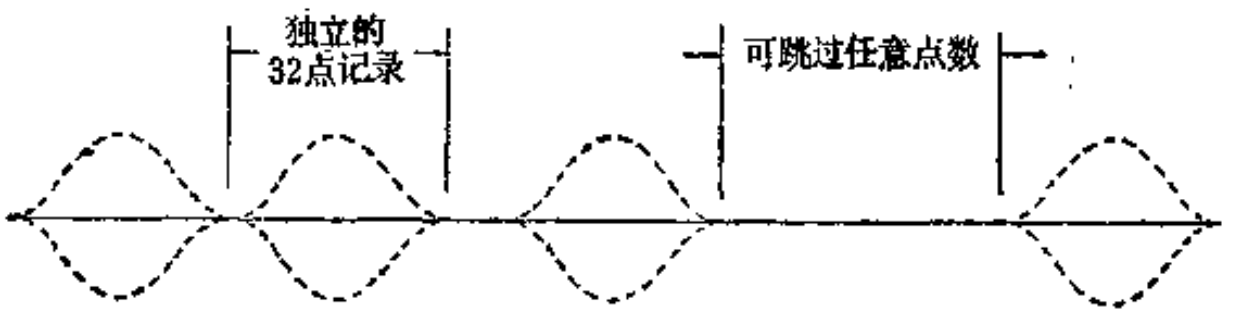


图 2-22 求傅氏系数记录示意图

当级数较高时，相邻点之间的时间间隔可能相当大，这样对一适当长的记录数据序列来说，在计算张量阻抗要素中所用到的点值经常是相当少的，容易产生统计上的分散。在图2-22中，接近记录两端的点值所起的作用是相当小的，为了在给定的数据中收集到更多的信息，采用了交错手段，使之产生一种新的记录。在原记录中起主要作用的数据点，在新记录中仅能起很小的作用。图2-23说明了这种交错的方法，交错步长为16。

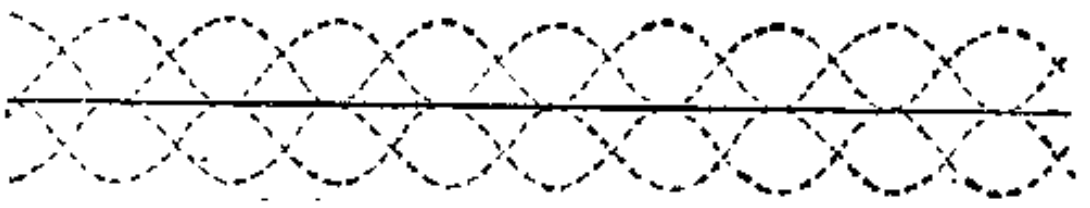


图 2-23　交错原理示意图

（4）计算功率谱

当四个分量的傅氏谱求得后，就可以直接对某一频率进行功率谱的计算。

用A^*和B^*分别表示任意两个电磁场分量的傅氏谱A和B的复共轭，则：

$$\text{自功率谱}\ \langle AA^*\rangle = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} A_n A_n^*$$

$$\text{互功率谱}\ \langle AB^*\rangle = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} A_n B_n^*$$

在低的分样级中用于计算功率谱的傅氏谱个数要远远超过高分样级中的个数，这是由于所使用的记录数据的长度是固定的。

当然，在计算功率谱之前要进行仪器格值及相移校正。

2.谱的质量检测和张量阻抗要素的计算

关于谱的质量检测，采用了预测相干度、常相干及全信息矢量相干度。E预测相干度 $\gamma^2_{E_x^p E_x}$ 和H预测相干度 $\gamma^2_{H_x^p H_x}$ 的表达式为：

$$\gamma^2_{E_x^p E_x} = \frac{|\langle E_x^p E_x^*\rangle|^2}{\langle E_x^p E_x^{p*}\rangle \langle E_x E_x^*\rangle}$$

$$\gamma^2_{H_x^p H_x} = \frac{|\langle H_x^p H_x^*\rangle|^2}{\langle H_x^p H_x^{p*}\rangle \langle H_x H_x^*\rangle}$$

式中H_x^p和E_x^p为计算的磁场分量和电场分量，H_x和E_x是实测的。

计算张量阻抗要素的公式与本章第三节中叙述的最小二乘法的公式（2—4）至(2—7)相同，不过只取$A^* = H_y^*$，$B^* = H_x^*$一种算法。以Z_{xy}为例，其计算公式为：

$$Z_{xy} = \frac{\langle H_x H_x^*\rangle \langle E_x H_y^*\rangle - \langle E_x H_x^*\rangle \langle H_x H_y^*\rangle}{\langle H_x H_x^*\rangle \langle H_y H_y^*\rangle - \langle H_y H_x^*\rangle \langle H_x H_y^*\rangle}$$

二、级联分样的特点

级联分样在国外（加拿大凤凰公司大地电磁实时处理系统）用于实时处理。级联分样可以不必象快速傅氏变换那样需要储存大量的原始数据，因为所用时间序列仅32个数据点。运算速度也比普通傅氏变换快。因此，这种技术很容易在微机上实现，并应用于大地电磁测深数据的现场处理。对于目前固定采样间隔的数据，只要加大分选级数，利用级联分样可以得到多个频率点处的傅氏谱。在高频部分不采用交错记录，在低频部分采用交错级。求傅氏系数时应用的各32点数据记录可以是相邻记录，也可以是不相邻记录段。对每

一功率谱估算的独立样本是在时间域进行平均，而不是在频率域中平均。有时异常能量导致数据序列中出现尖峰值，此时应用归一化方法将其尖峰去掉。这个过程在零级选数中实现。

三、程序框图及其功能

本程序由一个1.0级覆盖和两个1.1级覆盖组成。

1.0级覆盖是一个主控程序，框图见图2-24。这个程序负责调用系统子程序翻译卡片，建立参数旗标并负责调用两个子程序，完成本方法的计算。

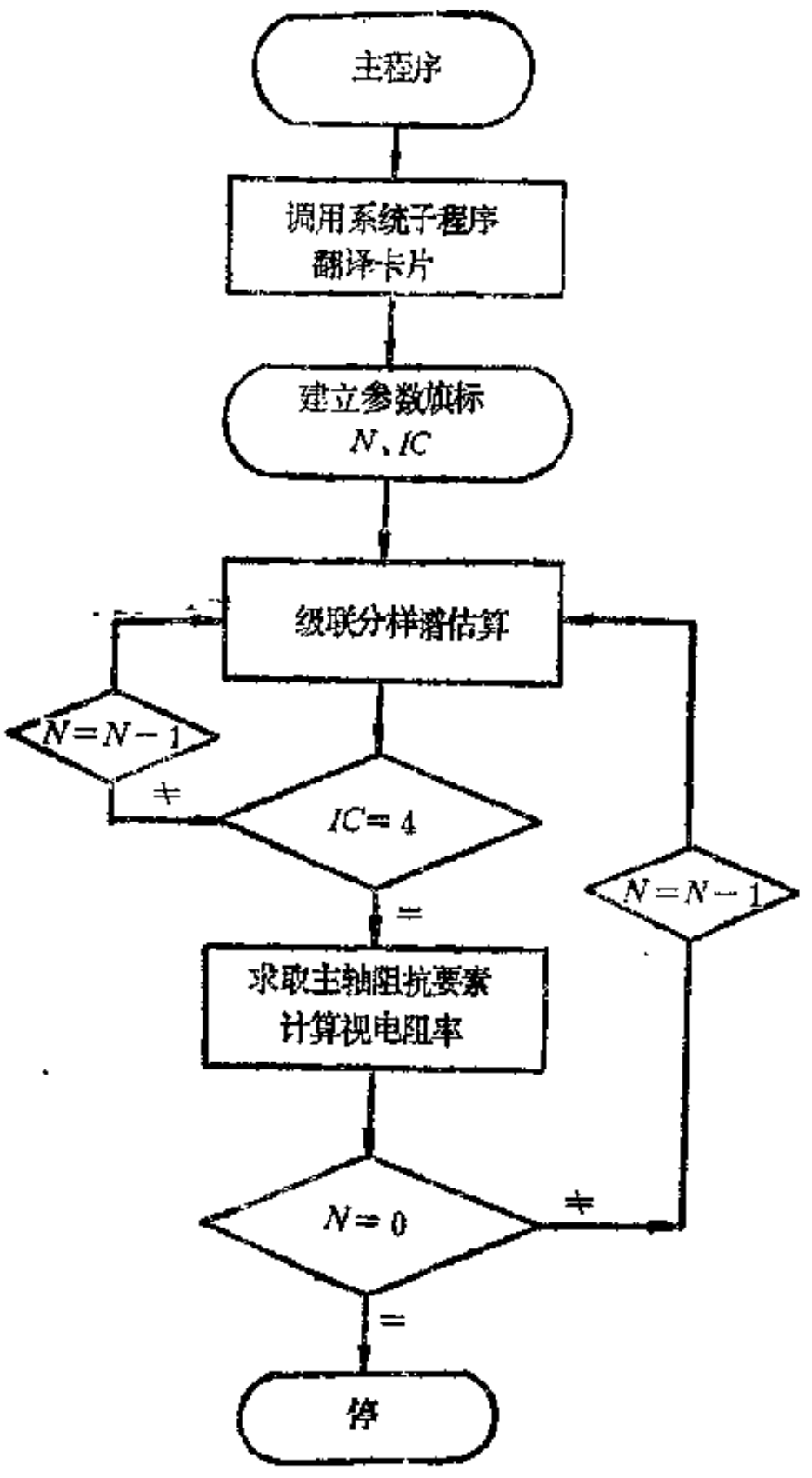


图 2-24　主控程序框图

1.1级覆盖F子程序主要负责原始数据的输入，仪器格值和相移的校正及级联分样谱估算的实现，框图见图2-25。

1.1级覆盖Z子程序负责计算每个频率的张量阻抗要素及其他电性参数，框图见图2-26。

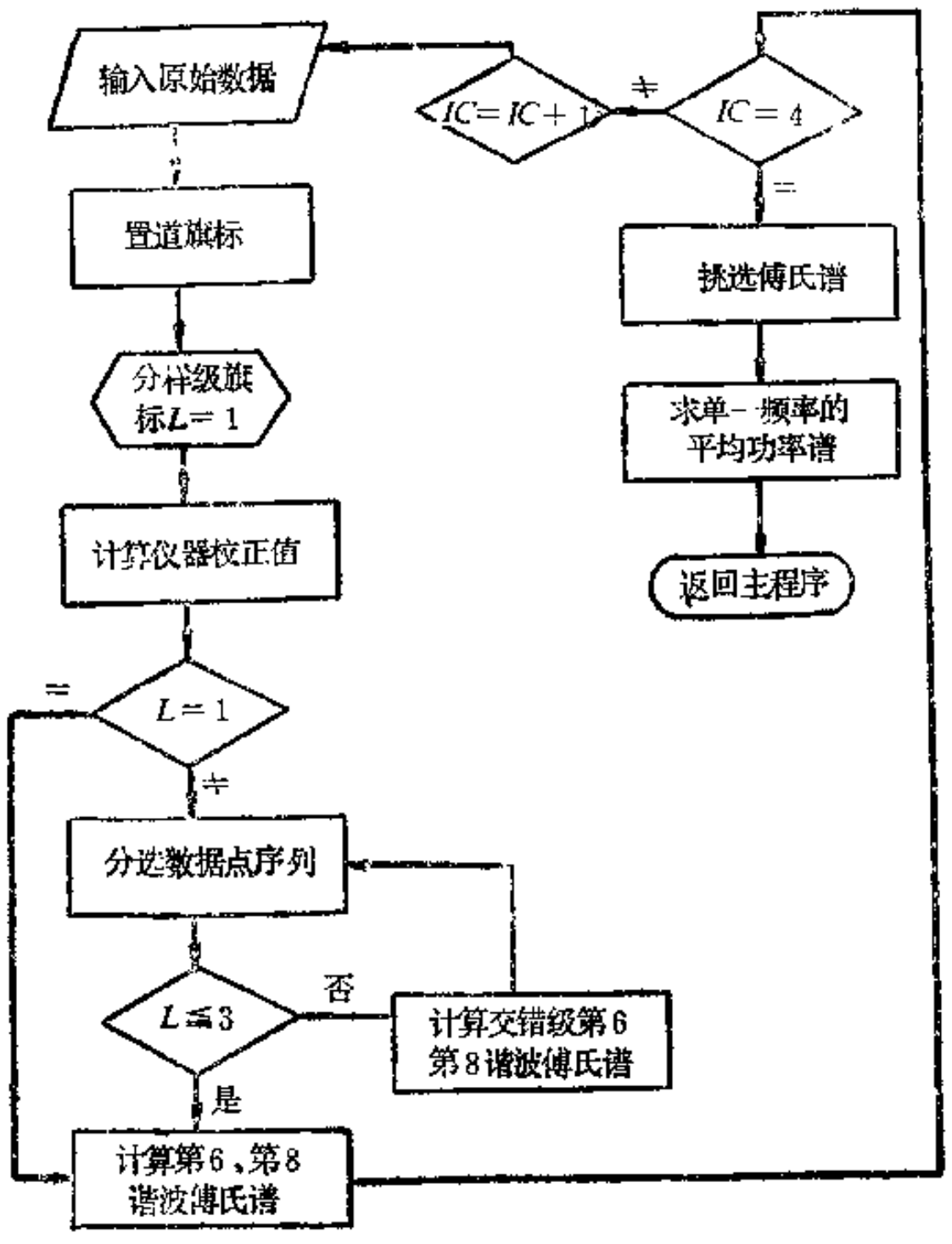


图 2-25 F子程序框图

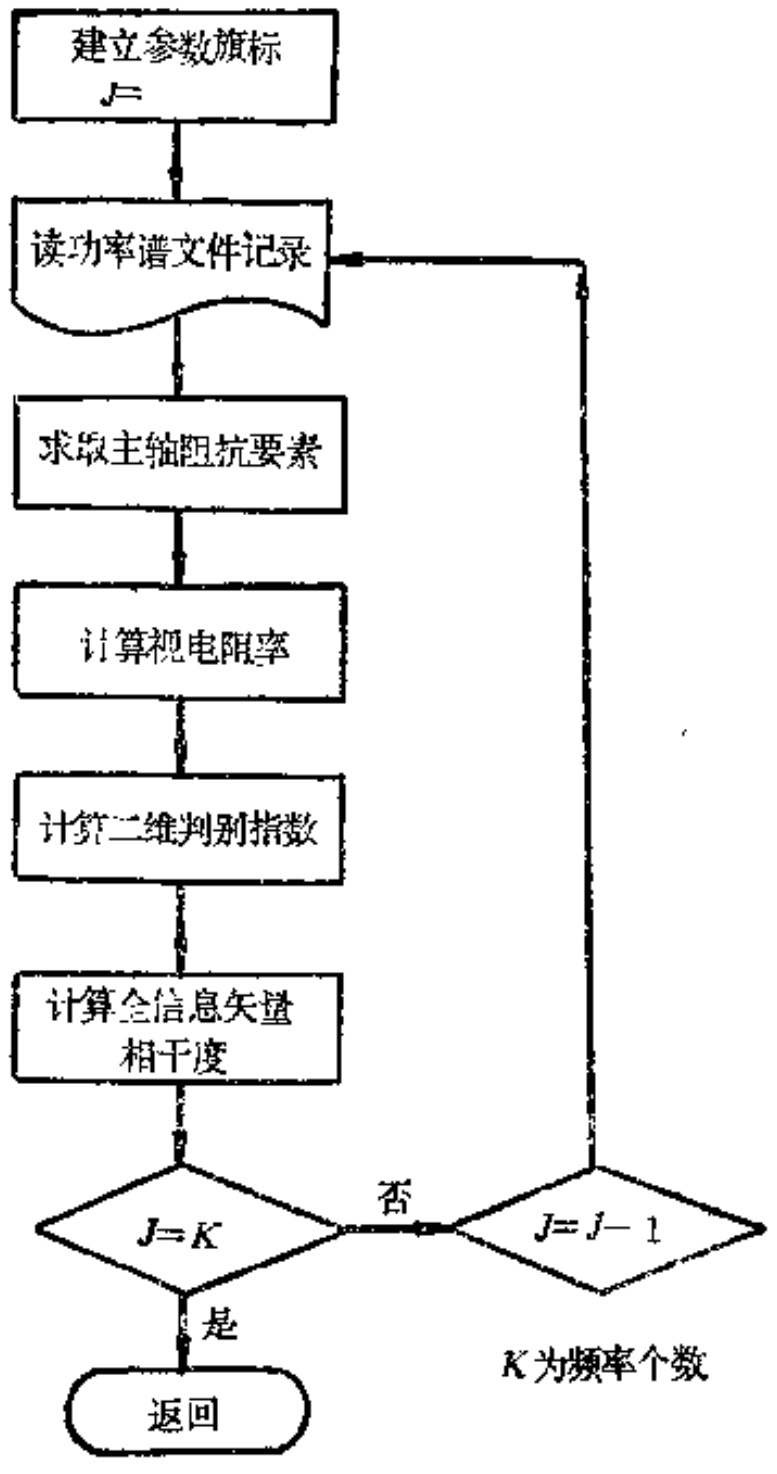


图 2-26 Z子程序框图

四、处理结果实例

以固安-霸县剖面14号测点为例，野外记录是用SD-Ⅱ数字大地电磁测深仪观测记录的。用本方法处理的结果见图2-27，而图2-28是用最小二乘法处理的结果。全信息矢量相干度$CP \geqslant 0.5$。两个方向的视电阻率曲线用了不同的标志点。ρ_{xy}曲线用 * 表示，ρ_{yx} 用○

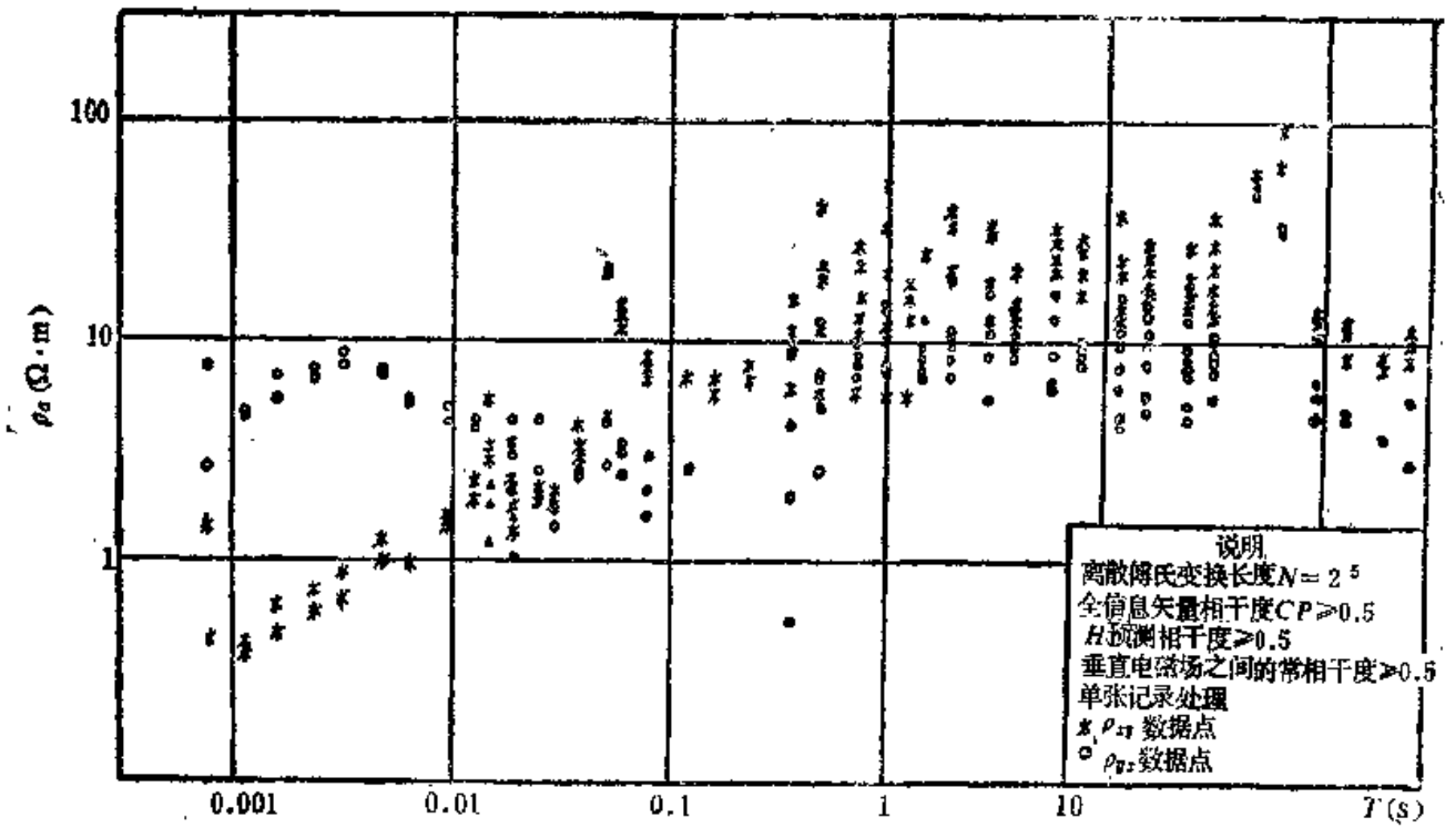


图 2-27　固霸剖面14号测点曲线（级联分样）

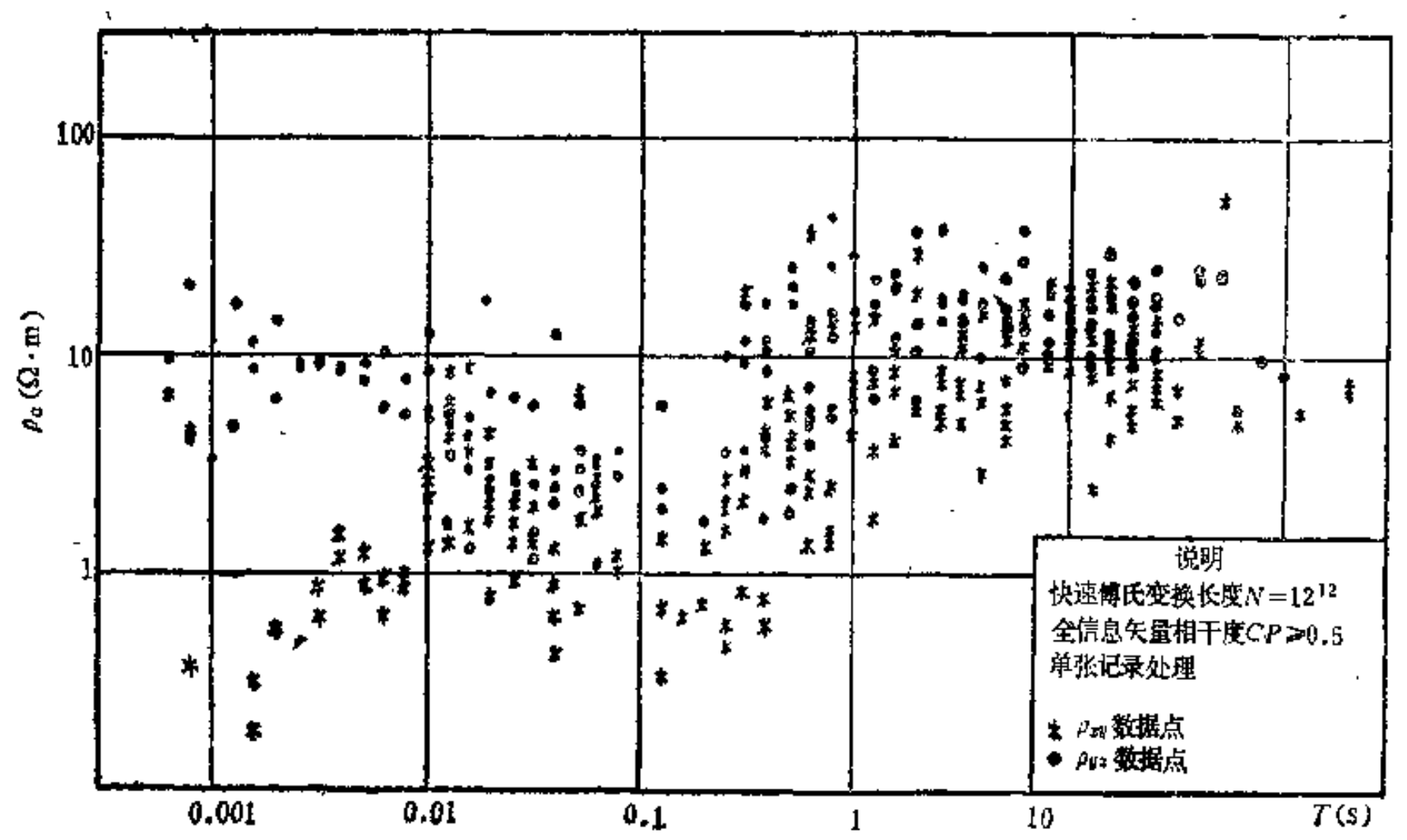


图 2-28　固霸剖面14号测点曲线（最小二乘法）

表示 。总体来看，图 2-27和图2-28两张图的形态 相似。大于0.6赫 兹的资料都比较好，0.06～0.6赫兹的资料较分散。低频段0.0008～0.06赫兹的资料在 连续 性和重复性方面图2-27优于图2-28。可以看出，级联分样MT资料处 理 方法 的 效果 是明显的。其优点是便于选取好的资料段，并可用于野外现场处理，提高大地电磁测深的工作效率。

第三章　一维模型大地电磁测深曲线的反演解释

第一节　大地电磁测深曲线一维反演解释的数学描述

一、曲线拟合的目标函数

随着电子计算机的广泛应用，大地电磁测深曲线的解释已经普遍采用了自动反演方法。

自动反演的主要方法是曲线拟合法，即寻找一个模型的理论曲线，使其与实测曲线在均方差极小意义下重合得最好。在大地电磁测深资料一维解释中，研究的对象是水平层状地电模型。设有h层，就有$n=2h-1$个参数，即各层的电阻率和厚度，记为列向量形式：

$$\vec{\lambda}=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n]^T$$

实际观测数为m个，是对应不同周期的视电阻率值，也记为列向量形式：

$$\vec{\rho}_a=[\rho_{a1},\rho_{a2},\cdots,\rho_{am}]^T$$

一般情况下$m>n$。各周期的理论视电阻率值是模型参数$\vec{\lambda}$的函数，记为：

$$\vec{\rho}_c=[\rho_{c1}(\vec{\lambda}),\rho_{c2}(\vec{\lambda}),\cdots,\rho_{cm}(\vec{\lambda})]^T$$

层状模型理论值与观测值之间拟合的判据一般是取目标函数：

$$F(\vec{\lambda})=\sum_{i=1}^{m}(\rho_{ai}-\rho_{ci})^2=\sum_{i=1}^{m}f_i^2(\vec{\lambda})=\|\vec{f}(\vec{\lambda})\|^2=\text{极小} \qquad (3-1)$$

设$\vec{\lambda}_0$为初始参数列向量，　$f_i(\vec{\lambda})$可线性近似为：

$$f_i(\vec{\lambda})=f_i(\vec{\lambda}_0)+[\nabla f_i(\vec{\lambda}_0)]^T\cdot\Delta\vec{\lambda}$$

式中　$\Delta\vec{\lambda}=\vec{\lambda}-\vec{\lambda}_0$；

$$\nabla f_i(\vec{\lambda}_0)=\left[\frac{\partial f_i(\vec{\lambda})}{\partial\lambda_1},\cdots\cdots,\frac{\partial f_i(\vec{\lambda})}{\partial\lambda_n}\right]^T_{\vec{\lambda}=\vec{\lambda}_0},\qquad i=1,2,\cdots,m。$$

将上式写成矩阵形式为：

$$\vec{f}(\vec{\lambda})=\vec{f}_0-\mathbf{A}_0\Delta\vec{\lambda} \qquad (3-2)$$

式中　$\vec{f}_0=\vec{f}(\vec{\lambda}_0)=\vec{\rho}_a-\vec{\rho}_c(\vec{\lambda}_0)=\Delta\vec{\rho}_0$；

$$\mathbf{A}_0=[a_{ij}]=\left[-\frac{\partial f_i(\vec{\lambda})}{\partial\lambda_j}\right]_{\vec{\lambda}=\vec{\lambda}_0}=\left[\frac{\partial\rho_{ci}(\vec{\lambda})}{\partial\lambda_j}\right]_{\vec{\lambda}=\vec{\lambda}_0}。$$

$$i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n。$$

这样，利用式（3—2）将式（3—1）化为：

$$\|\Delta\vec{\rho}_0-\mathbf{A}_0\Delta\vec{\lambda}\|^2=\text{极小} \qquad (3-3)$$

根据函数的极值条件，可得如下法方程组：

$$\mathbf{A}_0^T\mathbf{A}_0\Delta\vec{\lambda}-\mathbf{A}_0^T\Delta\vec{\rho}_0=0 \tag{3—4}$$

如果矩阵 $\mathbf{A}_0^T\mathbf{A}_0$ 满秩，则方程组（3—4）有唯一解：

$$\Delta\vec{\lambda}=(\mathbf{A}_0^T\mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{A}_0^T\Delta\vec{\rho}_0$$

令 $\vec{\lambda}_1=\vec{\lambda}_0+\Delta\vec{\lambda}$，$\vec{\lambda}_1$ 便是解的首次近似，然后重复迭代，直至符合要求为止。这便是取目标函数为（3—1）式的最小二乘法（高斯-牛顿法）迭代反演过程。

二、线性方程组的病态

对于大地电磁测深曲线反演而言，从目标函数（3—1）式出发所得到的线性方程组（3—4）常常是病态的。这是因为在地电断面中常存在不灵敏参数和测深曲线对于某些模型参数存在等值性的缘故。从数学角度看，就是方程组的系数矩阵 $\mathbf{A}_0^T\mathbf{A}_0$ 中含有小的特征值以及某些列向量近于线性相关，导致解不能稳定收敛。

三、解病态方程组的几种途径

在数学上，关于解病态或奇异线性方程组的方法问题，已经作了许多讨论。这里只是对如何提高大地电磁测深曲线反演的效果略加叙述。

一种途径是人为地把系数矩阵的主对角元素加上一个可调整的正系数，这相当于加大了特征值，从而改善了系数矩阵的条件，使解趋于稳定。这种方法就是马夸特法，也称为阻尼最小二乘法。

另一种途径是用数值稳定性较强的算法直接解超定方程：

$$\mathbf{A}\Delta\vec{\lambda}=\Delta\vec{\rho} \tag{3—5}$$

这时系数矩阵$\mathbf{A}$的条件数相对矩阵 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 缩小了 $\left|\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}\right|$ 倍，因而使条件得到改善。其中 σ_{max} 和 σ_{min} 分别为矩阵 $\mathbf{A}$ 的最大和最小特征值。可通过求出矩阵 $\mathbf{A}$ 的广义逆矩阵来解超定方程（3—5），确定参数改正量。这种方法称为广义逆矩阵反演法。

第二节　用马夸特法做大地电磁测深资料的一维反演解释

一、马夸特法的基本原理

上节已经提到，马夸特法是用增大系数矩阵主对角元素的办法来改善条件，使解趋于稳定。这种方法所对应的目标函数是：

$$\psi(\vec{\lambda})=\sum_{i=1}^{m}(\rho_{ai}-\rho_{ci})^2+\alpha\sum_{j=1}^{n}\Delta\lambda_j^2 \tag{3—6}$$

相应的迭代求解参数改正量 $\Delta\vec{\lambda}$ 的法方程组是：

$$\left[\mathbf{A}_0^T\mathbf{A}_0+\alpha I\right]\Delta\vec{\lambda}-\mathbf{A}_0^T\Delta\vec{\rho}_0=0 \tag{3—7}$$

式中α是阻尼系数，I是单位矩阵，其他符号的意义在上节中已有说明。

就反演方法而言，马夸特法是最小二乘法与梯度法的结合。由（3—7）式可以看出，当阻尼系数α为零时，它就是最小二乘法的法方程组（3—4）；当α充分大时，它就退化成为梯度法。在迭代反演过程中，根据需要不断自动地调整α值，可以获得较快的收敛速度和较好的反演结果。

马夸特法的迭代反演过程如下：

① 读入实测视电阻率值和对应的周期、初始模型参数、拟合判据、初始阻尼系数$\alpha^{(0)}$及常数ν。一般取$\alpha^{(0)}=10$，$\nu=10$。

② 计算实测曲线与模型理论曲线的均方差F^0。

③ 令$\alpha=\alpha^{(0)}/\nu$。

④ 解方程组（3—7），求得参数改正量$\Delta\vec{\lambda}$。

⑤ 改正参数，再计算方差$F^{(k+1)}$（用$F^{(k)}$表示改正前的方差）。

⑥ 若$F^{(k+1)}\leqslant F^{(k)}$，则此次迭代成功，如果此时反演结果已满足拟合判据要求，就输出结果，结束反演，否则以改正后的参数作为初始参数，令$\alpha:=\alpha/\nu$，重复④至⑥；若$F^{(k+1)}>F^{(k)}$，则此次迭代失败，用改正前的参数作为初始参数，令$\alpha:=\alpha\cdot\nu$，重复④至⑥。

二、针对大地电磁测深曲线的特点对马夸特法的修改

马夸特法是解病态方程组的有效方法之一。但是实践结果表明，对于大地电磁测深曲线反演而言，还必须针对测深曲线的特点，对马夸特法进行修改，才能取得良好的效果。

测深曲线的一个重要特点是表示在对数坐标系中，曲线形态的变化反映视电阻率的对数的变化，而不是视电阻率本身。测深曲线的另一个重要特点是曲线形态变化的幅度，不取决于模型参数的绝对变化量$\Delta\lambda_j$，而是取决于相对变化量$\Delta\lambda_j/\lambda_j$。

根据测深曲线的这两个特点，我们对马夸特法进行了修改。就目标函数（3—6）式来说，第一个求和项应由视电阻率之差改成对数视电阻率之差；第二个求和项应由参数的绝对变化量改成相对变化量，即目标函数应修改成为：

$$\psi_m(\vec{\lambda})=\sum_{i=1}^{m}(\ln\rho_{ai}-\ln\rho_{ci})^2+\alpha\sum_{j=1}^{n}(\Delta\lambda_j/\lambda_j)^2$$

迭代求解极小值的法方程组相应地应修改成：

$$(\mathbf{U}^T\mathbf{U}+\alpha\mathbf{D})\Delta\vec{\lambda}-\mathbf{U}^T\Delta\vec{L}=0$$

式中

$$\mathbf{U}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{\rho_{c1}}\frac{\partial\rho_{c1}}{\partial\lambda_1} & \frac{1}{\rho_{c1}}\frac{\partial\rho_{c1}}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{1}{\rho_{c1}}\frac{\partial\rho_{c1}}{\partial\lambda_n}\\ \frac{1}{\rho_{c2}}\frac{\partial\rho_{c2}}{\partial\lambda_1} & \frac{1}{\rho_{c2}}\frac{\partial\rho_{c2}}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{1}{\rho_{c2}}\frac{\partial\rho_{c2}}{\partial\lambda_n}\\ \vdots & \vdots\\ \frac{1}{\rho_{cm}}\frac{\partial\rho_{cm}}{\partial\lambda_1} & \frac{1}{\rho_{cm}}\frac{\partial\rho_{cm}}{\partial\lambda_2}\cdots\frac{1}{\rho_{cm}}\frac{\partial\rho_{cm}}{\partial\lambda_n}\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1^2} & & & 0\\ & \frac{1}{\lambda_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n^2}\end{bmatrix}$$

$$\vec{\Delta L}=[\ln(\rho_{a1}/\rho_{c1})\quad \ln(\rho_{a2}/\rho_{c2})\cdots\ln(\rho_{am}/\rho_{cm})]$$

三、程序框图及程序段选录

1. 程序框图

马夸特法反演程序框图见图 3-1。符号 ML 表示反演曲线的条数。

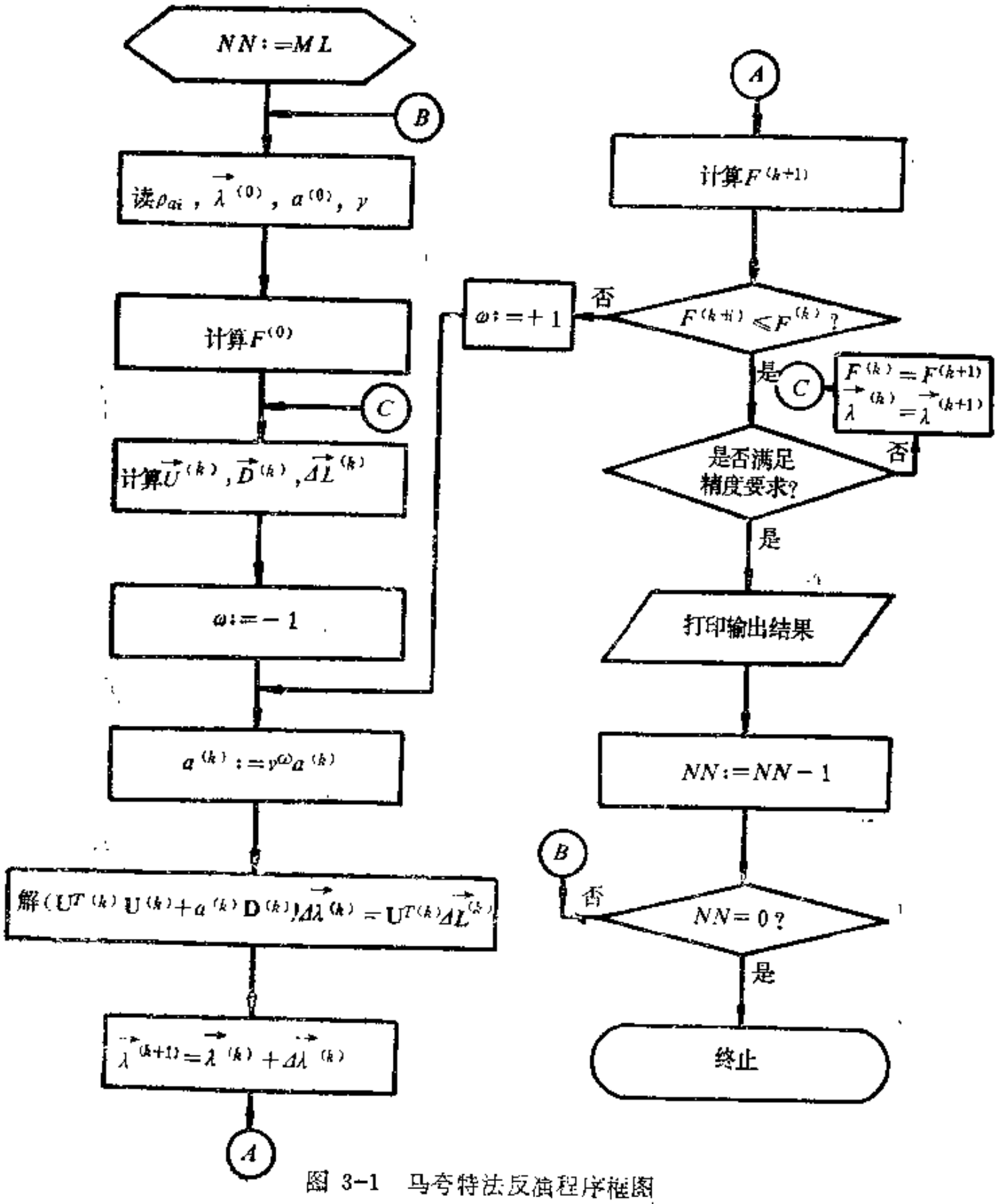


图 3-1　马夸特法反演程序框图

2．程序段选录

（1）程序段功能

读入数据，计算实测曲线与模型理论曲线的均方差，完成马夸特法迭代反演的全部过程。

（2）数组说明

A　　二维实数组，存放法方程组的系数矩阵元素及右端项。

DRH　　一维实数组，存放参数改正量。

DR　　一维实数组，中间工作单元。

B　　二维实数组，存放法方程组的系数矩阵元素及右端项。

RHH　　一维实数组，存放模型参数。

HR　　一维实数组，存放模型参数。

RC　　一维实数组，存放理论曲线数据。

R　　一维实数组，存放 $LN(RA_I/RC_I)$

P　　二维实数组，存放理论视电阻率对模型参数的偏导数。

PP　　一维实数组，存放实测视电阻率的权系数。

RA　　一维实数组，存放实测视电阻率数据。

T　　一维实数组，存放周期值。

（3）调用子程序说明

CALL PC　调用正演计算理论视电阻率的子程序 PC。

（4）程序

```
      PROGRAM MMT1(INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
      DIMENSION A(19,20),DRH(19),DR(19),B(19,20),RHH(19),HR(19),
     1DIMENSION RC(80),R(80),P(80,19),PP(80),RA(80)
      COMMON/V/ T(80),RH(19),RO
      INTEGER F,E
      REAL MAX
      READ(5,111)NNN
  111 FORMAT(I3)
      READ(5,3)(T(I),I=1,80)
    3 FORMAT(6F12.3)
      WRITE(6,5)T
    5 FORMAT(8X,10F12.3)
    1 READ(5,4)(RA(I),I=1,80)
    4 FORMAT(8F10.3)
      WRITE(6,6)RA
    6 FORMAT(8X,10F8.3)
      READ(5,99)F,N
   99 FORMAT(2I3)
      RR=0.
      DO 221 I=2,F
  221 RR=RR+.5*ABS(ALOG(RA(I)/RA(I-1)))/(F-1)
      EP1=10
  500 MM=0
      M=2*N-1  $   D=100.  $  U=10.
      READ (5,7)(RH(I),I=1,M)
    7 FORMAT(7F10.2)
    2 WRITE(6,8)(RH(I),I=1,M)
    8 FORMAT(2X,3HRH=',10F7.2)
      MM=MM+1
      IF(MM.GE.30)308,309
  308 NNN=NNN-1
      WRITE(6,106)PP
```

```
106   FORMAT(6X,10E11.2)
      WRITE(6,107)(RC(I),I=1,F)
107   FORMAT(5X,3HRC=,10(2X,F7.2))
      IF(NNN.EQ.0) STOP
      GO TO 1
309   CONTINUE
      DO 108 I=1,M
108   RHH(I)=RH(I)
      W1=0.
      DO 10 I=1,F
      RO=T(I)
      CALL PC (F,N)
      RC(1)=RO*RH(1)
      DO 11 K=1,M
      DL=.00001*RH(K)
      Y=RH(K)   $    RH(K)=Y+DL
      RO=T(1)
      CALL PC(F,N)
      R2=RO*RH(1) $  RH(K)=Y-DL
      RO=T(I)
      CALL PC(F,N)
      R1=RO*RH(1)   $  RH(K)=Y
11    P(I,K)=(R2-R1)/(2.*DL)
      R(I)=ALOG(RA(I)/RC(I))
      IF(MM.GT.5) 201,202
201   IF(ABS(R(I).LE.RR) GO TO 202
      PP(I)=1/EXP((ABS(R(I))-RR)**2*C)
      GO TO 10
202   PP(I)=1
10    W1=W1+PP(I)**2*R(I)**2
      IF(MM.EQ.1)300,301
302   FORMAT(5X,3HRC=,10(2X,F7.2))
300   WRITE(6,302)(RC(I),I=1,F)
      GO TO 210
301   CONTINUE
210   WRITE (6,14)W1
14    FORMAT(2X,3HW1=,E15.5)
      D=D/U
      M1=M+1
      DO 15 I=1,M
      DO 15 J=1,M1
15    B(I,J)=0.
      DO 16 I=1,M
      DO 16 J=1,M
      DO 16 K=1,F
16    B(I,J)=B(I,J)+P(K,J)*P(K,I)*PP(K)**2/RC(K)**2
      DO 17 K=1,M
      DO 17 I=1,F
17    B(K,M+1)=B(K,M+1)+R(I)*P(I,K)*PP(I)**2/RC(I)
      E=0.
      DO 101 I=1,M
      DO 101 J=1,M1
101   A(I,J)=B(I,J)
29    DO 30 I=1,M
30    A(I,I)=A(I,I)+D/RHH(I)**2
      DO 36 K=1,M
      MAX=0.
      DO 31 I=K,M
      DO 31 J=1,M
      IF(ABS(MAX).LT.ABS(A(I,J))GO TO 32
      GO TO 31
32    MAX=A(I,J)
      IK=I   $    JK=J
31    CONTINUE
```

```
      IF(MAX.EQ.0.)GO TO 33
      GO TO 34
33    WRITE(6,35)K
35    FORMAT(I4)
      NNN=NNN-1
      IF(NNN.EQ.0)STOP
      GO TO 1
34    CONTINUE
      DO 38 J=1,M1
      Q=A(IK,J)/MAX
      A(IK,J)=A(K,J)
38    A(K,J)=Q
      DO 40 I=1,M
      IF(I.EQ.K) GO TO 40
      Q=-A(I,JK)
      DO 41 J=1,M1
41    A(I,J)=A(I,J)+Q*A(K,J)
40    CONTINUE
36    CONTINUE
      DO 42 J=1,M
      DO 42 I=1,M
      IF(A(I,J).LT.0.5) GO TO 42
      DRH(J)=A(I,M+1-E)
42    CONTINUE
      DO 53 I=1,M
      IF(DRH(I).LE.(-RHH(I))) GO TO 50
      GO TO 53
50    WRITE(6,51)I,DRH(I)
51    FORMAT(2X,I3,F10.3)
      D=D*U
      IF(D.GE.1.E+100)357,358
357   WRITE(6,356) D
356   FORMAT(2X,E15.5)
      NNN=NNN-1
      IF(NNN.EQ.0) STOP
      GO TO 1
358   GO TO 29
53    CONTINUE
      DO 54 J=1,M
54    RH(J)=RHH(J)+DRH(J)
      W2=0.
      DO 56 I=1,F
      RO=T(I)
      CALL PC(F,N)
      RC(I)=RO*RH(1)
      R(I)=ALOG(RA(I)/RC(I))
56    W2=W2+PP(I)**2*R(I)**2
      WRITE(6,57)W2
57    FORMAT(5X,3HW2=,E15.5)
      WRITE(6,157)D
157   FORMAT(5X,2HD=,E15.5)
      EP1=ABS((W2-W1)/W1)
62    IF(W2.LE.W1) 162,163
162   WRITE(6,164) (DRH(I),I=1,M)
164   FORMAT(8X,10E10.2)
      WRITE(6,165)EP1
165   FORMAT(8X,4HEP1=,E15.5)
      GO TO 2
163   D=D*U
      IF(D.GE.1.E+100)257,258
257   NNN=NNN-1
      IF(NNN.EQ.0) STOP
      GO TO 1
258   GO TO 29
      END
```

四、反 演 实 例

表 3－1 给出了对HA型理论曲线的反演结果。该模型的真实参数为：

$\rho_1=1,\ \rho_2=0.2,\ \rho_3=10,\ \rho_4=100,\ h_1=1,\ h_2=2,\ h_3=1$。

表 3-1

NO	F	α	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	h_1	h_2	h_3	备　注
0	15.85	10	0.5	0.4	5.0	200	0.5	4.0	0.5	初始值偏差50～100％
1	0.19×10^{1}	1	0.94	0.28	5.01	96.4	0.51	3.28	0.5	
2	0.17×10^{0}	0.1	0.98	0.26	5.02	99.7	0.82	2.59	0.5	
3	0.73×10^{-2}	0.01	1.0	0.2	5.03	99.9	1.00	2.04	0.5	
4	0.11×10^{-2}	0.001	1.0	0.2	5.03	100	1.00	2.00	0.5	$S_3=h_3/\rho_3=0.1$

经过 4 次迭代后，反演结果已相当准确，其中第三层存在明 显的 S_3 等值性。第三 层的纵向电导 $S_3=h_3/\rho_3=0.1$，而反演结果 $S_3=0.5/5.03\approx0.1$。如果已知ρ_3的真实值，便可准确地确定h_3。

表 3－2 是对 KQH 型理论曲线的反演结果，其真实参数为：

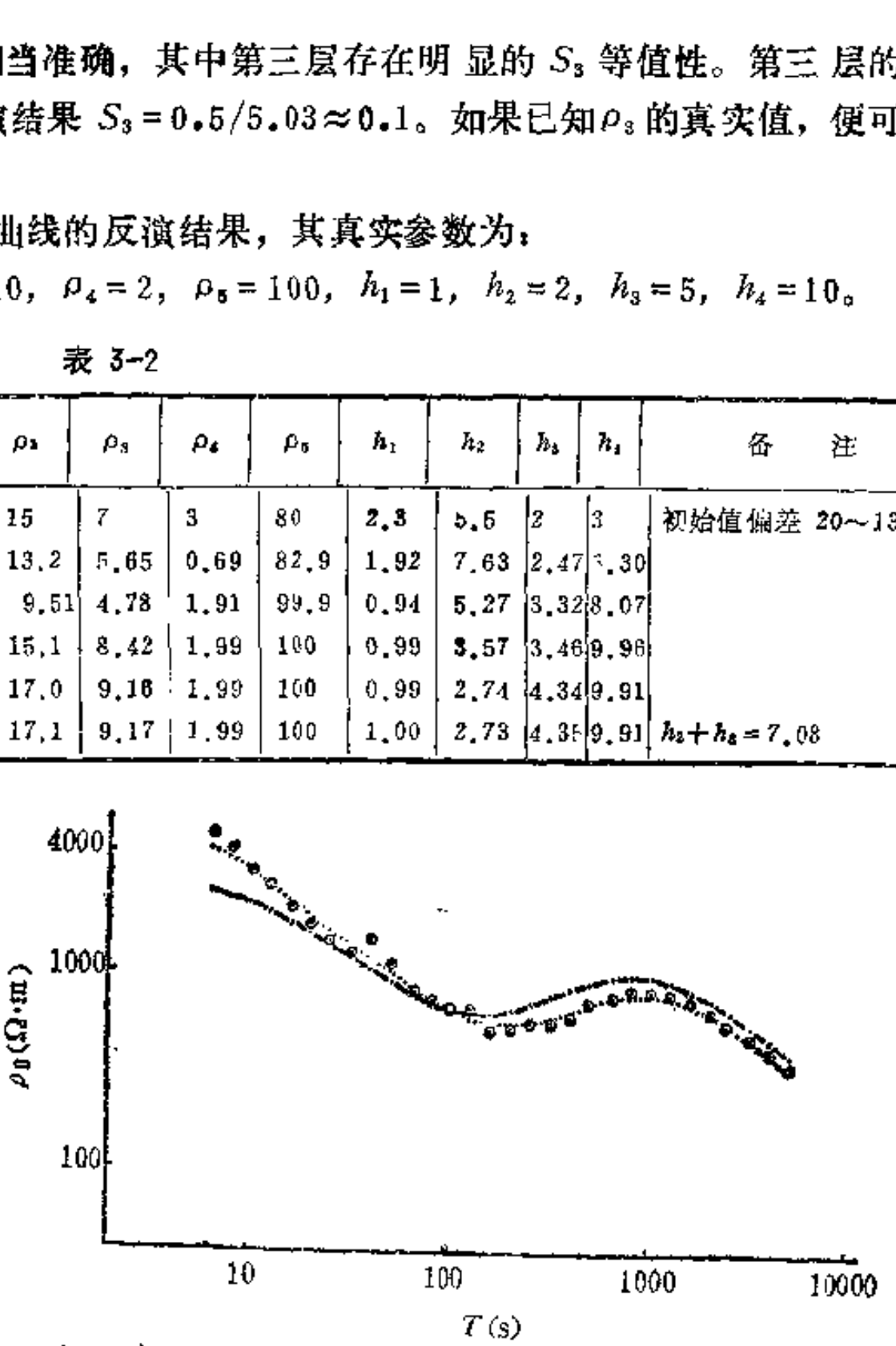
$\rho_1=1,\ \rho_2=20,\ \rho_3=10,\ \rho_4=2,\ \rho_5=100,\ h_1=1,\ h_2=2,\ h_3=5,\ h_4=10$。

表 3-2

NO	F	α	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	h_1	h_2	h_3	h_4	备　注
0	14.07	10	1	15	7	3	80	2.3	5.5	2	3	初始值偏差 20～130％
1	0.87×10^{1}	0.1×10^{1}	1.06	13.2	5.65	0.69	82.9	1.92	7.63	2.47	3.30	
4	0.62×10^{-1}	0.1×10^{-1}	1.00	9.51	4.78	1.91	99.9	0.94	5.27	3.32	8.07	
7	0.20×10^{-3}	0.1×10^{-4}	1.00	15.1	8.42	1.99	100	0.99	3.57	3.46	9.96	
9	0.24×10^{-4}	0.1×10^{-6}	1.00	17.0	9.16	1.99	100	0.99	2.74	4.34	9.91	
11	0.22×10^{-4}	0.1×10^{-5}	1.00	17.1	9.17	1.99	100	1.00	2.73	4.35	9.91	$h_2+h_3=7.08$

其中第二层和第三层具有 h 等值性。反演结果表明，这两层的电阻率和厚度都可能与真值不同，但是两层的总厚度却与真 值 基本一致。由表 3－2 可见，反演得到的 h_2 和 h_3 之和为7.08，而这两层的真厚度之和为7.0。

图 3－2 是一条实 测 曲线的反演实例。图中点画线表示以往用手 工量 板法 解释 的结果，现在以其各层参数作为初



⊙ 实测的视电阻率值；　……：自动反演(拟合)　、—·—·手工量板法解释结果结果；

图 3-2　实测曲线的反演结果

始参数用本程序进行自动反演，得到的结果曲线用点线给出。显然，自动反演的结果比手工解释结果好得多。

第三节　用广义逆方法反演解释一维大地电磁测深资料

一、广义逆方法的基本原理

对于一般的 $m \times n$ 阶矩阵**A**，可定义一个满足下述一组条件：

$$\begin{aligned} &\mathbf{AGA} = \mathbf{A} \\ &\mathbf{GAG} = \mathbf{G} \\ &(\mathbf{AG})^{\mathrm{T}} = \mathbf{AG} \\ &(\mathbf{GA})^{\mathrm{T}} = \mathbf{GA} \end{aligned} \qquad (3—8)$$

的唯一的广义逆矩阵 **G**，由此可解形如式（3—5）的超定方程组，得

$$\Delta\vec{\lambda} = \mathbf{G} \cdot \Delta\vec{\rho} \qquad (3—9)$$

可以证明，这个解是（3—5）式的范数 $\|\Delta\vec{\lambda}\|$ 为最小的最小二乘解，因此是唯一的。

求广义逆矩阵的一种方法是奇异值分解（SVD)的方法，其优点是能提供一些辅助信息，因而最好采用这种方法。

对于任意的 $m \times n$ 阶矩阵**A**，如果**A**的秩为 r，则可以将**A**分解成：

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_r \Sigma_r \mathbf{V}_r^{\mathrm{T}},$$

这就是矩阵**A**的奇异值分解表达式。其中 $\mathbf{U}_r$ 是 $m \times r$ 阶矩阵，其各列 u_i 称为观测数据特征向量；$\mathbf{V}_r$ 是 $n \times r$ 阶矩阵，各列 v_i 称为参数特征向量；Σ_r 是 $r \times r$ 阶对角阵，其元素分别为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的 r 个非零特征值的平方根，称为奇异值。

根据矩阵的奇异值分解表达式，定义了如下的广义逆矩阵：

$$\mathbf{H}_L = \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \mathbf{U}_r^{\mathrm{T}}$$

可以证明，这样定义的 $\mathbf{H}_L$ 完全满足（3—8）式中给出的定义广义逆矩阵的四个条件，即$\mathbf{H}_L$ 与**G** 是等价的。

前面已经提到，广义逆矩阵方法的一个重要优点是能提供一些有用的辅助信息，其中主要有参数分辨矩阵、信息密度矩阵及方差。

由（3—9）式和（3—5）式有：

$$\hat{\Delta\vec{\lambda}} = \mathbf{H}_L\mathbf{A}\Delta\vec{\lambda} = \mathbf{V}_r\mathbf{V}_r^{\mathrm{T}}\Delta\vec{\lambda} = \mathbf{R}\,\Delta\vec{\lambda}$$

式中 $\mathbf{R} = \mathbf{H}_L\mathbf{A} = \mathbf{V}_r\mathbf{V}_r^{\mathrm{T}}$，称为参数分辨矩阵，如果 $r = n$，则 $\mathbf{R} = \boldsymbol{I}$，$\hat{\Delta\vec{\lambda}} = \Delta\vec{\lambda}$，即解为真值。否则，$\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$，解 $\hat{\Delta\vec{\lambda}}$ 的每个元素都是真值 $\Delta\vec{\lambda}$ 各个元素的加权和，分辨能力下降了，但可以证明，$\mathbf{R} = \mathbf{V}_r\mathbf{V}_r^{\mathrm{T}}$ 是在最小二乘意义上逼近单位矩阵的最佳分辨矩阵。

由（3—9）式和（3—5）式还可写出：

$$\hat{\Delta\vec{\rho}} = \mathbf{A}\,\hat{\Delta\vec{\lambda}} = \mathbf{A}\mathbf{H}_L\Delta\vec{\rho} = \mathbf{U}_r\mathbf{U}_r^{\mathrm{T}}\Delta\vec{\rho} = \mathbf{F}\Delta\vec{\rho}$$

式中 $\mathbf{F}=\mathbf{A}\mathbf{H}_L=\mathbf{U}_r\mathbf{U}_r^T$，称为信息密度矩阵，当 $r=m$时，$\mathbf{F}=\mathbf{I}$，$\hat{\Delta\vec{\rho}}=\Delta\vec{\rho}$，数据相互独立，模型完全与观测数据拟合。否则，对应模型的理论观测值 $\hat{\Delta\vec{\rho}}$ 是实测值的加权和，这时实测数据之间存在相关性，说明有多余信息存在，同时，模型一般不会与观测数据完全拟合。因此信息密度矩阵趋近于单位矩阵的程度可作为度量模型拟合观测数据的标志；还可以根据其对角线元素的大小衡量对应数据的重要性，主对角元素大者，对应的数据是主要的，在野外观测和资料处理时应优先考虑。同样可以证明，$\mathbf{F}=\mathbf{U}_r\mathbf{U}_r^T$ 是在最小二乘意义上逼近单位矩阵的最佳信息密度矩阵。

假设观测数据是统计独立的，且具有相同的方差 σ^2，观测误差的数学期望为零，且各参数独立，则参数改正量估算值的方差为：

$$v_{ar}(\hat{\Delta\lambda_i})=\sigma^2\sum_{k=1}^{r}\frac{v_{ik}^2}{\sigma_k^2}$$

其中σ^2可用下式估算：

$$\hat{\sigma^2}=\|\Delta\vec{\rho}-\mathbf{A}\hat{\Delta\vec{\lambda}}\|^2/(m-n)。$$

二、改进的广义逆方法

从理论上讲，采用广义逆矩阵方法即使在包含有零奇异值的情况下，也能得到唯一解。但在计算机上进行数值计算时，遇到的多是很小的奇异值，它们将导致相应的参数改正量很大，以致超出线性近似所允许的范围，使模型参数沿着错误的方向变化，最后引起迭代发散。所以在实际反演过程中，必须设法压制小奇异值的不利作用。有两种方法，一种是将小的奇异值除去，即在反演过程中不修改与其对应的参数，另一种是用加阻尼的办法减小小奇异值的不利影响，控制与其对应的参数的改正量。这两种方法可以统一地包括在贾普等人提出的改进广义逆方法之中。贾普等人定义了如下的改进广义逆矩阵代替 $\mathbf{H}_L$：

$$\mathbf{B}^+=\mathbf{V}_r\mathbf{T}_r\boldsymbol{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{U}_r^T$$

式中 $\mathbf{T}_r$ 是对角矩阵，其对角元素定义为：

$$t_i=\sigma_i^{2N}/(\sigma_i^{2N}+\mu^{2N}),\quad i=1,2,\cdots,r \tag{3—10}$$

μ^2是一个小的正数，为阻尼系数，σ_i是奇异值。

由式（3—10）可看出，当$N\to\infty$时，就相当于奇异值截除法，截除了小于μ的奇异值。还可以证明，当 $N=1$ 时，改进的广义逆矩阵方法与阻尼最小二乘法即马夸特法相当。当$\mu=0$时，即为一般的广义逆矩阵方法。

通过反演实践表明，应用改进的广义逆矩阵方法，只要 μ选得合适，都可保证迭代过程稳定收敛。在较复杂测深曲线情况下，用奇异值截除法（$N\to\infty$）比取N为有限值时的效果要差，而取$N=1$时的效果最令人满意。后面给出的实例都是选用 $N=1$的改进广义逆矩阵进行反演的。

由于采用了$N=1$的改进广义逆矩阵，前面给出的信息密度矩阵、参数分辨矩阵和解的方差的计算均要作相应的改变：

$$F_{ij}=\sum_{k=1}^{r}u_{ik}t_ku_{jk}=\sum_{k=1}^{r}u_{ik}u_{jk}\frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2+\mu^2}$$

$$R_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\eta_{ik}\eta_{jk}\frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2+\mu^2}$$

$$V_{ar}(\Delta\lambda_i)=\sigma^2\sum_{k=1}^{r}v_{ik}^2\frac{\sigma_k^2}{(\sigma_k^2+\mu^2)^2}$$

三、应用中需要解决的几个技术问题

1．广义逆矩阵的计算方法

前面已经提到，采用奇异值分解法求广义逆矩阵具有独特的优点。但奇异值分解的方法有多种，我们选用了戈卢布（1970）的算法，其优点是运算量小，收敛较快，又很精确。这种算法基本上分两步进行。

① 选用两个有限的豪斯伍德正交系列：

$$\mathbf{P}^{(k)}=\mathbf{I}-2\mathbf{X}^{(k)}\mathbf{X}^{(k)\mathrm{T}},\qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$\mathbf{Q}^{(k)}=\mathbf{I}-2\mathbf{Y}^{(k)}\mathbf{Y}^{(k)\mathrm{T}},\qquad k=1,2,\cdots,n-2$$

将矩阵$\mathbf{A}$正交变换成一上双对角矩阵$\mathbf{A}^{(0)}$，用公式可表示成：

$$\underbrace{\mathbf{P}^{(n)}\cdots\cdots\mathbf{P}^{(1)}}_{\mathbf{P}}\mathbf{A}\,\underbrace{\mathbf{Q}^{(1)}\cdots\cdots\mathbf{Q}^{(n-2)}}_{\mathbf{Q}}=\mathbf{A}^{(0)}\tag{3—11}$$

② 选用两个吉文斯正交旋转矩阵系列$\mathbf{S}^{(i)}_j,\mathbf{T}^{(i)}_j$，将$\mathbf{A}^{(i-1)}$变换成为新的仍保持上双对角形式的矩阵$\mathbf{A}^{(i)}$，并重复迭代。用公式可表示成：

$$\mathbf{A}^{(i)}=\underbrace{\mathbf{S}^{(i)}_n{}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{(i)}_{n-1}{}^{\mathrm{T}}\cdots\mathbf{S}^{(i)}_2{}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{S}^{(i)\mathrm{T}}}\mathbf{A}^{(i-1)}\underbrace{\mathbf{T}^{(i)}_2\mathbf{T}^{(i)}_3\cdots\mathbf{T}^{(i)}_n}_{\mathbf{T}^{(i)}}$$

$$\mathbf{S}^{(i)\mathrm{T}}\cdots\mathbf{S}^{(2)\mathrm{T}}\mathbf{S}^{(1)\mathrm{T}}\mathbf{A}^{(0)}\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{T}^{(2)}\cdots\mathbf{T}^{(i)}=\Sigma\tag{3—12}$$

根据弗朗西斯定理可知，只要适当选择矩阵$\mathbf{T}^{(i)}_j$第1列上的二个元素，可使上述迭代过程等价于带位移的QR算法，也就是说，式（3—12）中给出的迭代过程最终收敛于对角矩阵Σ。综合式（3—11），（3—12），可将上述奇异值分解过程用公式形式表达成：

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{(0)}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\underbrace{\mathbf{S}^{(1)}\mathbf{S}^{(2)}\cdots}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{(i)}\Sigma\underbrace{\mathbf{T}^{(i)\mathrm{T}}\mathbf{T}^{(i-1)\mathrm{T}}\cdots}_{\mathbf{T}^{\mathrm{T}}}\mathbf{T}^{(1)\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

$$=\underbrace{\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}}_{\mathbf{U}}\Sigma\underbrace{\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{V}^{\mathrm{T}}}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^{\mathrm{T}}=[\mathbf{U},\mathbf{U}_0]\begin{pmatrix}\Sigma_r & \vdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{V}_r^{T}\\ \cdots\\ \mathbf{V}_0^{T}\end{pmatrix}$$

2．采用对数比例尺

由于大地电磁测深是体积探测，观测数据和变量都表示在对数比例尺中，显然对数据和参数都按对数进行运算，效果会更好一些。

采用对数运算后，目标函数可写成：

$$F(\ln\vec{\lambda})=\sum_{i=1}^{m}\{[\ln\rho_{ai}-(\ln\rho_{ci})_0]-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\ln\rho_{ci}}{\partial\ln\lambda_j}\right)_0\Delta\ln\lambda_j\}^2$$

$$+\mu^2\{\sum_{j=1}^{n}(\Delta\ln\lambda_j)^2-\sum_{j=1}^{n}[\Delta\ln\lambda_j(\mu^2)]^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\{\Delta\ln\rho-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\rho_{ci})_0}\left(\frac{\partial\rho_{ci}}{\partial\lambda_j}\lambda_j\right)_0\Delta\ln\lambda_j\}$$

$$+\mu^2\left\{\sum_{j=1}^{n}(\Delta\ln\lambda_j)^2-\sum_{j=1}^{n}[\Delta\ln\lambda_j(\mu^2)]^2\right\}$$

$$=\|\Delta\ln\vec{\rho}-\hat{\mathbf{A}}\Delta\ln\vec{\lambda}\|^2+\mu^2(\|\Delta\ln\vec{\lambda}\|^2-\|\Delta\ln\vec{\lambda}(\mu^2)\|^2)$$

式中

$$\hat{\mathbf{A}}_{ij}=\left\{\frac{1}{\rho_{ci}(\vec{\lambda})}\frac{\partial\rho_{ci}(\vec{\lambda})}{\partial\lambda_j}\lambda_j\right\}_{\vec{\lambda}=\vec{\lambda}_0}$$

于是按双对数比例尺进行运算时，式（3—5）代之为：

$$\hat{\mathbf{A}}\Delta\ln\vec{\lambda}=\Delta\ln\vec{\rho}$$

将$\hat{\mathbf{A}}$进行奇异值分解后，构成$\hat{\mathbf{B}}^+$，然后可得：

$$\Delta\ln\vec{\lambda}=\mathbf{B}^+\Delta\ln\rho=\mathbf{V}_r\mathbf{T}^{(k)}\boldsymbol{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{U}_r^T\Delta\ln\rho$$

再变换成：

$$\Delta\vec{\lambda}=\boldsymbol{\Lambda}^{(k)}\Delta\ln\vec{\lambda}\qquad\left(\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)\right)$$

改正后的参数为：

$$\vec{\lambda}^{(k+1)}=\vec{\lambda}^{(k)}+\Delta\vec{\lambda}$$

3．控制迭代终止的判据

我们曾试图选择如下一些指标作为判据：

① 拟合度 $$PN=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{(\rho_{ci}-\rho_{ei})^2}{\rho_{ei}^2}}$$

② 相对参数改正量 $$PE=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta\lambda_j^2}{\lambda_j}}$$

③ 目标函数的梯度 $$\nabla F(\vec{\lambda})=\frac{dF(\vec{\lambda})}{d\ln\vec{\lambda}}$$

但由于这些量随具体条件不同而变化很大，所以都不便于预先确定一个统一的量作为迭代终止的判据。

通过试验，可确认如下判据是有效的，即利用阻尼系数μ^2变得很小后又突然增大这一标志来控制迭代终止。实际上，随着迭代过程的进行，一般来说阻尼是自动减小的，参数经过改正，逐渐逼近真值；如果出现继续减小阻尼，目标函数已不能下降的情况，这时增大阻尼继续迭代下去其结果也不会有多大改善。从另一角度来看，在迭代过程中阻尼由大到小意味着由梯度法向高斯-牛顿法过渡，收敛加快，很快使目标函数趋于极小点。再迭代下去，阻尼会增加到很大，从而转向梯度法的收敛方向。而在极小点附近，用梯度法迭代，收敛甚微。在这时终止迭代是合适的。通过拟合各种类型曲线的试验说明选择这一判据是有效的。由于个别情况下在迭代开始阶段会出现阻尼的波动，故在程序中加了控制语句，使这一判据在经过一定次数的迭代后才生效。

四、程序框图及程序段选录

1．程序框图

广义逆反演程序框图见图 3－3。符号 ML 表示要进行反演的测深曲线的条数。

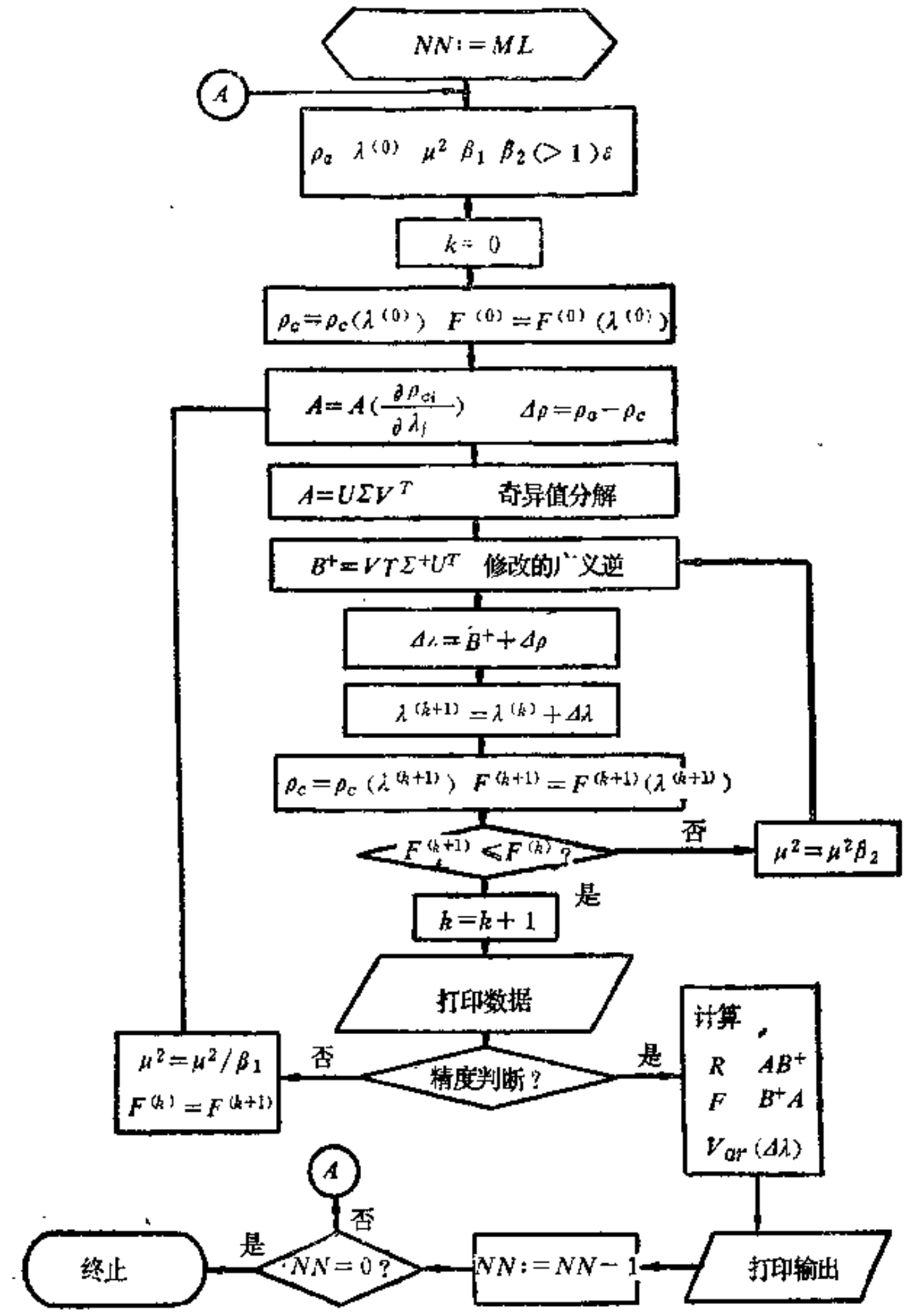


图 3-3　广义逆反演程序框图

2．程序段选录（一）

（1）程序段功能

除模型正演计算、奇异值分解及求广义逆矩阵外，本程序完成广义逆反演的全部过程。

（2）数组说明

RA　　一维实数组，存放实测视电阻率数据。
RC　　一维实数组，存放模型正演计算的视电阻率数据。
R　　一维实数组，存放$LN(RA/RC)$。
RHH　　一维实数组，存放模型参数。
P　　一维实数组，存放模型参数改正量。
T　　一维实数组，存放各频点的周期值。
RH　　一维实数组，存放模型参数。
A　　二维实数组，存放超定方程组的系数。
U　　二维实数组，存放奇异值分解结果U。
H1　　二维实数组，存放广义逆矩阵元素。
V　　二维实数组，存放奇异值分解结果V。
Q　　一维实数组，存放奇异值。
F1　　二维实数组，存放信息密度矩阵元素。
S1　　二维实数组，存放参数分辨矩阵元素。

其他数组为中间工作单元。

（3）调用子程序说明

CALL　PC　　调用模型正演计算子程序。
CALL　SVD　调用奇异值分解子程序。
CALL　GRM　调用求广义逆矩阵的子程序。
CALL　DISPL　调用宽行打印图形子程序。

（4）程序

```
      PROGRAM MTSR(INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
      DIMENSION RA(80),RC(80),R(80),RHH(15),P(15)
      DIMENSION TQ1(15),Q2(15),U1(80,15),V1(15,15)
      DIMENSION F1(80,80),S1(15,15),FS(15),UK(80),VR(15),RT(80)
      COMMON /V/ T(80),RH(15),RO
      COMMON /W/ A(80,15),U(80,15),H1(15,80),V(15,15),Q(15),TQ(15)
      COMMON D
      EPS1=1.E-6
      D=0.
      D1=.1  $  D2=10.  $  D3=.1
      READ(5,111) NNN
111   FORMAT(I3)
      READ(5,99) M,MN
99    FORMAT(2I3)
      N=2*MN-1
      READ(5,3) (T(I),I=1,M)
3     FORMAT(6F12.3)
      WRITE(6,5) (T(I),I=1,M)
5     FORMAT(8X,2HT=,10F12.3)
600   CONTINUE
      READ(5,4) (RA(I),I=1,M)
4     FORMAT(8F10.3)
      WRITE(6,6) (RA(I),I=1,M)
6     FORMAT(8X,3HRA=,10F12.3)
      READ(5,4) (RH(I),I=1,N)
2     WRITE(6,8) (RH(I),I=1,N)
8     FORMAT(8X,3HRH=,11F9.2)
      MM=0
      RAC1=0.
```

```
      S2=0.
      DO 12 I=1,M
      RO=T(I)
      CALL PC(M,MN)
      RC(I)=RO*RH(1)
      S2=S2+((RA(I)-RC(I))/RA(I))**2
12    RAC1=RAC1+ALOG(RA(I)/RC(I))**2
      S3=SQRT(S2/M)
      WRITE(6,23) (RC(I),I=1,M)
      WRITE(6,95) RAC1
      WRITE(6,22) S3
500   DO 40 J=1,N
40    RHH(J)=RH(J)
      DO 10 I=1,M
      DO 11 K=1,N
      DL=1.E-5*RH(K)
      Y=RH(K)   $   RH(K)=Y+DL
      RO=T(I)
      CALL PC(M,MN)
      R2=RO*RH(1)   $   RH(K)=Y-DL
      RO=T(1)
      CALL PC(M,MN)
      R1=RO*RH(1)   $   RH(K)=Y
11    A(I,K)=(R2-R1)*RHH(K)/(2.*DL*RC(I))
10    R(I)=ALOG(RA(I)/RC(I))
501   CALL SVD(1.5E-8,1.E-31,M,N)
400   CALL GRM(M,N)
      DO 16 J=1,N
      P(J)=0.
      DO 15 I=1,M
15    P(J)=P(J)+H1(J,I)*R(I)
16    CONTINUE
      DO 350 J=1,N
350   P(J)=RHH(J)*P(J)
      DO 30 J=1,N
      RH(J)=RHH(J)+P(J)
      IF(RH(J).LT.1.E-7) GO TO 300
30    CONTINUE
      RAC2=0.
      DO 31 I=1,M
      RO=T(I)
      CALL PC(M,MN)
      RC(I)=RO*RH(1)
      R(I)=ALOG(RA(I)/RC(I))
31    RAC2=RAC2+R(I)**2
      IF(RAC2.LE.RAC1) GO TO 17
      IF(MM.GT.5) GO TO 47
300   D=DS+D2   $   D3=D
      IF(D.GE.1.E+100) GO TO 47
      GO TO 400
17    MM=MM+1
      DO 90 K=1,N
      DO 91 I=1,M
91    U1(I,K)=U(I,K)
      DO 92 J=1,N
92    V1(J,K)=V(J,K)
      Q2(K)=Q(K)
90    T01(K)=T0(K)
      W0=0.
      DO 18 J=1,N
      W0=W0+(P(J)/RHH(J))**2
18    CONTINUE
      S0=0.
      DO 19 I=1,M
```

```
      SO=SO+((RA(I)-RC(I))/RA(I))**2
19    CONTINUE
      W3=SQRT(WO/N)
      S3=SQRT(SO/M)
      WRITE(6,21) MM
      WRITE(6,76) (Q(K),K=1,N)
      WRITE(6,64) D
      WRITE(6,25) W3
      WRITE(6,95) RAC2
      WRITE(6,22) S3
      WRITE(6,23) (RC(I),I=1,M)
      WRITE(6,8) (RH(I),I=1,N)
      IF(S3.LE.EPS1) GO TO 47
      IF(MM.LT.15) 46,47
46    RAC1=RAC2
      D=D*D1
      GO TO 500
47    DO 49 J=1,M
      DO 49 J=1,M
      F1(I,J)=0.
      DO 48 K=1,N
      FU=U1(I,K)*TQ1(K)*Q2(K)*U1(J,K
48    F1(I,J)=F1(I,J)+FU
49    CONTINUE
      DO 50 J=1,N
      DO 50 I=1,N
      S1(I,J)=0.
      DO 50 K=1,N
      SV=V1(I,K)*TQ1(K)*Q2(K)*V1(J,K
50    S1(I,J)=S1(I,J)+SV
      RS=0.
      DO 61 I=1,M
      RT(I)=0.
      DO 60 J=1,M
60    RT(I)=RT(I)+F1(I,J)*R(J)
61    RS=RS+(R(I)-RT(I))**2
      RS=RS/(M-N)
      DO 43 L=1,N
      VR(L)=0.
      DO 43 K=1,N
42    VA=(V1(L,K)*TQ1(K))**2
43    VR(L)=VR(L)+VA
      DO 62 K=1,N
62    VR(K)=RS*VR(K)
      WRITE(6,65)
      DO 101 L=20,M,20
      JL=L-19
      WRITE(6,66) ((F1(I,J),J=JL,L,2),I=2,M,2)
101   CONTINUE
      WRITE(6,67)
      WRITE(6,68) ((S1(I,J),J=1,N),I=1,N)
      WRITE(6,80)
      WRITE(6,63) (VR(K),K=1,N)
      DO 72 I=1,N
      DO 69 J=1,N
69    FS(J)=V1(J,I)
      CALL DISPL(FS,N)
      Q1=Q2(I)
      WRITE(6,70) Q1
      DO 71 K=2,M,2
71    UK(K)=U1(K,I)
      CALL DISPL(UK,M)
72    CONTINUE
```

```
      NNN=NNN-1
      IF(NNN.GT.0) GO TO 600
      STOP
21    FORMAT(6X,3HMM=,I2)
76    FORMAT(8X,2HQ=,10E11.3)
64    FORMAT(8X,2HD=,E15.3)
25    FORMAT(8X,3HPE=,E15.5)
95    FORMAT(8X,2HW=,E15.5)
22    FORMAT(8X,3HPN=,E15.5)
23    FORMAT(8X,3HRC=,10F12.3)
24    FORMAT(8X,3HRH=,11F8.2)
65    FORMAT(////8X,11HINFORMATION,8H DENSITY,7H MATRIX//)
66    FORMAT(8X,10E10.3)
67    FORMAT(///8X,10HRESOLUTION,7H MATRIX//)
68    FORMAT(2X,13E10.3)
80    FORMAT(////8X,8HVARIANCE//)
63    FORMAT(8X,4HVAR=,11E10.3)
70    FORMAT(60X,2HQ=,F9.3)
      END
```

3. 程序段选录（二）

（1）程序段功能

对任意实矩阵进行奇异值分解。

（2）数组说明

A　　二维实数组，存放被分解的$m \times n$阶实矩阵的元素。

U　　二维实数组，存放分解后得到的U矩阵的元素。

V　　二维实数组，存放分解后得到的V矩阵的元素。

Q　　一维实数组，存放分解后得到的奇异值。

E　　一维实数组，中间工作单元。

（3）程序

```
      SUBROUTINE SVD(EPS,TOL,M,N)
      DIMENSION E(15)
      COMMON /W/ A(80,15),U(80,15),W1(15,80),V(15,15),Q(15),TQ(15)
      DO 10 I=1,M
      DO 10 J=1,N
10    U(I,J)=A(I,J)
      G=0.0
      X=0.0
      DO 20 I=1,N
      E(I)=G
      S=0.0
      L=I+1
      DO 21 J=I,M
21    S=S+U(J,I)**2
      G=0.0
      IF(S.LT.TOL) GOTO 24
      F=U(I,I)
      G=SQRT(S)
      IF(F.GE.0.0) G=-G
      H=F*G-S
      U(I,I)=F-G
      DO 22 J=L,N
      S=0.0
      DO 23 K=I,M
23    S=S+U(K,I)*U(K,J)
      F=S/H
      DO 22 K=I,M
```

```
22      U(K,J)=U(K,J)+F*U(K,I)
24      Q(I)=G
        S=0.0
        DO 25 J=L,N
25      S=S+U(I,J)**2
        G=0.0
        IF(S.LT.TOL) GOTO 29
        F=U(I,I+1)
        G=SQRT(S)
        IF(F.GE.0.0) G=-G
        H=F*G-S
        U(I,I+1)=F-G
        DO 26 J=L,N
26      E(J)=U(I,J)/H
        DO 27 J=L,M
        S=0.0
        DO 28 K=L,N
28      S=S+U(J,K)*U(I,K)
        DO 27 K=L,N
27      U(J,K)=U(J,K)+S*E(K)
29      Y=ABS(Q(I))+ABS(E(I))
        IF(Y.GT.X) X=Y
20      CONTINUE
C
        DO 40 I=1,N
        II=N-I+1
        IF(G.EQ.0.0) GOTO 42
        H=U(II,II+1)*G
        DO 43 J=L,N
43      V(J,II)=U(II,J)/H
        DO 44 J=L,N
        S=0.0
        DO 45 K=L,N
45      S=S+U(II,K)*V(K,J)
        DO 44 K=L,N
44      V(K,J)=V(K,J)+S*V(K,II)
42      DO 46 J=L,N
        V(II,J)=0.0
46      V(J,II)=0.0
        V(II,II)=1.0
        G=E(II)
40      L=II
C
        DO 50 I=1,N
        II=N-I+1
        L=II+1
        G=Q(II)
        DO 51 J=L,N
51      U(II,J)=0.0
        IF(G.EQ.0.0) GOTO 53
        H=U(II,II)*G
        DO 54 J=L,N
        S=0.0
        DO 55 K=L,M
55      S=S+U(K,II)*U(K,J)
        F=S/H
        DO 54 K=II,M
54      U(K,J)=U(K,J)+F*U(K,II)
        DO 56 J=II,M
56      U(J,II)=U(J,II)/G
        GOTO 50
53      DO 57 J=II,M
57      U(J,II)=0.0
50      U(II,II)=U(II,II)+1.0
```

```
C
59      EPS=EPS*X
        DO 60 K=1,N
        KK=N-K+1
61      E(1)=0.0
        DO 62 L=1,KK
        LL=KK-L+1
        IF(ABS(E(LL)).LE.EPS) GOTO 66
        IF(ABS(Q(LL-1)).LE.EPS) GOTO 63
62      CONTINUE
C
63      C=0.0
        S=1.0
        L1=LL-1
        DO 64 I=LL,KK
        F=S*E(I)
        E(I)=C*E(I)
        IF(ABS(F).LE.EPS) GOTO 66
        G=Q(I)
        Q(I)=SQRT(F*F+G*G)
        H=Q(I)
        C=G/H
        S=-F/H
        DO 65 J=1,M
        Y=U(J,L1)
        Z=U(J,I)
        U(J,L1)=Z*S+Y*C
65      U(J,I)=Z*C-Y*S
64      CONTINUE
66      Z=Q(KK)
        IF(LL.EQ.KK) GOTO 71
C
        X=Q(LL)
        Y=Q(KK-1)
        G=E(KK-1)
        H=E(KK)
        F=((Y-Z)*(Y+Z)+(G-H)*(G+H))/(2.0*H*Y)
        G=SQRT(F*F+1.0)
        GG=G+F
        IF(F.LT.0.0) GG=F-G
        F=((X-Z)*(X+Z)+H*(Y/GG-H))
C
        C=1.0
        S=1.0
        LL1=LL+1
        DO 67 I=LL1,KK
        G=E(I)
        Y=Q(I)
        H=S*G
        G=C*G
        Z=SQRT(F*F+H*H)
        E(I-1)=Z
        C=F/Z
        S=H/Z
        F=G*S+X*C
        G=G*C-X*S
        H=Y*S
        Y=Y*C
        DO 68 J=1,N
        X=V(J,I-1)
        Z=V(J,I)
        V(J,I-1)=Z*S+X*C
68      V(J,I)=Z*C-X*S
69      Z=SQRT(F*F+H*H)
        Q(I-1)=Z
```

```
      C=F/Z
      S=H/Z
      F=C*G+S*Y
      X=C*Y-S*G
      DO 70 J=1,M
      Y=U(J,I-1)
      Z=U(J,I)
      U(J,I-1)=Y*C+Z*S
70    U(J,I)=Z*C-Y*S
67    CONTINUE
      E(LL)=F
      E(KK)=F
      Q(KK)=X
      GOTO 61
71    IF(Z.GE.0.0) GOTO 60
      Q(KK)=-Z
      DO 72 J=1,N
72    V(J,KK)=-V(J,KK)
60    CONTINUE
      RETURN
      END
```

五、反演实例

以较复杂的 $KHKQ$ 型理论曲线的反演为例，模型的真实参数及反演结果见表3-3。选择的初始参数偏离真实参数100%，从表中可以看到，反演结果除 ρ_3、h_3 及 ρ_4 外，其他都接近或等于真值。第三层是低阻薄层。h_3 和 ρ_3 保持 S_3 等值性。第四层是高阻薄层，具有 h_4 等值性，ρ_4 是不灵敏参数，即 $\frac{\partial \rho_{ci}}{\partial \rho_4} \to 0, (i=1,2,\cdots,m)$，导致矩阵 **A** 的一列近似为零，相应的奇异值亦近似为零。

上述两个等值性在表3-4参数分辨矩阵中也有明确的反映。对角元素越接近于1，相应参数分辨得越好，反演结果越接近于真值，而 ρ_3、ρ_4 和 h_3 对应的对角元素偏离1很多，分辨力差。第三行及第九行上相应 h_3 和 ρ_3 的元素值远远大于同行中其他非对角元素，这正反映了它们之间的相关性，因而只能准确地确定由它们组合成的某些综合参数。

从这条曲线的形态来看，很可能误认为是 KHK 型五层曲线进行反演解释。现在，我们故意抽掉第四层，其它各层的初始参数不变，其反演结果亦列入表3-3中。可以看出，其他各层参数变化不大，唯独原来第五层的电阻率变为63.86，厚度为74.74，相当于按六层反演时的第四层与第五层厚度之和，亦即解释出的深度保持不变。如果第三层和第四层之间再加一层，初始参数选为 $h_{加}=2$，$\rho_{加}=10$，其反演结果亦列于表3-3中。这时 S 值基本不变，即 $S_{3,加}=0.31$，和实际模型的 $S_3=0.30$ 很接近。由上可见，初始模型的层数和实际的不一致时，反演都在符合等值原理的情况下收敛。为了使反演结果不漏掉层，在假设初始模型时，可根据已知资料和曲线特点合理地多设层，即在某一层存在与否难以确定时，宁可多设一层。

再给出一个大地电磁测深曲线反演的实例。测点（MT 1号点）位于内蒙二连地区某凹陷中部地质参数井旁。图3-4中“。”表示实测大地电磁测深曲线，从总的趋势看，应属 $HKHKH$ 型七层曲线。初始参数和经过七次迭代的反演结果均列于表3-5中。由表中可看出，迭代结束时各参数的方差都不大，而阻尼系数不算太小（$\mu^2=0.01$），说明观测数据存在较大误差，相应超定方程系数矩阵的条件很差。由于阻尼大，就降低了对参

表 3-3

NO	P	PN	μ^2	ρ_1	ρ_2	ρ_3	$\rho_{加}$	ρ_4	ρ_5	ρ_6	h_1	h_2	h_3	$h_{加}$	h_4	h_5	备　注
0	0.676×10^{3}	0.465×10^{6}		2.50	200.00	0.50	10.00	500.00	120.00	0.25	0.30	20.00	0.15	2.00	14.00	61.00	初始误差100%
1	0.116×10^{3}	0.275×10^{6}	0.1×10^{2}	4.20	158.40	0.43	—	495.02	115.29	0.33	0.23	14.11	0.17	—	13.81	63.38	
2	0.115×10^{1}	0.109×10^{6}	0.1×10^{1}	5.77	101.81	0.42	—	491.98	100.89	0.45	0.18	12.59	0.17	—	13.20	60.31	
3	0.130×10^{0}	0.387×10^{-1}	0.1×10^{0}	6.08	113.95	0.45	—	483.14	47.67	0.48	0.16	12.36	0.16	—	11.37	61.89	
4	0.109×10^{-2}	0.370×10^{-2}	1×10^{-1}	5.60	117.94	0.49	—	748.98	55.90	0.48	0.15	11.74	0.15	—	9.91	64.49	
5	0.163×10^{-3}	0.143×10^{-3}	1×10^{-2}	4.88	117.94	0.49	—	471.12	59.33	0.48	0.13	11.67	0.15	—	7.97	66.52	
6	0.398×10^{-4}	0.706×10^{-3}	1×10^{-3}	4.55	117.69	0.50	—	469.81	59.60	0.48	0.12	11.67	0.15	—	7.59	66.91	
7	0.381×10^{-4}	0.690×10^{-3}	1×10^{-4}	4.52	117.67	0.49	—	476.33	59.60	0.48	0.12	11.67	0.14	—	7.57	66.93	
真　实　参　数				5.00	118.00	1.00	—	10.4	59.60	0.48	0.13	11.60	0.30	—	7.00	67.40	
7	0.810×10^{-4}	0.101×10^{-3}	1×10^{-3}	4.89	118.09	0.67	11.56	471.28	59.12	0.48	0.13	11.53	0.11	1.72	7.39	65.56	加一层反演结果
6	0.133×10^{-3}	0.407×10^{-3}	1×10^{-3}	5.10	118.96	0.53	—	—	63.86	0.48	0.13	11.34	0.11	—	—	74.74	减一层反演结果
7	0.134×10^{0}	0.407×10^{-1}		4.99	113.65	0.39	—	489.51	103.82	0.48	0.13	12.88	0.16	—	13.27	58.70	$T^{(N)}$的$N=20$
分辨矩阵对角元素				0.996	1.000	0.504		0.013	1.000	1.000	0.995	1.000	0.497		0.989	1.000	

表 3-4

ρ_1	0.996		0.	0.	0.	0.	−.004	0.	0.	0.	0.
ρ_2	0.	1.000	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
ρ_3			.504	.009	0.	0.	0.	.002	−.499	−.003	−.001
ρ_4				.013	.002	0.	0.	0.	−.014	.039	−.009
ρ_5					1.000	0.	0.	0.	0.	0.	0.
ρ_6						1.000	0.	0.	0.	0.	0.
h_1							.995	0.	0.	0.	0.
h_2								1.000	.002	0.	0.
h_3									.497	−.001	0.
h_4										.989	.002
h_5											1.000
	$(\rho_1$	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	h_1	h_2	h_3	h_4	$h_5)$

数的分辨力。为了突出地电断面本身的性质，又以最优拟合曲线代替实测曲线，再用原来的初始参数重新进行反演，迭代七次结束。这时阻尼系数很小，$\mu^2=0.1\times10^{-3}$，所得分辨矩阵见表3-6。从中可看出，第1、2、5、6、7、8、9、12、13个对角元素都接近于1，而第3、4、10、11个对角元素比1小很多，同行中有的元素比较大，正反映了它们具有广义等值性这一特征。

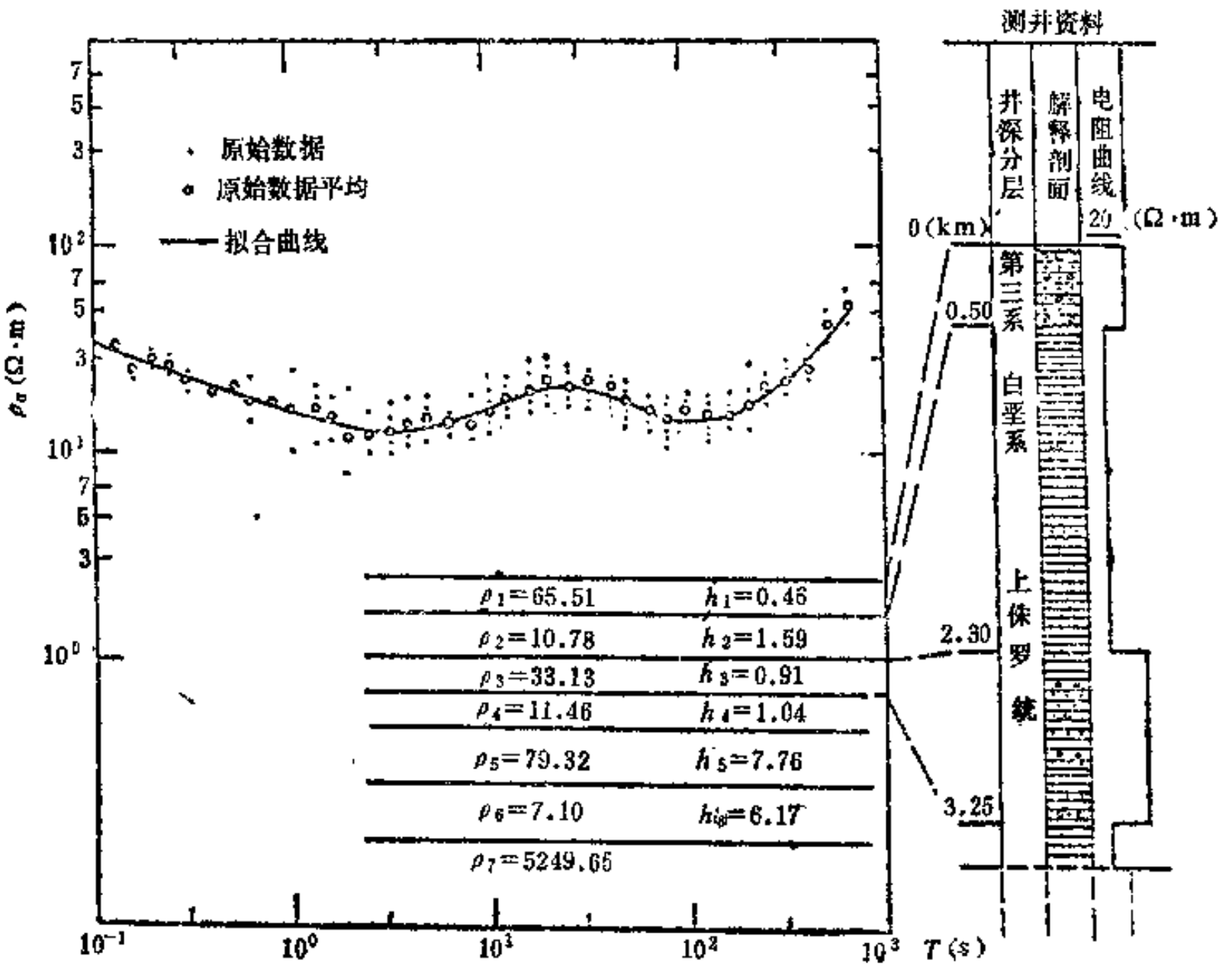


图 3-4 井旁实测曲线反演结果

该井井深约为3.5公里。根据接地电阻率梯度测井曲线，从上到下可分成三大层，厚度分别为 $h_1=0.5$（公里），$h_2=1.8$（公里），$h_3=1.15$（公里），其电阻率的相对值呈高—低—高的变化（见图3-4）。表3-5中所列反演结果的前三层厚度与测井资料符合得

较好，最大相对误差约为15%。

表 3-5

M_2	F	PN	μ^2	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	备注
	$.230\times10^{1}$	$.230\times10^{0}$		40.00	15.00	45.00	10.00	65.00	7.40	初参
	$.169\times10^{0}$	$.651\times10^{-4}$	$.1\times10^{-1}$	65.41	10.85	32.62	11.96	80.64	7.17	结果
参数方差				$.45\times10^{-1}$	$.42\times10^{-2}$	$.2\times10^{-1}$	$.4\times10^{-1}$	$.38\times10^{-1}$	$.23\times10^{-1}$	

M_2	F	PN	μ^2	ρ_7	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	备注
	$.230\times10^{1}$	$.230\times10^{0}$		1000.00	.70	1.50	2.00	1.50	6.5	5.00	初参
	$.169\times10^{0}$	$.651\times10^{-4}$	$.1\times10^{-1}$	5243.66	.45	1.65	0.97	1.04	7.63	6.24	结果
参数方差				$.11\times10^{9}$	$.7\times10^{-2}$	$.41\times10^{-1}$	$.58\times10^{-1}$	$.16\times10^{-1}$	$.6\times10^{-2}$	$.26\times10^{-1}$	

表 3-6

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
ρ_1	.994	−.001	−.040	.021	.002	0	0	.002	−.008	.009	.020	−.002	0
ρ_2		1.000	−.005	.003	0	0	0	0	−.001	.001	.003	0	0
ρ_3			.451	.071	.024	.002	0	.015	−.083	.308	−.600	−.015	.003
ρ_4				.756	−.034	−.004	0	−.008	.024	.134	−.344	.029	−.006
ρ_5					.989	−.003	0	0	.004	.006	−.045	.006	−.003
ρ_6						.999	0	0	0	−.001	−.005	.001	−.001
ρ_7							1.000	0	0	0	0	0	0
h_1								.999	.003	−.004	−.007	.001	0
h_2									.986	.036	.010	−.003	0
h_3										.695	.294	−.010	.001
h_4											.465	.039	−.008
h_5												.996	.002
h_6													.998
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6

第四节　博斯蒂克反演解释方法

一、博斯蒂克反演的基本原理

这种方法是基于大地电磁测深曲线低频渐近线的性质，将视电阻率随周期变化的曲线变换成为电阻率随深度变化的曲线。

从水平层状介质的理论计算公式出发，可推导出当下半空间介质电阻率为无穷大和零这两种极限情况时，曲线低频渐近线分别满足的方程式：

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu S^2} \tag{3—13}$$

$$\rho_a = \omega\mu D^2 \tag{3—14}$$

式中　S——为下半空间上面多层介质的总纵向电导；

D——为下半空间上面多层介质的总厚度。

这两种渐近线分别称为S渐近线和H(即D)渐近线。两渐近线交点的坐标值ρ_s和ω同时满足(3—13)和(3—14)式。因此，如能设法确定各个频率的交点坐标值ρ_s和ω时，便可知道它们所对应的深度D及该深度范围内介质的总纵向电导S，进而推导出介质电阻率随深度变化的规律。博斯蒂克发现渐近线交点的坐标值与该频率处的实测视电阻率值很接近(关于其间的近似性质，将在下段叙述)，因而可以用实测视电阻率值代替交点上的视电阻率。于是根据实测大地电磁测深曲线上每点的坐标ρ_s和ω，便能推算出介质电阻率随深度的变化。具体地说，解联立方程(3—13)和(3—14)，并转换到双对数坐标系中，可以得到实用的近似反演公式。

由(3—13)、(3—14)式消去$\omega\mu$，得

$$\rho_s \approx \frac{1}{\rho_s S^2} D^2, \text{ 即} \rho_s = \frac{D}{S}$$

$$\sigma_s = \frac{1}{\rho_s} = \frac{S}{D} = \frac{1}{D}\int_0^D \sigma(z)\,dz$$

反演问题是基于：

$$\sigma = \frac{dS}{dD} = \frac{d}{dD}\int_0^D \sigma(z)\,dz$$

由上式可得：

$$\sigma = \frac{dS}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dD} = \frac{\frac{dS}{d\omega}}{\frac{dD}{d\omega}} \tag{3—15}$$

由(3—13)式和(3—14)式有：

$$\log\rho_s = \log\omega + 2\log D + \log\mu \tag{3—16}$$

$$\log\rho_s = -\log\omega - 2\log S - \log\mu \tag{3—17}$$

由(3—16)、(3—17)式有：

$$\frac{d\log\rho_s}{d\log\omega} = 1 + 2\frac{d\log D}{d\log\omega} \tag{3—18}$$

和

$$\frac{d\log\rho_s}{d\log\omega} = -1 - 2\frac{d\log S}{d\log\omega} \tag{3—19}$$

而

$$\frac{dD}{d\omega} = \frac{dD}{d\log D} \cdot \frac{d\log D}{d\log\omega} \cdot \frac{d\log\omega}{d\omega} = \frac{D}{\omega} \cdot \frac{d\log D}{d\log\omega} \tag{3—20}$$

$$\frac{dS}{d\omega} = \frac{dS}{d\log S} \cdot \frac{d\log S}{d\log\omega} \cdot \frac{d\log\omega}{d\omega} = \frac{S}{\omega} \cdot \frac{d\log S}{d\log\omega} \tag{3—21}$$

将(3—20)、(3—21)代入(3—15)式，得

$$\sigma = \frac{S}{D} \frac{\frac{d\log S}{d\log\omega}}{\frac{d\log D}{d\log\omega}} \tag{3—22}$$

由（3—18）、（3—19）式有：

$$\frac{d\log D}{d\log\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}-1\right) \tag{3—23}$$

$$\frac{d\log S}{d\log\omega}=-\frac{1}{2}\left(\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}+1\right) \tag{3—24}$$

将（3—23）、（3—24）式代入（3—22）式，并注意到$\frac{S}{D}=\frac{1}{\rho_a}$，得

$$\sigma=\frac{1}{\rho_a}\cdot\frac{1+\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}}{1-\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}} \tag{3—25}$$

由（3—14）式有：

$$D=\left(\frac{\rho_a}{\omega\mu}\right)^{1/2} \tag{3—26}$$

（3—25）和（3—26）式便是博斯蒂克反演公式。它可以提供与实测视电阻率曲线相对应的电阻率随深度变化的地电模型，并且可以根据电阻率-深度曲线的拐点确定电性介面的位置。

为便于使用，将横坐标ω（圆频率）改变成T（周期），于是（3—25）和（3—26）式变成：

$$\rho=\frac{1}{\sigma}=\rho_a\left(\frac{1+\frac{d\log\rho_a}{d\log T}}{1-\frac{d\log\rho_a}{d\log T}}\right) \tag{3—27}$$

及

$$D=\left(\frac{\rho_a T}{2\pi\mu}\right)^{1/2} \tag{3—28}$$

在反演理论曲线时，根据式（3—25）成（3—27），利用导数$\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}$或$\frac{d\log\rho_a}{d\log T}$可以得到令人满意的反演结果。但在反演实测数据时，由于其中必然存在测量误差，故数据具有一定的分散性，而求导数运算对这种分散性尤为灵敏，所以在做反演之前应先对实测数据做三次样条平滑。此外，还可以设法迴避应用导数项而代之以相位观测值，从而导出不含导数项的反演公式。

在推导过程中，主要利用了一维介质的大地电磁阻抗是最小相位的响应函数这一性质。对于最小相位响应函数来说，其幅值和相位角之间存在一定的关系。推导的结果是：

$$\frac{d\log\rho_a}{d\log\omega}\approx\frac{4}{\pi}\phi-1$$

将上式代入（3—25）式，得到

$$\rho(D)=\rho_a\left(\frac{\pi}{2\phi}-1\right) \tag{3—27′}$$

这便是不用导数项而用视电阻率ρ_a本身和相位ϕ进行博斯蒂克反演的公式。

二、博斯蒂克反演的近似性及其特点

图 3－5 给出了博斯蒂克反演的依据及其近似性质。从图中可以看出，当两个模型的下部半空间介质的电阻率分别为无穷大和零，而其上部模型完全相同时，在对应于低频 S 和 H 渐近线交点的较高频率一侧，两种断面的视电阻率值近于相同，几乎不受下部介质电阻率巨大变化的影响。两支渐近线交点的视电阻率值与同一频率处上述两条测深曲线上的视电阻率值相差很小，后二者只在交点附近构成一个很小的区间。可以设想，当下部介质电阻率为上述两种极限情况之间的任何值时，上述结论显然也同样成立。这样，两支渐近线交点处的视电阻率值就相当准确地给出了下部空间电阻率为任意值时该频率上的视电阻率值，即当下半空间的电阻率在两个极限值之间变化时，对应渐近线交点频率处的视电阻率值只在上述交点上下一个很小的区间内变化，因此，可以交点上的视电阻率值来逼近，反之亦然。所以这种方法又可以称为渐近线交点近似方法，其近似性质就在于此。

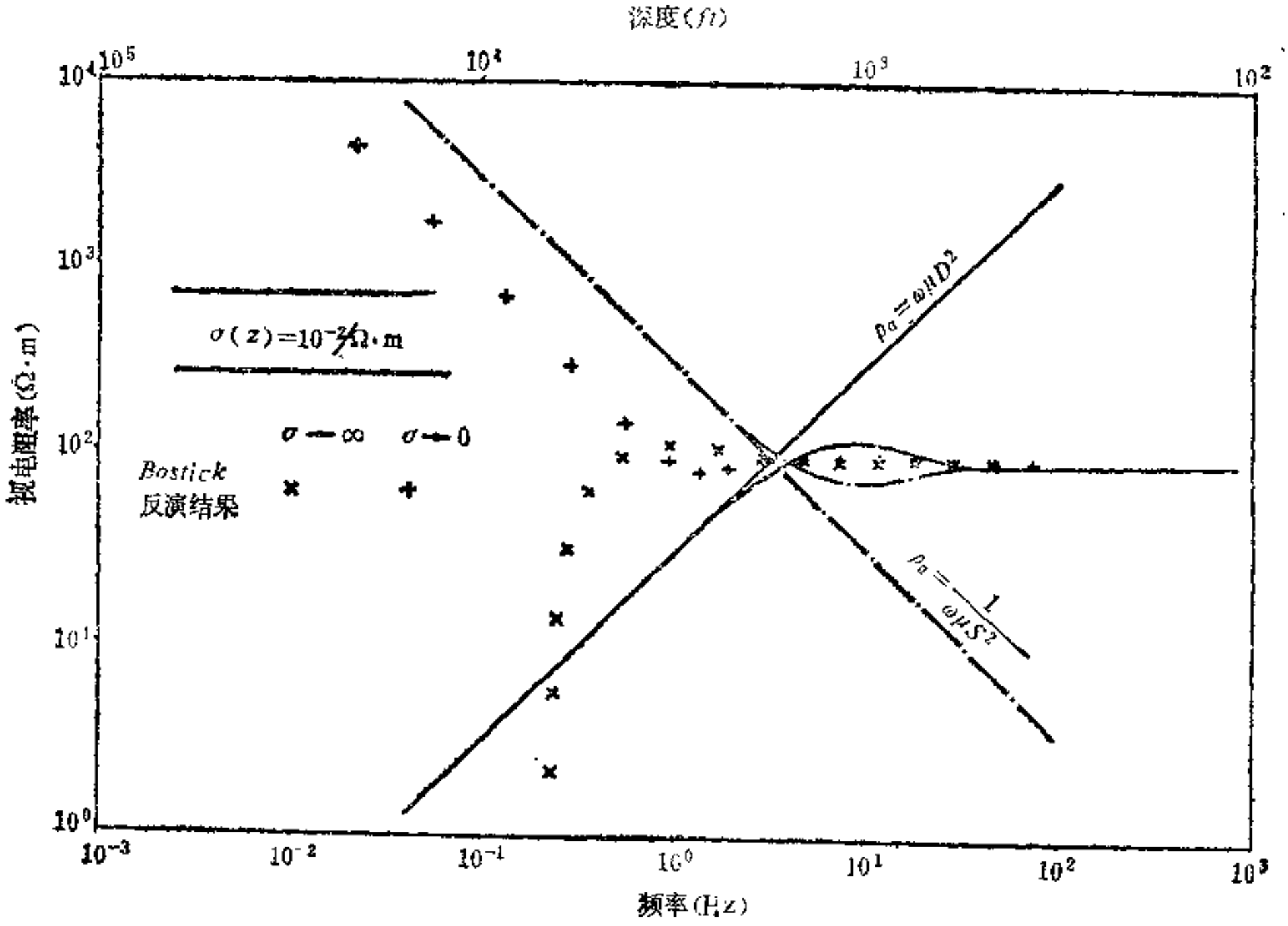


图 3-5　博斯蒂克反演原理图

博斯蒂克反演有许多突出的优点。它实质上是用比较简单的运算将视电阻率与周期的关系曲线变换成介质电阻率与深度的关系曲线，从而能直观地揭示地下电性结构的特征。另外，它不象一般反演方法那样由一整条曲线的拟合得出反演结果，而是通过逐点变换取得逐点反演结果。前者的缺点是，如果视电阻率曲线的某几个数据质量不佳时，就会对整个反演产生不利影响，而后者不存在这种缺陷。还应该指出，由于采用逐点变换，因此，如果反演结果有偏倚，则相邻测点很可能存在相同性质的偏倚，从而保证了整条测线反演

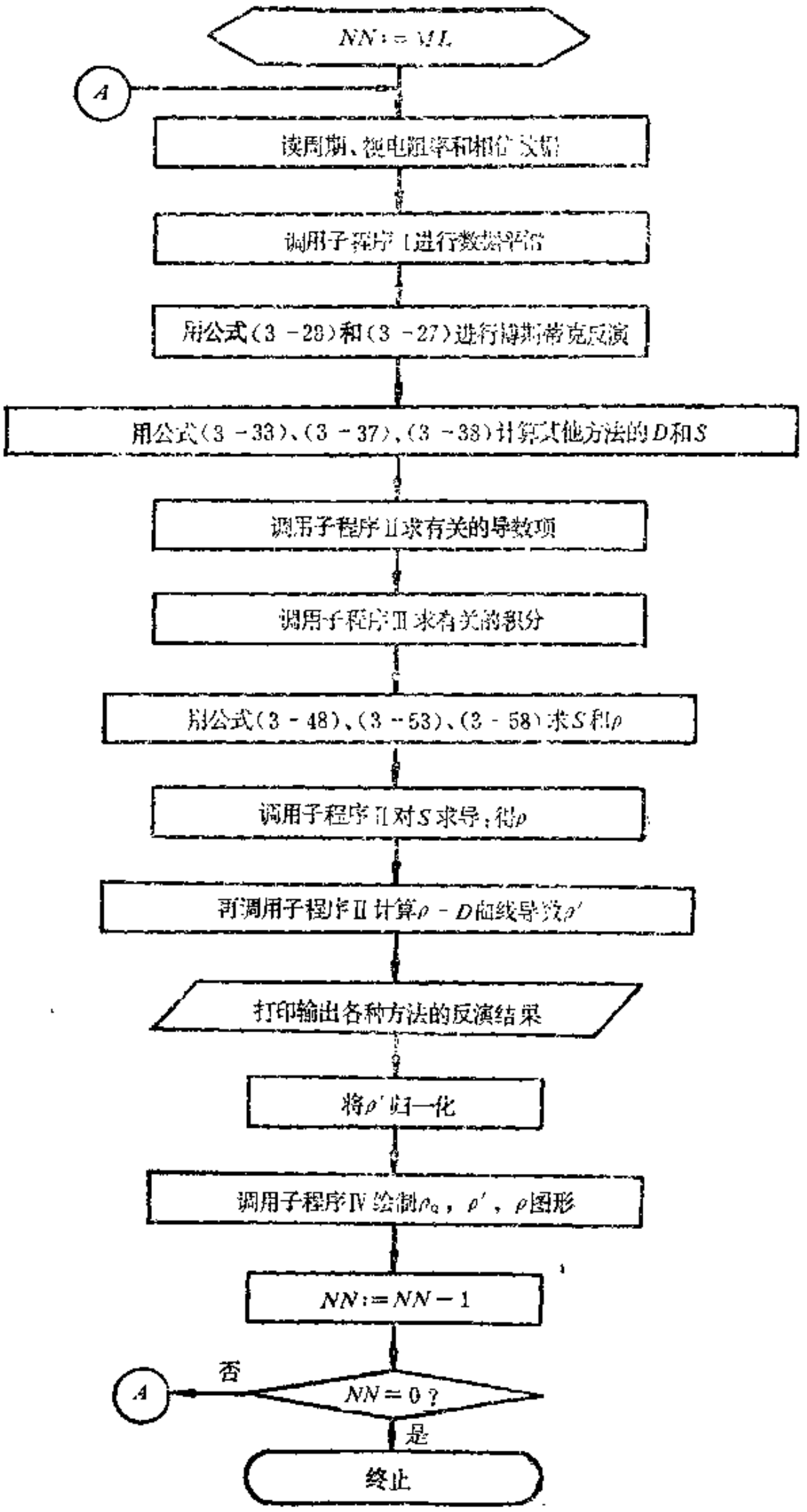


图 3-6　博斯蒂克反演程序框图

子程序Ⅰ—三次样条平滑子程序；

子程序Ⅱ—计算导数的子程序；

子程序Ⅲ—宽行打印曲线图形子程序

结果的连续性。

当然，这种反演方法是以水平层状介质理论为基础而提出的一种近似方法，其反演结果不可能是十分精确的。但是可以指望，它所揭示的电性层起伏形态具有较好的真实性。

三、程序框图及程序段选录

1．程序框图

博斯蒂克反演程序框图见图3-6。

2．程序段选录

（1）程序段功能

对曲线数据进行三次样条平滑。

（2）数组说明

X　一维实数组，存放数据点的横坐标值。

Y　一维实数组，存放数据点的纵坐标值。

DY　一维实数组，存放数据Y的测量误差。

A　一维实数组，存放平滑系数，若平滑后取点横坐标与原数据点横坐标相同时，A的元素即为平滑结果。

B、C、D　一维数组，均为存放平滑系数使用的数组。

其他数组　均为中间工作单元。

N　整变量，平滑的数据点数。

S　实变量，控制平滑程度的系数。一般以N为中值，S越大，平滑程度越高；S等于零时，即为三次样条插值程序。

（3）程序

```
      SUBROUTINE SMOTH1(N,X,Y,DY,S,A)
      DIMENSION X(81),Y(81),DY(81),A(81),B(81),C(81),D(81),
      DIMENSION T(81),T1(81),R(81),R1(81),R2(81),V(81),U(81)
      IF(N.LT.2) RETURN
      N1=N+1
      N2=N+2
      R(1)=0.
      R(2)=0.
      R1(N1)=0.
      R2(N2)=0.
      R2(N1)=0.
      U(1)=0.
      U(2)=0.
      U(N1)=0.
      U(N2)=0.
      P=0.
    1 H=X(2)-X(1)
      F2=-S
      F=(Y(2)-Y(1))/H
      IF(N.LT.3) GO TO 30
      DO 10 I=3,N
      G=H
      H=X(I)-X(I-1)
      IF(H.LE.0.) RETURN
      E=F
      F=(Y(I)-Y(I-1))/H
      A(I)=F-E
```

```
      T(I)=2.*(G+H)/3.
      T1(I)=H/3
      R2(I)=DY(I-2)/G
      R(I)=DY(I)/H
10    R1(I)=-DY(I-1)/G-DY(I-1)/H
      DO 11 I=3,N
      B(I-1)=R(I)**2+R1(I)**2+R2(I)**2
      C(I-1)=R(I)*R1(I+1)+R1(I)*R2(I+1)
11    D(I-1)=R(I)*R2(I+2)
15    IF(N.LT.3) GO TO 30
      DO 35 I=3,N
13    R1(I-1)=F*R(I-1)
      R2(I-2)=G*R(I-2)
      R(I)=1./(P*B(I-1)+T(I)-F*R1(I-1)-G*R2(I-2))
      U(I)=A(I)-R1(I-1)*U(I-1)-R2(I-2)*U(I-2)
14    F=C(I-1)*P+T1(I)-H*R1(I-1)
      G=H
35    H=D(I-1)*P
      DO 16 I=3,N
      NI=N-I+3
16    U(NI)=R(NI)*U(NI)-R1(NI)*U(NI+1)-R2(NI)*U(NI+2)
30    E=0.
      H=0.
      DO 17 I=2,N
      G=H
      H=(U(I+1)-U(I))/(X(I)-X(I-1))
      V(I)=(H-G)*DY(I-1)*DY(I-1)
17    E=E+V(I)*(H-G)
      H=-H*DY(N)*DY(N)
      V(N+1)=G
      E=E-G*H
      G=F2
      F2=E*P*P
      IF(F2.GE.S.OR.F2.LE.G) GO TO 50
      F=0.
      H=(V(3)-V(2))/(X(2)-X(1))
      IF(N.LT.3) GO TO 45
      DO 40 I=3,N
      G=H
      H=(V(I+1)-V(I))/(X(I)-X(I-1))
      G=H-G-R1(I-1)*R(I-1)-R2(I-2)*R(I-2)
      F=F+G*R(I)*G
      R(I)=G
40    CONTINUE
45    H=E-P*E
      IF(H.LE.0.) GO TO 50
      P=P+(S-F2)/((SQRT(S/E)+P)*H)
      GO TO 15
50    NP1=N-1
      DO 55 I=1,NP1
      A(I)=Y(I)-P*V(I+1)
      C(I)=U(I+1)
55    R(I)=A(I)
      R(N)=Y(N)-P*V(N+1)
      A(N)=R(N)
      DO 60 I=2,N
      H=X(I)-X(I-1)
      D(I-1)=(U(I+1)-C(I-1))/(3.*H)
      B(I-1)=(R(I)-A(I-1))/H-(H*D(I-1)+C(I-1))*H
60    CONTINUE
      RETURN
      END
```

四、反演实例

图 3－7 是一条 HKH 型五层曲线的反演结果，图中包括视电阻率-周期曲线、电阻率-深度曲线及其导数曲线。其真实参数为（电阻率单位为欧姆米，厚度单位为公里）：$\rho_1=50$，$\rho_2=3$，$\rho_3=50$，$\rho_4=3$，$\rho_5=50$；$h_1=2$，$h_2=1$，$h_3=4$，$h_4=2$。从图中可看出，尽管第四层为低阻层，且有 2 公里的厚度，但由于埋藏较深，其上有另一低阻层影响，因而在普通视电阻率-周期曲线上该层没有明显反映，但在变换后的电阻率-深度曲线上，各个电性层都有明显的反映，并且可由拐点位置确定各电性层的厚度。当然，拐点位置不易准确地确定，为了提高确定拐点的精度，可以对电阻率-深度曲线再求一次导数，由导数极值点确定拐点位置。反演结果为：

$$h'_1=1.9,\quad h'_2=0.77,\quad h'_3=2.04,h'_4=4.76。$$

其中 h'_3 和 h'_4 与真实参数 h_3 和 h_4 相差较大，但是它们的和以及所有电性层厚度的总和却与真实值很接近。另外，这种反演方法如果产生偏倚，则偏倚存在系统性。为了证实这种性质，我们对另一条曲线做了反演。这条曲线的真实参数除 $h_4=4$ 外，其他参数与前例相同。图 3－8 给出了它的视电阻率-周期曲线、电阻率-深度曲线及其导数曲线。利用导数极值点确定的各层厚度为：

$$h'_1=1.9,\quad h'_2=0.77,\quad h'_3=2.83,\quad h'_4=6.4。$$

与前例相比，h'_1 与 h'_2 完全相同，h'_3 稍有增大，总厚度为 11.9，与真参数 11.0 很接近。

总结以上二例可以看出，反演结果的特点是总厚度（一般是基岩顶面深度）比较准确，其他各层厚度精度较差，但是误差具有系统性，因而对于一条测线来说，各层相对起伏形态是可靠的，这一点对地质解释很重要。

这种方法的另一重要用途是能够为进一步的精确反演提供初始模型参数。众所周知，如何设法给出合适的初始参数，是关系到反演结果精度且难度较大的问题。博斯蒂克反演为解决这个问题提供了工具。前面提到，变换后的电阻率-深度曲线对地电断面的分辨能力较强，从而可以较正确地确定曲线的类型，此外，还可以利用拐点位置估算各电性介面的深度，从而给出各层的厚度参数。至于各电性层的电阻率参数，博斯蒂克反演不能给出准确的数值，只能粗略地进行估计。以上述第一条曲线为例，用博斯蒂克反演结果作为初始参数进行精确反演（广义逆矩阵法）的结果是：

$$\rho_1=50,\quad \rho_2=3.01,\quad \rho_3=56.1,\quad \rho_4=3.18,\quad \rho_5=50.1,$$
$$h_1=2,\quad h_2=1,\quad h_3=3.9,\quad h_4=2.15。$$

这个结果与真实参数符合得很好。

第五节　几种类似博斯蒂克方法的快速反演解释方法

一、用直流电场分布逼近大地电磁场分布的原理

博斯蒂克反演是利用大地电磁测深曲线低频渐近线交点的性质建立起来的。本节介绍

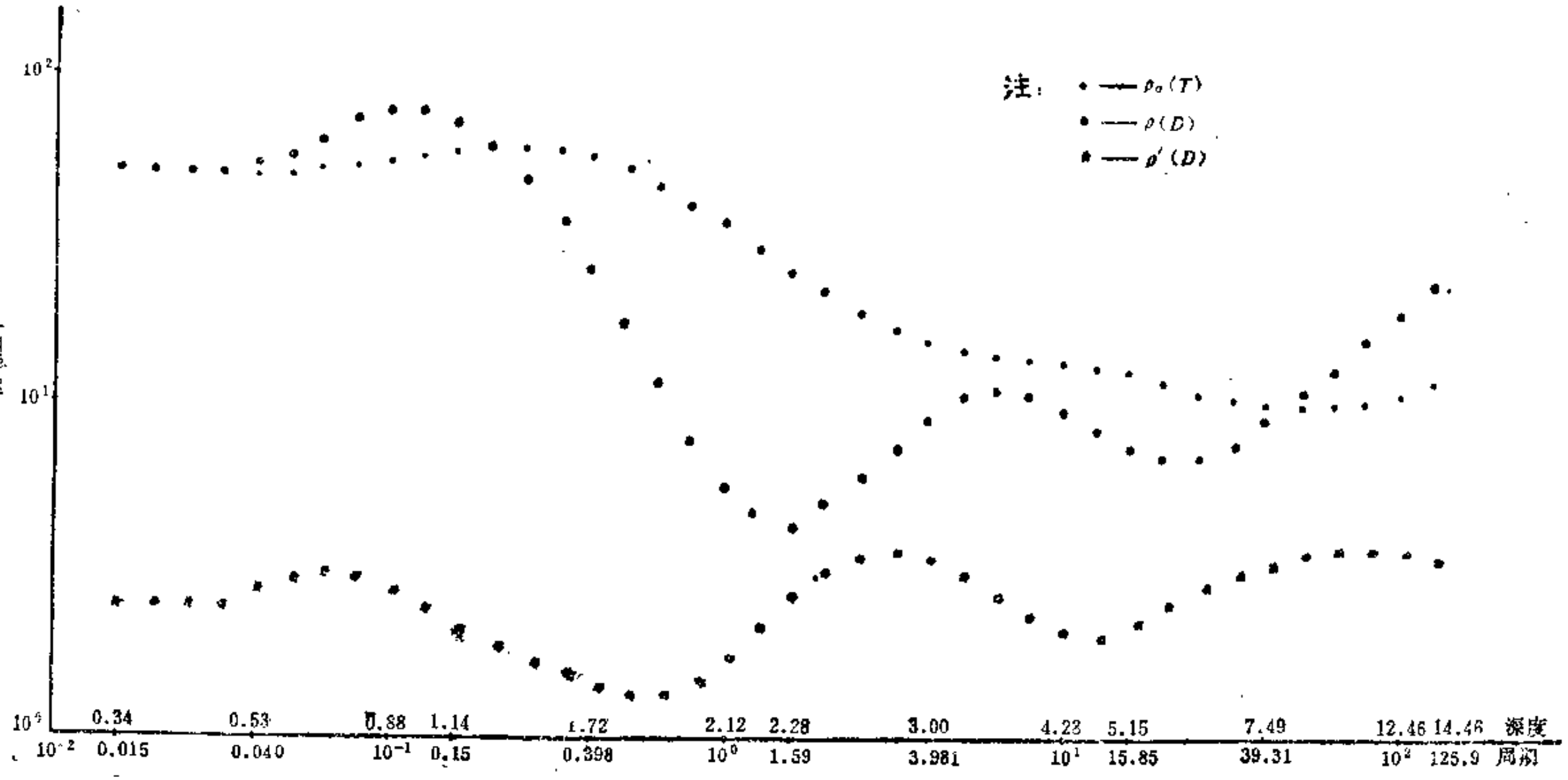


图 3-7　*HKH*型五层曲线的反演结果

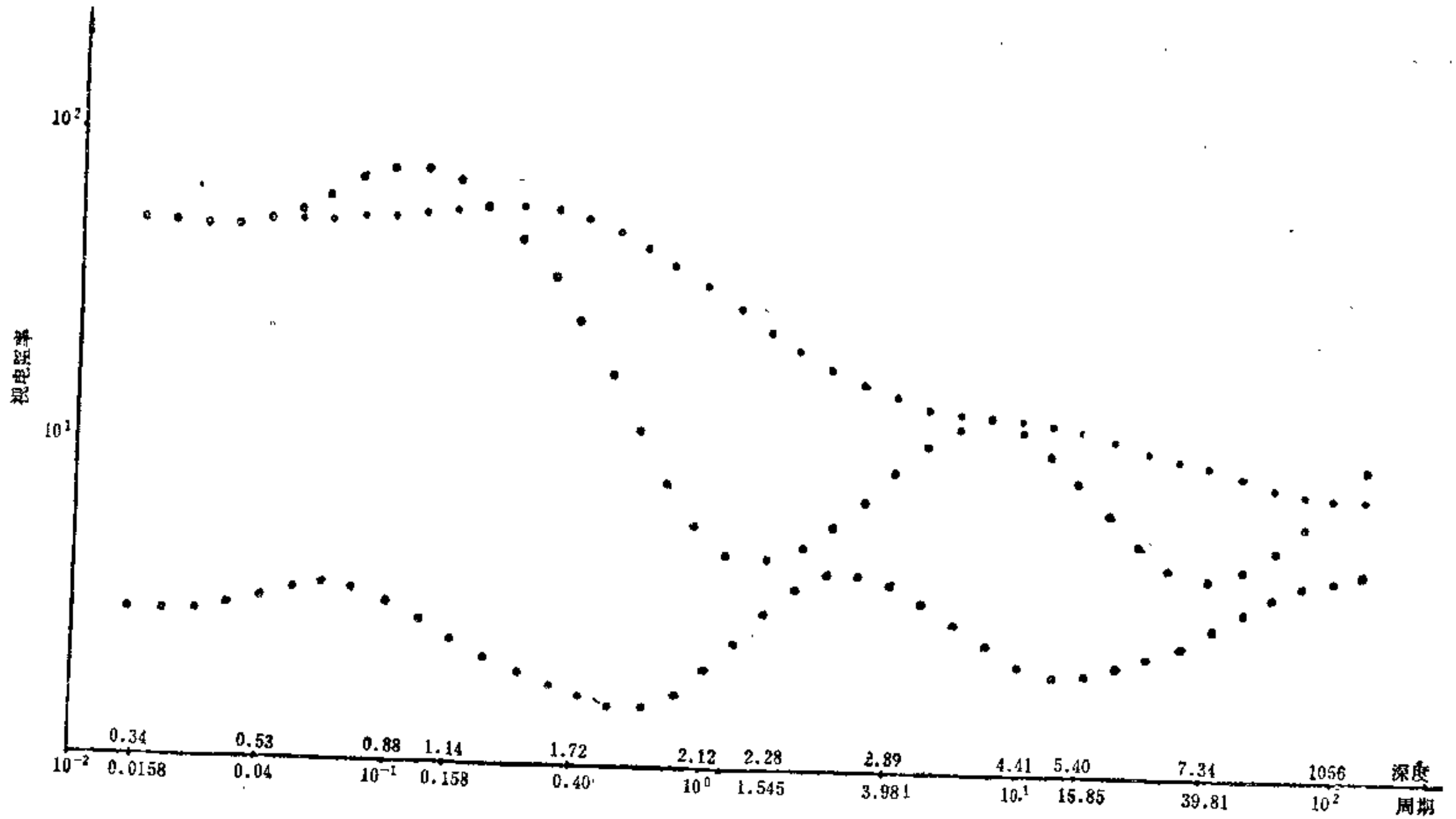


图 3-8　*HKH*型五层曲线反演结果

·—$\rho_s(\Gamma)$　　O—$\rho(D)$　　*—$\rho'(D)$

的方法是基于用不同的直流电场分布逼近层状介质中实际的大地电磁场分布而导出的。使在这种直流场分布时能观测到的直流电测深视电阻率与大地电磁视电阻率相等，从而可导出大地电磁阻抗与地下电阻率ρ及深度D之间的关系式，利用它们可以达到反演目的。

由直流电测深理论知道，当一直流水平电场作用于层状介质上达到不同深度D时，相应的实测视电阻率ρ_s可由下式确定：

$$\rho_s = \frac{E}{j} = \frac{E \cdot D}{I} = \frac{E \cdot D}{\int_0^D E(z)\sigma(z)dz} \tag{3—29}$$

式中　E——地面与深度D之间的平均电场；

$E(z)$——深度z处的电场；

$\sigma(z)$——深度z处的导电率。

已知大地电磁测深中视电阻率的公式为：

$$\rho_s = \frac{|Z|^2}{\omega\mu} \tag{3—30}$$

在均匀介质情况下，令式（3—29）与式（3—30）相等，便可得到地面阻抗Z与介质电阻率之间的关系。

已知均匀介质中趋肤深度定义为：

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{3—31}$$

层状介质时，可近似定义为：

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_.}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\frac{S(D)}{D}}} = \sqrt{\frac{2D}{\omega\mu S(D)}} \tag{3—32}$$

式中　$\sigma_.$——平均导电率。

也可以由式（3—30）与（3—31）定义视趋肤深度为：

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_s}} = \sqrt{\frac{2\rho_s}{\omega\mu}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu}\frac{|Z|^2}{\omega\mu}} = \frac{\sqrt{2}|Z|}{\omega\mu} \tag{3—33}$$

它表示给定频率ω时，大地电磁场能穿透（一层状介质）的深度。

如果选择一种简单的电场分布函数$E(z)$逼近大地电磁场的分布，那么就有可能将大地电磁观测值ρ_s与对应深度D及该处的介质导电率$\sigma(D)$连系起来。

在直流电测深中，视电阻率受深度z处导电率（异常）影响的程度正比于该处的电场$E(z)$，也可以说地电参数变化导致观测值变化的灵敏度为静电场分布$E(z)$。在大地电磁方法中，设均匀介质σ_0中深度z处有导电率变化$\Delta\sigma(z)$，它对地面观测值的影响决定于从该处反射回地面的反射波：

$$\Delta E \propto e^{-2zk_0} = e^{-2z\sqrt{-i\omega\mu\sigma_0}} = e^{-\frac{(1-i)\cdot 2z}{\delta}}$$

由此可见，应取

$$|\Delta E| \propto e^{-\frac{2z}{\delta}} \tag{3—34}$$

作为最佳逼近大地电磁分布的直流电场分布。

二、选取不同的直流电场近似分布而导出的几种反演算法

①取 $E(z)$ 在某一深度 D 之上为一常数，其下为零。

在均方意义上，最佳逼近式（3—34）中指数函数的阶跃函数的最大非零深度为：

$$D=0.6225\ \delta \tag{3—35}$$

采用这种近似时，根据式（3—29）求出的视电阻率为：

$$\rho_s=\frac{ED}{\int_0^D E(z)\sigma(z)dz}=\frac{ED}{E\int_0^D \sigma(z)dz}=\frac{D}{S(D)} \tag{3—36}$$

由式（3—35）和（3—33）得：

$$D=0.6225\delta_a=0.6225\frac{\sqrt{2}\ |Z|}{\omega\mu} \tag{3—37}$$

由式（3—37）、（3—36）及（3—30）得：

$$S(D)=\frac{D}{\rho_a}=\frac{0.6225\frac{\sqrt{2}\ |Z|}{\omega\mu}}{\frac{|Z|^2}{\omega\mu}}=\frac{0.6225\sqrt{2}}{|Z|} \tag{3—38}$$

由上述可见，如在式（3—35）及（3—38）中，以 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 代替0.6225，则这种反演公式与博斯蒂克反演公式完全相同。

② 取 $E(z)$ 为随深度线性衰减的函数，即

$$E(z)=E_0\left(1-\frac{z}{D}\right) \tag{3—39}$$

由于电场的衰减除与深度有关外，还应与导电率的分布有关，所以这种近似只适用于近似均匀介质的情况。

这时计算出的总电流强度为：

$$I=\int_0^D E(z)\sigma(z)dz=E_0\int_0^D\left(1-\frac{z}{D}\right)\sigma(z)dz=E_0S(D)-\frac{E_0}{D}\int_0^D z\sigma(z)dz$$

进行分部积分后，可得到：

$$I=\frac{E_0}{D}\int_0^D S(z)dz=\frac{E_0}{D}\eta(D) \tag{3—40}$$

其中 $\eta(D)=\int_0^D S(z)dz$。利用式（3—29）和（3—30）有：

$$\rho_a=\frac{DE}{I}=\frac{D\cdot\frac{E_0}{2}}{\frac{E_0}{D}\eta(D)}=\frac{|Z|^2}{\omega\mu}$$

整理后可得：

$$\eta(D)=\frac{D^2\omega\mu}{2\,|Z|^2} \tag{3—41}$$

其中 D可取为视趋肤深度（式(3—33)）。而导电率则为 $\eta(D)$对深度的二阶导数。

③ 取电场 $E(z)$为随总纵向电导 $S(z)$线性衰减的函数，即

$$E(z)=E_0\left(1-\frac{S(z)}{S(D)}\right) \tag{3—42}$$

这时平均电场为：

$$E(z)=\frac{E_0}{D}\int_0^D\left(1-\frac{S(z)}{S(D)}\right)dz=E_0\left(1-\frac{\eta(D)}{D\cdot S(D)}\right)=KE_0 \tag{2—43}$$

式中

$$K=1-\frac{\eta(D)}{D\cdot S(D)} \tag{3—44}$$

将式（3—43）代入式（3—29），得到

$$\rho_s=\frac{KD}{\int_0^D\left(1-\frac{S(z)}{S(D)}\right)\sigma(z)dz} \tag{3—45}$$

由于 $\sigma(z)dz=dS(z)$，所以由上式通过积分得到：

$$\rho_s=\frac{2KD}{S(D)} \tag{3—46}$$

取D为水平层状介质情况下的趋肤深度：

$$D=\sqrt{\frac{2D}{\omega\mu S(D)}}$$

从中解出：

$$D=\frac{2}{\omega\mu S(D)} \tag{3—47}$$

将上式代入式（3—46），并利用式（3—30），得到：

$$\frac{2K\frac{2}{\omega\mu S(D)}}{S(D)}=\frac{|Z|^2}{\omega\mu}$$

解得：

$$S(D)=\frac{2\sqrt{K}}{|Z|}=\sqrt{\frac{2KT}{\pi\mu\rho_s}} \tag{3—48}$$

在上式中，$S(D)$通过K与深度D处及其以上各处的总纵向电导有关。可以先用博斯蒂克反演公式求出函数$K(D)$，然后再用公式（3—48）和（3—47）求出函数$S(D)$。

④ 取电场 $E(z)$随深度按指数规律衰减，即

$$E(z)=E_0e^{-\frac{z}{\delta}} \tag{3—49}$$

求出平均电场为：

$$E=\frac{E_0\int_0^D e^{-\frac{z}{\delta}}dz}{D}=E_0\left(1-\frac{1}{e}\right) \tag{3—50}$$

总电流强度为：

$$I=\int_0^D E(z)\sigma(z)dz=E_0\left\{\frac{1}{e}S(D)+K\right\} \tag{3—51}$$

式中

$$K(D)=\frac{1}{D}\int_0^D S(z)e^{-\frac{z}{D}}dz \tag{3—52}$$

将式（3—50）、（3—51）代入式（3—29），并利用式（3—30），得

$$\frac{DE_0\left(1-\frac{1}{e}\right)}{E_0\left\{\frac{1}{e}S(D)+K(D)\right\}}=\frac{|Z|^2}{\omega\mu}$$

从中解得：

$$S(D)=\frac{\sqrt{2}(e-1)}{|Z|}-eK(D) \tag{3—53}$$

D取为视趋肤深度：

$$D=\frac{\sqrt{2}\,|Z|}{\omega\mu}$$

其中函数$K(D)$按式（3—52）根据博斯蒂克反演公式得到的初步结果求出，然后再用式（3—53）求出最后结果。

⑤ 取电场$E(z)$随电导呈指数变化。上面假设电场随深度呈指数变化，而趋肤深度包括其中的电导都是常数。这种假设只在均匀介质中是成立的。考虑到电场随深度的变化应是：

$$E_0e^{-\frac{\sqrt{\sigma}\cdot z}{\sqrt{2/\omega\mu}}}$$

我们近似地取为按电导呈指数变化的规律，会更接近实际情况。设

$$E(z)=E_0e^{-\frac{S(z)}{S(D)}} \tag{3—54}$$

可求得：

$$E_{平均}=\frac{E_0}{D}\int_0^D e^{-\frac{S(z)}{S(D)}}dz$$

$$=-\frac{E_0S(D)}{D}\left\{\frac{1}{\sigma(D)}\,\frac{1}{e}-\frac{1}{\sigma(0)}+K\right\} \tag{3—55}$$

式中

$$K=\int_0^D\frac{\sigma'(z)}{\sigma^2(z)}e^{-\frac{S(z)}{S(D)}}dz \tag{3—56}$$

又求得：

$$I=E_0\int_0^D e^{-\frac{S(z)}{S(D)}}\sigma(z)dz=-E_0S(D)\left(\frac{1}{e}-1\right)。 \tag{3—57}$$

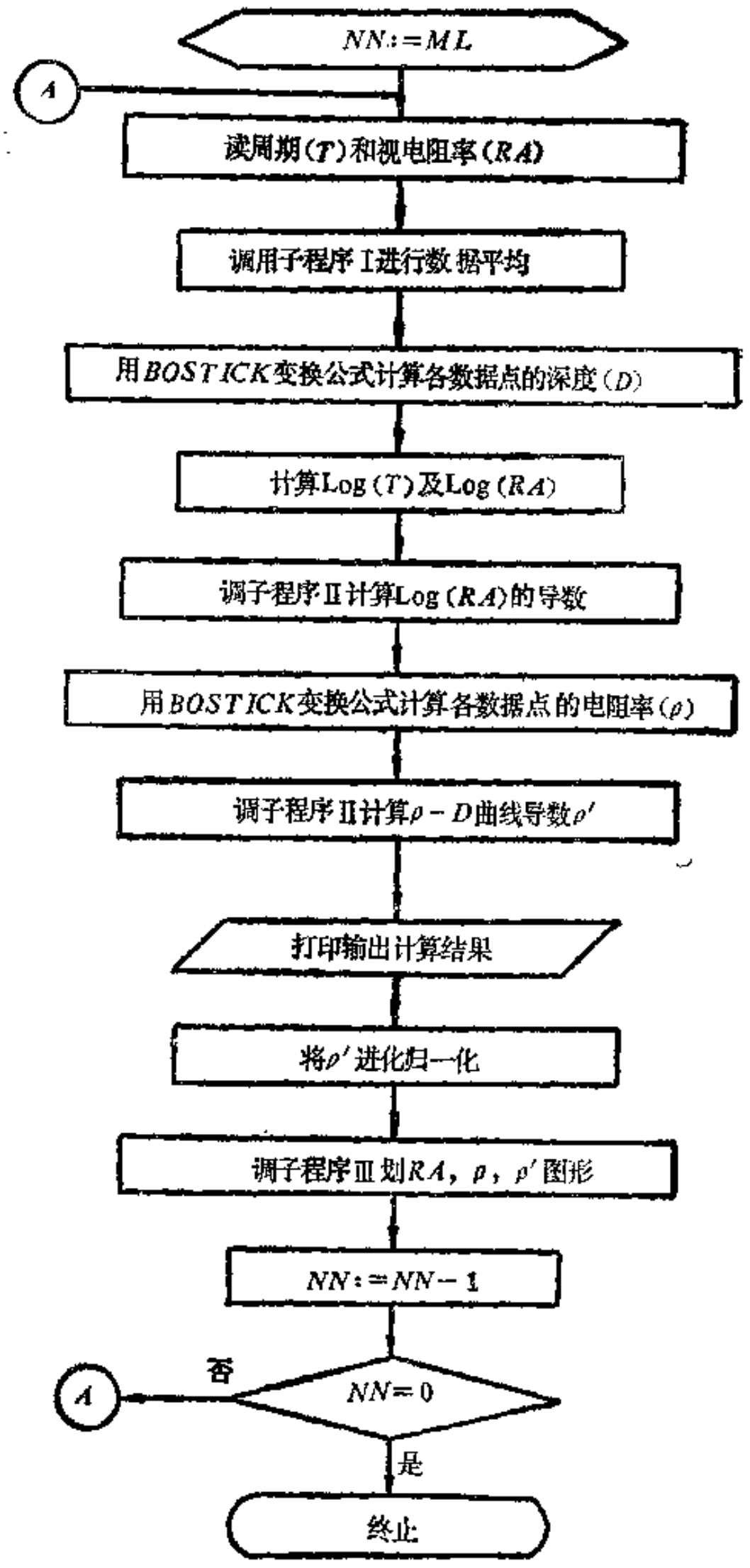


图 3-9　几种快速反演程序框图

子程序Ⅰ—三次样条平滑子程序；子程序Ⅱ—计算导数的子程序；子程序Ⅲ—数值积分子程序；
子程序Ⅳ—宽行打印曲线图形子程序

从而有：

$$\rho_s = \frac{E_{平均}D}{I} = \left[\frac{\rho(D)}{e} - \frac{1}{\sigma(0)} + K\right]\sqrt{\left(\frac{1}{e} - 1\right)}$$

整理后得到：

$$\rho(D) = e\left\{\rho_s\left(\frac{1}{e} - 1\right) - K + \rho(0)\right\} \tag{3—58}$$

相应的深度仍为：

$$D = \frac{\sqrt{2}\,|Z|}{\omega\mu} \tag{3—59}$$

三、程序框图

几种简易快速反演程序框图见图 3－9。前面提到五种近似方案，即五种反演算法，而程序中只包括四种，其中第二种反演算法未编制程序。此外，为了进行比较，程序中包括了博斯蒂克反演算法。

四、反演实例

博斯蒂克反演以及本节介绍的几种简易反演都是直接把视电阻率 $\rho_s(T)$ 曲线变换成近似的真电阻率 $\rho(D)$ 曲线。它们的共同特点是简易快速，能直观地揭示地下电性结构的特征。但是采用不同的近似方案，其效果并不完全相同，主要表现在确定电性界面深度的精度上各不相同。

为了便于直观地看出各种方法的效果，我们以规则模型的曲线为例，进行反演试算。该模型的真实参数是：

$$\rho_1 = 10,\quad \rho_2 = 100,\quad \rho_3 = 10,\quad \rho_4 = 100,$$
$$\rho_5 = 10,\quad \rho_6 = 100,\quad \rho_7 = 10,\quad \rho_8 = 100,$$
$$h_1 = 1,\quad h_2 = 2,\quad h_3 = 4,\quad h_4 = 8,$$
$$h_5 = 16,\quad h_6 = 32\quad h_7 = 64。$$

图 3－10 是博斯蒂克反演结果。可以看到，$\rho(D)$ 曲线的起伏变化与地电断面中高、低阻层相对应，说明该方法能正确地揭示地下电性结构。但由 $\rho'(D)$ 导数曲线极值点确定的界面深度除最深界面较为准确外，其余界面深度的误差较大。

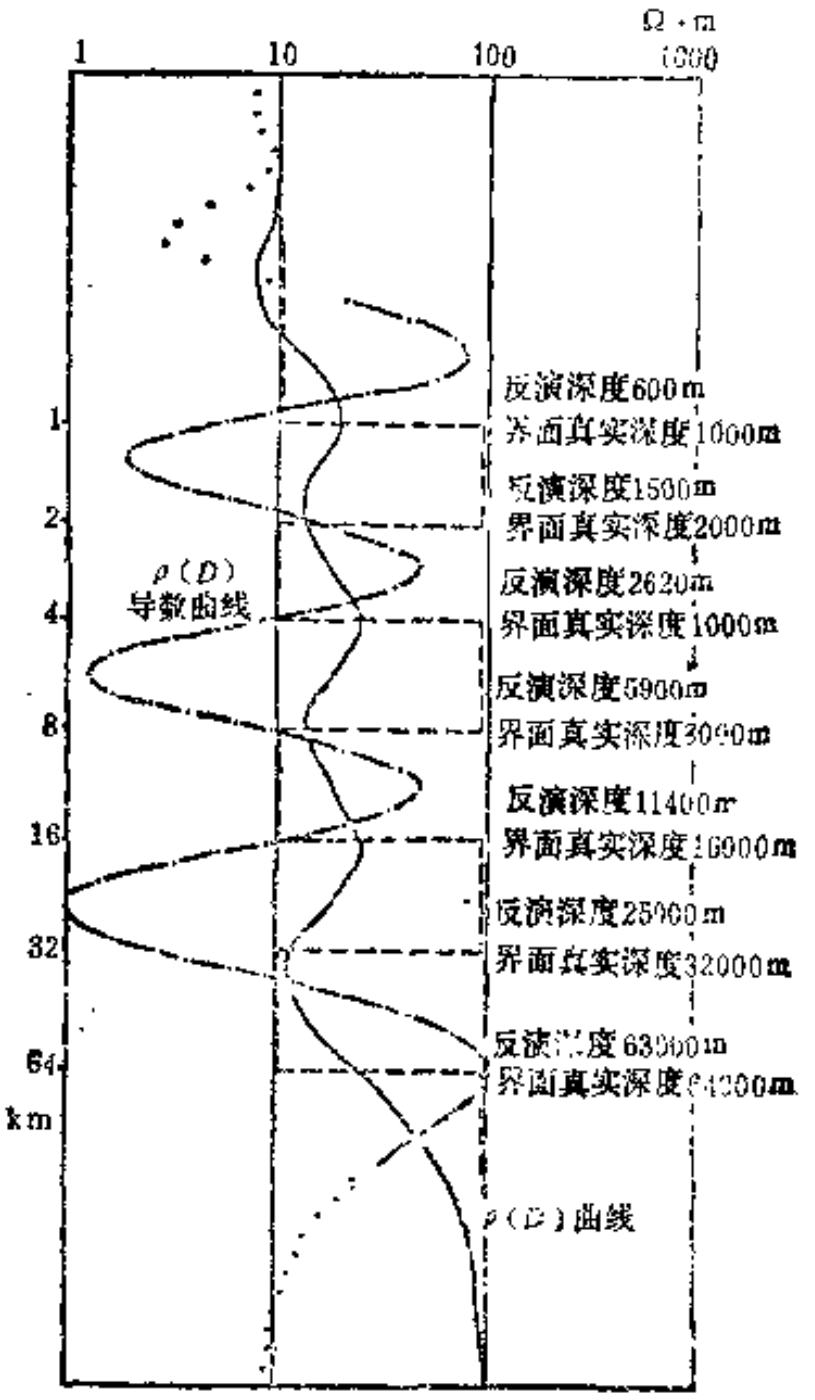


图 3-10
博斯蒂克反演结果

图 3-11 是采用E 随S 线性衰减近似方案的反演结果。可以看到，它的反演效果与博斯蒂克反演刚好相反，即最深界面深度误差很大，而其他界面位置较为准确。此外，这种方法还存在一个问题，即在最深界面后面出现假极值现象，容易误解成还有一个高阻层。这种假极值现象随界面两侧电阻率差异的增大而严重。例如当低电阻层电阻率不变，而高阻层电阻率增大为 300 欧姆米时，反演结果见图 3-12。前 6 个界面的反演深度仍较准确，但是最深界面的反演深度因受假极值影响而增大为154公里（真实深度为64公里）。

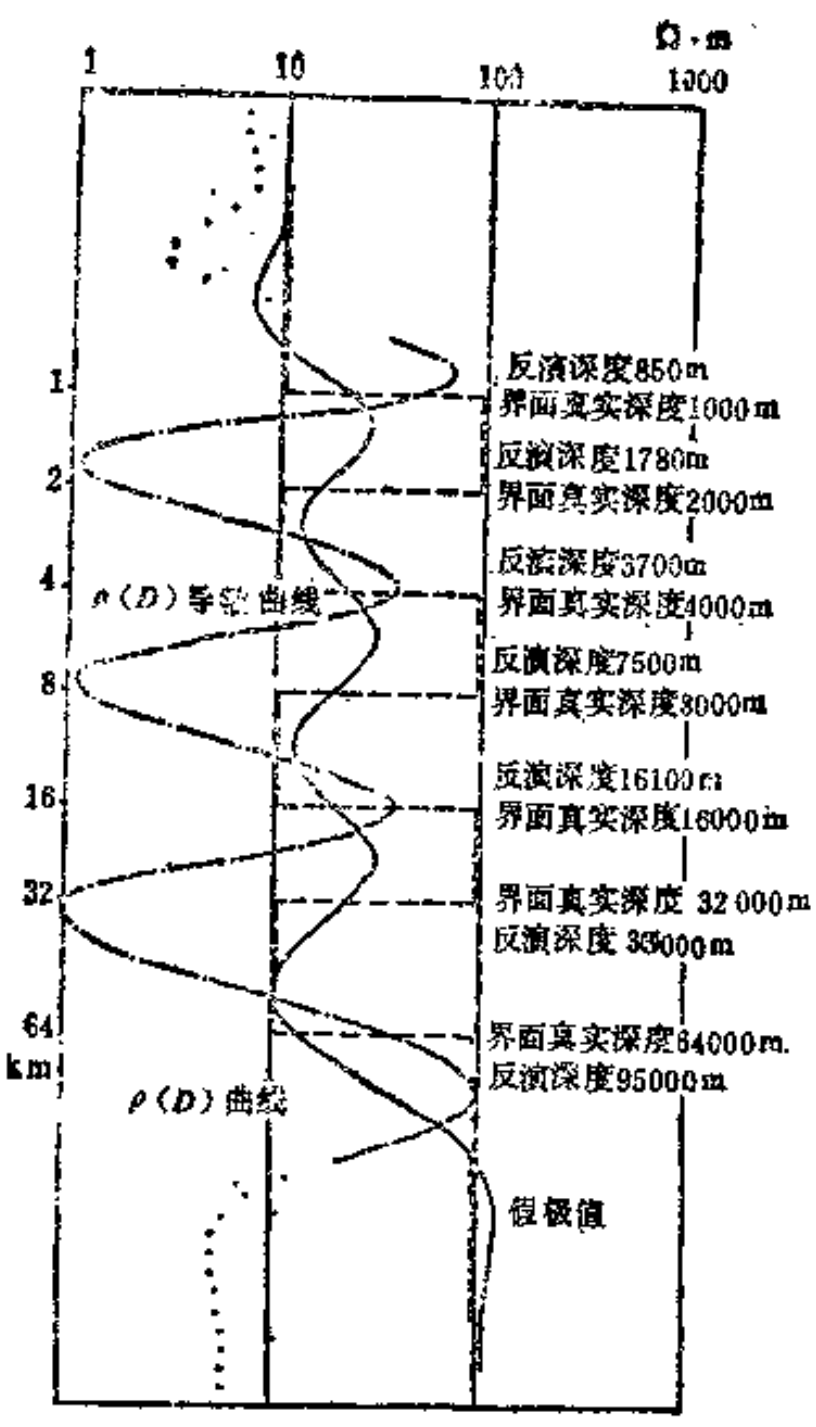


图 3-11
E随S线性衰减方案的反演结果（a）

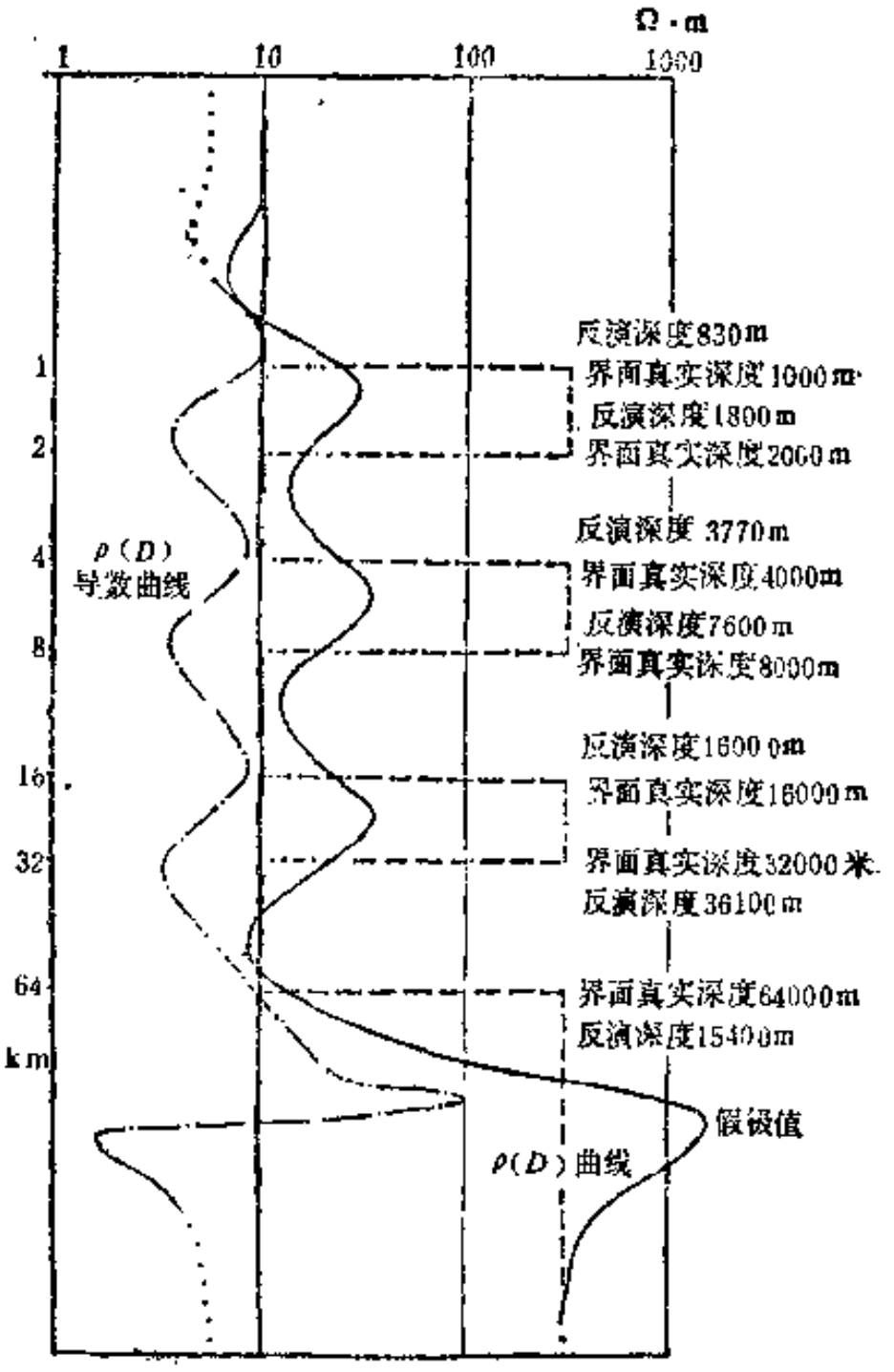


图 3-12
E随S线性衰减方案的反演结果（b）

图 3-13 是E随S 呈指数衰减方案的反演结果，显然，比其他方案要好一些。其优点是兼顾了最深界面和其他界面深度的反演精度。从图中可以看到，反演得到的 $\rho(D)$曲线与真实断面对应得很好，深部处也没有假极值现象。

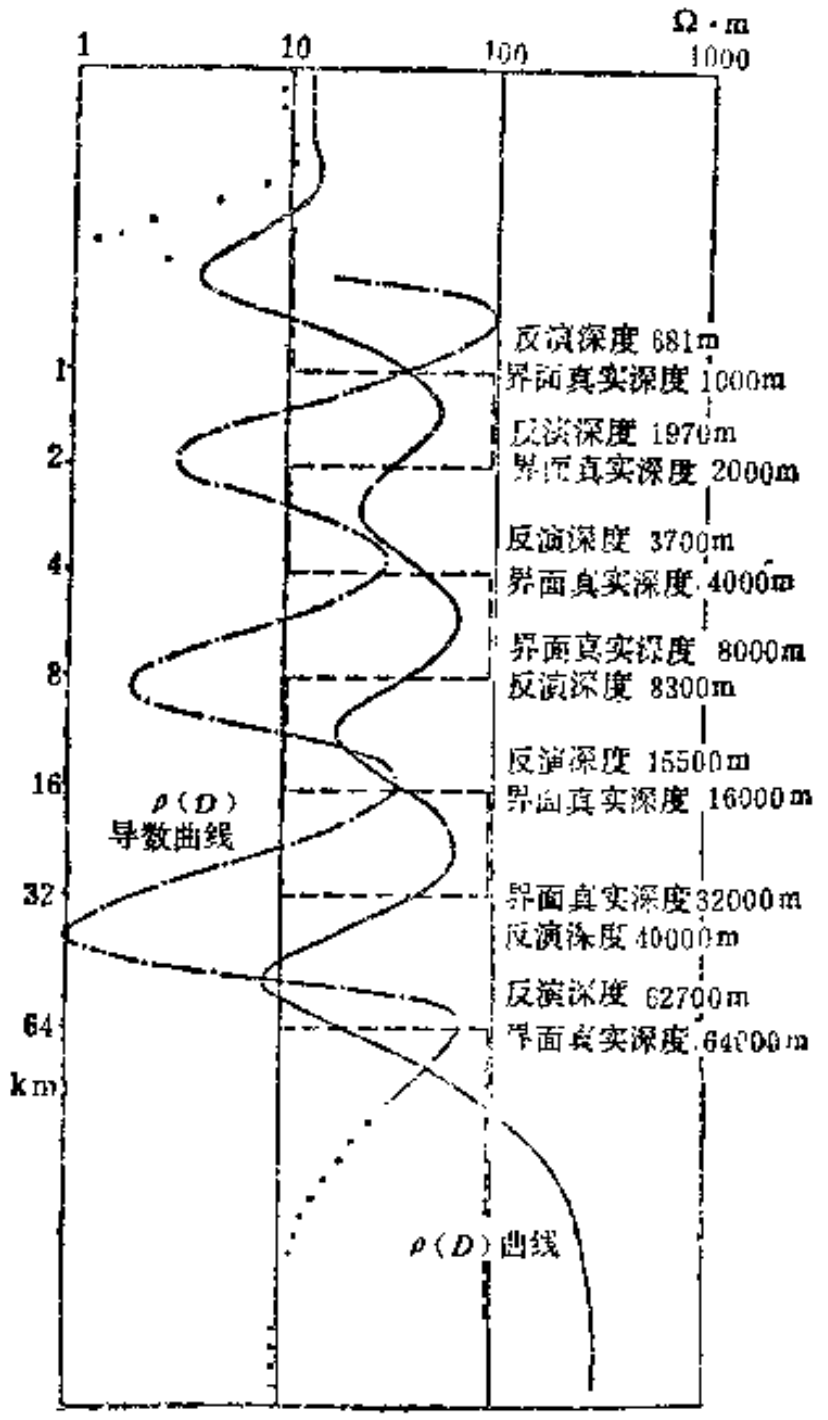


图 3-13 E随S呈指数衰减方案的反演结果

第四章　大地电磁测深的二维正演问题

上一章中讨论的介质模型是一维的，即介质的电学性质只沿一个坐标方向有变化，具体地说，是沿深度方向即 z 坐标方向有变化。在这一章中要讨论的二维模型是指介质的电学性质除深度外还沿一个水平坐标轴方向有变化，而沿另一个水平坐标方向保持不变，这个方向称为走向。

在二维介质情况下，大地电磁场的解析求解就变得十分困难。除了少数极简单的构造形态外，一般都不能给出解析解，只有借助于解偏微分方程或积分方程的数值计算方法求出近似解。文献中用于做大地电磁二维数值模拟的方法有有限差分法、基于传输面相似对比的有限差分法、有限单元法和积分方程法等。考虑到有限单元法对构造形态的适应性强又可达到较高的计算精度，所以在赛伯计算机上实现大地电磁二维数值模拟时选用了这一方法。

第一节　二维模型条件下大地电磁场的基本公式及边界条件

我们采用绝对实用单位制(MKSA单位制)，取与时间有关的因子为 $e^{-i\omega t}$。选取右旋直角坐标系的原点在地面上，z 轴正方向是垂直向下，x 轴的方向平行于走向方向，即介质的电性参数仅是 y、z 两个坐标的函数。再加上假设场源是垂直入射的平面电磁波，这就使电磁场的各分量沿 x 方向都没有变化，即它们相对 x 的偏导数皆为零。

大地电磁测深中可忽略位移电流的作用，这样，描述电磁场分布的麦克斯韦方程式可写成：

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu \vec{H} \\
&\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} \\
&\nabla \cdot \vec{H} = 0 \\
&\nabla \cdot \vec{D} = 0
\end{aligned} \tag{4—1}$$

将前二个式子写成分量形式的话，它们可分离成互相无关的两组方程式，电磁场各分量随之解耦成彼此独立的两组。一组仅包含 H_x、E_y 和 E_z 分量，称为磁场平行($H_{//}$)极化方式，另一组包含 E_x、H_y 和 H_z 分量，称为电场平行($E_{//}$)极化方式。这二组公式分列如下：

$H_{//}$极化方式	$E_{//}$极化方式
$\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x$	$\dfrac{\partial H_x}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x$
$\dfrac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y$	$\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y$
$\dfrac{\partial H_x}{\partial y} = -\sigma E_z$	$\dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z$

(4—2)

将每一组中的后两个公式代入第一个公式中，得到：

$$-\frac{\partial\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)}{\partial z}=i\omega\mu H_x$$

$$-\frac{\partial\left(\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)}{\partial z}=\sigma E_x \qquad (4—3)$$

对于导电率σ和导磁率μ是均匀的区域来说，上面二式可简化成：

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}+k^2 H_x=0$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+k^2 E_x=0 \qquad (4—4)$$

它们称为亥姆霍兹方程式，其中$k^2=i\omega\mu\sigma$。

借助于“传输面相似对比”的方法可将 E_x 和 H_x 两种极化方式的公式统一到一种形式中，以便于以后的计算。同时，也有助于加深对电磁场物理意义的理解。

我们从熟悉的电工学中的传输线方程式：

$$\nabla\cdot V=-\eta I$$

$$\nabla\cdot I=-\gamma V \qquad (4—5)$$

出发，式中 V 和 I 分别是沿线分布的电压和电流强度；η 和 γ 是单位长度上的分布阻抗和分布导纳参数。传输线对应的是一维问题，我们可以把这种概念推广到与二维问题相对应的情况，形成传输面的概念。

对传输面这种二维问题来说，方程式（4—5）可以展成形式上与式（4—2）相似的分量形式：

$$\frac{\partial I_y}{\partial y}+\frac{\partial I_z}{\partial z}=-\gamma V$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-\eta I_y$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\eta I_z \qquad (4—6)$$

式中 I_y 和 I_z 分别表示相应的电流密度分量。

式（4—6）与式（4—2）之间的相似性在于：在传输面上作为标量的分布电压与分布电流矢量的两个分量互相耦合，而式（4—2）中，在二种极化方式情况下，都是大地电磁场沿走向方向极化的那一个场分量与同组中另一种场的二个分量互相耦合。这构成了传输面方程式与二维构造条件下大地电磁场方程式二者之间可以进行相似对比的基础。也就是说，式（4—6）中 V 起的作用与 H_x 和 E_x 在式（4—2）中所起的作用相当，而I_z和I_y与 E_y、E_z（或 H_y、H_z）相当。通过这种对比，就可以给出介质的电性和磁性参数与传输面分布参数之间的等价关系，从而建立起电磁场方程式与传输面方程式之间的对应关系。

在H_x极化方式情况下，利用能量守恒这一原理，可以建立起准确的对应关系：

$$E_y\Longleftrightarrow -I_z$$

$$E_x \Longleftrightarrow I_y \tag{4—7}$$
$$H_x \Longleftrightarrow V$$

考虑到上式，再比较式（4—6）与式（4—2），可以得到传输面分布参数与介质的电性和磁性参数之间的对应关系为：

$$\eta \Longleftrightarrow \sigma$$
$$\gamma \Longleftrightarrow -i\omega\mu \tag{4—8}$$

同理，在 $E_{//}$ 极化方式情况下，相应的对应关系为：

$$E_x \Longleftrightarrow V$$
$$H_y \Longleftrightarrow I_x$$
$$H_x \Longleftrightarrow -I_y \tag{4—9}$$

及

$$\eta \Longleftrightarrow -i\omega\mu$$
$$\gamma \Longleftrightarrow \sigma \tag{4—10}$$

综合上述，两种极化方式时的麦克斯韦方程组可以写成如下的统一形式：

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\partial z}=\gamma V$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\eta I_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\eta I_y \tag{4—11}$$

上式中各种量在两种极化方式情况下的含义如表 4-1 所列。

表 4-1　两种极化方式情况下，传输面模拟与大地电磁场之间的对应关系

	$H_{//}$ 极化方式	$E_{//}$ 极化方式
V	H_x	E_x
I_x	$-E_y$	H_y
I_y	E_x	$-H_x$
η	σ	$-i\omega\mu$
γ	$-i\omega\mu$	σ
I/V	$Z=-\frac{E_y}{H_x}$	
V/I		$Z=\frac{E_x}{H_y}$

从上面的讨论可看出，大地电磁二维正演问题实质上是解偏微分方程，而要得到偏微分方程的定解，一定要给出所涉及问题的边界条件。

在求大地电磁二维正演问题的数值解时，外边界一般取为矩形，如图 4-1 所示。

上边界 $z=z_{min}$ 上的场分量模拟平面电磁波场源，它沿 x、y 方向没有变化。

由式（4—8）可见，在 $H_{//}$ 极化方式情况下，模拟传输面上的阻抗是电阻性的。而在空气中，导电率 $\sigma\to 0$，所以等效阻抗为零。也就是说，在空气中，包括地面上，V 为一常数，或是说 H_x 为常数。所以可以取地球—空气分界面即地面作为网格的上边界，在其上 H_x 为常数。鉴于大地电磁方法中，我们所关心的是电场与磁场分量之比，而不是它们本身的大小，故可以取 H_x 为任意的常数，例如可取 $H_{x|z=z_{min}}=1$。

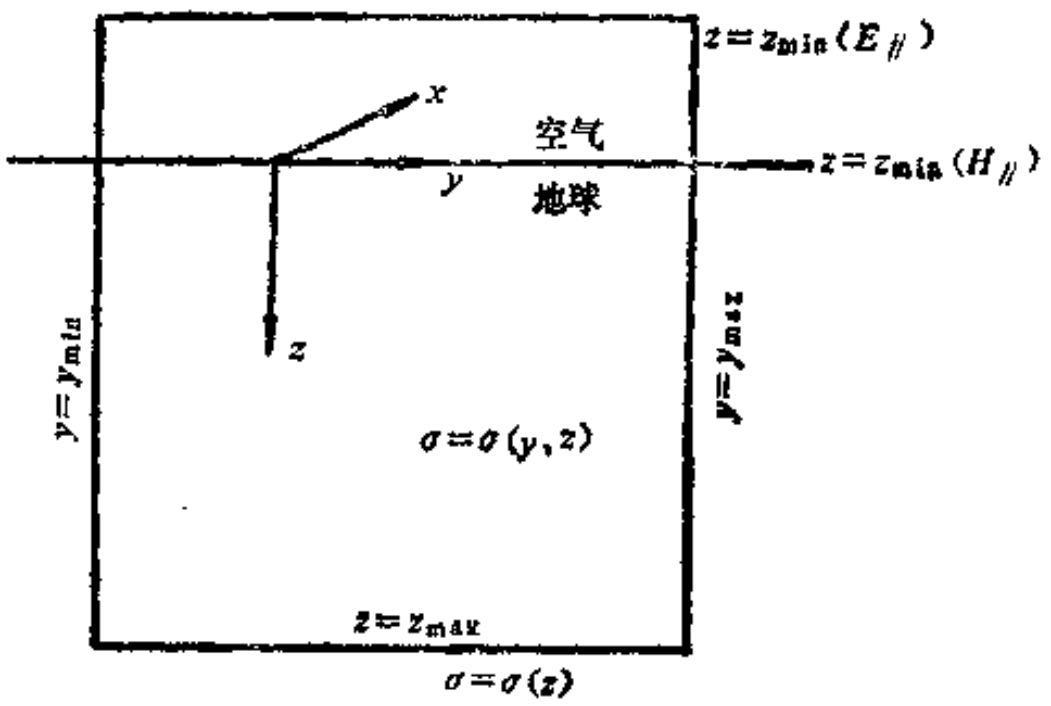


图 4-1　边界示意图

在 $E_{//}$ 极化方式时，情况就不同了。模拟传输面上的阻抗是电感性的（如式(4—10）所示），地下的由横向不均匀性引起的二次电磁场可以耦合到空气中，影响电磁场在空气中的分布，导致地面上的 E_x 和 H_y 分量都不是常数，而仍受到地下横向不均匀异常体的影响。因此，上边界的取法与 $H_{//}$ 极化方式时不同，不能再取在地面上，而是要离开地面相当距离，使得地下横向不均匀异常体的影响在这个高度上已可忽略不计，因而 E_x 和 H_y 在其上都可以看成是常数，例如，可以取为 1。在按后面给出的条件确定两侧的边界 y_{max} 和 y_{min} 时，一般可以选择：

$$|z_{min}|\geqslant y_{max}-y_{min}。$$

在二种极化方式情况下，下边界都应当取在其下部介质已属一维的或半无限均匀空间的地方。由大地电磁测深的基本理论可知，地下某一深度处的表面阻抗只与这一深度以下介质的分布情况有关，而与其上介质性质无关。由于在所选择的下边界的下面，介质已是一维的或均匀半空间，所以下边界上的表面阻抗很容易计算出。由表 4-1 可看出，表面阻抗实际上是场分量 V 与其法向偏导数 $\frac{\partial V}{\partial z}$ 之比，或其倒数（取决于场的极化方式）。因此可以采用第三类边界条件。

两侧的边界应取在离横向不均匀异常体足够远的地方，使得在该处电磁场沿深度的分布已可看成与地下为一维介质时的相同。换句话说，可以认为在侧边界处，由横向不均匀异常体引起的二次场已衰减殆尽。根据这种分析，可以两种方式给出侧边界上的边界条件。一种是采用齐次的第二类边界条件。因为在该处二次场已为零，所以在两个侧边界上场分量 V 的法向导数 $\frac{\partial V}{\partial y}$ 等于零。另一种是采用强加边界条件的方式，通过计算出水平层状介质中的电磁场分布来给出边界上的值。我们采用的是前一种方式。如果二维构造是对称的话，则只需对其中的一半做计算，并取对称轴作为一边的侧边界。

综上所述，在侧边界上要求 $\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial n}=0$，在上边界上要求 V 为常数，在下边界上应有：

$$\frac{I_x}{V} = -\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z} = Z_n \text{或} Z_n^{-1} \qquad \text{（视极化方式而定）}$$

式中 Z_n——下边界上的表面阻抗。

根据这些要求，可以将四个边界上的条件都写成第三类边界条件的形式：

$$\begin{aligned} z = z_{\max} \quad & \frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z} + \alpha_1 V = \beta_1 \\ z = z_{\min} \quad & \frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z} + \alpha_2 V = \beta_2 \\ y = y_{\max} \quad & \frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z} + \alpha_3 V = \beta_3 \\ y = y_{\min} \quad & \frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z} + \alpha_4 V = \beta_4 \end{aligned} \qquad (4-12)$$

式中的常数分别为：

	H_x极化方式	E_x极化方式
α_1	Z_n	Z_n^{-1}
β_1	0	0
α_2	L	0
β_2	L	−1
α_3、β_3、α_4、β_4	0	0

第二节　用有限元法解大地电磁场二维正演问题

任何场在达到平衡状态时都要求满足能量最小的条件。对电磁场来说，能量达到最小的条件应和麦克斯韦方程组是等价的。

已知电磁场的功率流通量是由坡印亭矢量给出的，即

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad (4-13)$$

而单位体积功率 ψ 是由通量 $\vec{S}$ 的负散度确定的，即

$$\begin{aligned} \psi &= -\nabla \cdot \vec{S} = -\nabla(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} \\ &= \vec{E}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right) + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \qquad (4-14)$$

考虑到，

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

上式可写成：

$$\psi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu H^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}\right) + \sigma E^2 \qquad (4-15)$$

将上式对时间 t 积分，可以得到能量密度 D：

$$D = \frac{\mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon E^2}{2} + \int \sigma E^2 dt \qquad (4-16)$$

式中各项分别表示磁场的、电场的和传导电流的能量密度。

已假设电磁场随时间变化的规律可表示成$e^{-i\omega t}$，所以在对能量密度D做体积积分之后，可得到场的总能量为：

$$U=\int_v\left(\frac{\mu H^2}{2}+\frac{\varepsilon E^2}{2}+\int\sigma E^2dt\right)dv$$

$$=\int_v\frac{\mu H^2}{2}dv+\int_v\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\nabla\times\vec{H}}{\sigma-i\varepsilon\omega}\right)^2dv+\int\frac{\sigma}{-2i\omega}\left(\frac{\nabla\times\vec{H}}{\sigma-i\varepsilon\omega}\right)^2dv$$

$$=\int_v\frac{\mu H^2}{2}dv+\int_v\frac{i}{2\omega(\sigma-i\omega\varepsilon)}(\nabla\times\vec{H})^2dv$$

$$=\int_v\frac{i}{2\omega(\sigma-i\omega\varepsilon)}[k^2H^2+(\nabla\times\vec{H})^2]dv \qquad (4—17)$$

式中 $k^2=-i\omega\mu(\sigma-i\omega\varepsilon)$，为传播常数的平方。

类似地，有以电场强度$\vec{E}$表示的总能量表达式为：

$$U=-\int_v\frac{1}{2\mu\omega^2}[k^2E^2+(\nabla\times\vec{E})^2]dv \qquad (4—18)$$

如忽略位移电流，再考虑到场源的存在，则上列二式变成：

$$U=\int_v\left[\frac{-i\omega\mu}{-2i\omega}H^2+\frac{1}{(-2i\omega)}\frac{1}{\sigma}(\nabla\times\vec{H})^2\right]dv+\int_v\mu M_s\cdot Hdv \qquad (4—19)$$

和

$$U=\int_v\frac{\sigma E^2}{(-2i\omega)}dv+\int_v\frac{(\nabla\times\vec{E})^2}{(-2i\omega)(-i\omega\mu)}dv+\int_vP_s\cdot\vec{E}\,dv \qquad (4—20)$$

式中 P_s——电极化强度；

M_s——磁极化强度。

上述能量公式（4—19）和（4—20）也可以从另一角度导出，即从解偏微分方程式与变分问题之间的对应关系导出。

已知在二维模型情况下，大地电磁场的分布遵从如下的亥姆霍兹方程：

$$-\frac{\partial\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)}{\partial z}-i\omega\mu H_x-f=0$$

$$-\frac{\partial\left(\frac{1}{-i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{1}{-i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)}{\partial z}+\sigma E_x-f=0 \qquad (4—3')$$

式中 f——场源项。

从解偏微分方程变分方法的原理可知，与解上述偏微分方程相应的变分问题是：在满足给定边界条件 H_x(或E_x) $|_\Gamma=\phi(y,z)$及在域G内和边界Γ上连续可微的函数集合中寻求使泛函：

$$I[H_x]=\iint_G\left\{\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)^2-i\omega\mu H_x^2-2f_HH_x\right\}dydz \qquad (4—21)$$

或

$$I[E_x]=\iint_G\left\{\frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{(-i\omega\mu)}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)^2+\sigma E_x^2-2f_BE_x\right\}dydz \tag{4—22}$$

取极小值的函数$H_x(y,z)$或$E_x(y,z)$。为此需令上述泛函的变分为零，即：

$$\Delta I[H_x]=\Delta\left[\iint_G\left\{\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)^2-i\omega\mu H_x^2-2f_HH_x\right\}dydz\right]=0 \tag{4—23}$$

及

$$\Delta I[E_x]=\Delta\left[\iint_G\left\{\frac{1}{-i\omega\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{(-i\omega\mu)}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)^2+\sigma E_x^2-2f_BE_x\right\}dydz\right]=0 \tag{4—24}$$

由式（4—21）及（4—22）可看出，它们与式（4—19）和（4—20）相同，只不过前者表示的是功率，而后者表示的是能量。式（4—23）及（4—24）的含义是要求场分布的总功率为最小。式（4—21）～（4—24）中的$-2f_H$及$-2f_E$分别与式（4—19）和（4—20）中的μM_i及P_i相当，表示场源项。

利用表4-1中列出的对应关系，在均匀介质区域内可将式（4—21）及（4—22）写成统一的形式：

$$I[V]=\iint_G\left\{\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\gamma V^2-2fV\right\}dydz \tag{4—25}$$

于是，二维模型的大地电磁正演问题就可归结为解上述泛函的变分问题。

有限单元法是解变分问题的一种数值近似方法，它是将要研究的域剖分成由互不重叠的多边形基本单元组成的网格。在每一个基本单元内，由以结点处的场值（即要求的未知值）表示出的插值函数来逼近各单元内的场的分布，这样就将式（4—23）和（4—24）中的求泛函极值问题变成了求多元函数极值的问题。下面将先以矩形单元剖分为例，说明有限单元法的计算过程。

第三节　矩形单元剖分有限元法的实现

一、数学模型的建立

域的剖分如图4-2所示，每一小的矩形单元内介质的电磁性质都是均匀的。设在每一个矩形单元内取左上角为坐标原点，并令插值函数V取如下不完全的二次式形式：

$$V(y,z)=c_0+c_1y+c_2z+c_3yz \tag{4—26}$$

式中的常数c可用单元的4个顶点（亦即网格结点）处的V值表示出来。这样，知道了在整个网格的$(M+1)(N+1)$个结点处的V值就可以确定电磁场分量V在整个域上近似的函数形式，从而可内插求得V在域内任一点处的值。

设在第i行单元上方结点处的V值表示成一列矢量：

$$\vec{V}_i=[V_i(1),V_i(2),\cdots,V_i(N+1)]^T$$

全部结点处的V值表示成一个$(M+1)(N+1)\times1$阶的列矢量：

$$\vec{V}=[\vec{V}_1^T,\ \vec{V}_2^T,\ \cdots,\vec{V}_{M+1}^T]^T \tag{4—27}$$

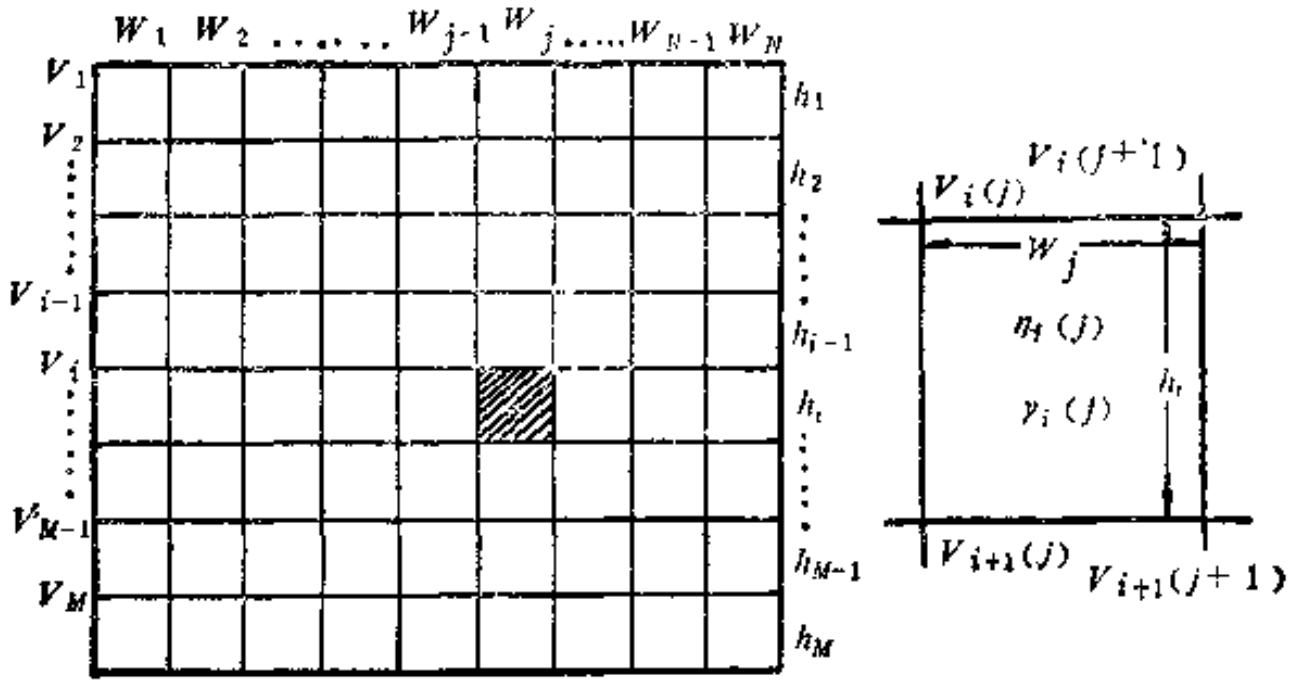


图 4-2　域的剖分示意图

我们以单元左上角结点的编号做为单元的编号。在第(i,j)单元内，以结点处的 V 值表示出式（4—26）中的诸系数后，近似插值函数可写成如下形式：

$$V(y_i+y,z_l+z)=V_i(j)\left[1-\frac{y}{w_j}-\frac{z}{h_i}+\frac{yz}{w_jh_i}\right]+V_i(j+1)\left[\frac{y}{w_j}-\frac{yz}{w_jh_i}\right]$$

$$+V_{i+1}(j)\left[\frac{z}{h_i}-\frac{yz}{w_jh_i}\right]+V_{i+1}(j+1)\left[\frac{yz}{w_jh_i}\right] \qquad (4—28)$$

应注意的是，V 为复数。将上式代入无场源项（因大地电磁场的源不在地下介质中）的式（4—25），即：

$$I(V)=\frac{1}{2}\int_{y_{min}}^{y_{max}}\int_{z_{min}}^{z_{max}}\left\{\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\gamma V^2\right\}dydz \qquad (4—25)'$$

中，就使泛函变分问题变成了解未知数为各结点处场值$\vec{V}$的多元函数的 极值 问题。

我们先以第(i,j)单元为例，计算式(4—25)′中的泛函。根据式(4—28)可计算出$\frac{\partial V}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial V}{\partial z}$，将它们连同$V$本身代入类似式(4—25)′的单元泛函表达式中，然后逐 项进行积分，就得到单元泛函的近似值为：

$$I(\vec{V}_e)=\frac{1}{2}(\vec{V}_e)^T\mathbf{K}_e\vec{V}_e \qquad (4—29)$$

式中

$$\vec{V}_e=[V_i(j),V_i(j+1),V_{i+1}(j),V_{i+1}(j+1)]^T$$

单元的刚度矩阵$\mathbf{K}_e$是一个对称的（但非埃尔米特的） 4×4 阶矩阵：

$$\mathbf{K}_e=\begin{pmatrix}k_1&k_2&k_3&k_4\\k_2&k_1&k_4&k_3\\k_3&k_4&k_1&k_2\\k_4&k_3&k_2&k_1\end{pmatrix}$$

上面矩阵中的元素分别为：

$$k_1=\frac{\gamma_i(j)h_iw_j}{9}+\frac{h_i}{3w_j\eta_i(j)}+\frac{w_j}{3h_i\eta_i(j)}$$

$$k_2=-\frac{\gamma_i(j)h_iw_i}{18}-\frac{h_i}{3w_i\eta_i(j)}+\frac{w_i}{6h_i\eta_i(j)}$$

$$k_3=\frac{\gamma_i(j)h_iw_i}{18}+\frac{h_i}{6w_i\eta_i(j)}-\frac{w_i}{6h_i\eta_i(j)}$$

$$k_4=\frac{\gamma_i(j)h_iw_i}{36}-\frac{h_i}{6w_i\eta_i(j)}-\frac{w_i}{6h_i\eta_i(j)} \qquad (4—30)$$

为了得到在整个域上的泛函近似表达式，只需将各单元刚度矩阵的元素按下角标位置排好后相加，合成域上的总刚度矩阵$\mathbf{K}'$，再将每行结点处的场值构成的列矢量$\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$、…$\vec{V}_{M+1}$等首尾相接，合成总的列矢量$\vec{V}$，如式(4—27)。这样得到总的泛函表达式为：

$$I[V]=\sum I[\vec{V}_e]=\frac{1}{2}\vec{V}'\mathbf{K}'\vec{V} \qquad (4—31)$$

式中 $\mathbf{K}'$——一个由类似式（4—30）中的元素构成的 $(M+1)(N+1)\times(M+1)(N+1)$ 阶的方阵。

对应式（4—12）中四个边界条件的泛函分别为：

$$z=z_{\max} \qquad I_1=\int\left(\frac{\alpha_1}{2}V^2-\beta_1V\right)dy$$

$$z=z_{\min} \qquad I_2=-\int\left(\frac{\alpha_2}{2}V^2-\beta_2V\right)dy$$

$$y=y_{\max} \qquad I_3=\int\left(\frac{\alpha_3}{2}V^2-\beta_3V\right)dz$$

$$y=y_{\min} \qquad I_4=-\int\left(\frac{\alpha_4}{2}V^2-\beta_4V\right)dz \qquad (4—32)$$

由于α_3、β_3、α_4、β_4皆为零，所以I_3、I_4都等于零。为了计算泛函I_2，要在上边界上逐段进行。现以第$(1,j)$单元上的一段为例，设α_2、β_2在两个结点之间成线性变化，即分别在$\alpha_2(j)$、$\alpha_2(j+1)$和$\beta_2(j)$、$\beta_2(j+1)$范围之内呈线性变化，且允许在结点处是不连续的。通过计算得到该段上的泛函为：

$$I_2^{(e)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}[V_1(j),V_1(j+1)]\cdot\\ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-w_j\left[\frac{1}{4}\alpha_2(j)+\frac{1}{12}\alpha_2(j+1)\right] & -w_j\left[\frac{1}{12}\alpha_2(j)+\frac{1}{12}\alpha_2(j+1)\right]\\ -w_j\left[\frac{1}{12}\alpha_2(j)+\frac{1}{12}\alpha_2(j+1)\right] & -w_j\left[\frac{1}{12}\alpha_2(j)+\frac{1}{4}\alpha_2(j+1)\right]\end{vmatrix}\begin{Bmatrix}V_1(j)\\ V_1(j+1)\end{Bmatrix}$$

$$-[V_1(j)V_1(j+1)]\begin{Bmatrix}-w_j\left(\frac{\beta_2(j)}{3}+\frac{\beta_2(j+1)}{6}\right)\\ -w_j\left(\frac{\beta_2(j)}{6}+\frac{\beta_2(j+1)}{6}\right)\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{V}_1^e)^T \mathbf{T}_1^e \vec{V}_1^e - (\vec{V}_1^e)^T \vec{f}_1^e \tag{4—33}$$

将各段上$\vec{V}_1^e$的元素$V_1(j)$、$V_1(j+1)$等按 j 的顺序排好构成$\vec{V}_1$，将各$\mathbf{T}_1^e$中的元素按下角标排好后，累加构成$\mathbf{T}_1$，再将$\vec{f}_1^e$ 中的元素也按下角标排好后累加而构成 $\vec{f}_1$，就得到了对应上边界条件的泛函表达式：

$$I_2[\vec{V}_1] = \frac{1}{2}(\vec{V}_1)^T \mathbf{T}_1 \vec{V}_1 - (\vec{V}_1)^T \vec{f}_1 \tag{4—34}$$

类似地，可计算出下边界上与单元（M，j）对应的一段上的泛函I_1^e为：

$$I_1^e = \frac{1}{2}[V_{M+1}(j)V_{M+1}(j+1)]\cdot$$

$$\begin{pmatrix} w_j\left[\frac{1}{4}\alpha_1(j)+\frac{1}{12}\alpha_1(j+1)\right] & w_j\left[\frac{1}{12}\alpha_1(j)+\frac{1}{12}\alpha_1(j+1)\right] \\ w_j\left[\frac{1}{12}\alpha_1(j)+\frac{1}{12}\alpha_1(j+1)\right] & w_j\left[\frac{1}{12}\alpha_1(j)+\frac{1}{4}\alpha_1(j+1)\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{M+1}(j) \\ V_{M+1}(j+1) \end{pmatrix}$$

$$-[V_{M+1}(j)V_{M+1}(j+1)] \begin{pmatrix} w_j\left(\frac{\beta_1(j)}{3}+\frac{\beta_1(j+1)}{6}\right) \\ w_j\left(\frac{\beta_1(j)}{6}+\frac{\beta_1(j+1)}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{V}_{M+1}^e)^T \mathbf{T}_{M+1}^e \vec{V}_{M+1}^e - (\vec{V}_{M+1}^e)^T \vec{f}_{M+1}^e \tag{4—35}$$

仿照前述累加I_1^e的方法，合成出$\vec{V}_{M+1}$、$\mathbf{T}_{M+1}$ 及$\vec{f}_{M+1}$ ，然后可得到：

$$I_1[\vec{V}_{M+1}] = \frac{1}{2}(\vec{V}_{M+1})^T \mathbf{T}_{M+1} \vec{V}_{M+1} - (\vec{V}_{M+1})^T \vec{f}_{M+1} \tag{4—36}$$

将式（4—31）、（4—34）及（4—36）相加，得到最终的总的泛函表达式为：

$$I + I_1 + I_2 = \frac{1}{2}(\vec{V})^T \mathbf{K} \vec{V} - (\vec{V})^T \vec{f} \tag{4—37}$$

其中 $\mathbf{K}$ 是由 $\mathbf{K}'$、$\mathbf{T}_1$ 及 $\mathbf{T}_{M+1}$ 的贡献叠加而成，$\vec{f}$ 是由$\vec{f}_1$和$\vec{f}_{M+1}$ 的贡献相加而成的。

为了使式（4—37）取极小值，要求下列的复数矩阵方程式成立：

$$\mathbf{K}\vec{V} = \vec{f} \tag{4—38}$$

它可具体地写成如下的分块矩阵方程式的形式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1+\mathbf{T}_1 & \mathbf{B}_1 & & & & & \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & & \\ & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \mathbf{B}_{M-2} & \mathbf{A}_{M-2}+\mathbf{A}_{M-1} & \mathbf{B}_{M-1} & & \\ & & & \mathbf{B}_{M-1} & \mathbf{A}_{M-1}+\mathbf{A}_M & \mathbf{B}_M & \\ & & & & \mathbf{B}_M & \mathbf{A}_M+\mathbf{T}_{M+1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vdots \\ \vec{V}_{M-1} \\ \vec{V}_M \\ \vec{V}_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4—38}'$$

表 4-2　矩阵 $\mathbf{A}_l$ 的元素

$$
\mathbf{A}_l=\begin{Bmatrix}
\frac{\gamma_l(1)h_lw_1}{9}+\frac{h_l}{3w_1\eta_l(1)}+\frac{w_1}{3h_l\eta_l(1)} & \frac{\gamma_l(1)h_lw_1}{18}-\frac{h_l}{3w_1\eta_l(1)}+\frac{w_1}{6h_l\eta_l(1)} & & & \\
\frac{\gamma_l(1)h_lw_1}{18}-\frac{h_l}{3w_1\eta_l(1)}+\frac{w_1}{6h_l\eta_l(1)} & \frac{\gamma_l(1)h_lw_1}{9}+\frac{h_l}{3w_1\eta_l(1)}+\frac{w_1}{3h_l\eta_l(1)}+\frac{\gamma_l(2)h_lw_2}{9}+\frac{h_l}{3w_2\eta_l(2)}+\frac{w_2}{3h_l\eta_l(2)} & \frac{\gamma_l(2)h_lw_2}{18}-\frac{h_l}{3w_2\eta_l(2)}+\frac{w_2}{6h_l\eta_l(2)} & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & \frac{\gamma_l(N-1)h_lw_{N-1}}{18}-\frac{h_l}{3w_{N-1}\eta_l(N-1)}+\frac{w_{N-1}}{6h_l\eta_l(N-1)} & \frac{\gamma_l(N-1)h_lw_{N-1}}{9}+\frac{h_l}{3w_{N-1}\eta_l(N-1)}+\frac{w_{N-1}}{3h_l\eta_l(N-1)}+\frac{\gamma_l(N)h_lw_N}{18}-\frac{h_l}{3w_N\eta_l(N)}+\frac{w_N}{6h_l\eta_l(N)} & \\
 & & \frac{\gamma_l(N)h_lw_N}{18}-\frac{h_l}{3w_N\eta_l(N)}+\frac{w_N}{6h_l\eta_l(N)} & \frac{\gamma_l(N)h_lw_N}{9}+\frac{h_l}{3w_N\eta_l(N)}+\frac{w_N}{3h_l\eta_l(N)}
\end{Bmatrix}
$$

表 4-3　矩阵 B_t 的元素

$$
B_t=\begin{pmatrix}
\frac{\gamma_t(1)h_tw_1}{18}+\frac{h_t}{6w_1\eta_t(1)}-\frac{w_1}{3h_t\eta_t(1)} & \frac{\gamma_t(1)h_tw_1}{36}-\frac{h_t}{6w_1\eta_t(1)}-\frac{w_1}{6h_t\eta_t(1)} & & \\
\frac{\gamma_t(1)h_tw_1}{36}-\frac{h_t}{6w_1\eta_t(1)}-\frac{w_1}{6h_t\eta_t(1)} & \frac{\gamma_t(1)h_tw_1}{18}+\frac{h_t}{6w_1\eta_t(1)}-\frac{w_1}{3h_t\eta_t(1)}+\frac{\gamma_t(2)h_tw_2}{18}+\frac{h_t}{6w_2\eta_t(2)}-\frac{w_2}{3h_t\eta_t(2)} & \frac{\gamma_t(2)h_tw_2}{36}-\frac{h_t}{6w_2\eta_t(2)}-\frac{w_2}{6h_t\eta_t(2)} & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & \frac{\gamma_t(N-1)h_tw_{N-1}}{36}-\frac{h_t}{6w_{N-1}\eta_t(N-1)}-\frac{w_{N-1}}{6h_t\eta_t(N-1)} & \frac{\gamma_t(N-1)h_tw_{N-1}}{18}+\frac{h_t}{6w_{N-1}\eta_t(N-1)}-\frac{w_{N-1}}{3h_t\eta_t(N-1)}+\frac{\gamma_t(N)h_tw_N}{18}+\frac{h_t}{6w_N\eta_t(N)}+\frac{w_N}{3h_t\eta_t(N)} & \frac{\gamma_t(N)h_tw_N}{36}-\frac{h_t}{6w_N\eta_t(N)}-\frac{w_N}{6h_t\eta_t(N)} \\
 & & \frac{\gamma_t(N)h_tw_N}{36}-\frac{h_t}{6w_N\eta_t(N)}-\frac{w_N}{6h_t\eta_t(N)} & \frac{\gamma_t(N)h_tw_N}{18}+\frac{h_t}{6w_N\eta_t(N)}-\frac{w_N}{3h_t\eta_t(N)}
\end{pmatrix}
$$

表 4-4　矩阵 T_1 的元素

$$T_1=-\begin{pmatrix}
\frac{1}{3}w_1\alpha_2 & \frac{1}{6}w_1\alpha_2 & & & & \\
\frac{1}{6}w_1\alpha_2 & \frac{1}{3}\alpha_2(w_1+w_2) & \frac{1}{6}w_2\alpha_2 & & & \\
 & \frac{1}{6}w_2\alpha_2 & \frac{1}{3}\alpha_2(w_2+w_3) & \frac{1}{6}w_3\alpha_2 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \frac{1}{6}w_{N-2}\alpha_2 & \frac{1}{3}\alpha_2(w_{N-1}+w_N) & \frac{1}{6}w_N\alpha_2 \\
 & & & & \frac{1}{6}w_N\alpha_2 & \frac{1}{3}w_N\alpha_2
\end{pmatrix}$$

表 4-5　矩阵 T_{M+1} 的元素

$$T_{M+1}=\begin{pmatrix}
\frac{1}{3}w_1\alpha_1 & \frac{1}{6}w_1\alpha_1 & & & & \\
\frac{1}{6}w_1\alpha_1 & \frac{1}{3}\alpha_1(w_1+w_2) & \frac{1}{6}w_2\alpha_1 & & & \\
 & \frac{1}{6}w_2\alpha_1 & \frac{1}{3}\alpha_1(w_2+w_3) & \frac{1}{6}w_3\alpha_1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \frac{1}{6}w_{N-1}\alpha_1 & \frac{1}{3}\alpha_1(w_{N-1}+w_N) & \frac{1}{6}w_N\alpha_1 \\
 & & & & \frac{1}{6}w_N\alpha_1 & \frac{1}{3}w_N\alpha_1
\end{pmatrix}$$

其中的 $\mathbf{A}_i$、$\mathbf{B}_i$ 在表 4-2及表4-3 中给出。α_1 和 α_2 沿界面为常数时的 T_1 及 T_{M+1} 在表 4-4及 4-5 中给出，它们都是$(N+1)\times(N+1)$阶方阵。由于 β_1 为零，故$\vec{f}_{M+1}$ 为零矢量。当β_2沿界面为常数时：

$$\vec{f}_1=-\left[\frac{\beta_2}{2}w_1 \quad \frac{\beta_2}{2}(w_1+w_2) \quad \frac{\beta_2}{2}(w_2+w_3)\cdots\cdots\frac{\beta_2}{2}(w_{N-1}+w_N) \quad \frac{\beta_2}{2}w_N\right] \qquad (4—39)$$

式（4—38)′中的矩阵 **K** 是一个复数的对称的块状三对角矩阵。考虑到它具有主对角占优的特点，我们可以采用 Crout 分解法求解式（4—38)′中的方程式。又考虑到它是一个对称的、窄带状的大型稀疏矩阵，所以采用了分块一维紧缩存储法以节省存储量。下面是相应的程序段：

子程序　COE

（1）程序段功能

按列块计算系数矩阵 K 的元素，并以一维紧缩存储方式存于数组 A 中。

（2）数组说明

A　一维复型数组，存系数矩阵 K 的列块元素。

LY　整型常数，数组 A 的维数。

B　一维复型数组，存放对应数组 A 的方程右端项元素。

LBB　整型常数，数组 B 的维数。

NA　整型数组，存放系数阵的主对角元素在数组 A 中的序号。

LNA　整型常数，数组 NA 的维数。

（3）程序

```
      SUBROUTINE COE(A,LV,B,LBB,NA,LNA,H,Y,U,M,N,
     $                  N1,N2,N3,N4,G,LX,LZ,LM,L2,R1,R2,B2,LW)
      DIMENSION NA(LNA),U(M,N),H(M),Y(N)
      COMPLEX A(LV),B(LBB),G,A11,A10,A1,A2,A3,A4,A5,A6
      LN=0
      DO 2 I=1,N1
    2 LN=LN+I
      LN11=LN+1
      IF(LX.GT.1) GO TO 20
      DO 10 I=1,LV
   10 A(I)=(0.,0.)
      GO TO 50
   20 DO 30 I=LN11,LV
   30 A(I)=0.
   50 L2=N2
      NA(N2)=N2+LN
      LM1=LM
      LN=LN+1
      IF(LX.NE.1) GO TO 100
      DO 5 I=1,LBB
    5 B(I)=0.
      I=1
      K=1
      DO 80 J=1,N
      A11=G*H(I)*Y(J)/9.
      A22=H(I)/(3.*Y(J)*U(J,J))
      A33=Y(J)/(3.*H(I)*U(I,J))
      A1=A11+A22+A33
      A2=A11/2.-A22+A33/2.
      A5=-R2*Y(J)/3.
      A6=A5/2.
      D=B2*Y(J)/2.
      B(J)=B(J)-D
      B(J+1)=-D
      NA(J)=K
      A(K)=A(K)+A1+A5
      A(K+1)=A2+A6
      A(K+2)=A1+A5
   80 K=K+2
      LM1=LM-1
      NA(N1)=K
      L2=N2
      NA(L2)=K+N2
      LN=K+1
  100 DO 300 K=J,LM1
      I=LW+K
      DO 200 J=1,N
      NA(L2+1)=NA(L2)+NJ
      L2=L2+1
```

```
      A11=G*H(I)*Y(J)/9.
      A22=H(I)/(3.*Y(J)*U(I,J))
      A33=Y(J)/(3.*H(I)*U(I,J))
      A1=A11+A22+A33
      A2=A11/2.-A22+A33/2.
      A3=A11/2.+A22/2.-A33
      A4=A11/4.-A22/2.-A33/2.
      IF(LX.NE.LZ) GO TO 120
      IF(K.LT.LM1) GO TO 120
      A5=R1*Y(J)/3.
      A6=A5/2.
      GO TO 130
  120 A10=G*H(I+1)*Y(J)/9.
      A20=H(I+1)/(3.*Y(J)*U(I+1,J))
      A30=Y(J)/(3.*H(I+1)*U(I+1,J))
      A5=A10+A20+A30
      A6=A10/2.-A20+A30/2.
  130 A(LN)=A(LN)+A3
      A(LN+1)=A4
      A(LN+N2)=A4
      A(LN+N3)=A3
      A(LN+N1)=A(LN+N1)+A1+A5
      A(LN+N4)=A2+A6
      A(LN+N4+1)=A1+A5
      LN=LN+N3
  200 CONTINUE
      NA(L2+1)=NA(L2)+N2
      L2=L2+1
      LN=LN+N2
  300 CONTINUE
      RETURN
      END
```

二、方程式的求解

1. Crout解法

由于式（4—38)′中的系数矩阵 **K**是对称的、主对角线占优的矩阵，故可以采用Crout解法。Crout 解法是当矩阵 **K** 的各阶主子矩阵均为非奇异矩阵时，可以将它唯一地分解为一个下三角阵 **L** 和一个单位上三角阵 **U** 的乘积，即有：

$$\mathbf{K} = \mathbf{LU}$$

及

$$\mathbf{K}\vec{V} = \mathbf{LU}\vec{V} = \vec{f} \qquad (4—40)$$

从而将原线性代数方程组的求解化为一个系数阵是下三角阵的线性代数方程组的求解和一个系数阵是单位上三角阵的线性代数方程组的求解，即：$\mathbf{L}\vec{Y} = \vec{f}$

和

$$\mathbf{U}\vec{V} = \vec{Y} \qquad (4—41)$$

这就比较容易实现。

分解矩阵 **K** 及化 约$\vec{f}$ 可对$j = 1, 2, \cdots\cdots, n$按下列公式进行：

$$l_{ji} = k_{ji} - \sum_{s=1}^{i-1} l_{js}u_{si}$$

$$z_j = f_j - \sum_{s=1}^{j-1} l_{js}y_s$$

$$u_{ij} = l_{ji}/l_{ii}$$

$$l_{ij}=k_{ij}-\sum_{s=1}^{i-1}l_{is}u_{sj}$$

$$y_j=z_j/l_{jj}\qquad i=1,2\cdots\cdots,j-1 \tag{4—42}$$

式中 l_{ij}、u_{ij}、k_{ij}、y_i 分别为矩阵 L、U、K 及矢量$\vec{Y}$的元素。采用上列公式对A按列分解的过程如图（4-3）所示。

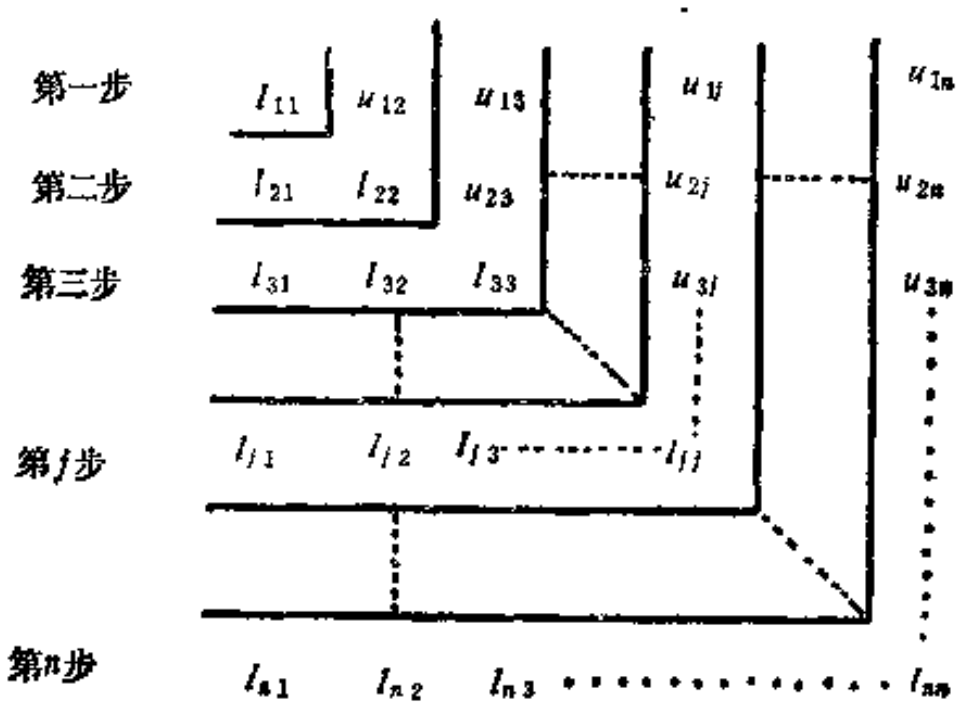
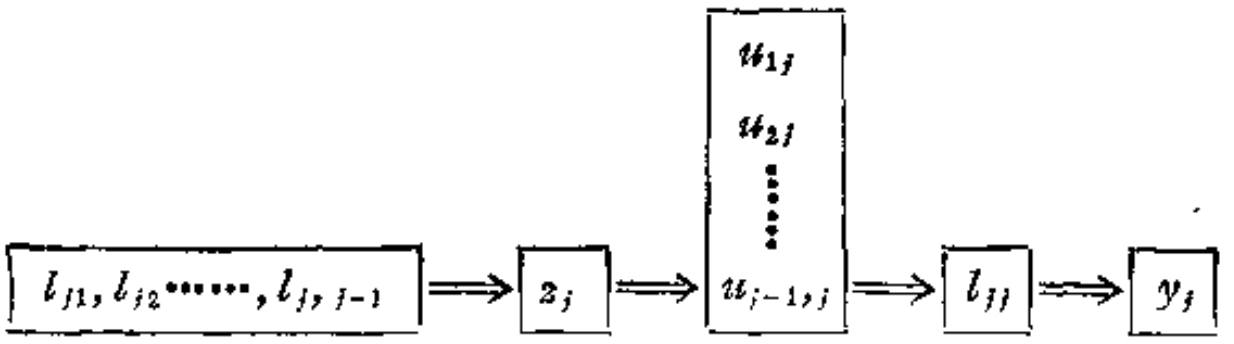
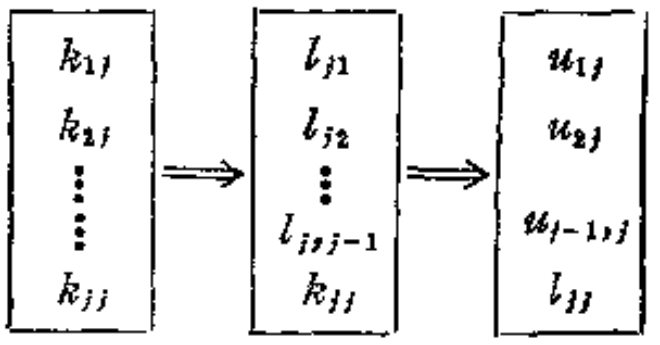


图 4-3　按列进行 Crout 分解示意图

在第 j 步上，确定各量的次序为：



为存储 K、L 及 U 的元素只需用同一套存储单元，这套单元中存储内容的变化情况为：



及

$$f_j\Longrightarrow z_j\Longrightarrow y_j$$

求出 u_{ij} 及 y_j 后，根据式（4—41）中第二式回代求解$\vec{V}$时按下式进行：

$$V_j=y_j-\sum_{s=j+1}^{n}u_{js}V_s\qquad j=n,n-1,\cdots\cdots 1 \tag{4—43}$$

同样，由式（4—42）中第二、五两式及式（4—43）可见，对于右端的$\vec{f}$及$\vec{E}$、$\vec{Y}$、$\vec{V}$来说也只须采用同一套存储单元，依次存储上述 4 个矢量的元素。

2. 采用按列一维紧缩存储节约存储量和计算工作量

由于 K 是对称阵，所以只需存储主对角线及其以上部分。又考虑到 K 是一个稀疏

阵，它的大量元素为零，而非零元素则分布在主对角线附近的一定宽度之中，称为非零元素宽度，在此范围之外的零元素无需存储。这是因为在按列进行 Crout 分解到第 j 步时，由式（4—42）中的第一式可知，由于：

$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots\cdots=a_{m_j-1,j}=0 \tag{4—44}$$

所以有：

$$l_{j1}=l_{j2}\cdots\cdots=l_{j,m_j-1}=0 \tag{4—45}$$

其中 m_j 为第 j 列上最上端非零元素所在行的序号。由此看出，实际需要确定和为之准备存储单元的只是$l_{j,m_j},l_{j,m_j+1}\cdots\cdots l_{j,j-1}$这 $j-m_j$ 个元素。这样，就可以在确定出它们之后存放到原先 $a_{m_j,j},a_{m_j+1,j}\cdots\cdots\cdots a_{j-1,j}$这 $j-m_j$个非零元素所在的存储单元中。

同理，由式（4—42）中的第三式及式（4—45）可看出：

$$u_{1j}=u_{2j}=\cdots\cdots=u_{m_j-1,j}=0 \tag{4—46}$$

所以实际需要确定和为之准备存储单元的也只是 $u_{m_j,j},u_{m_j+1,j}\cdots\cdots u_{j-1,j}$ 这 $j-m_j$ 个元素。一旦确定出并计算完 l_{jj}之后，即可将它们存储到原来存放 $a_{m_j,j},a_{m_j+1,j}\cdots\cdots a_{j-1,j}$，继之存放 $l_{j,m_j},l_{j,m_j+1}\cdots\cdots l_{j,j-1}$ 的那些存储单元中，并将 l_{ij} 存放到原来存储 a_{ij} 的单元中。

上述说明，只需按列将非零元素宽度内的元素自左至右逐列地存放到一个一维数组中，从而减少了所需存储单元的数量，这称为一维紧缩存储。

在上述的具体情况下，矩阵 **K** 中应存储的非零元素带宽如图 4-4 所示，为 $N+3$，每一个矩阵块有 $N+1$ 列，总共有 $M+1$ 个矩阵块。因此在采用一维紧缩存储时，系数阵中需存储元素的数量与系数阵元素总数之比为：

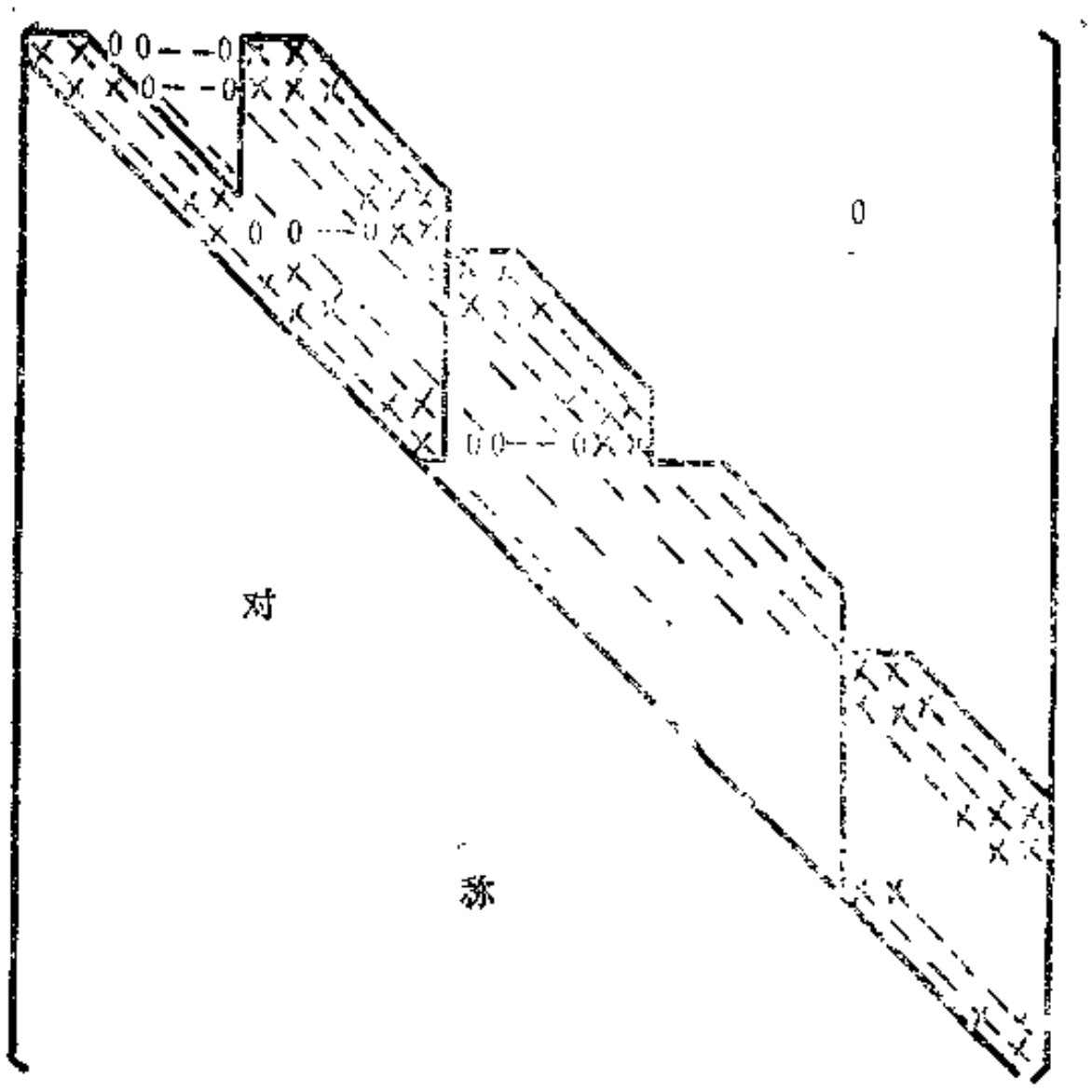


图 4-4 按列分块一维紧缩存储示意图

$$\frac{\text{系数阵需存储元素数}}{\text{系数阵元素总数}} < \frac{(M+1)(N+1)(N+3)}{[(M+1)(N+1)]^2} = \frac{N+3}{(M+1)(N+1)} \approx \frac{1}{M+1} \qquad (4-47)$$

由此可见，矩阵 **K** 的规模越大，即 M 越大，需存储元素所占的比例越小，这时用一维紧缩存储可以节省大量的内存量。

采用一维紧缩存储时，在计算中免去了许多对零元素的运算，可以减少计算工作量。这时式（4—24）可修改为对 $j=1,2\cdots\cdots n$ 计算：

$$l_{ji} = k_{ij} - \sum_{t=\max(m_i,m_j)}^{i-1} l_{jt}u_{ti}$$

$$z_j = f_j - \sum_{t=m_j}^{j-1} l_{jt}y_t$$

$$u_{ij} = l_{ji}/l_{ii}$$

$$l_{ji} = a_{ji} - \sum_{s=m_j}^{i-1} l_{js}u_{si} \qquad i = m_j, m_j+1, \cdots\cdots, j-1$$

$$y_j = z_j/l_{jj} \qquad (4-42)'$$

3．按列分块解稀疏带状矩阵

当系数阵规模很大，计算机内存一次容纳不下时，可采用分块解法。

在按列做 Crout 分解的第 j 步，根据公式（4—42）′进行第 j 列分解时，前 $j-1$ 列已经分解完毕，其中的非对角元已化约成相应的 u 元素，而对角元则化约成相应的 l 元素。应仔细分析一下，在进行第 j 步分解时，到底涉及到前 $j-1$ 列中已分解好的哪些元素，因为这是可以进行分块求解的基础。

由（4—42）′可见，采用按列紧缩存储方式对第 j 列的元素依次进行分解时，涉及到前 $j-1$ 列中已分解好的主对角元：

$$l_{ii}(i = m_j, m_j+1, \cdots\cdots, j-1)$$

及非主对角元：

$$u_{si}(i = m_j, m_j+1, \cdots\cdots, j-1$$

$$s = \max(m_i, m_j), \cdots\cdots, i-1)$$

因此，在对第 j 列进行分解时涉及到的前 $j-1$ 列中已分解好的元素位于第 m_j 行、第 $j-1$ 列及主对角线所夹成的三角块中，如图 4-5 中虚线所围的部分，这称为与第 j 列相关的三

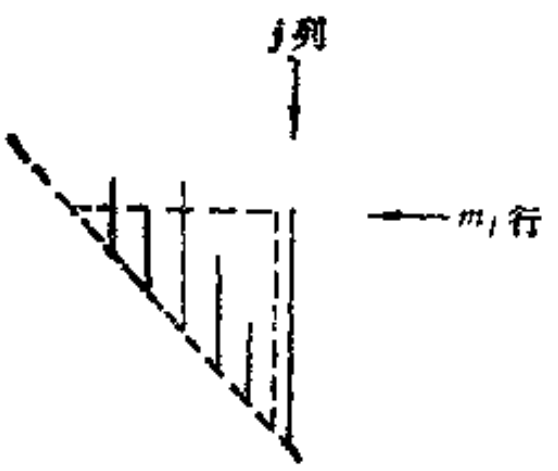


图 4-5　与第 j 列相关的三角块

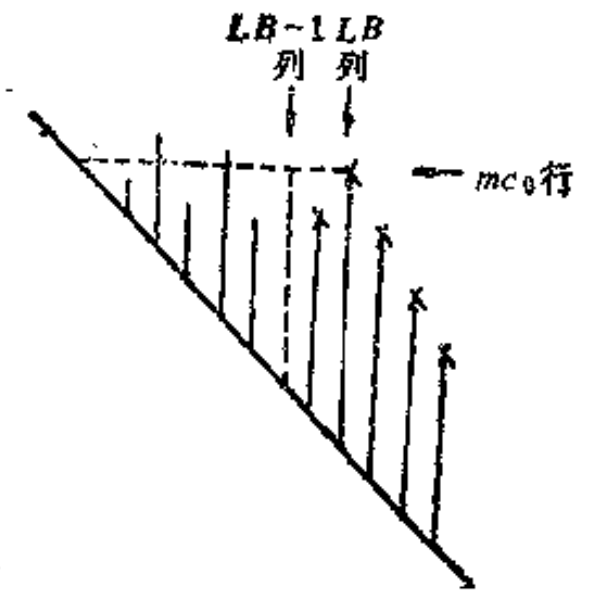


图 4-6　公共三角块示意图

角块。

根据上述理由，如果要对图 1-6 中第 LB 列到第 LE 列共 $LE-LB+1$ 列组成的列块进行分解，这时所涉及的在第LB列分解前已分解好的元素应该是分布在第$mc_0=\min\limits_{LB\leqslant j\leqslant LE}(m_j)$行、第$LB-1$ 列以及主对角线所夹成的三角块中的非零元素带宽内，如图 4-6 中虚线所围成的区域，这称之为与这 $LE-LB+1$ 列组成的列块相关的公共三角块。

根据上面的分析可以看出，稀疏带状矩阵的 Crout 分解可以按列分块进行。即事先将矩阵分成若干个列块，使每个列块都能为计算机内存所容纳，然后逐块进行分解。在第一个列块分解完后，将分解的结果全部送入扩存或外部存储器，而在内存中仅保留分解下一个列块时还要用到的公共三角块，然后进行第二列块的分解。同样，在第二列块分解完后，除将结果送扩存或外存外，在内存中仍保留与第三列块有关的公共三角块，然后进行第三列块的分解，如此逐块进行，直至分解完最后一个列块。这样就能在内存中实现按列分块分解。图 4-4 中给出了按三个列块分块分解的示意图，虚线所围区域表示的是公共三角块。

当整个系数阵分解及右端项化约结束后，就要进行回代求出$\vec{V}$。这时从最后一个列块开始，按块号递减的次序从扩存或外存中逐块地将已分解好的系数阵取回到内存，并进行回代，直至第一列块，这样就求出了整个的解矢量。

分块解法中的一个关键问题是在前后两块分解之间确定与下一列块相关的公共三角块的阶数，并从上一列块的右下角移置到下一列块的左上角。用分块解法时，在内存中所存放的只是所需分解的列块及与其相应的公共三角块。这是一个较小规模的上三角阵，且有其相应的按列一维紧缩存储的方式，称为分块一维紧缩存储。上述公共三角块移置问题的实质是公共三角块在前后二个列块的分块一维紧缩存储中的地址是不同的，需要做地址转换。

设要分解第 k 个列块，其起始列号与结束列号在整体刚度阵中为 LB 和 LE，而在该列块和相应的公共三角块所形成的上三角阵中为 NB 和 NE。再设要分解的上三角阵的主对角元在分块一维紧缩存储下的局部地址记为$NA[i](i=1,2,\cdots,NE)$，而要分解的列块的主对角元在整个刚度阵中的地址则记为$AD[i]\ (i=LB,\cdots,LE)$。由这些主对角元的整体地址 $AD[i]$，可以利用下式确定各列的 m_j：

$$m_j=j-AD[j]+AD[j-1]+1 \tag{4—48}$$

比较列块中各列的 m_j，就可以确定出mc_0：

$$mc_0=\min_{LB\leqslant j\leqslant LE}(m_j) \tag{4—49}$$

由此可求出公共三角块的阶数为：

$$TG=LB-mc_0 \tag{4—50}$$

第 k 个列块的起始列与结束列在待分解的上三角阵中的局部序号 NB 及 NE 和在整体刚度阵中的序号 LB 及 LE 之间的关系为：

$$\begin{aligned} NB&=LB-mc_0+1\\ NE&=LE-mc_0+1 \end{aligned} \tag{4—51}$$

待分解上三角阵的公共三角块中第 j 列上主对角元的局部地址为：

$$NA[j]=NA[j-1]+AD[mc_0+j-1]-AD[mc_0+j-2] \tag{4—52}$$

而这个第 j 列主对角元在上一次已分解的上三角阵的分块一维紧缩存储中的局部地址为：

$$NA[NE-TG+j] \qquad (4\text{—}53)$$

式中 NE——上一列块最后一列的局部序号。

利用式（4—53）和（4—52）就可以完成公共三角块的地址转换。

为了合理地使用内存、外存以提高计算速度，我们将使用的内存量和扩存量作为初始参数，根据需要事先给定。程序将根据申请的内存量自动计算出容许在内存中处理的列块的大小，以及整个方程要分成几个列块来分解。如果一次就可分解完，则程序将自动地在内存中完成计算，不再动用扩存及外存。否则，程序将根据申请的扩存量计算出容许从内存中送往扩存的最大次数。当方程的系数阵的列块数减一小于或等于容许送往扩存的最大次数时，说明仅使用内存及扩存即可解此方程。反之，程序将自动计算出使用扩存后还需送往外存的列块的数目，并在送满扩存后，将数据送至外部存储器。程序的这种自动计算和判断的功能提供了灵活性，并提高了计算效率。

下面是用上述 Crout 方法解方程式的程序：

子程序 OPTIMA

（1）程序段功能

本程序为 Crout 分解法的标准过程，当系数阵及右端向量集形成后，无论是否分块，均可选取 KEX 的适当值，套用此过程进行分解。

（2）数组及常量说明

NB 系数阵需进行分解的开始列号（在第一块分解时取 NB = 1；在其余各块分解时，取 NB 为相应的公共三角块阶数加一）。

NE 系数阵分解的结束列号。

M 右端向量个数。

NA 系数阵分块一维紧缩存放时对角元的局部地址。

A 用分块解法时系数阵上三角部分按列分块一维紧缩存放的工作单元。

B 右端向量集分块存储的工作单元，回代后存放解向量。

KEX 为一信息量，反映此程序的不同功能：

KEX = 0 表示对 A 和 B 的分解均已完成，仅需回代（分块解法回代时用）；

KEX = 1 表示仅对 A 进行分解，右端项不参加运算；

KEX = 2 表示仅对右端项 B 进行分解，但不回代；

KEX = 3 表示对 A 和 B 同时分解且回代（对不分块的情形或在分块分解的最后一块时用）；

KEX = 4 表示 A 和 B 同时分解但不回代；

KEX = 5 表示仅对 B 分解且进行回代。

（3）程序

```
      SUBROUTINE OPTIMA(A,B,NA,M,NB,NE,KEX,NS)
      DIMENSION NA(NE)
      COMPLEX A(NS),B(NE,M),CC,AA,BB
      IF(KEX.EQ.0) GO TO 110
   10 DO 90 J=NB,NE
      IL=J-1
```

```
      NAJ=NA(J)
      JK=NAJ-J
      IF(J.NE.1) GO TO 15
      IF=1-JK
      GO TO 16
15    IF=1-JK+NA(J-1)
16    IF(KEX.EQ.2.OR.KEX.EQ.5) GO TO 100
      IF(J.LE.IF) GO TO 80
      IF1=IF+1
      IF(IL.LT.IF1) GO TO 60
      IF(J.NE.1) GO TO 18
      JIA=2
      GO TO 19
18    JIA=2+NA(J-1)
19    NAIP=NA(IF)
      KL=IF+JK
30    DO 50 I=IF1,IL
      NAI=NA(I)
      IK=NAI-I
      II=I+1-NAI+NAIP
      IF(I.LE.II) GO TO 40
      KF=IF+JK
      IF(II.GT.IF) KF=II+JK
      JJ=IK-JK
      AA=(0.,0.)
      IF(KF.GT.KL) GO TO 36
      DO 35 K=KF,KL
35    AA=AA+A(K)*A(JJ+K)
36    A(JIA)=A(JIA)-AA
40    JIA=JIA+1
      KL=KL+1
      NAIP=NAI
50    CONTINUE
60    KF=JK+IF
      KL=NAJ-1
100   IF(KEX.EQ.1) GO TO 70
      J1=J-1
      IF(KEX.NE.2.AND.KEX.NE.5) GO TO 65
      IF(IF.GT.J1) GO TO 80
      DO 64 K=IF,J1
      DO 64 L=1,M
64    B(J,L)=B(J,L)-A(K+JK)*B(K,L)*A(NA(K))
      GO TO 80
65    DO 66 K=IF,J1
      DO 66 L=1,M
66    B(J,L)=B(J,L)-A(K+JK)*B(K,L)
70    AA=(0.,0.)
      IF(KF.GT.KL) GO TO 76
      DO 75 K=KF,KL
      NAI=NA(IF)
      CC=A(K)/A(NAI)
      AA=AA+A(K)*CC
      A(K)=CC
75    IF=IF+1

76    A(NAJ)=A(NAJ)-AA
80    IF(KEX.EQ.1) GO TO 90
      DO 85 L=1,M
35    B(J,L)=B(J,L)/A(NAJ)
90    CONTINUE
      IF(KEX.EQ.1.OR.KEX.EQ.2.OR.KEX.EQ.4) GO TO 200
110   DO 180 L=NB,NE
      J=NE-L+NB
      IF(J.NE.1) GO TO 115
```

```
      II=J-NA(J)+1
      JKA=1
      GO TO 116
115   II=J-NA(J)+NA(J-1)+1
      JKA=NA(J-1)+1
116   IF(J.LE.II) GO TO 180
      KL=J-1
      IF(II.GT.KL) GO TO 180
      DO 118 K=II,KL
      DO 117 N=1,M
      BB=B(J,N)
117   B(K,N)=B(K,N)-A(JKA)*BB
118   JKA=JKA+1
180   CONTINUE
200   CONTINUE
      RETURN
      END
```

三、计算辅助场值I_z及大地电磁响应函数

根据式（4—11）并利用式（4—28）可求出辅助场值为：

$$I_z(y_j+y,z_i+z)=\frac{V_i(j)-V_{i+1}(j)}{h_i\eta_i(j)}\left[1-\frac{y}{w_j}\right]+\frac{V_i(j+1)-V_{i+1}(j+1)}{h_i\eta_i(j)}\left[\frac{y}{w_j}\right] \tag{4—54}$$

可以看出，这个公式与 z 无关，在单元中央处最准确，而在单元的底部和顶部误差较大，所以只有当 h_i 很小时才比较准确。

为了改进上述方法，提高计算辅助场值的准确程度，W.L.罗迪定义 I_z 具有与式(4—28）相同的函数形式，即：

$$\begin{aligned}I_z(y_j+y,z_i+z)=&\frac{G_i^+(j)}{\eta_i(j)}\left[1-\frac{y}{w_j}-\frac{z}{h_i}+\frac{yz}{w_jh_i}\right]+\frac{G_i^+(j+1)}{\eta_i(j)}\left[\frac{y}{w_j}-\frac{yz}{w_jh_i}\right]\\&+\frac{G_{i+1}^-(j)}{\eta_i(j)}\left[\frac{z}{h_i}-\frac{yz}{w_jh_i}\right]+\frac{G_{i+1}^-(j+1)}{\eta_i(j)}\left[\frac{yz}{w_jh_i}\right]\end{aligned} \tag{4—55}$$

式中$G_i^+(j)$、$G_i^+(j+1)$、$G_{i+1}^-(j)$和$G_{i+1}^-(j+1)$分别为列矢量$\vec{g}_i^+$和$\vec{g}_{i+1}^-$的第 j 个和第 $j+1$ 个元素，$\vec{g}_i^+$和$\vec{g}_i^-$为沿 y 方向连续的函数 $G=\eta I_z$ 在第 i 行结点处的值组成的矢量，$\vec{g}_i^+$和$\vec{g}_i^-$的差别为前者用的参数是$\eta_i(j)$，后者用的是$\eta_{i-1}(j)$。

根据满足边界条件的原则，定义$\vec{g}_i^+$和 $\vec{g}_i^-$ 分别为：

$$\begin{aligned}\vec{g}_i^+&=\mathbf{M}_i^{-1}(\mathbf{A}_i\vec{V}_i+\mathbf{B}_i\vec{V}_{i+1})\\\vec{g}_i^-&=-\mathbf{M}_{i-1}^{-1}(\mathbf{A}_{i-1})\vec{V}_i-\mathbf{B}_{i-1}\vec{V}_{i-1})\end{aligned} \tag{4—56}$$

式中 $\mathbf{M}_i$——是一个$(N+1)\times(N+1)$阶对称的三对角方阵：

$$\mathbf{M}_i=\begin{pmatrix} \frac{w_1}{3\eta_i(1)} & \frac{w_1}{6\eta_i(1)} & & & \\ \frac{w_1}{6\eta_i(1)} & \frac{w_1}{3\eta_i(1)}+\frac{w_2}{3\eta_i(2)} & \frac{w_2}{6\eta_i(2)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \frac{w_{N-1}}{6\eta_i(N-1)} & \frac{w_{N-1}}{3\eta_i(N-1)}+\frac{w_N}{3\eta_i(N)} & \frac{w_N}{6\eta_i(N)} & \\ & & \frac{w_N}{6\eta_i(N)} & \frac{w_N}{3\eta_i(N)} & \end{pmatrix} \tag{4—57}$$

根据式（4—56）中的定义和式（4—55）计算出的I_z值将自然地满足给定的边界条件，这是这种计算辅助场值方法的主要优点之一。

利用式（4—55）和（4—56）内插计算I_z值时，所得结果是列向量$\vec{V}_i$的线性组合，即

$$I_z=\vec{a}^T\cdot\vec{V} \tag{4—58}$$

式中$\vec{a}$是个$(N+1)(M+1)\times 1$阶的列矢量，形式比较复杂，计算不方便，特别是求I_z相对模型参数的偏导数时，尤感困难。下面介绍一种计算方法，它能使列矢量$\vec{a}$的形式变得简单一些。

我们以这样一种情况为例，即地面是在第3行结点上，而测点在这行上第4个到第5个结点间2/3距离处，于是有：

$$I_z\left(y_4+\frac{2w_4}{3},z_3\right)=\frac{G_z^*(4)}{\eta_3(4)}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{G_z^*(5)}{\eta_3(4)}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{3}G_z^*(4)+\frac{2}{3}G_z^*(5)}{\eta_3(4)}=\frac{\vec{\delta}^T\cdot\vec{g}_z^*}{\eta_3(4)}$$

$$=\frac{\vec{\delta}^T\left(\mathbf{M}_3^{-1}\mathbf{A}_3\vec{V}_3+\mathbf{M}_3^{-1}\mathbf{B}_3\vec{V}_4\right)}{\eta_3(4)}=\vec{a}^T\cdot\vec{V} \tag{4—59}$$

式中

$$\vec{a}^T=\left[0,\cdots\cdots,0,\frac{1}{\eta_3(4)}\mathbf{A}_3\mathbf{M}_3^{-1}\vec{\delta},\ \frac{1}{\eta_3(4)}\mathbf{B}_3\mathbf{M}_3^{-1}\vec{\delta},0,\cdots\cdots\ 0\right] \tag{4—60}$$

$\vec{\delta}$是一个$(N+1)\times 1$阶的列矢量，给出在结点4与结点5之间内插的情况。在上述例子中其具体形式是：

$$\vec{\delta}^T=\left[0,0,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,\cdots\cdots,0\right]$$

$\vec{a}$的这种形式比较复杂，不易编制程序。具体分析一下式（4—59）可以看出：

$$I_z\left(y_4+\frac{w_4}{3},z_3\right)=\frac{1}{\eta_3(4)}\vec{\delta}^T\cdot\vec{g}_z^* \tag{4—61}$$

由此引出另外一种称为MOM的方法（这一名称来源于下面出现的矩阵的结构），这种方

法是在解矢量$\vec{V}$中适当位置处加进一矢量$\vec{g_s^+}$，这就使矢量$\vec{a}$可以取如下较简单的形式，即：

$$\vec{a}^T=\left[0,0,0,\frac{1}{\eta_3(4)}\vec{\delta}^T,0,\cdots\cdots,0\right] \tag{4—62}$$

并保证下式成立：

$$I_s=\vec{a}^T\vec{V}=\frac{1}{\eta_3(4)}\vec{\delta}^T\cdot\vec{g_s^+}$$

我们先就E_θ极化方式来说明这一方法。假设头两行单元是空气层，地面在第3行结点上，则I_s应从$\vec{g_s^+}$或$\vec{g_s^-}$求得（当地下的μ与空气中相同时，$\vec{g_s^+}=\vec{g_s^-}$）。在$z=z_{min}$处应有$I_s=1$，由式（4—12）可看出，$\alpha_2=0,\beta_2=-I_s$，$T_1=0$。考虑到式（4—56），于是式（4—38）′中的$\vec{f}_1$变成：

$$\vec{f}_1=\mathbf{A}_1\vec{V}_1+\mathbf{B}_1\vec{V}_2=\mathbf{M}_1\vec{g_s^+}=\eta_1\mathbf{M}_1\vec{1}$$

其中$\vec{1}$是元素全为1的列矢量。MOM方法是在矢量解$\vec{V}$中加进一个$\vec{g_s^+}$和一个多余的$\vec{V}_3$，使式（4—38）′变成：

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & & & & & \\
\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & & \\
 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{M}_3 & & & \\
 & & \mathbf{M}_3 & 0 & -\mathbf{M}_3 & & \\
 & & & -\mathbf{M}_3 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \\
 & & & & \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_3+\mathbf{A}_4 & \mathbf{B}_4 \\
 & & & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & & \mathbf{B}_{M-1} & \mathbf{A}_{M-1}+\mathbf{A}_M \\
 & & & & & & \mathbf{B}_M
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{g_s^+} \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \\ \vdots \\ \vec{V}_{M+1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\eta_1\mathbf{M}_1\vec{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vec{f}_{M+1}
\end{pmatrix}
\begin{matrix}
 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \mathbf{B}_M \quad \mathbf{A}_M+\mathbf{T}_{M+1}
\end{matrix} \tag{4—63}$$

式（4—63）与式（4—38）′是等价的，只是在上式中增加了两组方程式组。第5组方程式组与式（4—56）相同，第4组方程式组都是恒等式，其目的用以保持矩阵$\mathbf{K}$是对称的。在解中虽然增加了未知矢量$\vec{g_s^+}$，增大了计算量，但使矢量$\vec{a}$的形式变得比较简单了，易于编制程序进行计算。

在H_θ极化方式情况下，上边界在地面上。对地面测点来说，V和I_s可由$\vec{V}_1$和$\vec{g_s^+}$算出。由于在该处$V=1$，所以有：

$$\mathbf{M}_1\vec{V}_1\approx\mathbf{M}_1\vec{1} \tag{4—64}$$

MOM方法是在式（4—38）′中加进$\vec{g_s^+}$作为未知矢量的一部分，如下式所示：

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{M}_1 & & & & \\ -\mathbf{M}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \mathbf{B}_M & \mathbf{A}_M+\mathbf{T}_{M+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \\ \vec{V}_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_1\vec{1} \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4—65}$$

上式中的第1组方程式组表示了式（4—64）中的关系式，第2组方程式组是 $\vec{g}_1$ 的定义式。

大地电磁测深的观测资料最终整理表示成视电阻率和相位的形式，即

H_x极化方式时：

$$\rho_a = \frac{|z|^2}{\omega\mu} = \frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{I_x}{V}\right|^2, \quad \theta = \theta_{I_x} - \theta_V \tag{4—66}$$

E_x极化方式时：

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{V}{I_x}\right|^2 \qquad \theta = \theta_V - \theta_{I_x} \tag{4—67}$$

另一种表示方法是定义复视电阻率。在 E_x极化方式情况下为：

$$\rho_a = -\frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{V}{I_x}\right)^2$$

如表示成对数有：

$$\ln\rho_a = \ln\left(\frac{i}{\omega\mu}\cdot\right) + 2\ln V - 2\ln I_x$$

从而得出幅值和相位：

$$\log_{10}|\rho_a| = \left(\frac{1}{\ln 10}\right)\mathrm{Re}(\ln\rho_a) \tag{4—68}$$

和

$$\theta_{\rho_a} = \frac{180}{\pi}\mathrm{Im}(\ln\rho_a) \tag{4—69}$$

在H_x极化方式情况下有：

$$\ln\rho_a = \ln\left(\frac{i}{\omega\mu}\right) + 2\ln I_x - 2\ln V \tag{4—70}$$

对比这二种定义可见，视电阻率与复视电阻率的幅值是等价的，但阻抗的相位与复视电阻率的相位是不同的。

下面介绍计算辅助场值 I_x 及视电阻率、相位等大地电磁响应函数的程序：

子程序　MOM

（1）程序段功能

由节点值计算地表的主场值（在 H_y 极化方式下是 H_x）和辅助场值（在H_y 极化方式下是E_x），进而计算视电阻率值 $|\rho_a|$ 和相位值θ_{ρ_a}。

（2）数组及常量说明

EJ　　一维复型数组，存放全部测点上的电场值E_y。

HV　　一维复型数组，存放全部测点上的磁场值H_x。

Y1　　一维实型数组，存放测点坐标值。

MY　　测点总数。

AMP　　二维实型数组，存放对 MY 个测点做 NU 种频率计算所得的视电阻率值 $|\rho_d|$。

PHASE　二维实型数组，存放对 MY 个测点做 NU 种频率计算所得的相位值 θ_{ρ_d}。

（3）程序

```
      SUBROUTINE MOM(M,N,NN,N1,N2,MY,H,YY,Y1,U,UT,VT,
     $                              EJ,HV,G,AMP,PHASE,Y,NU,II)
      DIMENSION H(M),YY(N1),Y1(MY),U(M,N),
     $          Y(N),AMP(MY,NU),PHASE(MY,NU)
      COMPLEX UT(NN),VT(N1),G,PA,EJ(MY),HV(MY),EJJ,HVV
      APLT(PA)=REAL(PA)/ALOG(10.)
      PHS(PA)=57.29578*AIMAG(PA)
      DO 260 I=1,MY
      DO 250 J=1,N
  230 IF(Y1(I).GT.YY(J+1)) GO TO 250
      D=ABS(Y1(I)-YY(J))
      EJ(I)=VT(J)*(1.-D/Y(J))/U(1,J)+VT(J+1)*D/Y(J)/U(1,J)
      HV(I)=UT(J)*(1.-D/Y(J))+UT(J+1)*D/Y(J)
      PA=(EJ(I)/HV(I))**2/G
      AMP(I,II)=CABS(PA)
      PA=CLOG(PA)
      PHASE(I,II)=PHS(PA)
      IF(Y1(I).EQ.YY(N1)) GO TO 260
      IF(.NOT.(Y1(I).EQ.YY(J+1))) GO TO 260
      K=J+1
      PA=(VT(K)/U(1,K)/UT(K))**2/G
      AMPP=CABS(PA)
      PA=CLOG(PA)
      PHAA=PHS(PA)
      IF(ABS((AMPP-AMP(I,II))/AMP(I,II)).LT..01) GO TO 260
      WRITE(6,220) I,Y1(I),AMPP,PHAA
  220 FORMAT(8X,*I=*,I3,5X,*Y1(I)=*,F10.4,10X,*AMPP=*,
     $       E20.8,8X,*PHAA=*,F10.5)
      GO TO 260
  250 CONTINUE
  260 CONTINUE
      WRITE(6,300) (AMP(I,II),I=1,MY)
      WRITE(6,310) (PHASE(I,II),I=1,MY)
  300 FORMAT(10X,* AMP  AND  PHA*,/(5X,6E20.8))
  310 FORMAT(5X,10F12.5)
      RETURN
      END
```

图4-7是上述大地电磁二维正演程序的流程图。

M.N.别尔季契夫斯基等人曾用解析方法获得一个地垒构造上的 $\rho_{\perp}/\rho_1$ 值，即 $H_{/\!/}$ 极化方式时的视电阻率曲线（见图4-8）。图4-9是数值计算的结果。它是根据图4-8 (a) 中的地垒模型，用$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10^7$ 逼近$\frac{\rho_2}{\rho_1}\to\infty$，用$\frac{\rho_3}{\rho_1}=\frac{1}{1.5\times10^{10}}$逼近$\frac{\rho_3}{\rho_1}\to0$ 时计算的视电阻率曲线$\rho_{\perp}/\rho_1$。比较图4-8 与图 4-9，可看出两种计算结果相差甚微。

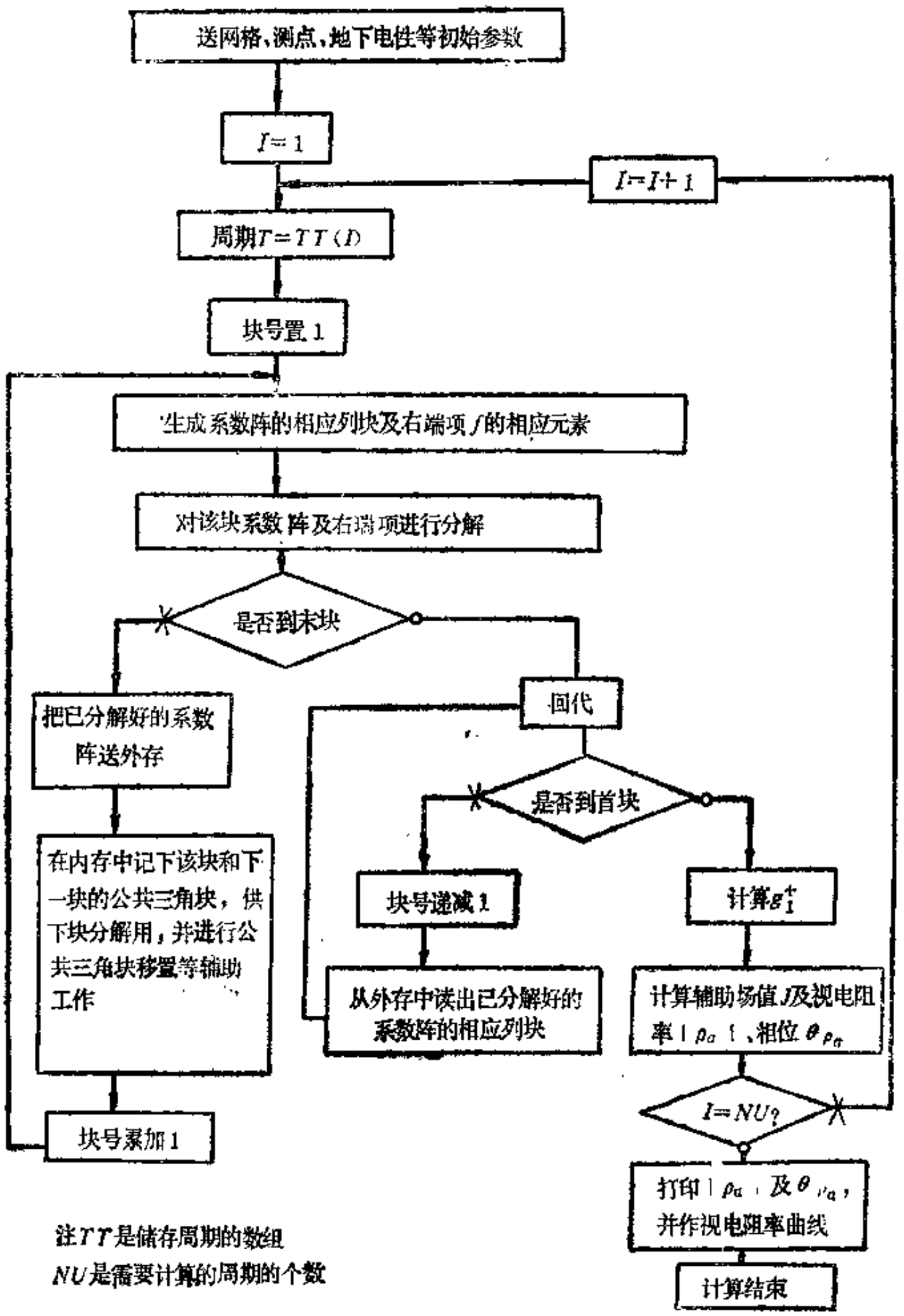
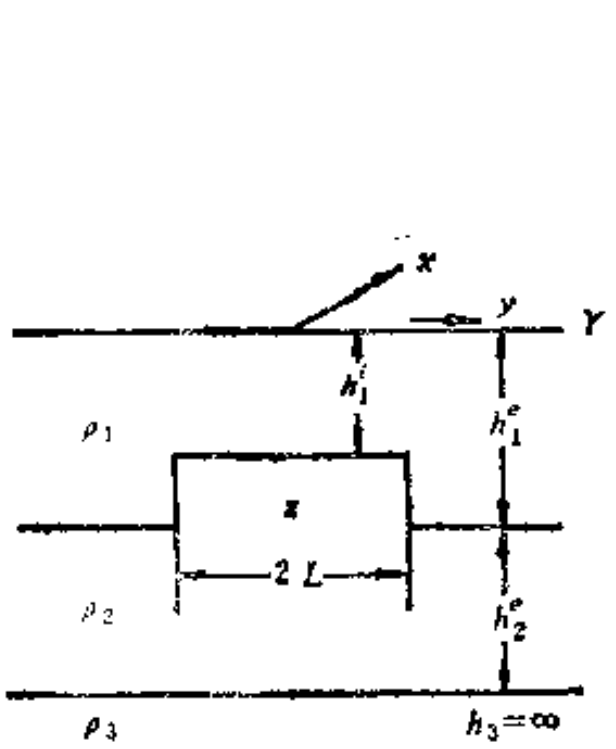
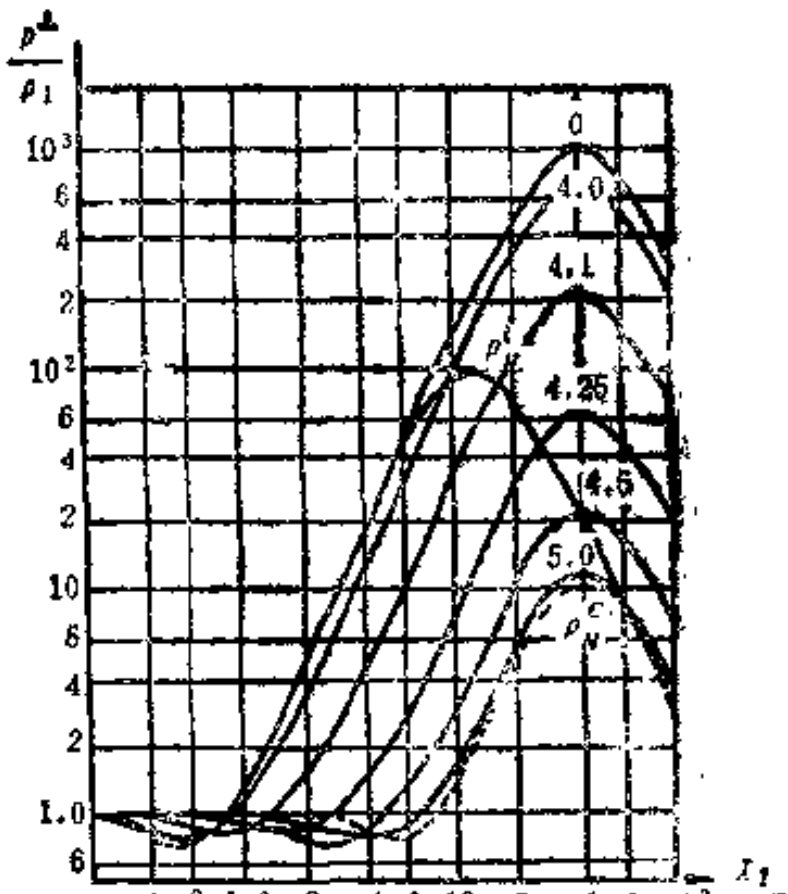


图 4-7　大地电磁二维正演程序流程图



地垒模型



(a) (b)

图 4-8 地垒模型及其上的横向视电阻率曲线

模型参数：

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\to\infty;\ \frac{\rho_3}{\rho_1}\to 0\ \ \frac{h_1^i}{h_1^e}=0.1$$

$$\frac{h_2^e}{h_1^e}=20;\ \frac{L}{h_1^e}=4$$

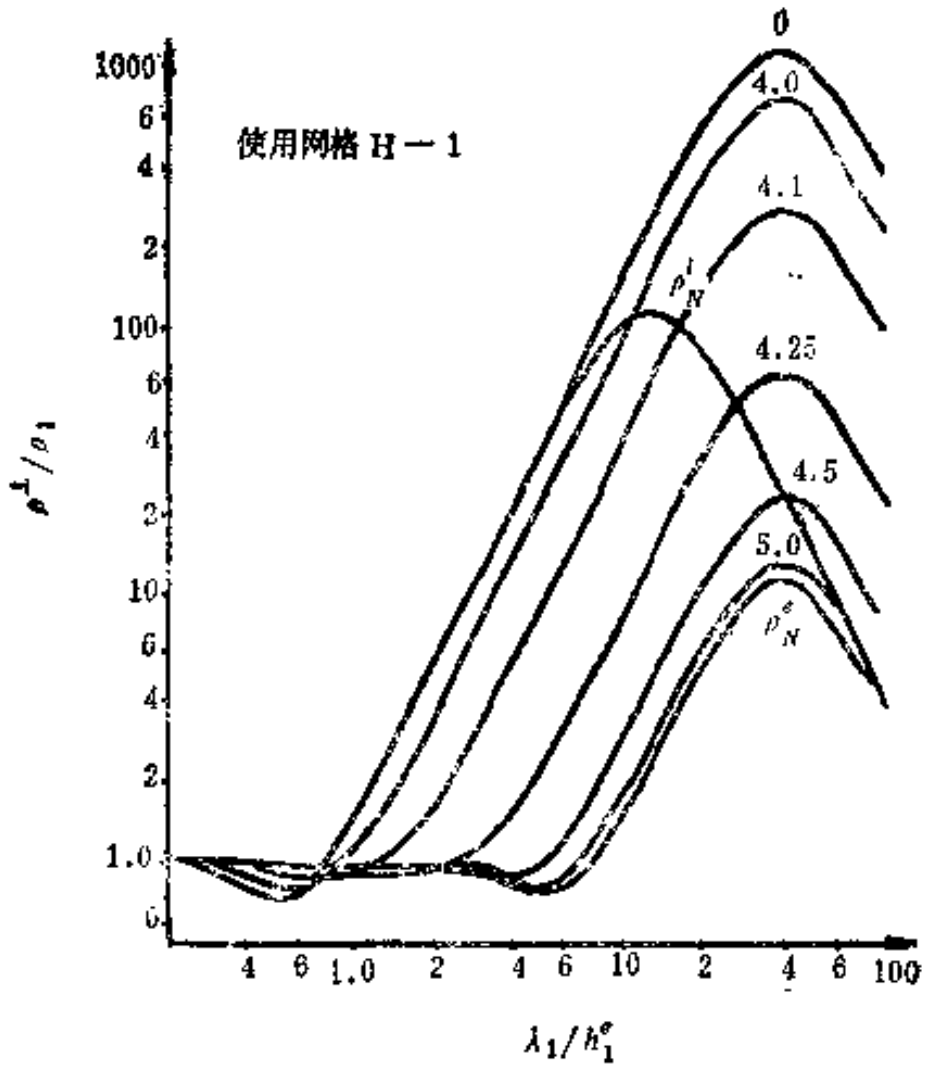


图 4-9 图4-8中地垒模型上的数值计算结果

合理地设计网格是获得准确视电阻率值的重要条件。根据电磁场在二维介质中的变化特点和计算经验，可以归纳为如下的一些网格设计准则：

① 垂向网格间距 h_i 一般可取为趋肤深度的 5 %～30%。趋肤深度是由能达到该深度的最高频率和该处介质的电阻率确定的；

② 在地表以及界面（包括垂直和水平界面）附近，网格应适当加密，在同一介质内部，网格可以相对稀疏一些；

③ 当二维构造呈对称分布时，网格的一个侧边界可选在构造的对称中心线上。一般情况下，边界必须离二维体足够远，以保证边界上的场符合一维变化规律；

④ 网格划分的密度与构造内不同介质电阻率之间差异的大小有关，电阻率差异越大，网格越要密一些；

⑤ 在同一种介质内部，相邻网格间距不要变化太大。

采用的网格是否合理，可根据以下几点判断：

① 边界测点上的视电阻率值近似等于一维理论曲线上的视电阻率值；

② 使用适当加密后的网格再计算时，曲线已无大的变化；

③ 可以与解析结果或其他可靠的近似计算结果进行对比。

下面通过实例，说明网格划分对计算结果的影响。

仍以图4-8(*a*)中的地壒模型为例，其参数为：$\frac{h_1^i}{h_1^e}=0.1$；$\frac{h_2^e}{h_1^e}=20$；$\frac{L}{h_1^e}=4$。计算时使用了各种网格，有E-1, E-3, H-1, H-2, H-3等。网格编号中的第一个字母表示极化方式，第二个数字表示网格类型。

表 4-6 ～表 4-8列举了三套不同的网格。表 4-9 中列出$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10^7$ 时使用三套不同网格计算$H_{/\!/}$极化视电阻率曲线的结果，并给出了一维理论视电阻率ρ_N^e/ρ_1值，以便比较。表4-10上列出这些计算结果的误差。表 4-11 上给出计算$E_{/\!/}$极化视电阻率曲线的部分结果。

由表 4-9 可以看出，当$\frac{\rho_2}{\rho_1}=10^7$时，使用较密网格 H-1和H-2 计算的视电阻率值$\frac{\rho_{a2}^{\perp}}{\rho_1}$都很接近。将边界测点上的$\frac{\rho_2^{\perp}}{\rho_1}$值与一维理论视电阻率$\frac{\rho_N^e}{\rho_1}$值比较(见表4-10)，可以看到用

表 4-6 网格H-1

H(42)，	0.02	0.03	0.05	0.05	0.05	0.10	0.20	0.20	0.20
	0.10	0.50	1.00	2.00	3.00	3.00	3.00	2.00	1.00
	0.10	1.00	1.00	0.717	0.30	0.15	0.08	0.07	0.05
	0.04	0.032	0.025	0.020	0.016	0.001	0.002	0.002	0.003
	0.003	0.004	0.004	0.005	0.007	0.01			
Y(38)，	1.05	0.80	0.50	0.50	0.30	0.20	0.15	0.10	
	0.10	0.08	0.07	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	
	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0.07	0.10	0.25	
	0.30	0.50	0.70	2.00	4.00	8.00	16.0	32.0	
	62.0	120	240	480	960	1920			

注：表中H是垂向网格间隙数组；Y 是横向网格间隙数组；H和Y括号内的数是数组元素个数；元素单位是公里。此注适用表4-7及表4-8。

表 4-7 网格 H-2

$H(46)_i$	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.02	0.03
	0.05	0.10	0.20	0.20	0.20	0.10	0.50	1.00
	2.00	3.00	3.00	3.00	2.00	1.00	1.00	1.00
	1.00	0.717	0.50	0.15	0.08	0.07	0.05	0.04
	0.032	0.025	0.020	0.016	0.001	0.002	0.002	0.003
	0.003	0.004	0.001	0.005	0.007	0.010		
$Y(56)_i$	0.50	0.50	0.40	0.40	0.30	0.30	0.20	0.20
	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
	0.08	0.07	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.005
	0.008	0.010	0.015	0.02	0.03	0.04	0.052	0.07
	0.08	0.10	0.10	0.13	0.17	0.20	0.20	0.30
	0.47	0.70	0.90	1.30	1.70	2.20	3.00	4.00
	5.30	6.90	10.0	20.0	40.0	80.0	160	320

表 4-8 网格 H-3

$H(19)_i$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.10	0.30	0.30	0.10
	0.50	1.00	3.00	5.00	5.00	5.50	0.30	0.60
	1.30	2.60	5.20					
$Y(16)_i$	1.5	1.3	0.5	0.5	0.2	0.2	0.5	0.5
	0.5	1.0	1.3	2.0	5.0	6.0	8.0	10.0

表 4-9 在地垒模型上($\rho_2/\rho_1 = 10^7$)使用不同网格计算的ρ^1/ρ_1结果比较

T(s)			0.01	1.0	6.5	16	40	100	250	1000
ρ_N^e/ρ_1			1.00	0.95	1.06	2.21	5.12	9.74	9.86	3.39
网格及测点	H-1	7	1.02	0.96	1.06	2.21	5.11	9.69	9.73	3.33
		10	1.02	0.96	1.06	2.21	5.11	9.69	9.73	3.33
		3850(边界)	1.02	0.96	1.06	2.22	5.11	9.69	9.73	3.33
	H-2	7	1.01	0.96	1.06	2.22	5.09	9.46	9.14	3.06
		15	1.01	0.96	1.06	2.22	5.09	9.46	9.14	3.06
		662(边界)	1.01	0.96	1.06	2.22	5.09	9.46	9.11	3.06
	H-3	7	1.01	0.97	1.09	2.25	4.59	5.72	3.47	0.95
		10	1.01	0.97	1.09	2.25	4.59	5.72	3.47	0.95
		89(边界)	1.01	0.97	1.09	2.25	4.59	5.72	3.47	0.95

网格H-1和H-2计算的最大相对误差分别是2%和10%，这说明网格划分对计算结果影响很大，用网格 H-3计算时的相对误差较大。一般说来，介质电阻率差异大时，对网格划分的要求较高。

由表 4-11 可看出，用网格 E-1 和 E-3 计算 E 极化视电阻率的结果基本相同。若以 E-1 的计算结果为准，则在 $|y|/h_1' \leqslant 7$的测点上，用网格 E-3计算视电阻率 ρ_x''/ρ_1值的

最大相对误差为1%，在边界上最大相对误差为2%，说明使用这两种网格计算的结果是稳定的。若把此计算结果和一维理论视电阻率 ρ_N^e/ρ_1 值比较可以看出，在边界上用网格 E-1 计算结果的最大相对误差是1%，用网格 E-3 计算的最大相对误差是2%，这说明尽管网格 E-3 比E-1 粗略得多，但仍可取得足够精确的结果，也说明在 E 极化方式条件下对网格的要求相对来说可适当放宽。

表 4-10　不同网格计算的 $\rho^{\perp}/\rho_1$ ($\rho_2/\rho_1=10^3$) 的最大相对误差(%)

比较标准		与网格 H-1 的 $\rho^{\perp}/\rho_1$ 相比的最大相对误差			与一维理论视电阻率相比的最大相对误差			
测　点		0, 3, 5, 7, …, [illegible], 7	7	边界	7		边　界	
$T(s)$		12	≥0.01 ≤65		≥0.01 ≤65	>65 ≤1000	≥0.01 ≤65	>65 ≤1000
网格	H-1	0	0		2	2	2	2
	H-2	8	1		1	10	1	10
	H-3	52	26		25	72	25	72

表 4-11　不同网格计算的 ρ_n/ρ_1 结果比较

测　点		0				7				边　界			
$T(s)$		0.1	10	100	1000	0.1	10	100	1000	0.1	10	100	1000
网格	E-1	1.41	16.79	21.37	3.46	1.00	1.99	11.18	3.41	1.00	1.46	9.74	3.39
	E-3	1.41	16.80	21.42	3.46	1.01	1.97	11.18	3.41	1.01	1.46	9.94	3.40
								ρ_N^e/ρ_1		1.00	1.47	9.74	3.39

第四节　矩形-直角三角形混合剖分有限元计算法的实现

划分成矩形网格进行有限元法计算的缺点是在适应分界面形状上受到较大的限制，例如，不适用于倾斜接触面或其它不规则的接触面。这里将要介绍的是以矩形网格为主结合采用部分三角形单元的剖分方案，即在倾斜接触面处以对角线将矩形网格划分为两个直角三角形，且对角线沿着接触面，如图4-10所示，而在接触面两侧，上覆地层和下伏基底等均匀介质处，则仍采用矩形网格。对这些三角形单元可以这样来处理，即先分别进行计算，然后两两相加，按矩形单元合成新的单元刚度矩阵，最后象矩形网格时那样根据4-31式合成总的刚度矩阵。下面对图4-10中第 (i, j) 个矩形单元给出计算结果。矩形单元内的左下三角形编号为 I，右上三角形编号为 II。坐标原点取在 (i, j) 点上。

1. 三角形 I 内的场值插值公式

$$V_1^{(i,j)}(y, z) = \beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 z$$

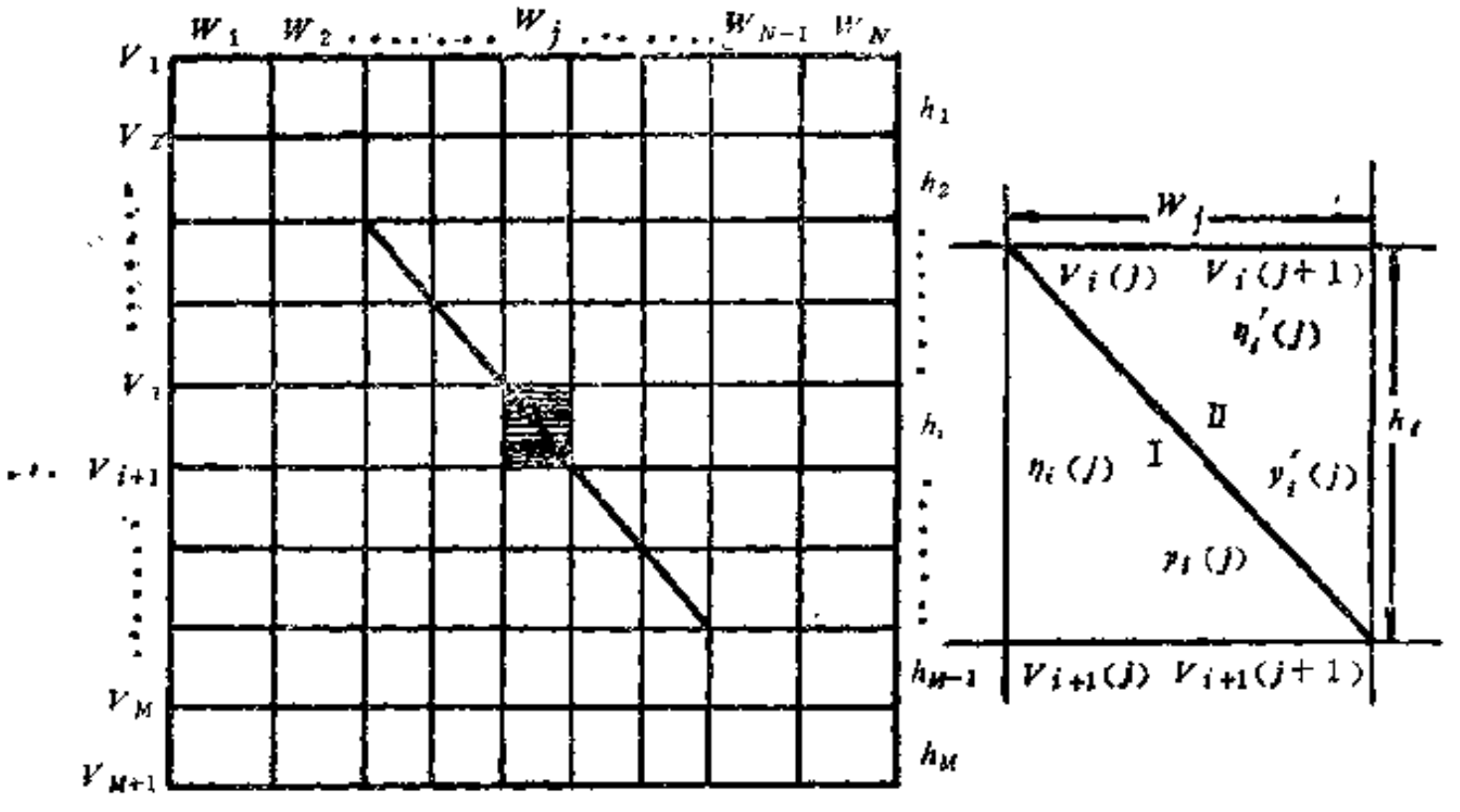


图 4-10 矩形-三角形混合剖分示意图

式中 $\beta_1 = V_i(j)$

$$\beta_2 = \frac{1}{w_j}[V_{i+1}(j+1) - V_{i+1}(j)]$$

$$\beta_3 = \frac{1}{h_i}[V_{i+1}(j) - V_i(j)]$$

这样，三角形单元内的场值分布公式也可写成：

$$V_1^{(i,j)}(y,z) = \left(1 - \frac{z}{h_i}\right)V_i(j) + \left(\frac{y}{w_j}\right)V_{i+1}(j+1) + \left(\frac{z}{h_i} - \frac{y}{w_j}\right)V_{i+1}(j)$$

$$= N_i(y,z)V_i(j) + N_j(y,z)V_{i+1}(j+1) + N_l(y,z)V_{i+1}(j) \quad (4-71)$$

式中

$$N_i(y,z) = \frac{1}{2\Delta_k}(a_i + b_i y + c_i z) = 1 - \frac{z}{h_i}$$

$$N_j(y,z) = \frac{1}{2\Delta_k}(a_j + b_j y + c_j z) = \frac{y}{w_j}$$

$$N_l(y,z) = \frac{1}{2\Delta_k}(a_l + b_l y + c_l z) = \frac{z}{h_i} - \frac{y}{w_j} \quad (4-72)$$

而

$$\begin{cases} a_i = y_j z_l - y_l z_j = w_j h_i \\ a_j = y_l z_i - y_i z_l = 0 \\ a_l = y_i z_j - y_j z_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_i = z_j - z_l = 0 \\ b_j = z_l - z_i = h_i \\ b_l = z_i - z_j = -h_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_i = y_l - y_j = -w_j \\ c_j = y_i - y_l = 0 \\ c_l = y_j - y_i = w_j \end{cases}$$

上面的 i、j、l 表示三角形三顶点的编号，在二个三角形内都从矩形单元的左上角起始，按反时针方向的顺序编排。将式（4—71）、(4—72)代入式（4—25），可求出以结点处的V

值作为未知数的代数表达式代替泛函。下面给出式（4—25)中积分的结果：

①

$$\iint_{\Delta_I} \frac{1}{\eta(y,z)}\left(\frac{\partial V_1^{(i,j)}}{\partial y}\right)^2 dydz = [\mathbf{V}^{(I)}]^T \mathbf{K}_1^{(i,j)}\mathbf{V}^{(I)}$$

式中

$$\mathbf{K}_1^{(i,j)} = \frac{1}{4\Delta_I \eta_i(j)}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_{ij} & b_{ii} \\ b_{ij} & b_j^2 & b_{ji} \\ b_{ii} & b_{ij} & b_i^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2w_j h_i \eta_i(j)}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_i^2 & -h_i^2 \\ 0 & -h_i^2 & h_i^2 \end{bmatrix} \qquad (4—73)$$

$$\mathbf{V}^I = [V_i V_j V_i]^T$$

②

$$\iint_{\Delta_I} \frac{1}{\eta(y,z)}\left(\frac{\partial V_1^{(i,j)}}{\partial z}\right)dydz = [\mathbf{V}^{(I)}]^T\mathbf{K}_2^{(i,j)}\mathbf{V}^{(I)}$$

式中

$$\mathbf{K}_2^{(i,j)} = \frac{1}{4\Delta_I \eta_i(j)}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_{ij} & c_{ii} \\ c_{ji} & c_j^2 & c_{ji} \\ c_{ii} & c_{ij} & c_i^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2w_j h_i \eta_i(j)}\begin{bmatrix} w_j^2 & 0 & -w_j^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -w_j^2 & 0 & w_j^2 \end{bmatrix} \qquad (4—74)$$

③

$$\iint_{\Delta_I} \gamma(y,z)\,(V_1^{(i,j)})^2 dydz = [\mathbf{V}^{(I)}]^T\mathbf{K}_3^{(i,j)}\mathbf{V}^{(I)}$$

式中

$$\mathbf{K}_3^{(i,j)} = \begin{bmatrix} t_{ii} & t_{ij} & t_{ii} \\ t_{ji} & t_{jj} & t_{ji} \\ t_{ii} & t_{ij} & t_{ii} \end{bmatrix} = \frac{\gamma_i(j) w_j h_i}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4—75)$$

2．三角形 II 得到的结果

$$V_2^{(ij)}(y,z) = \beta'_1 + \beta'_2 y + \beta'_3 z \qquad (4—76)$$

式中

$$\beta'_1 = V_i(j)$$

$$\beta'_2 = \frac{1}{w_j}[V_i(j+1) - V_i(j)]$$

$$\beta'_3 = \frac{1}{h_i}[V_{i+1}(j+1) - V_i(j+1)] \qquad (4—77)$$

而

$$\begin{cases} a'_i = w_j h_i \\ a'_j = 0 \\ a'_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b'_i = -h_i \\ b'_j = h_i \\ b'_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c'_i = 0 \\ c'_j = -w_i \\ c'_i = w_j \end{cases}$$

场值分布公式还可写成：

$$V_2^{(i,j)}(y,z) = N_i(y,z)V_i(j) + N_j(y,z)V_i(j+1) + N_i(y,z)V_{i+1}(j+1) \qquad (4—76)'$$

表 4-12

$$\mathbf{K}_{ij}=\begin{bmatrix}
\frac{w_j}{2h_i\eta_i(j)}+\frac{\gamma_i(j)w_jh_i}{12} & \frac{\gamma'_i(j)w_jh_i}{24}-\frac{h_i}{2w_j\eta'_i(j)} & \frac{\gamma_i(j)w_jh_i}{24}-\frac{w_j}{2h_i\eta_i(j)} & \frac{\gamma_i(j)w_jh_i}{24}+\frac{\gamma'_i(j)w_jh_i}{24} \\
+\frac{h_i}{2w_j\eta'_i(j)}+\frac{\gamma'_i(j)w_jh_i}{12} & & & \\
-\frac{h_i}{2w_j\eta'_i(j)}+\frac{\gamma'_i(j)w_jh_i}{24} & \frac{h_i}{2w_j\eta'_i(j)}+\frac{w_j}{2h_i\eta'_i(j)} & 0 & -\frac{w_j}{2h_i\eta'_i(j)}+\frac{\gamma'_i(j)w_jh_i}{24} \\
 & +\frac{\gamma'_i(j)w_jh_i}{12} & & \\
-\frac{w_j}{2h_i\eta_i(j)}+\frac{\gamma_i(j)w_jh_i}{24} & 0 & \frac{h_i}{2w_j\eta_i(j)}+\frac{w_j}{2h_i\eta_i(j)} & -\frac{h_i}{2w_j\eta_i(j)}+\frac{\gamma_i(j)w_jh_i}{24} \\
 & & +\frac{\gamma_i(j)w_jh_i}{12} & \\
\frac{\gamma_i(j)w_jh_i}{24}+\frac{\gamma'_i(j)w_jh_i}{24} & -\frac{w_j}{2h_i\eta'_i(j)}+\frac{\gamma'_i(j)w_jh_i}{24} & -\frac{h_i}{2w_j\eta_i(j)}+\frac{\gamma_i(j)w_jh_i}{24} & \frac{h_i}{2w_j\eta_i(j)}+\frac{\gamma_i(j)w_jh_i}{12} \\
 & & & +\frac{w_j}{2h_i\eta'_i(j)}+\frac{\gamma'_i(j)w_jh_i}{12}
\end{bmatrix}$$

表 4-13

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{A}_1+\mathbf{T}_1 & \mathbf{B}_1 & & & & & & & & \\
\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & & & & & \\
 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2+\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 & & & & & & \\
 & & \mathbf{D}_2^T & \mathbf{E}_2+\mathbf{C}_3 & \mathbf{D}_3 & & & & & \\
 & & & \mathbf{D}_3^T & \mathbf{E}_3+\mathbf{C}_4 & \mathbf{D}_4 & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & \mathbf{D}_{M-2} & \mathbf{E}_{M-2}+\mathbf{C}_{M-1} & \mathbf{D}_{M-2} & & \\
 & & & & & & \mathbf{D}_{M-2}^T & \mathbf{E}_{M-2}+\mathbf{A}_{M-1} & \mathbf{B}_{M-2} & \\
 & & & & & & & \mathbf{B}_{M-1} & \mathbf{A}_{M-1}+\mathbf{A}_M & \mathbf{B}_M \\
 & & & & & & & & \mathbf{B}_M & \mathbf{A}_M+\mathbf{T}_{M+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\vec{V}_1\\ \vec{V}_2\\ \vec{V}_3\\ \vdots\\ \vec{V}_{M-1}\\ \vec{V}_M\\ \vec{V}_{M+1}\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}\vec{f}_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \vec{f}_{M+1}\end{bmatrix}$$

表 4-14

$$
\mathbf{C}_i=\begin{cases}
\dfrac{\omega_1}{2h_i\eta_i(1)}+\dfrac{h_i}{2\omega_1\eta'_i(1)} & \dfrac{\gamma'_i(1)\omega_1h_i}{24}-\dfrac{h_i}{2\omega_1\eta'_i(1)} & & \\
+\dfrac{\omega_1h_i}{12}(\gamma_i(1)+\gamma'_i(1)) & \dfrac{h_i}{2\omega_1\eta'_i(1)}+\dfrac{\omega_1}{2h_i\eta'_i(1)}+\dfrac{\gamma'_i(1)\omega_1h_i}{12}+\dfrac{\omega_2}{2h_i\eta_i(2)} & \dfrac{\gamma'_i(2)\omega_2h_i}{2}-\dfrac{h_i}{2\omega_2\eta'_i(2)} & \\
\dfrac{\gamma'_i(1)\omega_1h_i}{24}-\dfrac{h_i}{2\omega_1\eta'_i(1)} & +\dfrac{\gamma_i(2)\omega_2h_i}{12}+\dfrac{h_i}{2\omega_2\eta'_i(2)}+\dfrac{\gamma'_i(2)\omega_2h_i}{12} & & \\
 & \dfrac{\gamma'_i(2)\omega_2h_i}{24}-\dfrac{h_i}{2\omega_2\eta'_i(2)} & \dfrac{h_i}{2\omega_2\eta'_i(2)}+\dfrac{\omega_2}{2h_i\eta'_i(2)}+\dfrac{\gamma'_i(2)\omega_2h_i}{12} & \\
 & \vdots & +\dfrac{\omega_3}{2h_i\eta_i(3)}+\dfrac{h_i}{2\omega_3\eta'_i(3)}+\dfrac{\omega_3h_i}{12}(\gamma_i(3)+\gamma'_i(3)) & \dfrac{\gamma'_i(3)\omega_3h_i}{24}-\dfrac{h_i}{2\omega_3\eta'_i(3)} \\
 & & \vdots & \vdots \\
\dfrac{\gamma'_i(N-1)\omega_{N-1}h_i}{24}-\dfrac{h_i}{2\omega_{N-1}\eta'_i(N-1)} & & \dfrac{h_i}{2\omega_{N-1}\eta'_i(N-1)}+\dfrac{\omega_{N-1}}{2h_i\eta'_i(N-1)}+\dfrac{\gamma'_i(N-1)\omega_{N-1}h_i}{12} & \\
 & & +\dfrac{\omega_N}{2h_i\eta_i(N)}+\dfrac{h_i}{2\omega_N\eta'_i(N)}+\dfrac{\omega_N}{12}h_i(\gamma_i(N)+\gamma'_i(N)) & \dfrac{\gamma'_i(N)\omega_Nh_i}{24}-\dfrac{h_i}{2\omega_N\eta'_i(N)} \\
 & & -\dfrac{h_i}{2\omega_N\eta'_i(N)}+\dfrac{\gamma'_i(N)\omega_Nh_i}{24} & \dfrac{h_i}{2\omega_N\eta'_i(N)}+\dfrac{\omega_N}{2h_i\eta'_i(N)} \\
 & & & +\dfrac{\gamma'_i(N)\omega_Nh_i}{12}
\end{cases}
$$

表 4-15

$$
\mathbf{D}_i=\begin{bmatrix}
-\frac{\omega_1}{2h_i\eta_i(1)}+\frac{\gamma_i(1)\omega_1h_i}{24} & \frac{\gamma_i(1)\omega_1h_i}{24}+\frac{\gamma'_i(1)\omega_1h_i}{24} & & & & \\
-\frac{\omega_1}{2h_i\eta'_i(1)}+\frac{\gamma'_i(1)\omega_1h_i}{24} & \frac{\gamma_i(2)\omega_2h_i}{24}+\frac{\gamma'_i(2)\omega_2h_i}{24} & & & & \\
-\frac{\omega_2}{2h_i\eta_i(2)}+\frac{\gamma_i(2)\omega_2h_i}{24} & -\frac{\omega_2}{2h_i\eta'_i(2)}+\frac{\gamma'_i(2)\omega_2h_i}{24} & \frac{\gamma_i(3)\omega_3h_i}{24}+\frac{\gamma'_i(3)\omega_3h_i}{24} & & & \\
0 & -\frac{\omega_3}{2h_i\eta_i(3)}+\frac{\gamma_i(3)\omega_3h_i}{24} & & & & \\
 & 0 & & & & \\
 & & & & & 0 \\
 & & & -\frac{\omega_{N-1}}{2h_i\eta'_i(N-1)}+\frac{\gamma'_i(N-1)\omega_{N-1}h_i}{24} & \frac{\gamma_i(N)\omega_Nh_i}{24}+\frac{\gamma'_i(N)\omega_Nh_i}{24} & \\
 & & & -\frac{\omega_N}{2h_i\eta_i(N)}+\frac{\gamma_i(N)\omega_Nh_i}{24} & & \\
 & & & 0 & -\frac{\omega_N}{2h_i\eta'_i(N)}+\frac{\gamma'_i(N)\omega_Nh_i}{24} &
\end{bmatrix}
$$

式中 $N_i(y,z)=1-\frac{y}{w_j}$ ， $N_j(y,z)=\frac{y}{w_j}-\frac{z}{h_i}$ ， $N_i(y,z)=\frac{z}{h_i}$ (4—78)

将式 (4—76)′及式 (4—78) 代入式 (4—25)，可计算出如下的矩阵：

$$\mathbf{K}_1^{(i,j)'}=\frac{1}{2w_jh_i\eta_i'(j)}\begin{bmatrix}h_j^2 & -h_j^2 & 0\\ -h_i^2 & h_i^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{4—79}$$

$$\mathbf{K}_2^{(i,j)'}=\frac{1}{2w_jh_i\eta_i'(j)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & w_j^2 & -w_j^2\\ 0 & -w_j^2 & w_j^2\end{bmatrix} \tag{4—80}$$

$$\mathbf{K}_3^{(i,j)'}=\frac{\eta_i'(j)w_jh_i}{24}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} \tag{4—81}$$

最后按一对三角形单元所占的矩形网格合成而得到的单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_{ij}$ 列在表 4-12中。它与式4—30中的不同，但仍是一对称矩阵。合成矩形单元中的泛函为：

$$I_{ij}=\mathbf{V}_{ij}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{ij}\mathbf{V}_{ij} \tag{4—82}$$

式中

$$\mathbf{V}_{ij}^{\mathrm{T}}=[\mathbf{V}_i(j),\mathbf{V}_i(j+1),\mathbf{V}_{i+1}(j),\mathbf{V}_{i+1}(j+1)]$$

最后，在这些区域以合成矩形单元为单位与其他矩形单元迭加，构成总的刚度矩阵和泛函。

至于边界条件，即使在上、下边界处是由三角形单元构成的，也可用式 (4—34) ～(4—36)进行计算。

设头两行及末两行是简单的矩形单元，而其间是由三角形单元合成的矩形单元，与(4—38)′式相应的公式列在表4-13中。其中的分块矩阵$\mathbf{C}_i$, $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{E}_i$在表4-14，4-15及4-16中给出。

当要用相反方向的对角线分割矩形单元时，可以相同的方法导出类似的结果。

第五节　直角三角形剖分二次插值有限元计算法的实现

上节介绍了矩形-直角三角形混合剖分的方式，它既保持了矩形剖分拥有的公式规则化和便于计算的优点，又对多种多样的几何形状界面具有较好的适应能力。还有一个问题，即尽管在矩形剖分时采用了双线性插值公式，这较之三角形单元的线性插值多了一个二次混合项，但它是不完全的二次式。当为计算辅助场值I_z而求$\frac{\partial V}{\partial z}$时，得到的表达式仅是$y$的线性函数，沿$z$方向仍为常数，使得计算辅助场值的精确度变差。因此，在矩形-直角三角形混合剖分的基础上，又推出了混合剖分二次插值的计算方案，即在对应地面的一行矩形单元上以及其它必要的行上，将矩形单元沿对角线分成两个直角三角形，并在每个直角三角形内采用拉格朗日二次插值公式逼近原始函数。然后按三角形单元计算出对应的单元泛函后，综合两个相邻三角形单元的计算结果，构成对应合成矩形单元的刚度矩阵，最后再合成总的刚度矩阵。

图4-11给出域的剖分情况，将矩形单元(i,j)分为两个直角三角形$\triangle_{ij}$及$\triangle'_{ij}$。局

部坐标原点取在(i, j)结点处。在 $\triangle_{ij}$ 中，1、2、3为三角形的三个顶点，4、5、6为三边的中点，以这 6 个点上的场值表示的拉格朗日二次插值公式为：

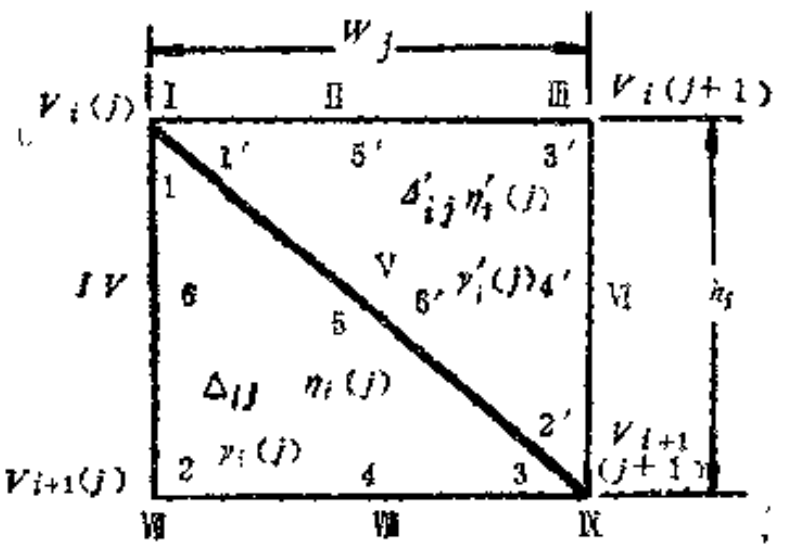


图 4-11　单元剖分示意图

$$V(y, z) = \sum_{i=1}^{6} N_i(y, z) V_i \tag{4—83}$$

式中 V_i 为图 4-11 中所示的相应点处的场值，$N_i(y, z)$为相应的插值基函数，可用三角形面积坐标 λ_1、λ_2 及 λ_3 分别表示成：

$$\begin{aligned}
N_1(y, z) &= \lambda_1(2\lambda_1 - 1) \\
N_2(y, z) &= \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \\
N_3(y, z) &= \lambda_3(2\lambda_3 - 1) \\
N_4(y, z) &= 4\lambda_2\lambda_3 \\
N_5(y, z) &= 4\lambda_1\lambda_3 \\
N_6(y, z) &= 4\lambda_1\lambda_2
\end{aligned} \tag{4—84}$$

将（4—84）式代入（4—83）式，并利用三角形剖分线性插值时的公式：

$$\begin{aligned}
\lambda_1(y, z) &= \frac{1}{2\Delta}\left[\begin{vmatrix} z_2 & 1 \\ z_3 & 1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2\Delta}(a_1 y + b_1 z + c_1)
\end{aligned} \tag{4—85}$$

等（λ_2 和 λ_3 可通过轮换上式中的下标得到），可分别得到 $\triangle_{ij}$ 及$\triangle_{ij}'$上以y，z坐标表示的二次插值公式：

$$\begin{aligned}
V(y, z) = &\left(1 - \frac{3z}{h_i} + \frac{2z^2}{h_i^2}\right)V_1 + \left(\frac{2}{w_i^2}y^2 - \frac{4}{w_i h_i}yz + \frac{z^2}{h_i^2} + \frac{y}{w_i} - \frac{z}{h_i}\right)V_2 \\
&+ \left(\frac{2y^2}{w_i^2} - \frac{y}{w_i}\right)V_3 - \left(\frac{4}{w_i^2}y^2 - \frac{4}{w_i h_i}yz\right)V_4 - \left(\frac{4}{w_i h_i}yz - \frac{4}{w_i}y\right)V_5 \\
&+ \left(\frac{4}{w_i h_i}yz - \frac{4}{h_i^2}z^2 - \frac{4}{w_i}y + \frac{4}{h_i}z\right)V_6
\end{aligned} \tag{4—86}$$

$$\begin{aligned}
V'(y, z) = &\left(1 - \frac{3y}{w_i} + \frac{2y^2}{w_i^2}\right)V'_1 + \left(\frac{2z^2}{h_i^2} - \frac{z}{h_i}\right)V'_2 \\
&+ \left(\frac{2}{w_i^2}y^2 - \frac{4}{w_i h_i}yz + \frac{2}{h_i^2}z^2 - \frac{y}{w_i} + \frac{z}{h_i}\right)V'_3 + \left(\frac{4}{w_i h_i}yz - \frac{4}{h_i^2}z^2\right)V'_4
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{4}{w_i^2}y^2-\frac{4}{w_ih_i}yz-\frac{4}{w_i}y+\frac{4}{h_i}z\right)V'_3-\left(\frac{4}{w_ih_i}yz-\frac{4}{h_i}z\right)V'_0 \qquad (4-87)$$

为计算两个直角三角形 $\triangle_{ij}$ 及 $\triangle'_{ij}$ 上的泛函，可将式（4—95）和（4—96）直接代入式(4—25)及式(4—32)，得到 6 × 6 阶的直角三角形单元刚度矩阵及对应自然边界条件的矩阵。为了以矩形单元为单位进行综合和计算，合成的矩形单元上的 9 个插值点按图 4-11上罗马数字的顺序编号。将两个直角三角形单元的计算结果按矩形单元上的统一编号顺序进行调整，即进行相应的行列置换和扩充，成为 9 × 9 阶方阵，然后相加，得到对应合成矩形单元的单元刚度矩阵$\mathbf{K}_{ij}$（见表4-17）及对应上、下边界条件的单元矩阵 $\mathbf{T}_{1j}$ 和 $\mathbf{T}_{M+1,j}$。（见表 4-18 和 4-19）。根据$\mathbf{K}_{ij}$和$\mathbf{T}_{1j}$、$\mathbf{T}_{M+1,j}$可综合成总刚度矩阵$\mathbf{K}$及对应上、下边界条件的总矩阵$\mathbf{T}_1$及$\mathbf{T}_{M+1}$，前者是$(2M+1)(2N+1)\times(2M+1)(2N+1)$阶块状 5 对角对称方阵，后二者是$(2N+1)\times(2N+1)$阶对称方阵。使总体泛函取极小，即可得到函数 V 的近似离散值应满足的代数方程式：

$$\mathbf{K}\cdot\vec{V}=\vec{F}$$

即：

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{A}_1^1-\mathbf{T}_1 & \mathbf{B}_1^1 & \mathbf{C}_1 & & & & & & \\
(\mathbf{B}_1^1)^T & \mathbf{A}_1^2 & \mathbf{B}_1^2 & & & & & & \\
(\mathbf{C}_1)^T & (\mathbf{B}_1^2)^T & \mathbf{A}_1^3+\mathbf{A}_2^1 & \mathbf{B}_2^1 & \mathbf{C}_2 & & & & \\
 & & (\mathbf{B}_2^1)^T & \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{B}_2^2 & & & & \\
 & & (\mathbf{C}_1)^T & (\mathbf{B}_2^2)^T & \mathbf{A}_2^3+\mathbf{A}_3^1 & \mathbf{B}_3^1 & \mathbf{C}_3 & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & (\mathbf{C}_{M-1})^T & (\mathbf{B}_{M-1}^2)^T & \mathbf{A}_{M-1}^3+\mathbf{A}_M^1 & \mathbf{B}_M^1 & \mathbf{C}_M \\
 & & & & & (\mathbf{B}_M^1)^T & \mathbf{A}_M^2 & \mathbf{B}_M^2 & \\
 & & & & & (\mathbf{C}_M)^T & (\mathbf{B}_M^2)^T & \mathbf{A}_M^3+\mathbf{T}_M &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\vec{V}_1\\ \vec{V}_{1+\frac{1}{2}}\\ \vec{V}_2\\ \vec{V}_{2+\frac{1}{2}}\\ \vec{V}_3\\ \vdots\\ \vec{V}_M\\ \vec{V}_{M+\frac{1}{2}}\\ \vec{V}_{M+1}\end{pmatrix}=
\begin{pmatrix}-\vec{f}_1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \vec{f}_{M+1}\end{pmatrix}
\qquad (4-88)$$

上式中$\mathbf{A}_i^1$、$\mathbf{A}_i^2$、$\mathbf{A}_i^3$、$\mathbf{B}_i^1$、$\mathbf{B}_i^2$、$\mathbf{C}_i$ 是分别由第 i 行上各单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_{ij}$ 的相应部分组合而成的$(2N+1)\times(2N+1)$阶 5 对角线方阵。$\mathbf{T}_1$、$\mathbf{f}_1$ 是对应于上边界上第一类边界条件的泛函部分产生出来的（见表 4-18），$\mathbf{T}_{M+1}$、$\mathbf{f}_{M+1}$ 是从对应下边界上第三类边界条件的泛函部分产生出来的（见表 4-19）。式中$\vec{V}_i$是由第 i 行 $2N+1$ 个插值点上的函数值 $V_i(j)$ 构成的列矢量，而 $\vec{V}_{i+\frac{1}{2}}$ 则是由第 i 行与第 $i+1$ 行之间的中点插值点上的函数值 $V_{i+\frac{1}{2}}(j)$构成的列矢量。

为了求取地表面上的辅助场值 I_z，需计算函数 $V(y,z)$沿 z 方向的偏导数。这可利用右上方三角形 $\triangle'_{ij}$ 中的近似插值公式（4—87）求得：

$$I'_z(y,z)=-\frac{1}{\eta'_i(j)}\frac{\delta V'(y,z)}{\partial z}=-\frac{1}{\eta'_i(j)}\left\{\left(\frac{4}{h_i^2}z-\frac{1}{h_i}\right)V_{i+1}(j+1)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{4}{w_ih_i}y-\frac{4}{h_i^2}z-\frac{1}{h_i}\right)V_i(j+1)+\left(\frac{4}{w_ih_i}y-\frac{8}{h_i^2}z\right)V_{i+\frac{1}{2}}(j+1)\right.$$

表 4-18

$$
T_1=\begin{pmatrix}
\frac{2}{15}\alpha_2 w_1 & \frac{1}{15}\alpha_2 w_1 & -\frac{1}{30}\alpha_2 w_1 & & & & & & \\
\frac{1}{15}\alpha_2 w_1 & \frac{8}{15}\alpha_2 w_1 & \frac{1}{15}\alpha_2 w_1 & & & & & & \\
-\frac{1}{30}\alpha_2 w_1 & \frac{1}{15}\alpha_2 w_1 & \frac{2}{15}\alpha_2 w_1 & & & & & & \\
 & & & +\frac{2}{15}\alpha_2 w_1 & \frac{1}{15}\alpha_2 w_2 & -\frac{1}{30}\alpha_2 w_2 & & & \\
 & & & \frac{1}{15}\alpha_2 w_2 & \frac{8}{15}\alpha_2 w_2 & \frac{1}{15}\alpha_2 w_2 & & & \\
 & & & -\frac{1}{30}\alpha_2 w_2 & \frac{1}{15}\alpha_2 w_2 & \frac{2}{15}\alpha_2 w_2 & & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & -\frac{1}{30}\alpha_2 w_{N-1} & \frac{1}{15}\alpha_2 w_{N-1} & \frac{2}{15}\alpha_2 w_{N-1} \\
 & & & & & & +\frac{2}{15}\alpha_2 w_N & \frac{1}{15}\alpha_2 w_N & -\frac{1}{30}\alpha_2 w_N \\
 & & & & & & \frac{1}{15}\alpha_2 w_N & \frac{8}{15}\alpha_2 w_N & \frac{1}{15}\alpha_2 w_N \\
 & & & & & & -\frac{1}{30}\alpha_2 w_N & \frac{1}{15}\alpha_2 w_N & \frac{2}{15}\alpha_2 w_N
\end{pmatrix}
$$

$$
f_1=\left\{\frac{\beta_2 w_1}{6},\ \frac{2\beta_2 w_1}{3},\ \frac{\beta_2 w_1+\beta_2 w_2}{6},\ \frac{2\beta_2 w_2}{3},\ \frac{\beta_2 w_2+\beta_2 w_3}{6},\ \frac{2\beta_2 w_3}{3},\right.
$$

$$
\left.\cdots\cdots,\ \frac{\beta_2 w_{N-1}+\beta_2 w_N}{6},\ \frac{2\beta_2 w_N}{3},\ \frac{\beta_2 w_N}{6}\right]^t
$$

$$
+\left(\frac{4}{w_j h_i}y-\frac{4}{h_i}\right)V_i\left(j+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{4}{w_j h_i}y-\frac{4}{h_i}\right)V_{i+\frac{1}{2}}\left(j+\frac{1}{2}\right)\Bigg\} \tag{4—89}
$$

类似地，在另一个三角形$\triangle_{ij}$中有：

$$
I_z(y,z)=-\frac{1}{\eta_i(j)}\frac{\partial V(y,z)}{\partial z}=-\frac{1}{\eta_i(j)}\left\{\left(\frac{4z}{h_i^2}-\frac{3}{h_i}\right)V_i(j)+\right.
$$

$$
+\left(\frac{2z}{h_i^2}-\frac{4}{w_j h_i}y-\frac{1}{h_i}\right)V_{i+1}(j)+\left(\frac{4}{w_j h_i}y\right)V_{i+1}\left(j+\frac{1}{2}\right)+
$$

$$
\left.+\left(\frac{4z}{h_i^2}-\frac{8}{w_j h_i}y-\frac{4}{h_i}\right)V_{i+\frac{1}{2}}(j)-\frac{4}{w_j h_i}y\cdot V_{i+\frac{1}{2}}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{4—90}
$$

这样，$I'_z(y,z)$（包括$I_z(y,z)$）是 y 和 z 的线性函数，较之矩形单元剖分时的结果来说，计算辅助场的准确程度就提高了。而且$I'_z(y,z)$是$V_i(j)$等的简单线性组合，也就是说，

如写成 $I'_e=\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{V}$ 的话，则矢量 $\vec{a}$ 具有简单而明确的表达形式，这在下一章中要涉及到的用罗迪提出的方法进行大地电磁测深资料二维反演时会带来很大的方便。

如果界面分布情况需要时，也可用另一方向的对角线将矩形单元划分成两个直角三角形。这时，可进行与上述过程完全类似的分析与计算，并得到相似的结果。

表 4-19

$$
\Gamma_{M+1}=\begin{pmatrix}
\frac{2}{15}\alpha_1\omega_1 & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_1 & -\frac{1}{30}\alpha_1\omega_1 & & & & & & \\
\frac{1}{15}\alpha_1\omega_1 & \frac{8}{15}\alpha_1\omega_1 & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_1 & & & & & & \\
-\frac{1}{30}\alpha_1\omega_1 & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_1 & \frac{2}{15}\alpha_1\omega_1+\frac{2}{15}\alpha_1\omega_2 & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_2 & -\frac{1}{30}\alpha_1\omega_2 & & & & \\
 & & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_2 & \frac{8}{15}\alpha_1\omega_2 & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_2 & & & & \\
 & & -\frac{1}{30}\alpha_1\omega_2 & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_2 & \frac{2}{15}\alpha_1\omega_2+\frac{2}{15}\alpha_1\omega_3 & -\frac{1}{15}\alpha_1\omega_3 & -\frac{1}{30}\alpha_1\omega_3 & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & -\frac{1}{30}\alpha_1\omega_{N-1} & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_{N-1} & \frac{2}{15}\alpha_1\omega_{N-1}+\frac{2}{15}\alpha_1\omega_N & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_N & -\frac{1}{30}\alpha_1\omega_N \\
 & & & & & & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_N & \frac{8}{15}\alpha_1\omega_N & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_N \\
 & & & & & & -\frac{1}{30}\alpha_1\omega_N & \frac{1}{15}\alpha_1\omega_N & \frac{2}{15}\alpha_1\omega_N
\end{pmatrix}
$$

$$
I_{M+1}=\left(\frac{\beta_1\omega_1}{6},\ \frac{2\beta_1\omega_1}{3},\ \frac{\beta_1\omega_1+\beta_1\omega_2}{6},\ \frac{2\beta_1\omega_2}{3},\ \frac{\beta_1\omega_2+\beta_1\omega_3}{6},\ \cdots,\ \frac{2\beta_1\omega_{N-1}}{3},\ \frac{\beta_1\omega_{N-1}+\beta_1\omega_N}{6},\ \frac{2\beta_1\omega_N}{3}\quad\frac{\beta_1\omega_N}{6}\right)
$$

第六节　任意三角形剖分二次插值有限元计算法的实现

即使采用矩形-直角三角形混合剖分，仍会使网格在很多地方出现不必要的密度，增加未知节点的个数，这在一定程度上限制了有限元法对多种多样几何形状界面高度适应能力的充分发挥。任意三角形剖分二次插值有限元算法可以克服上述缺点，在显著减少计算量和内存的情况下，仍取得了较好的数值计算结果。

设把研究区域 G 分为 M 个任意三角形单元，取三角形顶点及各边中点为节点，分别

记为 i、j、k、I、J、K，如图 4-12所示。设在节点上，电(磁) 场值相应为V_i、V_j、V_k、V_I、V_J、V_K，并用$\boldsymbol{V}_m^e$ 表示第 m 个单元各节点上的电(磁)场值按顺序排列组成的列向量，即：

$$\boldsymbol{V}_m^e = [V_i、\ V_j、\ V_k、\ V_I\ V_J\ V_K]^T \quad (4—91)$$

在该单元上取场值V为坐标y、z 的二次函数：

$$V = a_1 + a_2 z + a_3 y + a_4 z^2 + a_5 zy + a_6 y^2 \quad (4—92)$$

取

$$\mathbf{a} = [a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6]^T \quad (4—93)$$

$$\mathbf{c} = [1\quad z\quad y\quad z^2\quad zy\quad y^2]^T \quad (4—94)$$

则 (4—92)式可以写成：

$$V = \mathbf{c}^T\mathbf{a} \quad (4—95)$$

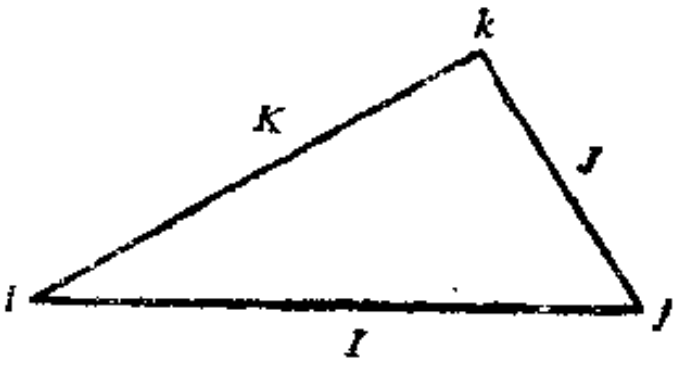


图 4-12

任意三角形单元上的节点排列

把各节点坐标及场值代入式 (4—95)，则有：

$$\mathbf{V}_m^e = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (4—96)$$

式中：

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 1 & z_i & y_i & z_i^2 & z_i y_i & y_i^2 \\ 1 & z_j & y_j & z_j^2 & z_j y_j & y_j^2 \\ 1 & z_k & y_k & z_k^2 & z_k y_k & y_k^2 \\ 1 & \dfrac{z_I + z_j}{2} & \dfrac{y_I + y_j}{2} & \dfrac{(z_I + z_j)^2}{4} & \dfrac{(z_I + z_j)(y_I + y_j)}{4} & \dfrac{(y_I + y_j)^2}{4} \\ 1 & \dfrac{z_J + z_k}{2} & \dfrac{y_J + y_k}{2} & \dfrac{(z_J + z_k)^2}{4} & \dfrac{(z_J + z_k)(y_J + y_k)}{4} & \dfrac{(y_J + y_k)^2}{4} \\ 1 & \dfrac{z_k + z_i}{2} & \dfrac{y_k + y_i}{2} & \dfrac{(z_k + z_i)^2}{4} & \dfrac{(z_k + z_i)(y_k + y_i)}{4} & \dfrac{(y_k + y_i)^2}{4} \end{Bmatrix} \quad (4—97)$$

经过计算可求出B 的逆矩阵为：

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1} =$$

$$\frac{1}{\Delta_m^2} \begin{Bmatrix} \dfrac{a_i}{2}(a_i - \Delta_m) & \dfrac{a_j}{2}(a_j - \Delta_m) & \dfrac{a_k}{2}(a_k - \Delta_m) & a_i a_j & a_j a_k & a_k a \\ b_i\left(a_i - \dfrac{\Delta_m}{2}\right) & b_j\left(a - \dfrac{\Delta_m}{2}\right) & b_k\left(a_k - \dfrac{\Delta_m}{2}\right) & a_i b_j + a_j b_i & a_j b_k + a_k b_j & a_k b_i + a_j b_k \\ c_I\left(a_i - \dfrac{\Delta_m}{2}\right) & c_i\left(a_, - \dfrac{\Delta_m}{2}\right) & c_k\left(a_k - \dfrac{\Delta_m}{2}\right) & a_i c_j + a_j c_i & a_j c_k + a_k c_j & a_k c_i + a_i c_k \\ \dfrac{b_i^2}{2} & \dfrac{b_j^2}{2} & \dfrac{b_k}{2} & b_i b_I & b_j b_k & b_k b_. \\ b_i c_I & b_j c_j & b_k c_k & b_i c_j + b_j c_i & b_j c_k + b_k c_I & b_k c_i + b_i c_k \\ \dfrac{c_i^2}{2} & \dfrac{c_j^2}{2} & \dfrac{c_k^2}{2} & c_i c & c_j c_k & c_k c_I \end{Bmatrix} \quad (4—98)$$

式中

$$\Delta_m = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & z_i & y_i \\ 1 & z_j & y_j \\ 1 & z_k & y_k \end{vmatrix} \tag{4—99}$$

$$\begin{cases} a_i = z_j y_k - z_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = z_j - z_k \end{cases} \tag{4—100}$$

a_j、b_j、c_j、a_k、b_k、c_k、可依i、j、k次序轮换而求出。由式（4—96)得到：

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}_m^e = \mathbf{F}\mathbf{V}_m^e \tag{4—101}$$

将式（4—101）代入式（4—95)后有：

$$\mathbf{V} = \mathbf{c}^T\mathbf{F}\mathbf{V}_m^e \tag{4—102}$$

上式就是用第m个单元节点上的电（磁）场值来表达单元内的电（磁）场值的表达式。

经过计算可求得式（4—25)中的泛函为：

$$I_0 = \iint_\Omega \left[\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \frac{\gamma}{2}V^2\right]dzdy$$

$$= \sum_{m=1}^{M} [\mathbf{V}_m^e]^T \left(\frac{1}{2\eta}[\mathbf{FG}] + \frac{\gamma_m \Delta_m}{360}[\mathbf{Fc}]\right)\mathbf{V}_m^e \tag{4—103}$$

这里

$$\mathbf{FG} = \mathbf{F}^T\mathbf{G}\mathbf{F} \tag{4—104}$$

$$\mathbf{G} = \Delta_m \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & \text{对} & & \\ 0 & 0 & 1 & & \text{称} & \\ 0 & \frac{2}{3}A & 0 & \frac{1}{3}(A^2+C) & & \\ 0 & \frac{1}{3}B & \frac{A}{3} & \frac{1}{6}(A\cdot B+E) & \frac{1}{12}(B^2+D+A^2+C) & \\ 0 & 0 & \frac{2B}{3} & 0 & \frac{1}{6}(A\cdot B+E) & \frac{1}{3}(B^2+D) \end{pmatrix} \tag{4—105}$$

式中

$$A = z_i + z_j + z_k, \quad B = y_i + y_j + y_k, \quad C = z_i^2 + z_j^2 + z_k^2.$$

$$D = y_i^2 + y_j^2 + y_k^2, \quad E = z_i y_i + z_j y_j + z_k y_k,$$

而

$$\mathbf{Fc} = \begin{pmatrix} 6 & & & & & \\ -1 & 6 & & \text{对} & & \\ -1 & -1 & 6 & & \text{称} & \\ 0 & 0 & -4 & 32 & & \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} \tag{4—106}$$

为了求式（4—32)中的泛函积分 I_1，设在边界 Γ_1 的一段 l 上电（磁）场V是弧(边)长 s 的二次函数（见图 4-13）：

$$V = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 \qquad (4—107)$$

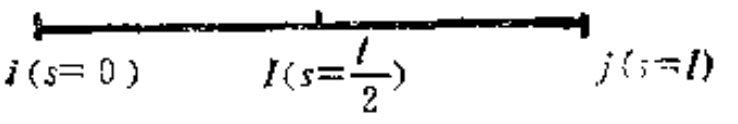


图 4-13 边界段示意图

将节点处的弧长及场值代入上式，并取：

$$\mathbf{V}_n^e = [V_i, V_I, V_j]^T \qquad (4—108)$$

则得该边界上场值的插值公式为：

$$V = [1 \ s \ s^2] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l} & \frac{4}{l} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & -\frac{4}{l^2} & \frac{2}{l^2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V}_n^e \qquad (4—109)$$

将上式代入式（4—32)，经过计算，可求得对应该式的泛函积分为：

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\alpha}{2} V^2 - \beta V\right) ds = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\alpha l}{60} \{\mathbf{V}_n^e\}^t \mathbf{w} \mathbf{V}_n^e - \frac{\beta l}{6} [1, 4, 1] \mathbf{V}_n^e\right) \qquad (4—110)$$

式中

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (4—111)$$

为了求得所讨论泛函极值问题的解，要求出式（4—103）及（4—110）之和相对节点上未知电（磁）场值$\mathbf{V}_m^e$及$\mathbf{V}_n^e$ 的偏导数，并令其等于零，这样得到下列方程：

$$\sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{\eta_m} \mathbf{FG} + \frac{\gamma_m \Delta_m}{180} \mathbf{Fc}\right) \mathbf{V}_m^e + \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha l}{30} \mathbf{w} \mathbf{V}_n^e = \sum_{n=1}^{N} \frac{\beta l}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4—112)$$

为执行式中的求和，要将各单元矩阵扩充为总矩阵，之后，再把相同位置上的元素迭加。式(4—112)就是使用任意三角形二次插值有限元法求解这一泛函极值问题时最终所需求解的线性方程组。下面介绍的程序中是用LDL^1分解法解这一线性方程组的。

为了求得辅助场值I_z，可利用下式：

$$I_z = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\eta} (a_2 + 2a_4 z + a_5 y) \qquad (4—113)$$

求得 V 和 I_z 后，就可计算出大地电磁响应函数——视电阻率和阻抗相位。

下面给出实现上述算法的程序：（图 4-14 给出了这一程序的流程图。这个程序可以一次计算出两种极化方式的二维大地电磁响应函数)。

程序名 TRIANGL

（1）程序功能

利用有限元法计算任意形状的二维地电模型的大地电磁响应。本程序用任意三角形网格剖分研究区域，在各个子域中以二次插值函数为基函数。由于剖分的任意性（在一定范围内）和二次插值，使其克服了矩形网格灵活性差等缺点，提高了对复杂模型做正演计算的适应能力，并有计算精度较高的特点。

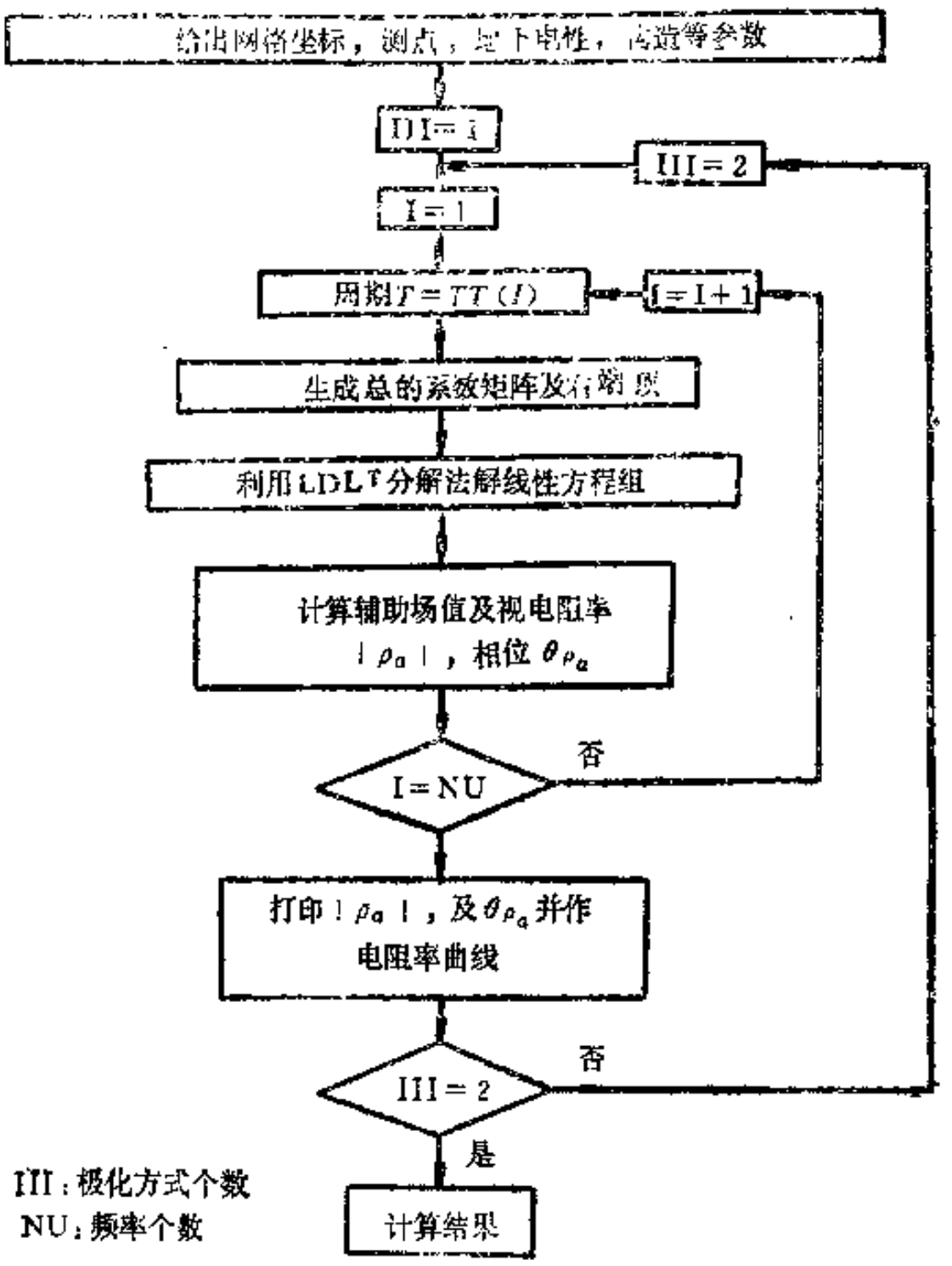


图 4-14　任意三角形剖分二次插值有限元计算法程序流程图

（2）程序中需要已知的参数及数组

TT　　要计算大地电磁响应的周期所构成的数组。

LD　　存放所有三角形单元节点号的数组。

L2D　　存放具有第三类边界条件单元序号的数组。

Y　　节点横坐标。

Z　　节点纵坐标。

Y1　　H_x极化方式时的测点坐标。

Y2　　E_x极化方式时的测点坐标。

EYI1、EYI2　存放两个极化方向时测点Y1、Y2所在的单元号。

NN　　未知节点总数。

NP　　包括已知节点（第一类边界条件）的节点总数。

NE　　单元总数。

N2B　　含第三类边界条件的单元总数。

N2B1　　上边界具有第三类边界条件的单元总数。

MX　　空中网格单元总数。

MT　　计算大地电磁响应的起始周期在数组中的位置再减去1。

NV　　计算大地电磁响应的两个相邻周期之间的间隔数。

NU　　计算大地电磁响应的总周期点数。

MY　　计算大地电磁响应的测点总数。

III　　等于1时为H_x极化方式，等于2时为E_x极化方式。

（3）子程序说明

CALL　MT2　计算总刚度系数矩阵及等式右端项矩阵，采用变带宽存储法将上述矩阵紧缩成一维数组。使用LU分解法求解线性方程组，进而求出各节点处的大地电磁响应值。

CALL　MVF　计算矩阵F。

CALL　MT3　用LU算法求解线性方程组。

（4）程序

```
      PROGRAM TRIANGL(INPUT,OUTPUT,TAPE6=OUTPUT,TAPE2=INPUT)
      INTEGER EYI,EYI1
      DIMENSION TT(31),XA(31),XP(31),NE(3),B1(1),LAD(502),LD(6,237),
     $     L2D(22),Y(502),Z(502),Y1(21),EYI(2,21),AMP(14,23),PHASE(14,23),
     $     P9(14,23),P2(10),EYI1(2,21),Y2(21)
      COMPLEX A(28789),U(237),UT(502),ON,BB,BG,BG2,G,R9,U2(237)
      DATA(TT=0.000794281,0.0012589,0.0019952,0.00316255,0.00501253,
     $  0.00794281,
     $  0.012589,.019952,.0316255,.0501253,.0794281,.125897,
     $  .199521,.316255,.501253,.794281,1.25897,1.9952,3.16255,5.01253,
     $  7.94281,12.5897,19.952,31.6255,50.1253,79.4281,125.897,199.52,
     $  316.255,501.253,794.281)
      DATA(L2D=2,149,157,173,184,197,208,211,220,223,230,235,236)
      DATA(Y=-100.,2*100.,4*0.,-100.,3*0.,100.,19*0.,-100.,0.,-10.,0.,
     $  -5.,0.,-3.,0.,-2.4,0.,-2.2,0.,-2.,0.,-1.8,0.,-1.5,3*0.,0.3,0.,
     $  0.5,0.,0.7,0.,1.,0.,3.,0.,8.,0.,100.,25*0.,-100.,0.,-8.,0.,
     $  -2.2,0.,-2.,0.,-1.8,0.,0.3,0.,0.5,0.,4.,0.,100.,23*0.,-100.,
     $  0.,-10.,0.,-4.,0.,-3.,
     $  0.,-2.3,0.,-2.,0.,-1.8,0.,-1.5,0.,2*0.,0.3,0.,0.5,0.,0.8,0.,1.5,
     $  0.,5.,0.,100.,20*0.,-100.,
     $  0.,-6.,0.,-2.,0.,0.5,0.,5.,0.,100.,24*0.,
     $  -26.5,0.,-20.,0.,-15.5,0.,-6.,0.,-3.,0.,-2.5,0.,-2.,0.,-1.8,0.,-0.
     $  7.,0.,.3,0.,.5,0.,.7,0.,1.2,0.,2.5,0.,3.1,0.,3.5,0.,3.7,0.,7.,0.,
     $  18.,40*0.,-100.,0.,-26.,0.,-25.5,0.,-20.,0.,-18.7,0.,-13.,0.,-11.5,
     $  0.,-9.,0.,-5.5,0.,-3.,0.,-2.3,0.,1.,0.,2.8,0.,3.,3*3.,3.5,0.,8.,
     $  0.,8.2,0.,11.5,0.,16.,0.,16.,0.,18.,7*0.,-20.,0.,-19.,7*0.,
     $  -12.8,23*0.,7.8,10*0.,15.7,6*0.,-18.7,2*0.,-18.4,0.,-13.2,
     $  -13.,2*0.,-3.,0.,-3.,0.,-2.3,0.,1.,0.,2.,0.,2.,0.,2.7,0.,3.,
     $  0.,3.3,0.,7.7,0.,8.,0.,11.3,0.,11.7,15.5,
     $  3*0.,15.6,0.,16.,16.2,0.,17.8,0.,18.,3*0.,
     $  9*0.,-13.2,2*0.,-13.,2*0.,-7.,0.,-12.8,0.,12*0.,
     $  11.5,0.,14.,4*0.,8.,0.,8.3,4*0.,4*-100.,7*100.,19.,0.,100.,0.)
      DATA(Z=7*-200.,5*-10.,77*0.,17*0.05,23*0.,29*0.5,20*0.,11*0.55,
     $  24*0.,3.5,0.,4.,0.,5.2,0.,3.8538,0.,20*1.,1.2,0.,1.5,0.,1.9,0.,3.5,
     $  0.,5.5,40*0.,7.5,0.,5.5,0.,4.,0.,4.4629,0.,4.6555,0.,5.5,0.,6.1,
     $  0.,6.3,0.,4.,7*3.,1.2,0.,1.25,0.,2.,0.,2.,0.,3.2,0.,3.8,0.,6.2,0.,
     $  6.5,0.,6.7,0.,5.7,7*0.,4.6,0.,6.,7*0.,5.9,23*0.,3.2,10*0.,7.,6*0.,
     $  7.5,2*0.,4.9,0.,5.8,6.3,2*0.,5.,0.,7.5,0.,5.,0.,5.,0.,7.5,0.,5.,
     $  0.,5.,0.,7.5,0.,5.,0.,5.,0.,4.,0.,6.3,0.,6.8,0.,7.,3*0.,3*7.5,6.5,
     $  0.,6.5,0.,7.5,12*0.,6.6,2*0.,7.5,2*0.,6.8,0.,6.5,13*0.,7.,0.,7.2,
     $  4*0.,4*7.5,3*0.,4*3.5,3*5.5,8*7.5)
      DATA(Y1=-26.5,-21.6,-18.7,-16.5,-11.8,-8.7,-5.4,-1.1,1.6,4.3,9.7,
     $  11.4,14.,18.)
```

```
 DATA(Y2=-26.5,-21.6,-18.7,-16.5,-11.8,-8.7,-5.4,-1.1,1.6,4.3,9.7,
$   11.4,14.,18.)
 DATA((EYI(I,J),I=1,2),J=1,21)/
$   2*22,0422,4*24,2*43,2*57,2*58,7*60,60/
 DATA((EYI1(I,J),I=1,2),J=1,21)/
$   2*22,8*22,4*24,2*43,2*57,2*58,7*60,60/
 NW=5
 NN=502
 NP=502
 NE=237
 MX=21
 NPN=1
 N2B=13
 N2B1=1
 MT=6
 NU=23
 NV=0
 MY=14
      ON=1./15.  $  ONX=1./14.  $  ONY=1./1.
      DO 25 I=1,NN
      Y(I)=Y(I)*1000.
25    Z(I)=Z(I)*1000.
      DO 3 I=22,38
      U2(I)=1/25.
3     U(I)=1/25.
      DO 4 I=39,54
      U2(I)=1/45.
4     U(I)=1/45.
      DO 5 I=55,67
      U2(I)=1/25.
5     U(I)=1/25.
      DO 6 I=68,94
      U2( I)=1/4.5
6     U(I)=1/4.5
      DO 7 I=95,105
      U2(I)=1/24.
7     U(I)=1/24.
      DO 8 I=106,138
      U2(I)=1/4.5
8     U(I)=1/4.5
      DO 9 I=139,149
9     U(I)=ON
      DO 10 I=150,158
10    U(I)=1/1000000000.
      DO 11 I=159,174
11    U(I)=1./1000000000.
      DO 2  I=175,185
2     U(I)=1/200.
      DO 21 I=186,198
21    U(I)=ON
      DO 22 I=199,210
22    U(I)=1/55.
      DO 23 I=211,223
23    U(I)=ON
      DO 24 I=224,230
24    U(I)=1/300.
      U(231)=U(232)=1/4.5
      U(233)=U(234)=U(235)=U(236)=U(237)=ON
      DO 26 I=139,230
26    U2(I)=ONY
      U2(231)=U2(232)=1./4.5
      U2(233)=U2(234)=U2(235)=U2(236)=U2(237)=ONY
      READ(2.1) ((LD(I,J),I=1,6),J=1,NE)
```

```
1       FORMAT (20 I 4)
        DO 31 I=1,NN
31      LAD(I)=0
        DO 20I=1,NE
        L1=LD(1,I)
        L2=LD(2,I)
        L3=LD(3,I)
        L4=LD(4,I)
        L5=LD(5,I)
        L6=LD(6,I)
        Z(L4)=(Z(L1)+Z(L2))/2.
        Z(L5)=(Z(L2)+Z(L3))/2.
        Z(L6)=(Z(L3)+Z(L1))/2.
        Y(L4)=(Y(L1)+Y(L2))/2.
        Y(L5)=(Y(L2)+Y(L3))/2.
        Y(L6)=(Y(L3)+Y(L1))/2.
        M=MINO(L1,L2,L3,L4,L5,L6)
        DO 20 J=1,6
        IF(LD(J,I).GT. NN)GOTO 20
        L=LD(J.I)
        N=L-M
        IF(N.GT.LAD(L)) LAD(L)=N
20      CONTINUE
        LAD(1)=1
        DO 140 I=2,NN
140     LAD(I)=LAD(I)+LAD(I-1)+1
        NA=LAD(NN)
        WRITE (6,142)LAD,NA
142     FORMAT(//5X,*  LAD,     NA*,/(5X,10I8))
        WRITE(6,148) LD,EYI,EYI1
148     FORMAT(//,5X,*LD,EYI*,(5X,6I5,5X,6I5,5X,6I5))
        DO 12 I=1,MY
        Y2(I)=Y2(I)*1000.
12      Y1(I)=Y1(I)*1000.
        WRITE(6,149)Y,Z,Y1,Y2
149     FORMAT(5X,9F13.4)
        BA=3.1415926535
        DMU=4.*BA*1.E-7
        III=1
        DO 1000 II=1,NU
        T=TT(MT+II)
        T1=SQRT(1.E7*T)/1000.
        WRITE(6,180) T,T1
180     FORMAT(//,20X,*T=*,F11.5,5X,*T1=*,F11.5,/)
        XA(II)=T
        W=2*BA/T
        G=CMPLX(0.,-W*DMU)
        IF(III.EQ.2)GOTO 13
        R9=G/ON  $  GO TO 14
13      R9=ON/G  $  GO TO 14
14      BG=0
        BG2=CSQRT(R9)
        BB=1.
        R9=CMPLX(0.,-1./(18.E9*T))
        DO 201 I=1,MX
        U2(I)=R9
201     U(I)=R9
        CALL MT2(N2B,N2B1,NP,NN,NE,BB,BG,BG2,G,L2D,NA,LD,LAD,A,UT,Z,Y,U,
       $                 B1,NPN,III,R9,U2)
        CALL MOM(UT,NP,U,LD,NE,EYI,Z,Y,NP,Y1,MY,AMP,PHASE,NU,G,II,III,
       $                    PS,EYI1,Y2)
        MT=MT+NV
1009    CONTINUE
```

```
      MT=MT-NU*NV
      DO 370 I=1,MY
      IF(III.EQ.2) GO TO 15
      WRITE (6,350)I,Y1(I),(AMP(I,J),J=1,NU) $ GO TO 16
15    WRITE(6,351)I,Y2(I),(AMP(I,J),J=1,NU)
16    WRITE(6,355)(PS(I,J),J=1,NU)
      WRITE(6,360)(PHASE(I,J),J=1,NU)
350   FORMAT(//10X,*LOG AMPLITUDE*,5X,*I=*,I2,5X,*Y1(I)=*F10.2//(3X,
     $          10F12.5))
351   FORMAT(//10X,*LOG AMPLITUDE*,5X,*I=*,I2,5X,*Y2(I)=*F10.2//(3X,
     $          10F12.5))
355   FORMAT(///10X,*PS*,//(3X,10F12.4))
360   FORMAT(///10X,*PHASE(DEGREE)*//(3X,10F12.5))
370   CONTINUE
      YMAX=PS(1,1)
      YMIN=PS(1,1)
      DO 1020 I=1,MT
      DO 1020 J=1,NU
      YI=PS(I,J)
      IF(YI.GT.YMAX)YMAX=YI
1020  IF(YI.LT.YMIN)YMIN=YI
      YH=YMAX-YMIN
      DO 1100 I=1,MY
      DO 1050 J=1,NU
      XP(J)=PS(I,J)
1050  CONTINUE
      IF(III.EQ.2)GO TO 1051
      WRITE(6,1070)I,Y1(I)   $  GO TO 1052
1051  WRITE(6,1071)I,Y2(I)
1070  FORMAT(///30X,*APPARENT  AMPLITUDE CURVE        I=*,I2,5X,
     $     *Y1(I)=*,F10.2///)
1071  FORMAT(///30X,*APPARENT  AMPLITUDE CURVE        I=*,I2,5X,
     $     *Y2(I)=*,F10.2///)
1052  CALL PLOT (NU,XA,XP,111,1H*,YH,YMIN)
1100  CONTINUE
1111  CONTINUE
      PRINT 5000
5000  FORMAT(///5X,*FINISH*)
      END
      SUBROUTINE MT2(N2B,N2B1,NP,NN,NE,BB,BG,BG2,GH,L2D,NA,
     $                    LD,LAD,A,UT,X,Y,U,B1,NPN,III,R9,U2)
      DIMENSION B1(NPN),X(NP),Y(NP),LD(6,NE),LAD(NN),L2D(N2B),
     $       F(6,6),CC(6,6),G(6,6),FG(6,6),G1(6,6),FG1(6,6)
      COMPLEX  UT(NN),A(NA),U(NE),BB,BG,BG2,GH,GB,R9,U2(NE)
      EQUIVALENCE (F,CC)
      COMMON F
      DO 193 I=1,NA
193   A(I)=(0.,0.)
      DO 194 I=1,NN
194   UT(I)=(0.,0.)
      DO 135 KK=1,NE
      I=LD(1,KK)
      J=LD(2,KK)
      K=LD(3,KK)
      CALL IVF(I,J,K,SE,X,Y,NP)
      SX=X(I)+X(J)+X(K)
      SY=Y(I)+Y(J)+Y(K)
      SXY=X(I)*Y(I)+X(J)*Y(J)+X(K)*Y(K)
      SXX=X(I)*X(I)+X(J)*X(J)+X(K)*X(K)
      SYY=Y(I)*Y(I)+Y(J)*Y(J)+Y(K)*Y(K)
      DO 50 L=1,6
      G1(L,1)=0.
50    G(L,1)=0.
```

```
      IF(III.EQ.2) GO TO 51
      G(2,2)=1.
      G(3,2)=G(6,2)=G(3,3)=G(4,3)=G(5,3)=G(6,3)=G(6,4)=G(6,5)=G(6,6)=0.
      G(4,2)=SX*2./3.
      G(5,2)=SY/3.
      G(4,4)=(SX*SX+SXX)/3.
      G(5,4)=(SX*SY+SXY)/6.
      G(5,5)=(SY*SY+SYY)/12.
      G1(2,2)=G1(3,2)=G1(4,2)=G1(5,2)=G1(6,2)=G1(4,3)=G1(4,4)=0.
      G1(5,4)=G1(6,4)=0.
      G1(3,3)=1.
      G1(5,3)=SX/3.
      G1(6,3)=SY*2./3.
      G1(5,5)=(SX*SX+SXX)/12.
      G1(6,5)=(SX*SY+SXY)/6.
      G1(6,6)=(SY*SY+SYY)/3.
      GO TO 52
51    CONTINUE
      G(2,2)=G(3,3)=1.
      G(3,2)=G(6,2)=G(4,3)=G(6,4)=0.
      G(4,2)=SX*2./3.
      G(5,2)=SY/3.
      G(5,3)=SX/3.
      G(6,3)=SY*2./3.
      G(4,4)=(SX*SX+SXX)/3.
      G(5,4)=G(6,5)=(SX*SY+SXY)/6.
      G(5,5)=(SX*SX+SY*SY+SXX+SYY)/12.
      G(6,6)=(SY*SY+SYY)/3.
52    CONTINUE
      DO 60 I=2,6
      J=I-1
      DO 60 L=1,J
      G1(L,I)=G1(I,L)
60    G(L,I)=G(I,L)
      DO 70 I=1,6
      DO 70 J=1,6
      FG(I,J)=0.
      FG1(I,J)=0.
      DO 70 K=1,6
      FG1(I,J)=F(K,I)*G1(K,J)+FG1(I,J)
70    FG(I,J)=F(K,I)*G(K,J)+FG(I,J)
      DO 80 I=1,6
      DO 80 J=1,I
      G(I,J)=0.
      G1(I,J)=0.
      DO 80 K=1,6
      G1(I,J)=FG1(I,K)*F(K,J)+G1(I,J)
80    G(I,J)=FG(I,K)*F(K,J)+G(I,J)
      CC(1,1)=CC(2,2)=CC(3,3)=6.
      CC(4,4)=CC(5,5)=CC(6,6)=32.
      CC(2,1)=CC(3,1)=CC(3,2)=-1.
      CC(4,1)=CC(4,2)=CC(5,2)=CC(5,3)=CC(6,1)=CC(6,3)=0.
      CC(4,3)=CC(5,1)=CC(6,2)=-4.
      CC(5,4)=CC(6,4)=CC(6 5)=16.
      SEE=SE*SE*SE
      DO 132 I=1,6
      DO 132 J=1,I
      L=LD(I,KK)-LD(J,KK)
      IF(L.GE.0) GO TO 125
      M=LD(J,KK)
      L=LAD(M)+L
      GO TO 130
125   M=LD(I,KK)
```

```
      L=LAD(M)-L
130   IF(III.EQ.2) GO TO 131
      A(L)=G(I,J)/SEE/U(KK)+G1(I,J)/SEE/U2(KK)+GH*SE*CC(I,J)/180.+A(L)
      GO TO 132
131   A(L)=G(I,J)/SEE/GH+U(KK)*SE*CC(I,J)/180.+A(L)
132   CONTINUE
135   CONTINUE
      DO 500 K=1,N2B
      M=L2D(K)
      I=LD(1,M)
      J=LD(2,M)
      L=LD(4,M)
      IF (K.LE.N2B1) GO TO 260
      IF(III.Eq.2) GO TO 250
      R9=GH/U2(M)
      GO TO 255
250   R9=U2(M)/GH
255   BG2=DSQRT(R9)
      BG=BG2
      BB=(0.,0.)
260   D=SQRT((X(I)-X(J))**2+(Y(I)-Y(J))**2)
      GD=BG*D/30.
      N=LAD(I)
      A(N)=A(N)+4.*GD
      N=L-I
      IF(N.GT.0) GO TO 270
      N=LAD(I)+N
      GO TO 280
270   N=LAD(L)-N
280   A(N)=A(N)+2.*GD
      N=LAD(L)
      A(N)=A(N)+16.*GD
      N=J-I
      IF(N.GT.0) GO TO 285
      N=LAD(I)+N

      GO TO 288
285   N=LAD(J)-N
288   A(N)=A(N)-GD
      N=J-L
      IF(N.GT.0) GO TO 290
      N=LAD(L)+N
      GO TO 300
290   N=LAD(J)-N
300   A(N)=A(N)+2.*GD
      N=LAD(J)
      A(N)=A(N)+4.*GD
      GD=BB*D/6.
      UT(I)=UT(I)+GD
      UT(J)=UT(J)+GD
      UT(L)=UT(L)+4.*GD
500   CONTINUE
      CALL MT3(NN,1,NA,A,UT,LAD,IR)
      RETURN
      END
```

第五章　大地电磁测深二维反演问题

第三章讨论过的反演方法是按卡尼尔-吉洪诺夫经典理论对实测资料进行反演解释的。假设地质模型是水平均匀层状的一维模型，即地下介质的电性只沿铅垂方向（一般是z轴方向）有变化。这个条件只在一定的有利地区能近似地得到满足，比如在区域构造简单、起伏幅度很小的一些沉积盆地中，可以在每个测点上用水平层状的或连续变化的一维介质模型自动地拟合观测数据，即进行一维形式化解释，从而获得各测点下的近似电性结构，然后沿剖面把各测点上的结果拼接起来，进行区域解释。但当地下构造幅度较大，已不能近似看成一维介质时，用上述方法进行资料解释就会造成较大的系统误差，甚至导致错误的地质概念。为了提高大地电磁资料解释的可靠性及地质效果，需要研究用更为一般的地质模型直接进行反演的方法。比一维模型更为一般化又易于对之进行数值模拟计算，因而有实现可能的是二维模型。由于二维模型的电性沿走向方向保持不变，所以只需要沿一条垂直走向的剖面采集数据和进行解释。二维反演方法的本身与一维反演的方法并没有什么本质区别，只是要拟合的数据已扩展成一条剖面上若干测点处的，而不象一维反演时那样只是一个测点处的观测数据了；而且每个测点上又都包含有二种极化方式的结果，这意味着被拟合的数据量成十倍地增加。二维反演与一维反演的主要不同之处，或是说要实现二维反演的关键在于：①首先要提出较为可靠又实际可行的确定模型类型和初始模型参数的方法；②二维正演是用数值方法做近似计算，所需时间较长，因而需要提出一些解析方法或其他的快速数值计算方法来求取理论模型的大地电磁响应函数相对模型参数的偏导数，以代替一般的差商方法。下面将介绍应用样条函数插值方法实现的快速二维正、反演方法及用解析方法求取二维模型大地电磁响应函数相对模型参数的偏导数。

第一节　初始模型的确定

二维模型类型及初始模型参数的确定要以实测资料的定性解释和一维形式化解释为基础。定性解释所依据的主要图件之一是大地电磁响应函数（主要是视电阻率）曲线剖面图，其横坐标上按线性比例标出测点位置。纵坐标上以对数比例标出大地电磁场变化的频率或周期。在每个测点处都画出对应两种极化方式的视电阻率曲线。根据对这种图件的分析可以得出有关视电阻率曲线类型及特征沿剖面变化状况的概念，从而可初步判断出地下地电断面沿剖面变化的规律及可能构成的模型类型。最近广泛引入了博斯蒂克近似一维反演方法，其原理、计算方法及公式在第三章中已讨论过。应用这种方法可以很少的计算量，将各测点上视电阻率与变化周期之间的关系曲线转换成真电阻率与深度之间的近似关系曲线。根据这种曲线可以更直接地获得有关地下电性断面特征沿剖面变化的信息，推断出模型的类型。

另一种重要的定性解释图件是根据上述两种图件构制出的地电断面等值线图，即以测点位置为横坐标，对数周期或深度为纵坐标构制出视电阻率或电阻率近似值的等值线图。

这种图件也是推断模型类型的重要依据。

在定性解释和博斯蒂克近似一维反演的基础上，可设计出各测点处的层状初始模型，用广义逆反演方法分别对两组极化方式的视电阻率曲线做一维形式化解释，综合得到的两组解释剖面和模型参数，可以确定出地电模型的类型及初始模型参数。

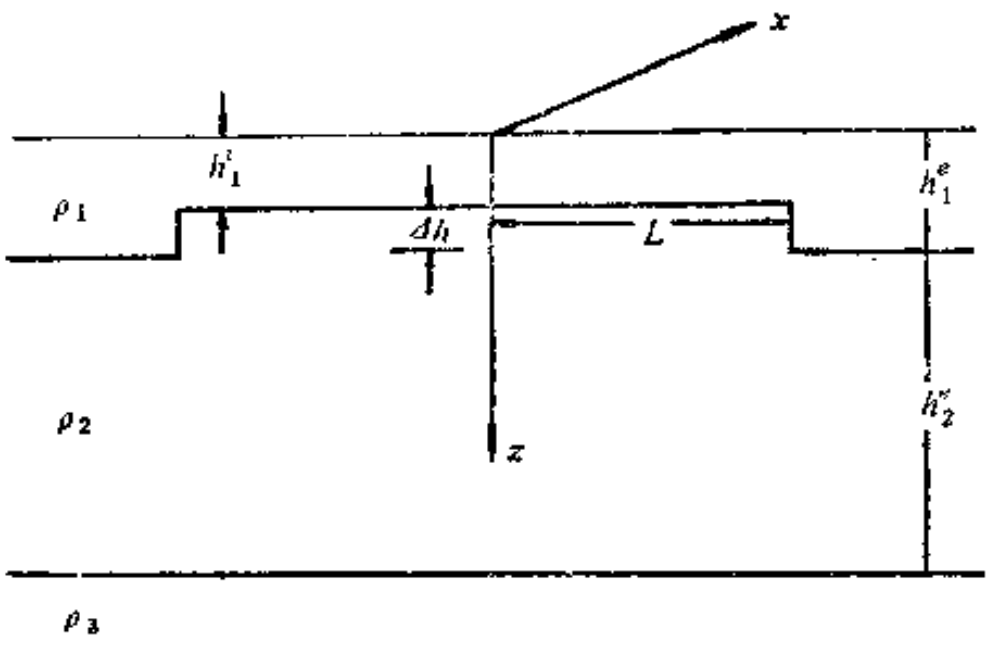


图 5-1 地电模型

$h_1^t=0.6$， $h_1^e=1$， $\Delta h=0.4$， $L=2$

$h_2^e=20$， $\rho_1=1$， $\rho_2=10^7$， $\rho_3=10^{-17}$。

距离单位为公里，电阻率单位为欧姆米

通过用一地电模型的理论数据模拟实测数据证实这种方法是可行的。地电模型示于图5-1中，测点坐标y（I）在表5-1和5-2中给出。这两个表及图5-2和5-3还分别给出了对每个测点上两组极化方式的视电阻率曲线ρ^t和ρ^z按一维模型做形式化解释的结果。

从表5-1中的数据和图5-2可以看出，利用ρ_a^t视电阻率曲线做一维形式化解释得到的ρ_1、ρ_2和h_1参数比较接近于真实的参数

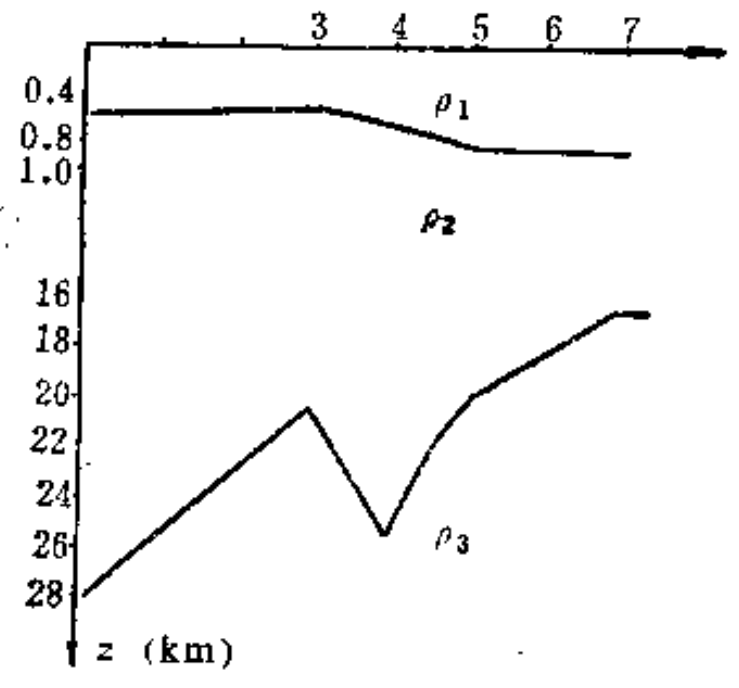


图5-2 对图5-1中模型的理论ρ_a^t曲线进行一维形式化解释的结果

长度单位为公里

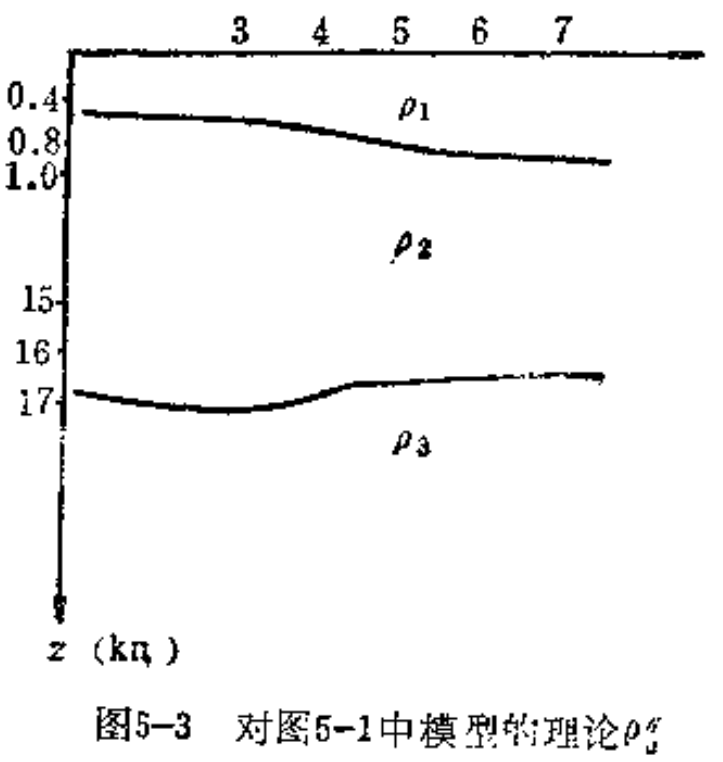


图5-3 对图5-1中模型的理论ρ_a^z曲线进行一维形式化解释的结果

长度单位为公里

值，但第二层的厚度h_2在各测点上的结果变化剧烈，与实际情况差别较大。对ρ_a^z的解释结果也不一致。利用ρ_a^z视电阻率曲线作一维形式化解释得到的h_2和ρ_3值比较一致，而且也比较接近实际的值，尤其是h_2的值，相对用ρ_a^t曲线做一维形式化解释得到的结果来说要好得多了，但是ρ_2值和第一层厚度的解释结果并不那么理想。这些结果表明，与根据大量理论计算所做畸变效应分析得到的结论一致，ρ_a^t视电阻率曲线高频段（对所讨论的模型来说是对应中间高阻层的上升支，即s区间）受畸变影响较小，而ρ_a^z视电阻率曲线的低频段（对应良导基底的下降支，即h区间）受畸变影响较小，因而根据前者做一维形式化解释得到的浅部参数和根据后者获得的深部资料比较接近实际情况。由此可见，对剖面上各测点处两组极化方式的视电阻率曲线做一维形式化解释后，综合其结果，并利用定性解释获得的概念，

可以确定二维模型的类型，并提供出可用的初始模型参数。

表 5-1　理论$\rho_s^{\perp}$数据一维形式化解释结果

参数值 \ y(i) km	0.00	3.00	4.00	4.25	4.5	5.00	7.00	15.00	50.00
h_1(km)	0.51	0.447	0.587	0.611	0.661	0.747	0.871	0.9	0.9
h_2(km)	28.104	20.499	25.019	23.992	22.146	19.605	16.567	16.08	16.08
ρ_1(Ω·m)	1.013	0.955	1.015	1.016	1.016	1.015	1.0115	1.012	1.012
ρ_2(Ω·m)	0.63×10^{12}	137.790	437.760	366.950	304.810	362.820	3540.5	1.79×10^4	1.82×10^4
ρ_3(Ω·m)	0.012	5.065	0.072	0.02	0.018	0.024	0.0724	0.06	0.06

表 5-2　理论$\rho_s^{''}$数据一维形式化解释结果

参数值 \ y(i) km	0.00	3.00	4.00	4.25	4.5	5.00	7.00	15.00	50.00
h_1(km)	0.468	0.504	0.611	0.630	0.658	0.707	0.787	0.87	0.868
h_2(km)	16.733	17.009	16.706	16.592	16.512	16.378	16.212	16.50	16.573
ρ_1(Ω·m)	0.973	0.981	0.985	0.985	0.984	0.984	0.984	0.985	0.986
ρ_2(Ω·m)	35.841	35.040	50.834	57.11	69.921	125.750	2.014×10^6	9.114×10^6	756.77
ρ_3(Ω·m)	0.045	0.019	0.034	0.042	0.045	0.051	0.063	0.039	0.035

第二节　应用样条函数插值的快速二维正反演方法

第三章已讨论过一维模型的反演方法。在二维问题中，涉及的实测视电阻率值ρ_{si}和模型视电阻率值ρ_{ci}已不只是一个测点上的，而是沿剖面所有测点上各频率点处两个极化方式的视电阻率值的排列。这种排列一旦形成后，二维问题的反演就与一维反演过程一样了。

在反演迭代过程中，每迭代一次，对修改后的模型参数就要计算一次模型视电阻率值ρ_{ci}及其对各模型参数λ_j的偏导数 $\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(\rho_{ci})$。在二维问题中，沿剖面上的视电阻率值是用数值方法做近似计算求出的，因而计算量较大，若再用差商代替偏导数，则计算量将成倍地增加。所以，必须设法提高求解ρ_{ci}及 $\frac{\partial\rho_{ci}}{\partial\lambda_j}$ 的速度。

1978年佩尔顿等人在电阻率法和激发极化法二维正、反演问题中提出了以针对一定模型类型和参数系列计算出的视电阻率值为基本数据，利用三次样条插值实现快速正演的方法。将这种方法引入到大地电磁测深资料的二维反演工作中，给出了“快速反演”方法。即对一定的理论模型计算出基本的视电阻率数据，并通过多变量（对应于待修改的模型参数）的三次样条插值求出对应修改后参数的模型数据，代替迭代过程中用有限元法进行计算，同时还可求出模型数据相对修改参数的偏导数。这种大地电磁测深二维反演方法的主要步骤为：

①根据对一条剖面上实测数据的定性分析和一维形式化解释的结果确定出二维构造形态的基本类型，利用各种已有资料限制模型反演参数的个数，并确定出它们的变化范围。

②将模型反演参数的整个变化范围做均匀地划分，并按这些划分节点坐标值的不同排列，组合成一组模型系列，利用有限单元法（或其他有效的数值计算方法）计算出其中每个模型在地面的大地电磁响应函数值（视电阻率等），把这些节点坐标值的各种组合及相应的响应函数值作为基本数据组存放。

③通过①中对实测数据所做的分析，确定初始模型参数。

④根据基本数据组做三次样条函数插值，求出对应修改后模型参数的大地电磁响应函数值及其偏导数，形成下一次迭代中待解的法方程组。

⑤利用马夸特或改进的广义逆反演方法求解。

上述算法的整个过程见图5-4，其相应的程序为：

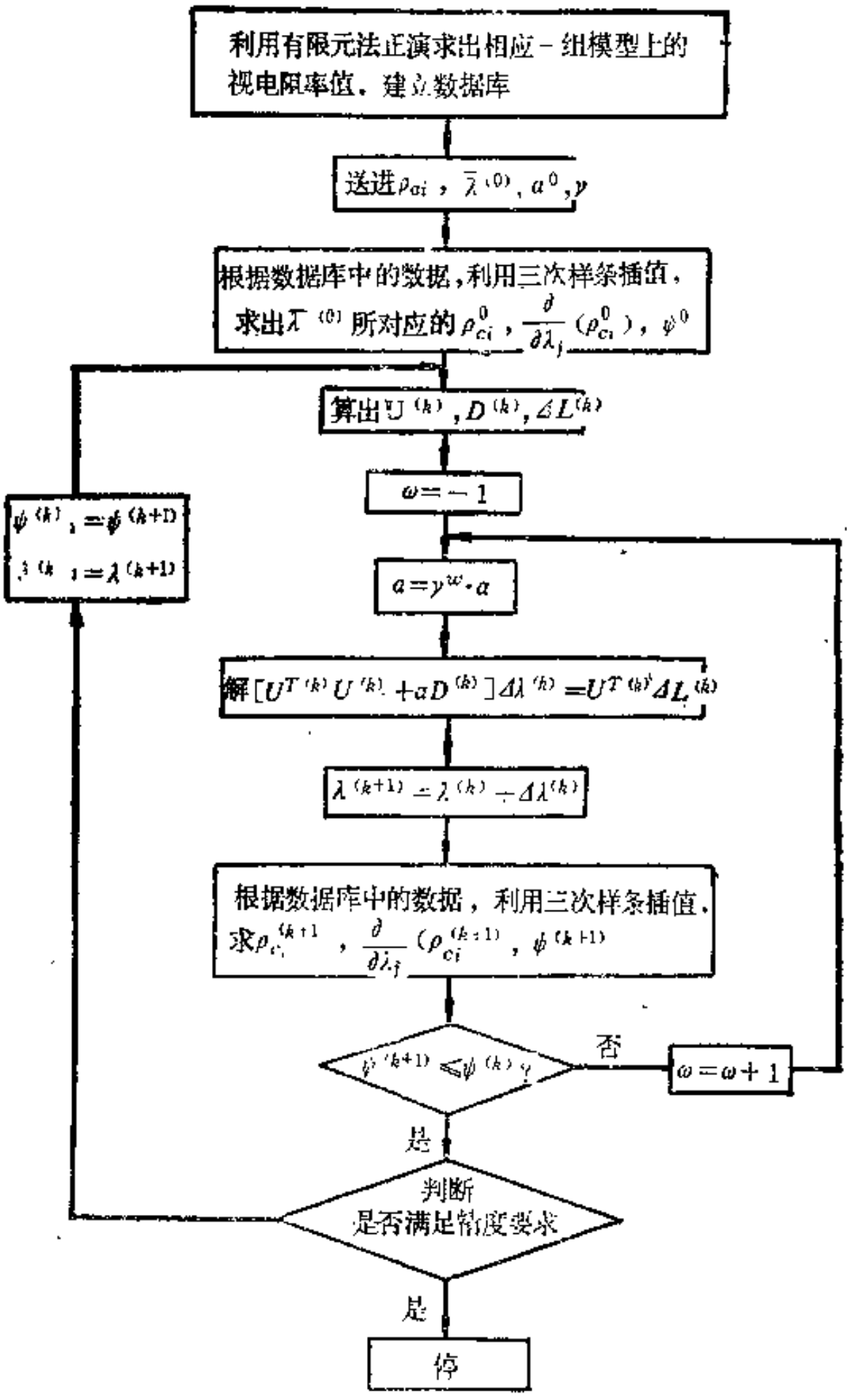


图 5-4　样条插值二维反演方法流程图

程序名　INVTWD

(1) 程序功能

根据预先建立的基本数据库，利用三维三次样条函数插值求解迭代反演过程中修改后模型参数的大地电磁响应函数值及其对参数的偏导数值，形成法方程组，并利用马夸特法进行反演。

(2) 需要已知的参数、简单变量和数组

NNN　待反演的剖面个数。

MB　控制先反演参数的简单变量。

M1，M2，M3　分别为三个反演参数节点值的个数。

MJ　为M1，M2，M3中最大的值。

LC　为TT的下标。

M　被反演的参数个数。

N　剖面上测点的个数。

L　每条实测曲线上的实测数据个数。

F　实测数据的总个数。

MI　若实测数据为一个极化方向的，其值为 $M1\times M2\times M3$，若为二个极化方向的，则其值为 $2\times M1\times M2\times M3$。

TT　画实测的和拟合的视电阻率曲线时所用周期值构成的数组。

RA　存放实测数据的数组。

RH　存放初始模型参数值，最终存放反演结果。

HR　存放三个参数的节点值，其顺序与正演大循环程序中的一致。

(3) 子程序说明

CALL　SP1　利用简化的三维三次样条插值方法从基本数据库中求出对应于修改后模型参数的大地电磁响应值及其对参数的偏导数值，以便形成雅可比矩阵。

CALL　SP2　做一维三次样条插值，进行单向逼近，实现多维样条函数插值。

(4) 程序

```
      PROGRAM INVTWD(INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT,TAPE3)
      REAL A(3,4),DRH(3),DR(3),B(3,4),MH(3),HR(3,7),RR(204,1,1),
     $     RC(322),RA(322),S(1),S1(1),S2(1),TT(51),AMP(51),RAMP(51),
     $     PP(7,7),PF(7,7),PFF(7),PF1(7),A1(7),B1(7),RH(3),P(322,3),
     $     R(322),X(2,7),T(31),HR1(7,3),Y1(14),Y(30),H1(31)
      REAL MAX
      INTEGER F
      COMMON MB
      EQUIVALENCE (AMP,R),(RAMP,R(52))
      READ(5,10) NNN,MB
10    FORMAT(2I3)
20    READ(5,30) F,M,M1,M2,M3,MT,MJ,N,L,LC
30    FORMAT(10I7)
      WRITE(6,35) F,M,M1,M2,M3
35    FORMAT(3X,*F=*I4,3X,*M=*I4,3X,*M1=*I4,3X,*M2=*I4,3X,*M3=*I4)
      WRITE(6,36)M1,MJ,N,L,LC
36    FORMAT(3X,*M1=*I4,3X,*MJ=*I4,3X,*N=*I4,3X,*L=*I5,3X,*LC=*I5)
```

```
      READ(5,55) (TT(I),I=1,LC)
55    FORMAT(8F10.0)
      WRITE(6,54) TT
54    FORMAT(//10(2X,F10.4))
      READ(5,56) (RA(I),I=1,F)
56    FORMAT(8F10.3)
      WRITE(6,57) (RA(I),I=1,F)
57    FORMAT(3X,3HRA=,/10(2X,F11.4))
      EP1=10.
      READ(5,60) ((HR(I,J),J=1,MJ),I=1,M)
60    FORMAT(8F10.0)
      DO 61 J=1,M1
61    HR(1,J)=ALOG10(HR(1,J))
      WRITE(6,65) ((HR(I,J),J=1,MJ),I=1,M)
65    FORMAT(3X,3HHR=,10F10.3)
70    MM=0
      R1=1.
      D=10.
      U=10.
      R1=1.
      KW=1
      W2=10.
      READ(5,80) (RH(I),I=1,M)
80    FORMAT(7F10.3)
      RH(1)=ALOG10(RH(1))
90    WRITE(6,100) (RH(I),I=1,M)
100   FORMAT(2X,3HRH=,8F12.4)
      MM=MM+1
      WRITE(6,101) MM
101   FORMAT(3X,5HINVTD,4X,3HMM=,I7)
      IF(MM.GT.7.OR.W2.LT.0.0001) 110,170
110   NNN=NNN-1
112   DO 111 K=1,LC
      AMP(K)=0.
111   RAMP(K)=0.
      DO 160 J=1,N
      IS=J
      DO 160 I=1,1
      ID=I
      DO 120 K=1,L
      KK=1*(J-1)*L+(I-1)*L
      KA=2*K
      AMP(KA)=PC(K+KK)
120   RAMP(KA)=RA(K+KK)
      WRITE(6,131) ID,IS,L
130   FORMAT(8X,3I14)
      WRITE(6,131) RAMP,AMP
131   FORMAT(2X,*RAMP,AMP*,/10(2X,F10.3))
      CALL MT1(TT,RAMP,AMP,LC)
160   CONTINUE
      IF(MM.EQ.1) GO TO 190
      Q=RH(1)
      RH(1)=10.**Q
      WRITE(6,161) RH
161   FORMAT(3X,*RH=*,2F16.5)
      IF(NNN.EQ.0) STOP
      GO TO 20
170   CONTINUE
      DO 180 I=1,M
180   RHH(I)=RH(I)
      W1=0.
      IF(MM.GT.1) GO TO 230
```

```
      CALL SP1(RR,RC,P,RH,X,HR,M,MI,MJ,N,L,F,M1,M2,M3,A1,
     $     B1,S,S1,S2,PP,PF,PFF,PF1,HR1,Y1,Y,T)
      IF(MM.EQ.1) GO TO 112
190   DO 200 I=1,F
      RC(I)=RC(I)/R1
      R(I)=ALOG(RA(I)/RC(I))
200   W1=W1+R(I)**2
      W1=W1/F
      IF(MM.EQ.1) 210,230
210   WRITE(6,220) (RC(I),I=1,F)
220   FORMAT(5X,3HRC=/10(2X,F10.3))
      GO TO 241
230   IF(KW.EQ.1) GO TO 240
      GO TO 241
240   W1=W2
241   WRITE(6,250) W1
250   FORMAT(2X,3HW1=,E15.5)
      D=D/U
      MA=M+1
      DO 260 I=1,M
      DO 260 J=1,MA
      A(I,J)=0.
260   B(I,J)=0.
      DO 270 I=1,M
      DO 270 J=1,M
      DO 270 K=1,F
270   B(I,J)=B(I,J)+P(K,J)*P(K,I)/RC(K)**2
      DO 280 K=1,M
      DO 280 I=1,F
280   B(K,M+1)=B(K,M+1)+R(I)*P(I,K)/RC(I)
290   DO 300 I=1,M
      DO 300 J=1,MA
300   A(I,J)=B(I,J)
      DO 310 I=1,M
310   A(I,I)=A(I,I)+D/RHH(I)
      DO 400 K=1,M
      MAX=0.
      DO 330 I=K,M
      DO 330 J=1,M
      IF(ABS(MAX).LT.ABS(A(I,J))) 320,330
320   MAX=A(I,J)
      IK=I  $  JK=J
330   CONTINUE
      IF(MAX.EQ.0.) 340,360
340   WRITE(6,350) K
350   FORMAT(I4)
      NNN=NNN-1
      IF(NNN.EQ.0) STOP
      GO TO 20
360   CONTINUE
      DO 370 J=1,MA
      Q=A(IK,J)/MAX
      A(IK,J)=A(K,J)
370   A(K,J)=Q
      DO 390 I=1,M
      IF(I.EQ.K) GO TO 390
      Q=-A(I,JK)
      DO 380 J=1,MA
380   A(I,J)=A(I,J)+Q*A(K,J)
390   CONTINUE
400   CONTINUE
      DO 410 J=1,M
```

```
      DO 410 I=1,M
      IF(A(I,J).LT.0.5) GO TO 410
      DRH(J)=A(I,M+1)
410   CONTINUE
      DO 470 I=1,M
      IF(DRH(I).LE.(-RHH(I))) 420,470
420   WRITE(6,430) I,DRH(I)
430   FORMAT(2X,I7,F10.3)
      D=U*D
      IF(D.GE.1.E+100) 440,460
440   WRITE(6,450) D
450   FORMAT(2X,E15.5)
      NNN=NNN-1
      IF(NNN.EQ.0) STOP
      GO TO 20
460   GO TO 290
470   CONTINUE
      DO 480 J=1,M
480   RH(J)=RHH(J)+DRH(J)
      WRITE(6,481) (RH(J),J=1,M)
      WRITE(6,482) (DRH(J),J=1,M)
481   FORMAT(3X,*RH(J)=*,3E15.5)
482   FORMAT(3X,*DRH(J)=*,4E15.4)
      DO 488 J=1,M
      MZ=M3
      IF(J.EQ.1) MZ=M1
      IF(J.EQ.2) MZ=M2
      IF(RH(J).LT.HR(J,1)) GO TO 483
      IF(RH(J).GT.HR(J,MZ)) 484,488
483   RH(J)=HR(J,1)
      GO TO 488
484   RH(J)=HR(J,MZ)
488   CONTINUE
      WRITE(6,489) M,MA,N,L,F,MI,MJ
489   FORMAT(3X,*M=*,I4,*MA=*,I4,*N=*,I4,*L=*,I4,
     $          *F=*,I4,*MI=*,I4,*MJ=*,I4)
      W2=0.
      CALL SP1(RR,RC,P,RH,X,HR,M,MI,MJ,N,L,F,M1,M2,M3,
     $     A1,B1,S,S1,S2,PP,PF,PFF,PF1,HR1,Y1,Y,T)
      DO 490 I=1,F
      RC(I)=RC(I)/R1
      IF(RC(I).LT.0.01) GO TO 485
      R(I)=ALOG(RA(I)/RC(I))
      GO TO 490
485   WRITE(6,486) I,RC(I)
486   FORMAT(3X,*I=*,I4,*RC(I)=*,F10.4)
      RC(I)=ABS(RC(I))
      R(I)=ALOG(RA(I)/RC(I))
490   W2=W2+R(I)**2
      W2=W2/F
      WRITE(6,500) W2
500   FORMAT(5X,3HW2=,E15.5)
      WRITE(6,510) D
510   FORMAT(5X,2HD=,E15.5)
      EP1=ABS((W2-W1)/W1)
      GO TO (511,512),KW
511   IF(W2.LE.W1) 520,550
512   IF(W2.LE.W1.OR.W2.LE.W3) 520,550
520   WRITE(6,530) (DRH(I),I=1,M)
530   FORMAT(8X,10E10.2)
      WRITE(6,531) KW
531   FORMAT(8X,*KW=*,I9)
      KW=1
```

```
      WRITE(6,540) EP1
540   FORMAT(8X,4HEP1=,E15.5)
      GO TO 90
550   D=D*U
      W3=W2
      IF(D.GT.1.E+25) 560,570
560   IF(W2.GT.W3+0.0001) GO TO 568
565   IF(W2.GT.W1+0.05) GO TO 568
      WRITE(6,566) (DRH(I),I=1,M)
566   FORMAT(3X,10F10.3)
      WRITE(6,567) KW
567   FORMAT(3X,*KW=*,I9)
      KW=2
      GO TO 90
568   NNN=NNN-1
      IF(NNN.EQ.0) STOP
      GO TO 20
570   GO TO 290
      END
      SUBROUTINE SP1(R,RC,P,RH,X,HR,M,MI,MJ,N,L,LF,
     $ M1,M2,M3,A,B,S,S1,S2,PP,PF,PFF,PF1,HR1,Y1,Y,T)
      DIMENSION R(MI),RC(LF),P(LF,M),RH(M),HR(M,MJ),X(2,MJ),
     $ A(MJ),B(MJ),S(1),S1(1),S2(1),PP(MJ,MJ),PF(MJ,MJ),PFF(MJ),
     $ PF1(MJ),T(31),HR1(7,3),Y1(14),Y(30),H1(31)
      COMMON MB
      READ(3) DA,TI,NS,NT,NDH,NAF,NR2,IBT,ICT,IK,NY,ME,(T(L9),L9=1,31),
     $ HR1,(Y1(L9),L9=1,NS),(Y(L9),L9=1,NY),(H1(L9),L9=1,ME),NPD
      WRITE(6,1) MB,M1,M2,M3,LF,MI,MJ,N,L,M
1     FORMAT(2X,*MB=*,I4,*M1=*,I4,*M2=*,I4,*M3=*,I4,*LF=*,I5,
     $          *MI=*,I5,*MJ=*,I5,*N=*,I4,*L=*,I4,*M=*,I4)
      KN=2
      MS=1
      Y12=0
      YN2=0
      DO 400 J2=1,N
      DO 300 I=1,1
      DO 300 J3=1,L
      READ(3) (R(IJK),IJK=1,MI)
      DO 300 J1=1,M
      NC=MI
      NB=M2
      NA=M3
      K1=1
      K2=2
      K3=3
      IF(MB.NE.2) GO TO 10
      NC=M3
      NB=M2
      NA=M1
      K1=3
      K2=2
      K3=1
10    GO TO (20,70,110) J1
20    DO 100 JA=1,NA
      DO 100 JB=1,NB
      T(1)=RH(K1)
      DO 40 JC=1,NC
      IF(MB.NE.2) 22,33
22    KS=M1*M2*(JA-1)+M1*(JB-1)+(I-1)*M1*M2*M3
      K=KS+JC
      GO TO 35
33    KS=(I-1)*M1*M2*M3+JA
      K=KS+M1*M2*(JC-1)+M1*(JB-1)
```

```
35      X(1,JC)=HR(K1,JC)
40      X(2,JC)=R(K)
        NS=NC
        CALL SP2(NS,MS,X,T,A,B,S,S1,S2,Y12,YN2,KN)
        IF(S(MS).GT.0.4) GO TO 58
        WRITE(6,56) J1,J3,J2,I
56      FORMAT(3X,*JJ=*,I4,*J3=*,I4,*J2=*,I4,*I=*,I5)
        WRITE(6,57) ((X(K,J),J=1,MJ),K=1,2)
        WRITE(6,57) S(MS),T(MS)
57      FORMAT(3X,12F10.4)
        S(MS)=ABS(S(MS))
58      IF(NA.EQ.1.AND.NB.EQ.1) GO TO 250
        IF(NA.EQ.1) GO TO 59
        IF(NB.EQ.1) GO TO 60
        PP(JA,JB)=S(MS)
        PF(JA,JB)=S1(MS)
        GO TO 100
59      PP(NA,JB)=S(MS)
        PF(NA,JB)=S1(MS)
        GO TO 100
60      PP(JA,NB)=S(MS)
        PF(JA,NB)=S1(MS)
100     CONTINUE
        GO TO 280
70      IF(NB.EQ.1) GO TO 110
        DO 90 JA=1,NA
        T(1)=RH(K2)
        DO 80 JB=1,NB
        IF(MB.NE.2) 71,72
71      K=JB
        X(1,JB)=HR(K2,K)
        X(2,JB)=PP(JA,K)
        GO TO 80
72      X(1,JB)=HR(K2,JB)
72      X(2,JB)=PP(JA,JB)
80      CONTINUE
        NS=NB
        CALL SP2(NS,MS,X,T,A,B,S,S1,S2,Y12,YN2,KN)
        IF(S(MS).GT.0.4) GO TO 85
        WRITE(6,56) J1,J3,J2,I
        WRITE(6,57) ((X(K,J),J=1,MJ),K=1,2)
        WRITE(6,57) S(MS),T(MS)
        S(MS)=ABS(S(MS))
85      IF(NA.EQ.1) GO TO 250
        PP(JA,1)=S(MS)
        PFF(JA)=S1(MS)
90      CONTINUE
        GO TO 280
110     T(1)=RH(K3)
        IF(MB.EQ.2) GO TO 130
        DO 120 JA=1,NA
        K=JA
        X(1,JA)=HR(K3,K)
120     X(2,JA)=PP(K,1)
        GO TO 140
130     DO 135 JA=1,NA
        X(1,JA)=HR(K3,JA)
135     X(2,JA)=PP(JA,1)
140     CONTINUE
        NS=NA
        CALL SP2(NS,MS,X,T,A,B,S,S1,S2,Y12,YN2,KN)
        IF(S(MS).GT.0.4) GO TO 69
        WRITE(6,67) JJ,J3,J2,I
```

```
67    FORMAT(3X,*SJJ=*,I4,*SJ3=*,I4,*SJ2=*,I4,*SJ1=*,I4)
      WRITE(6,68) ((X(K,J),J=1,MJ),K=1,2)
      WRITE(6,68) S(MS),T(MS)
68    FORMAT(3X,12F9.4)
      S(MS)=ABS(S(MS))
69    JJ=J3+1*(J2-1)*L+(I-1)*L
      P(JJ,J1)=S1(MS)
      RC(JJ)=S(MS)
      IF(N2.EQ.2) GO TO 145
      DO 143 JK=1,NA
      K=JK
143   X(2,JK)=PFF(K)
      GO TO 151
145   DO 150 JK=1,NA
150   X(2,JK)=PFF(JK)
151   CONTINUE

      CALL SP2(NS,MS,X,T,A,B,S,S1,S2,Y12,YN2,KN)
      P(JJ,J1-1)=S(MS)
      T(1)=RH(K2)
      DO 160 JH=1,NA
      DO 153 JK=1,NB
      X(1,JK)=HR(K2,JK)
153   X(2,JK)=PF(JH,JK)
      NS=NB
      CALL SP2(NS,MS,X,T,A,B,S,S1,S2,Y12,YN2,KN)
      PF1(JH)=S(MS)
160   CONTINUE
      T(1)=RH(K3)
      DO 170 JK=1,NA
      X(1,JK)=HR(K3,JK)
170   X(2,JK)=PF1(JK)
      NS=NA
      CALL SP2(NS,MS,X,T,A,B,S,S1,S2,Y12,YN2,KN)
      P(JJ,J1-2)=S(MS)
      GO TO 280
250   JJ=J3+1*(J2-1)*L+(I-1)*L
      P(JJ,J1)=S1(MS)
      RC(JJ)=S(MS)
280   CONTINUE
300   CONTINUE
400   CONTINUE
      REWIND 3
      RETURN
      END
```

正如前面提到过的，要通过插值来求视电阻率及其导数，所以不仅要求插值函数本身在节点处连续，而且要求其一阶导数也在节点处连续。三次样条函数能满足这两个条件。一般常用的三次样条插值函数多限于单个变量的，即一维三次样条插值函数。下面将要讨论如何在一维三次样条函数的基础上通过做形式上的推广求出二维和三维的三次样条插值函数。

一、 基本数据库的建立

建立数据库，要先计算出基本数据，即在确定了地电模型类型的基础上，确定要反演的参数及其变化范围，在这些范围内取若干个按一定间隔变化的参数值，最好从小到大按顺序排列。然后对这几组参数的组合一一进行正演计算，求出地表的响应函数值，按模型参数变化的顺序排列并存放，以便在插值过程中使用。基本数据的计算最好是一次完成或用尽量少的次数，所以在计算程序中应包括有三个参数依次循环变化的过程，形成一个同时计算两种

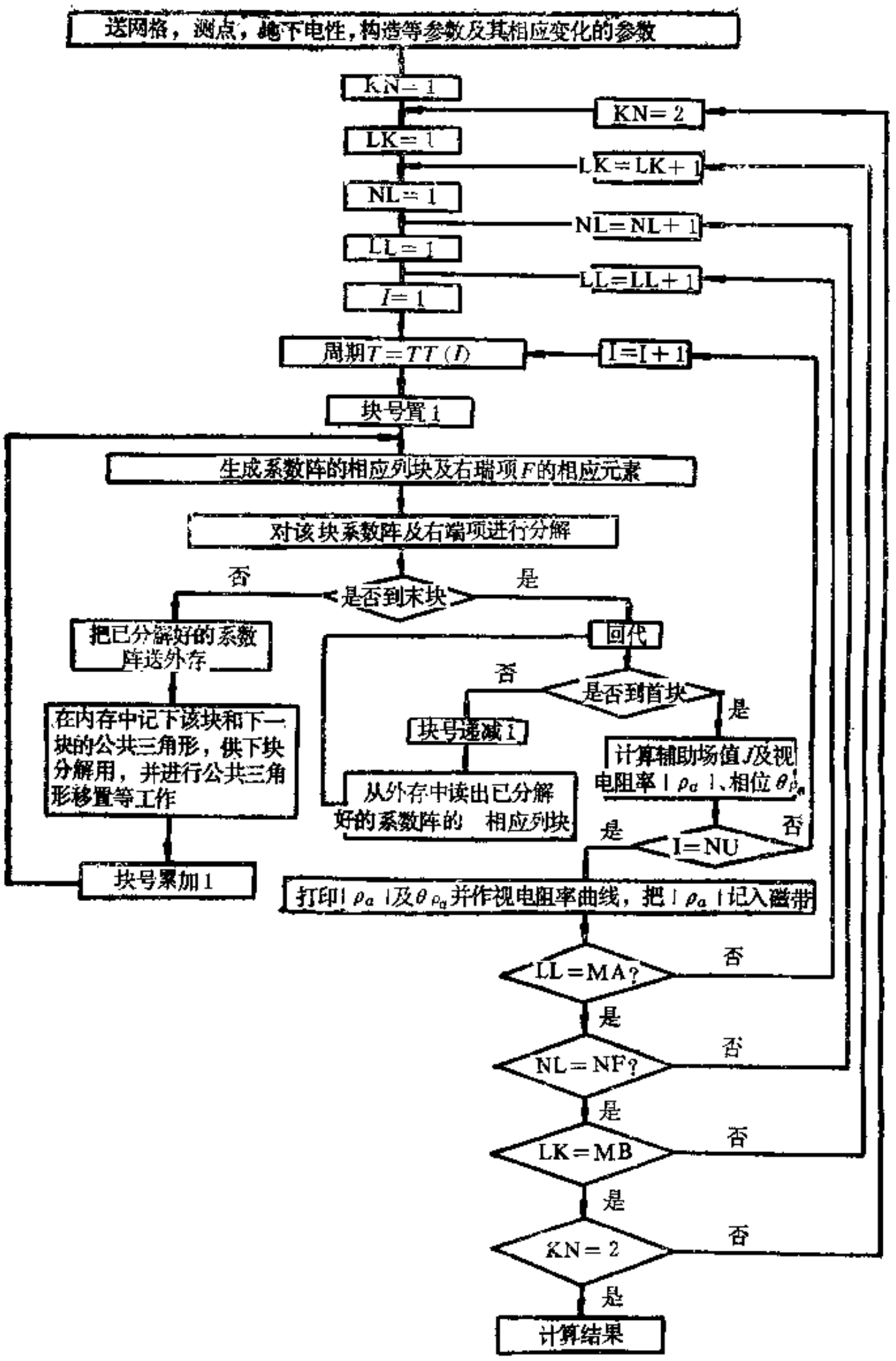
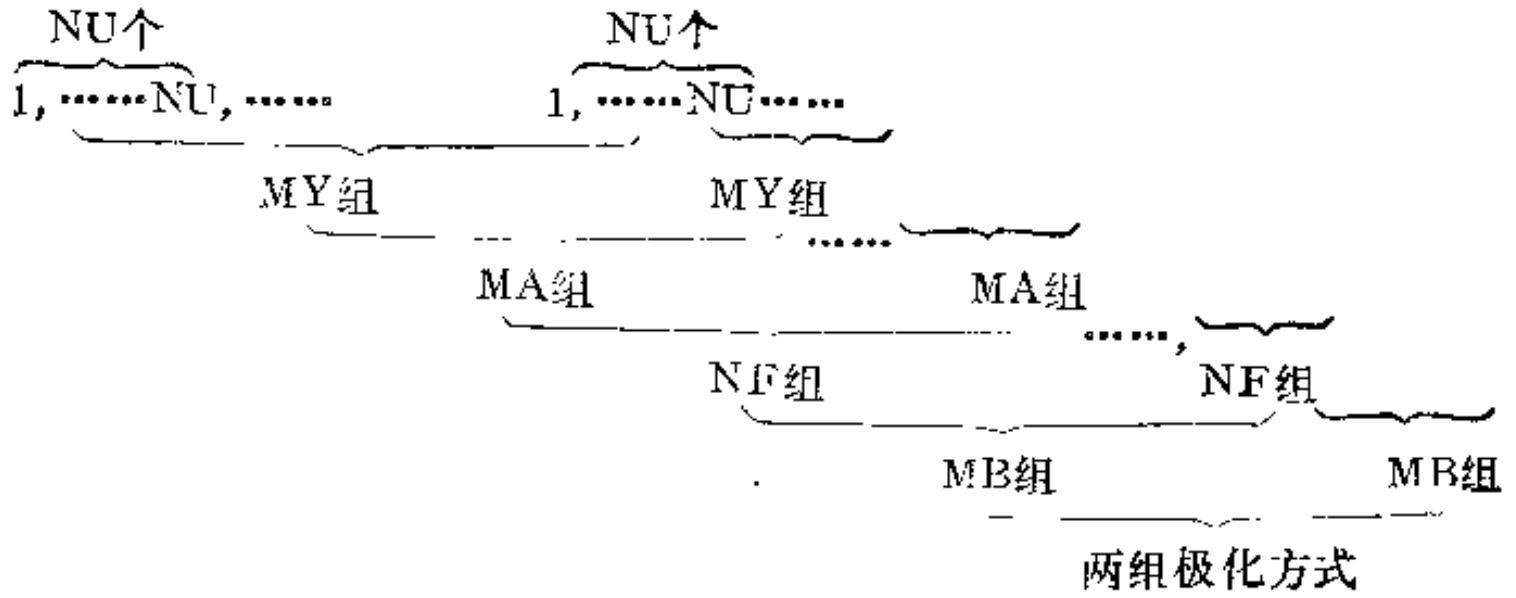


图 5-5 建立数据库程序的流程图

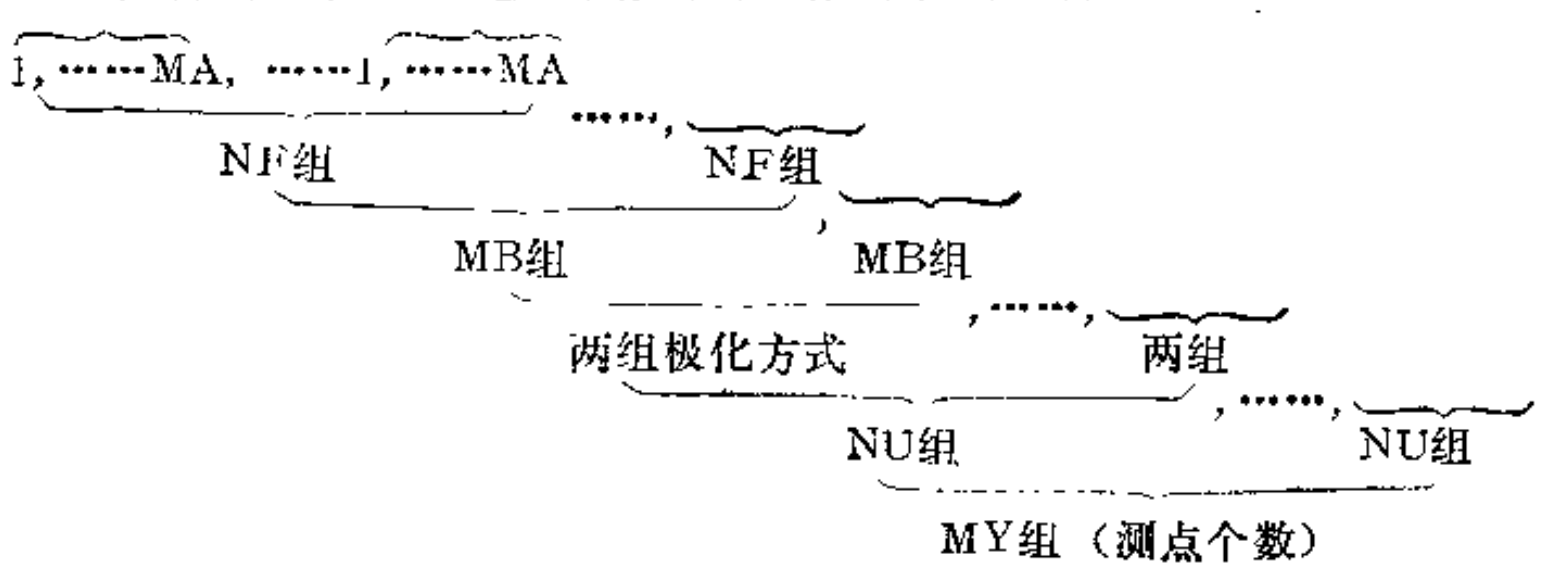
极化方式，多个参数循环变化的地表视电阻率和相位值的大循环程序(流程图示于图5-5)。

用上述程序每次计算出的是与频率和测点有关的二维数据组，为了便于插值，数据组应与参数变化有关。考虑到这一点，要用一个三维 数组 R（I，J，K），下标依 次对应于参数、频率和测点，即参数变化应是最快的。在参数个数和参数变化次数较少的情况下，只使用赛伯720计算 机内存存放 R（I，J，K）是能 满足 要求的。否则，有必要 利用计

算机的其他存贮方式，如磁盘、磁带等，建立一个比较实用的数据库，这就需要解决数据存贮格式转换的问题。因为每次计算后，记入磁带的是按一维格式存放的上述三维数组的数据，总的排列顺序是：



而所需要的一维存贮格式是按上述三维数组的下标顺序记入的，即



为此编制了相应的格式转换程序：

程序名　THREH

(1) 程序功能

利用有限元法计算对称的、任意形状的二维地电模型或较规则的二维地电模型的大地电磁响应。当均匀地划分整个模型参数的变化区间，并按这些节点坐标值组合成一组变化的模型时，可以连续地进行正演循环，计算出这些模型在地表的响应值，并把这些节点上的参数坐标值和地表的响应值作为基本数据库存放在磁带上。本程序采用矩形内剖分成三角形的网格和一次插值基函数。

(2) 需要已知的参数和数组

HR　存放三个参数的节点坐标值的数组。

YY　存放网格节点的横向坐标值的数组。

Y　存放网格横向间距的数组。

H　存放网格纵向间距的数组。

ALF　存放地层倾角α节点值的数组。

OL、OM、ON　分别为第一、二、三层的导电率。

MB　参数Δh的节点个数。

NF　参数α的节点个数。

MA　参数ρ_2的节点个数。

MY　测点个数。

KN　控制极化方式的参数。

MJ　为 KN、MA、NF MB 四者之积。

ME　为网格纵向间隔的总数。

N　为网格横向间隔的总数。

NU　计算周期的总数。

MT　为起始计算周期的控制数。

NV　为选择计算周期的跳跃间隔数。

TT　计算周期的数组。

Y1　剖面上测点坐标值的数组。

(3) 子程序说明

CALL COE　计算总刚度系数矩阵及已知项矩阵。采用变带宽存储法将矩阵的元素分块存储成一维数组。

(4) 程序

```
      PROGRAM THREH(INPUT,OUTPUT,TAPE5=OUTPUT,TAPE2=INPUT,TAPE3,TAPE6)
      DIMENSION XA(31),XP(31),AMP(14,31),TT(31),HR(7,3)
      DIMENSION YY(31),Y1(14),U(60,31),H(31),H1(31),Y(30),ALF(7)
     $          ,NA(287),LAD(992),U2(60,31)
      COMPLEX A(7657),B(287),UT(992),VT(31),EJ(15),HV(15)
      COMPLEX G,R1,R9
      COMMON A
      COMMON /1/NU  /2/MY  /3/ MJ
      COMMON       /ECS2/AEC(65536)
      LEVEL3,AEC
      EQUIVALENCE(XP(1),U(1,9)),(EJ(1),B(1)),(HV(1),B(26)),(VT(1),B(60))
*THE ARRAYS DIMENSIONS ARE DETERMINED BY XA(NU),XP(NU),YY(N1),
*Y1(MY),Y(N),U(M,N),H(M),NA(LNA),LAD(NN),AMP(MY,NU),PHASE(MY,NU),
*AND A(LV),B(LBB),UT(NN),VT(N1),AM(N1,2),EJ(MY),HV(MY)
      DATA(TT=0.000794281,0.0012589,0.0019952,0.00316255,0.00501253,
     $       0.00794281,
     $  0.012589,0.019952,.0316255,.0501253.,.0794281,.125897,
     $.199521,.316255,.501253,.794281,1.25897,1.9952,3.16255,5.01253,
     $7.94281,12.5897,19.952,31.6255,50.1253,79.4281,125.897,199.52,
     $  316.255,501.253,794.281)
      DATA(HR=1.,3.,5.,7.,9.,11.,13.,740.,2.5,3.35,4.2,4.85,5.3,
     $     5.625,5.825)
      DATA(Y1=1.1,1.6,4.3,5.4,8.7,9.7,11.4,11.8,14.,16.5,18.,18.7,
     $     21.6,26.5)
      DATA(H1=20.,5.,1.5,0.4,0.1,0.05,
     $       .02,0.03,0.21,0.21,0.03,0.01,0.025,0.05,
     $      0.2,0.375,0.65,0.85,0.85,0.65,0.25,0.2,0.6,0.2,
     $      0.2,0.6,0.2,0.2,0.6,5.)
      DATA(YY=0.0,1.25,2.,2.4,2.46,2.48,2.5,13*0.0,3*0.0,15.5,
     $      16.,17.,19.,19.5,21.,25.,100)
      OL=1/27.
      ONZ=1/1.  $  ONX=1/25.   $   ONY=1/27.19
      MB=7
      NP=6
      MA=7
      MJ=294
      MY=14
      NU=23
      MT=6
      NV=0
      ME=30
      MEX=6
      ME1=6 $ ME2=2 $ ME3=7 $ ME4=3 $ ME5=3
      N=30
      NE1=6 $ NE2=13 $ NE3=4 $ NE4=4
```

```
      N1=N+1
      N5=2*N
      BA=3.1415926535
      DMU=4.*BA*1.E-7
      DO 26 J=1,NF
      ALF(J)=3.*BA/36.+2.*(J-1)*BA/36.
26    HR(J,2)=ALF(J)
      WRITE(5,5)((HR(I,J),I=1,7),J=1,3)
5     FORMAT(3X,8HHR(I,J)=,8F10.3)
      WRITE(5,27)ALF
27    FORMAT(//10X,*ELEMENT,ALF(J)=*//(3X,8E15.8))
      DO 31 I=1,N1
31    YY(I)=YY(I)*1000.
      DO 32 I=1,MY
32    Y1(I)=Y1(I)*1000.
      WRITE(5,38)Y1
38    FORMAT(//10X,*INITIAL PARAMETERS Y1*///(3X,10F13.2))
      L1=0
      DO 4000 KN=2,2
      IF(KN.EQ.1)GO TO 15
      ON=ONZ  $  GO TO 16
15    ON=ONX
16    CONTINUE
      IF(KN.NE.1)GO TO 101
      M=ME
      B2=-1
      MX=MEX
      R2=0.
      DO 21 J=1,M
21    H(J)=H1(J)*1000
      WRITE(5,22) H
22    FORMAT(3X,*H=*//(3X,8F10.3))
      DO 1 J=1,N5
      DO 1 I=1,MX
      U(J,I)=0.
1     U2(J,I)=0.
      GO TO 103
101   M=ME-MEX
      MX=0
      B2=1.E15
      R2=1.E15
      DO 23 J=1,M
23    H(J)=H1(MEX+J)*1000.
      WRITE(5,24)H
24    FORMAT(7X,8H(KN=1)H=,//(3X,10F10.4))
103   M1=M+1
      N2=N+2
      N3=N+3
      N4=2*N1+1
      MX1=MX*N1
      NN=M1*N1
      INX=7500
      LM=INX/(N3+N1)
      IF(M1.LT.LM) LM=M1
      LZ=M1/LM
      LNN=(N1*N1+1)/2+N1/2
      LU=LM*N3*N1
      LV=LU+LNN
      LNA=LM*N1+N2
      LBB=LNA-1
      LMD=LM
      IF(M1.GT.LM*LZ) LZ=LZ+1
```

```
      LY=LZ-1
      WRITE(5,41)INX,LZ,LM,LV,LNA,LBB,LNN,MX,MX1
41    FORMAT(//11X,*INX LZ LM LV LNA LBB LNN MX MX1*
     $              /5X,I9,I5,I6,I9,I7,4I6)
      DO 3000 LK=7,7
      I1=MX+1
      I2=MX+MEI
      I3=I2+1
      I4=I2+ME2-(LK-1)
      I5=I2+ME2+ME3+ME4+ME5+1
      I6=I2+ME2+1-(LK-1)
      I7=I5-1
      I8=I2+ME2+ME3+1
      I9=I2+ME2+ME3+ME4
      I10=I9+1
      I11=I8-1
      J1=NE1+1
      J2=NE1+NE2+1
      J3=(NE1+NE2+NE3)*2
      J4=J3+1
      J5=(J3+NE4)*2
      J6=J5+1
      DO 2222 NL=1,1
      ZH=0
      IF(KN.NE.1) GOTO 49
      DO 48 J=J1,J2
      DZ=TAN(ALF(NL))
      KK=J-(J1-1)+I4
      ZH=ZH+H(KK)
48    YY(J)=YY(J1-1)+DZ*ZH
      GO TO 53
49    DO 50 J=J1,J2
      DZ=TAN(ALF(NL))
      KK=J-(J1-1)+I4
      ZH=ZH+H(KK)
50    YY(J)=YY(J1-1)+DZ*ZH
53    DD=SQRT((YY(J2)-YY(J2-1))**2)
      DLTYY=(YY(J2+NE3)-YY(J2))/2
      IF(NL.EQ.6) GO TO 51
      YY(J2+1)=YY(J2)+500.
      YY(J2+3)=YY(J2+NE3)-500.
      GO TO 52
51    YY(J2+1)=YY(J2)+50.
      YY(J2+3)=YY(J2+NE3)-50.
52    YY(J2+2)=YY(J2)+DLTYY
      DO 35 J=1,N
35    Y(J)=SQRT((YY(J+1)-YY(J))**2)
      WRITE(6,34)
34    FORMAT(*1*,/,20X,*RESULT*)
      WRITE(5,37)YY
37    FORMAT(//10X,*INITIAL PARAMETERS YY*///(3X,10F13.2))
      WRITE(5,40)Y
40    FORMAT(//10X,*ELEMENT WIDTHS(Y)*///(3X,10F13.2))
      WRITE(5,42)ALF(NL)
42    FORMAT(//8X,*ALF(NL)=*,F20.8)
      DO 2000 LL=2,2
      LI=LI+1
      OM=1/HR(LL,1)
      DO 10 J=1,NS
      DO 2  I=I1,I2
      U2(J,I)=0L
2     U(J,I)=0L
```

```
      DO 3 I=I3,I4
      U2(J,I)=0M
3     U(J,I)=0M
      DO 4 I=I5,M
      U2(J,I)=0NY
4     U(J,I)=0N
10    CONTINUE
      DO 20 I=I6,I7
      NZ=2*NE1+2*(I-I6)+1
      DO 6 J=1,NZ
      U2(J,I)=0NY
6     U(J,I)=0N
      NZ1=NZ+1
      DO 7 J=NZ1,J3
      U2(J,I)=0M
7     U(J,I)=0M
20    CONTINUE
      DO 13 I=I6,I11
      DO 13 J=J4,N5
      U2(J,I)=0M
13    U(J,I)=0M
      DO 11 I=I8,I9
      DO 8  J=J4,J5
      U2(J,I)=0M
8     U(J,I)=0M
      DO 9  J=J6,J5
      U2(J,I)=0NY
9     U(J,I)=0N
11    CONTINUE
      DO 12 I=I10,I7
      DO 12 J=J4,N5
      U2(J,I)=0NY
12    U(J,I)=0N
25    FORMAT(3X,*U(I,J)=*//(2X,13E10.3))
*THE ABOVE ROWS ARE USED FOR INITIAL PARAMETERS OF A MODE
      DO 1009 II=1,NU
      T=TT(MT+II)
      XA(II)=T
      W=2.*BA/T
      IF(KN.NE.1)GO TO 45
      R9=CMPLX(0.,-W*DMU/ONX)
      GOTO 46
45    R9=CMPLX(.0,-W*DMU/ONY)
46    CONTINUE
      R1=1./CSQRT(R9)
      IF(KN.NE.1)R1=CSQRT(R9)
      G=CMPLX(.0,-W*DMU)
      WRITE(5,44)II,T,INX
44    FORMAT(//,20X,*LOOP*,3X,I2,5X,*PERIOD=*,F12.3,8X,*INX=*,I5)
      LM=LND
      DO 500 LX=1,LZ
      LW=(LX-1)*LM
      IF(LX.GT.1)LW=LW-1
      IF(LX.EQ.LZ) LM=M1-(LZ-1)*LM
      CALL COE(A,LV,B,LBB,NA,LNA,H,Y,U,M,N,N1,N2,N3,N4,N5,G,LX,LZ,
     $              LM,L2,R1,R2,B2,LW,KN,U2)
      IF(LX.GT.1)GO TO 100
      L4=L2-1
      DO 60 I=1,L4
60    LAD(I)=NA(I)
      LB=1
      LE=LM*N1
      NB=1
```

```
      NE=LE
      KEX=4
      IF(LZ.EQ.1)KEX=3
      GO TO 200
100   L5=L2-N2
      DO 120 I=1,L5
120   LAD(L4+I)=LAD(L4)+NA(I+N1)-LNN
      L4=L4+L5
      IB=LE+1
      MB=LM*N1
      LE=LE+MB
      NB=N2
      NE=N2+LE-LB
      KEX=4
      IF(LX.EQ.LZ)KEX=3

200   CALL OPTSOL(A,B,NA,1,NS,NE,KEX,LV)
      IF(LZ.NE.1) GO TO 220
      DO 210 I=1,LE
210   UT(I)=B(I)
      GO TO 1000
220   IF(LX.EQ.LZ)GO TO 800
      IF(LX.NE.1)GO TO 250
      LUT=0
      LUT2=NE-N1
      LN1=1
      LAD1=LN1
      LAD2=2*LAD(LE)
      GO TO 260

250   LAD1=2*LAD(LB-1)+1
      LAD2=2*LAD(LE)-LAD1+1
      LN1=LNN+1
      LUT2=MB
260   CALL WRITEC(A(LN1),AEC(LAD1),LAD2)
      NE1=NE-N
      A(1)=A(NA(NE1))
      KK=1
      DO 280 I=2,N1
      N33=N3-I
      K=NA(NE1+I-2)+N33
      DO 280 J=1,I
      KK=KK+1
280   A(KK)=A(K+J)
      DO 285 I=1,LUT2
285   UT(LUT+I)=B(I)
      LUT=LUT+LUT2
      DO 286 I=1,N1
286   B(I)=B(NE-N1+I)
      DO 287 I=N2,NE
287   B(I)=0.
      IF(LX.NE.1) GO TO 500
      NA(1)=1
      DO 289 I=2,N
289   NA(I)=NA(I-1)+I
500   CONTINUE
800   LM=LMD
      MB=LM*N1
      LY1=LY*LM*N1+1
      DO 810 I=LY1,NN
810   UT(I)=B(I-LY1+1+N1)
      DO 900 LW=1,LY
      I=LY-LW+1
```

```
      IF (I.EQ.1)GO TO 930
      K5=M8*(I-1)
      K6=K5+M8
      LN1=N1+1
      K7=2*LAD(K5)+1
      K8=2*LAD(K6)-K7+1
      CALL READEC(A(LN1),AEC(K7),K8)
819   DO 820 J=1,N1
820   B(M8+J)=B(J)
      K51=K5+1-N1
      K61=K6-N1
      DO 830 J=K51,K61
830   B(J-K5+N1)=UT(J)
      NB=N2
      NE=N1+M8
      KEX=0
      DO 915 J=1,N1
915   NA(J)=J
      DO 920 J=1,M8
920   NA(N1+J)=LAD(K5+J)-LAD(K5)+N1
      GO TO 950
930   CONTINUE
      M9=2*LAD(M8)
      CALL READEC(A(1),AEC(1),M9)
      DO 940 J=1,M8
940   NA(J)=LAD(J)
      DO 942 J=1,N1
942   B(M8-N1+J)=B(J)
      M12=M8-N1
      DO 945 J=1,M12
945   B(J)=UT(J)
      NB=1
      NE=M8
      KEX=0
950   CALL OPTSOL(A,B,NA,1,NB,NE,KEX,LV)
      IF (I.EQ.1)  GOTO 970
      M11=M8+N1
      DO 960 J=N2,M11
960   UT(K5+J-N1)=B(J)
      GO TO 980
970   DO 975 J=1,M8
975   UT(J)=B(J)
980   CONTINUE
1000  CONTINUE
      CALL SURFVL(UT,VT,U,H,Y,M,N,N1,N5,W,DMU,MX,MX1,NN)
      CALL MOM(M,N,NN,N1,N5,MY,YY,Y1,U,UT,VT,EJ,HV,G,AMP,Y,
     $                 NU,II,MX1,MX,KN)
      MT=MT+NV
1009  CONTINUE
      MT=MT-NU*NV
      WRITE(5,349) LL,NL,LK,KN
349   FORMAT(3X,3HLL=,I4,3X,3HNL=,I4,3X,3HLK=,I4,3X,3HKN=,I4)
      DO 370 I=1,MY
      WRITE(5,350)I,Y1(I),(AMP(I,J),J=1,NU)
350   FORMAT(//10X,*LOG AMPLITUDE*,5X,*I=*,I2,5X,*Y1(I)=*,F10.2//
     $                 (3X,6E20.8))
370   CONTINUE
      YMAX=AMP(1,1)
      YMIN=AMP(1,1)
      DO 1020 I=1,MY
      DO 1020 J=1,NU
      YI=AMP(I,J)
      IF(YI.GT.YMAX)YMAX=YI
```

```
1020  IF(YI.LT.YMIN)YMIN=YI
      YH=YMAX-YMIN
      DO 1100 I=1,MY
      DO 1050 J=1,NU
      XP(J)=AMP(I,J)
1050  CONTINUE
      WRITE(5,1070)I,Y1(I)
1070  FORMAT(///30X,*APPARENT AMPLITUDE CURVE   I=*,I2,5X,*Y1(I)=*,
     $                F10.2///)
      CALL PPLT(NU,XA,XP,111,1H*,YH,YMIN)
1100  CONTINUE
2000  CONTINUE
2222  CONTINUE
3000  CONTINUE
4000  CONTINUE

      WRITE(6,500)
5000  FORMAT(//,5X,*FINISH*)
      ENDFILE 3
      END

      SUBROUTINE COE(A,LV,B,LBB,NA,LNA,H,Y,U,M,N,N1,N2,N3,N4,N5,G,LX,
     $                    LZ,LM,L2,R1,R2,B2,LW,KN,U2)
      DIMENSION NA(LNA),U(N5,M),H(M),Y(N),U2(N5,M)
      COMPLEX A(LV),B(LBB),G,A11,A21,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,R1,
     $     A12,A13,A22,A23,A24,A25,A26,A14,A15,A16
      LN=0
      DO 2 II=1,N1
2     LN=LN+II
      LN11=LN+1
      IF(LX.GT.1)GO TO 20
      DO 10 II=1,LV
10    A(II)=(.0,.0)
      GO TO 50
20    DO 30 II=LN11,LV
30    A(II)=(.0,.0)
50    L2=N2
      NA(N2)=N2+LN
      LM1=LM
      LN=LN+1
      IF(LX.NE.1)GO TO 100
      DO 55 II=1,LBB
55    B(II)=(.0,.0)
      I=1
      K=1
      DO 80 J=1,N
      IF(KN.EQ.1) GO TO 60
      A11=G*H(I)*Y(J)/12
      A12=Y(J)/(2*H(I)*U2(2*J-1,I))
      A13=H(I)/(2*Y(J)*U(2*J-1,I))
      A14=G*H(I)*Y(J)/12
      A15=Y(J)/(2*H(I)*U2(2*J,I))
      A16=H(I)/(2*Y(J)*U(2*J,I))
      GO TO 65
60    A11=U(2*J-1,I)*H(I)*Y(J)/12
      A12=Y(J)/(2*H(I)*G)
      A13=H(I)/(2*Y(J)*G)
      A14=U(2*J,I)*H(I)*Y(J)/12
      A15=A12
      A16=A13
65    A1=A12+A16+A11+A14
      A2=A14/2-A16
      A3=A15+A16+A14
      A5=-R2*Y(J)/3
```

```
      A6=A5/2
      D=B2*Y(J)/2
      B(J)=B(J)-D
      B(J+1)=-D
      NA(J)=K
      A(K)=A(K)+A1+A5
      A(K+1)=A2+A6
      A(K+2)=A3+A5
80    K=K+2
      LM1=LM-1
      NA(N1)=K
      L2=N2
      NA(L2)=K+N2
      LN=k+1
100   DO 300 K=1,LM1
      I=LW+K
      DO 200 J=1,N
      NA(L2+1)=NA(L2)+N3
      L2=L2+1
      IF(KN.EQ.1)GO TO 110
      A11=G*H(I)*Y(J)/12
      A12=Y(J)/(2*H(I)*U2(2*J-1,I))
      A13=H(I)/(2*Y(J)*U(2*J-1,I))
      A14=A11
      A15=Y(J)/(2*H(I)*U2(2*J,I))
      A16=H(I)/(2*Y(J)*U(2*J,I))
      GO TO 115
110   A11=U(2*J-1,I)*H(I)*Y(J)/12
      A12=Y(J)/(2*H(I)*G)
      A13=H(I)/(2*Y(J)*G)
      A14=U(2*J,I)*H(I)*Y(J)/12
      A15=A12
      A16=A13
115   A1=A11/2-A12
      A2=A11/2+A14/2
      A3=A14/2-A15
      A4=A11+A13+A12
      A5=A11/2-A13
      A6=A11+A13+A14+A15
      IF(LX.NE.LZ)GO TO 120
      IF(K.LT.LM1) GO TO 120
      A7=R1*Y(J)/3
      A8=A7/2
      A9=A7
      GO TO 130
120   IF(KN.EQ.1) GO TO 125
      A21=G*Y(J)*H(I+1)/12
      A22=Y(J)/(2*H(I+1)*U2(2*J-1,I+1))
      A23=H(I+1)/(2*Y(J)*U(2*J-1,I+1))
      A24=A21
      A25=Y(J)/(2*H(I+1)*U2(2*J,I+1))
      A26=H(I+1)/(2*Y(J)*U(2*J,I+1))
      GO TO 126
125   A21=U(2*J-1,I+1)*Y(J)*H(I+1)/12
      A22=Y(J)/(2*H(I+1)*G)
      A23=H(I+1)/(2*Y(J)*G)
      A24=U(2*J,I+1)*Y(J)*H(I+1)/12
      A25=A22
      A26=A23
126   A7=A22+A26+A21+A24
      A8=A24/2-A26
      A9=A24+A25+A26
```

```
130     A(LN)=A(LN)+A1
        A(LN+N1)=A(LN+N1)+A4+A7
        A(LN+N2)=A2
        A(LN+N3)=A3
        A(LN+N4)=A5+A8
        A(LN+N4+1)=A6+A9
        LN=LN+N3
200     CONTINUE
        NA(L2+1)=NA(L2)+N2
        L2=L2+1
        LN=LN+N2
300     CONTINUE
        RETURN
        END
```

二、三维三次样条插值函数

由于多维的三次样条插值函数是一维的在形式上的推广，所以我们必须先对一维三次样条插值函数做一简单的介绍。

设特定的地电模型的某一参数 x 的若干个值为x_j（$j=0,1,\cdots\cdots,n$），对应这些参数值计算出地表上某一测点处大地电磁响应函数在一特定频率点上的相应值分别为y_j。通过这$n+1$个点（x_j, y_j）的曲线$y=f(x)$在$[a,b]$上（$a=x_0<\cdots\cdots<x_n=b$）有二阶连续的导数存在，则在$[a,b]$上可做$f(x)$的样条函数$S(x)$，满足下列条件：

① $S(x_j)=y_j$　　$j=0,1,\cdots\cdots,n$；

② 在$[a,b]$上有一阶及二阶连续导数；

③ 在每个子区间$[x_j,x_{j+1}]$上$S(x)$都是三次多项式。

称$S(x)$为曲线$y=f(x)$的三次样条函数。

取m_j表示$S(x)$在x_j处的导数值，即$S'(x)|_{x_j}=m_j$（$j=0,1,\cdots\cdots,n$），则可利用每个子区间$[x_j,x_{j+1}]$上带导数的三次Hermite插值公式，内插计算出模型参数在区间内任意一点x处时相应的函数值：

$$\begin{aligned}S_3(x)=&\left[\frac{3}{h_j^2}(x_{j+1}-x)^2-\frac{2}{h_j^3}(x_{j+1}-x)^3\right]y_j\\&+\left[\frac{3}{h_j^2}(x-x_j)^2-\frac{2}{h_j^3}(x-x_j)^3\right]y_{j+1}\\&+h_j\left[\frac{1}{h_j^2}(x_{j+1}-x)^2-\frac{1}{h_j^3}(x_{j+1}-x)^3\right]m_j\\&-h_j\left[\frac{1}{h_j^2}(x-x_j)^2-\frac{1}{h_j^3}(x-x_j)^3\right]\cdot m_{j+1}\end{aligned}\qquad(5\text{—}1)$$

式中　$h_j=x_{j+1}-x$；

$x\in[x_j,x_{j+1}]$　　$(j=0,1,\cdots\cdots,n-1)$。

如果取　$t=(x-x_j)/h_j$，则式(5—1)可写成：

$$\begin{aligned}S_3(x)=H_3(x)=&y_jF_0(t)+y_{j+1}F_1(t)\\&+h_j[m_jG_0(t)+m_{j+1}G_1(t)]\end{aligned}\qquad(5\text{—}1)'$$

式中 $F_0(t)=(1-t)^2(1+2t)$；

$F_1(t)=t^2(3-2t)$；

$G_0(t)=t(1-t)^2$；

$G_1(t)=-t^2(1-t)$。

或是写成：

$$[F_0\ F_1\ G_0\ G_1]=[1\ t\ t^2\ t^3]\ \mathbf{M}$$

式中

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\-3&3&-2&-1\\2&2&1&1\end{pmatrix}$$

由于节点x_j处的导数值m_j往往是未知的，因此，必须先求出$m_0,\cdots\cdots m_n$后，才能用式(5—1) 求得$[a,b]$中任一点x处的三次样条函数值。为了求出m_j值，可利用函数$S_3(x)$在样点x_j上具有二阶连续导数的条件，并在边界上给出二阶导数的值（一般令$y_0''=y_n''=0$），于是由式(5—1) 得到下列方程式组：

$$\begin{aligned}
&2m_0+\alpha_0 m_1 &&=\beta_0\\
&(1-\alpha_1)m_0+2m_1+\alpha_1 m_2 &&=\beta_1\\
&\cdots\ \cdots &&\cdots\cdots\\
&&(1-\alpha_{n-1})m_{n-2}+2m_{n-1}+\alpha_{n-1}m_n&=\beta_{n-1}\\
&&(1-\alpha_n)m_{n-1}+2m_n&=\beta_n
\end{aligned}\qquad (5—2)$$

式中 $\alpha_0=1$；　　$\alpha_n=0$；

$$\beta_0=\frac{3}{h_0}(y_1-y_0)；$$

$$\beta_n=\frac{3}{h_{n-1}}(m_n-m_{n-1})；$$

$$\alpha_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}；$$

$$\beta_j=3\left[\frac{1-\alpha_j}{h_{j-1}}(y_j-y_{j-1})+\frac{\alpha_j}{h_j}(y_{j+1}-y_j)\right]$$

$$j=1,2,\cdots\cdots,n-1。$$

式（5—2)是关于$n+1$个未知量$m_0,m_1,\cdots\cdots,m_n$的$n+1$个线性代数方程式。利用正、反两次迭代法可从中求出m_j。

因为对三次样条函数来说，如果被插值函数 $f(x)\in C^k[a,b]$ $(k=1,2,3,4)$则当$h_j\to 0$时，若$S_3(x)$收敛于$f(x)$，则$S_3'(x)$也必收敛于$f'(x)$且

$$S_3(x)-f(x)=0(H^4)$$
$$S_3'(x)-f'(x)=0(H^3)$$
$$S_3''(x)-f''(x)=0(H^2)$$

H是h_j中的最大值。因此，利用三次样条函数求导数比用其他插值方法求数值导数的精度

要高。可以直接通过（5—1）求数值导数，得：

$$S'_s(x) = \frac{6}{h_j^2}\left[\frac{1}{h_j}(x_{j+1}-x)^2 - (x_{j+1}-x)\right]y_j$$

$$+\frac{6}{h_j^2}\left[(x-x_j) - \frac{1}{h_j}(x-x_j)^2\right]y_{j+1}$$

$$+\frac{1}{h_j}\left[\frac{3}{h_j}(x_{j+1}-x)^2 - 2(x_{j+1}-x)\right]m_j$$

$$-\frac{1}{h_j}\left[2(x-x_j) - \frac{3}{h_j}(x-x_j)^2\right]m_{j+1} \qquad (5—3)$$

且有：$f'(x) = S'_s(x)$，　　$f'(x_j) = m_j$

三、三维三次样条插值函数的计算

这里只给出三维三次样条插值函数的计算过程。至于二维三次样条插值函数的推导及计算可做为三维的一种特殊情况来对待。

我们是从由一维三次样条插值函数形式上地推广到三维三次样条插值函数的角度说明三维三次样条插值函数的一般形式及其计算过程，并结合大地电磁测深资料二维反演过程的特点对这种理论上推广的三维三次样条插值函数的计算过程做了简化。

1．分域三维三次Hermite 插值表达式

给定六面立方体网格$\Delta = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

$$\Delta x \quad a = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_N = b$$

$$\Delta y \quad c = y_0 < y_1 < \cdots\cdots < y_M = d$$

$$\Delta z \quad e = z_0 < z_1 < \cdots\cdots < z_L = g$$

利用一维三次H-插值函数的基函数的推广可得到矩形区域上的双三次 H-插值函数的基函数。双三次H-插值函数可由一维三次H-插值函数推广得到，并可用双三次H-插值函数的基函数表示。

下面将一维的基函数推广，从而得到六面立方体域上的三维三次H-插值函数的基函数：

$$h_{\alpha\beta\gamma,ijk} = h_{\alpha i}(x)\ h_{\beta j}(y)\ h_{\gamma k}(z) \qquad (5—4)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1,\ \ i = 0, \cdots\cdots, N,\ j = 0, \cdots\cdots, M, k = 0, \cdots\cdots, L)$$

这$8(N+1)(M+1)(L+1)$个函数构成线性空间$1H_s(x, y, z)$中的一组基底。

为了给出三维三次H-插值函数，在网格Δ的端点除了给出函数值，还需要给定三个坐标方向的偏导数以及高阶混合偏导数，它们记为：

$$f(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}f(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{100},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{010}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}f(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{001}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{110}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}f(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{011},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_i,y_j,z_k)=f_{ij_k}^{11_0},\qquad \frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}f(x_i,y_j,z_k)=f_{ij_k}^{111},\tag{5—5}$$

运用一维时的整体表示法，任一$H_3\in {}_1H_3(x,y,z)$可以唯一地表示成：

$$\begin{aligned}H_{3\Delta}f=H_3(x,y,z)=&\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L}f_{ijk}\ h_{0i}(x)\ h_{0j}(y)\ h_{0k}(z)\\&+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L}f_{ijk}^{100}\ h_{1i}\ h_{0j}\ h_{0k}+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L}f_{ijk}^{010}\ h_{0i}\ h_{1j}\ h_{0k}\\&+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L}f_{ijk}^{001}\ h_{0i}\ h_{0j}\ h_{1k}+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L}f_{ijk}^{110}\ h_{1i}\ h_{1j}\ h_{0k}\\&+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L}f_{ijk}^{011}\ h_{0i}\ h_{1j}\ h_{1k}+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L}f_{ijk}^{101}\ h_{1i}\ h_{0j}\ h_{1k}\\&+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\sum_{k=0}^{L}f_{ijk}^{111}\ h_{1i}\ h_{1j}\ h_{1k}\end{aligned}\tag{5—6}$$

由此可见式中每项都是上述三维三次H-插值函数的基函数的加权和，即任何$H_3\in {}_1H_3(x,y,z)$都可以用${}_1H_3$的一组基函数唯一地表示出来。式（5—6）中的一维三次H-插值函数的基函数$h_{\beta j}(u)$分别为：

$$h_{0j}(u)=\begin{cases}t^2(3-2t) & 0\leqslant t=\dfrac{u-u_{j-1}}{h_j}\leqslant 1\\ (1-t)^2(1+2t) & 0\leqslant t=\dfrac{u-u_j}{h_{j+1}}\leqslant 1\\ 0 & \text{其他处}\end{cases}$$

$$h_{1j}(u)=\begin{cases}-h_jt^2(1-t) & 0\leqslant t=\dfrac{u-u_{j-1}}{h_j}\leqslant 1\\ h_{j+1}t(1-t)^2 & 0\leqslant t=\dfrac{u-u_j}{h_{j+1}}\leqslant 1\\ \vdots & \\ 0 & \text{其他处}\end{cases}\tag{5—7}$$

2．三维三次样条插值的一般形式及求解过程

给定网格Δ上的函数值表示成：

$$f(x_i,y_j,z_k)=f_{ijk}\qquad(0\leqslant i\leqslant N,0\leqslant j\leqslant M,0\leqslant k\leqslant L)$$

如果把区域u按Δ分割成$N\times M\times L$个子区域，三变量函数$S_{3\Delta}(x,y,z)$在满足下面条件时：

① $S_{3\Delta}(x_i,y_j,z_k)=f(x_i,y_j,z_k)$；

② 每个子区域u_{ijk}（$x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$，$y_{j-1}\leqslant y\leqslant y_j$，$z_{k-1}\leqslant z\leqslant z_k$，$i=1,\cdots\cdots,N$，$j=1,\cdots\cdots,M$，$k=1,\cdots\cdots,L$）内，$S_{3\Delta}(x,y,z)$是$x,y,z$的三维三次多项式；

③ $S_{3\Delta}(x,y,z)\in C^{2,2,2}(u)$，即在$u$上有直至六阶的混合偏导数（其中包括不超过二阶的单向偏导数或四阶的双向偏导数）连续，称为区域u上按Δ分割的三维三次样条。

考虑到三维三次样条插值是一维三次样条插值的推广，所以根据有关定理可证明，如果$f\in C^6(u)$（$C^k(u)$表示在区域u内所有k阶导数，包括混合偏导数或单向偏导数，均匀连续的函数集合）则：

$$S_{3\Delta}(x,y,z)f = S_{3\Delta x}\ S_{3\Delta y}\ S_{3\Delta z}\ f \qquad (5-8)$$

式中 $S_{3\Delta}f = S_{3\Delta}(x_i, y_j, z_k)f$，表示对函数 f 进行三维三次样条插值，下标Δ表示按Δ分割函数的定义域，$S_{3\Delta x}$ 表示沿x方向的一维三次样条，$S_{3\Delta y}$ 表示沿y方向的一维三次样条，$S_{3\Delta z}$为沿 z 方向的一维三次样条。上式说明三维三次样条插值可看成是由沿 3 个方向依次取一维三次样条插值而得到的。沿 3 个方向做一维三次样条插值的顺序可以互换。

由此可求出三维三次样条插值函数的自由度为$(N+3)(M+3)(L+3)$，即等于x, y, z三个方向上一维三次样条自由度的乘积。因此，除了网格节点处给出的$(N+1)(M+1)(L+1)$个函数值：

$$S_3(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}\ \ (i=0,\cdots\cdots,N, j=0,\cdots\cdots,M, k=0,\cdots\cdots L) \qquad (5-9)$$

外，还有$2(N+1)(M+1)+2(N+1)(L+1)+2(M+1)(L+1)+4(M+1)+4(N+1)+4(L+1)+8$个自由度要由边界条件给出。

由于使用的是第一类样条插值，所以需要给出的边界条件是 6 个面上的一阶偏导数（如$S_{3x}(x_i, y_j, z_k)$，在图5-6中的第Ⅰ和第Ⅳ面上给出），12条边上的二阶混合偏导数和 8 个角点上的三阶混合偏导数，即：

$$\begin{aligned}
&S_{3x}(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{100}\quad (i=0,N, j=0,\cdots\cdots,M, k=0,\cdots\cdots,L)\\
&S_{3y}(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{010}\quad (i=0,\cdots\cdots,N, j=0,M, k=0,\cdots\cdots,L)\\
&S_{3z}(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{001}\quad (i=0,\cdots\cdots N, j=0,\cdots\cdots,\ M, k=0,L) \qquad (5-10)\\
&S_{3xy}(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{110}\quad (i=0,N, j=0,M, k=0,\cdots\cdots,L)\\
&S_{3yz}(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{011}\quad (i=0,\cdots\cdots,N, j=0,M, k=0,L)\\
&S_{3xz}(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{101}\quad (i=0,N, j=0,\cdots\cdots,M, k=0,L)\\
&S_{3xyz}(x_i, y_j, z_k) = f_{ijk}^{111}\quad (i=0,N, j=0,M, k=0,L)
\end{aligned}$$

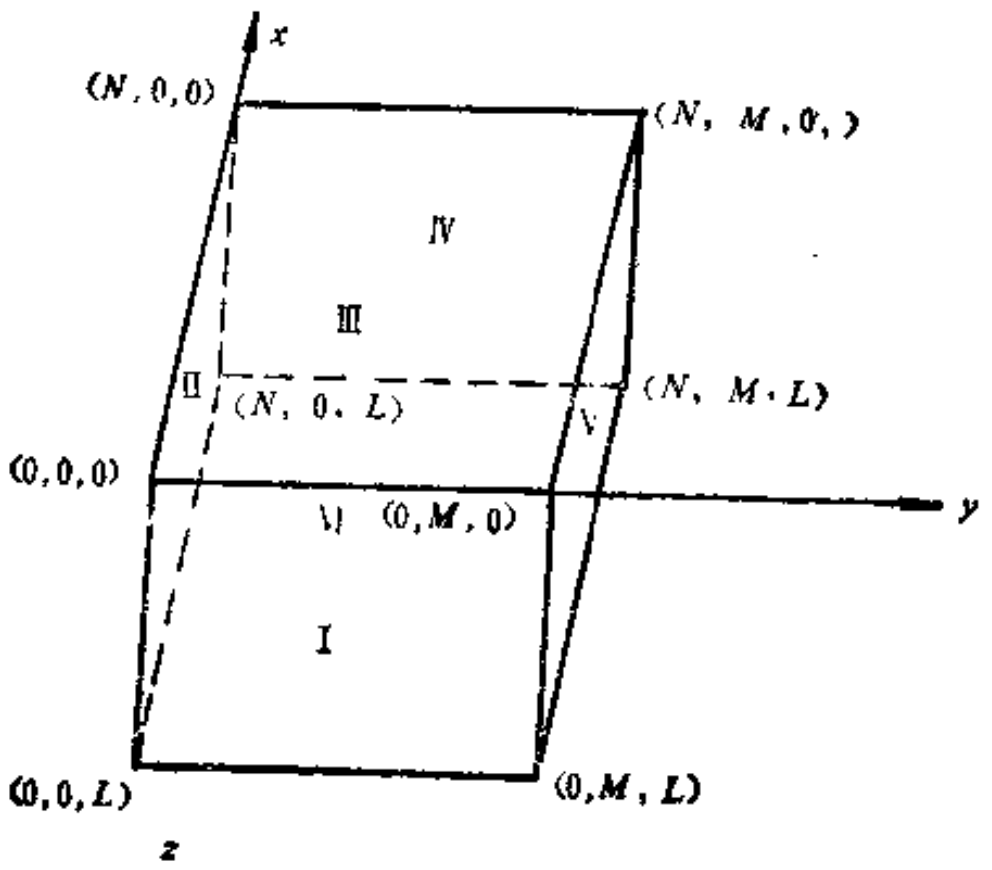


图 5-6 区域u的边界

它们的个数正好与待定自由度的个数相同。

给定上述条件以后，在域u中网格Δ上三维三次样条插值问题就归结为按照上述第一类边界条件，唯一地确定每个内节点处的第一类三维三次 H-插值所需要的节点处的偏导数值，然后就可利用前面给出的三维三次*Hermite*分域插值表达式求出空间任意点处的三维三次样条插值函数值，并利用它求偏导数值。具体计算过程如下：

① 记$p_{ijk} = S_{3x}(x_i, y_j, z_k)$

$$q_{ijk} = S_{3y}(x_i, y_j, z_k)$$

$$r_{ijk} = S_{3z}(x_i, y_j, z_k)$$

$$u_{ijk}=S_{3xy}(x_i,y_j,z_k),\qquad v_{ijk}=S_{3yz}(x_i,y_j,z_k)$$
$$w_{ijk}=S_{3xz}(x_i,y_j,z_k),\qquad a_{ijk}=S_{3xyz}(x_i,y_j,z_k)$$

$$l_i=x_i-x_{i-1},\qquad \lambda_i=\frac{l_{i+1}}{l_i+l_{i+1}}$$

$$m_j=y_j-y_{j-1},\qquad \mu_j=\frac{m_{j+1}}{m_j+m_{j+1}}$$

$$n_k=z_k-z_{k-1}\qquad \eta_k=\frac{n_{k+1}}{n_k+n_{k+1}}$$

$$d_i(f_{ijk})=(1-\lambda_i)\frac{f_{i+1,j,k}-f_{ijk}}{l_{i+1}}+\lambda_i\frac{f_{ijk}-f_{i-1,j,k}}{l_i}$$

$$d_j(f_{ijk})=(1-\mu_j)\frac{f_{i,j+1,k}-f_{ijk}}{m_{j+1}}+\mu_j\frac{f_{ijk}-f_{i,j-1,k}}{m_j}$$

$$d_k(f_{ijk})=(1-\eta_k)\frac{f_{i,j,k+1}-f_{ijk}}{n_{k+1}}+\eta_k\frac{f_{ijk}-f_{i,j,k-1}}{n_k}\qquad(5\text{—}11)$$

② 应用一维三次样条公式 (5—2)依次解下面 $4(N+1)(M+1)+2(N+1)(L+1)+(M+1)(L+1)+4(N+1)+2(M+1)+2(L+1)+4$ 个三对角方程组（未知数分别是内节点处的ϕ_{ijk}, q_{ijk}, r_{ijk}, u_{ijk},v_{ijk}, w_{ijk}, a_{ijk})：

令$p=2$，对于$j=0,\cdots\cdots,M,k=0,\cdots\cdots,L,$

$$\lambda_i\phi_{i-1,j,k}+p\ \phi_{ijk}+(1-\lambda_i)\phi_{i+1,j,k}=(p+1)d_i(f_{ijk})$$
$$(i=1,\cdots\cdots,N-1)\qquad(5\text{—}12)$$

对于 $i=0,\cdots\cdots,N\qquad k=0,\cdots\cdots,L,$

$$\mu_jq_{i,j-1,k}+pq_{ijk}+(1-\mu_j)q_{i,j+1,k}=(p+1)d_j(f_{ijk})$$
$$(j=1,\cdots\cdots,M-1)\qquad(5\text{—}13)$$

对于 $i=0,\cdots\cdots,N,\qquad j=0,\cdots\cdots,M,$

$$\eta_kr_{i,j,k-1}+pr_{ijk}+(1-\eta_k)r_{i,j,k+1}=(p+1)d_k(f_{ijk})$$
$$(k=1,\cdots\cdots,L-1)\qquad(5\text{—}14)$$

至此，求出所有 3 个方向的一阶偏导数。

对于 $j=0,M,\quad k=0,\cdots\cdots,L,$

$$\lambda_iu_{i-1,j,k}+pu_{ijk}+(1-\lambda_i)u_{i+1,j,k}=(p+1)d_i(q_{ijk})$$
$$(i=1,\cdots\cdots,N-1)\qquad(5\text{—}15)$$

对于 $i=0,\cdots\cdots,\ N,\qquad k=0,\cdots\cdots,L,$

$$\mu_ju_{i,j-1,k}+pu_{ijk}+(1-\mu_j)u_{i,j+1,k}=(p+1)d_j(\phi_{ijk})$$
$$(j=1,\cdots\cdots,M-1)\qquad(5\text{—}16)$$

对于 $i=0,\cdots\cdots,N,\qquad k=0,L,$

$$\mu_jv_{i,j-1,k}+pv_{ijk}+(1-\mu_j)v_{i,j-1,k}=(p+1)d_j(r_{ijk})$$
$$(j=1,\cdots\cdots,M-1)\qquad(5\text{—}17)$$

对于 $i=0,\cdots\cdots,N,\ j=0,\cdots\cdots,M,$

$$\eta_kv_{ij,k-1}+pv_{ijk}+(1-\eta_k)v_{i,j,k+1}=(p+1)d_i(q_{ijk})$$
$$(k=1,\cdots\cdots,L-1)\qquad(5\text{—}18)$$

对于 $j=0,\cdots\cdots,M,k=0,L,$

$$\lambda_i w_{i-1,j,k}+pw_{ijk}+(1-\lambda_i)w_{i+1,j,k}=(p+1)d_i(r_{ijk})$$
$$(i=1,\cdots\cdots,N-1) \qquad (5—19)$$

对于 $i=0,\cdots\cdots,N,\qquad j=0,\cdots\cdots,M,$

$$\eta_k w_{i,j,k-1}+pw_{ijk}+(1-\eta_k)w_{i,j,k+1}=(p+1)d_k(p_{ijk})$$
$$(k=1,\cdots\cdots,L-1) \qquad (5—20)$$

至此求出所有的二阶混合偏导数。

对于 $j=0,M,k=0,L,$

$$\lambda_i a_{ij-1,j,k}+pa_{ijk}+(1-\lambda_i)a_{i+1,j,k}=(p+1)d_i(v_{ijk})$$
$$(i=1,\cdots\cdots,N-1) \qquad (5—21)$$

对于 $i=0,\cdots\cdots,N,\qquad k=0,L,$

$$\mu_j a_{i,j-1,k}+pa_{ijk}+(1-\mu_j)a_{i,j+1,k}=(p+1)d_j(w_{ijk})$$
$$(j=1,\cdots\cdots,M-1) \qquad (5—22)$$

对于 $i=0,\cdots\cdots,N,\qquad j=0,\cdots\cdots,M,$

$$\eta_k a_{i,j,k-1}+pa_{ijk}+(1-\eta_k)a_{i,j,k+1}=(p+1)d_k(u_{ijk})$$
$$(k=1,\cdots\cdots,L-1) \qquad (5—23)$$

至此求出所有的三阶混合偏导数。

在这些计算过程中，p_{0jk}和$p_{Njk}(j=0,\cdots\cdots,M,k=0,\cdots\cdots,L)$，$q_{i0k}$和$q_{iMk}(i=0,\cdots\cdots,N,k=0,\cdots\cdots,L)$，$r_{ij0}$和$r_{ijL}(i=0,\cdots\cdots,N,j=0,\cdots\cdots,M)$，$u_{00k},u_{N0k},u_{0Mk}$和$u_{NMk}$ $(k=0,\cdots\cdots,L)$，v_{i00},v_{iM0},v_{i0L}和v_{iML} $(i=0,\cdots\cdots,N)$，w_{0j0},w_{Nj0},w_{0jL}和w_{NjL} $(j=0,\cdots\cdots,M)$ 以及a_{ijk} $(i=0,N,j=0,M,k=0,L)$ 都是已知的边界值。

③ 将已知的和求出的节点上的$p_{ijk},q_{ijk},r_{ijk},u_{ijk},v_{ijk},w_{ijk},a_{ijk}$代入分域三维三次$H$-插值公式（5—6），即可求出待求的插值函数及其偏导数。

3．对三维三次样条一般求解法的简化

为了提高插值的速度，必须结合大地电磁二维反演的具体情况简化上述求解过程，对于三维三次样条插值，这问题尤为突出。鉴于$S_{3\Delta}(x,y,z)\ f=S_{3\Delta x}\cdot S_{3\Delta y}\cdot S_{3\Delta z}f$是一维样条的推广，即依次进行一维样条插值，故可以将一般求解方法改为单向样条插值逼近的方式。

图 5-7 是插值点所在的子区域。根据（5—5）式有相应的记号：$f_{ij\Delta}$为对每个$x_i(i=0,\cdots\cdots,N)$和y_j $(j=0,\cdots\cdots,M)$，即(x_i,y_j)，先j变后i变地沿着z方向进行一维三次样条插值，求出的是在z_Δ坐标点上的插值函数值。$f'^{0,1,0}_{ij\Delta}$是相应点上对 z 的一阶偏导数。分别记作：

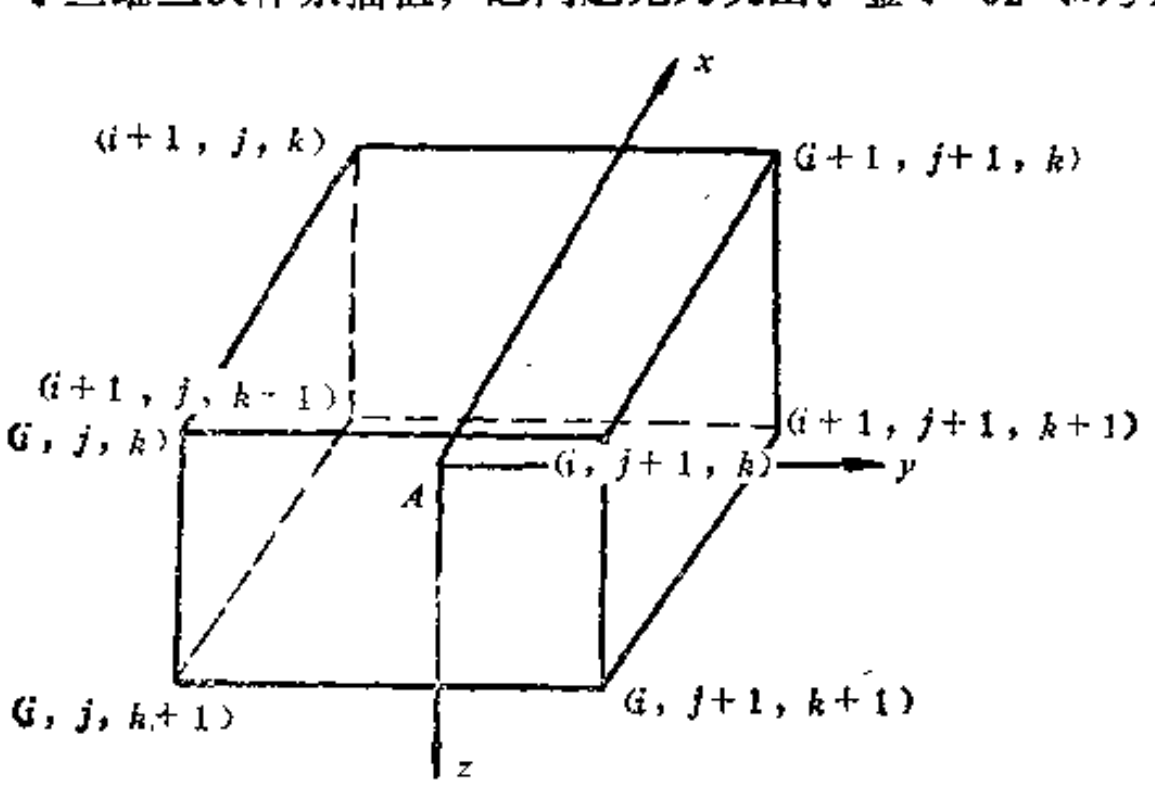


图 5-7 分割后的子区域

$$f_{ij\Delta}=S_{3\Delta z}(x_i,y_j,z_\Delta)\ f$$

$$f_{i\,j\,A}^{0\,0\,1}=\frac{\partial}{\partial z}[S_{3\,A z}(x_i,y_j,z_A)f]$$

再记 $f_{i\,j\,A}=S_{3\,A y}f_{i\,j\,A}$, $f_{i\,A\,A}^{0\,1\,0}=\frac{\partial}{\partial y}f_{i\,A\,A}$, $f_{i\,j\,A}^{0\,0\,1}=S_{3\,A y}f_{i\,j\,A}^{0\,0\,1}$

$f_{A\,A\,A}=\tilde{S}_{3\,A x}f_{i\,A\,A}=S_{3\,A x}\cdot S_{3\,A y}f_{i\,j\,A}$, $f_{A\,A\,A}^{1\,0\,0}=\frac{\partial}{\partial x}f_{A\,A\,A}$

$f_{A\,A\,A}^{0\,1\,0}=S_{3\,A x}f_{i\,A\,A}^{0\,1\,0}$, $f_{A\,A\,A}^{0\,0\,1}=S_{3\,A x}f_{i\,A\,A}^{0\,0\,1}$

首先对每个x_i（$i=0,\cdots\cdots,N$）和y_j（$j=0,\cdots\cdots,M$）求一维三次样条插值，并求出z_A坐标点上的插值函数值$f_{i\,j\,A}$和偏导数值$f_{i\,j\,A}^{0\,0\,1}$，这样就得到$z=z_A$这个面上各（x_i,y_j）处的插值函数值和偏导数值，为两个二维数组。这时需用一阶偏导数的边界条件。再利用已求出的$f_{i\,j\,A}$和$f_{i\,j\,A}^{0\,0\,1}$，沿y方向进行一维样条插值，求出这条线上的$f_{i\,A\,A}$和$f_{i\,A\,A}^{0\,1\,0}$及$f_{i\,A\,A}^{0\,0\,1}$，然后利用已知的二阶混合偏导数的边界条件，最后再利用已知的$f_{i\,A\,A}$，$f_{i\,A\,A}^{0\,1\,0}$和$f_{i\,A\,A}^{0\,0\,1}$沿x方向进行一维样条插值求得（x_A,y_A,z_A）点处的$f_{A\,A\,A}$，$f_{A\,A\,A}^{1\,0\,0}$，$f_{A\,A\,A}^{0\,0\,1}$等值。

具体步骤是：

① 记$r_{i\,j\,k}=S_{3z}(x_i,y_j,z_k)=f_{i\,j\,k}^{0\,0\,1}$

$$h_k=z_k-z_{k-1},\qquad \eta_k=\frac{h_k}{h_k+h_{k+1}},$$

$$d_k(f_{i\,j\,k})=\eta_k\frac{f_{i,j,k+1}-f_{i\,j\,k}}{h_{k+1}}+(1-\eta_k)\frac{f_{i,j,k}-f_{i,j,k-1}}{h_k}$$

$p=2$时，对于$i=0,\cdots\cdots,N$，$j=0,\cdots\cdots,M$，解下列（$N+1$）（$M+1$）个方程组：

$$(1-\eta_k)r_{i,j,k-1}+pr_{i\,j\,k}+\eta_k r_{i,j,k+1}=(p+1)d_k(f_{i\,j\,k})$$
$$(k=1,\cdots\cdots,L-1)\qquad(5—24)$$

可求出一个三维的$f_{i\,j\,k}^{0\,0\,1}$数据组。每解出一个方程组，利用一维三次H-插值公式（5—1）求出$z=z_A$处的插值函数值$f_{i\,j\,A}$和偏导数$f_{i\,j\,A}^{0\,0\,1}$，这样就可求出两个二维数组$f_{i\,j\,A}$和$f_{i\,j\,A}^{0\,0\,1}$（$i=0,\cdots\cdots,N$，$j=0,\cdots\cdots,M$）

② 记 $q_{i\,j\,A}=\frac{\partial}{\partial y}f_{i\,j\,A}$

$$m_j=y_j-y_{j-1}\qquad \mu_j=\frac{m_j}{m_j+m_{j+1}},$$

$$d_j(f_{i\,j\,A})=\mu_j\frac{f_{i,j+1,A}-f_{i\,j\,A}}{m_{j+1}}+(1-\mu_j)\frac{f_{i\,j\,A}-f_{i,j-1,A}}{m_j}$$

对于$i=0,\cdots\cdots,N$，解下列$N+1$个三对角方程组：

$$(1-\mu_j)q_{i,j-1,A}+pq_{i\,j\,A}+\mu_j q_{i,j+1,A}=(p+1)d_j(f_{i\,j\,A})$$
$$(j=1,\cdots\cdots,M-1)\qquad(5—25)$$

求出$q_{i\,j\,A}$后，再利用一维三次H-插值公式求出$y=y_j$处的插值函数值$f_{i\,A\,A}$和导数值$f_{i\,A\,A}^{0\,1\,0}$，即得到一个一维的$f_{i\,A\,A}$数组和一个一维的$f_{i\,A\,A}^{0\,1\,0}$数组。

③ 记$p_{i\,A\,A}=\frac{\partial}{\partial x}f_{i\,A\,A}$

$$l_i=x_i-x_{i-1},\qquad \lambda_i=\frac{l_i}{l_i+l_{i+1}},$$

$$d_i(f_{iAA}) = \lambda_i \frac{f_{i+1,A,A} - f_{iAA}}{l_{i+1}} + (1-\lambda_i)\ \frac{f_{iAA} - f_{i-1,A,A}}{l_i},$$

解下面的三对角方程组：

$$(1-\lambda_i)p_{i-1,A,A} + pp_{iAA} + \lambda_i p_{i+1,A,A} = (p+1)d_i(f_{iAA})$$
$$(i = 1, \cdots\cdots, N-1) \qquad (5—26)$$

求出h_{iAA}后，并利用一维三次H-插值公式求出插值点A处的函数值f_{AAA}和导数值 f^{100}_{AAA}。

④ 记 $u_{iAA} = \frac{\partial}{\partial x} f^{010}_{iAA}$,

$$d_i(f^{010}_{iAA}) = \lambda_i \frac{f^{010}_{i+1,AA} - f^{010}_{iAA}}{l_{i+1}} - (1-\lambda_i)\ \frac{f^{011}_{iAA} - f^{010}_{i-1,A,A}}{l_i}$$

解三对角方程组：

$$(1-\lambda_i)u_{i-1,A,A} + pu_{iAA} + \lambda_i u_{i+1,A,A} = (p+1)d_i(f^{010}_{iAA})$$
$$(i = 1, \cdots\cdots, N-1) \qquad (5—27)$$

求出u_{iAA}，再利用一维三次H-插值公式求出插值点处的偏导数 f^{110}_{AAA}（做为插值函数值来求）。

⑤ 记 $v_{ijA} = \frac{\partial}{\partial y} f^{001}_{ijA}$,

$$d_j(f^{001}_{ijA}) = \mu_j \frac{f^{001}_{i,j+1,A} - f^{001}_{ijA}}{m_{j+1}} + (1-\mu_j)\ \frac{f^{001}_{ijA} - f^{001}_{i,j-1,A}}{m_j}$$

对$i = 0, \cdots\cdots, N$，解下列$N+1$个三对角方程组：

$$(1-\mu_j)v_{i,j-1,A} + pv_{ijA} + \mu_j v_{i,j+1,A} = (p+1)d_j(f^{001}_{ijA})$$
$$(j = 1, \cdots\cdots, M-1) \qquad (5—28)$$

求得v_{ijA}，再利用一维三次H-插值公式求出插值函数值，得到一维 f^{011}_{ijA}数组。

⑥ 记 $w_{iAA} = \frac{\partial}{\partial x} f^{001}_{iAA}$,

$$d_i(f^{001}_{iAA}) = \lambda_i \frac{f^{001}_{i+1,A,A} - f^{001}_{iAA}}{l_{i+1}} + (1-\lambda_i)\ \frac{f^{001}_{iAA} - f^{001}_{i-1,A,A}}{l_i}$$

解三对角方程组：

$$(1-\lambda_i)w_{i-1,A,A} + pw_{iAA} + \lambda_i w_{i+1,A,A} = (p+1)d_i(f^{001}_{iAA})$$
$$(i = 1, \cdots\cdots, N-1) \qquad (5—29)$$

求得w_{iAA}，再利用一维三次H-插值公式求其插值函数值，即A点处的偏导数值 f^{001}_{AAA}。

这种单向逼近插值方法只需要解$(N+1)(M+1)+2(N+1)+3$个三对角方程组，就可以求出插值点处的f_{AAA}, f^{100}_{AAA}, f^{010}_{AAA}, f^{001}_{AAA}，但还要用同样次数的插值公式。逼近方向的顺序可以是任意的。

由一维样条函数形式地推广出多维样条插值函数一般形式的另一种方法是：就二维样条插值函数而言，先固定某个变量方向（如x方向），在另一个方向（y方向）上做样条插值，然后在原来固定的方向上移动，再运用一维插值公式。从而可同样得到符合要求的插值函数。这是因为固定矩形网格Δ上的双三次样条全体构成$(N+3)(M+3)$维线性空间，其插值样条最多只需$(N+3)(M+3)$个独立条件即可唯一确定，即

$$S_{2\Delta f} = S_{2\Delta x} \cdot S_{2\Delta y} f = S_{2\Delta y} \cdot S_{2\Delta x} f \qquad (5-30)$$

而对多变量样条插值计算过程的简化，采用的是“单向插值逼近”的方式，其原理与上述方法基本一致，所以从理论上可以保证插值的精度和误差范围，经过实际验算说明，这样得到的插值函数值和偏导数值与理论值的相对偏差在 10^{-4} 左右，满足实际工作需要的精度。

第三节　用解析法求取偏导数的二维反演方法

上节介绍的应用样条插值进行大地电磁资料二维反演的方法具有一定的局限性，主要是可反演参数的个数少（目前最多是 3 个），需要利用工区内其他资料预先确定地电模型的一些参数。这一节中介绍的用解析法求偏导数在一定程度上克服了上述缺陷。

一、方法的原理

在第三章中已给出过，利用视电阻率和相位数据联合反演时，雅可比偏导数矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, 2\cdots\cdots, m \\ j = 1, 2\cdots\cdots, n \end{matrix}$$

式中

$$a_{ij} = \frac{1}{|\rho_{ci}|} \frac{\partial |\rho_{ci}|}{\partial \lambda_j} \lambda_j, \qquad b_{ij} = \frac{\partial \theta_{ci}}{\partial \lambda_j} \lambda_j \qquad (5-31)$$

在用有限元法做大地电磁二维数值模拟时，对应两种极化方式的复数视电阻率分别具有如下的表示式：

在E_x极化方式情况下，

$$\rho_{ca} = \frac{i}{\omega\mu}\left(\frac{V}{I_z}\right)^2 \qquad (5-32)$$

在H_x极化方式情况下，

$$\rho_{ca} = \frac{i}{\omega\mu}\left(\frac{I_z}{V}\right)^2 \qquad (5-33)$$

其中V和I_z在不同极化方式情况下的物理含义已在表4-1中给出。对式 (5—32)和(5—33)分别取自然对数，得到：

$$\ln\rho_{ca} = \ln\frac{i}{\omega\mu} + 2\ln V - 2\ln I_z \qquad (5-34)$$

$$\ln\rho_{ca} = \ln\frac{i}{\omega\mu} + 2\ln I_z - 2\ln V \qquad (5-35)$$

根据复数运算有：

$$\ln|\rho_{ca}| = \mathrm{Re}[\ln \rho_{ca}],$$

$$\theta_{\rho ca} = \frac{180}{\pi}\mathrm{Im}[\ln \rho_{ca}] \quad (\text{单位为度}) \qquad (5-36)$$

Re和Im分别表示取实部和虚部。将上面两式分别对反演参数λ_j求导，得到：

$$\frac{1}{|\rho_{ca}|} \frac{\partial |\rho_{ca}|}{\partial \lambda_j} = \mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(\ln\rho_{ca})\right] \qquad (5-37)$$

$$\frac{\partial \theta \rho_{ca}}{\partial \lambda_j} = \frac{180}{\pi} \mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(\mathrm{ln}\rho_{ca})\right] \tag{5—38}$$

上面两式乘以λ_j，即为式（5—31）中的雅可比矩阵各元素。这样，只要求得$\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(\mathrm{ln}\rho_{ca})$后，分别取实部和虚部，然后乘以不同的系数，即可得到雅可比矩阵中的各元素。

将式（5—34）、（5—35）代入式（5—36）中的两个公式后，两种极化方式情况下的$\mathrm{ln}\rho_{ca}$和$\theta_{\rho_{ca}}$两个响应函数可统一表示成：

$$d = \mathrm{Re}或\ \mathrm{Im}\{K_0[\mathrm{ln}K_1 + 2\mathrm{ln}K_2 - 2\mathrm{ln}K_3]\} \tag{5—39}$$

其中K_0取什么值取决于取实部还是取虚部(即由计算哪一响应函数来决定)，K_1为$\frac{i}{\omega\mu}$，K_2、K_3视极化方式而定。根据式（5—39),式（5—37）和（5—38）也可写成统一的一般形式,由于K_1不是λ_j的函数。故$\frac{\partial \mathrm{ln}K_1}{\partial \lambda_j} = 0$，从而得到：

$$\frac{\partial d}{\partial \lambda_j} = \mathrm{Re}\ 或\mathrm{Im}\left\{2K_0\left[\frac{1}{K_2}\frac{\partial K_2}{\partial \lambda_j} - \frac{1}{K_3}\frac{\partial K_3}{\partial \lambda_j}\right]\right\} \tag{5—40}$$

在第四章中涉及到用MOM法求辅助场值I_z处已给出过：

$$I_z = \vec{a}^T \vec{V}_M \tag{4—58}$$

式中 $\vec{V}_M$——为类似式（4—63）和（4—65）中用MOM法求出的场值向量。

根据有限元法中所用插值公式的性质，地面任一测点处的主场值可表示成：

$$V = \vec{b}^T \vec{V}_N \tag{5—41}$$

$\vec{V}_N$是式（4—38)的解。矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$都是测点位置的函数，它们的各元素与$\vec{V}_M$和$\vec{V}_N$中的各元素构成线性组合,给出各测点处的I_z和V值。式（5—40）中的$\partial K_2/\partial \lambda_j$和$\partial K_3/\partial \lambda_j$分别可写为$\partial \vec{a}^T \vec{V}_M / \partial \lambda_j$和$\partial \vec{b}^T \vec{V}_N / \partial \lambda_j$。下面给出求取这两项的过程。

令：

$$Q = \vec{a}^T \cdot \vec{V}_M$$

对其求导得到：

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial \vec{a}^T}{\partial \lambda_j} \cdot \vec{V}_M + \vec{a}^T \cdot \frac{\partial \vec{V}_M}{\partial \lambda_j} \tag{5—42}$$

已知在MOM法中，求解主场值的方程组是：

$$K \cdot \vec{V}_M = \vec{f} \tag{4—63}$$

K是一个由各网格参数组成的带状对称大型稀疏方阵，$\vec{f}$是场的上、下边界条件所决定的列向量，K、$\vec{f}$中的具体元素与极化方式有关。对上式两边求导,得到：

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \lambda_j} \cdot \vec{V}_M + \mathbf{K}\frac{\partial \vec{V}_M}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \lambda_j} \tag{5—43}$$

整理后有：

$$\frac{\partial \vec{V}_M}{\partial \lambda_j} = \mathbf{K}^{-1}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \lambda_j}\vec{V}_M\right) \tag{5—44}$$

将式（5—44）代入式（5—42）中，有：

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial \vec{a}^T}{\partial \lambda_j}\vec{V}_M + \vec{a}^T \cdot \mathbf{K}^{-1}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \lambda_j}\cdot \vec{V}_M\right) \tag{5—45}$$

上式中的$\vec{a}^T$、$\vec{V}_M$、$\vec{f}$在正演计算的基础上均为已知量。为了避免单独求$\mathbf{K}^{-1}$，我们令：

$$\mathbf{K}\cdot \vec{u} = \vec{a}$$

从中解出：

$$\vec{u}^T = \vec{a}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \tag{5—46}$$

$\vec{u}$是一未知向量。通过解出$\vec{u}$，可得到$\vec{a}^T \cdot \mathbf{K}^{-1}$。$\partial \vec{a}^T/\partial \lambda_j$只能用差分方法得到。另外，

设
$$\vec{x} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \lambda_j}\cdot \vec{V}_M$$

由于$\vec{f}$、$\mathbf{K}$均为已知表达式，$\vec{V}_M$为已知量，故只要求出$\vec{u}^T$，与$\vec{x}$相乘，即可得到：

$$\vec{a}^T \cdot \mathbf{K}^{-1}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \lambda_j}\cdot \vec{V}_M\right) = \vec{u}^T \cdot \vec{x} \tag{5—47}$$

将上式中求出的值代入式(5—45)，就得到$\partial Q/\partial \lambda_j$。$\partial Q/\partial \lambda_j$的求解步骤大致为：

① 由（4—63)或(4—65）式解出$\vec{V}_M$（这在正演中完成）；

② 对每个$\vec{a}$，解$\mathbf{K}\cdot \vec{u} = \vec{a}$，求得：

$$\vec{u}^T = \vec{a}^T \cdot \mathbf{K}^{-1}$$

③ 对每个λ_j，求出

$$\vec{x} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \lambda_j}\cdot \vec{V}_M,$$

计算$\vec{a}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \vec{x} = \vec{u}^T \cdot \vec{x}$；

④ 计算$\frac{\partial \vec{a}^T}{\partial \lambda_j}\cdot \vec{V}_M$；

⑤ 计算$\frac{\partial \vec{a}^T}{\partial \lambda_j}\cdot \vec{V}_M + \vec{u}^T \cdot \vec{x}$。

当$Q = \vec{b}^T \cdot \vec{V}_M$时，同样可按上述步骤求得$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j}$，然后取实部、虚部，代入(5—40)式，即可最后得到$\frac{\partial d}{\partial \lambda_j}$，以形成雅可比矩阵$\mathbf{A}$。这里的反演参数是二维构造中的各种电阻率和有限元网格的某些行距、列距，这些行距和列距的改变使二维构造中不均匀体的高度、宽度及周围介质的厚度等几何尺寸发生变化。

二、H_z极化时雅可比矩阵的求取

在H_z极化方式中，已知求解主场值的矩阵方程式为：

$$\mathbf{K}\cdot\vec{V}_M=\vec{f} \tag{1—65}$$

式中

$$\vec{f}=(\vec{f}_1{}^T,\ \vec{0}^T\cdots\cdots,\ \vec{0}^T)^T$$

$$=(\{-\mathbf{M}_1\cdot\vec{1}\}^T,\ \vec{0}^T,\ \cdots\cdots,\ \vec{0}^T)^T \tag{5—48}$$

$$\vec{V}_M=(\vec{g}_1^{\,T},\ \vec{V}_1{}^T,\ \cdots\cdots,\ \vec{V}_{M+1}{}^T)^T \tag{5—49}$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}
\mathbf{O} & -\mathbf{M}_1 & & & & & & \\
-\mathbf{M}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & & & & & \\
 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & & \\
 & & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & & & \\
 & & & \searrow & \searrow & \searrow & & \\
 & & & \mathbf{B}_{M-2} & \mathbf{A}_{M-2}+\mathbf{A}_{M-1} & \mathbf{B}_{M-1} & & \\
 & & & & \mathbf{B}_{M-1} & \mathbf{A}_{M-1}+\mathbf{A}_M & \mathbf{B}_M & \\
 & & & & & \mathbf{B}_M & \mathbf{A}_M+\mathbf{T}_{M+1}
\end{pmatrix} \tag{5—50}$$

上面出现的$\vec{g}_1^{\,\dagger}$是一个$(N+1)\times 1$的列向量，它满足：

$$\mathbf{M}_1\cdot\vec{g}_1^{\,\dagger}=\mathbf{A}_1\cdot\vec{V}_1+\mathbf{B}_1\cdot\vec{V}_2 \tag{5—51}$$

并使边界条件得到满足。它在正演中已求出。$\mathbf{M}_1$是为使(5—51)式得到满足而定义的一个$(N+1)\times(N+1)$阶对称三对角方阵，其一般形式已在式(4—57)中给出。$\mathbf{K}$中的$\mathbf{T}_{M+1}$是由下边界条件和网格参数决定的$(N+1)\times(N+1)$阶对称三对角方阵：

$$\mathbf{T}_{M+1}=\begin{pmatrix}
\frac{R_1\cdot w_1}{3} & \frac{R_1\cdot w_1}{6} & & & & \\
\frac{R_1\cdot w_1}{6} & \frac{R_1\cdot w_1}{3}+\frac{R_1\cdot w_2}{3} & \frac{R_1\cdot w_2}{6} & & & \\
 & \frac{R_1\cdot w_2}{6} & \frac{R_1\cdot w_2}{3}+\frac{R_1\cdot w_3}{3} & \frac{R_1\cdot w_3}{6} & & \\
 & & \searrow & \searrow & \searrow & \\
 & & \frac{R_1\cdot w_{N-1}}{6} & \frac{R_1\cdot w_{N-1}}{3}+\frac{R_1\cdot w_N}{3} & \frac{R_1\cdot w_N}{6} & \\
 & & & \frac{R_1\cdot w_N}{6} & \frac{R_1\cdot w_N}{3} &
\end{pmatrix} \tag{5—52}$$

式中

$$R_1=(-i\omega\mu\rho_b)^{\frac{1}{2}} \tag{5—53}$$

是一个复数，表示下边界表面处的阻抗，也就是其下介质的特征阻抗。ρ_b是下边界下面介

质的电阻率。K中的$\mathbf{A}_l$、$\mathbf{B}_l$在表4-2及4-3中已给出。在式（5—49)中，$\vec{V}_1$，……，$\vec{V}_{M+1}$都是（$N+1$）×1的列向量，它们的各元素是网格相应行上各结点处的H_x值。式(5—48)中的$\vec{1}$是（$N+1$）×1阶的元素全为1的列向量。

H_y极化方式时式(4—58）中$\vec{a^T}$的具体形式为：

$$\vec{a}^T = \left(\frac{\vec{\delta}^T}{\eta_1(j)}, \vec{0}^T, \cdots\cdots \vec{0}^T\right) \tag{5—54}$$

它是一个有（$N+1$）×（$M+2$）个元素的行向量，每个子向量有$M+1$维，共有$M+2$个这样的子向量，但除第一个外，其余均为零向量。$\vec{\delta}^T$是这样一个行向量，在它之中，除对应测点在网格中位置的第j列及$j+1$列这两个元素不为零外，其余均勾零，即有：

$$\vec{\delta}^T = (0, 0, \cdots\cdots 0, P, G, 0, \cdots\cdots, 0) \tag{5—55}$$

式中

$$P = \frac{Y(j+1) - Y1(I)}{w_j}, \qquad G = \frac{Y1(I) - Y(j)}{w_j}$$

上式中$Y(j+1)$和$Y(j)$是测点所在那列网格右端和左端距坐标原点的距离，$Y1(I)$是第I个测点的坐标位置，w_j是测点所在列的网格宽度。$\vec{a}_y$中的$\eta_1(j)$是网格第1行，测点所在的第j列那个单元的电导率。

在(5—41）式中，$V = \vec{b}^T \cdot \vec{V}_N$，当为$H_y$极化方式时：

$$\vec{V}^T = (\vec{V}_1^T, \vec{V}_2^T, \cdots\cdots, \vec{V}^T{}_{M+1})^T \tag{5—56}$$

$$\vec{b}^T = (\vec{\delta}^T, \vec{0}^T, \cdots\cdots, \vec{0}^T) \tag{5—57}$$

式（5—56)中的$\vec{V}_i$与式(5—49）中定义的一样。需要说明的是，H_y极化方式时上边界z_{min}取在地表，并要求主场值V在上边界上为常数，取$\vec{V}_1 = \vec{1}$。$\vec{b}^T$是有$(N+1)\times(M+1)$个分量的行向量，其中的$\vec{\delta}^T$与$\vec{a}^T$中的一样，由式（5—55)定义。

当有了$\vec{a}^T$，$\vec{V}_M$，K，$\vec{f}$及$\vec{b}^T$，$\vec{V}_N$之后，可以得到（5—45)式中的各项。

首先，由$\vec{a}^T$和$\vec{V}_M$的具体形式可以得到：

$$\frac{\partial(\vec{a}^T \cdot \vec{V}_M)}{\partial\lambda_j} = \frac{\partial}{\partial\lambda_j}\left(\frac{\vec{\delta}_1^T}{\eta_1(j)}\right) \cdot \vec{g}_1^T + \vec{a}^T \frac{\partial \vec{V}_M}{\partial\lambda_j} \tag{5—58}$$

这样，只要求得$\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\left(\frac{\vec{\delta}^T}{\eta_1(j)}\right)\cdot\vec{g}^T{}_1$和$\vec{a}_T \cdot \frac{\partial \vec{V}_M}{\partial\lambda_i}$，将它们相加，即得（5—42)式中的内容。类似地，对$\vec{b}^T \cdot \vec{V}_N$求导，也可得到：

$$\frac{\partial \vec{b}^T \cdot \vec{V}_N}{\partial\lambda_j} = \frac{\partial\vec{\delta}^T}{\partial\lambda_i} \cdot \vec{V}_1 + \vec{\delta}^T \cdot \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial\lambda_j} \tag{5—59}$$

由于$\vec{V}_1$是常矢量，因此有：

$$\frac{\partial \vec{b}^T \cdot \vec{V}_N}{\partial\lambda_i} = \frac{\partial\vec{\delta}^T}{\partial\lambda_j} \cdot \vec{V}_1 \tag{5—99}$$

下面来求式（5—58）和（5—59)′中的内容。

①$\vec{V}_M$中各值已在正演计算中得到，只需将它保存下来备用。

②解$\mathbf{K}\cdot\vec{u}=\vec{a}$。因为$\mathbf{K}$是一个大型对称方阵，但左上角的分块方阵为0矩阵，故不能直接采用LU分解法。但注意到式(5—50)、(5—54)的具体形式，可将该方程组分为3个子方程组求解。令：

$$\vec{u}=(\vec{u}_1{}^T,\ \vec{u}_2{}^T,\ \cdots\cdots,\ \vec{u}_{M+2}{}^T)^T$$

第1个子方程组是以(5—50）式内$\mathbf{K}$中第1行去左乘$\vec{u}$而得到：

$$-M_1\cdot\vec{u}_2=\frac{\vec{\delta}^T}{\eta_1(j)}$$

因$\mathbf{M}_1$是对称、正定的，且规模不大，故对这个子方程组可用一般方法求解，如用LU分解法，求出$\vec{u}_2$。

第2个子方程组是在求得$\vec{u}_2$后，以$\mathbf{K}$中第3行及其以下部分去左乘$\vec{u}$，并将$\mathbf{B}_1\cdot\vec{u}_2$移至方程右端而得到：

$$\mathbf{K}'\vec{u}'=\vec{a}'$$

式中

$$\mathbf{K}'=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & & \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \mathbf{B}_{M-2} & \mathbf{A}_{M-2}+\mathbf{A}_{M-1} & \mathbf{B}_{M-1} & \\ & & & \mathbf{B}_{M-1} & \mathbf{A}_{M-1}+\mathbf{A}_M & \mathbf{B}_M \\ & & & & \mathbf{B}_M & \mathbf{A}_M+\mathbf{T}_{M+1}\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}'=(\vec{u}_3,\ \vec{u}_4,\cdots\cdots,\vec{u}_{M+2})^T$$

$$\vec{a}'=(-\mathbf{B}_1\vec{u}_2{}',\ \vec{0}^T,\cdots\cdots,\vec{0}^T)^T$$

这时，$\mathbf{K}'$已是对称、正定的大型稀疏矩阵，可用第四章中介绍过的Crout分解方法去解，仅需根据$\mathbf{K}'$的元素结构对一维紧缩存储作适当变动。这样可将$\vec{u}'$中全部未知量求出。

第3个方程是在得到$\vec{u}_2$至$\vec{u}_{M+2}$后，将$\mathbf{K}$中第2行左乘$\vec{u}$而形成的：

$$\mathbf{M}_1\cdot\vec{u}_1=\mathbf{A}_1\cdot\vec{u}_2+\mathbf{B}_1\cdot\vec{u}_3$$

这也是一个普通方程，仍可用处理第1个子方程的方法求解。至此，$\vec{u}$便全部求出。应该提到的是，在求解3个子方程中，因对各测点来说，$\mathbf{K}$中各项的分解是相同的，所以可将各测点处$\vec{a}$中的$\vec{\delta}^T/\eta_1(j)$存放于二维数组中，对$\mathbf{K}$做一次一维紧缩存储、分解，同时解出相应于各测点的$\vec{u}$。这样做，可显著节约计算时间。

③ 求$\frac{\partial\vec{f}}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\lambda_i}\cdot\vec{V}_M$。由$f$、$\mathbf{K}$和$\vec{V}_M$的具体形式，可得到：

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \lambda_j}-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_M=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \lambda_j}(\vec{V}_1-\vec{1})\\ -\left(\dfrac{\partial}{\partial \lambda_j}(-\mathbf{M}_1)\cdot\vec{g}_1^*+\dfrac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \lambda_j}\vec{V}_1+\dfrac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \lambda_j}\vec{V}_2\right)\\ -\left(\dfrac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \lambda_j}\vec{V}_1+\left(\dfrac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \lambda_j}+\dfrac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \lambda_j}\right)\vec{V}_2+\dfrac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_3\right)\\ -\left(\dfrac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_2+\left(\dfrac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \lambda_j}+\dfrac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial \lambda_j}\right)\cdot\vec{V}_3+\dfrac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_4\right)\\ \vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\ -\left(\dfrac{\partial \mathbf{B}_{M-1}}{\partial \lambda_j}\vec{V}_{M-1}+\left(\dfrac{\partial \mathbf{A}_{M-1}}{\partial \lambda_j}+\dfrac{\partial \mathbf{A}_M}{\partial \lambda_j}\right)\vec{V}_M+\dfrac{\partial \mathbf{B}_M}{\partial \lambda_j}\vec{V}_{M+1}\right)\\ -\left(\dfrac{\partial \mathbf{B}_M}{\partial \lambda_j}\vec{V}_M+\left(\dfrac{\partial \mathbf{A}_M}{\partial \lambda_j}+\dfrac{\partial \mathbf{T}_{M+1}}{\partial \lambda_j}\right)\vec{V}_{M+1}\right)\end{vmatrix}\tag{5—60}$$

现在分别考虑对不同种类的反演参数λ_j求偏导数时，（5—60）式中的具体内容：

①当 λ_j 是网格某一列 W_j 时，从式（5—52）、（5—53）、表 4-2及4-3可看到，在 $\mathbf{M}_1$、$\mathbf{T}_{M+1}$、$\mathbf{A}_i$、$\mathbf{B}_i$对λ_j的偏导数中仅第j行、$j+1$行、j 列、$j+1$ 列相交处的 4 个元素非零，其余各元素都为零，例如，$\lambda_j=w_3$时有：

$$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial w_3}=\begin{vmatrix}0&0&&&\\0&0&0&&\\&0&\dfrac{1}{3\eta_1(3)}&\dfrac{1}{6\eta_1(3)}&\\&&\dfrac{1}{6\eta_1(3)}&\dfrac{1}{3\eta_1(3)}&0\\&&&0&0\\&&&&0\end{vmatrix}\tag{5—61}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial w_3}=\begin{vmatrix}0&0&&&\\0&0&0&&\\&0&\dfrac{\gamma_j(3)h_j}{9}+\dfrac{1}{3h_j\eta_j(3)}&\dfrac{\gamma_j(3)h_j}{18}+\dfrac{h_j}{3w_3^2\eta_j(3)}&\\&&-\dfrac{h_j}{3w_3^2\eta_j(3)}&+\dfrac{1}{6h_j\eta_j(3)}&\\&&\dfrac{\gamma_j(3)h_j}{18}+\dfrac{h_j}{3w_3^2\eta_j(3)}&\dfrac{\gamma_j(3)h_j}{9}+\dfrac{1}{3h_j\eta_j(3)}&0\\&&+\dfrac{1}{6h_j\eta_j(3)}&-\dfrac{h_j}{3w_3^2\eta_j(3)}&\\&&&0&0\end{vmatrix}\tag{5—62}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial w_3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \frac{\gamma_i(3)h_i}{18}-\frac{h_i}{6w_3^2\eta_i(3)} & \frac{\gamma_i(3)h_i}{36}+\frac{h_i}{6w_3^2\eta_i(3)} & & & \\ & & & -\frac{1}{3h_i\eta_i(3)} & -\frac{1}{6h_i\eta_i(3)} & & & \\ & & & \frac{\gamma_i(3)h_i}{36}+\frac{h_i}{6w_3^2\eta_i(3)} & \frac{\gamma_i(3)h_i}{18}-\frac{h_i}{6w_3^2\eta_i(3)} & 0 & & \\ & & & -\frac{1}{6h_i\eta_i(3)} & -\frac{1}{3h_i\eta_i(3)} & & \ddots & \\ & & & & & 0 & & 0 \end{pmatrix} \tag{5—63}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{M+1}}{\partial w_3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & \frac{R_1}{3} & \frac{R_1}{6} & & \\ & & & \frac{R_1}{6} & \frac{R_1}{3} & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5—64}$$

有了这样简单的矩阵形式，代入（5—60）式后可看到，在 $\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial w_3}\cdot\vec{g}_1$、$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial w_3}\cdot\vec{V}_i$，$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial w_3}\cdot\vec{V}_i$和$\frac{\partial \mathbf{T}_{M+1}}{\partial w_3}\cdot\vec{V}_{M+1}$ 两项相乘中，仅会用到$\vec{g}_1$、$\vec{V}_i$ 和 $\vec{V}_{M+1}$ 的第 3 和第 4 个元素。

②当λ_j是网格的某一行距时，$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \lambda_j}$和$\frac{\partial \mathbf{T}_{M+1}}{\partial \lambda_j}$都为零。至于$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \lambda_j}$和$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \lambda_j}$，当 i 为与λ_j相应的行序时，它们不为零，否则均为零。例如$\lambda_j=h_2$时，如$i\neq 2$，则$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial h_2}=0$，$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial h_2}=0$；如$i=2$，则由表4-2及4-3可得到表5-3及表5-4中的结果。由此有：

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial h_2}-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial h_2}\cdot\vec{V}_M=\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial h_2}\cdot\vec{V}_2+\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial h_2}\cdot\vec{V}_3\right) \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial h_2}\cdot\vec{V}_2+\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial h_2}\cdot\vec{V}_3\right) \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix} \tag{5—60)'}$$

表 5-3

$$\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial h_2}=\begin{pmatrix}
\frac{\gamma_2(1)w_1}{9}+\frac{1}{3w_1\eta(2,1)}-\frac{w_1}{3h_2^2\eta(2,1)} & \frac{\gamma_2(1)w_1}{18}-\frac{1}{3w_1\eta(2,1)}-\frac{w_1}{6h_2^2\eta(2,1)} & & & \\
\frac{\gamma_2(1)w_1}{18}-\frac{1}{3w_1\eta(2,1)}-\frac{w_1}{6h_2^2\eta(2,1)} & \frac{\gamma_2(1)w_1}{9}+\frac{1}{3w_1\eta(2,1)}-\frac{w_1}{3h_2^2\eta(2,1)}+\frac{\gamma_2(2)w_2}{9}+\frac{1}{3w_2\eta(2,2)}-\frac{w_2}{3h_2^2\eta(2,2)} & \frac{\gamma_2(2)w_2}{18}-\frac{1}{3w_2\eta(2,2)}-\frac{w_2}{6h_2^2\eta(2,2)} & & \\
 & \frac{\gamma_2(2)w_2}{18}-\frac{1}{3w_2\eta(2,2)}-\frac{w_2}{6h_2^2\eta(2,2)} & \frac{\gamma_2(2)w_2}{9}+\frac{1}{3w_2\eta(2,2)}-\frac{w_2}{3h_2^2\eta(2,2)}+\frac{\gamma_2(3)w_3}{9}+\frac{1}{3w_3\eta(2,3)}-\frac{w_3}{3h_2^2\eta(2,3)} & \frac{\gamma_2(3)w_3}{18}-\frac{1}{3w_3\eta(2,3)}-\frac{w_3}{6h_2^2\eta(2,3)} & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & \frac{\gamma_2(N-1)w_{N-1}}{18}-\frac{1}{3w_{N-1}\eta(2,N-1)}-\frac{w_{N-1}}{6h_2^2\eta(2,N-1)} & \frac{\gamma_2(N-1)w_{N-1}}{9}+\frac{1}{3w_{N-1}\eta(2,N-1)}-\frac{w_{N-1}}{3h_2^2\eta(2,N-1)}+\frac{\gamma_2(N)w_N}{9}+\frac{1}{3w_N\eta(2,N)}-\frac{w_N}{3h_2^2\eta(2,N)} & \frac{\gamma_2(N)w_N}{18}-\frac{1}{2w_N\eta(2,N)}-\frac{w_N}{6h_2^2\eta(2,N)} \\
 & & & \frac{\gamma_2(N)w_N}{18}-\frac{1}{3w_N\eta(2,N)}-\frac{w_N}{6h_2^2\eta(2,N)} & \frac{\gamma_2(N)w_N}{9}+\frac{1}{3w_N\eta(2,N)}-\frac{w_N}{3h_2^2\eta(2,N)}
\end{pmatrix}$$

表 5-4

$$\frac{\partial B_2}{\partial h_2}=$$

$$\begin{pmatrix}
\frac{\gamma_2(1)w_1}{18}+\frac{1}{6w_1\eta(2,1)}+\frac{w_1}{3h_2^2\eta(2,1)} & \frac{\gamma_2(1)w_1}{36}-\frac{1}{6w_1\eta(2,1)}+\frac{w_1}{6h_2^2\eta(2,1)} & & & \\
\frac{\gamma_2(1)w_1}{36}-\frac{1}{6w_1\eta(2,1)}+\frac{w_1}{6h_2^2\eta(2,1)} & \frac{\gamma_2(1)w_1}{18}+\frac{1}{6w_1\eta(2,1)}+\frac{w_1}{3h_2^2\eta(2,1)}+\frac{\gamma_2(2)w_2}{18}+\frac{1}{6w_2\eta(2,2)}+\frac{w_2}{3h_2^2\eta(2,2)} & \frac{\gamma_2(2)w_2}{36}-\frac{1}{6w_2\eta(2,2)}+\frac{w_2}{6h_2^2\eta(2,2)} & & \\
 & \frac{\gamma_2(2)w_2}{36}-\frac{1}{6w_2\eta(2,2)}+\frac{w_2}{6h_2^2\eta(2,2)} & \frac{\gamma_2(2)w_2}{18}+\frac{1}{6w_2\eta(2,2)}+\frac{w_2}{3h_2^2\eta(2,2)}+\frac{\gamma_2(3)w_3}{18}+\frac{1}{6w_3\eta(2,3)}+\frac{w_3}{3h_2^2\eta(2,3)} & \frac{\gamma_2(3)w_3}{36}-\frac{1}{6w_3\eta(2,3)}+\frac{w_3}{6h_2^2\eta(2,3)} & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & \frac{\gamma_2(N-1)w_{N-1}}{36}-\frac{1}{6w_{N-1}\eta(2,N-1)}+\frac{w_{N-1}}{6h_2^2\eta(2,N-1)} & \frac{\gamma_2(N-1)w_{N-1}}{18}+\frac{1}{6w_{N-1}\eta(2,N-1)}+\frac{w_{N-1}}{3h_2^2\eta(2,N-1)}+\frac{\gamma_2(N)w_N}{18}+\frac{1}{6w_N\eta(2,N)}+\frac{w_N}{3h_2^2\eta(2,N)} & \frac{\gamma_2(N)w_N}{36}-\frac{1}{6w_N\eta(2,N)}+\frac{w_N}{6h_2^2\eta(2,N)} \\
 & & & \frac{\gamma_2(N)w_N}{36}-\frac{1}{6w_N\eta(2,N)}+\frac{w_N}{6h_2^2\eta(2,N)} & \frac{\gamma_2(N)w_N}{18}+\frac{1}{6w_N\eta(2,N)}+\frac{w_N}{3h_2^2\eta(2,N)}
\end{pmatrix}$$

③当λ_j是电阻率参数时，由$\mathbf{T}_{M+1}$、$\mathbf{M}_1$、$\mathbf{A}_i$、$\mathbf{B}_i$各式可得到：$\frac{\partial \mathbf{T}_{M+1}}{\partial \lambda_j}=0$。至于$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \lambda_j}$，仅当$\lambda_j$是网格第1层电阻率时，$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \lambda_j}$不为零，当为其余各种电阻率时，$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \lambda_j}$都为零。如$\lambda_j=\rho_1$，则当地表不均匀，$\rho_1$为第1行中第1至第10列单元的电阻率时，有：

$$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \rho_t}=\begin{pmatrix}
\frac{w_1}{3} & \frac{w_1}{6} & & & & & & & & \\
\frac{w_1}{6} & \frac{w_1}{3}+\frac{w_2}{3} & \frac{w_2}{6} & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & \frac{w_9}{6} & \frac{w_9}{3}+\frac{w_{10}}{3} & \frac{w_{10}}{6} & & & & & \\
 & & & \frac{w_{10}}{6} & \frac{w_{10}}{3} & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 &
\end{pmatrix} \tag{5—65}$$

在$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \lambda_j}$和$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \lambda_j}$中，也仅是$\mathbf{A}_i$、$\mathbf{B}_i$中出现与$\lambda_j$相同的电阻率的那些元素不为零，其余各元素均为零。例如，$\lambda_j=\rho_2$，是网格中分布在第3至第5行，第1至第10列那些单元的电阻率值，那么，当i等于3至5时，在$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \rho_2}$和$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \rho_2}$中，仅第1至11行，1至11列的三对角元素非零，其余均为零，即：

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \rho_2}=\begin{pmatrix}
\frac{h_i}{3w_1}+\frac{w_1}{3h_i} & -\frac{h_i}{3w_1}+\frac{w_1}{6h_i} & & & & & & & & \\
-\frac{h_i}{3w_1}+\frac{w_1}{6h_i} & \frac{h_i}{3w_1}+\frac{w_1}{3h_i} & -\frac{h_i}{3w_2}+\frac{w_2}{6h_i} & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & +\frac{h_i}{3w_2}+\frac{w_2}{3h_i} & & & & & & & \\
 & & & -\frac{h_i}{3w_{10}}+\frac{w_{10}}{6h_i} & \frac{h_i}{3w_{10}}+\frac{w_{10}}{3h_i} & 0 & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & 0 & 0 &
\end{pmatrix} \tag{5—66}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \rho_2}=\begin{pmatrix} \frac{h_i}{6w_1}-\frac{w_1}{3h_i} & -\frac{h_i}{6w_1}-\frac{w_1}{6h_i} & & & & & \\ -\frac{h_i}{6w_1}-\frac{w_1}{6h_i} & \frac{h_i}{6w_1}-\frac{w_1}{3h_i} & & & & & \\ & & +\frac{h_i}{6w_2}-\frac{w_2}{3h_i} & -\frac{h_i}{6w_2}-\frac{w_2}{6h_i} & & & \\ & & & & & & \\ & & -\frac{h_i}{6w_{10}}-\frac{w_{10}}{6h_i} & \frac{h_i}{6w_{10}}-\frac{w_{10}}{3h_i} & 0 & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5—67}$$

当$i\neq 3\sim 5$时，$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \rho_2}$和$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \rho_2}$中的元素都为零。最终得到：

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \rho_2}-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_2}\vec{V}_M=\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vdots \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial \rho_2}\cdot\vec{V}_3+\frac{\partial \mathbf{B}_3}{\partial \rho_2}\cdot\vec{V}_4\right) \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{B}_3}{\partial \rho_2}\cdot\vec{V}_3+\left(\frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial \rho_2}+\frac{\partial \mathbf{A}_4}{\partial \rho_2}\right)\cdot\vec{V}_4+\frac{\partial \mathbf{B}_4}{\partial \rho_2}\cdot\vec{V}_5\right) \\ \vdots \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{A}_5}{\partial \rho_2}\cdot\vec{V}_5+\frac{\partial \mathbf{B}_5}{\partial \rho_2}\cdot\vec{V}_6\right) \\ -\left(\frac{\partial \mathbf{B}_5}{\partial \rho_2}\cdot\vec{V}_5+\frac{\partial \mathbf{A}_5}{\partial \rho_2}\cdot\vec{V}_6\right) \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix} \tag{5—68}$$

至此，已导出对3种不同种类反演参数求偏导数时式（5—60）中各项的具体内容。从这些结果可以看出，由于它们具有一定规律，所以易于编制程序。再利用②中的结果便可求得（5—47）式。

④求$\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\frac{\vec{\delta}^{\,t}}{n_1(j)}\right)\cdot\vec{g}_1^{\,t}$和$\frac{\partial \vec{\delta}^{\,T}}{\partial \lambda_i}\cdot\vec{V}_1$。

从式(5—55)可知，$\vec{\delta}^{\,T}$仅是网格列距参数和测点位置的函数，而在反演中，测点是不变的，故它只是随网格列距参数的变化而变化。这样，当λ_i为行距参数h_i时有：

$$\frac{\partial \vec{\delta}^{\,T}}{\partial h_i}\cdot\vec{V}_1=0, \qquad \frac{\partial}{\partial h_i}\left(\frac{\vec{\delta}^{\,2}}{n_1(j)}\right)\cdot\vec{g}_1^{\,t}=0 \tag{5—69}$$

当λ_j为电阻率参数时，只有λ_j为网格第1行上测点所在列的电阻率时有：

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\left(\frac{\vec{\delta}^T}{\eta_1(j)}\right)\cdot\vec{g}_1^+ = \vec{\delta}^T\cdot\vec{g}_1^- , \qquad \frac{\partial\vec{\delta}^T}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_1 = 0 \qquad (5-70)$$

其它情况下皆为零。当λ_j为网格列距参数w_j时，由于$\frac{\partial\vec{\delta}^T}{\partial\lambda_j}$无解析解，因此要用一阶差商：

$$\frac{\vec{\delta}^T{}_2 - \vec{\delta}_1{}^T}{\Delta w_j} \doteq \frac{\partial\vec{\delta}^T}{\partial w_j} \qquad (5-71)$$

代替导数。这里$\vec{\delta}_1$是未改变λ_j时的矢量$\vec{\delta}$，$\vec{\delta}_2$是改变λ_j后的。从（5—55）式中P、G的表达式可看出：

①当反演列距参数λ_j的列序号大于测点$Y1(I)$所在列的序号时，给λ_j以增量后，$\vec{\delta}$不变，即

$$\frac{\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_1}{\Delta\lambda_j} = \vec{0}$$

②当反演列距参数λ_j的列序号等于测点$Y1(I)$所在列的序号，例如$\lambda_j = w_j$时，

$$\vec{\delta}_1{}^T = (0, \cdots\cdots, P_1, G_1, 0, \cdots\cdots, 0)$$

$$P_1 = \frac{Y_1(j+1) - Y1(I)}{w_j}, \qquad G_1 = \frac{Y1(I) - Y_1(j)}{w_j} \qquad (5-72)$$

给w_j以增量Δw_j后，$w'_j = w_j + \Delta w_j$

$$\vec{\delta}_2{}^T = (0, \cdots\cdots, P_2, G_2, 0, \cdots\cdots, 0)$$

$$P_2 = \frac{Y_2(j+1) - Y1(I)}{w'_j}, \qquad G_2 = \frac{Y1(I) - Y_2(j)}{w'_j} \qquad (5-73)$$

这时，$Y_2(j+1) = Y_1(j+1) + \Delta w_j$, $Y_2(j) = Y_1(j)$,

$$\vec{\delta}_2^T - \vec{\delta}_1^T = \Delta\vec{\delta}^T = (0, \cdots\cdots, \Delta P, \Delta G, 0, \cdots\cdots, 0)$$

$$(j) \quad (j+1)$$

$$\Delta P = P_2 - P_1, \qquad \Delta G = G_2 - G_1,$$

$$\frac{\partial\delta^T}{\partial\lambda_j} \doteq (0, \cdots\cdots, \frac{\Delta P}{\Delta w_j}, \frac{\Delta G}{\Delta w_j}, 0, \cdots\cdots, 0) \qquad (5-74)$$

③当反演列距参数λ_j的列序号小于测点$Y1(I)$所在列的序号时，(5—72)式中各式不变，而（5—73）式中$w'_j = w_j$，$Y_2(j+1) = Y_1(j+1) + \Delta w$, $Y_2(j) = Y_1(j) + \Delta w$，这时，

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{\Delta w}{w_j}, \qquad \Delta G = -\frac{\Delta w}{w_j}$$

$$\frac{\partial\vec{\delta}^T}{\partial\lambda_j} \doteq (0, \cdots\cdots, \frac{1}{w_j}, -\frac{1}{w_j}, 0, \cdots\cdots, 0) \qquad (5-75)$$

对不同的反演列距参数，得到上面不同的一阶差分公式后，再分别与$\vec{g}_1^+/\eta_1(j)$及$\vec{V}_1$相乘，即可得到$\frac{\partial\vec{\delta}^T}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{g}_1^+/\eta_1(j)$和$\frac{\partial\vec{\delta}^T}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_1$的近似值。

将上述①～④中的结果代入式(5—58)和(5—59)′后，即得到H_x极化时(5—40)式中的

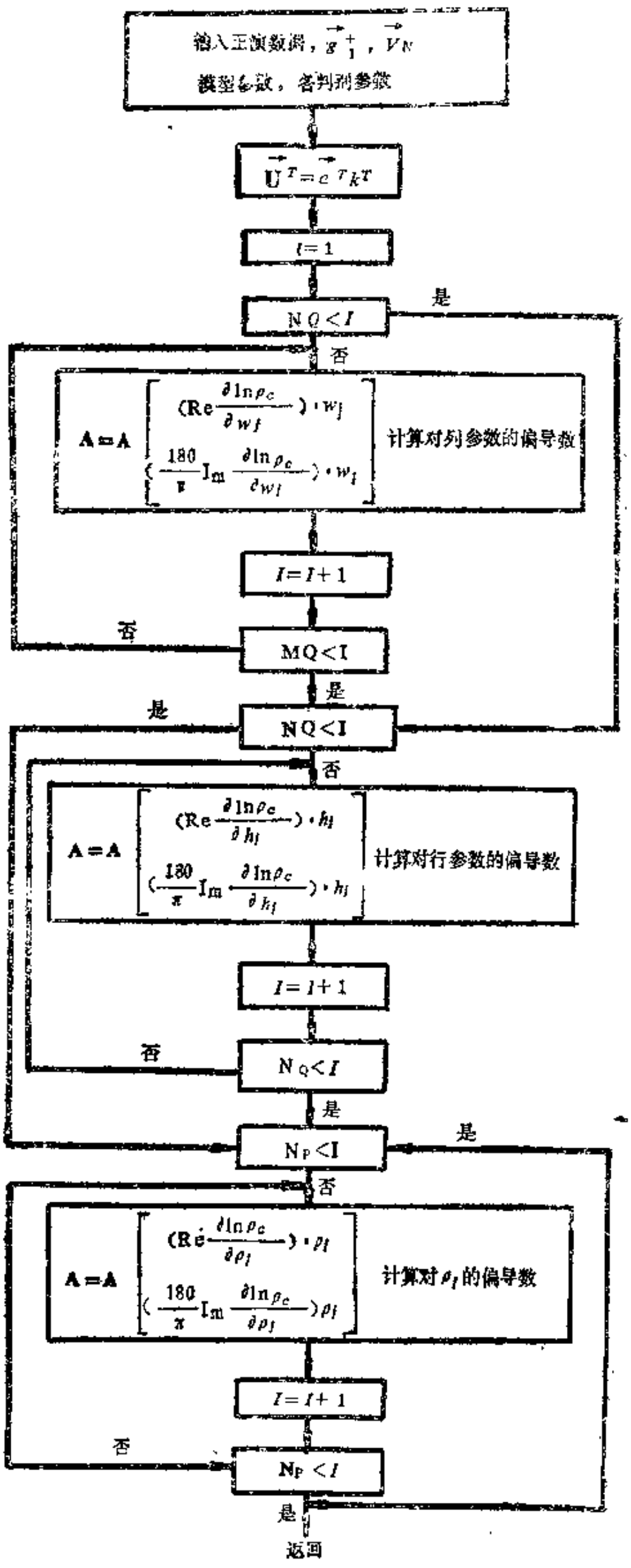


图 5-8　β_n 极化时计算偏导数矩阵A的流程图

MQ—反演列距参数的个数；NQ—反演行距参数个数；N_P—反演参数个数

$\frac{\partial K_2}{\partial \lambda_i}$和$\frac{\partial K_3}{\partial \lambda_j}$。各测点处的$\vec{a}^T \cdot \vec{V}_M$和$\vec{b}^T \cdot \vec{V}_N$，即$K_2$和$K_3$，已在正演计算中求出。经过一般运算，分别取实部和虚部，最后便可算出$\frac{1}{|\rho_e|}\frac{\partial|\rho_e|}{\partial \lambda_i}$和$\frac{\partial \theta_{ce}}{\partial \lambda_j}$。将它们分别与$\lambda_i$相乘，放入相应位置，即组成$H_x$极化时的偏导数矩阵**A**。图5-8中给出相应运算过程的流程图。

从上述过程可见，这种求雅可比矩阵的方法比用差分方法节省时间，因为只需解一次大型稀疏矩阵$\mathbf{K} \cdot \vec{U} = \vec{a}$（它类似于正演中要解的$\mathbf{K} \cdot \vec{V}_N = \vec{f}$，但$\vec{f}$是一维的，而$\vec{a}$是二维数组，$\vec{a}$的列数由测点数决定），不像用差分方法那样，要对每个反演参数的变化做正演计算求差分。同时，这种方法的精度也高于差分方法。

三、E_x极化方式时雅可比矩阵的求取

在E_x极化方式中，（5—40）式的$K_2 = V$，$K_3 = I_z$，$V = \vec{b}^T \cdot \vec{V}_{Ne}$，$I_z = \vec{a}^T \cdot \vec{V}_{Me}$，$\vec{V}_{Ne}$、$\vec{V}_{Me}$的定义与前面$\vec{V}_N$和$\vec{V}_M$的相同，角标$e$表示$E_x$极化方式时的。由于在这种极化方式时，地面测点处的电场和磁场都不是常数，因而需对主场值V和辅助场值I_z分别按求$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_i}$的步骤进行计算。

当$Q = V$时，求解主场值V的方程组为：

$$\mathbf{K} \cdot \vec{V}_{Ne} = \vec{f}$$

式中，$\vec{V}_{Ne}$与（5—56）式中的形式相同，

$$\vec{f} = \left(\vec{f}_1^T, \vec{0}^T, \cdots\cdots, \vec{0}^T\right)^T = \left(-[\mathbf{M}_1 \cdot \eta_1(j) \cdot \vec{1}]^T, \vec{0}^T, \cdots\cdots, \vec{0}^T\right)^T \qquad (5—76)$$

K与式（4—38）′中的矩阵相同。

这时

$$\vec{b}^T = (\vec{0}^T, \cdots\cdots \vec{0}^T, \vec{\delta}^T, \vec{0}^T \cdots\cdots, \vec{0}^T)^T \qquad (5—77)$$

$\vec{\delta}^T$在$\vec{b}^T$中的位置与测点在网格中的行序号相应。

当$Q = I_z$时，以测点位于网格中第3行为例，由MOM法形成的方程式为：

$$\mathbf{K}' \cdot \vec{V}_{Me} = \vec{f}' \qquad (5—78)$$

式中

$$\vec{V}_{Me} = \left(\vec{V}_1^T, \vec{V}_2^T, \vec{V}_3^T, \vec{g}_3^T, \vec{V}_3^T, \vec{V}_4^T \cdots\cdots, \vec{V}_{M+1}^T\right)^T \qquad (5—79)$$

$$K' = \begin{pmatrix}
\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & & & & & & \\
\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & & & \\
 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{M}_3 & & & & \\
 & & \mathbf{M}_3 & 0 & -\mathbf{M}_3 & & & \\
 & & & -\mathbf{M}_3 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & & \\
 & & & & \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 & \mathbf{B}_4 & \\
 & & & & & \searrow & \searrow & \searrow \\
 & & & & & \mathbf{B}_{M-1} & \mathbf{A}_{M-1} + \mathbf{A}_M & \mathbf{B}_M \\
 & & & & & & \mathbf{B}_M & \mathbf{A}_M + \mathbf{I}_{M+1}
\end{pmatrix} \qquad (5—80)$$

$\vec{f}'$与（5—76)式的相似，仅增加了两个零向量。这时，

$$\vec{a}^T=\left(\vec{0}^T,\cdots\cdots,\vec{0}^T,\frac{\vec{\delta}^T}{\eta_s(j)},\vec{0}^T,\cdots\cdots,\vec{0}^T\right)^T \tag{5—81}$$

$\vec{\delta}^T/\eta_s(j)$ 的位置与$\vec{g}_s$在$\vec{V}_M$中的位置相同。$\vec{b}^T$，、$\vec{a}^T$ 中 $\vec{\delta}^T$ 的形式与（5—55）式中的相同。

有了$\mathbf{K}$、$\vec{V}_{N\sigma}$、$\vec{f}$、$\vec{b}^T$及$\mathbf{K}'$、$\vec{V}_{M\sigma}$、$\vec{f}'$、$\vec{a}^T$后，由(5—45)式可以导出：

当$Q=V$时，类似（5—58）式的推导，有：

$$\frac{\partial V}{\partial\lambda_j}=\frac{\partial\vec{\delta}^T}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_i+\vec{b}^T\cdot\frac{\partial\vec{V}_{N\sigma}}{\partial\lambda_j} \tag{5—82}$$

当$Q=I_z$时有：

$$\frac{\partial I_z}{\partial\lambda_j}=\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\left(\frac{\vec{\delta}^T}{\eta_i(j)}\right)\cdot\vec{g}_i^t+\vec{a}^T\cdot\frac{\partial\vec{V}_{M\sigma}}{\partial\lambda_j} \tag{5—83}$$

这里i是测点所在行在网格中的序号。可通过本节一中求$\partial Q/\partial\lambda_j$的各步骤求得式(5—82)和（5—83）中的各项。在求解时，由于$\mathbf{K}$和$\mathbf{K}'$都是大型稀疏对称正定矩阵，故可直接用Crout方法分解，求出相应的未知数。其它各运算步骤也与H_σ极化方式时相同，需要提到的是如下两部分的具体形式：

当$Q=V$时，

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial\lambda_j}-\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_{N\sigma}=\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{M}_1\cdot\eta_1(j)}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{1}-\dfrac{\partial\mathbf{A}_1}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_1-\dfrac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_2\\ -\dfrac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_1-\left(\dfrac{\partial\mathbf{A}_1}{\partial\lambda_j}+\dfrac{\partial\mathbf{A}_2}{\partial\lambda_j}\right)\cdot\vec{V}_2-\dfrac{\partial\mathbf{B}_2}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_3\\ -\dfrac{\partial\mathbf{B}_2}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_2-\left(\dfrac{\partial\mathbf{A}_2}{\partial\lambda_j}+\dfrac{\partial\mathbf{A}_3}{\partial\lambda_j}\right)\cdot\vec{V}_3-\dfrac{\partial\mathbf{B}_3}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_4\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\\ -\dfrac{\partial\mathbf{B}_{M-1}}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_{M-1}-\left(\dfrac{\partial\mathbf{A}_{M-1}}{\partial\lambda_j}+\dfrac{\partial\mathbf{A}_M}{\partial\lambda_j}\right)\cdot\vec{V}_M-\dfrac{\partial\mathbf{B}_M}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_{M+1}\\ -\dfrac{\partial\mathbf{B}_M}{\partial\lambda_j}\cdot\vec{V}_M-\left(\dfrac{\partial\mathbf{A}_M}{\partial\lambda_j}+\dfrac{\partial\mathbf{T}_{M+1}}{\partial\lambda_j}\right)\cdot\vec{V}_{M+1}\end{cases} \tag{5—84}$$

当$Q=I_z$时，

当λ_j是列参数和行参数时，(5—84)、(5—85）式中各项的内容与（5—61）至(5—60)′式中的基本一样。当λ_j是电阻率参数时，由于$\mathbf{M}_1$、$\mathbf{M}_3$都不是电阻率的函数，故$\partial\mathbf{M}_1/\partial\rho$和$\partial\mathbf{M}_3/\partial\rho$中的元素皆为零。在$\partial\mathbf{A}_i/\partial\lambda_j$和$\partial\mathbf{B}_i/\partial\lambda_j$中，除原$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}_i$内出现与$\lambda_j$相同电阻率的那

$$\frac{\partial \vec{f}'}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial \mathbf{K}'}{\partial \lambda_j}\vec{V}_{Mo} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}_1 \eta_1(j)}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{1} - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_1 - \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_2 \\ -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_1 - \left(\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \lambda_j}+\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \lambda_j}\right)\cdot\vec{V}_2 - \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_3 \\ -\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_2 - \left(\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_3\right) - \frac{\partial \mathbf{M}_3}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{g}_3^* \\ \vec{0} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_3}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{g}_3^* - \frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_3 - \frac{\partial \mathbf{B}_3}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_4 \\ -\frac{\partial \mathbf{B}_3}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_3 - \left(\frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial \lambda_j}+\frac{\partial \mathbf{A}_4}{\partial \lambda_j}\right)\cdot\vec{V}_4 - \frac{\partial \mathbf{B}_4}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_5 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -\frac{\partial \mathbf{B}_{M-1}}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_{M-1} - \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{M-1}}{\partial \lambda_j}+\frac{\partial \mathbf{A}_M}{\partial \lambda_j}\right)\cdot\vec{V}_M - \frac{\partial \mathbf{B}_M}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_{M+1} \\ -\frac{\partial \mathbf{B}_M}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_M - \frac{\partial \mathbf{A}_M}{\partial \lambda_j}\cdot\vec{V}_{M+1} - \frac{\partial \mathbf{T}_{M+1}}{\partial \lambda_j}\vec{V}_{M+1} \end{vmatrix} \tag{5—85}$$

些元素处不为零外，其余均为零。但非零元素的形式与 $H_\parallel$ 极化方式时不同。例如，λ_j 为 ρ_3，而 ρ_3 在网格中分布于第 7 至10行，第 5 至 9 列，则仅当 $i=7\sim10$ 时，$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \rho_3}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \rho_3}$ 中第 5 至10行，5 至10列的三对角元素非零，其余均为零。即：

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \rho_3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & \frac{h_i w_5}{9} & \frac{h_i w_6}{18} & & & & & \\ & & & \frac{h_i w_5}{18} & \frac{h_i w_5}{9}+\frac{h_i w_6}{9} & \frac{h_i w_6}{18} & & & & \\ & & & & \frac{h_i w_{10}}{9} & \frac{h_i w_{10}}{18} & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{5—86}$$

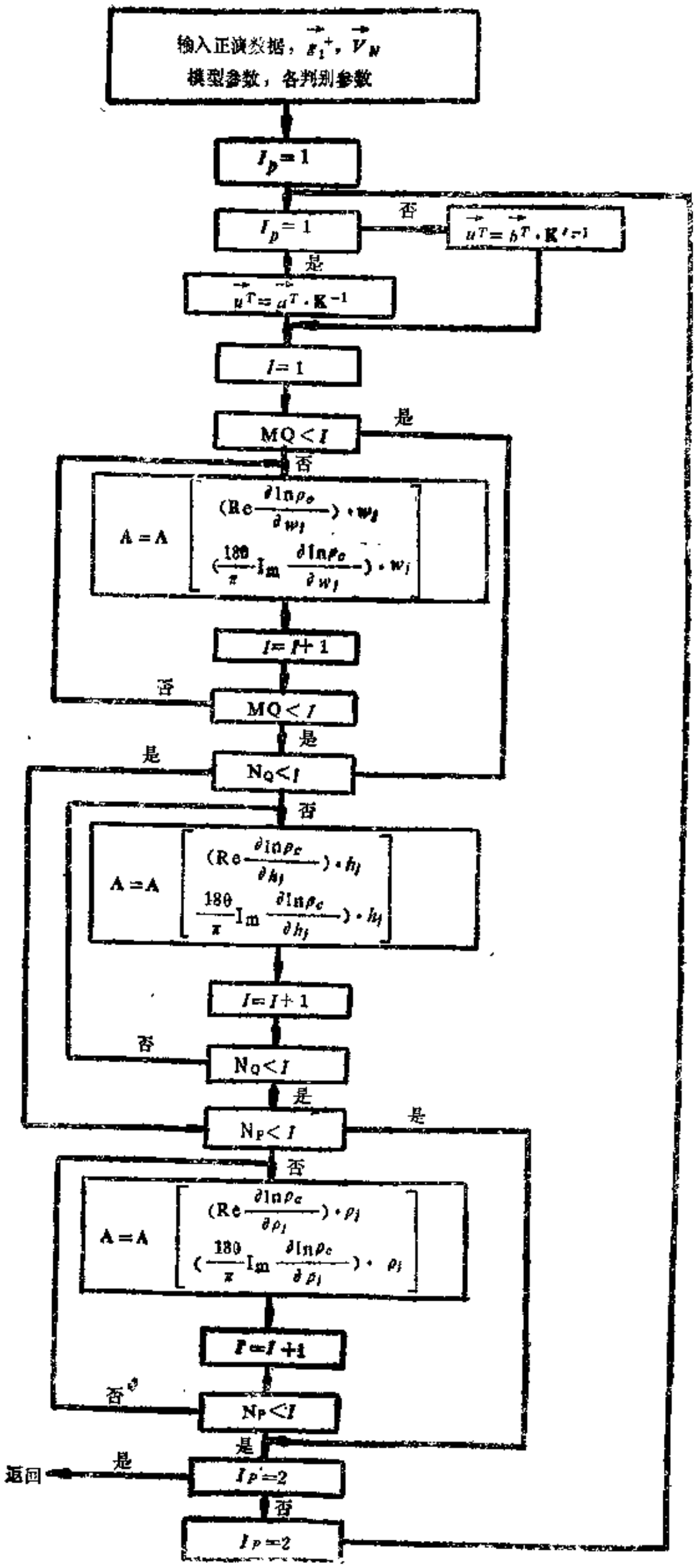


图 5-9　$E_{//}$极化方式时求偏导数矩阵A的框图

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \rho_s} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & \\ & & & \frac{h_i w_5}{18} & & & & & & \\ & & & & \frac{h_i w_5}{36} & & & & & \\ & & & & & \frac{h_i w_6}{36} & & & & \\ & & & & & & \frac{h_i w_6}{18} & & & \\ & & & & & & & \frac{h_i w_6}{18} & & \\ & & & & & & & & \frac{h_i w_6}{36} & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \frac{h_i w_{10}}{18} \\ & & & & & & & & \frac{h_i w_{10}}{36} & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \end{bmatrix} \tag{5-87}$$

根据以上所述，编制出 E_s 极化方式时求雅可比矩阵的程序，程序流程见图 5-9。应注意到，在 E_s 极化方式条件下求雅可比矩阵过程中需要二次求解方程 $\mathbf{K} \cdot \vec{u} = \vec{a}$，因而使计算时间显著增加。但当反演参数较多时（$\geqslant 4$），仍比差分方法用的时间少。

为了验证编制出的程序，曾采用文献[17]中网格 1.1，计算了 5 个测点处相对 9 个参数的偏导数，并与原文献中给出的计算结果作了对比，数值基本一致，见表5-5。

表 5-5

λ_i / $\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(\log_{10}\sigma)$ / YI(J)(km)	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{18}	w_{17}	w_{19}	w_{110}	h_1	h_2
-1.424	-.00051	-.00012	.00008	-.00032	-.00029	-.00002	-.00006	.00063	.00035
0.0	-.00078	-.00018	.0001	-.0002	-.00035	-.00003	-.00007	.00091	.00041
0.712	-.16532	.02377	.00089	-.00022	-.00113	-.00004	-.00015	-.0509	-.00498
2.135	-.02735	-.02986	-.0269	.00104	-.00204	-.00001	-.00024	.00271	-.00579
3.559	-.01539	-.01619	-.01546	-.01683	.00461	.00009	-.00032	.00245	-.00330
Rodi的结果									
-1.424	-.0005	-.0001	.0001	0.0	-.0003	0.0	-.0001	.0006	.0004
0.0	-.0008	-.0002	.0001	0.0	-.0003	0.0	-.0001	.0009	.0004
0.712	-.1653	.0238	.0009	-.0002	-.0011	0.0	-.0001	-.0509	-.0050
2.135	-.0274	-.0299	-.0269	.0040	-.0020	0.0	-.0002	.0027	-.0058
3.559	-.0154	-.0165	-.0155	-.0168	.0046	.0001	-.0003	.0024	-.0033

下面是H_z极化方式时求取偏导数矩阵A的程序段：

程序名　GROM

（1）程序功能

用解析法求出对反演参数的偏导数，构成雅可比矩阵，反演参数可是二维剖面任意部位的电阻率、横向及纵向网格距。

（2）数组和形式参数说明

u　二维数组，用以存放各矩形单元中的电导率。

M　有限元网格的行数。

N　有限元网格的列数。

NA　一维数组，用以存放系数矩阵分块存储时各元素的序号。

LNA　NA数组的容量，LNA = LM × N1 + N2；

LM　系数矩阵分块存储时的块数，由主程序给出。

N1　有限元网格的列数加1，N1 = N + 1 。

N2　有限元网格的列数加 2 ，N2 = N + 2。

LAD　一维数组，存放分块存储及分解时公共三角区的元素序号。

NN　LAD数组的容量，NN = N1 × (M + 1)。

A　一维复数数组，存放大型系数矩阵分块存储时的各元素。

LV　A数组的容量，LV = LM × N1 × (N + 3) + (N1 × M + 1) /2 + N1/2。

B　二维复数数组，用以存放解大型线性方程时的右端项及其中间分解结果。

LBB　B数组的行数，LBB = LNA - 1。

MY　用于反演的测点数。

uT　一维复数数组，存放二维正演时各节点的磁场值。

VT　一维复数数组，存放MOM法中求辅助场而定义的列向量。

AM　二维复数数组，用于解大型非正定线性方程组。

EJ　一维复数数组，存放反演剖面上各测点处的电场值。

HV　一维复数数组，存放反演剖面上各测点处的磁场值。

uT1　二维复数数组，存放解大型线性方程组的中间结果及与各测点有关的解向量。

NN1　uT1的行数，NN1 = N1 × (M + 2)。

G　复型参数，$G = -i2\pi f\mu_0$。

R1　复型参数，$R1 = \sqrt{-i2\pi f\mu_0/\rho_{当前}}$。

R2　形式参数，$R2 = 10^{15}$。

B2　形式参数，$B2 = 10^{15}$。

II　整型参数，表示周期序数。

INX　整型参数，表示可供A 数组应用的计算机内存单元数。

NEC　整型参数，计算机内存提供的八进制内存数。

NF　整型参数，周期总数。

NP　整型参数，反演参数个数。

B1　二维复型数组。将大型非正定线性方程分解为小型正定线性方程时，存小型方程的右端项。

NQ　整型数，表示反演参数中列距离参数的个数。

MQ　整型数，表示反演参数中列距和行距参数的和。

LQ　整型数，反演参数中电阻率参数的个数，在主程序中应用。

Y　一维数组，存放有限元各列距的值。

Y1　一维数组，存放测点的坐标值。

YY　一维数组，存放网格各列的坐标值。

H　一维数组，存放网格各行距的值。

L　一维整型数组，存放反演列距参数的列序号，行距参数的行序号，各电阻率参数分布的起始和终止行、列序号。

D　二维实数数组，存放求辅助场时定义的矩阵。

P　一维实数数组，存放反演参数的改正量（由主程序生成）。

RH　一维实数数组，存放反演参数的上一次迭代的值。

u2　二维实数数组，存放偏导数矩阵中各元素的值。

（3）子程序说明

CALL GuTi　用于求解大型非正定对称线性方程组。

（4）程序

```
      SUBROUTINE GROM(A,LV,B,LBB,UT,NN,VT,N1,NA,LNA,U,M,N,
     $                MY,AM,LAD,EJ,HV,UT1,NN1,R1,R2,B2,
     $                II,G,INX,NEC,NF,MM,NP,B1)
      INTEGER       ZZ
      DIMENSION U(M,N),NA(LNA),LAD(NN)
      COMPLEX A(LV),B(LBB,MY),UT(NN),VT(N1),AM(N1,2),EJ(MY),
     $                                HV(MY),UT1(NN1,MY),G,R1
      COMPLEX PA11,PA1,PA2,PB2,PB1
      COMMON       /NPR/ NQ,MQ,LQ
      COMMON       /W/   KP,U2(300,12),H1(12,300),V(12,12),Q(12),TQ(12)
      COMMON       /F1/ Y(32),YY(33),Y1(6),H(40),L(50),D(6,33)
      COMMON        O
      COMMON        P(12),RH(18)
      MZ1=NF*MY
3     DO 5 I=1,MY
      DO 5 J=1,LBB
5     B(J,I)=(.0,.0)
      CALL GUT1(A,LV,B,LBB,NA,LNA,UT1,NN1,AM,LAD,U,M,N,N1,
     $              NN,MY,B1,R1,R2,B2,G,INX,NEC)
      ZZ=1   $   III=1
      IF(NQ.NE.0) GO TO 8
      IF(MQ.NE.0) GO TO 17
      GO TO 24
8     JJ=L(ZZ)
      DO 10 I=1,NN1
10    A(I)=(.0,.0)
      AP=1./(3.*U(1,JJ))
      A(JJ)=AP*(UT(JJ)-1)+AP/2.*(UT(JJ+1)-1)
      A(JJ+1)=AP/2.*(UT(JJ)-1)+AP*(UT(JJ+1)-1)
      A(JJ+N1)=AP*VT(JJ)+AP/2.*VT(JJ+1)
      A(JJ+N1+1)=AP/2.*VT(JJ)+AP*VT(JJ+1)
      DO 15 I=1,M
      I1=I*N1
```

```
      PA11=G*H(I)/9.
      A9=H(I)/(3.*Y(JJ)*U(I,JJ))
      A2=1./(3.*H(I)*U(I,JJ))
      PA1=PA11-A9+A2
      PA2=PA11/2.+A9+A2/2
      PB1=PA11/2.-A9/2.-A2
      PB2=PA11/4.+A9/2.-A2/2.
      A(JJ*I1)=A(JJ*I1)-(PA1*UT(JJ+I1-N1)+PA2*UT(JJ+1+I1-N1)
     $                  +PB1*UT(JJ+I1)+PB2*UT(JJ+I1+1))
      A(JJ+I1+1)=A(JJ+I1+1)-(PA2*UT(JJ+I1-N1)+PA1*UT(JJ+I1+1-N1)
     $                      +PB2*UT(I1+JJ)+PB1*UT(I1+JJ+1))
      A(JJ+I1+N1)=A(JJ+I1+N1)-(PB1*UT(JJ+I1-N1)+PB2*UT(JJ+1+I1-N1)
     $                        +PA1*UT(I1+JJ))+PA2*UT(I1+JJ+1))
15    A(I1+JJ+N1+1)=A(I1+N1+JJ+1)-(PB2*UT(I1+JJ-N1)+PB1*UT(I1+JJ+1-N1)
     $                            +PA2*UT(I1+JJ)+PA1*UT(I1+JJ+1))
      A(I1+N1+JJ)=A(I1+N1+JJ)-(R1/3.*UT(I1+JJ)+R1/6.*UT(I1+JJ+1))
      A(I1+N1+JJ+1)=A(I1+N1+JJ+1)-(R1/6.*UT(I1+JJ)+R1/3.*UT(I1+JJ+1))
      GO TO 32
17    JJ=L(ZZ)
      DO 19 I=1,NN1
19    A(I)=(.0,.0)
      I1=JJ*N1
      DO 22 I=1,N
      PA11=G*Y(I)/9.
      A9=1./(3.*Y(I)*U(JJ,I))
      A2=Y(I)/(3.*H(JJ)**2*U(JJ,I))
      PA1=PA11+A9+A2
      PA2=PA11/2.-A9-A2/2.
      PB1=PA11/2.+A9/2.+A2

      PB2=PA11/4.-A9/2.+A2/2
      A(I+I1)=-(PA1*UT(I+I1-N1)+PA2*UT(I+I1+1-N1)+PB1*UT(I+I1)
     $                                 +PB2*UT(I+I1+1))+A(I+I1)
      A(I+I1+1)=-(PA2*UT(I+I1-N1)+PA1*UT(I+I1+1-N1)+PB2*UT(I+I1)
     $                                  +PB1*UT(I+I1+1))+A(I+I1+1)
      A(I+I1+N1)=-(PB1*UT(I+I1-N1)+PB2*UT(I+I1+1-N1)+PA1*UT(I+I1)
     $                                  +PA2*UT(I+I1+1))+A(I+I1+N1)
22    A(I+I1+N1+1)=-(PB2*UT(I+I1-N1)+PB1*UT(I+I1+1-N1)+PA2*UT(I+I1)
     $                                  PA1*UT(I+I1+1))+A(I+I1+N1+1)
      GO TO 70
24    JJ=L(ZZ)
      JJ1=L(ZZ+1)
      JJ2=L(ZZ+2)
      JJ3=L(ZZ+3)
      DO 25 I=1,NN1
25    A(I)=(0.,0.)
      IF(JJ.NE.1) GO TO 27
      K=N1
      DO 26 J=JJ2,JJ3
      P1=Y(J)/3.
      A(J)=A(J)+P1*(UT(J)-1)+P1/2.*(UT(J+1)-1)
      A(J+1)=A(J+1)+P1/2.*(UT(J)-1)+P1*(UT(J+1)-1)
      A(J+K)=(P1*VT(J)+P1/2.*VT(J+1))+A(J+K)
26    A(J+K+1)=(P1/2.*VT(J)+P1**VT(J+1))+A(J+K+1)
27    DO 30 I=JJ,JJ1
      II=I*N1
      DO 28 J=JJ2,JJ3
      A9=H(I)/(3.*Y(J))
      A2=Y(J)/(3.*H(I))
      A3=A9+A2
      A4=-A9+A2/2.
      Q1=A9/2.-A2
```

```
      Q2=-A9/2.-A2/2.
      A(J+I1)  A(J+I1)-(A3*UT(J+I1-N1)+A4*UT(J+I1+1-N1)+Q1*UT(J+I1)
     $                                                  +Q2*UT(J+I1+1))
      A(J+I1+1)=A(J+I1+1)-(A4*UT(J+I1-N1)+A3*UT(J+I1+1-N1)+Q2*UT(J+I1)
     $                                                    +Q1*UT(J+I1+1))
      A(J+I1+N1)=A(J+I1+N1)-(Q1*UT(J+I1-N1)+Q2*UT(J+I1+1-N1)+A3*UT(J+I1)
     $                                                     +A4*UT(J+I1+1))
28    A(J+I1+N1+1)=A(J+I1+N1+1)-(Q2*UT(J+I1-N1)+Q1*UT(J+I1+1-N1)
     $                                 +A4*UT(J+I1)+A3*UT(J+I1+1))
30    CONTINUE
      GO TO 65
32    DO 35 I=1,MY
      DO 35 J=1,N1
35    D(I,J)=(.0,.0)
      DO 40 I=1,MY
      DO 38 J=1,N
      IF(YY(J+1).GE.Y1(I)) GO TO 36
      GO TO 38
36    IF(JJ.GT. J) GO TO 40
      D(I,J)=(YY(J+1)-Y1(I))/Y(J)+D(I,J)
      D(I,J+1)=(Y(I)-YY(J))/Y(J)+D(I,J+1)
      DL=0.0001*Y(JJ)
      IF(JJ.EQ.J)GO TO 37
42    D(I,J)=1./Y(J)/U(1,J)
      D(I,J+1)=-1./Y(J)/U(1,J)
      GO TO 40
37    D(I,J)=((YY(J+1)+DL-Y1(I))/(Y(J)+DL)-D(I,J))/DL/U(1,J)
      D(I,J+1)=((Y1(I)-YY(J))/(Y(J)+DL)-D(I,J+1))/DL/U(I,J)
      GO TO 40
38    CONTINUE
40    CONTINUE
      DO 60 I=1,MY
      PA1=(.0,.0)
      PB1=(.0,.0)
      DO 50 J=1,N1
      PA1=PA1+D(I,J)*VT(J)
50    PB1=PB1+D(I,J)*UT(J)
54    DO 55 J=1,NN1
55    PA1=PA1+A(J)*UT1(J,I)
      PA1=PA1/EJ(I)
      PB1=PB1/HV(I)
      PA1=2*(PA1-PB1)
      APLT=REAL(PA1)*RH(III)
      PHS=180*RH(III)*AIMAG(PA1)/3.1415926535
      LL=(I-1)*NF+II
      U2(LL,III)=APLT
      LL1=(I-1)*NF+II+MZ1
60    U2(LL1,III)=PHS
      III=III+1
      ZZ=ZZ+1
      IF(III.GT.NP)GO TO 200
      IF(ZZ.GT.MQ) GO TO 24
      IF(ZZ.GT.NQ) GO TO 17
      GO TO 9
70    DO 80 I=1,MY
      PA1=(.0,.0)
      DO 75 J=1,NN1
75    PA1=PA1+A(J)*UT1(J,I)
      PA1=PA1/EJ(I)*2
      APLT=REAL(PA1)*RH(III)
      PHS=180.*AIMAG(PA1)*RH(III)/3.1415926535
      LL=(I-1)*NF+II
      U2(LL,III)=APLT
```

```
      LL1=(I-1)*NF+II+MZ1
80    U2(LL1,III)=PHS
      IF(III.EQ.NP) GO TO 200
      III=III+1
      ZZ=ZZ+1
      IF(ZZ.GT.MO)GO TO 24
      GO TO 17
85    DO 90 I=1,MY
      DO 90 J=1,N1
90    D(I,J)=0.
      IF(JJ.NE.1)GO TO 115
      DO 110 I=1,MY
      DO 100 J=JJ2,JJ3
      IF(YY(J+1).GE.Y1(I).AND.YY(J).LE.Y1(I)) GO TO 95
      GO TO 100
95    D(I,J)=(YY(J+1)-Y1(I))/Y(J)
      D(I,J+1)=(Y1(I)-YY(J))/Y(J)
      GO TO 110
100   CONTINUE
110   CONTINUE
115   DO 130 I=1,M
      PA1=(.0,.0)
      DO 120 J=1,N1
120   PA1=PA1+D(I,J)*V1(J)
      DO 125 J=1,NN1
125   PA1=PA1+A(J)*UT1(J,I)
      PA1=PA1*2./EJ(I)
      APLT=REAL(PA1)*RH(III)
      PHS=180.*AIMAG(PA1)*RH(III)/3.1415926535
      LL=(I-1)*NF+II
      U2(LL,III)=APLT
      LL1=(I-1)*NF+II+MZ1
130   U2(LL1,III)=PHS
      IF(III.EQ.NP) GO TO 200
      III=III+1
134   ZZ=ZZ+4
      GO TO 24
200   CONTINUE
135   RETURN
      END
```

第四节　二维反演举例

通过对理论数据和实测数据所做的反演试算，说明本章介绍的方法和程序都是正确和实际可行的，收到了较好的效果。

一、用样条函数插值的方法反演理论数据

根据图5-1的二维模型做正演，用$\Delta h=0.55$公里，$\rho_2=300$欧姆米时地表测点处的$\rho_s^{\perp}$和$\rho_s^{\perp}$理论值模拟实测数据，采用样条插值的方法对Δh、ρ_2两个参数做了反演。表5-6给出了做为插值节点的Δh和ρ_2的值。表5-7给出了对不同初始模型参数进行反演的结果。从中可以看出，当用这种方法反演理论数据时，若所用初始参数值与实际参数值相差不大，则以较少次数的迭代就可以逼近实际参数值，即使初始参数与实际参数相差较大，只要多次迭代也能逼近真实值。由此可以说明这种方法和程序具有较好性能。

表 5-6　插值节点处的Δh和ρ_2值

Δh(km)	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.55	0.7	0.8
$\rho_2(\Omega\cdot m)$	30	100	300	1000	3000	10000			

表 5-7　不同初始模型参数时理论数据二维反演结果

实际值		初始值		最终拟合结果		初始均方差	迭代次数	最终均方差	机时 CPU(s)
$\rho_2(\Omega\cdot m)$	Δh(km)	$\rho_2(\Omega\cdot m)$	Δh(km)	$\rho_2(\Omega\cdot m)$	Δh(km)				
300	0.55	35	0.75	311.7	0.55	0.346	3	0.034%	60.77
300	0.55	4000	0.75	276.8	0.55	0.347	11	0.031%	120.00
300	0.55	2500	0.2	276.8	0.55	0.163	8	0.031%	90.00
300	0.55	100	0.25	345.8	0.57		3	0.09 %	60.77

二、用解析法求偏导数反演理论数据

依据图5-10的模型和表 5-8 中的参数计算出理论响应值并作为模拟实测数据。周期范围为$T=0.025\sim650$ 秒，共用频点 23个。Y1 (I) 表示测点的坐标。为了逼近实际情况，在模拟实测数据上加入了服从高斯正态分布、误差范围为±10%的随机误差，并在进一步计算中将计算模拟实测数据时的网格参数作了适当变动，相当于在模拟实测数据中加入了一定的系统误差。对几个电阻率值进行反演的结果列于表5-9中。从中可以看到，除ρ_3外，对其他参数均给出了与真值比较接近的结果。ρ_3误差较大，因为其是一薄层，故分辨能力较差，相应的分辨矩阵主元只有0.29。如几何参数同时参加

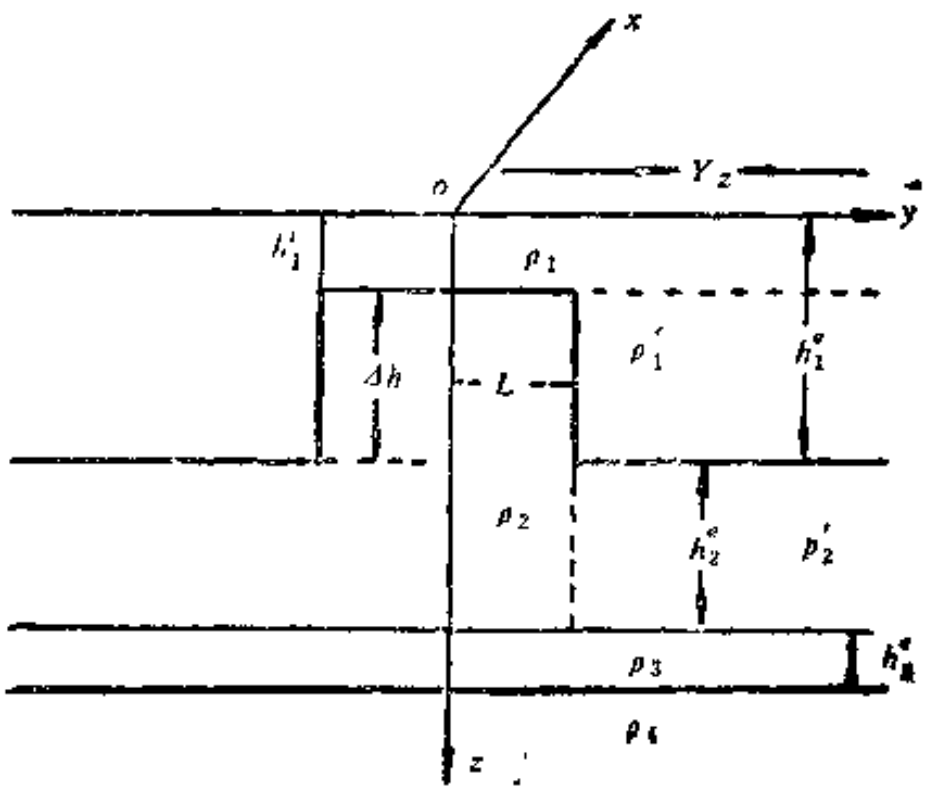


图 5-10　理论数据模型

表 5-8

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_i	0.01	0.02	0.03	0.03	0.06	0.08	0.11	0.15	0.2
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
h_i	0.3	0.5	0.8	1.0	0.7	0.3	0.05	0.1	0.2
i	1	2	3	4	5	6	7	8	
w_i	1.1	0.7	0.4	0.2	0.1	0.05	0.25	0.15	
i	9	10	11	12	13	14	15	16	
w_i	0.005	0.01	0.02	0.04	0.1	0.2	0.4	0.6	
i	17	18	19	20	21	22	23	24	
w_i	1.5	1.8	2.0	3.0	5.0	10.0	15.0	20.0	

续表

σ_1	ρ_2	ρ'_1	ρ'_2	ρ_3	ρ_4	A_1	L	L_1	h'_1	h_2'	h_3'	Y_2
1	10	1	10	4	6.67E11	0.9	2.95	0.09	0.99	3.3	0.35	62.625

Y1(1)	Y1(2)	Y1(3)	Y1(4)	Y1(5)	Y1(6)
0.0	1.8	2.5	3.0	3.8	5.0

表 5-3　用解析法求偏导数反演理论数据的结果

	ρ_1	ρ_2	ρ'_1	ρ'_2	ρ_3
精确值	1	10	1	10	4
初始值	2	15	2	15	8
终　值	1.03	10.33	0.93	8.79	2.04
分辨矩阵主元	1	1	1	1	0.29
$P_N^{①}$	0.1242				
$P_L^{②}$	$0.6379E^{-1}$				

① 目标函数均方差；

② 参数改正量均方差。

反演，则结果必会有进一步的改善。

三、用样条函数插值方法反演解释实际资料的效果

在固安霸县剖面上做了14个大地电磁测深点。剖面跨越了固安凹陷、牛驼镇凸起和霸县凹陷（见图5-11）。视电阻率曲线的频率范围为126赫兹～0.001赫兹。从实测的ρ_s和ρ_a曲线（图5-12）可以看出，它们在高频段和中频段的变化趋势基本一致，而在低频段则明显地出现分离现象。ρ_a曲线尾枝向上，ρ_s曲线尾枝向下。根据对MT 二维畸变效应及这一地区地电剖面的了解，我们选择了ρ_a曲线进行反演。

为了较准确地给出模型的初始参数，使用了改进的广义逆矩阵方法做一维形式化解释。一维反演的初始模型是采用博斯蒂克近似反演方法确定的。根据该地区已做过的电测深工作的结果可知，地下电性结构基本上是表层为高阻沉积，然后是低阻的新生代沉积，下伏基底为高阻的古生代地层或中等电阻率的中生代地层。鉴于主要关心的是基底介质的电性及其表面的起伏变化，所以对各测点上的ρ_a曲线按三层模型进行了形式化解释。根据一维形式化解释结果可知，以第四纪覆盖为主的浅部地层的电阻率在1.2～45欧姆米之间，多数在20欧姆米左右，厚度在400～1000米之间。其下第三纪低阻沉积的电阻率在5欧姆米左右，一般较厚。高阻基底的埋深在5号和12、13号测点处最大。1～7号测点上的曲线反映了固安凹陷的地电特征，基底最深达6000米左右。11～14号测点处的曲线反映了霸县凹陷的地电特征，基底最深达7000米左右。8、9号测点上的曲线反映了牛驼镇处高阻基底的凸起，上升至1000米左右。

在一维形式化解释结果的基础上，参考其他地质、地球物理资料做出了地电结构断面

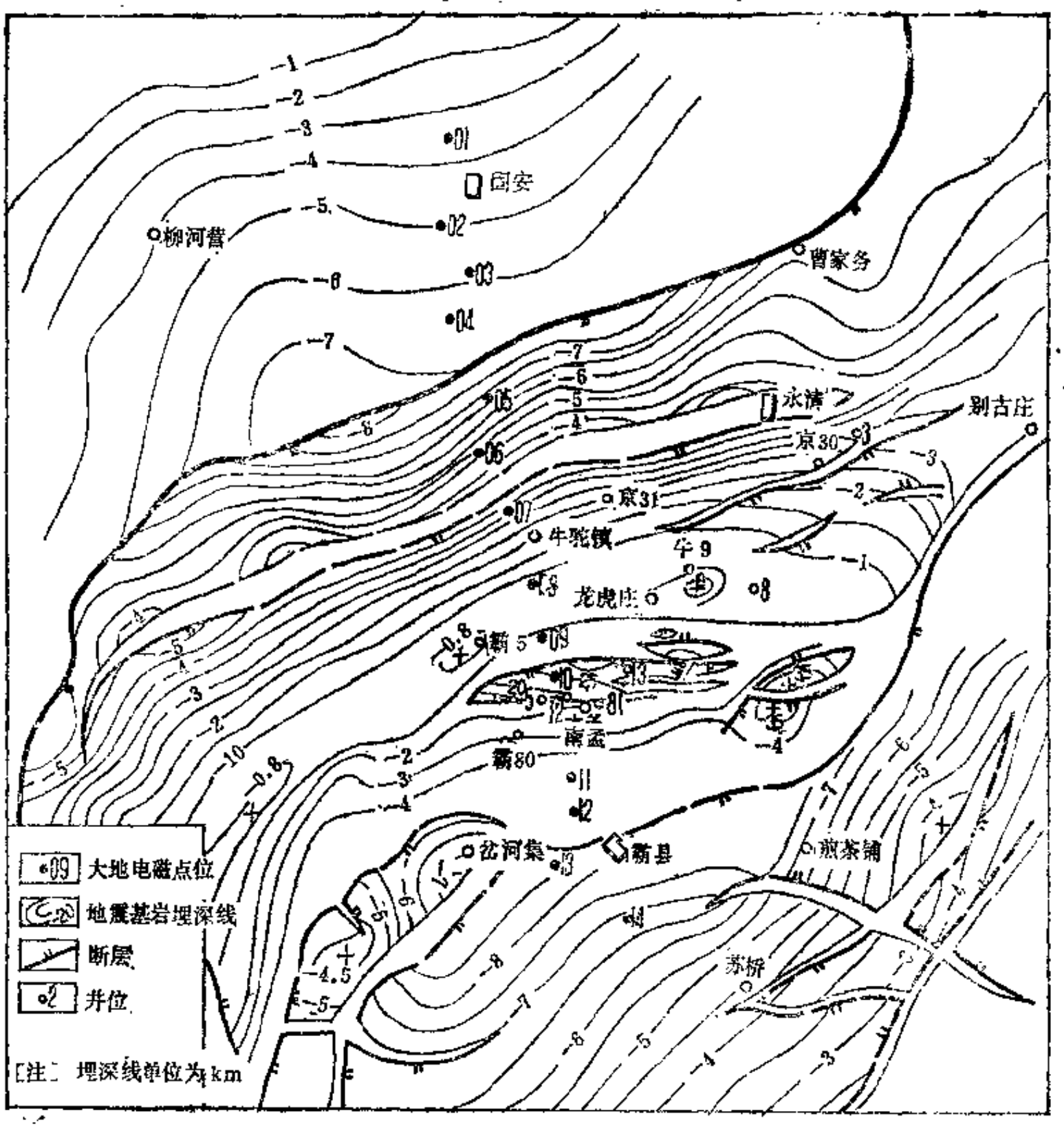


图 5-11　MT剖面位置图

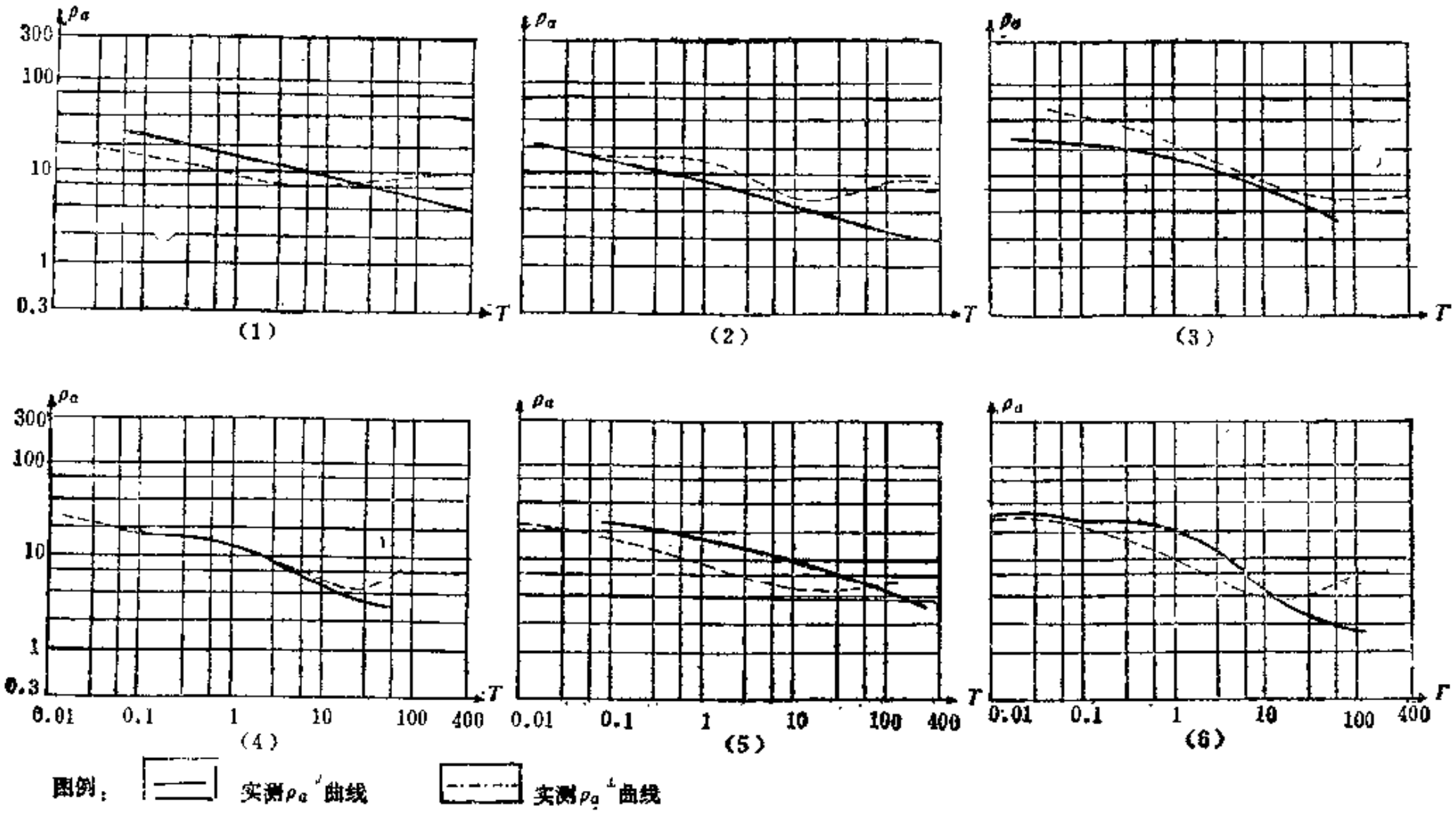

ρ_a
300
100
10
1
0.3
T
(1)
(2)
(3)
0.01
0.1
1
10
100
400
(4)
(5)
(6)
图例：
实测ρ_a'曲线
实测$\rho_a^{\perp}$曲线

图 5-12 (a)

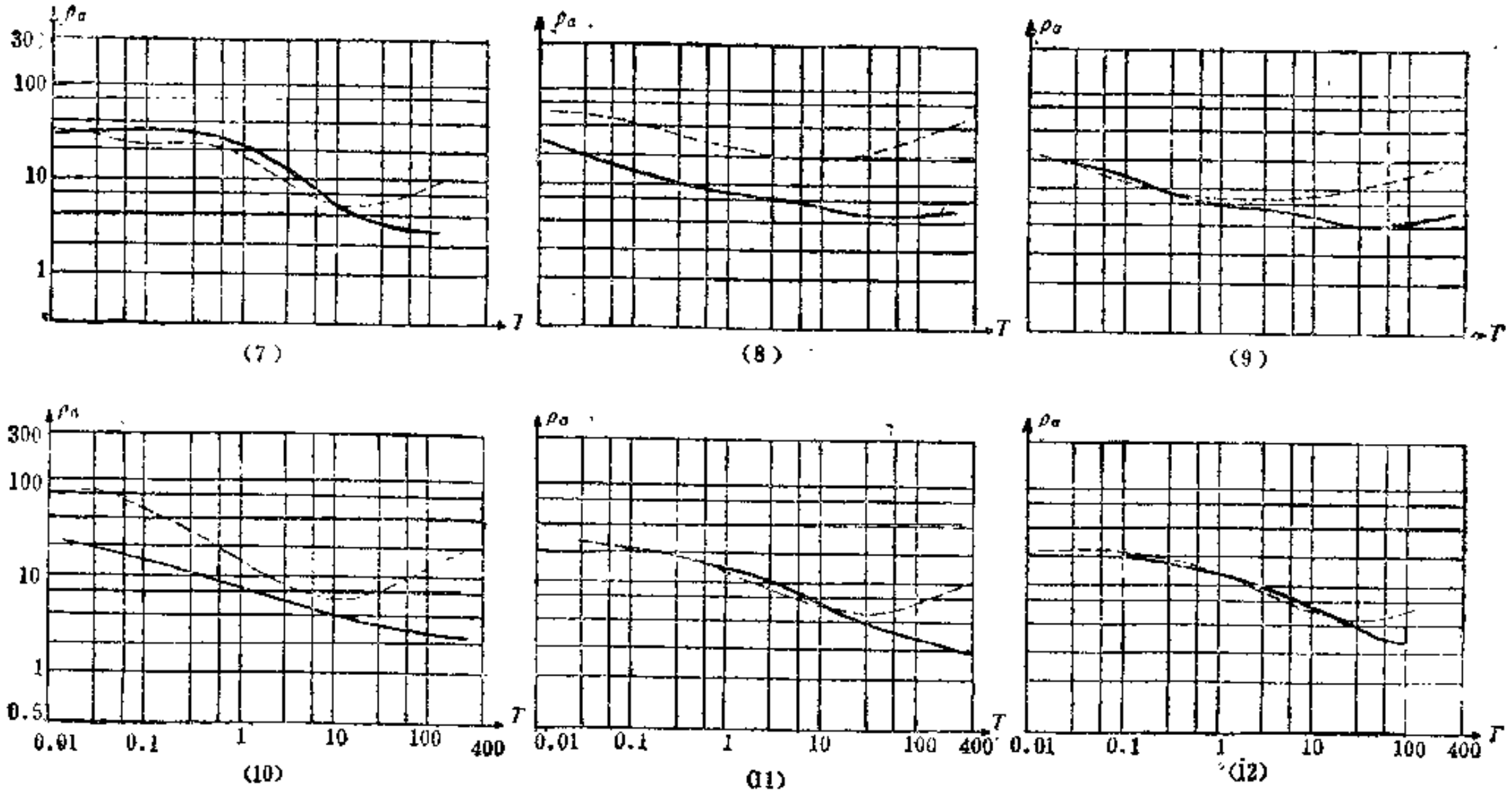

ρ_a
30
100
10
1
T
(7)
ρ_a
T
(8)
ρ_a
T
(9)
ρ_a
300
100
10
1
0.5
0.01
0.1
1
10
100
400
T
(10)
ρ_a
0.01
0.1
1
10
100
400
T
(11)
ρ_a
0.01
0.1
1
10
100
400
T
(12)

图 5-12 (b)

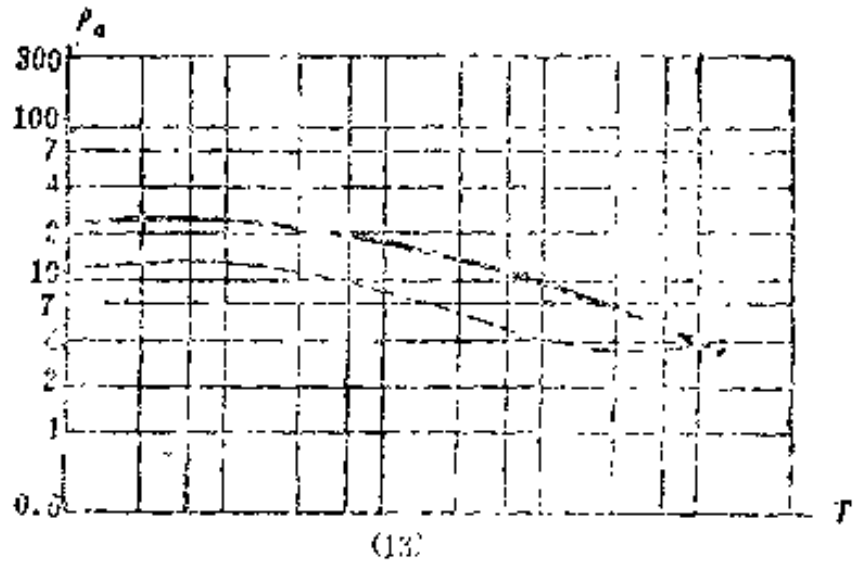


图5-12(c)

图 5-12　实测视电阻率曲线

图，并用一个三层的以地垒构造为主体的二维水平不均匀模型来近似固安霸县剖面下的地电结构（见图 5 -13）。

在二维反演中，确定了第二层的电阻率ρ_2，地垒高度Δh及侧面坡度α作为反演参数。选择时考虑到ρ_2是低阻，为灵敏参数，对视电阻率曲线后半部分的影响较大，而α和Δh决定了构造主要部分的形状。根据形式化解释的结果给定了第三层在整个剖面上的埋深，ρ_1、ρ_3和h_1则采用了平均值，将这些作为初始模型参数。

用本章第二节中介绍过的三变量三次样条函数插值的方法，对剖面上14个测点处的ρ_a''曲线进行了二维反演。作为举例，在图5-14中给出了剖面上 4 、11及14号测点处实测的和反演拟合后的ρ_a''曲线。一般地说，拟合后的ρ_a''曲线和实测曲线的基本特征相同，曲线极小值点的位置基本一致。表5-10给出了对应不同初始模型参数值的反演结果。从中可以看到，α的最终结果是一样的，ρ_2的变化也不大，在 5 欧姆米左右，只有Δh收敛在二个值上。参考其他的物探及地质资料，认为Δh为5.6公里左右比较合理。

大地电磁二维反演解释的结果与根据其他物探资料获得的地下构造轮廓是一致的。直流电测深资料给出的固安凹陷的最大深度为3.8公里，霸县凹陷的最大深度为5.4公里，牛驴镇凸起的基底深度为 1 公里左右。大地电磁测深给出两个凹陷的最大深度都较直流电测深给出的略大一些。在这一地区也做过地震勘探工作，但在剖面上11、12号测点处为空白区。大地电磁测深的结果在一定程度上弥补了这个不足。

二维反演用的模型类型与一维形式化解释的结果在细节上有一些差别，前者修改成对称的，对电性界面的变化也做了适当的简化。为了进一步逼近实际情况，在二维反演的基础上，又进行了二维正演数值模拟以修改模型参数。由于感兴趣的主要勘探目标是基底深

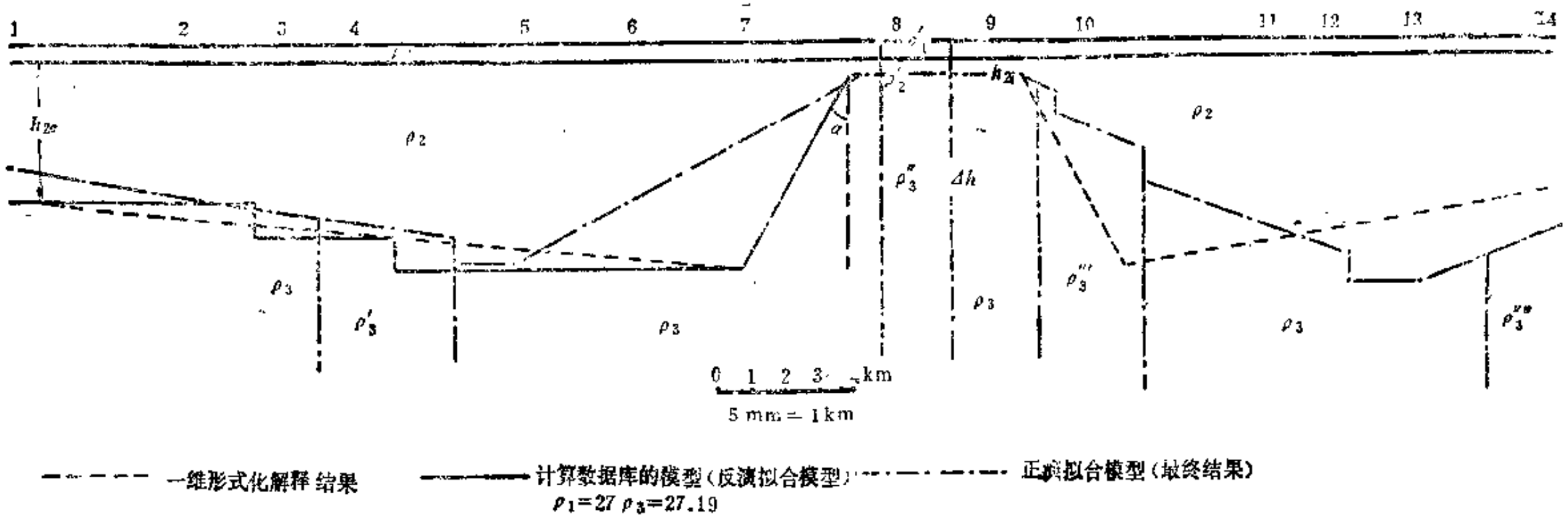


图 5-13 MT 剖面地电构造模型

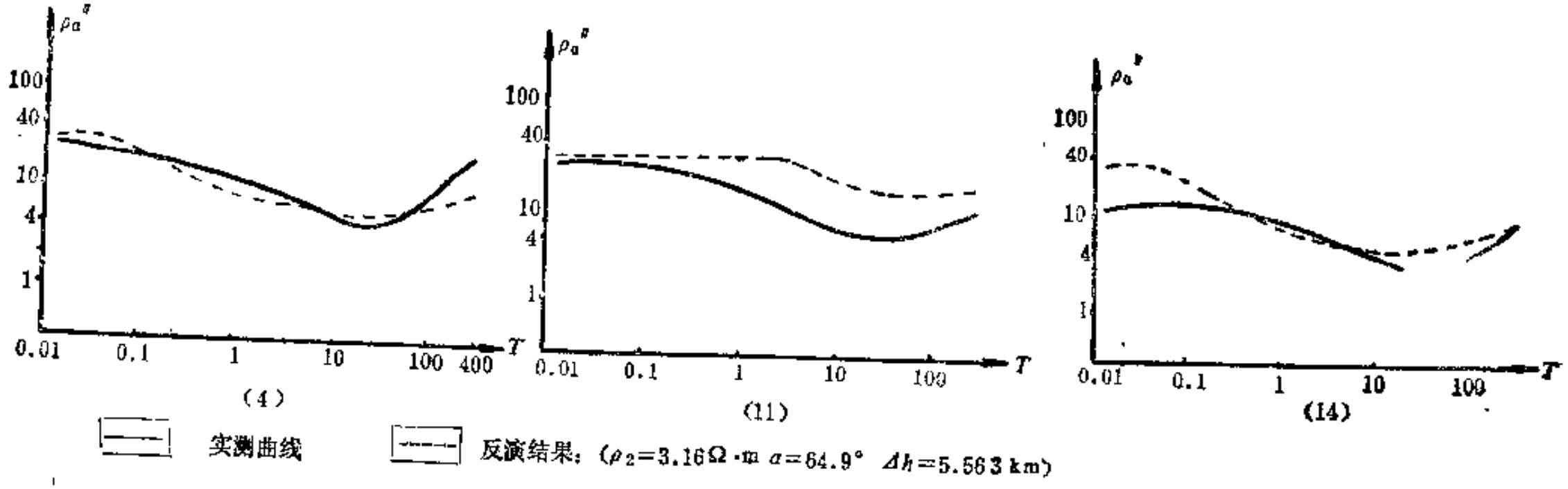


图 5-14　4、11、14号测点处实测的及反演拟合的ρ_a''曲线

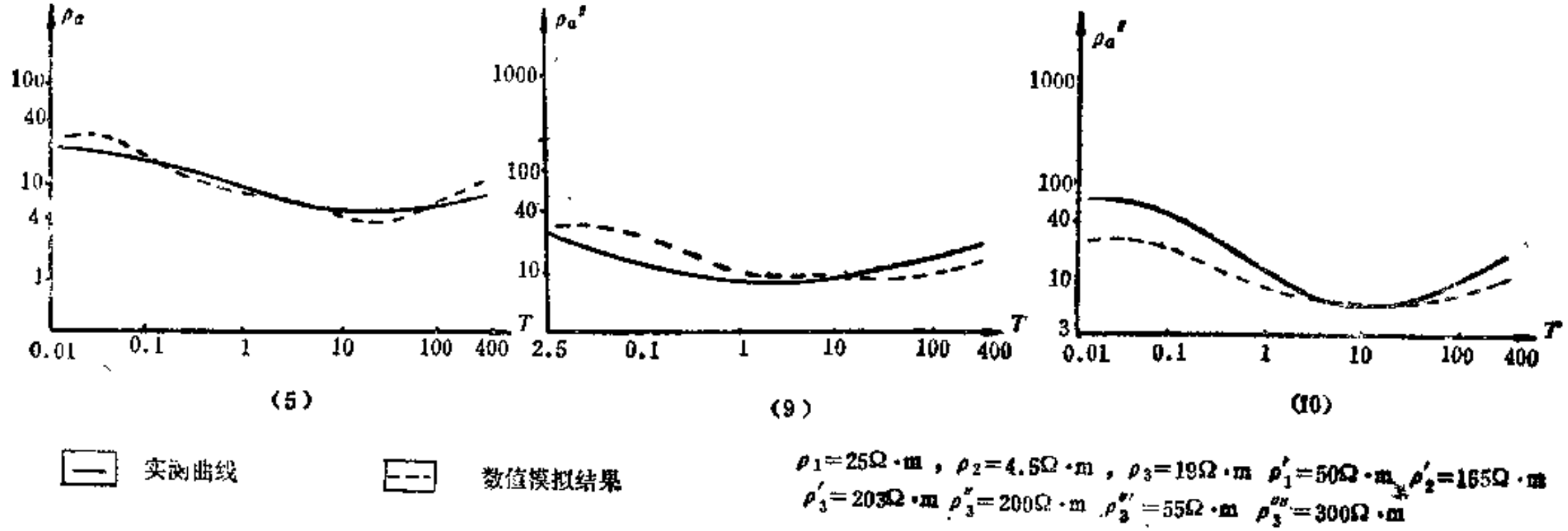


图 5-15　一些测点上实测的及二维数值正演修改后拟合的ρ_a''曲线

表 5-10　对应不同初始值的二维反演结果

初始值			输出值			初始误差	迭代次数	均方差	CPU时间
$\rho_2(\Omega\cdot m)$	$\alpha(^\circ)$	Δh(km)	ρ_2	α	Δh				
6.5	51.566	5.5	3.757	64.9	5.64	0.787	8	0.579	365(s)
1.5	28.648	3.	5.08	64.9	2.73	0.852	7	0.238	368
5.05	64.7	5.725	3.217	64.9	5.58	0.571	7	0.515	368
5.05	64.7	5.45	5.625	64.9	2.99	0.575	7	0.243	194
5.05	64.7	5.5	3.217	64.9	5.57	0.565	7	0.487	365

度，故对反演模型做了一些细节上的加工，以充分体现出基底表面的起伏及其电性的横向变化，也考虑了凸起部分电性的横向变化。其他参数不变（参见图 5-13）。在图 5-15中作为举例给出了剖面上 5 、 9 及16号测点上的实测ρ_s''曲线及用二维数值正演方法修改后拟合的ρ_s''曲线。拟合情况比二维反演的要好。

四、用解析求偏导数的方法反演解释实际资料的结果

这里用的实测资料与前面用过的相同。根据ρ_s''曲线一维形式化解释结果并考虑到用解析法求偏导数的特点，二维模型设计成如图5-16所示的模型。模型初始参数、测点坐标及

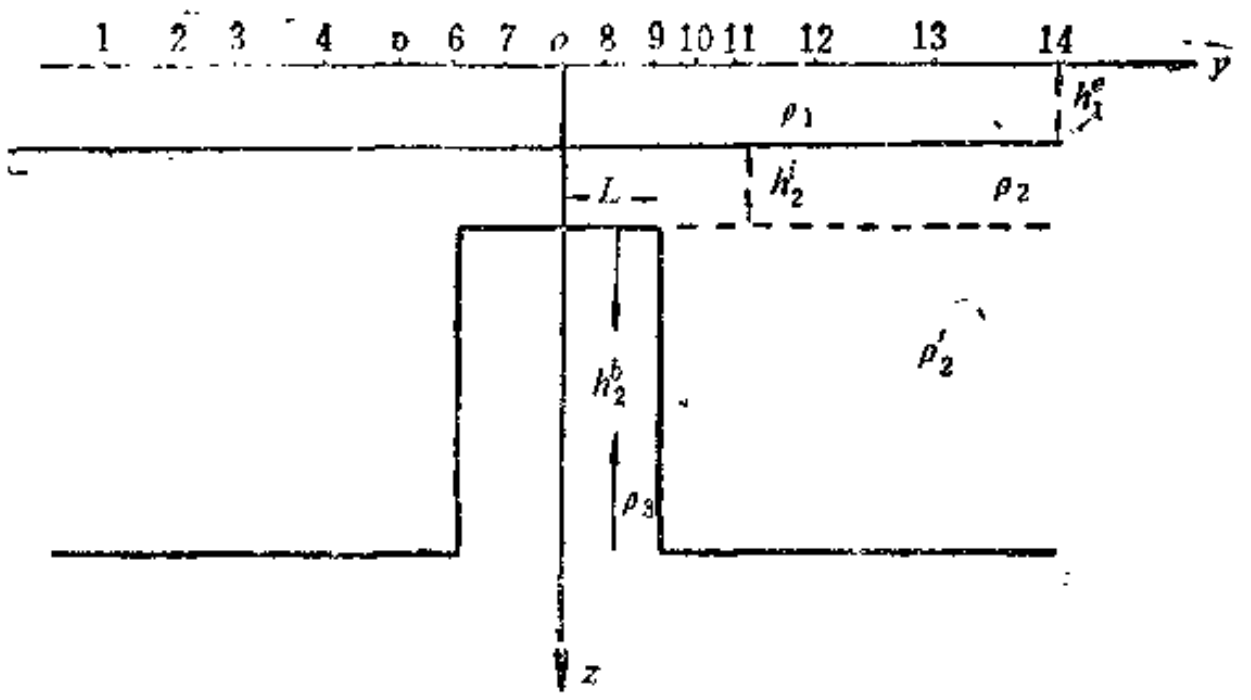


图 5-16　二维模型类型

半剖面有限元网格的参数列于表5-11中。（表中距离单位为公里，电阻率单位为欧姆米）。反演参数除三种电阻率外，还选择了w_t，以便更好地确定地垒的宽度。

通过六次迭代，参数相对改正量由0.22984降为程序终止时的0.10064。部分测点上的视电阻率曲线拟合情况见图5-17，反演结果列于表5-12中。

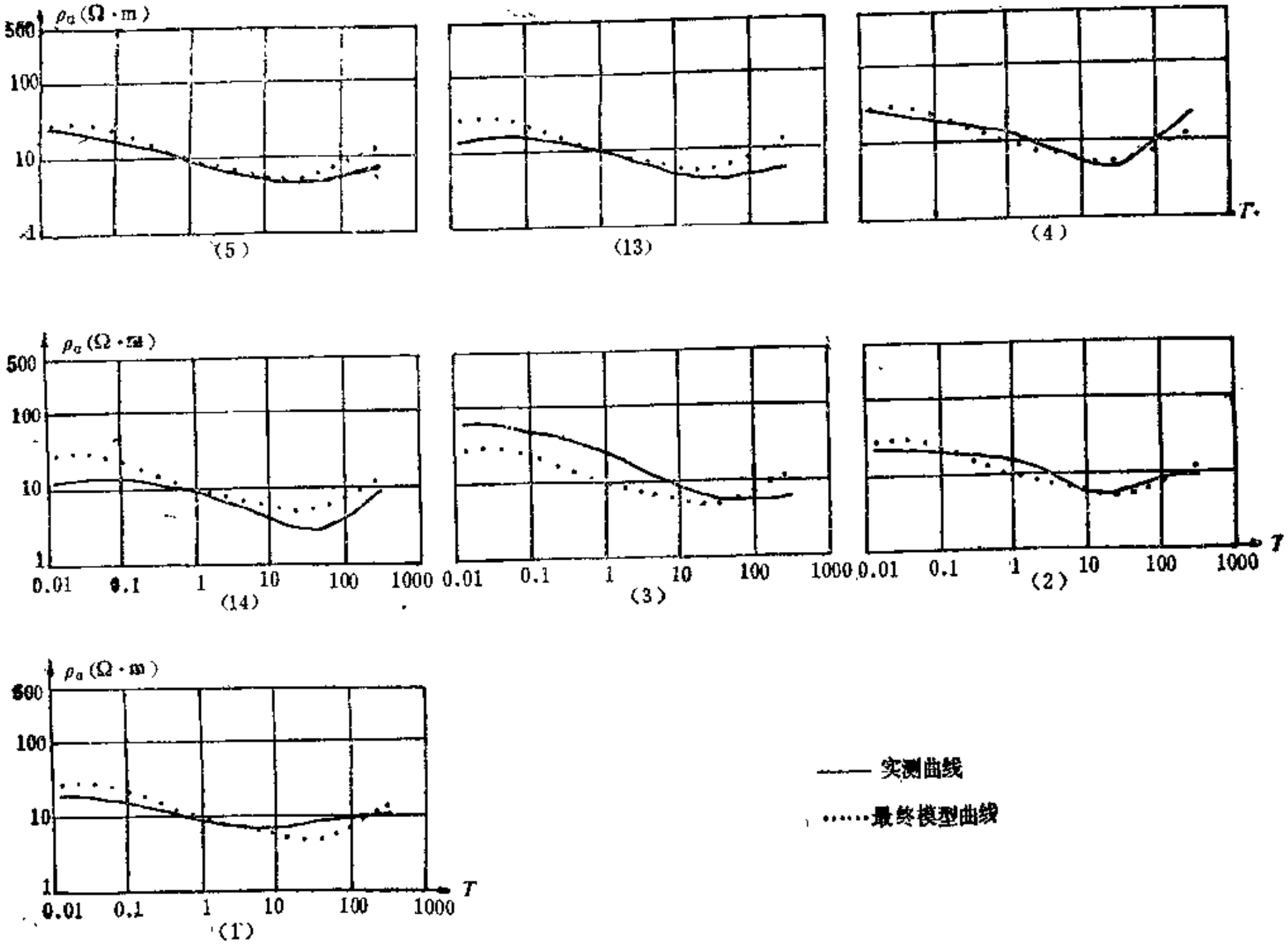


图 5-17　部分测点上实测的及拟合的视电阻率曲线

表 5-11　模型初始参数(d)、测点坐标(c)及网格参数(a)、(b)

j	1	2	3	4	5	6	7	8

(a)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
h_i	1.0	0.5	0.25	0.1	0.015	0.03	0.05	0.08
i	9	10	11	12	13	14	15	16
h_i	0.15	0.18	0.015	0.03	0.05	0.08	0.15	0.2
i	17	18	19	20	21	22	23	
h_i	0.08	0.12	0.22	0.43	0.75	1.3	2.4	

(b)

w_j	1.2	0.93	0.7	0.5	0.3	0.2	0.1	0.05
j	9	10	11	12	13	14	15	16
w_j	0.03	0.01	0.007	0.01	0.02	0.035	0.06	0.1
j	17	18	19	20	21	22	23	24
w_j	0.16	0.25	0.5	1.0	2.0	3.5	6.0	10.0

(c)

	Y1(1)	Y1(2)	Y1(3)	Y1(4)	Y1(5)	Y1(6)	Y1(7)	Y1(8)	Y1(9)	Y1(10)	Y1(11)	Y1(12)	Y1(13)	Y1(14)
测点位置	1.1	1.6	4.3	5.4	8.7	9.7	11.4	11.8	14.0	16.5	18.0	18.7	21.6	26.5
测点号	8	9	10	7	6	11	12	5	13	4	14	3	2	1

(d)

ρ_1	ρ_2	ρ_3	L	h_1^e	h_2^f	h_2^b	w_A	h_0
27.0	5.05	27.2	4.04	0.505	0.525	5.3	27.68	2.0

表 5-12　用解析求偏导数的方法进行二维反演解释的结果

参数 / 项目	w_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	L	P_N	P_E
初　值	1.2	27	5.05	27.02	4.04	0.419	0.2298
终　值	1.054	26.27	4.9	39.33	3.894	0.416	0.10064
分辨矩阵主元	0.91	0.991	0.999	0.994			

就目前的方法和计算技术发展情况看，大地电磁资料二维反演解释的计算工作量比较大，尚未达到常规解释工作的程度。但在有利条件下，即原始资料质量好，有其他资料可供参考时，对一些处于重要位置的剖面做二维解释能起到检验和改进一维形式化解释结果的作用。

参 考 文 献

〔1〕 陈乐寿，“大地电磁测深资料的二维正、反演问题”，《大地电磁测探研究》中第七章，地震出版社，1984年。

〔2〕 陈乐寿，“有限元法在大地电磁场正演计算中的应用”，《石油物探》，第三期；p84～103，1981年。

〔3〕 陈乐寿，孙必俊，“有限元法在大地电磁二维正演计算中的改进”，《石油地球物理勘探》，第三期，p69～72，1982年。

〔4〕 胡建德，王光锷，陈乐寿，李维敏，“大地电磁场二维正演计算中若干问题的讨论”，《石油地球物理勘探》，第六期，p47～55，1982年。

〔5〕 胡建德，蔡纲，“用三角形二次插值有限元法计算二维大地电磁测深曲线”，《石油地球物理勘探》，第四期，p.358～367，1984年。

〔6〕 孙必俊，陈乐寿，王光锷，马涛，“关于大地电磁测深资料反演问题”，《地球物理学报》，28卷，第二期，p218～229，1985年。

〔7〕 陈明生，陈乐寿，王天生，白改先，“用改进广义逆矩阵方法解释大地电磁测深及电测深资料”，《地球物理学报》，26卷，第四期，p390～400，1983年。

〔8〕 邓前辉、白改先，“互功率法在大地电磁阻抗张量估算中的应用”，《石油地球物理勘探》第四期，1982年。

〔9〕 晋光文，王家映，王天生，“一种大地电磁张量阻抗的计算方法”，《地球物理学报》25卷，增刊，1982年。

〔10〕 陈乐寿，白改先，“处理大地电磁资料的瞬时谱方法”，《石油地球物理勘探》第六期，1984年。

〔11〕 陈乐寿，王天生，“几种简易有效的大地电磁一维反演方法”，《石油地球物理勘探》第三期，1985年。

〔12〕 “估算张量阻抗的大地电磁测深资料处理方法”，《大地电磁测深》，地震出版社，1981年。

〔13〕 “大地电磁测深曲线的病态反演”，《大地电磁测深》，地震出版社，1981年。

〔14〕 蔡纲，陈乐寿，马涛，“华北平原GB大地电磁剖面的二维解释”，《石油地球物理勘探》，Vol. 22，No. 2，p.169～179，1987年。

〔15〕 潘瑜，王光锷，陈乐寿，严又生，“二维地电构造大地电磁测深资料的解析方法”，《石油地球物理勘探》，Vol.22，No.3，p315～328，1987年。

〔16〕 L. Cagniard, “Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting,” Geophysics, V.18, No.3, 1953。

〔17〕 D. L. B. Jupp and K. Vozoff, “Two-dimensional magnetotelluric inversion,” Geophys. J. R. astr. Soc.(1977), Vol.50, p.333～352。

〔18〕 Pelton, W. H. et al, “Inversion of two-dimensional resistivity and induced-polarization data”, Geophysics Vol43, No.4, p788～803, 1978。

〔19〕 W. L. Rodi, “A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data”, Geophys. J. R. astr. Soc. (1976) Vol.44, p483～506。

[General Information]
书名=大地电磁测深资料处理与解释
作者=
页数=236
SS号=10104774
出版日期=

封面
书名
版权
前言
目录
正文