实用决策方法——

层次分析法原理

许树柏　编著

天津大学出版社

实用决策方法——

层次分析法原理

许树柏　编著



天津大学出版社

1988

ZQ100/34-04

内 容 简 介

层次分析法是七十年代中期确立的一种实用的多准则决策方法，可以统一处理决策中的定性与定量因素，具有实用性、系统性、简洁性等优点。近年来，已在我国社会经济多个领域决策分析中得到应用，并从理论上开展了研究，一些高等院校将层次分析法列入教学内容。本书比较系统地论述了层次分析法的原理，包括递阶层次结构原理、两两比较标度原理和排序原理，并对层次分析法的某些分支和扩展方法，如模糊层次分析法、动态层次分析法和反馈系统的排序方法，也在原理上进行了论述。书中收集、整理了大量国内外的研究成果，内容丰富，是国内第一本理论比较系统、完整的著作。

本书可供高等院校管理工程、系统工程等专业研究生和高年级本科生教学用，也可供有关工程技术人员、管理干部参考。在提倡和强调领导决策科学化和民主化的今天，对各级领导干部尤具参考价值。

实用决策方法——
层次分析法原理
许树柏　编著
※
天津大学出版社出版
（天津大学内）
河北省邮电印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
※
开本：850×1168毫米1/32　印张：7 5/16　字数：200千字
1988年5月第一版　1988年5月第一次印刷
印数：1—7000
ISBN 7-5618-0018-5
Z.4
定价：1.50元

前　言

层次分析法是一种实用的多准则决策方法。它把一个复杂问题表示为有序的递阶层次结构，通过人们的判断对决策方案的优劣进行排序。这种方法能够统一处理决策中的定性与定量因素，具有实用性、系统性、简洁性等优点，特别适合在社会经济系统的决策分析中使用。层次分析法简单的表现形式与它深刻的理论内容紧密联系在一起。简单的表现形式使得层次分析法有着广泛的应用领域，深刻的理论内容确立了它在多准则决策领域中的地位。了解和掌握层次分析法的原理，不仅能够更有效、灵活地运用这种方法，也为研究和发展适合我国特点的决策方法创造了条件。本书着重讨论层次分析法的原理，包括递阶层次结构原理、两两比较标度原理和排序原理。对于层次分析法的某些分支和扩展方法。如Fuzzy层次分析法，动态层次分析法和反馈系统的排序方法，也就其原理进行了论述。

层次分析法自四年前介绍到我国以来，已在经济分析和规划、能源和资源政策分析、科研管理、人才预测与规划、产业部门规划、企业管理等许多领域得到了应用，系统工程、管理工程、数量经济学等一些学科的学者对层次分析法的基本理论开展了研究工作，不少高等院校已将层次分析法列入运筹学课程的教学内容之中。在这种情况下，很需要一本系统论述层次分析法原理的书，以推动这种方法的学术研究与应用。本书希望导致学术界的同行，特别是有志深入研究层次分析法的朋友有益的思考，并期待着他们的指正。

层次分析法的理论结构是这一方法的创始人T.L.Saaty教授于1980年在他的有名著作《层次分析法》中确立的。六年来，

Saaty和许多学者在发展层次分析法的理论方面做了大量工作。本书是在参考层次分析法国外文献资料的基础上，根据作者近年来的研究成果写成的。书中提出了目前层次分析法中尚未解决的一些问题，以期引起读者对层次分析法理论研究的兴趣。

在本书写作过程中，作者的导师刘豹教授的指导起了很大作用，他不断给予的鼓励是对作者的一种鞭策。作者的同事和金生近年来与作者合作研究层次分析法，使作者得益匪浅，他对于本书的写作也提出了很多宝贵建议。北京大学数学系王莲芬指出了本书初稿中的一些不妥之处。Saaty教授十分关心本书的写作，他所提供的大量资料和与作者的多次通信，对本书思想和观点的形成有重要影响。作者希望向上述提到的各位表示谢意。

最后，作者特别感谢本书的审阅人，天津大学李光泉教授，他不仅自始至终关心本书的写作，而且投入很大精力仔细阅读了本书初稿，提出大量重要而具体的意见，使本书有了很大改进。

许树柏

一九八六年九月十四日

目　　录

第一章　绪论……（ 1 ）

第一节　定性与定量相结合的决策分析方法
——层次分析法……（ 1 ）
第二节　AHP的基本步骤 ……（ 6 ）

第二章　层次分析法的基本原理……（ 14 ）

第一节　社会经济系统的测度……（ 14 ）
第二节　递阶层次结构的基本原理……（ 17 ）
第三节　AHP的比例标度 ……（ 20 ）
第四节　单一准则下的排序原理……（ 22 ）

第三章　递阶层次结构的数学原理……（ 26 ）

第一节　递阶层次结构的数学表示……（ 26 ）
第二节　递阶层次结构的确定……（ 30 ）
第三节　递阶层次结构中的排序……（ 34 ）
第四节　递阶层次中的结构依存性……（ 37 ）

第四章　单一准则排序的特征根方法……（ 41 ）

第一节　引言……（ 41 ）
第二节　单一准则下排序的特征根方法的数学原理…（ 43 ）
第三节　判断矩阵的一致性及其检验……（ 51 ）
第四节　判断矩阵的灵敏度分析……（ 59 ）

第五节　新元素导入的保序性原理……（ 68 ）
第六节　判断矩阵的左右主特征向量……（ 76 ）

第五章　AHP公理体系……（ 82 ）

第一节　引言……（ 82 ）
第二节　AHP公理 ……（ 83 ）
第三节　AHP公理的应用 ……（ 88 ）

第六章　AHP中的一般排序原理……（ 100 ）

第一节　引言……（ 100 ）
第二节　对数最小二乘排序方法……（ 102 ）
第三节　最小二乘排序方法……（ 105 ）
第四节　梯度特征向量排序法(CEM) ……（ 109 ）
第五节　保序性问题与特征根法、对数最小二乘法、
最小二乘法的比较研究……（ 114 ）
第六节　不完全判断信息下的排序问题……（ 121 ）
第七节　非线性特征根排序方法……（ 127 ）

第七章　Fuzzy层次分析法 ……（ 133 ）

第一节　引言……（ 133 ）
第二节　Fuzzy AHP的基本概念……（ 134 ）
第三节　比较判断标度的Fuzzy数表示问题……（ 136 ）
第四节　Fuzzy AHP的单一准则排序计算……（ 140 ）
第五节　群组决策中使用的Fuzzy AHP……（ 142 ）

第八章　不确定型AHP……（ 149 ）

第一节　引言……（ 149 ）
第二节　区间标度，区间判断矩阵及区间特征向量的
计算……（ 150 ）

第三节　不确定AHP在单一准则下的排序 ……（ 155 ）
第四节　不确定AHP的层次组合排序 ……（ 162 ）

第九章　反馈系统排序……（ 166 ）

第一节　系统中的依存关系和反馈层次结构……（ 166 ）
第二节　超矩阵与反馈系统排序理论……（ 171 ）
第三节　循环层次结构中的排序问题……（ 178 ）
第四节　反馈系统的排序步骤……（ 180 ）

第十章　层次分析法中的动态排序……（ 194 ）

第一节　层次分析法中的动态排序问题……（ 194 ）
第二节　一种新的动态排序模型……（ 199 ）

参考文献……（ 206 ）

第一章 绪 论

本章旨在使读者对层次分析法有一个概括的了解。在简单说明它是怎样产生的，它的基本特征是什么，它在哪些方面能够应用，它的优点和局限性何在之后，概括地介绍层次分析法的基本步骤。

第一节 定性与定量相结合的决策分析方法
——层次分析法

决策是人们进行选择或判断的一种思维活动。人们几乎每时每刻都需要决策。有些决策是简单和容易的，例如几点起床，早饭吃些什么，穿什么样的衣服等等。有些决策是复杂和困难的，它们常常困扰着人们，例如，报考什么样的学校和专业，如何选择理想的爱人，为疑难病症患者决定治疗方案，政治家们往往需要就影响千万人命运和前途的问题进行决策，例如战争与和平问题，经济发展战略和计划等等。

决策是科学也是艺术。说它是科学，因为人们进行选择和判断应当尽可能地符合客观实际。这就要求决策者尽可能真实地了解问题的背景、环境和发展变化规律，尽可能详细地占有资料，尽可能广泛地掌握正确的决策方法和各种决策辅助工具。说它是艺术，因为各种选择和判断终究是由人作出的，决策的正确与否，优良可劣，与决策者的素质、经验、才能有很大关系。

数学工具在决策中起着重要作用。在复杂的决策问题面前，人们往往需要利用数学模型对实际问题进行抽象和简化，进而对实际问题进行系统分析。在决策过程中利用数学模型的优点在于：分析

问题容易，目的性强，可以进行模拟计算，便于应用计算机等先进手段。由于人们的选择和判断总是在某种标准下进行的，在这个标准下，作出“好的”决策，这就促成与决策有关的应用数学分支：线性规划、非线性规划、多目标规划、多准则决策……的迅速发展。最优化技术几乎成了决策分析的代名词。到了本世纪七十年代末、八十年代初，最优化技术发展得越来越抽象，使绝大多数工程技术人员望而生畏，数学模型的规模越来越大，对计算机的内存与运算速度要求越来越高，一项复杂的系统分析耗资巨大，以至形成了一种数学模型的“泥潭”。在这种情况下，一些有远见的运筹学家开始冷静地看待和正确地评价复杂的数学模型对决策分析的作用。问题是显而易见的，人们无法忽视或回避决策过程中决策者的选择和判断所起的决定作用。数学模型并非万能工具，决策中总有大量因素无法定量地表示。问题的答案几乎再明白不过了：运筹学家们必须回到决策的起点和终点——人的选择和判断上来，认真地研究决策思维的规律，也就是人们进行选择和判断的规律。

正是在这种背景下，美国著名运筹学家，匹兹堡大学教授T.L.Saaty于七十年代中期提出了层次分析法（The Analytic Hierarchy Process，以下简称AHP）。

尽管AHP的应用需要掌握简单的数学工具，尽管AHP有深刻的数学原理，但它本质上是一种决策思维方式。AHP把复杂的问题分解为各个组成因素，将这些因素按支配关系分组形成有序的递阶层次结构，通过两两比较的方式确定层次中诸因素的相对重要性，然后综合人的判断以决定决策诸因素相对重要性总的顺序。AHP体现了人们的决策思维的这些基本特征，即分解、判断、综合。

AHP作为一种有用的决策工具有着明显优点：

第一是它的适用性。用AHP进行决策，输入的信息主要是决策者的选择与判断，决策过程充分反映了决策者对决策问题的认识，加之很容易掌握这种方法，这就使以往决策者与决策分析者难

于互相沟通的状况得到改变。在多数情况下，决策者直接使用AHP进行决策，这就大大增加了决策的有效性。

第二是它的简洁性。了解AHP的基本原理，掌握它的基本步骤，对于具有高中文化程度的人并不困难，用AHP进行决策分析可以不用计算机。一个简单计算器足以完成全部运算，所得的结果简单明确，一目了然。

第三是它的实用性。AHP不仅能进行定量分析，也可以进行定性分析。它把决策过程中定性与定量因素有机地结合起来，用一种统一方式进行处理。AHP也是一种最优化技术，从学科的隶属关系看，人们往往把AHP归为多目标决策的一个分支。但AHP改变了最优化技术只能处理定量分析问题的传统观念，使它的应用范围大大扩展。许多决策问题如资源分配、冲突分析、方案评比、计划等均可使用AHP，对某些预测、系统分析、规划问题，AHP也不失为一种有效方法。

第四是它的系统性。人们的决策大体有三种方式。第一种是因果推断方式，在相当多的简单决策中，因果推断是基本方式，它形成了人们日常生活中判断与选择的思维基础。事实上，对于简单问题的决策，因果推断是够用的。当决策问题包含了不确定因素，则需要第二种推断方式，即概率方式。此时决策过程可视为一种随机过程。人们需要根据各种影响决策的因素出现的概率，结合因果推断进行决策。近年来发展起来的系统方式是第三种决策思维方式。它的特点是把问题看成一个系统，在研究系统各组成部分相互关系以及系统所处环境的基础上进行决策。对于复杂问题系统方式是有效的决策思维方式。相当广泛的一类系统具有递阶层次的形式。AHP恰恰反映了这类系统的决策特点。当然，由递阶层次可以进而研究更复杂的系统，如反馈系统。AHP还可以加以扩展。

一般来说，越深刻的科学理论越有着简单的表现形式，AHP正是如此。如前所述，很容易了解和掌握AHP的基本原理和方法，这是AHP的一个方面；另一方面AHP有着深刻的数学背景。真正

搞清AHP的原理需要弄懂AHP的公理体系，它的递阶层次结构的数学形式，排序理论以及一般系统理论，需要涉及Perron-Frobineus理论，Fuzzy数学、数理逻辑、统计推断、度量理论等多个数学分支。本书着重研究AHP的数学原理，以便能够较深入地掌握和熟练地运用AHP。

Saaty提出AHP，可以追溯到七十年代初。1971年，他曾为美国国防部研究所谓“应急计划”，1972年为美国科学基金会研究电力在工业部门分配问题，1973年为苏丹政府研究苏丹运输问题。由于研究工作需要，他感到必须考虑综合定性与定量分析、使人脑决策思维过程模型化（或规范化）的方法，从而初步形成了AHP理论的核心，即很多复杂系统可以简化为有序的递阶层次结构，决策问题通常表现为一组方案优先顺序的排列问题，而这种排序又可以通过简单的两两比较形式导出。这些思想始见于Saaty分别于1972年和1975年内部出版的《用于排序和计划的特征根分配模型》，和《层次和排序——特征根分析》。正式提出AHP的论文，一般认为是Saaty在1977年举行的第一届国际数学建模会议上发表的《无结构决策问题的建模——层次分析理论》。从那时起，AHP开始引起人们的注意，并且应用在各个领域。1980年Saaty出版了关于AHP的专著，全面系统地论述AHP的原理、应用及数学基础。随后他又陆续写出两本侧重论述AHP应用的著作，即1981年出版的《排序的逻辑》（与L.G.Vargas合著），和1982年出版的《领导者的决策》。近年来，Saaty和近百位学者在发展AHP的理论和推广AHP在各类问题的应用方面完成了许多工作。

AHP的应用范围十分广泛，根据对国外公开发表的AHP应用性文章119篇的统计，AHP的应用共涉及18个领域，它们是：

能源政策和资源分配	18篇
企业管理与生产决策	18篇
管理信息系统	16篇
政治和冲突分析	15篇

经济分析和计划	11篇
行为科学	7篇
医疗卫生	7篇
会计	7篇
社会学	4篇
教育	3篇
人才	2篇
军事指挥	2篇
地理	2篇
运筹学方法评价	2篇
建筑学	2篇
科学技术发展	1篇
环境	1篇
法律	1篇

象很多其它正在发展的理论和方法一样，AHP不可能而且不应该是完美无缺的。自80年以来对AHP感兴趣的人多了，相应地批评也多了。在理论上，有的人提出AHP中判断应该用模糊集表示，一致性检验要有客观标准，特征值计算方法不一定是排序的最好方法，对各层元素权重进行合成时有必要进行第二级加权等等，这些批评导致了AHP理论的不断发展。例如，最近Saaty关于AHP公理体系的研究，关于保序理论的研究，实际上正是考虑了批评意见之后而取得的成果。针对AHP理论上提出的问题目前并没有全部得到满意的解决，AHP理论的发展存在着一个广阔的天地。

勿庸讳言，AHP在应用上有其局限性，这主要表现在以下三个方面：首先，AHP的应用主要是针对那种方案大抵确定的决策问题，一般来说它只能从已知方案中选优，而不能生成方案。也就是说，应用AHP时，事先对决策的各种方案要有比较明确的规定。第二，AHP得出的结果是粗略的方案排序。对于那种有较高定量

要求的决策问题，单纯运用AHP是不适合的。当然，并不排斥把AHP与其它决策方法结合起来。例如，在运用多目标规划时，把AHP作为目标加权的方法已为实践证明是有效的。也可以采用AHP自身派生出来的一些方法。例如资源分配的AHP，成本效益分析的AHP，使某些定量分析要求精度不很高的问题有满意的解答。第三，在AHP的使用过程中，无论建立层次结构还是构造判断矩阵，人的主观判断、选择、偏好对结果的影响极大，判断失误即可能造成决策失误。这就使得用AHP进行决策主观成分很大。规划论采用比较严格的数学计算，以期把人的主观判断降到最低程度，但得出的结果有时往往难于被决策者所接受。AHP的本质是试图使人的判断条理化，但所得到的结果基本上依据人的主观判断。当决策者的判断过多地受其主观偏好影响，而产生某种对客观规律的歪曲时，AHP的结果显然就靠不住了。要使AHP的决策结论尽可能符合客观规律，决策者必须对所面临的问题有比较深入和全面的认识。此外，在运用AHP时采用群组判断方式也不失为克服主观偏见的一个好办法。

无论是理论上不完善，还是应用中的缺陷，都不会影响AHP在决策中的地位和作用。目前AHP已被运筹学界视为简单有效的多目标决策方法。AHP的应用范围在逐渐扩大，以它为基本方法的决策支持系统——“专家选择”已商品化，在国外市场受到欢迎，AHP理论和方法论的研究人员日益增加。可以期待，AHP作为一种决策思维方式，对人们各种各样的决策过程起着越来越重要的作用。

第二节　AHP的基本步骤

运用AHP解决问题，大体可以分为四个步骤，即一、建立问题的递阶层次结构；二、构造两两比较判断矩阵；三、由判断矩阵计算被比较元素相对权重；四、计算各层元素的组合权重。分述如下：

一，建立递阶层次结构

这是AHP中最重要的一步。首先，把复杂问题分解为称之为元素的各组成部分，把这些元素按属性不同分成若干组，以形成不同层次。同一层次的元素作为准则，对下一层次的某些元素起支配作用，同时它又受上一层次元素的支配。这种从上至下的支配关系形成了一个递阶层次。处于最上面的层次通常只有一个元素，一般是分析问题的预定目标，或理想结果。中间的层次一般是准则、子准则。最低一层包括决策的方案。层次之间元素的支配关系不一定是完全的，即可以存在这样的元素，它并不支配下一层次的所有元素。一个典型的层次可以用下图表示出来：

层次数与问题的复杂程度和所需要分析的详尽程度有关。每一层次中的元素一般不超过九个，因一层中包含数目过多的元素会给

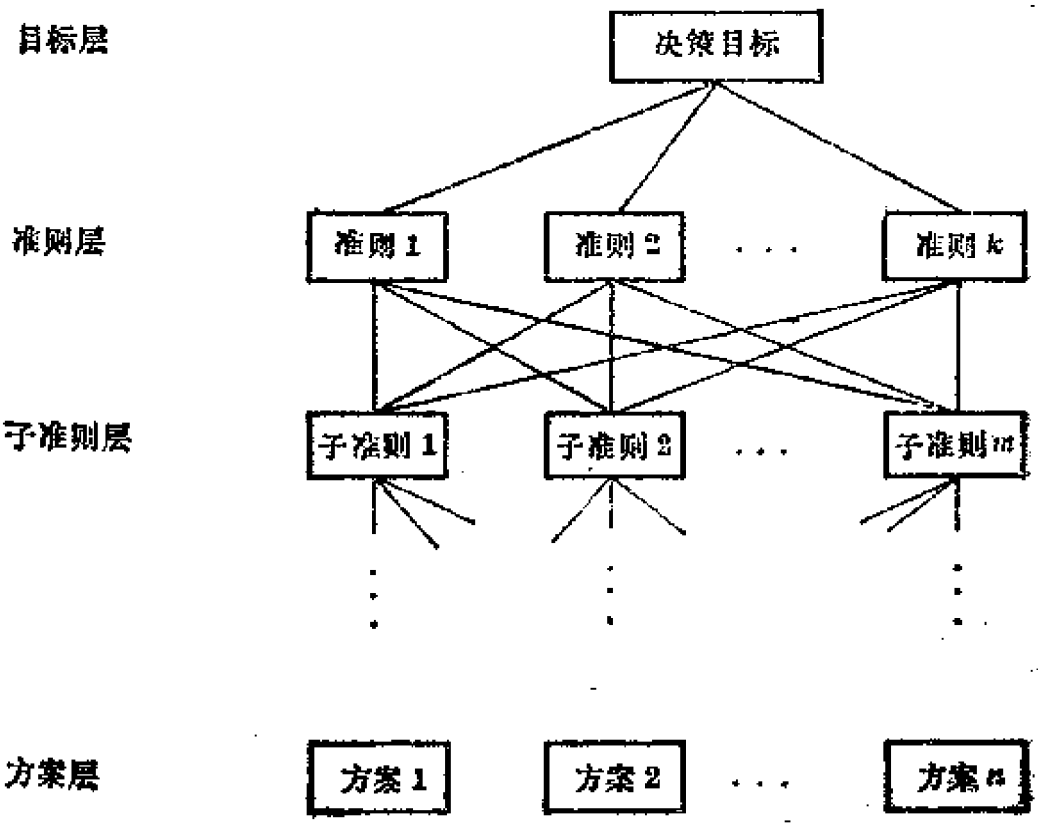


图 1.1 递阶层次结构示意图

两两比较判断带来困难。一个好的层次结构对于解决问题是极为重要的。层次结构建立在决策者对所面临的问题具有全面深入的认识基础上，如果在层次的划分和确定层次之间的支配关系上举棋不定，最好重新分析问题，弄清问题各部分相互之间的关系。有时一个复杂问题仅仅用递阶层次形式表示是不够的，需要采用更复杂的结构形式，如循环层次结构、反馈层次结构等，这些结构是在递阶结构基础上的扩展形式。

二、构造两两比较判断矩阵

在建立递阶层次结构以后，上下层次之间元素的隶属关系就被确定了。假定上一层次的元素C_k作为准则，对下一层次的元素A_1，A_2，…，A_n有支配关系，我们的目的是在准则C_k之下按它们相对重要性赋予A_1，A_2，…，A_n相应的权重。对于大多数社会经济问题，特别是对于人的判断起重要作用的问题，直接得到这些元素的权重并不容易，往往需要通过适当的方法来导出它们的权重。AHP所用的是两两比较的方法。

在这一步中，决策要反复回答问题：针对准则C_k，两个元素A_i和A_j哪一个更重要些，重要多少。需要对重要多少赋予一定数值。这里使用1~9的比例标度，它们的意义见表1.1。例如，准则是社会经济效益，子准则可分为经济、社会和环境效益。如果认为经济效益比社会效益明显重要，它们的比例标度取5。而社会效益对于经济效益的比例标度则取1/5。对于n个元素来说，得到两两比较判断矩阵A：

$$A=(a_{ij})_{n\times n} \tag{1.1}$$

判断矩阵具有如下性质：

$$\begin{aligned}&(1)\quad a_{ij}>0\\&(2)\quad a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}\\&(3)\quad a_{ii}=1\end{aligned} \tag{1.2}$$

我们称A为正的互反矩阵。由于性质(2)、(3)，事实上，对于n

阶判断矩阵仅需对其上（下）三角元素共$\frac{n(n-1)}{2}$个给出判断。A的元素不一定具有传递性，即未必成立等式

$$a_{ij}\ a_{jk}=a_{ik} \qquad (1.3)$$

但（1.3）成立时，则称A为一致性矩阵。在说明由判断矩阵导出元素排序权值时，一致性矩阵有重要意义。

1-9的标度方法是将思维判断数量化的一种好方法。首先，在区分事物质的差别时，人们总是用相同、较强、强、很强、极端强的语言，再进一步细分，可以在相邻的两级中插入折衷的提法，因此对于大多数决策判断来说1-9级的标度是适用的。其次，心理学的实验表明，大多数人对不同事物在相同属性上差别的分辨能力在5-9级之间，采用1-9的标度反映多数人的判断能力。第三，当被比较的元素其属性处于不同的数量级，一般需要将较高数量级的元素进一步分解，这可以保证被比较元素在所考虑的属性上有同一个数量级或比较接近，从而适用于1-9的标度。当然根据问题的特点也可以采用别的类型标度方法。如0-1的标度，指数型的标度等。

表 1.1　　标　度　的　含　义

1	表示两个元素相比，具有同样重要性
3	表示两个元素相比，一个元素比另一个元素稍微重要
5	表示两个元素相比，一个元素比另一个元素明显重要
7	表示两个元素相比，一个元素比另一个元素强烈重要
9	表示两个元素相比，一个元素比另一个元素极端重要

2，4，6，8为上述相邻判断的中值。

若因素i与j比较得a_{ij}，则因素j与i比较的判断为$1/a_{ij}$。

三、计算单一准则下元素的相对权重

这一步要解决在准则C_k下，n个元素A_1，A_2，…，A_n排序权重的计算问题，并进行一致性检验。对于A_1，A_2，…，A_n通过两两比较得到判断矩阵A，解特征根问题

$$Aw=\lambda_{max}w \qquad (1.4)$$

所得到的w经正规化后作为元素A_1，A_2，…，A_n在准则C_k下排序权

重，这种方法称排序权向量计算的特征根方法。λ_{max}存在且唯一，w可以由正分量组成，除了差一个常数倍数外，w是唯一的。λ_{max}和w的计算一般采用幂法，其步骤为：

（1）设初值向量w_0，例如$w_0=(\frac{1}{n}\ \frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n})^T$

（2）对于$k=1$，2，3，…计算

$$\overline{w}_k=Aw_{k-1} \tag{1.5}$$

式中w_{k-1}为经归一化所得到的向量。

（3）对于事先给定的计算精度，若

$$\max|w_{ki}-w_{(k-1)i}|<\varepsilon \tag{1.6}$$

式中w_{ki}表示w_k的第i个分量，则计算停止，否则继续（2）。

（4）计算

$$\lambda_{max}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{ki}}{w_{(k-1)i}} \tag{1.7}$$

和

$$w_i=\frac{\overline{w}_{ki}}{\sum_{j=1}^{n}\overline{w}_{kj}}$$

在精度要求不高的情况下，可以用近似方法计算λ_{max}和w，这里介绍两种方法：

（1）和法

第一步，A的元素按列归一化；

第二步，将A的元素按行相加；

第三步，所得到的行和向量规一化得排序权向量w；

第四步，按下列公式计算λ_{max}

$$\lambda_{max}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(Aw)_i}{nw_i} \tag{1.8}$$

式中$(Aw)_i$表示Aw的第i个元素。

（2）根法

第一步，A的元素按行相乘；

第二步，所得到的乘积分别开 n 次方；

第三步，将方根向量归一化即得排序权向量 w；

第四步，按公式（1.8）计算 λ_{max}。

特征根方法是*AHP*中最早提出的排序权向量计算方法，使用广泛。近年来，不少学者提出了排序向量计算的其它一些方法，如最小二乘法、对数最小二乘法、上三角元素法等等，这些方法在不同场合下运用各有优点。

在判断矩阵的构造中，并不要求判断具有一致性，即不要求（1.3）成立，这是为客观事物的复杂性与人的认识多样性所决定的。但要求判断有大体的一致性却是应该的，出现甲比乙极端重要，乙比丙极端重要，而丙比甲极端重要的情况一般是违反常识的。而且，当判断偏离一致性过大时，排序权向量计算结果作为决策依据将出现某些问题。因此在得到 λ_{max} 后，需要进行一致性检验，其步骤如下：

（1）计算一致性指标C.I.

$$C.I.=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \tag{1.9}$$

式中 n 为判断矩阵的阶数。

（2）平均随机一致性指标R.I.

平均随机一致性指标是多次（500次以上）重复进行随机判断矩阵特征值的计算之后取算术平均数得到的。龚木森、许树柏〔1986〕得出的1—15阶重复计算1000次的平均随机一致性指标如下：

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8
R.I.	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41

阶数	9	10	11	12	13	14	15
R.I.	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

这是对美国宾州大学和橡树岭实验室结果(*Saaty* 1980)的一个改进。

(3)计算一致性比例C.R.

$$C.R.=\frac{C.I.}{R.I.} \tag{1.10}$$

当C.R.<0.1时，一般认为判断矩阵的一致性是可以接受的。

四、计算各层元素的组合权重

为了得到递阶层次结构中每一层次中所有元素相对于总目标的相对权重，需要把第三步的计算结果进行适当的组合，并进行总的判断一致性检验。这一步骤是由上而下逐层进行的。最终计算结果得出最低层次元素，即决策方案优先顺序的相对权重和整个递阶层次模型的判断一致性检验。

假定已经计算出第$k-1$层元素相对于总目标的组合排序权重向量$a^{k-1}=(a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \cdots, a_m^{k-1})^T$，第$k$层在第$k-1$层第$j$个元素作为准则下元素的排序权向量为$b^j=(b_{1j}^k, b_{2j}^k \cdots\cdots b_{nj}^k)^T$，其中不受支配(即与$k-1$层第$j$个元素无关)的元素权重为零。令$B^k=(b_1^k \cdots b_m^k)$，则第$k$层$n$个元素相对于总目标的组合排序权重向量由下式给出

$$a^k=B^k a^{k-1} \tag{1.11}$$

更一般地，有排序的组合权重公式

$$a^k=B^k \cdots B^3 a^2 \tag{1.12}$$

式中a^2为第二层次元素的排序向量，$3 \leqslant k \leqslant h$，$h$为层次数。

对于递阶层次组合判断的一致性检验，需要类似地逐层计算CI。若分别得到了第$k-1$层次的计算结果$C.I_{k-1}$，$R.I_{k-1}$和$C.R_{k-1}$，则第k层的相应指标为

$$C.I._k=(C.I._k^1, \cdots, C.I._k^m)a^{k-1} \tag{1.13}$$

$$R.I._k=(R.I._k^1, \cdots, R.I._k^m)a^{k-1} \tag{1.14}$$

$$C.R._k=C.R._{k-1}+\frac{C.I._k}{R.I._k} \tag{1.15}$$

这里C.I.$_i$和R.I.$_i$分别为在$k-1$层第i个准则下判断矩阵的一致性指标和平均随机一致性指标．当C.R.$_i$<0.10，认为递阶层次在k层水平上整个判断有满意的一致性。

AHP的最终结果是得到相对于总的目标各决策方案的优先顺序权重，并给出这一组合排序权重所依据的整个递阶层次结构所有判断的总的一致性指标，据此可以做出决策。

上面介绍的AHP四个基本步骤，是AHP用于解决比较简单的决策问题时所用的，对于更复杂的决策问题，AHP有许多扩展的方法，主要是：

1. 成本——效益分析的AHP；
2. 边际排序方法；
3. 动态排序方法；
4. 计划制定过程的前向——反向AHP；
5. 信息不全下的AHP；
6. 群体决策使用的AHP；
7. *Fuzzy* AHP；
8. 不确定型AHP；
9. AHP中的绝对排序法。

本书将对其中某些方法作简略介绍。

第二章　层次分析法的基本原理

AHP是社会经济系统决策的有用工具。这里所指的决策包括计划，资源分配、方案排序、政策制定、冲突求解、性能评价等相当广泛的问题。在进行AHP的数学原理研究之前，本章对AHP的基本原理做初步探讨。尽管不可避免地涉及一些简单的数学推导，但强调的是AHP基本原理的哲学方面，主要是AHP作为社会经济系统度量方式的原理，递阶层次结构原理，两两比较标度原理和排序原理。

第一节　社会经济系统的测度

决策是产生或从一组已知方案中选择理想的方案。根据决策的目的，这里"理想"可以解释为满意、最佳、最优、最好等等。理想方案一般是在一定准则之下通过使效用极大化产生的。决策的困难之处在于社会经济系统中的许多因素难于定量测度。如果定量测度能够做到，那么数学这一定量分析的有力工具便得以发挥作用，决策过程会变得比较容易。因此，在某种意义上讲，决策问题的核心是决策因素的测度。不仅决策问题是这样，测度问题对社会经济系统的许多研究领域同样是至关重要的，近年来不少学者致力于研究社会经济系统的测度理论。*

所谓测度，是指在一定标度下对事物某种属性的定量测量。例如身高1.75米是对人的身体高度以米作为标度的测量。测度对于科

---

* 参见 Fred. S. Roberts: 《Measument Theory, with Application to Decision Making, Utility and the Social Sciences》. Addison Wesley Pub. Comp., 1979.

学发展起着十分重要的作用，是沟通各门学科与数学联系的桥梁。物理学所以发展为一门严密和高度精确的学科，与物理学中有一套完整的标度体系密不可分。标度通常是根据人们对客视事物观察所取得的经验决定的。测量则通过标度与具体对象加以比较来实现。尽管利用仪器进行测量在科学研究中已经习以为常，但大量的测量活动主要还是依赖人的主观判断。人们往往认为标度是有着严格的客观标准的，但细一推敲，并不尽然。象时间的标度开始是以地球自转一周的86400分之一作为一秒，后来发现不准确，作了校正，以至发展到目前以铯原子的能级跃迁作为秒的标度*。可见象时间这类极严格的标度，人的经验和判断也起着重要作用。另一个富有启发的例子是化学溶液酸碱度的测度，那里的标度是根据PH试纸的颜色确定的，而这一测度方式的简单实用性是众所周知的。

社会经济系统的测度是使系统由无结构状态向有结构状态转化的重要条件。考察作为商品交换中价值的标度——货币形成过程，会使我们看到标度的重要性。最初，剩余产品的交换是通过以物易物方式实现的，以后逐渐发展成以黄金或其他贵金属等固定物作为商品交换的媒介，最后形成一整套的流通货币，如纸币、硬币、支票等等。货币成为交换商品和服务的一种标度，在经济系统内部秩序的建立上起了重要作用。然而建立大多数社会经济现象的标度比建立商品交换的标度要复杂困难得多。诸如对环境、健康、安全、生活美满这类问题的测度就很难提出一种标度。因此，涉及社会经济系统的大量决策问题，人们常常凭自己的经验和知识进行判断，略去了对决策因素测度这一重要环节。这是造成决策失误的一个主要因素。

社会经济系统测度的困难在于测度对象的属性大多具有相对的性质，无法确定统一的标度，在于测度对象的环境时常变化，即使有一种统一的标度，由于环境的变化也会使其失去常规意义；在于

---

* 一九六七年第十三届国际计量大会决议中规定："秒是铯—133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的9192631770个周期的持续时间"。

缺少必要的测度工具，而往往需要人的判断。那末，是否可以提出解决社会经济系统测度问题的一般方式，使上述困难能够克服，或者至少可以满足决策科学化的需求呢？

先从社会经济系统的测度缺少必要的测量工具这一困难入手，做简单的分析。设想面临的问题是测度一本书的重量，但缺少称重的工具。显然用手掂一掂书的重量，用经验对书的重量可以做出估计。在这个过程中我们利用了自己的经验把书重感觉与重量的标度进行比较，做出判断。一个有经验的人可能象利用称重工具那样得出相当准确的结果。当然，误差肯定会有的。它反映了估计的结果与标度的不一致性。但是，即使最精密的测量工具也难得出完全精确的测度。因此，测度的不一致性始终是客观存在的。而且，人凭知识和经验在测度上表现出的能力，比所能想象的要强得多。问题的关键在于需要了解测度的不一致性，估计这种不一致性所造成的结果。如果能做到这一点，就有可能克服或减低缺少测度工具给解决社会经济系统测度问题造成的困难。

社会经济系统许多问题的属性常有相对的性质，不可能对这类属性的测度确定一种绝对的标度，例如国家的安全就无法用绝对的标度去衡量，对它的估计只能在比较中确定。这提示我们可以在社会经济系统某些问题的测度上考虑一种相对标度。对于决策目的来说，这种相对标度和测度正是所需要的。

由此可见，如果能够提出一种测度方式，它采用相对标度，具有适应环境变化的灵活性，充分利用人的经验和判断，而且能够对测度的不一致性及其后果做出估计，那末就有可能从决策的角度解决某些社会经济系统中的测度问题。

层次分析法作为一种决策过程*，提供了测度决策因素（尤其是社会经济因素）的基本方式。这种方式充分利用人的经验和判断，采取相对标度形式，能够统一对有形与无形、可定量与不可定量的

* “层次分析法”—The Analytic Hierarchy Process直译是“递阶层次分析过程”，概念本身包括了过程这一含义。

因素进行测度。在某种程度上，AHP解决了社会经济系统某些现象的测度问题，提出了决策思维的一种新方法。

面对一个复杂的无结构的决策问题，怎样利用AHP对决策因素进行测度，进而进行决策呢？从上一章介绍的AHP的基本步骤可以看出，首先要做的是在问题划分为各种因素的基础上，把具有相同属性的因素编为一组，形成一个递阶层次结构，利用AHP中规定的比例标度对同一层次有关的因素的相对重要性进行比较，按递阶层次从上到下的顺序对测度进行合成以得到各个方案相对于决策目标的测度，即基本步骤所说的方案的组合排序权值。由此可见，利用AHP对社会经济因素进行测度具有决策目的明确、采用相对标度、依靠决策者的比较判断等特点。测度的最终结果以方案相对重要性的权重表示。这种测度不仅可以作为决策的依据，在解决社会经济系统的许多问题中也有一定作用。特别重要的是，AHP引申出的解决社会经济问题测度的基本思想，有进一步深化与扩展的可能性。

第二节　递阶层次结构的基本原理

一个复杂的无结构问题可分解为它的组成部分或因素，即目标、约束、准则、子准则、方案等，每一个因素称为元素。按照属性的不同把这些元素分组形成互不相交的层次，上一层次的元素对相邻的下一层次的全部或某些元素起着支配作用（有时是包含关系），形成按层次自上而下的逐层支配关系。具有这种性质的层次称为递阶层次。这样我们所面临的问题是分解与综合方式的深化与发展。在AHP中递阶层次的思想占据核心地位。在使用AHP中，最重要的是建立有效的递阶层次结构。

相当多的系统在结构上具有递阶层次形式。例如，宇宙可以理解为按星系、银河系、太阳系、地球、地球上的各种物体、分子、原子、……这样的顺序形成的一个递阶层次结构。递阶层次结构在

某一个侧面反映了事物的属性。将一个复杂系统按照递阶层次结构加以分解，对于深入理解系统的功能，理解各组成部分的相互关系和系统的发展演变规律是十分必要的。

在自然科学和社会科学中，递阶层次的研究思想由来已久。例如，数学上一个定理的确定首先要从这个定理从属的分支入手，了解相关的命题、定理、引理和推论，而这个定理所涉及的因素按情况不同又可分为若干组。在数学研究中递阶层次的思想导致数学理论有着严密的递阶层次结构。在社会科学研究中，特别是系统思想日益渗透的今天，递阶层次形式的分解与综合方法被广泛应用，其结果是使得社会科学的研究更有效。

从人的决策思维角度来看，递阶层次原则是这种思维活动的重要特点。显然，决策思维离不开逻辑判断、因果推理，离不开分解与综合。如果考察一个具体的决策思维过程，我们会发现，一个复杂问题被分解为若干组成部分，这些部分对更细的决策因素起着支配作用。因此，决策思维中的分解与综合常常是按照递阶层次结构形式进行的，人的逻辑判断也是在这种递阶层次结构中体现的。事实上，在很多情况下人们总是在自觉或不自觉地利用递阶层次原则进行决策思维。思维的递阶层次方式并不是什么新东西，只不过它没有象逻辑判断、分解综合那样被人们摆在明显的地位罢了。

作为决策思维的一种方式，AHP突出反映了思维的递阶层次特点。在AHP使用过程中，复杂问题被分解为递阶的层次结构，从最高层到最低层向下起着支配作用，每一层次都要通过两两比较导出它们包含的元素相对重要性的排序权值。最后仍然通过层次的递阶关系得到决策因素总的相对重要性排序权值。AHP把递阶层次、分解综合、逻辑判断统一在这样的树状结构中，使得人的思维趋于条理化，使思维决策更为有效。

AHP中的递阶层次结构有下面一些特点：第一，从上到下顺序的支配关系。这种关系在某种意义上类似于集合、子集、元素间的属于关系。第二，整个结构中层次数不受限制，层次数大小取决

于决策分析的需要，最高层次的元素一般只有一个，其它层次的元素一般不超过9个，这是出于两两比较判断要尽可能一致的考虑。当层次中元素过多时，可以进一步划分为子层次，因此不超过9的限制并不会给递阶层次结构的建立带来困难。第三，层次之间的联系比同一层次各元素间的联系要大得多。如果实际问题中层次内部元素的联系非常密切，以至难于忽略，则AHP的基本排序原则不再适用，代之以反馈系统的排序方法。递阶层次结构的层次位置必须是确定的，同一层次元素的位置无需确定。从递阶层次结构的特点可以看出，AHP使用中，层次结构的建立有着很大的灵活性和抗干扰性，某一个层次包含的元素发生变化时，对整个层次结构变化的影响是有限的。特别是，由于决策目标的实现要经过自上而下几个层次的分析判断，即使某一层次中若干判断失误，对决策目标的影响比采用非层次决策方法要小得多。层次结构使得人们的思维条理化，在决策面临的问题比较复杂时，采用AHP的递阶层次结构会使问题的分析清楚容易，便于迅速地做出决策。由于递阶层次结构在一定程度上反应了系统的有序性，AHP提供了一种深入认识和处理系统的方式，把看来杂乱无章无从下手的各种复杂的决策因素统一起来，按系统的功能与行为进行深入研究。总之，使用递阶层次的方式进行思维决策有许多明显的优点。

递阶层次结构每个层次的功能和组成形式都不相同。系统的功能并不靠单一或几个层次，而是靠整个递阶层次结构中各层次间的相互关系来理解的。尽管最高层次反映了决策的目的，但由于最高层对下一层次的支配关系以及反过来的依存关系，使得我们必须从层次之间相互作用的角度来解释一个递阶层次结构。

递阶层次结构理论与图论特别是有向图的矩阵表示理论有着密切联系。图的矩阵表示理论可以表示一个递阶层次结构的内部关系，在决策问题特别复杂，决策因素很多时，用矩阵方法确定层次结构。

第三节　AHP的比例标度

AHP从决策角度提出社会经济因素的测度方式。测度过程中存在着两种标度，一种是规定性标度，它用于在某一准则下两个元素的相对重要性的测度，属于比例标度，标度值为1-9之间的整数及其倒数，测量方法是两两比较判断，其结果表示为正的互反矩阵。另一种标度是导出性标度，用于被比较元素相对重要性的测度，标度值为区间〔0,1〕上的实数，利用两两比较判断矩阵通过一定的数学方法（如特征向量法）导出测度结果，它涉及AHP的排序理论。

一般地说，一种标度的取值应当尽可能地满足下列条件：

（1）能够直接或间接地被测量，当测量方式是人的比较判断时，应能表示人在感觉上的差别，并且把人所具有的感觉上的所有差别表示出来；

（2）如果是离散的标度值，相邻的标度值应要求等于1；

（3）与原有的其它标度保持一致，即同一物体的某种属性在两种标度下测量得到结果x和y时，存在固定的(不因物体不同而变化)变换f，使得$y=f(x)$。此外，还要求：

（4）便于掌握，即使对于缺少专门知识和训练的人；

（5）容易进行测度的不一致性分析。

AHP的测度是通过两两比较判断给出的，在进行判断时，被比较的对象在它们所从属的性质上应该比较接近，否则定性分析没有太大意义，例如没有必要对太阳和原子的大小进行比较。当被比较因素在属性上级差太大时，一般需要将“小的”因素聚合，或将“大的”因素分解。当被比较的因素的属性比较接近时，人们的判断趋于用相等、较强、强、很强、绝对强这类语言表达。如果进一步细分，相邻判断之间可再插入一档。这样，1-9可以满足表达判断的这一要求。同时，注意到当一个因素比另一个因素的强度判断

用上述数字表达时，后一个因素与前一个因素相比，其判断应当用这个数字的倒数来表达，这是标度用1-9的整数及其倒数的理由之一。

其次，人对事物某种属性同时做出比较，并且使判断基本保持一致时，其所能感知的最小差异是多少？这个问题属于实验心理学的范畴。显然，判断者和被比较事物所涉及的属性不同时，差异的大小各不相同。很多心理学家在这方面做过实验，例如，E.H.Weber（1795~1878）的实验表明，普通人能区分出20克和21克重的物体，也能区分出40克和42克重的物体，但无法区分20克和20.5克或者40克和41克重的物体。Weber的结论是人所能感知的重量差异如果是在S和S+△S之间，则比例r=△s/s是与s无关的量。心理学家G.A.Miller的实验则表明在某种属性上对若干个不同物体进行辨别时，普通人能正确辨别的物体数目在5-9个之间，Miller认为，心理学上的极限应为9*。这表明，9个数字足以表述人在同时比较某种属性差异的判断。这是判断标度值取1-9之间整数的第二个理由。

那么，1-9之间的整数及其倒数的标度与现有一些标度是否一致呢？用一个实验来回答这个问题。这个实验与光照度的反平方律有关，是Saaty在提出AHP的过程中做过的。将四把相同的椅子一字排开，距光源分别为9、15、21、28米，让两个孩子（他们并不知道照度的反平方律）站在椅子旁边通过他们对椅子亮度的感觉做出两两比较判断，用1-9标度填满判断矩阵。经过解特征根问题，得到四把椅子相对亮度分别为$(0.61,0.24,0.10,0.05)^T$和$(0.62,0.22,0.10,0.06)^T$。按照光学反平方律计算的照度权重（照度规一化）为$(0.61,0.22,0.11,0.06)^T$。这表明由人的判断导出的结果与根据物理定律导出的结果十分接近，其误差范围（或不一致程度）就决策要求来说是完全可以接受的。事实上，1-9的标度比较好地达到了前面提到的标度要求。某些实验表明，当被比较元素个

---

* Miller G.A, "The Magical Number Seven Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information", Psychological Review, Vol. 63, pp 81-97, 1956.

数较少（$\leqslant 3$）时，1-9的标度比较粗糙，导出标度——因素的排序权值往往与实际结果有较大误差。这种情况下，对1-9的标度进一步划分是有必要的。是否可以规定一个随被比较元素个数（即判断矩阵的阶数）不同而有不同数值的标度呢？这恐怕需要经过大量心理学的实验才能回答。但多数情况下，选择1-9标度值能够与现有的标度基本上保持一致性。

1-9的标度值并不是唯一可供选择的，例如Saaty在1980年曾列举了其它26种标度方法，但通过实例对1-9标度法和其它26种方法做了比较，结果表明1-9标度是比较合理的方法。

1-9的标度是一种比例标度。由于在同一准则下对元素进行两两比较，这种方法并不要求对被比较元素的属性有专门的知识，适于普通非专业人员使用。标度结果组成的判断矩阵，一般不具有一致性。这里所指的一致性既包括基本一致性，也包括次序一致性。前者的含义为：如果元素甲比元素乙重要两倍，元素乙比元素丙重要4倍，那么元素甲比元素丙重要8倍。公式（1.3）是基本一致性的数学表达。所谓次序一致性是指如果元素甲比元素乙重要，元素乙比元素丙重要，则元素甲比元素丙重要。基本一致性和次序一致性又分别称为强一致性和弱一致性。利用AHP的比例标度进行判断赋值，允许违反上述两类一致性。这是由于客观世界的复杂性和人们认识的多样性。事实上，不一致性在实际生活中是存在的。例如球类比赛中常有甲队胜乙队，乙队胜丙队，丙队胜甲队的情况出现。所以允许判断不一致更符合客观实际。比例标度的方法便于在判断不一致或者相互矛盾的情况下对被比较元素进行标度，而由此求得的导出标度（即元素相对重要性的排序权值）仍是对某种属性的一个合理的测度。

第四节　单一准则下的排序原理

AHP单一准则下的排序问题实质上是由一组元素两两比较重

要性的测度计算这组元素相对重要性的导出测度问题。这里由元素两两比较得到的重要性测度表示为判断矩阵。

$$A=(a_{ij})_{n\times n} \tag{2.1}$$

它具有正值性、互反性。导出标度是对所有被比较元素的相对重要性权值的标度，它也是一种比例标度，在(0,1)中定义。由两两比较的测度何以导出排序的测度？关键在于弄清两两比较测度（即判断矩阵）与排序测度（即排序权值）之间的关系。

对上面提出的问题，从相反的方向，即在已知排序权值情况下表达两两比较测度的问题进行分析。假定已知n个物体$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$的重量分别为$w_1, w_2, \cdots, w_n$，由于关心的是它们之间的相对重量，进一步假定$w_1, w_2 \cdots, w_n$已经归一化，那么这$n$个物体之间两两比较的相对重量可以用下面的矩阵表示：

$$A=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots\cdots & A_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots\cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots\cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots\cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \end{array}$$

显然，矩阵的元素皆为正数且满足互反性。事实上，A还满足基本一致性。如果$w_1, \cdots, w_n$分别为$A_1, \cdots, A_n$相对重量的精确测度，则A为n个物体两两比较相对重量的精确测度。注意到用$w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$右乘$A$，得：

$$Aw=nw \tag{2.2}$$

因此，(2.2)建立了在一致性情况下比较测度A与排序测度w之间的关系。现在抛开w为已知这一假设，考虑A为已知而且是$A_1, \cdots, A_n$重量两两比较的精确测度（从而A为基本一致性的）这一情况。此时问题化为对方程组

$$(A-nI)\,w=0 \tag{2.3}$$

求解未知的w，由A的一致性知，A的每一行都是任意一行（如第一行）的常数倍数，故A的秩等于1。这样，A有重数为1的特征根n，其余的$n-1$个特征根皆为零。A的任意一列均为(2.3)的解，且归一化后的解是唯一的。事实上，A的任意一列归一化后恰为$(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$。进一步抛开$A$为一致性的假定，即$A$仅仅为$n$个物体重量两两比较的近似估计，或者，更一般地，$A$为$n$个元素某种属性下基于1~9标度两两比较的测度，如何导出这n个元素属性的排序权值测度呢？

从矩阵代数的Perron-Frobineus理论知，正矩阵存在实特征根，它的重数是1，其它特征根的模小于这个特征根，它所对应的特征向量可以全部由正分量组成，经归一化后，特征向量是唯一的。记这个最大特征根为λ_{max}通过解

$$Aw=\lambda_{max}w \tag{2.4}$$

可得λ_{max}和归一化的W。利用构造一个一致性的矩阵

$$A^*=(w_i/w_j)_{n\times n} \tag{2.5}$$

A^*满足$A^*w=nw$，由前面的分析可知，如果A是n个物体重量两两比较的精确测度，则w为物体相对重量的测度。我们知道，任一矩阵中的元素发生小的扰动会对特征根产生小的扰动，比较(2.4)和$A^*w=nw$，可知，把w视为在不一致的判断矩阵A之下n个元素相对重要性的测度是合理的。因此，有理由把(2.4)看成比较测度A与导出测度w的关系，从而单一准则下的排序问题化为对(2.4)求解。

如果仅从求导出测度w，使A^*与比较测度A最接近这样一个角度考虑导出测度w的求解问题，可以提出许多不同于(2.4)的方法，例如最小二乘方法，即解下述问题

$$\min \sum_{ij}\left(\frac{w_i}{w_j}-a_{ij}\right)^2 \tag{2.6}$$

的方法。然而，由于w表示的是对往往不可以定量的社会经济因素

进行的测度，单纯追求数量上的精确度并不见得是有效的。由后面的论述将看到，从比较判断相互影响的累积效应角度考虑，特征根方法是解决从比较测度求导出测度的唯一最好方法。

单一准则下的排序问题，除了基本方法的确定以外，还涉及到其它许多方面的问题。例如，不一致性对导出测度的影响，特征向量（即导出测度）的灵敏度分析，比较测度的有序性与导出测度有序性的关系，新元素（或方案）引入对导出测度的影响，信息不全下导出测度的计算等等。其中最重要的是导出测度与不一致性的关系问题。

假定w是任意判断矩阵A（从而一致性未必满足）的问题(2.4)的解。A^*的定义如(2.5)。不妨假定A视为A^*在对一致性扰动下得到的结果。理论研究表明，当矩阵A的阶数越大，它的主特征向量（即λ_{max}对应的经归一化得到的特征向量）对小的扰动所产生的变化越不明显，当矩阵阶数越小时，特征向量对扰动的变化相当明显。因此，可以认为，当A^*看成是经过对A较大扰动得到的矩阵，w的结果可不一致，即从比较标度导出的排序权值结果不一致，需要获取更多的信息以推导一致的排序权值。当矩阵阶数较小时，这种对偏离一致性产生的影响分析更为必要。在AHP基本步骤中一致性检验的目的就在于估计A对一致性的偏离程度，从而对排序结果的一致程度进行估计。上述说明可以从数学角度加以展开，构成判断的一致性分析及一致性检验研究的基本问题。

为了深入进行AHP原理的研究，本书将对本章所提出的基本观点从数学上进行论证，同时由基本AHP扩展到引申出来的方法。

第三章　递阶层次结构的数学原理

本章论述与递阶层次结构有关的数学问题。第一节给出递阶层次结构的数学定义，并从递阶层次形式的两两比较判断和非递阶层次形式的两两比较判断的对比出发，提出递阶层次有效性的概念。在一个复杂系统中递阶层次结构往往不容易依靠单纯逻辑判断确立，第二节以有向图和可达矩阵的概念为基础，提出确定递阶层次结构的数学方法，AHP的目的是给出一组方案在总目标下的排序权值，在经过单一准则排序之后，总的排序权值在递阶层次结构内导出。第三节对递阶层次的排序问题做数学处理。结构依存性与功能依存性是AHP中两个重要概念，第四节从一般的观点出发讨论结构依存性，并着重说明它对组合排序的影响。

第一节　递阶层次结构的数学表示

存在几种不同的方式定义递阶层次，为了便于与AHP中的递阶层次进行比较，进而分析定义的特点，这里先叙述其它一些定义，然后给出AHP中递阶层次的定义。

递阶层次的一个定义表达如下。递阶层次是下述三者的组合：非空集合S，S中的起始元素b和满足自反、对称与传递性的支配关系D，它们满足(1)任意$y\in S$，$y\neq b$，则bDy，(2)对任意$y\in S$，$y\neq b$，存在且仅存在一个$x\in S$，满足(a)xDy，(b)若zDy，则zDx。

上述定义下的递阶层次有着严格的树状形式。同一层次元素按上一层次元素支配关系构成子集，它们两两不相交。

递阶层次的另一个定义是：对于非空集合S，和满足自反对称和传递性的支配关系D，S称为递阶层次，如果对于任意$b_1, b_2\in S$.

下面两个条件仅有一个且必然有一个得到满足：

（1）或者b_1Db_2，或者b_2Db_1；

（2）存在$b_3\epsilon S$，使得b_3Db_1，b_3Db_2，但不存在$b_4\epsilon S$，使得$b_3Db_4Db_1$且b_4Db_2。

上述定义与AHP所说的递阶层次均有区别，因此它们无法满足AHP对递阶层次的要求。为了定义AHP中的递阶层次，需要集合论中的某些概念。

定义3.1 带有两元关系$\leqslant$的集合s称为有序集，如果$\leqslant$满足：

（1）自反性 $x\leqslant x$，$\forall x\epsilon S$；

（2）对称性 若$x\leqslant y$，$y\leqslant x$，则$x=y$

$\forall x$，y，ϵS；

（3）传递性 若$x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则$x\leqslant z$，$\forall x$，y，$z\epsilon S$。

称二元关系$\leqslant$为包含关系，即如果$x\leqslant y$，则y包含x。$x<y$表示$x\leqslant y$，且$x\neq y$。当$x<y$，且不存在t使得$x<t<y$，称y支配x。

如果$a<b$，我们可以用一条从b到a的有向图表示，因此有限的有序集可以用有向图加以表示。

定义3.2 有序集S的子集E称为有上界的，如果存在$s\epsilon S$，使得$x\leqslant s$，$\forall x\epsilon E$，元素s称E的一个上界。称E为有上确界的集合。如果E是有上界的，且E的所有上界组成的集合U中存在u_1，使得$u_1\leqslant u$，$\forall u\epsilon U$。

由于有限集合存在最大元素，因此有限集合的上确界总是存在的。

对于任意$x\epsilon s$，所有受x支配的元素集合用x表示，所有支配它的集合用x^+表示，即：

$$x^+=\{y\mid x\text{支配}y,\ \forall y\epsilon S\}$$

$$x^-=\{y\mid y\text{支配}x,\ \forall y\epsilon S\}$$

下面的定义给出*AHP*中递阶层次的概念。

定义3.3 令H是带有唯一最大元素b有限的有序集合，H称为递阶层次，如果它满足：

（1）存在H的一个分划$\{L_k\}$，$k=1, 2, \cdots, h$其中$L_1=\{b\}$

（2）对于$x\in L_k$，x^-非空且$x^-\subseteq L_{k+1}$，$k=1, 2, \cdots, h-1$

（3）对于$x\in L_k$，x^+非空且$x^+\subseteq L_{k-1}$，$k=2, 3, \cdots, h$。

从定义3.3可知，一个递阶层次具有下述性质：

（1）H中的任意一个元素一定属于一个层次，且仅仅属于一个层次，不同层次的交是空集；

（2）同一层次中的任意两个元素不存在支配关系；

（3）若$k\leqslant h-1$，则L_k中的任意元素必然支配L_{k+1}中的至少一个元素，若$k\geqslant 2$，则L_k中的任意元素必然受L_{k-1}中至少一个元素的支配；

（4）分别属于不相邻的两个层次的任意元素不存在支配关系。

上述性质不难从递阶层次的定义导出。

由定义3.3，一个递阶层次的结构框图大体如图1.1，唯一的区别在于图中表示的是完全层次，而定义包含了不完全层次的概念。下面定义不完全层次。

定义3.4 层次L_{k+1}对于L_k来说是一个不完全层次，如果存在$x\in L_k$，使得$x^-\neq L_k$，这里$k=2, \cdots, h-1$。

注意到在上述定义中，L_2被排除在不完全层次的定义之外。实事上由定义3.3，L_2总是完全层次。

在上一章中曾经列举过递阶层次在决策中的优点，例如在递阶层次结构中给出对决策问题的判断将使问题更有条理，判断的误差对决策的影响相对要小一些，便于保持判断的一致性等。同时还指出，一个层次的元素最多不超过9个。假定供选择的方案数目很大，需要将这些方案分组，这种分组必然形成新的层次，在这种情况下递阶层次的优点何在？如果允许将大量方案进行两两比较，那么与递阶层次中的两两比较所需要的判断数目比，哪个要少一些？我们通过简单的数学上的分析来回答这些问题。

假定存在n个决策方案，决策的目标只有一个，即不考虑目标下的准则、子准则、约束等因素。通过相对于决策目标直接将方案进行两两比较以决定n个方案的排序。即不把被比较元素的个数限定在9个之内，同时对n个方案进行比较。此时所需要的判断为$\frac{n(n-1)}{2}$个。现假定将n个元素分组，每组的方案不超过9个，当第一次分组之后，编组的个数超过9，再进行上层编组，使得从目标开始向下形成一个递阶树状层次结构。下面的定理给出在这种递阶分组下最多需要两两比较判断的次数。

定理3.1 对于$n>1$个方案，递阶分组方式所需要的两两比较判断的次数小于或者等于$\frac{9}{2}\left(9^{-\left(-\frac{\ln n}{\ln 9}\right)}-1\right)$。式中$(\cdot)$表示不超过$\cdot$的最大整数。

证明：设递阶分组的层次数为h，由于每一组的元素（组或方案）个数不超过9，故相对第$k-1$层次某个分组元素所需要的两两比较判断次数不超过$(9^2-9)/2$，这里$k=2,\cdots\cdots,h-1,h$，但第$k-1$层次中的分组元素不超过9^{k-2}个，故对k层次来说，所需要的两两比较判断次数不超过$9^{k-2}\frac{(9^2-9)}{2}$由于第h层共有n个元素，由$9^{x-1}=n$知$x=\frac{\ln n}{\ln 9}+1$，故$h=-\left(-\frac{\ln n}{\ln 9}\right)+1$由

$$\sum_{k=2}^{h} 9^{k-2}\frac{9^2-9}{2}=\frac{9}{2}(9^{k-1}-1) \tag{3.1}$$

从而整个层次两两比较判断的总的次数不超过$\frac{9}{2}\left(9^{-\left[-\frac{\ln n}{\ln 9}\right]}-1\right)$.

当且仅当$h=\frac{\ln n}{\ln 9}+1$时，判断次数取上述极大值。

把n个元素不做分组需要进行的两两比较判断次数与递阶分组需要的判断次数之比称为递阶层次的效率。从定理3.1，有如下的系：

系 递阶层次的效率不低于$\frac{n}{9^2}$

证明：由
$$\frac{n^2-n}{2}\Big/\frac{9}{2}\left(9^{-\left[-\frac{\ln n}{\ln 9}\right]}-1\right) \qquad (3.2)$$

取$n=9m+e$，其中m为正整数，$0<e<1$，则

$$\frac{9^{2m+2}+e^2-9^{m+1}}{2/2}\Big/9(9^{m+1}-1)>\frac{(9^{m+1})}{9^2}=\frac{n}{9^2} \qquad (3.3)$$

可见，在方案个数超过9^2的情况下，采取分组方式以形成递阶层次结构要比不分组的作法更有效。

第二节　递阶层次结构的确定

如果面临的是比较简单的决策问题，那里的决策因素不很多，相互之间的联系与支配关系不难理顺，AHP的递阶层次结构的建立一般不会有困难。如果决策问题包含的因素很多，它们的相互关系又很复杂，则递阶层次结构的建立是不太容易解决的问题。单凭主观上的逻辑判断有时难于得到一个比较合理的层次结构。需要辅以一些数学方法，以便在逻辑判断的基础上建立合理的层次结构。本节讨论递阶层次结构确定的数学方法。

一般来说，确定层次结构的数学方法有两类，一类是测度聚类方法，层次或组的划分取决于决策因素相互接近的程度，而这种程度用某种测度表示。在经济系统的投入产出分析中，在处理产品部门聚合问题时通常采用这种测度聚类方法。聚类测度是由投入产出表中的直接消耗系数导出的，根据直接消耗系数计算出的产品部门的“距离”，作为部门聚类的标准，从而将一张部门数很大的投入产出表聚合为一张小表。在AHP中测度聚类方法并没有在递阶层次结构的确定中得到应用。一些研究表明，决策因素聚合为层次或组的聚类测度并不容易选择，往往与排序的测度有密切关系，后者正是聚类的目的。另一类方法与系统解析结构的可达矩阵有关。

假定H为元素从属关系已经确定的集合。集合的从属关系可以用二元矩阵或有向图表示，两种表示方法是等价的。二元矩阵的阶

数与H的元素个数相等，矩阵的任意元素b_{ij}的定义如下：

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}j\text{从属于}i,\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{3.4}$$

例如二元矩阵B_1与图3.1是等价的。任意阶的二元矩阵B，其主对角线上的元素皆为1，即我们总认为一个元素从属于它自身。

$$B_1=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

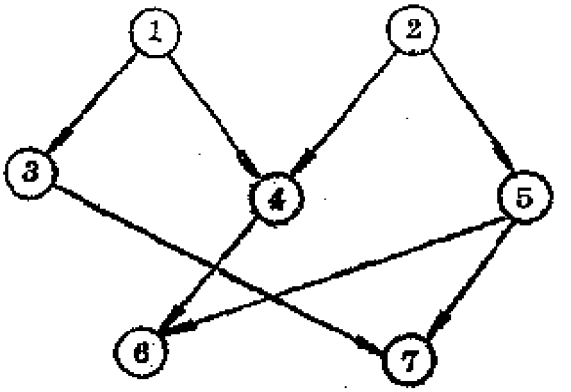


图 3.1

二元矩阵的乘法定义如下，两个二元矩阵$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$的定义为二元矩阵$C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{3.5}$$

按上述乘法定义，对于任意二元矩阵B，存在一个最小的正整数k，使得

$$B^{k-1}\leqslant B^k=B^{k+1} \tag{3.6}$$

式中$B^{k-1}\leqslant B^k$表示B^{k-1}中的每一个元素小于或等于B^k中对应的元素。矩阵B^k称为B对应有向图的可达性矩阵。

容易证明，如果有向图的二元矩阵$D=(d_{ij})$按下述方式定义

$$d_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果元素}i\text{可达}j\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{3.7}$$

则D为可达性矩阵。

在使用可达性矩阵的概念导出H的递阶层次结构之前，需要下面一些定义。

定义3.5 元素h_j称从h_i可达的，如果在有向图上，存在一条从h_i达到h_j的通路。

定义3.6 元素h_j称为h_i的前项，如果从h_j能达到h_i。

令$R(h_i)$表示从h_i可达的所有H元素中组成的集合，$A(h_i)$表示h_i前项组成的集合，则不难证明：

$$R(h_i)=\{h_j\in H|\quad B^k\text{第}i,\ j\text{元素为}1\}, \tag{3.8}$$

和

$$A(h_i)=\{h_j\in H|\quad B^k\text{第}j,\ i\text{元素为}1\} \tag{3.9}$$

H中的最高层次L_1具有下述性质：

(1)若$h_i\in L_1\subseteq H$，则$A(h_i)=A(h_i)\cap R(h_i)$；

(2)若$A(h_i)\cap R(h_i)=\{h_i\}$，则元素$h_i$与$L_1$中的其它元素无关。

可以利用上述性质建立系统的递阶层次结构。这一过程包括以下三个步骤：

第一步 由系统的可达矩阵构造h_i，$R(h_i)$，$A(h_i)$，$A(h_i)\cap R(h_i)$表。

第二步 从表中寻找满足条件

$$A(h_i)=R(h_i)\cap A(h_i) \tag{3.10}$$

的元素h_i。这些h_i构成一个层次，如果所有h_i均满足性质(2)，则它是内部独立层次。

第三步 从表中划去第二步中找到的h_i，继续重复第二步，直到满足(3.10)的元素不存在时为止。

下面用一个实例说明上述确定递阶层次结构的方法。

图3.2的二元矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

经简单计算，可达矩阵$B^4=B^5$

$$B^4=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

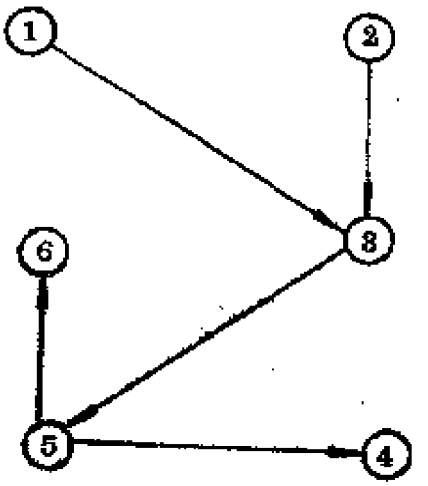


图 3.2

从而递阶层次构造表为：

h_i	$R(h_i)$	$A(h_i)$	$R(h_i)\cap A(h_i)$
1	1,3,4,5,6	1	1
2	2,3,4,5,6	2	2
3	3,4,5,6	1,2,3	3
4	4	1,2,3,4,5	4
5	4,5,6	1,2,3,5	5
6	6	1,2,3,5,6	6

从表中可以看出$L_1=\{h_1,h_2\}$，划去h_1，h_2，得下表：

h_i	$R(k_i)$	$A(h_i)$	$R(h_i)\cap A(h_i)$
3	3,4,5,6	3	3
4	4	3,4,5	4
5	4,5,6	3,5,	5
6	6	3,5,6	6

从而$L_2=\{h_3\}$，类似可得$L_3=\{h_5\}$，$L_4=\{h_4,h_6\}$。

第三节　递阶层次结构中的排序

递阶层次结构中的排序是以单一准则下的排序（即导出测度）为基础的。为此首先给出单一准则下排序的数学表述。

令L_k是递阶层次结构H中的第k个层次，这里$k=1, 2\cdots h-1$。

定义3.7（排序函数）　令$x\in L_s$，称：

$$w_x: L_{k+1}\to[0,1] \tag{3.11}$$

为排序函数，如果它满足（1）$\sum_{y\in L_{k+1}} w_x(y)=1$；

（2）若$z\in L_{k+1}-x^-$则$w_x(z)=0$。

单一准则下的排序函数概念，很容易推广到合成排序函数概念。

定义3.8（合成排序函数）令 $x\in L_\alpha$，对$L_\beta(\alpha<\beta)$称

$$w_{x,L_\beta}: L_\beta\to[0,1]^n \tag{3.13}$$

为L_β对x的合成排序函数，如果w_{x,L_β}满足

$$(1)\quad \sum_{y\in L_\beta} w_{x,\,L_\beta}(y)=1; \tag{3.14}$$

$$(2)\text{若}\ \beta=\alpha+1,\ w_{x,\,L_\beta}=w_x. \tag{3.15}$$

特别当$\{x\}=L_1$，即递阶层次结构的最高层次时，（3.13）为相对于总目标的排序函数。

在确定合成排序函数与单一准则下的排序函数之间的关系时，重要的是弄清层次内部的依存性与独立性对合成排序的影响。如果同一层次的元素彼此独立，即在对于下一层次进行两两比较判断测度时，这些元素分别独立地对下一层次的元素起支配作用，所得到的两两比较判断测度（即判断矩阵）相互不受影响。但在层次内部元素存在依赖关系的情况下，以这些元素为准则的下一层次元素两

两比较判断测度必定受这种依赖关系的影响。因此，在确定单一准则排序函数与合成排序函数之间的关系时，要考虑这种内部依存性的影响。上述分析使我们认识到，普通加权合成法则仅适应于内部独立的情况，对于存在内部依存关系的递阶层次结构，加权合成法则必须加以修订。这里仅就内部独立的递阶层次结构给出加权合成排序的数学表述。后面的章节将进一步讨论内部依存的递阶层次结构合成法则。

假定递阶层次结构中每一层次的元素位置均固定，相邻两个层次之间的排序函数已赋值。用x_1，…，x_m表示上一层次作为准则的元素，下一层次的元素y_1，…y_n的排序函数值，即排序权值向量写成矩阵B_p

$$B_p=(W_{ij})_{n\times m} \qquad (3.16)$$

其中，p为y_i所在层次标号，$(w_{1j},\cdots,w_{nj})^T=w_{xj,L_p}(L_p)$

令$k=1,2,\cdots,h-1$，对于满足$k<p\leqslant h$的层次L_p，加权合成排序为

$$w_{x,L_p}=B_pB_{p-1}\cdots B_{k+2}b_{k+1},\quad \forall X\in L_k, \qquad (3.17)$$

式中$b_{k+1}=w_{x,L_{k+1}}(L_{k+1})$，特别当$x=b$，$x$为处于最高层次的元素，$w_{b,L_p}$表示$L_p$层次的元素相对于总目标的排序权值向量。

在AHP的排序理论中，保序性是十分重要的概念。它包含三类不同但相关的含义。其一是当比较测度存在基本一致性或有序一致性时，被比较元素重要性的次序关系通过判断矩阵各行之间存在的次序关系反映出来，此时导出测度是否使这种次序关系保持不变？其二是当导出测度反映出被比较元素在不同准则下具有相同的次序关系时，权重合成是否保持这种次序关系？其三是当一个新元素加进某个层次时，假定原有元素的比较测度不发生变化，由于新元素的引入是否改变原有元素重要性的次序？在第三种含义中，需要对单一准则排序与合成排序两种情况分别讨论。上述三类保序性对AHP的决策过程影响极大，近年来受到许多学者的重视，提出了不少值得研究的课题。这里着重讨论合成排序的保序性，即保序性

的含义之二。另二类保序性，即导出测度的保序性和新元素导入的保序性在第四章讨论。

为了讨论合成排序的保序性，需要定义被比较元素的偏序概念。

定义3.9（层次中的偏序），令$A_1, A_2, \cdots A_n$为层次L_p中的元素，$C_1, \cdots, C_m$为层次L_{p-1}中的元素。相对于C_j被比较元素$A_1, \cdots, A_n$的导出测度分别为$w_{1j}, \cdots, w_{nj}$。L_p中元素的偏序$\succcurlyeq$定义为，$A_i \succcurlyeq A_k$当且仅当$w_{ij} \geqslant w_{kj}$。

上述偏序$\succcurlyeq$的定义显然满足自反性、对称性和传递性。当层次中存在偏序关系时，这种关系在权重合成之后是否仍然保存？定理3.2给出加权合成保序性的肯定答案。

定理3.2 若L_p中两个元素A_i, A_k存在层次中的偏序关系$A_i \succcurlyeq A_k$，则

$$w_{xi} \geqslant w_{xk} \tag{3.18}$$

式中w_{xi}，w_{xj}分别为（3.17）中w_x，$_{L_p}$的第i和第j个分量

证明：令

$$w_{x,\ L_{p-1}} = b = B_{p-1} \cdots B_{k+2} b_{k+1} \tag{3.19}$$

即b为L_{p-1}中元素相对于x的合成排序，$b=(w_1, \cdots, w_m)^T$，m为L_{p-1}中元素个数，

从而

$$w_{x.\ L_p} = B_p b \tag{3.20}$$

令

$$B_p = (w_{ij})_{n \times m} \tag{3.21}$$

则由偏序关系$A_i \succcurlyeq A_k$，知$w_{ij} \geqslant w_{kj}$，$\forall j$。由此可得

$$w_{xi} = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} w_j \geqslant \sum_{j=1}^{m} w_{kj} w_j = w_{xk} \tag{3.22}$$

证毕。

从定理3.2可知，如果决策方案单一准则下的排序表明方案中存在层次偏序关系，那么这种关系相对于决策目标来说仍然保持，合成加权过程中仅仅改变存在偏序关系方案的排序权值，不改变它

们之间的次序。这对于主要根据方案重要性顺序进行决策的问题来说显然有重要意义。

第四节　递阶层次中的结构依存性

在讨论AHP中的保序性时，依存性起着重要作用。存在着两种依存性，一种是功能依存性，另一种是结构依存性。

功能依存性是指一个层次的元素对另一层次元素存在着的依存关系的程度，它是一种定量的依存性，是两两比较测度的依据。

结构依存性有两种，一种是结构支配依存性，是定性依存性，包括层次间的外部依存性和层次中元素之间的内部依存性。AHP假定不存在内部依存性。在递阶层次结构中，一个层次的元素作为支配因素影响下一个层次因素的相对重要性，递阶层次并不考虑下一层次元素对上一层次元素的反馈支配作用。事实上这种反馈支配作用有时是存在的，例如，民主集中制下的组织机构不同层次之间就存在这种结构反馈依存性。递阶层次结构由此扩展到反馈系统结构，那里的排序不仅考虑方案对目标的排序，也考虑准则对方案的排序。反馈系统的排序问题有比较完整的理论，第九章将详细讨论。

第二种结构依存性是指结构信息依存性，即一个层次元素的排序权值根据与系统结构有关的信息加以调整所表现的依存性。递阶层次中的结构信息总是存在的，因此，结构信息依存性也总是存在的。例如，在一所大学内要根据教学与科研两个方面的贡献对学校的教师进行考核，一个高度简化的递阶层次结构如图3.3。第一层次为层次分析的目标，第二层次为教学与科研两个方面，第三个层次为被考核的教师。七名教师中一名未从事教学工作，五名未从事科研工作。假定第二层次两个因素教学与科研的排序权值分别为0.7，0.3，六名教师相对教学因素的排序权值分别为0.28，0.22，0.15，0.13，0.12，0.10，教师E，G相对于科研因素的排序权值为0.3，

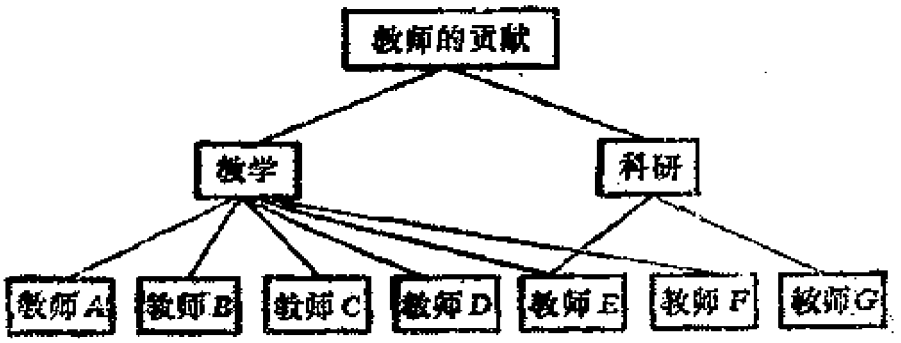


图 3.3

0.7。合成排序的结果（按$A,B,\cdots,G$顺序）为0.20，0.15，0.11，0.09，0.17，0.07，0.21。如果按上述排序权值作为考核结果并据此决定奖励或晋升，显然难于令大家心服。因此，在这个例子中应当考虑按从事教学和科研人员数目的比例关系对第二层次的因素权重加以调整，也就是说利用结构信息对合成排序进行二次加权。下面从一般的观点讨论结构信息的依存性。

假定在一组准则$C_1,\cdots,C_m$下，n个方案之间相对重要性的权值表示可排成阵A

$$A=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nm} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

注意，并不要求 $\sum_{i=1}^{n} w_{ij}=1$。由于AHP单一准则下的排序给出的是元素之间相对重要性的数值表示，在比例标度之下，这种相对重要性的数值表示不是唯一的，任何一组保持相同比例关系的正数均可以表示元素之间相对重要性。令

$$S_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{w_1} & & & \\ & \frac{1}{w_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{w_m}\end{pmatrix} \tag{3.24}$$

式中$w_j=\sum_{i=1}^{n} w_{ij}$，对$A$的每一列归一化等价于用$S_1$右乘$A$。实事上这种归一化表明在每一个准则下比较元素相对重要性时，所有准则都处于同样重要的位置，这些准则相对重要性的差别只有在进行权重组合时，即在考虑对于准则之下的层次进行组合排序时才体现出来。因此，我们有理由把S_1视为一种结构信息依存性的表示。显然，在一般情况下这种结构信息是合理的。从结构信息的依存性角度S_1提供了方案对准则的权重不发生影响的结构信息。这是最常遇到的一种结构信息。

在很多情况下每一个准则下方案的数目对准则的权重有影响，此时，准则不再“一视同仁”，它在对方案起支配作用时地位要发生变化。假定r_i是准则c_i所支配的方案数，N为所有r_i之和，令结构信息矩阵

$$S_2=\begin{pmatrix}r_1/N & & & \\ & r_2/N & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_m/N\end{pmatrix} \tag{3.28}$$

则S_1S_2表示根据与一个准则所支配的方案的多少来修正权重的结构信息，用S_1S_2右乘A，表明在进行权重合成时，准则支配方案越多，它的相对重要性增加的比率越大。令结构信息矩阵

$$S_3=\begin{pmatrix}N/r_1 & & & \\ & N/r_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N/r_m\end{pmatrix} \tag{3.26}$$

则S_1S_3表示的结构信息与S_1S_2相反，即用S_1S_3右乘A，在权重合

成时，准则支配的方案越少，它们的相对重要性增加的比率越大。

用结构信息矩阵可以根据所掌握的递阶层次结构中的两两比较判断以外的信息灵活地对合成排序施加影响，使决策过程更符合客观规律。

例如，上面提到的按教学与科研两方面的贡献对教师进行考评的例子，使用结构信息矩阵

$$S_2=\begin{pmatrix}\frac{6}{8} & 0\\ 0 & \frac{2}{8}\end{pmatrix}$$

则七个教师在教学与科研两方面贡献的合成排序权值向量w为

$$w=AS_1S_2c=\begin{pmatrix}0.28 & 0\\ 0.22 & 0\\ 0.15 & 0\\ 0.13 & 0\\ 0.12 & 0.3\\ 0.10 & 0\\ 0 & 0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{6}{8} & 0\\ 0 & \frac{2}{8}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0.7\\ 0.3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.147\\ 0.116\\ 0.079\\ 0.068\\ 0.086\\ 0.053\\ 0.053\end{pmatrix}$$

经归一化后得七名教师贡献的排序权向量为：

$$(0.25,\ 0.19,\ 0.13,\ 0.11,\ 0.14,\ 0.09,\ 0.09)^T$$

据此可知贡献大的三名教师依次为A、B、E。结果显然比前面的客观一些。

第四章　单一准则排序的特征根方法

在给定的准则下由元素之间两两比较标度导出排序标度即单一准则排序有许多可供选择的方法，本章论述这些方法中最早提出也是应用最多的特征根方法，并对单一准则排序的特征根方法所依据的Perron—Frobineus理论做简单的叙述。接着讨论与特征向量作为导出标度密切相关的比较标度一致性问题，着重说明比较标度一致性检验及它的原理。与特征根方法有关的特征向量的稳定性，左、右特征向量之间的关系，以及新元素导入对原有元素排序的影响等问题，也将在本章讨论。

第一节　引　言

前几章反复指出，AHP的关键在于分解—构造递阶层次结构，比较—导出元素相对重要性排序，合成—决定方案的优劣顺序。由单一准则下的元素间两两比较标度导出排序标度，即由两两比较判断矩阵导出被比较元素的排序权值（单一准则排序），不仅是构造递阶层次结构的目的，也是合成排序的起点。尽管对于复杂的决策问题构造一个适当的递阶层次结构并不是很容易解决的问题，但与单一准则排序相比，其数学原理要简单的多。单一准则排序的复杂性在于解决当判断矩阵不一致时（这是最常遇到的情况），导出标度怎样才能最好地反映或接近人们两两比较判断的标度问题。Saaty在提出AHP时确定特征根方法，即通过把特征根问题 $Aw=\lambda_{max}w$ 的归一化解 w 作为导出标度。以后关心和使用AHP的人多了，单一准则排序的方法也多了，诸如对数最小二乘法，最小二乘法，梯度特征向量法，等等，从实用性和判断累积效应看特征根法最好。

为进一步弄清特征根方法的原理有必要提出和解决下面一些问题。

第一，一致性的判断矩阵存在最大特征根（它等于判断矩阵的阶数），其余的特征根全部为零，最大特征根所对应的特征向量可以是判断矩阵的任意一列。那么，对于不一致的判断矩阵来说，这个最大特征根是否存在，是否重数为1，它所对应的特征向量是否可以全部由正分量组成？如果这个问题的答案是否定的或部分否定的，特征根方法自然失效。本世纪初由Perron针对正矩阵提出，又由Frobenius推广到不可约矩阵的著名定理很好地解决了上面的问题。第二节将以介绍这个定理为中心论述单一准则排序的特征根方法的数学基础。

第二，当判断矩阵不一致时，由特征根方法得到的导出排序是元素排序的一种近似的表示。而且，当判断矩阵的阶数越小时，这种不一致性对导出标度正确反映比较标度的影响越大。因此需要评价判断矩阵不一致性的标准，也就是要解决一致性的检验问题。在第三节从分析一致性矩阵的性质入手，讨论判断不一致性的数学表述。进而研究一致性检验的统计模拟方法和假设检验方法。

第三，在判断矩阵不一致性通过一致性指标从数量上加以确定之后，自然关心这种不一致性对导出标度的影响。从数学角度提出这一问题即互反矩阵的灵敏度分析。通过矩阵的Hadamard乘积来研究正互反矩阵，灵敏度分析可归结为扰动矩阵的研究，由此可得出某些有意义的结论。

第四，在很多情况下，决策方案或准则的数目会因决策环境的变化而改变。当一个新方案或准则被引进到决策问题中，假定原有方案或准则的两两比较判断保持不变，是否这些方案或准则的排序和排序权值由于新方案或准则的引入而发生变化？在一定条件下既使原有的方案或准则的排序权值不因新方案或准则的引入而变化，在合成排序过程中是否会引起合成权值或排序的变化？这也就是新元素导入的保序性问题。这对处于信息不完全条件下的决策是有意义的。当然希望单一准则下原有的元素排序以及递阶层次下排序合

成时原有元素的排序并不因新元素的导入而改变，事实上除了在特殊情况下总会发生序反转现象。我们将给出单一准则排序和合成排序的保序性准则。为了便于在信息不全，特别是决策方案不确定情况下有效的使用AHP，一种与比例标度不同的测度方法，即评分方法，可以代替比例标度法。第五节将讨论这种方法的原理、特点、应用范围等问题。

第五，由于比较判断矩阵的互反性，同时由于判断矩阵的任意元素a_{ij}是第i个方案对比第j个方案（准则）相对重要性的标度，所以，比较判断矩阵的转置矩阵中，第i行第j列的元素可视为第j个方案对比第i个方案相对重要性的标度。基于这种认识，我们要问，对应于（相同的）最大特征根，判断矩阵的左主特征向量与右主特征向量分量是否存在着互反关系，前者可否用来导出排序测度。一般情况下这个问题的答案是否定的。如何解释这种现象，在什么情况下左、右主特征向量存在着互反性，这一问题对特征根排序方法的理论发展及应用都有重要意义。本章的最后将简单讨论这一问题。

上述问题对搞清特征根法的原理是重要的，但理论的发展远未达到完善地步。尽管本章涉及的内容多已严格的在数学上得到证明，但仍有不少内容还没有做完整的数学处理，甚至缺少正确的数学上的提法。本章除了介绍那些已有定论的观点以外，也提出某些存在争议或需要深入研究的问题。

第二节　单一准则下排序的特征根方法的数学原理

单一准则下排序问题可以归结为由正的互反矩阵导出被比较元素排序权值问题。令$A=(a_{ij})$为正的互反矩阵，即A满足：

$$a_{ij}>0\ ,a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}},\ a_{ii}=1\ , \tag{4.1}$$

则单一准则下排序问题的本质是确定权函数$w(A)$：$A\to(0.1)^n$，

这里$A\in R_{M\cdot s}$，$R_{M\cdot n}$为所有$n\times n$正互反矩阵组成的集合，$w(A)=(w_1(A),\ w_2(A),\ \cdots,\ w_n(A))^T$，$\sum_{i=1}^{n} w_i(A)=1$。若$w(A)$通过求解$AW=\lambda_{max}W$的方法确定，则称此方法为单一准则下排序的特征根方法。

特征根方法的合理性基于正矩阵的Perron定理。由此定理，正的互反矩阵存在唯一正实数的最大特征根，它所对应的特征向量可以由均为正数的分量组成，经归一化后，上述特征向量是唯一的。由于Perron定理是对正矩阵而言的，这个定理自然适用于正的互反矩阵。因此讨论归结为对正矩阵，即所有元素全为正数的矩阵。为此先给出有关的一些定义和引理。

定义4.1 n阶矩阵A称非负矩阵，若其每一个元素$a_{ij}\geqslant 0$；当严格不等式成立时，称A为正矩阵。n阶列向量$x=(x_1,\ x_2\cdots,\ x_n)^T$称非负向量，若对应的每一个分量$x_i\geqslant 0$；当严格不等式成立时，称$x$为正向量。

下面用向量$x\geqslant y$的记号表示$x-y$是非负向量，而$x>y$，当且仅当$x-y>0$。令$R_n^+=\{x=(x_1,\ \cdots,x_n)^T\mid x_i\geqslant 0,\ x\neq 0\}$，即$R_n^+$为除零向量外全部非负$n$阶向量组成的集合，定义

$$\phi(x)=\min_{x_i>0} x_i^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\quad x\in R_n^+ \tag{4.2}$$

显然，$\phi(x)$在整个R_n^+上对任意实数矩阵有定义，且是x的连续函数。假定正矩阵有最大特征根λ_{max}，不难验证

$$\phi(x)\leqslant\lambda_{max}\qquad x\in R_n^+ \tag{4.3}$$

以及

$$\phi(x)x\leqslant Ax \tag{4.4}$$

特别地，有下面重要的引理。

引理1 对于n阶正矩阵A

$$\lambda_{max}=\max_{x\in R_n^+}\phi(x) \tag{4.5}$$

证明：若y为任意 $x\in R_n^+$ 经归一化后得到的向量，即

$$y_i=\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n}x_j},\quad (i=1,\cdots,n), \tag{4.6}$$

则$\phi(x)=\phi(y)$，从而可以在由归一化向量组成的R_n^+子集

$$Q=\left\{x\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}x_i=1,\ x\in R_n^+\right\} \tag{4.7}$$

中证明引理1，由式(4-4)

$$\phi(x)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij} \tag{4.8}$$

显然$\phi(x)$是有界闭集Q上的有上界的连续函数，故必定有

$$\lambda_0=\max_{x\in Q}\phi(x)=\max_{x\in R_n^+}\phi(x)$$

$$=\max_{x\in R_n^+}\ \min_{x_i>0}x_i^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j \tag{4.9}$$

令x^0是使式(4.9)成立的R_n^+中的向量，即

$$\lambda_0=\min_{x_i^0>0}(x_i^0)^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i^0 \tag{4.10}$$

我们证明x^0为正向量，且对所有i

$$\lambda_0x_i^0=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^0 \tag{4.11}$$

如若不然，不失一般性，由假设有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j^0-\lambda_0x_1^0=d_1>0 \tag{4.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^0-\lambda_0x_i^0\geqslant 0\ ;\ i=2,\cdots,n \tag{4.13}$$

令

$$y=x^0+\left[\frac{d_1}{2\lambda_0},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]^T \tag{4.14}$$

则易验证

$$\lambda_0 y<Ay \tag{4.15}$$

与$\lambda_0=\max\limits_{x\in R_n^+}\phi(x)$的定义矛盾。

由式（4.11）知，λ_0是A的特征根，而x^0是A的对应于λ_0的特征向量。

下面证明$\lambda_0=\lambda_{max}$，若λ是A的任一特征根（复根或实根），$\overline{x}$是与之对应的特征向量，则

$$A\overline{x}=\lambda\overline{x} \tag{4.16}$$

用$|\overline{x}|$表示由$\overline{x}$分量模组成的向量

$$|\lambda||\overline{x}|\leqslant A|\overline{x}| \tag{4.17}$$

由上式及λ_0的定义有

$$|\lambda|\leqslant\lambda_0 \tag{4.18}$$

若$|\lambda|=\lambda_0$，必有$\lambda=\lambda_0$，即λ是正实根，事实上，由式(4.17)及$|\lambda|=\lambda_0$，仿照式（4.11）证明过程有

$$|\lambda||\overline{x}|=A|\overline{x}| \tag{4.19}$$

从而

$$|A\overline{x}|=A|\overline{x}| \tag{4.20}$$

这表明，$\overline{x}=c_1w$，$w>0$，c_1为复数，这是由于

$$\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\overline{x}_j\right|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,|\overline{x}_j| \tag{4.21}$$

当且仅当$\overline{x}_i=|\overline{x}_i|e^{i\theta}$时成立。由式（4—16）可得

$$c_1Aw=\lambda c_1w \tag{4.22}$$

故

$$Aw=\lambda w \tag{4.23}$$

显然λ是正实数，因而$\lambda=\lambda_0$。此外，若$\lambda\neq\lambda_0$，则$|\lambda|<\lambda_0$。这就证明了，$\lambda_{max}=\max\limits_{x\in R_+^n}\phi(x)$，而$A$的其余不同的特征根的模均小于它。

这就完全证明了式（4.6）

系1 A的任意异于λ_{max}的特征根的模小于λ_{max}。

系2 A的最大特征根有对应的正特征向量。

引理2 λ_{max}是A的单根。

证明：令$\Delta(\lambda)=det(\lambda I-A)$，只要证明$\Delta'(\lambda_{max})\neq 0$，$\lambda_{max}$就是$A$的单根。因$\lambda_{max}$是$\Delta(\lambda)=0$的最大根，当$\lambda>\lambda_{max}$时，导数$\Delta'(\lambda)>0$，由

$$\Delta'(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k(\lambda) \tag{4.24}$$

式中$\Delta_k(\lambda)$表示矩阵A划去第k行，第k列后$n-1$阶子式A_k的特征多项式；并考虑到$\Delta_k(\lambda)=det(\lambda I-A_k)$，$A_k$为正矩阵，有最大特征根$\lambda_{max}^{(k)}$，及对应的任一正特征向量

$$u^{(k)}=(u_1^{(k)},\ u_2^{(k)},\ \cdots,\ u_{k-1}^{(k)},\ u_{k+1}^{(k)},\ \cdots,\ u_n^{(k)})^T$$

因此有等式

$$\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}u_j^{(k)}=\lambda_{max}^{(k)}u_i^{(k)}$$

$$i=1,2,\cdots,k-1,\ k+1,\cdots,n \tag{4.25}$$

令$x=(u_1^{(k)},\ \cdots,\ u_{k-1}^{(k)},\ 0,\ u_{k+1}^{(k)},\ \cdots,\ u_n^{(k)})^T$，则

$$\lambda_{max}^{(k)}x_i\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4.26}$$

上式中，当$i=k$时取小于号，$i\neq k$时取等号。式(4.26)表明

$$Ax-\lambda_{max}^{(k)}x\geqslant 0,\ \text{但}Ax-\lambda_{max}^{(k)}x\neq 0 \tag{4.27}$$

用A乘式(4-27)两边，

$$\lambda_{max}^{(k)} v < Av \tag{4.28}$$

式中$v=Ax\geqslant 0$，显然$\lambda_{max}^{(k)}<\lambda_{max}=\max\limits_{x\in R_n^+}\phi(x)$，因$\Delta_k(\lambda_{max}^{(k)})=0$，

故

$$\Delta_k(\lambda_{max})>0;\quad k=1,\ \cdots,\ n \tag{4.29}$$

从而

$$\Delta'(\lambda_{max})=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k(\lambda_{max})>0 \tag{4.30}$$

这就证明了λ_{max}是$\Delta(\lambda)=0$的单根。

由引理1，2，可以得到以Perron（1907）命名的如下定理：

定理4.1 令$A>0$，则

（1）A有最大的正数特征根λ_{max}，这个根是单根，其余特征根的模均小于λ_{max}；

（2）λ_{max}对应的A的特征向量可以全部由正分量组成；

（3）λ_{max}由

$$\lambda_{max}=\max_{x\in R_n^+}\min_{x_i>0}x_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \tag{4.31}$$

给出。

系

$$\min_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\leqslant\lambda_{max} \tag{4.32}$$

下面的定理4.2给出用幂法计算正矩阵最大特征根的基本原理。

定理4.2 令$A>0$，则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e}=cw \tag{4.33}$$

式中w为A的最大特征根对应的某一特征向量，c为常数，

$$e=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^T$$

证明：考虑A的Jordan标准型B，有非退化阵T，使

$$TAT^{-1}=B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & B_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & B_r\end{pmatrix} \tag{4.34}$$

其中B_i，$i=2$，…，r是重数为m_i的特征根λ_i对应的$m_i\times m_i$阶的Jordan块，

$$B_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_i \\ 0 & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix} \tag{4.35}$$

且$1+\sum_{i=2}^{r} m_i=n$，令B_i对应的一组适当选择的基向量为

$$v_{i1},\ v_{i2},\ \cdots,\ v_{im_i};\quad i=2,\cdots,r \tag{4.36}$$

使它们满足

$$\begin{aligned}Av_{i1}&=\lambda_i v_{i1}+v_{i2}\\ Av_{i2}&=\lambda_i v_{i2}+v_{i3}\\ &\vdots\\ Av_{im_i}&=\lambda_i v_{im_i}\end{aligned} \tag{4.37}$$

令$\lambda_1=\lambda_{max}$为A的最大特征根，v_1为λ_1对应的A的正特征向量，则v_1，v_{21}，…，v_{2m_2}，…，v_{rm_r} n个向量组成n维空间的一组基，故有

$$\begin{aligned}e=&d_1v_1+d_{21}v_{21}+\cdots+d_{2m_2}v_{2m_2}+\cdots\\ &+d_{rm_r}v_{rm_r}\end{aligned} \tag{4.38}$$

从而

$$A^k e=d_1\lambda_1^k v_1+\sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{m_r}\sum_{t=0}^{t} d_{ij}c_i^{k-t}\lambda_i^{k-t}v_{ij} \tag{4.39}$$

注意到

$$e^TA^ke=c_1\lambda_1^k+p_{2,k}\lambda_2^k+p_{2,k-1}\lambda_2^{k-1}+\cdots$$
$$+p_{2,1}\lambda_2+\cdots+p_{r,k}\lambda_r^k+\cdots$$
$$+p_{r,1}\lambda_r+c_2 \tag{4.40}$$

式中$p_{i,j}$为k的多项式，c_1，c_2与k无关。从而

$$\frac{A^ke}{e^TA^ke}=\frac{d_1\lambda_1^kv_1+\sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{l=0}^{t}d_{ij}c_i^{k-l}\lambda_i^{k-l}v_{ij}}{c_1\lambda_1^k+p_{2,k}\lambda_2^k+\cdots+p_{i,k}\lambda_i^k+\cdots+p_{r,1}\lambda_r+c_2} \tag{4.41}$$

当$k\to\infty$时，其余各项

$$\frac{d_{ij}c_i^{k-l}\lambda_i^{k-l}v_{ij}}{c_1\lambda_1^k+\cdots+p_{ik}\lambda_i^k+\cdots+c_2}\to 0 \tag{4.42}$$

故$c=\frac{d_1}{c_1}$，$w=v_1$，即得到式(4-33)。

定理4.1实际上是非负不可约阵的Perron-Frobenius定理的特例，这里不加证明地给出Perron-Frobenius定理。

定义4.2 令A是$n\times n$矩阵，N是$1,\cdots,n$组成的整数集，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，A称可约阵，若存在N的非空真子集J，使得对所有$i\in J$，$i\overline{\in}J$时，$a_{ij}=0$。否则，A称不可约阵。

例

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

A_1是不可约阵，A_2是可约阵，显然$A>0$是不可约阵。

若A是不可约阵，A'也是不可约阵，且对任意i，存在$j\neq i$，使$a_{ij}\neq 0$。A是可约阵的等价定义为当且仅当存在置换矩阵P，使得：

$$PAP' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

这里A_{11}，A_{22}为方阵。

定理4.3 (Perron-Frobenius)令A为非负不可约阵，则

(1)A有最大的正特征根λ_{max}，λ_{max}是单根，其余特征根的模小于等于λ_{max}。

(2)λ_{max}对应的A的特征向量可以全部由正分量组成。

(3)λ_{max}由

$$\lambda_{max} = \max_{x \in R_n^+} \min_{x_i > 0} x_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$= \min_{x \in R_n^+} \max_{x_i > 0} x_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

给出。

显然，正矩阵满足Perron-Frobenius定理，当A是素阵时，定理的结论还可以加强。

定义4.3 非负不可约阵是素阵，当且仅当存在整数$m \geqslant 1$，使得$A^m > 0$，否则A称非素阵。

定理4.4 令A为素阵，则定理4.3中的(1)改变为：A有最大正特征根λ_{max}，λ_{max}是单根，其余特征根的模小于λ_{max}。

这个定理与定理4.1的结论是一致的，因为$A > 0$是素阵。

第三节 判断矩阵的一致性及其检验

在前面介绍层次分析方法时，曾经提出了一致性概念，并指出，当判断矩阵具有完全一致性时，它的最大特征根为n，其余特征根皆为零。实际上，许多矩阵也具有这一性质。由上节知，正矩阵的最大特征根在矩阵行和的最大值与最小值之间。这样，当一个矩阵各列相同，每列和均等于n时，便具有最大特征根是n，其余

特征根皆为零的性质。因此，有必要研究具有一致性的正矩阵的性质，以及对一致性矩阵出现小的扰动下最大特征根的变化性质。先给出矩阵一致性的定义。

定义4.4 $n \times n$ 阶矩阵$A=(a_{ij})$是一致性矩阵，如果对所有i，j，$k=1, 2, \cdots, n$，有

$$a_{ij}=\frac{a_{ik}}{a_{jk}} \tag{4.44}$$

若正矩阵A是一致性的，则它具有下述性质：

(1) $a_{ij}=1$，$a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}$；i，$j=1, 2, \cdots, n$ (4.45)

从而一致性正矩阵是互反矩阵。

(2) A的转置A^T也是一致性的。

(3) A的每一行均为任意指定的一行的正数倍数。从而 $\mathrm{rank}(A)=1$。

(4) A的最大特征根$\lambda_{max}=n$，其余特征根皆为零。

(5) 若A的λ_{max}对应的特征向量为$x=(x_1 \cdots x_n)^T$则

$$a_{ij}=\frac{x_i}{x_j}; \quad i, j=1, \cdots, n \tag{4.46}$$

下面讨论正一致性矩阵的元素受到小的扰动，但仍保留互反性质时的情况。显然这对我们构造的判断矩阵是重要的。

假定正互反矩阵A的最大特征根λ_{max}对应的特征向量为$x=(x_1, \cdots, x_n)^T$，令

$$a_{ij}=\frac{x_i}{x_j}e_{ij}; \quad i, j=1, 2, \cdots, n \tag{4.47}$$

这里$e_{ii}=1$，$e_{ij}=\frac{1}{e_{ji}}$，当所有$e_{ij}=1$时，式(4.47)化为式(4.46)，在这种情况下，A是一致性矩阵。当$e_{ij} \neq 1$，$(i \neq j; \ i, j=1, 2, \cdots, n)$时，把$A$看成是对一致性矩阵$\overline{A}=\left(\frac{x_i}{x_j}\right)$附加扰动后的矩阵。

由一致性正矩阵的性质(4)，以及互反矩阵A的n个特征根$\lambda_1=\lambda_{max}, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，知存在等式

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=n \tag{4.48}$$

可以把

$$\mu=-\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i \tag{4.49}$$

看成是A对一致性矩阵偏离的某种指标，由式(4-48)知

$$\mu=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \tag{4.50}$$

事实上有

定理4.5 若正互反矩阵$A=(a_{ij})$最大特征根对应的正特征向量$w=(w_1,\cdots,w_n)^T$，$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}e_{ij}$，$e_{ij}>0$则

$$\mu=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left[e_{ij}+\frac{1}{e_{ij}}\right] \tag{4.51}$$

证明：由

$$\lambda_{max}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\frac{w_j}{w_i} \tag{4.52}$$

有

$$\lambda_{max}-1=\sum_{i\ne j}a_{ij}\frac{w_j}{w_i}$$

故

$$n\lambda_{max}-n=\sum_{1\le i<j\le n}\left[a_{ij}\frac{w_j}{w_i}+a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right] \tag{4.53}$$

从而

$$\mu=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{n}{n-1}$$

$$+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left[a_{ij}\frac{w_j}{w_i}+a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right] \tag{4.54}$$

将$(w_i/w_j)e_{ij}=a_{ij}$代入，考虑到$e_{ij}=\frac{1}{e_{ji}}$，便得到式(4.51)。由定理4.5可知，μ对e_{ij}是凸的，且在所有的$e_{ij}=1$时取极小值$\mu=0$。

定理4.6 令λ_{max}是正互反矩阵A的最大特征根，则

$$\lambda_{max}\geqslant n \tag{4.55}$$

若令$e_{ij}=1+\delta_{ij}$，$\delta_{ij}>-1$，则$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}+\frac{w_j}{w_j}\delta_{ij}$，从而在某种意义下可视$\delta_{ij}$为对一致性矩阵扰动的相对量，由式(4.51)有：

$$\mu=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left[\frac{\delta_{ij}^2}{1+\delta_{ij}}\right] \tag{4.56}$$

由此可得定理4.6。

综上所述，为使判断矩阵接近一致性，总是希望μ接近于0，或λ_{max}接近于n。一般地当扰动δ_{ij}越小时，λ_{max}越接近n，特别是在$\delta=\max_{i,j}\delta_{ij}$时，假定$\delta_{ij}>0$，

$$\begin{aligned}\lambda_{max}-n&<\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\delta_{ij}^2\\&\leqslant\frac{(n-1)}{2}\delta^2\end{aligned} \tag{4.57}$$

下面研究正互反矩阵的某些性质。

定理4.7 令A是正互反矩阵，λ_1，…，λ_n是A的特征根，则

$$\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j=0 \tag{4.58}$$

证明：由

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=tr(A)=n \tag{4.59}$$

$$\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2=tr(A^2)=n^2 \tag{4.60}$$

可得

$$n^2=(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^2=$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \lambda_i \lambda_j \qquad (4.61)$$

因而式（4.58）成立。

定理4.8 $n \times n$ 阶正互反矩阵$A=(a_{ij})$是一致性的，当且仅当$\lambda_{max}=n$。

证明：令$w=[w_1, \cdots, w_n]^T$为λ_{max}对应的A的特征向量，

$$\lambda_{max}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}w_j/w_i \qquad (4.62)$$

于是

$$n\lambda_{max}-n=\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}w_j w_i^{-1}$$

$$=\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_{ij}w_j w_i^{-1}+w_i w_j^{-1}/a_{ij}) \qquad (4.63)$$

根据一致性矩阵的性质（5），$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$，从而，$\lambda_{max}=n$。反过来，式（4.63）中的通项

$$a_{ij}w_i^{-1}w_j+a_{ij}^{-1}w_j^{-1}w_i \geqslant 2 \qquad (4.64)$$

当且仅当$a_{ij}w_i^{-1}w_j=a_{ij}^{-1}w_j^{-1}w_i=1$时，式（4.64）有极小值2，因$n\lambda_{max}-n=n^2-n$，故仅当$\lambda_{max}=n$，才有$a_{ij}=w_i/w_j$（$i, j=1, 2, \cdots, n$），从而$A$是一致性的。

若A不具有一致性，一般地$a_{ij} \geqslant a_{kl}$未必可以推出$w_i/w_j \geqslant w_k/w_l$，但由于$w_i$（$i=1, \cdots, n$）是由一行元素的值确定的，故有下面的定理。

定理4.9 若$(O, \cdots, O_n)$是活动$C_1, \cdots, C_n$的正确标度，且由$O_i \geqslant O_k$得出$a_{ij} \geqslant a_{kj}$ $(j=1, \cdots, n)$，则$O_i \geqslant O_k$可得$w_i \geqslant w_k$

证明：由$Aw=\lambda_{max}w$，有

$$\lambda_{max}w_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj}w_j = \lambda_{max}w_k$$

由此$w_i \geqslant w_k$。

下面讨论判断矩阵的一致性检验问题。

式(4.50)可视为判断矩阵A对于由它的主特征向量 w构成的一致性矩阵$A=(\frac{w_i}{w_j})$偏离程度的测量。(4.56)表明，$\delta_{ij}\to 0$时，判断矩阵越接近一致性矩阵，μ越接近于0。因此，定义一致性指标C.I.(*consistent index*)为

$$C.I.=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \qquad (4.65)$$

为了得到一个对不同阶数判断矩阵均适用的一致性检验的临界值，还必须考虑一致性与矩阵阶数之间的关系。实事上，矩阵阶数越大，两两比较判断的比例测度越难达到一致性。例如，二阶互反矩阵总是一致性矩阵，构造三阶判断矩阵也容易达到一致性，而对于9阶矩阵，独立给出的两两比较判断为36个，很难使这36个判断达到一致性。在1—9及其倒数的标度下，极特殊的少数判断矩阵才能达到一致性。因此，需要根据判断矩阵的阶数对一致性指标C.I.进行修订。

Saaty提出用平均随机一致性指标R.I.修订C.I.的方法。这一方法在AHP的应用中已被普遍接受。

平均随机一致性指标的计算过程如下：

1．对于n阶矩阵，独立地重复$\frac{n(n-1)}{2}$次随机从1，2，…，9，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{9}$中取值，作为矩阵上三角元素，主对角线元素自动取1，下三角元素取上三角对称元素的倒数，由此得随机互反矩阵；

2．计算所得到矩阵的一致性指标C.I.；

3．重复上述步骤以得到足够数量的样本，计算C.I.的样本均值。

表4.1给出了样本容量为1000的R.I.值及有关计算结果*。

表 4.1

矩阵阶数	R.I.即C.I的样本均值	最小C.I.样本值	最大C.I.样本值
3	0.5149	0	3.2203
4	0.8931	0	2.8565
5	1.1185	0.1094	2.8763
6	1.2494	0.1712	2.5963
7	1.3450	0.3571	2.3197
8	1.4200	0.5190	2.1412
9	1.4616	0.5787	2.1221
10	1.4874	0.8569	2.0609
11	1.5156	0.9286	2.1173
12	1.5405	0.9781	2.0279
13	1.5583	0.8894	1.9917
14	1.5779	1.1007	1.9807
15	1.5894	1.344	1.9681

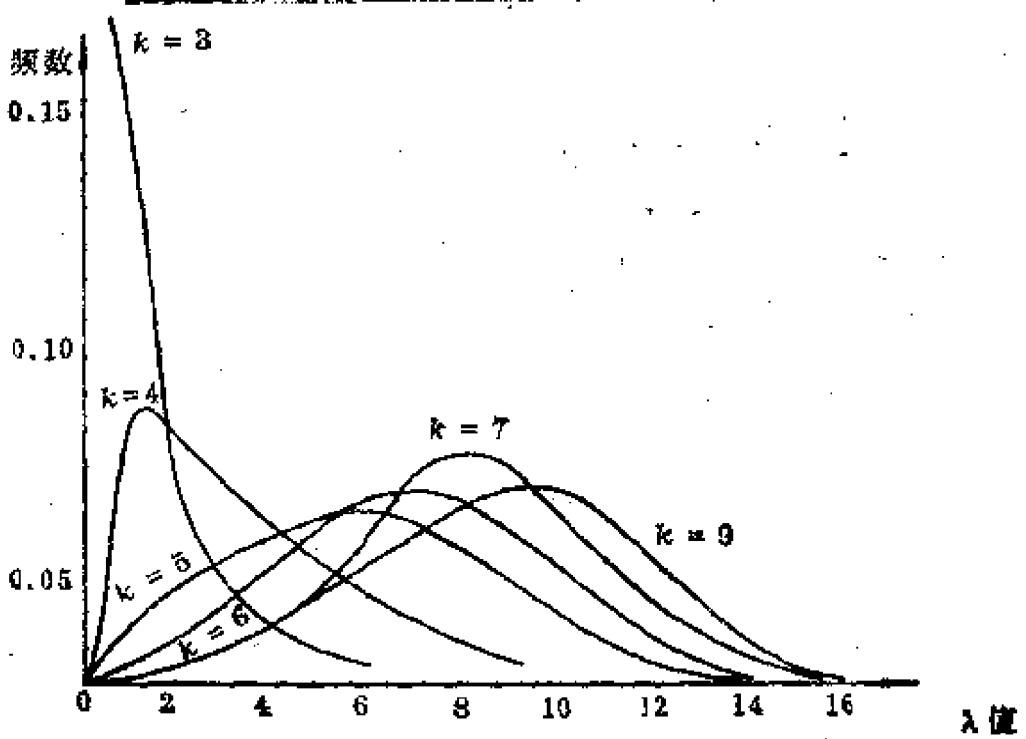


图 4.1 不同阶数随机互反矩阵的主特征根分布图

*结果是作者在天津大学系统工程研究所技术员刘继光的帮助下，在Universe—68计算机上完成的。

从模拟计算结果分析，$n>3$时，主特征根的样本频率近似为正态分布，$n=3$时，接近于Webull分布。(见图4.1)事实上，从计算结果可以看出，R.I.随阶数增加而增大，但它趋于一个稳定值，这一点从定理4.6的证明中可以看出：由(4.56)知，对同样的δ_{ij}分布假定下，μ是随阶数单增的。(4.57)表明μ是有上界的，故R.I.随阶数增大收敛。这从最小C.I.样本值随阶数增加而增大也可以看出。而且不难证明，最大、最小C.I.样本值随阶数增大收敛于R.I.。

R.I.随矩阵阶数增加而增大使我们考虑利用R.I.作为修正C.I.的一个指标。Saaty推荐用

$$C.R.=\frac{C.I.}{R.I.} \tag{4.66}$$

代替C.I.，进行一致性检验。当C.R.<0.1时，认为判断矩阵有可接受的一致性，否则，由于判断矩阵偏离一致性程度过大而需要考虑对判断进行修订。

很明显，用0.1作为一致性检验的临界值是相当粗略的，很难说有什么客观标准。近年有人建议用0.3代替0.1，这实际上否定了一致性检验的必要。况且用R.I.作为标准修订C.R.也缺乏足够的依据。从理论上讲，把C.R.作为一致性检验的指标是有缺陷的。为此有必要发展一致性的假设检验。

由(4.15)，令$\delta_{ij}=e_{ij}-1$，得

$$\mu=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left(1+\delta_{ij}+\frac{1}{1+\delta_{ij}}\right) \tag{4.67}$$

根据$\frac{1}{1+x}$的Taylor展开式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x} \tag{4.68}$$

及δ_{ij}在$(-1,1)$区间内的假设，我们有

$$\mu=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1<k<i<n}(2+\delta_{ik}^{2}) \tag{4.69}$$

或：

$$\mu=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1<k<i<n}\delta_{ik}^{2} \tag{4.70}$$

若假定δ_{ij}在$(-1,1)$区间上服从零均值，σ^2方差的独立正态分布，则μ近似以服从自由度为$\frac{n(n-1)}{2}$的χ^2分布。由于人的比较判断有主观上一致性趋势，δ_{ij}相对集中于0附近，因此进一步假定$\delta_{ij}\sim N(0,(\frac{1}{2})^2)$。这样，一致性检验可归结为检验假设。

$$H_0:\mu=0$$

在一定的置信水平之下，通过χ^2表可以找出接收H_0的临界值。例如，在0.05水平下接受H_0的临界值如下

阶　数	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
临界值	0.049	0.092	0.122	0.142	0.161	0.169	0.178	0.185	0.191	0.196

采用假设检验的方法进行一致性检验的优点在于临界值有一个客观的标准，但由于要用到比较强的对δ_{ij}的假定，因此这种方法有改进的可能性。

第四节　判断矩阵的灵敏度分析

当判断矩阵A附加一个扰动的矩阵ΔA之后，假定A的主特征根λ_1和对应的主特征向量w_1分别变为$\lambda_1+\Delta\lambda_1$，$w_1+\Delta w_1$。我们的目的是分析$\Delta A$与$\Delta\lambda_1$，$\Delta w_1$的关系，即判断矩阵的灵敏度分析。

令w_i为对应于λ_i的A的右特征向量，v_i为相应的左特征向量，则：

$$\begin{aligned}(A^T+\Delta A^T)(v_1+\Delta v_1)&=(\lambda_1+\Delta\lambda_1)(v_1+\Delta v_1)\\(A+\Delta A)(w_1+\Delta w_1)&=(\lambda_1+\Delta\lambda_1)(w_1+\Delta w_1)\end{aligned} \tag{4.71}$$

展开后略去二次项得

$$\Delta\lambda_1 = \frac{v_1^T(\Delta A)w_1}{v_1^T w_1} \tag{4.72}$$

同时有

$$\Delta w_1 = \sum_{j=2}^{n} -\frac{v_j^T(\Delta A)w_1}{(\lambda_1-\lambda_j)v_j^T w_j}w_j \tag{4.73}$$

上式对于分析$\Delta\lambda_1$，Δw_1与ΔA的关系是有意义的，但需要计算λ_i，W_i，V_i($i=1,\cdots n$)且这些计算均很复杂。由于(4.72)、(4.73)是针对一般矩阵给出的，需要对判断矩阵导出灵敏度分析的特殊公式。由第二节知

$$\lim\frac{A^k e}{e^T A^k e} = c_1 w_1 \tag{4.74}$$

及

$$\lim\frac{(A^T)^k e}{e^T(A^T)^k e} = c_2 v_2 \tag{4.75}$$

式中c_1，c_2为常数，$e^T=(1,1,\cdots,1)$.对于附加扰动后的矩阵$A+\Delta A$，(4.74)化为

$$\lim\frac{(A+\Delta A)^k e}{e^T(A+\Delta A)^k e} = c(w_1+\Delta w_1) \tag{4.76}$$

由

$$(A+\Delta A)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}A^i(\Delta A)^{k-i} \tag{4.77}$$

展开后略去ΔA的二次项，得

$$(A+\Delta A)^k = kA^{k-1}(\Delta A)+A^k \tag{4.78}$$

令 $\|A\| = e^T Ae$，则

$$\|(A+\Delta A)^k\|^{-1}(A+\Delta A)^k e = \|kA^{k-1}(\Delta A)+A^k\|^{-1}\{kA^{k-1}(\Delta A)e+A^k e\} \tag{4.79}$$

考虑到

$$\|kA^{k-1}(\Delta A)+A^k\| = k\|A^{k-1}(\Delta A)\|+\|A^k\| \tag{4.80}$$

$$\text{有}\quad \|(A+\Delta A)^k\|^{-1}(A+\Delta A)^k e-\|A^k\|^{-1}A^k e$$
$$=\{\|A^k\|\,\|kA^{k-1}(\Delta A)+A^k\|\}^{-1}$$
$$kA^{k-1}\{\|A^k\|(\Delta A)-\|A^{k-1}(\Delta A)\|A^k\}e \tag{4.81}$$

从而

$$\Delta w_1=\lim\frac{kA^{k-1}\{\|A^k\|(\Delta A)-\|A^{k-1}(\Delta A)\|A\}e}{\|A^k\|\;\|kA^{k-1}(\Delta A)+A^k\|} \tag{4.82}$$

从上式出发，通过引进Hadamard乘积，讨论判断矩阵的灵敏度分析。

假定在附加扰动ΔA之下，令$e_{ij}=1+\frac{\Delta a_{ij}}{a_{ij}}$，则$a_{ij}+\Delta a_{ij}$可以表示为$a_{ij}e_{ij}$。用$A\cdot B$表示两个矩阵$A$，$B$的Hadamard乘积，即对于$C=A\cdot B=(c_{ij})$有

$$c_{ij}=a_{ij}\cdot b_{ij} \tag{4.83}$$

则
$$A+\Delta A=A\cdot E \tag{4.84}$$

式中$E=(e_{ij})$，将(4.84)代入(4.82)，得：

$$\Delta w_1=\lim\frac{kA^{k-1}\{\|A^k\|(A\cdot E)-\|A^{k-1}(A\cdot E)\|A\}e}{\|A^k\|\{\|kA^{k-1}(A\cdot E)\|-(k-1)\|A^k\|\}} \tag{4.85}$$

上述公式可用于在e_{ij}接近于1，即扰动不太大时判断矩阵的灵敏度分析。下面考虑对e_{ij}不加严格限制下Δw_1对于扰动的响应。

令$R_{M(n)}$表示所有n阶正的互反矩阵集合，在$R_{M(n)}$上，Hadamard乘积是闭的，即任意A_1，$A_2\in R_{M(n)}$，有$A_1\cdot A_2\in R_{M(n)}$。称$R_{M(n)}$中两个矩阵是等价的，当且仅当

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(A_1)}A_1w_1=\frac{1}{\lambda_{\max}(A_2)}A_2w_1 \tag{4.86}$$

记为$A_1\sim A_2$，式中$\lambda_{\max}(A_i)$表示A_i的主特征根。在此等价定义

下，容易验证其自反性、对称性及传递性。即

（1）$A\sim A$，$A\in R_{M(n)}$

（2）若$A_1\sim A_2$，则$A_2\sim A_1$，A_1，$A_2\in R_{M(n)}$

（3）若$A_1\sim A_2$，且$A_2\sim A_3$，则$A_1\sim A_3$，A_1，A_2，$A_3\in R_{M(n)}$

令W_k为n阶一致性矩阵，它是由向量$(w_{k1}, w_{k2}, \cdots, w_{kn})^T$通过$\left(\frac{w_{ki}}{w_{kj}}\right)$构造的，则$R_{M(n)}$可以根据等价关系$\sim$分划为等价类$Q(W_k)$，令$R_{Q(n)}$为所有一致性互反矩阵集合，则

$$R_{M(n)}=\bigcup_{W_k\in R_{Q(n)}} Q(W_k) \tag{4.87}$$

定理4.10 令$A\in Q(W)$，则存在A的唯一分解式，使得A表示为一个一致性互反矩阵W和不一致性互反矩阵$E=(e_{ij})$的Hadamard乘积，即

$$A=W\cdot E \tag{4.88}$$

且满足$\lambda_{\max}(A)=\lambda_{\max}(E)$，这里$E$的右主特征向量为

$a=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)^T$。

证明：令w为W的主特征向量，由$A\in Q(W)$及W的一致性，E能唯一地被构造为

$$E=\begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n \end{bmatrix} \tag{4.89}$$

或
$$E=A\cdot W^T \tag{4.90}$$

上式表明E是A的相似矩阵，从而$\lambda_{\max}(A)=\lambda_{\max}(E)$

由
$$a_{ij}=\left(\frac{w_i}{w_j}\right)e_{ij}$$

知
$$\sum_{j=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}e_{ij}w_j=\lambda_{\max}(A)w_i \tag{4.91}$$

和
$$\lambda_{\max}(A)=\lambda_{\max}(E)=\sum_{j=1}^{n} e_{ij} \tag{4.92}$$

从而
$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij}a_j=\left(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\right)a_i \tag{4.93}$$

式中$a_i=a_j$, $\forall i,\ j$. 由互反矩阵的主特征向量除差一个常数是相同的这一性质，有$a_i=\frac{1}{n}$，证毕。

由定理4.10我们可得如下的系。

系 令$A\in R_{n\times n}$，则$A\in Q(W)$，当且仅当下面两个条件同时成立：

(1) $\lambda_{\max}(A)=\lambda_{\max}(A\cdot W)^T$；

(2) $A\cdot W^T$的右主特征向量为$\alpha=(\frac{1}{n},\ \cdots,\ \frac{1}{n})^T$

考虑两个互反矩阵$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$，假定A和$A\cdot B$的主特征向量分别为w_1和w_1^*，为研究它们之间的关系，按A和B的一致性情况分为以下三类讨论：

A)、A与B均为一致性矩阵；

B)、B是一致性矩阵；

C)、A与B均为不一致性矩阵。

情况A A与B均为一致性矩阵

令W_2是B的右主特征向量，由

$$A=\left(\frac{w_{1i}}{w_{1j}}\right),\qquad B=\left(\frac{w_{2i}}{w_{2j}}\right) \tag{4.94}$$

并令$C=A\cdot B$，我们有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}w^*_j=\lambda_{\max}(C)w^*_i \tag{4.95}$$

由于一致性矩阵的Hadamard乘积仍为一致性矩阵，有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}w_j=nw_i \tag{4.96}$$

把(4.94)中的a_{ij}、b_{ij}的表达式代入上式得

$$\sum_{k,i=1}^{n} \frac{w_{1i}}{w_{1j}} \frac{w_{2i}}{w_{2j}} w_i^* = nw \tag{4.97}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{w_{1j}w_{2j}} = n \frac{w_i^*}{w_{1i}w_{2i}} \tag{4.98}$$

由上式，$w_i^*(w_{1i}w_{2i})^{-1}$可视为全部由1组成的互反矩阵(从而是一致性的)特征向量的分量，由于这样的矩阵有特征向量$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)^T$，故

$$\frac{w_i^*}{w_{1i}w_{2i}} = \frac{1}{n} \tag{4.99}$$

由此

$$w_i^* = \frac{1}{n} w_{1i}w_{2i} \tag{4.100}$$

情况B　　B为一致性矩阵

在这种情况下

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}w = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_{2i}}{w_{2j}} w \tag{4.101}$$

及

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_{2j}} = \lambda_{max}(A \cdot B) \frac{w_i}{w_{2i}} \tag{4.102}$$

由$A \cdot B = (DB)A(DB)^{-1}$，式中$DB = \mathrm{diag}(w_{21}, w_{12}, \cdots, w_{2n})$知$A \cdot B$与$A$为相似矩阵，从而它们的特征根重合，由此得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_{2j}} = \lambda_{max}(A) \frac{w_i^*}{w_{2j}}, \tag{4.103}$$

从而A的主特征向量w_1必然与$\frac{w_{1i}}{w_{2i}}$组成的向量相重合，即

$$w_1 = w_1 \cdot w_2 \tag{4.104}$$

情况C A与B皆为不一致性情况

令$C=A\cdot B$。由定理4.10，有

$$A=W_1\cdot E_1 \qquad \lambda_{max}(A)=\lambda_{max}(E_1) \tag{4.105}$$

$$B=W_2\cdot E_2 \qquad \lambda_{max}(B)=\lambda_{max}(E_2) \tag{4.106}$$

E_1,E_2分别有主特征向量$(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ \cdots,\ \frac{1}{n})^T$，由$W=W_1\cdot W_2$亦为一致性矩阵，以及$(E_1\cdot E_2)$与$(A\cdot B)$的相似性，仅当$(E_1\cdot E_2)$的主右特征向量取$(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n})^T$形式时，$A\cdot B\in Q(W)$。容易验证，在一般情况下，这一条件仅对3 × 3 的互反矩阵为真。因此可见，仅对3 ×3互反矩阵，(4.104)在一般情况下成立。对于任意阶矩阵，在一般情况下(4.104)不成立。

对上面的分析，可以归结为定理4.11。

定理4.11 若一致性的互反矩阵W被E以$W\cdot E$形式扰动，且E为互反矩阵，则$A=W\cdot E$的右主特征向量为W和E的右主特征向量的Hadamard乘积。若B为不一致性的互反矩阵，仅对3 ×3矩阵，$A=B\cdot E$的右主特征向量是B与E的右主特征向量的Hadamard乘积。

由上述定理，可以在每一个层次元素不超过3个的情况下进行判断矩阵灵敏度的分析。如果一个层次中元素超过三个，可以将其分组，使每组元素不超过三个，并将递阶层次结构加以调整，再进行判断矩阵的扰动分析。更一般地，有定理4.12

定理4.12 令$A\in R_{M(n)}$，$A=W\cdot E$，$W\in R_{C(n)}$，

令P是扰动矩阵，$P\in R_{M(n)}$，A与$E\cdot P$的右主特征向量分别为w_1及w_2，则$A\cdot P$的右主特征向量w_1^*为w_1与w_2的Hadamard乘积，即

$$w_1^* = w_1 \cdot w_2 \tag{4.107}$$

证明：在情况B中，视A为w，B为$E\cdot P$，即得上述定理的结论。

下面用例子说明定理4.12在扰动分析中的应用.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $\lambda_{max}(A)=4.132$, $w_1=(0.4212,\ 0.2823,\ 0.2156,\ 0.0809)^T$

命P为扰动矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

由$A\in Q(W)$,

$$W=\begin{pmatrix} 1 & 1.492 & 1.954 & 5.208 \\ 0.6702 & 1 & 1.309 & 3.491 \\ 0.5118 & 0.7639 & 1 & 2.666 \\ 0.1926 & 0.2865 & 0.3751 & 1 \end{pmatrix}$$

得

$$E=A\cdot W^T=\begin{pmatrix} 1 & 1.3405 & 1.0235 & 0.7680 \\ 0.7460 & 1 & 1.5279 & 0.8594 \\ 0.9770 & 0.6545 & 1 & 1.5004 \\ 1.3021 & 1.1636 & 0.6665 & 1 \end{pmatrix}$$

及

$$E\cdot P=\begin{pmatrix} 1 & 0.4468 & 1.0235 & 1.3560 \\ 2.2381 & 1 & 1.5279 & 0.2864 \\ 0.9770 & 0.6545 & 1 & 1.5004 \\ 0.6510 & 3.4916 & 0.6665 & 1 \end{pmatrix}$$

EoP的主右特征向量为$P_1=(0.2183,\ 0.2470,\ 0.2250,\ 0.3094)^T$。由定理4.12得

$$W_1^*=w_1\cdot P_1=(-.3919,\ 0.2963,\ 0.2061,\ 0.1063)^T$$

把P视为A的扰动矩阵

$$A\cdot P=\begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 8 \\ \frac{3}{2} & 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}$$

$A\cdot P$的右主特征根从解特征根问题$A\cdot PW_1^*=\lambda^*_{max}W_1^*$的角度得$W_1^*=(0.3913,\ 0.2963,\ 0.2061,\ 0.1063)^T$，恰与$W_1\cdot P$的结果相同。

从上面例子可以看出，扰动分析归结为$E\circ P$的主特征向量与A的主特征向量之间关系的讨论，而无须直接计算$A\circ P$的主特征向量。定理4.12尽管在计算上不一定有太大用处，但在理论上是很有意义的。

需要强调的是，用Hadamard矩阵乘积形式表示扰动，可以保持矩阵的互反性，而扰动矩阵采用$A+\Delta A$的形式，ΔA一般不是互反矩阵，为了把扰动的$A+\Delta A$的表示转化为用Hadamard乘积形式，有公式

$$\Delta A=A\circ(P-I^*) \tag{4.108}$$

这里I^*为在Hadamard乘积运算下的单位元素，即I^*为全部元素是1的n阶矩阵。

定理4.12可以推广到附加任意个扰动的情况，并对整个递阶层次加以扩展。对A附加任意个扰动的情况$P^{(1)}$，$P^{(2)}$，…，$P^{(k)}$，即扰动后的矩阵A为

$$A^*=A\cdot P\cdot^{(1)}P\cdot^{(2)}\cdots\cdot P^{(k)} \tag{4.109}$$

则

$$w_i^* = \| p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_k \circ w_1 \|^{-1} (p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_k \circ w_1) \quad (4.110)$$

式中P_i为$A \circ W^T \circ P^{(1)} \circ \cdots \circ P^{(i)}$主特征向量，这一结果可对定理4.12施行归纳法得到。

第五节　新元素导入的保序性原理

当决策的环境发生变化时，递阶层次中的元素有可能增加或减少，此时关心的问题是，假定原有元素两两比较判断不变，由于新元素的导入或原有元素的减少在单一准则下原有元素的排序权值是否改变，它们的排序是否改变？如果原有元素在单一准则下的排序权值不变，那么在权重组合时是否改变？由于新元素的导入与原有元素的减少在处理上是相似的，这里仅讨论新元素导入的情况。把这类问题称之为新元素导入的保序性问题。本节先讨论在单一准则下新元素的保序性问题，接着给出适用于新元素导入保序的评分标度方法，最后讨论合成排序的保序性问题。

假定相对于准则C，方案A_1，……，A_n的两两比较标度为$A=(a_{ij})_{n\times n}$，当新方案A_{n+1}导入后，原有方案A_1，…，A_n的两两比较标度不变，此时的判断矩阵A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} & & & a_{1n+1} \\ & A & & a_{2n+1} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{nn+1} \\ \frac{1}{a_{1n+1}} & \frac{1}{a_{2n+1}} & \cdots \frac{1}{a_{nn+1}} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

对于判断矩阵A，n个元素的排序向量为$w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$，$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，对于判断矩阵$A^*$，$n+1$个元素的排序权值为$w^* =$

$(w_1^*, \cdots, w_{n+1}^*)^T$ 并假定 $\sum_{i=1}^{n} w_i^* = 1$。下面分 A 为一致性矩阵和 A 为不一致性矩阵两种情况讨论。

1° A 为一致性矩阵

令 $$A^* = \overline{A} \circ E$$

式中

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \frac{a_{1,n+1}}{w_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \frac{a_{n,n+1}}{w_n} \\ \frac{w_1}{a_{1,n+1}} & \cdots & \frac{w_n}{a_{n,n+1}} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.112}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} & & w_1 \\ & A & \vdots \\ & & w_n \\ 1/w_1 \cdots & 1/w_n & 1 \end{pmatrix} \tag{4.113}$$

即A^*可以表示为一个一致性矩阵$\overline{A}$和另一个不一致性矩阵E的Hadamard乘积。由定理4.12，$W^* = \overline{w} \circ e$，$\overline{w}$、$e$分别为$\overline{A}$、$E$对应于最大特征根$\lambda_{max}(\overline{A})$及$\lambda_{max}(E)$的特征向量。由$A$为一致性矩阵，$\overline{A}$亦然，知$\lambda_{max}(\overline{A}) = n+1$，$\overline{w} = (w_1, \cdots, w_{n+1})^T$。从而若新元素$A_{n+1}$导入使原有元素的排序权值不变，应有 $e = (1, \cdots, 1, e_{n+1})^T$。令$\lambda_{max}(A^*) = n + \Delta\lambda$，由

$$Ee = \lambda_{max}(A^*)e \tag{4.114}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{a_{1n+1}}{w_1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & \frac{a_{nn+1}}{w_n} \\ \frac{w_1}{a_{1n+1}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ e_{n+1} \end{pmatrix} = (n+\Delta\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ e_{n+1} \end{pmatrix} \tag{4.115}$$

展开得

$$n + \frac{e_{n+1}a_{in+1}}{w_i} = n + \Delta\lambda \quad (i = 1 \cdots n) \tag{4.116}$$

及

$$\frac{w_1}{a_{1n+1}} + \cdots + \frac{w_n}{a_{nn+1}} + e_{n+1} = (n+\Delta\lambda)e_{n+1} \tag{4.117}$$

由(4.116)知

$$a_{in+1} = \frac{\Delta\lambda w_i}{e_{n+1}} \quad (i = 1, \cdots n) \tag{4.118}$$

代入，得

$$\frac{e_{n+1}}{\Delta\lambda} + \cdots + \frac{e_{n+1}}{\Delta\lambda} + e_{n+1} = (n+\Delta\lambda)e_{n+1} \tag{4.119}$$

解此方程，略去$\Delta\lambda = -n$，得$\Delta\lambda = 1$，即$\lambda_{\max}(A^*) = n+1$。由定理4.8知，$E$为一致性矩阵。这样，得到了下述定理。

定理4.13 在原有元素的判断矩阵为一致性的条件下，新元素导入不改变原有元素排序权值的充分必要条件是A^*为一致性矩阵。

证明：充分条件是显然的，必要条件由上面的推导可以得到。

当A^*为不一致的情况，不仅原有元素的排序权值而且它们的排序都可能改变。试考察

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

引进A_3，

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad w^*=\begin{pmatrix} 0.56 \\ 0.44 \\ 0.34 \end{pmatrix}$$

对比原有排序权值，A_1由0.5增加为0.55，A_2由0.5减低为0.44。

Ⅱ° A为不一致性情况。

用类似定理4.13的证明方法，有下述不一致性情况下保序性定理4.14。

定理4.14 新元素导入不改变原有元素排序权值的充分必要条件为

$$a_{i,n+1}=c w_i \Delta\lambda \tag{4.121}$$

式中，$\Delta\lambda$为满足

$$\Delta^2\lambda+[\lambda_{max}(A)-1]\Delta\lambda-n=0 \tag{4.122}$$

的正数。

为了找出A和A^*中原有n个元素排列顺序的关系，构造互反矩阵$\overline{A}$，定义为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A & \begin{matrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{1}{w_1} & \cdots & \frac{1}{w_n} \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.123}$$

式中$w=(w_1, \cdots, w_n)^T$，为满足$Aw=\lambda_{max}(A)w$的特征向量。容易证明

$$\lambda_{max}(\overline{A})=\lambda_{max}(A)+1 \tag{4.124}$$

$\overline{A}$的主特征向量$\overline{w}=(w_1, \cdots, w_n, 1)^T$及

$$\overline{A}=\overline{W}\cdot\overline{E} \tag{4.125}$$

式中

$$\overline{W}=\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} & w_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} & w_n \\ \frac{1}{w_1} & \cdots & \frac{1}{w_n} & 1 \end{pmatrix},\quad \overline{E}=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & E & \vdots \\ & & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{4.126}$$

E满足A＝W·E，从而

$$A^*=\overline{W}\cdot\overline{E}\cdot P \tag{4.127}$$

这里

$$P=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \frac{a_{1n+1}}{w_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \frac{a_{nn+1}}{w_n} \\ \frac{w_1}{a_{1n+1}} & \cdots & \frac{w_n}{a_{nn+1}} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.128}$$

引用定理4.12，可以讨论A^*的主特征向量w^*与原有元素特征向量w的关系。

下面转向评分标度的讨论，

关于单一准则下保序性的问题，仅仅给出引进新元素保持原有元素排序权值的某些结果。事实上，单一准则下新元素导入是否使原有元素重要性的顺序发生变化，即是否发生序反转的问题要复杂得多。注意到新元素导入使原有元素的排序权值不变，仅仅发生在与新元素有关的判断和原有元素的判断保持一致或与原有判断矩阵A的导出矩阵W保持一致的情况下。而有关新元素的判断之所以与原有元素的正确标度保持一致，说明对新元素的比例标度做出了准确的测度。其实，在这种情况下，新元素的排序权值先于比例标度的判断就被确定了。这促使考虑一种基于一致性设计的标度，即评

分标度，并由此引出AHP标度的评分方法（Scoring Method）。

AHP允许使用两种标度，一种是两两比较的比例标度，元素之间的相对重要性用这种标度加以测度，并由比例测度导出排序测度，比例标度允许不一致的判断，新元素导入或原有元素删除往往会导致原有元素排序权值及顺序的变化。这种标度已经比较熟悉了。另一种是评分的标度，或称绝对标度。在日常生活的许多测度中，使用的都是这种绝对标度。AHP在估计方案相对于准则的重要性中，可以使用这种绝对标度。使用评分法时无须进行元素的两两比较，而是在一定准则下把元素的重要程度与某种标准或级别进行比较，然后赋于一定的数值。在这种标度之下，元素重要性的权值是独立确定的，因此新元素导入或原有元素的删除不影响其它元素的排序权值。评分方法对两类情况特别有用，一类是元素的个数无法确知，或者元素的数目相当大。例如学校里录取新生，这种方法给出对每位考生的客观评价。另一类是元素的重要性可以用其它标度精确地测度。例如在AHP用于商品选择时，价格作为一个准则，各种商品的相对于价格准则的排序可以用它们本身的市场价格标度，而无须两两比较。这两种标度方法可以同时在同一个AHP模型中使用。评分方法一般用于元素的重要性可以用已知标度加以测度，或者至少元素的重要性可以通过与事先规定的标准或级别比较而确定其数值的情况。在难于定量或难于确定分级标准时，一般仍应采用两两比较的比例标度。

假定新元素的导入并不影响单一准则下原有元素的排序权值，那么在权重合成时，原有元素的组合权重是否会受新元素导入的影响呢？这个问题即所谓合成排序的序反转问题。考虑下面的例子。假定某单位的教学与科研工作的相对重要性权重分别为0.6，0.4，该单位的工作由甲、乙两人承担，其承担工作多少可得到下面排序表：

	教学	科研	组合权重	排序
	0.6	0.4		
甲	0.4	0.6	0.48	2
乙	0.6	0.4	0.52	1

现增加一个只做教学工作的丙，在不改变甲、乙教学工作的相对重要性权重情况下，相应的排序表如下：

	教学	科研	合成权重	排序
	0.6	0.4		
甲	0.2	0.6	0.36	1
乙	0.3	0.4	0.34	2
丙	0.5	0	0.30	3

对比两种情况，由于新元素导入，原有元素的序发生变化。由此可见，在一般情况下，新元素导入即使不改变原有元素单一准则下的排序权值，也可能导致合成权重及顺序的改变。下面从数学上讨论合成排序的保序性——即新方案导入不影响原有方案合成排序问题。

令$C=(c_1, c_2\cdots, c_m)^T$表示$m$个准则的权重向量。$x=(x_1, \cdots, x_n)^T$表示$n$个方案的合成权重向量。假定合成权重向量的分量是按大小顺序排列的，即

$$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_1 \tag{4.129}$$

令

$$S=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.130}$$

为结构变换矩阵，则

$$Sx=(x_1-x_2,\ x_2-x_3,\ \cdots,\ x_n)^T \tag{4.131}$$

为非负向量，一个方案如果在所有准则下的权重皆为0，则称为无关方案。在引进一个新方案之前，假定第n个方案是无关方案，从而在m个准则下单一准则的排序向量a^1，$a^2\cdots\cdots a^m$的最后一个分量皆为0。令$e^T=(1,1,\cdots\cdots,1)$，及$e_n^T=(0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0,\ 1)$，则

$$e^Ta^j=1,\qquad e_n^Ta^j=0,\qquad \forall j \tag{4.132}$$

且

$$x=\sum_{j=1}^{m}c_ja^j,\qquad Sx=\sum_{j=1}^{m}c_jSa^j, \tag{4.133}$$

引进一个有关方案代替无关的第n个方案，并假定在第j个准则下它的排序权重为r_j，则第j个准则下n个方案的排序权向量为$\frac{1}{1+r_j}(a^j+r_je_n)$，因此得合成权向量为

$$x=\sum_{j=1}^{m}c_j\frac{a^j+r_je_n}{1+r_j} \tag{4.134}$$

合成权重保序的条件$Sx\geqslant 0$等价于

$$\sum_{j=1}^{m}c_j\frac{Sa^j+r_jSe_n}{1+r_j}\geqslant 0 \tag{4.135}$$

由此有下述定理4.15。

定理4.15 新元素导入时合成排序保序的充要条件是不等式(4.135)成立。

由于(4.135)并不总成立，因此序反转在权重合成中会发生。由定理4.16还可以看出，新元素导入实质上可视为对原有元素的排序附加了一个新的结构矩阵$\overline{S}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{1+r_j}\right)$。这个结构矩阵$\overline{S}$一般改变原有元素的排序及它们的合成排序。

第六节　判断矩阵的左右主特征向量

从线性代数理论可知，A与其转置矩阵A^T有相同的特征根，从而当A为正矩阵时它们存在相同的最大特征根。我们称满足$A^Tv^T=\lambda_{max}v^T$或$vA=\lambda_{max}v$的特征向量v（取行向量形式）为A的左主特征向量。容易证明，在A为一致性的情况下，它的左、右主特征向量的对应分量可以有互为倒数的关系。在不一致性的情况下，对于$n\geqslant 4$的判断矩阵，左右主特征向量分量一般不再具有互反性质。在这种情况下有必要把左右主特征向量的分量结合起来作为元素的排序权值。从测度角度分析，右主特征向量是按支配关系（即i元素支配j元素的重要性）得出的判断矩阵的导出测度。而左特征向量则是按被支配关系得出的判断矩阵的导出测度。由于特征根方法求导出标度的本质在于从这种支配关系累积影响的极限（参见定理4.2）出发确定元素的排序权值，因此在不一致的情况下，特征根方法无法得出左右主特征向量统一的导出测度。为了综合左、右主特征向量以得到统一的导出标度，有必要从数学上讨论判断矩阵左右主特征向量的关系。

定理4.16　若A为$n\times n$正矩阵，它的行和皆等于1，则存在正行向量v，$\sum_{i=1}^{n}v_i=1$，使得

$$\lim_{m\to\infty}A^m=ev \tag{4.136}$$

式中$e=(1,1,\cdots,1)^T$。

证明：令y_0为任意非负的n阶列向量，定义$y_m=A^my_0$，令a_m，b_m分别为y_m的最大和最小分量，由$y_{m+1}=Ay_m$知，y_{m+1}的分量是y_m的分量的凸组合，从而y_{m+1}的任意分量c满足

$$(1-\alpha)b_m+\alpha a_m\leqslant c\leqslant\alpha b_m+(1-\alpha)a_m \tag{4.137}$$

这里α是A中的最小元素，特别地

$$a_{m+1}\leqslant ab_m+(1-a)a_m \tag{4.138}$$

及

$$b_{m+1}\geqslant(1-a)b_m+aa_m \tag{4.139}$$

这表明a_m是有界单调递减的，b_m是有界单调递增的．由(4.318)减(4.139)，得

$$a_{m+1}-b_{m+1}\leqslant(1-2a)(a_m-b_m) \tag{4.140}$$

由归纳法

$$a_m-b_m\leqslant(1-2a)^m(a_0-b_0) \tag{4.141}$$

上式表明

$$\lim_{m\to\infty} y_m=ce,\quad b_0\leqslant c\leqslant a_0 \tag{4.142}$$

令$y_0=e_i=(0,\ \cdots,\ 1,\ \cdots,\ 0)^T$，即第$i$个分量为1，其余分量为0，则由$y_m=A^m y_0$知，$A^m$的第$i$列为$y_m$．令$y_m\to(c_1,\ \cdots,\ c_i)^T$，$c_i=v_i$，且$c_i>0$，从而

$$\lim_{m\to\infty} A^m=ev \tag{4.143}$$

注意到由归纳法

$$A^m e=e \tag{4.144}$$

故$\Sigma c_i=\Sigma v_i=1$．证毕．

定理4.17 若A为$n\times n$正矩阵，则存在$\lambda>0$，行向量$v>0$，列向量$w>0$使得，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}=wv \tag{4.145}$$

证明．令 $S=\left\{x\ |x=(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)^T,\ x_i\geqslant 0,\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i=1\right\}$ (4.146)

则A是S上的连续映射．令

$$Tx=\frac{Ax}{e^TAx} \tag{4.147}$$

不难证明：

①T是S上的连续映射；

②由$A>0$，$x\geqslant 0$，$Ax>0$，$e^TAx>0$，得

$$Tx>0,\quad \forall x\in S;$$

③
$$e^T(Tx)=\frac{e^TAx}{e^TAx}=1 \tag{4.148}$$

故$T(S)\subseteq S$，即T为S到S中的映射。

由Brouwer不动点定理存在$w\in S$，使得

$$Tw=w \tag{4.149}$$

即

$$\frac{Aw}{e^TAw}=w \tag{4.150}$$

由②，$w>0$．令$e^TAw=\lambda$，则$Aw=\lambda w$，$w>0$．

令 $\hat{W}=\mathrm{diag}(w_i)$，由

$$\left(\hat{W}^{-1}\frac{1}{\lambda}A\hat{W}\right)e=\hat{W}^{-1}\frac{1}{\lambda}Aw=\hat{W}^{-1}\frac{Aw}{e^TAw}=\hat{W}^{-1}w=e \tag{4.151}$$

知$\hat{W}^{-1}\frac{1}{\lambda}A\hat{W}$为行和等于1的矩阵，根据定理4.16存在$v^*>0$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\left(\hat{W}^{-1}\frac{1}{\lambda}A\hat{W}\right)^k=ev^* \tag{4.152}$$

由
$$\left(\hat{W}^{-1}\frac{1}{\lambda}A\hat{W}\right)^k=\hat{W}\frac{1}{\lambda^k}A^k\hat{W} \tag{4.153}$$

及

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k=\hat{W}e\upsilon^*\hat{W}^{-1}=w\upsilon^*\hat{W}^{-1} \tag{4.154}$$

知

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k=w\upsilon \tag{4.155}$$

这里$\upsilon=\upsilon^*\hat{W}^{-1}$，$\lambda>0$，$w>0$，$\upsilon>0$，证毕。

定理4.18 υ，w分别为A对应于特征根λ的左右特征向量。

证明：由(4.150)，w是A对应于特征根$\lambda=e^TAw$的右特征向量。为证明υ是A的左特征向量，考虑

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{k-1}\cdot\frac{A}{\lambda}=w\upsilon\frac{A}{\lambda} \tag{4.156}$$

及(4.155)，故

$$w\upsilon\frac{A}{\lambda}=w\upsilon \tag{4.157}$$

或

$$w\upsilon A=\lambda w\upsilon \tag{4.158}$$

由$e^Tw\upsilon A=e^T\lambda w\upsilon$得

$$\upsilon A=\lambda\frac{e^Tw}{e^Tw}\upsilon \tag{4.159}$$

从而

$$\upsilon A=\lambda\upsilon \tag{4.160}$$

即V是A的对应于λ的左特征向量，证毕。

由定理4.2知，λ是A的最大特征根。

系：上述定理中(4.155)给出的A的左右特征向量υ，w，满足

$$\upsilon w=1 \tag{4.161}$$

证明：由$Aw=\lambda w$，(4.155)，(4.156)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}w=w\upsilon w \tag{4.162}$$

及

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}w=w \tag{4.163}$$

知$wvw=w$，但vw是数，从而$vw=1$。证毕。

最后讨论A的左右特征向量分量互反的条件。

令A为判断矩阵，w是A的主特征向量。$\hat{W}=\mathrm{diag}(w_i)$，则

$$A=\hat{W}E\hat{W}^{-1} \tag{4.164}$$

由

$$\hat{W}E\hat{W}^{-1}w=\lambda_{\max}w \tag{4.165}$$

知

$$Ee=\lambda_{\max}e \tag{4.166}$$

$e=(1,1,\cdots1)^T$，即E的任意行和为$\lambda_{\max}$。

定理4.19 A的左右主特征向量分量互反的充分必要条件为

$$Ee=E^Te \tag{4.167}$$

证明：令v是A的左主特征向量，则

$$A^Tv^T=\lambda_{\max}v^T \tag{4.168}$$

由(4.164)

$$\hat{W}^{-1}E^T\hat{W}v^T=\lambda_{\max}v^T \tag{4.169}$$

或

$$E^T\hat{W}v^T=\lambda_{\max}\hat{W}v^T \tag{4.170}$$

若

$$E^Te=Ee=\lambda_{\max}e \tag{4.171}$$

则e是E^T的主特征向量，从而除差一个常数外，$wv^T=e$，这表明存在v，其分量与w对应分量互反。

反之，若$\hat{w}v^T=e$，即w的分量与v^T对应分量互反，则(4.171)成立。证毕。

系：3×3判断矩阵的左右主特征向量分量总可以是互反的。

证明：令

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 1/a & 1 & c\\ 1/b & 1/c & 1\end{bmatrix} \tag{4.172}$$

则

$$E=\begin{pmatrix} 1 & a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} & a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{3}} \\ a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{3}} & 1 & a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} \\ a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} & a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{3}} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.173}$$

从而

$$\lambda_{\max}e=Ee=E^{T}e=\left[1+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{3}}\right]e \tag{4.174}$$

证毕。

第五章　AHP公理体系

第一节　引言

自1977年Saaty关于AHP的第一篇论文发表以来，AHP的发展经历了两个阶段。前五年是AHP广泛应用的阶段。最初提出AHP时，基本原理是明确的，即分解、判断、排序、合成原理。那时AHP很快在许多领域得到应用，一些研究者，特别是Saaty，力图向学术界说明AHP作为一种决策方法的实用性和有效性。后来，不仅应用的人多了，对它的某些理论问题的研究也逐渐深入。1980年Saaty关于AHP的专著出版，标志着AHP已经成为决策领域的一个单独分支。在这本著作中，除了AHP的基本原理之外，在理论上还较好地解决了特征根法的排序机理。这以后的五年，可以看成AHP理论研究深入发展阶段。运筹学界的许多学者针对递阶层次的构造、排序权向量的计算、比例标度、AHP的效用理论等方面提出了不少研究课题。例如，仅就由判断矩阵推导排序权向量问题就提出了近十种方法。孰优孰劣，诸说不一。这些理论问题的研究，无疑对AHP的完整体系建立是有益的。但从另一个方面，也反映出需要对AHP的内涵与外延做出明确的规定，以便对大量研究结果给予正确评价：哪些属于对AHP的深化，哪些属于对AHP的扩展，哪些超出了AHP的范围。在这种情况下，Saaty发表了关于AHP公理体系的一系列论文。

提到公理体系，人们很容易联想到几何学中的公理。确实，几何学在它长期的发展历史中，公理体系起着重要作用。无论是欧几里得几何学，还是非欧几何学，它的严密完美的形式无不建立在一整套公理体系的基础上。它的每一个定理的证明，都是以前已经被

证明了的定理或命题的演绎推理结论，而这些定理和命题又需要用其它被证明的命题得出。由此追溯到了那些无须证明的事实—称之公理的基本事实。一般来说，公理必须具有以下一些特点：相容性，完备性，独立性，数目少，简单明了。AHP是决策科学的一个分支，它的数学原理与基础数学中的数学分析、线性代数密不可分，因此AHP的公理体系既不可能独立于基础数学体系，也不应该与基础数学体系矛盾。这就需要在考虑AHP的公理时，尽可能地体现AHP的思维决策的特点。那么什么是AHP思维决策的本质属性呢？

AHP所体现的决策思维的本质主要有五个方面：(1)在进行比较判断时使用二元偏好关系，而这种关系必须是明确的；(2)数学上表达这种二元关系的任何形式都具有互反性质；(3)人们在进行两两比较时没有必要对那些很不相似的事物做出判断；(4)在决策问题被分解成基本因素以组成递阶层次时，相邻两层有自上而下的支配关系。(5)任意决策因素或者作为方案，或者作为准则，可以合理地表示在递阶层次之中。为了用数学语言严格地表达上面五个明显的事实，以构成AHP公理，需要用一组定义对公理所涉及到的概念加以规定。本章第二节将叙述这些公里与有关的定义。从AHP的公理出发，根据与之有关的数学命题，能演绎地推导AHP的基本数学结构。本章第三节就有关判断的一致性及某些其它方面做简单论述。有兴趣的读者可将那些没有在第三节涉及的数学问题进一步给出完整的数学推导。

第二节　AHP公理

对应于上节提出的体现AHP决策思维本质属性的五个方面，相应地有五个相互独立的公理。它们是：偏好性公理，互反性公理，同质性公理，依存性公理和合理期望公理。为叙述这些公理，给出一系列有关的定义。

定义5.1 （偏序集）带有二元关系$\leqslant$的任意集合称为偏序集。如果$\leqslant$满足：

（1）自反性　$x\leqslant x$；$x\in S$，

（2）传递性　若$x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则$x\leqslant z$，$\forall x$，$y,z\in S$；

（3）对称性　若$x\leqslant y$，$x\geqslant y$，则$x=y$，$\forall x$，$y\in S$。

定义5.2（支配关系）若x，$y\in S$满足$x\leqslant y$，用$x<y$表示$x\leqslant y$且$x\neq y$。称y支配x，如果$x<y$且不存在$t\in S$，使得$x<t<y$。

定义5.3（偏序集的上确界）偏序集S的子集E称为有上界的，如果存在S的一个元素s，使得对于每一个$x\in E$，$x\leqslant s$，元素s称为E的上确界，如果E的上界集合U存在一个元素u_1，使得对每一个$u\in U$，$u_1\leqslant u$。

定义5.4（递阶层次）令H是带有最大元素b的有限偏序集，H称为一个递阶层次，如果它满足：

（1）H中存在一个分划L_k，$k=1$，2，…，h，使得$L_1=\{b\}$，L_k称为层次；

（2）若$x\in L_k$，则$x^-\subseteq L_{k+1}$，这里，$x^-=\{y\mid x$支配$y\}$，$k=1$，2，…，$h-1$；

（3）若$x\in L_k$，则$x^+\subseteq L_{k-1}$，这里，$x^+=\{y\mid y$支配$x\}$，$k=2$，…，h。

令$c\in L_k$，L_{k+1}的任意两个元素A_i，$A_j\in A=c^-\subseteq L_{k+1}$（$k=1$，2，…，$h-1$）

以c为准则进行偏好比较，定义$>_c$为A上的一个偏好关系。它表示相对于准则c两个元素之间偏好，即$A_i>_cA_j$表示对于准则c，A_i与A_j相比，更偏好A_i。$\sim_c$表示偏好的无差别关系。显然，若$A_i\sim_cA_j$，则$A_j\sim_cA_i$，但偏好关系未必可传递，即$A_i>_cA_j$，$A_j>_cA_k$，未必$A_i>_cA_k$。

公理Ⅰ（偏好性公理）对于任意A_i，$A_j\in A\subseteq c^-$，则三种关系$A_i>_cA_j$，$A_j>_cA_i$，$A_i\sim_cA_j$，必居其一。

公理Ⅰ表明，在使用*AHP*时，人们对被比较元素之间偏好的

判断是确定的。不存在对A_i比A_j更偏好，同时对A_j比A_i更偏好的情况。否则，AHP的基本原理将不适用。

定义5.5.（基本标度）令P是$A\times A$到R^+（正实数集）上的映射。令f：$c\to P$，$P_c\in f(c)$。P_c把每一对$(A_i, A_j)\in A\times A$与一个正实数结合起来，即$P_c(A_i, A_j)=a_{ij}\in R^+$，$A_i, A_j\in A$，三元组$(A\times A, R^+, P_c)$称为基本标度。

由定义5.5知，基本标度是在准则c之下，每一对进行两两比较的元素到正实数集上的映射。

公理Ⅰ（互反性公理）对于所有$A_i, A_j\in A$，$c\in C$，

$$P_c(A_i, A_j)=1/P_c(A_j, A_i) \tag{5.1}$$

互反性公理是凭直觉导出的公理。它表明，如果某个物体重量是另一个物体重量的5倍，反过来另一个物体的重量是这个物体重量的1/5。所使用的基本标度是比例标度，它对于两两比较判断来说是正确的标度。两两比较不能使用区间标度。这个公理对AHP以至多准则决策是很有用的。

定义5.6（导出标度）令$R_{M(n)}$是$n\times n$正互反矩阵集合，$A=(a_{ij})=[P_c(A_i, A_j)]$，$c\in C$。

令ψ：$R_{M(n)}\to[0,1]^n$，$\forall A\in R_{M(n)}$，$\psi(A)$是分量在$[0,1]$内的n维向量，称三元组$[R_{M(n)}, [0,1]^n, \psi]$是导出标度。

定义5.7（一致性），映射P_c称为一致性的，如果

$$P_c(A_i, A_j)P_c(A_j, A_k)=P_c(A_i, A_k),$$
$$\forall i, j, k=1, \cdots\cdots, n \tag{5.2}$$

类似地，A是一致性矩阵，当且仅当

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik} \tag{5.3}$$

定义5.8（ρ—同质性）任意给定正数$\rho\geqslant 1$，非空集合$x^-\subseteq L_{k+1}$，称在准则x下是ρ—同质的，如果

$$1/\rho<P_c(A_i, A_j)<\rho,\ \forall A_i, A_j\in x^- \tag{5.4}$$

由互反性公理

$$P_c(A_i, A_i)=1,\ \forall A_i\in x^- \tag{5.5}$$

公理Ⅱ （同质性公理）给定递阶层次H，且$x\in L_k$，则$x^-\subseteq L_{k+1}$是ρ同质的。

在AHP的基本原理一章，曾分析过被比较的两个元素在属性上不能相差太大，否则定性的判断失去了意义。例如我们无法将太阳和原子相比并指定一个数值。被比较的元素应该在属性上比较接近，从而基本标度是有界的。由于AHP使用比例标度承认(5.4)，即承认同质性公理是合理的。ρ表示比例标度的一个上界。如果ρ是比例标度的上确界，例如$\rho=9$，比例标度将在区间$\left[\frac{1}{9},\ 9\right]$上取值。

定义5.9 （单一准则的导出标度）令$x\in L_k$，$x^-\subseteq L_{k+1}$，$\psi(A)$是x^-中所有元素相对于x的导出标度。

令$\psi_k(L_k/L_{k-1})$是由列向量$\psi_{kx}(L_k/x)$，$x\in L_{k-1}$组成的矩阵，它的定义为

$$\psi_k(y/x)=\begin{cases}\psi(A_j/x) & y=A_j\in x^-\\ 0 & y\overline{\in}\,x^-\end{cases}\tag{5.6}$$

式中$\psi(A_i/x)$表示$\psi(A)$中第i个分量。不失一般性，假定

$$\sum_{y\in L_k}\psi_k(y/x)=1\tag{5.7}$$

定义3.10 （递阶层次的合成导出标度）H中任意元素的递阶层次的合成导出标度可由下式中相应的分量得到：

$$\begin{aligned}&\psi_1(b)=1\\ &\psi_2(L_2)=\psi_2(b^-/b)\\ &\cdots\cdots\\ &\psi_k(L_k)=\psi_k(L_k/L_{k-1})\psi_{k-1}(L_{k-1})\end{aligned}\tag{5.8}$$

定义3.11 （外部依存性）一个集合A称外部依存于C，如果能够相对于每一个$c\in C$定义A的基本标度。

定义3.12 （内部依存性）令A外部依存于C，称A对某个$c\in C$是内部依存的，如果存在$a\in A$，使得A相对于a是外部依存的。

公理Ⅳ （依存性公理）令H是递阶层次，对每一个层次L_k（$k=1, 2, \cdots, h-1$），

（1）L_{k+1}外部依存于L_k；

（2）L_{k+1}内部独立于所有$x \in L_k$；

（3）L_k可以外部依存于L_{k+1}。

公理Ⅳ说明在递阶层次结构中相邻两层具有可以导出基本标度的依存关系。公理Ⅳ的（1），（2）适用于递阶层次结构，那里层次间存在递阶关系，而整个公理适用于反馈的层次结构，即方案层不仅依存于准则层，反过来，准则层也可以依存于方案层，准则层，子准则层可以有类似的依存关系。这些依存关系仅限于存在相邻两个层次之间。内部的依存性在层次结构中不允许存在，否则这种系统属于非线性网络。公理使我们确信人在决策中有构造递阶层次的能力，从而可以得出基本标度（比较标度和导出标度）。

定义3.14 （期望）期望是指由先验知识可以导出方案的排序。

公理Ⅴ （合理期望公理）

$$C \subseteq H - L_h$$
$$A = L_h \tag{5.9}$$

合理期望公理本身并不保证AHP一定得到合理的结果，也不保证这种方法能够得到唯一的结果。事实上，人们的许多期望是不合理的。公理Ⅴ强调的是人们可以用一种合理的方式表达自己的思想，以便去获得合理的结果。对于AHP来说，一个合理的方式是安排方案层为最低层，而准则层应包含在属于集H与L_h的差集内。公理Ⅴ还反映了这样一种思想，当一个新方案加进A，或已有的方案从A删除，一些新准则必须加进A中。不妨考虑一个与某方案完全相同的方案加进方案集A中，根据公理Ⅴ，必须有新的准则加到准则集C中。例如，比较一个苹果与一个梨的偏好，在一定准则集下，我们已经得出了偏好的顺序。如果在方案层中再加进一个同样的苹果，为了保证一个合理的期望，人们必须加进一个新的准则（例如

苹果和梨的数目），从而人们应当重新选择准则层以便确定准则的相应权重。合理期望承认这样一个事实，如果某个方案A_i与另一个方案A_j对所有准则来说是完全相同的，则方案A_i或方案A_j应从方案集中删除，以保证从方案中可以做出正确的选择。如果一个方案并非真正存在的方案，仅仅是在一定意义下某个真实方案的仿造方案，这两个方案对于所有准则来说与其它方案偏好性的比较全相同，那么在备择方案集中并没有增加新信息，这个并非真实的方案就应当从备择方案集中删除，即只有真实的方案才能保留在方案集中。然而，为了确信两个方案完全相同，必须保证不存在一个准则，在它之下能够区别两个方案。如若不然势必存在一个准则，诸如元素个数多少，它加进准则集c会使两个方案并非相同的方案。如果$A>_cB$，当一个与A完全相同的仿造方案加进新方案集，而准则集保持不变，那么偏好判断会因方案个数的变化而改变，从而不增加新准则是对合理期望的歪曲。公理Ⅴ基本上反映上述观点。

上面介绍的AHP公理提出的时间不长，它的合理性和有效性尚待研究，由公理体系演绎地推导AHP主要结果的工作还没有完整的报导。可以肯定，关于AHP公理的讨论会继续下去，以便得到比较完美的公理体系。

第三节　AHP公理的应用

从上面给出的AHP公理推导有关AHP数学原理的某些结果，尽管它们之中不少与前面的论述重复，但由于是公理演绎推导的结论，因而具有普遍意义，特别地，许多结果并不限于1—9标度和特征向量排序方法。先从有关的判断矩阵的一致性入手推导一些结论。

令$R_{M(n)}$为所有$n\times n$个$P_C(A_i,\ A_j)$组成的矩阵。由公理Ⅱ，$R_{M(n)}$是正的互反矩阵。令$R_{C(n)}\subset R_{M(n)}$为$n\times n$一致性矩阵。

定理5.1　令$A\in R_{M(n)}$，当且仅当$\mathrm{rank}(A)=1$时，$A\in R_{C(n)}$。

证明：若$A\in R_{C(n)}$，则$a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$，$\forall i,\ j,\ k$，给定A的一行，$a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots a_{in}$，由$a_{jk}=a_{ik}/a_{ij}$可得其它任意一行，从而$\mathrm{rank}(A)=1$。

反过来，若$\mathrm{rank}(A)=1$，给定一行$a_{jk}(j\neq i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$a_{jk}=M\cdot a_{ik}$这里$M$为正常数，当$i=k$时，$a_{jk}=Ma_{ij}$，从而$a_{jk}=a_{ji}a_{ik}$，$\forall i,\ j,\ k$，故$A\in R_{C(n)}$。

定理5.2 令$A\in R_{M(n)}$，当且仅当A的主特征根$\lambda_{\max}=n$时，$A\in R_{C(n)}$。

证明：由定理5.1，若$A\in R_{C(n)}$，$\mathrm{rank}(A)=1$，从而A的特征根除一个以外其余皆为零，由$\mathrm{trace}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=n$及$\mathrm{trace}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=n$，知$\lambda_{\max}=\lambda_1=n$。

另一方面，若$\lambda_{\max}=n$，由

$$n\lambda_{\max}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}w_jw_i^{-1}=n+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_{ij}w_jw_i^{-1}+a_{ji}w_iw_j^{-1}) \tag{5.10}$$

对于任意正数a，$\left(a+\frac{1}{a}\right)\geqslant 2$，当且仅当$a=\frac{1}{a}=1$，$a+\frac{1}{a}=2$，由此当且仅当

$$a_{ij}w_jw_i^{-1}=a_{ji}w_iw_j^{-1}=1 \tag{5.11}$$

即

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j},\ \forall i,\ j \tag{5.12}$$

时

$$n\lambda_{\max}=n^2 \tag{5.13}$$

(5.12)等价于$a_{ij}=a_{ik}\cdot a_{kj}$，从而$A\in R_{C(n)}$，证毕。

下面从*AHP*的公理出发，避开Perron—Frobineus定理，推导正的互反矩阵正实数的主特征根存在与唯一性。

定理5.3 令$A=(a_{ij})\in R_{C(n)}$，存在函数$\psi=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)^T$，$\psi: R_{C(n)}\to(0,1)^n$使得：

(1)$a_{ij}=\psi_i(A)/\psi_j(A)$；

(2)第i个方案的相对重要性$\psi_i(A)$是A的主特征向量的第i个分量；

(3)任给两个方案$A_i,A_j\in A$，$A_i\gtrsim_C A_j$当且仅当$\psi_i(A)\geqslant\psi_j(A)$。

证明：由$A\in R_{C(n)}$得$a_{ij}=a_{ik}a_{jk}^{-1}$，$\forall i,j,k$，由定理5.1，$\mathrm{rank}(A)=1$，从而$a_{ij}=\dfrac{x_i}{x_j}$，$x_i>0$，$x_j>0$，用$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$右乘A得$Ax=nx$，用$\sum_{j=1}^{n}x_j$除$Ax=nx$的两边并令$w_i=x_i/\sum_{j=1}^{n}x_j$，从而$Aw=nw$，且$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。由定理5.2，$n$为$A$的最大特征根。考虑到$a_{ij}=\dfrac{x_i}{x_j}=\dfrac{w_i}{w_j}$，有$\psi_i(A)=w_i$，$\forall i$，由此得(1)，(2)。

由公理Ⅰ，$A\in R_{C(n)}$，$A_i\gtrsim_C A_j$当且仅当$a_{ij}\geqslant 1$，即$\dfrac{w_i}{w_j}\geqslant 1$，$\forall i,j$，从而$\psi_i(A)\geqslant\psi_j(A)$，当且仅当$A_i\gtrsim_C A_j$。证毕。

定理5.4 令$A\in R_{C(n)}$，$\lambda_{\max}=\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使得当

$$|a_{ij}+\tau_{ij}-a_{ij}|=|\tau_{ij}|<\delta \tag{5.14}$$

时，$B=(a_{ij}+\tau_{ij})$有一个特征根μ_1及$n-1$个特征根$\mu_i(i=2,\cdots,n)$分别满足：

$$|\mu_1-n|<\varepsilon \tag{5.15}$$

及

$$|\mu_i-0|<\varepsilon \tag{5.16}$$

证明：取$\varepsilon_0=\dfrac{n}{2}$，$\varepsilon<\dfrac{n}{2}$，圆$C_1$：$|\mu-n|=\varepsilon$及$C_2$：$|\mu-0|=\varepsilon$

不相交。令$f(\mu,A)$为A的特征多项式。对于C_j上的μ，取$r_j=\min|f(\mu,A)|$，$j=1,2,r_j>0$，由于f是μ的连续函数，$\min|f(\mu,A)|$有定义。又由于$f(\mu,A)=0$的根为C_j的圆心，从而$r_j>0$。

$f(\mu,B)$是n^2+1个变量：μ和$a_{ij}+\tau_{ij}$的连续函数，故有某个$\delta>0$，当$|\tau_{ij}|<\delta$时，对于在任何C_j上的μ，$f(\mu,B)\neq 0$。

由复变函数理论，在C_j内$f(\mu,B)=0$的根的个数由下式给出

$$n_j(B)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_j}\frac{f'(\mu,B)}{f(\mu,B)},\quad j=1,2 \tag{5.17}$$

它是n^2个变量$a_{ij}+\tau_{ij}$在$|\tau_{ij}|\leqslant\delta$时的连续函数。

当$B=A$时，$n_1(A)=1$，$n_2(A)=n-1$。由于$n_j(B)$是连续的，$n_j(A)$不可能在$|a_{ij}+\tau_{ij}-a_{ij}|\leqslant\delta$上跳跃到$n_j(B)$，从而$n_1(B)=1$，$n_2(B)=n-1$，证毕。

定理5.5 令$A\in R_{c(n)}$，w是A的主特征向量，$\Delta A=(e_{ij})$是A的扰动矩阵，$A'=A+\Delta A$，$A'\in R_{M_n}$。令w'是A'的右主特征向量，给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|\delta_{ij}|\leqslant\delta$，$\forall i,j$，$|w'-w_i|\leqslant\varepsilon$，

证明：由定理5.4，给出$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$|\delta_{ij}|\leqslant\delta$时，$A$的主特征根满足$|\lambda_{\max}-n|<\varepsilon$。令$\Delta A=\tau B$，可以证明，对于充分小的$\tau$，$\lambda_{\max}$由下列收敛级数给出

$$\lambda_{\max}=n+k_1\tau+k_2\tau^2+\cdots\cdots \tag{5.18}$$

当$\tau\to 0$时，$\lambda_{\max}\to n$。

$$\lambda_{\max}-n=o(\tau)\leqslant\varepsilon \tag{5.19}$$

令w是A对应于单根n的右特征向量。由于n是$|A-nI|=0$的单根，故$A-nI$至少有一个非退化$n-1$阶子式。不失一般性，假定这个子式是它的前$n-1$行与列，由线性代数的理论可知，w取$(A_{n1},A_{n2},\cdots\cdots A_{nn})^T$的形式，这里$A_{ni}$是$A-nI$的第$n$，$i$个余子式，它是$n$的不大于$n-1$阶的多项式。

w的分量是$\lambda_{\max}$和τ的多项式，由于$\lambda_{\max}$的幂级数展开式对充分小的τ收敛，w的每一个分量表示成τ的收敛幂级数的形式，即有

$$w' = w + \tau Z_1 + \tau^2 Z_2 + \cdots\cdots \tag{5.20}$$

且

$$|w' - w| = o(\tau) \leqslant \varepsilon \tag{5.21}$$

证毕。

由定理5.4和5.5，可知A的小扰动形成的A'把特征根问题$(A-nI)w=0$转化为$(A'-\lambda_{\max}I)w'=0$。

定理5.6 令$A\in R_{n\times n}$，w是其主右特征向量，$e_{ij}=a_{ij}w_i^{-1}w_j$，$1-\tau<e_{ij}<1+\tau$，$\tau>0$，$\forall i,j$。给定$\varepsilon>0$，$\tau>0$，存在$\delta>0$，使得对于所有$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$x_i>0$，如果

$$1-\delta<\frac{a_{ij}}{x_i/x_j}<1+\delta \quad \forall i,j \tag{5.22}$$

则

$$1-\varepsilon<\frac{w_i/w_j}{x_i/x_j}<1+\varepsilon \quad \forall i,j \tag{5.23}$$

证明：在(5.23)中用$a_{ij}e_{ij}^{-1}$代替$\frac{w_i}{w_j}$，则有

$$\left|\frac{w_i/w_j}{x_i/x_j}-1\right| = \left|\frac{1}{e_{ij}}\cdot\frac{a_{ij}}{x_i/x_j}-1\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{e_{ij}}\left|\frac{a_{ij}}{x_i/x_j}-1\right| + \left|\frac{1}{e_{ij}}-1\right| \tag{5.24}$$

由定义$e_{ij}=\frac{1}{e_{ji}}$，故

$$\left|\frac{w_i/w_j}{x_i/x_j}-1\right| = e_{ji}\left|\frac{a_{ij}}{x_i/x_j}-1\right| + |e_{ji}-1| < (1+\tau)\delta+\tau \tag{5.25}$$

给定$\varepsilon>0$，$0<\tau<\varepsilon$，存在$\delta=\frac{\varepsilon-\tau}{1+\tau}>0$，使得(5.22)推得

(5.23)。证毕。

定理5.7 令$A\in R_M(n)$，$\lambda_{\max}$是其主特征根，w为对应的主右特征向量，$\sum_{i=1}^{n} w_i=1$，则$\lambda_{\max}\geqslant n$。

证明：令$a_{ij}=w_jw_i^{-1}e_{ij}$，由$Aw=\lambda_{\max}w$

$$\lambda_{\max}-n=\sum_{i,j}^{n}a_{ij}w_j-n=\sum_{i,j}^{n}e_{ij}-n, \tag{5.26}$$

由定义，$E=(e_{ij})\in R_{M(n)}$，$e_{ii}=1$，$e_{ij}>0$，$\forall_{i,j}$。

从而$\sum_{i,j=1}^{n}e_{ij}-n=\sum_{i,j}^{n}e_{ij}\geqslant 0$ 证毕。

定理5.8 令$A\in R_{M(n)}$，则

$$\mu=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{5.27}$$

是A的偏离一致性的平均值的测度。

证明：对于$A\in R_{c(n)}\subset R_{M(n)}$，由定理5.2，有$\lambda_{\max}=n$，从而$\mu=0$。

当$A\in R_{M(n)}$时，令$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}e_{ij}$，$\forall_{i,j}$，

$$\lambda_{\max}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{w_j}{w_i}=\sum_{i,j=1}^{n}e_{ij} \tag{5.28}$$

$$n\lambda_{\max}=\sum_{i,j}e_{ij}=n+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(e_{ij}+\frac{1}{e_{ij}}\right) \tag{5.29}$$

$$\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(e_{ij}+\frac{1}{e_{ij}}\right) \tag{5.30}$$

当$e_{ij}\to 1$时，$\mu\to 0$，从而A趋于一致性矩阵。μ表示e_{ij}远离与接近1的程度，即远离与接近一致性的程度，从而μ可视为A偏离一致性的测度。

从图论的观点有可能研究$(A-nI)w=0$转移到$(A^T-\lambda_{max}I)w^T=0$的问题。下面给出有关的定义和定理。

定义5.14 若有向图中两个点的弧结合两两比较判断的强度，称从i到j的路径上所有弧强度的乘积为路径判断强度。

定义5.15 有向图中的圆是以给定元素为起点和终点的一条路径。

定理5.9 若$A\in R_{C(n)}$，所有圆的强度等于1。

证明：由$A\in R_{C(n)}$，$a_{ii}=a_{ik}a_{ki}$，从而$a_{ii}=a_{ik}\cdot a_{kj}\cdot a_{ji}=1$。由归纳法有

$$a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{n-1}i}a_{ii}=a_{ii_n}a_{i_ni}=a_{ii}=1 \tag{5.31}$$

定理5.10 若$A\in R_{C(n)}$，从i到j的所有路径的强度等于a_{ij}。

证明：由$a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$和归纳法可明定理所欲证。

定理5.11 若$A\in R_{C(n)}$，则$A^k=n^{k-1}A$ $(k\geqslant 1)$

证明：用归纳法证明，当$k=1$时，显然$A^1=A=n^0A$，令$A^k=(a_{ij}^{(k)})$，$a_{ij}^{(k)}$表示从结点i经k步到结点j的路径弧强度的乘积，则

$$a_{ij}^{(k)}=\sum_{m=1}^{n}a_{im}^{(k-1)}a_{mj}=\sum_{m=1}^{n}n^{k-2}a_{im}a_{mj}$$

$$=n^{k-2}na_{ij}=n^{k-1}a_{ij} \tag{5.32}$$

定理5.12 令$A\in R_{C(n)}$，则

$$a_{ij}=\frac{1}{n^{k-1}}a_{ii}^{(k)} \tag{5.33}$$

证明：由定理5.11中的式(5.32)可得所欲证。证毕。

特别地

$$a_{ij}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{ij}^{(k)}}{n^{k-1}} \tag{5.34}$$

定理5.13 若$A\in R_{G(n)}$则n个元素相对重要性标度可由A的任何一列经归一化给出，且等于A的主右特征向量。

证明：令a^j为A的第j列，

$$Aa^j=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}a_{kj}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)=(na_{ij}) \tag{5.35}$$

从而A的任意一列（不管是否其规一化）为特征根问题$Ax=nx$的解，由定理5.11

$$\psi(A)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{A^ke}{e^TA^ke}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{Ae}{e^TAe}=\frac{Ae}{e^TAe} \tag{5.36}$$

从而

$$\psi_i(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ik}\Big/\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}$$

$$=a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kk}\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_{kj}\right)=\frac{a_{ik}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ik}} \tag{5.37}$$

（5.37）对所有的i、k成立，故得定理结果。证毕。

由定理5.13得到如下重要的系。

系：A的主特征向量除差一个常数倍数外是唯一的。

定理5.14 若$A\in R_{M(n)}$，则从结点i经k步到结点j的所有路径的强度为

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{n}a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}j} \tag{5.38}$$

证明：由图论可知，有向图的任意两个结点 i，j 间 k 步累积弧数，由它的关联矩阵 V 的 k 次幂即 V^k 给出。若每一条弧结合不等于 1 的数表示其强度，则 V^k 表示两个结点间 k 步的累积弧强度，此定理中 $V=A$。

由于 A^k 中的元素 $a_{ij}^{(k)}$ 表示结点 i 与结点 j 间 k 步的累积弧强度，且

$$a_{ij}^{(k)}=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{n}a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}j} \tag{5.39}$$

故得定理的结果，证毕。

定理5.15 令 $A\in R_{n(n)}$，A的主右特征向量由 m 步累积弧强度经规一化后的极限给出，即

$$w_i=\lim_{m\to\infty}\frac{a_{ij}^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(m)}} \tag{5.40}$$

证明：令 $B=NAN^{-1}$ 为A的Jordan标准形，其中

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & B_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_r\end{pmatrix} \tag{5.41}$$

$\lambda_1=\lambda_{\max}$，B_p，$p=2,3,\cdots,r$ 为重数 n_p 的A的特征根 λ_p 所对应的Jordan块，即

$$B_p=\begin{pmatrix}\lambda_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \lambda_p\end{pmatrix} \tag{5.42}$$

式中 $\sum_{p=2}^{r} n_p = n-1$，显然

$$B^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & B_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r^m \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

令$N^{-1}=D=(d_{ij})$及$N=(n_{ij})$，则

$$A^m = DB^mN = \begin{pmatrix} n_{11}d_{11}\lambda_1^m+\cdots, & n_{12}d_{11}\lambda_1^m+\cdots, \cdots, & n_{1n}d_{11}\lambda_1^m+\cdots \\ n_{11}d_{21}\lambda_1^m+\cdots, & n_{12}d_{21}\lambda_1^m+\cdots, \cdots, & n_{1n}d_{21}\lambda_1^m+\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ n_{11}d_{n1}\lambda_1^m+\cdots, & n_{12}d_{n1}\lambda_1^m+\cdots, \cdots, & n_{1n}d_{n1}\lambda_1^m+\cdots \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

令$e=(1,1,\cdots,1)^T$，w_p为λ_p所对应的A的左主特征向量，则存在$(a_1,\cdots,a_r)$，使得

$$e = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_rw_r \tag{5.45}$$

从而

$$e^TA^m = a_1\lambda_1^m w_1^T + \cdots + a_r\lambda_1^m w_r^T$$

$$= \left[n_{11}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\lambda_1^m + \cdots, \cdots, n_{1n}\sum_{i=1}^{n} d_{i1}\lambda_1^m + \cdots \right) \tag{5.46}$$

由此，A^m的任意两列l,s中第i个元素可表示为

$$\frac{a_{ih}^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{(m)}} = \frac{n_{1h}d_{11}\lambda_1^m+\cdots}{n_{1h}\sum_{i=1}^{n} d_{i1}\lambda_1^m+\cdots} \qquad (h=l,s) \tag{5.47}$$

两式取极限，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{ih}^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}=\lim_{m\to\infty}\frac{a_{is}^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n}a_{is}^{(m)}}=\frac{d_{i1}}{\sum_{i=1}^{n}d_{i1}} \tag{5.48}$$

由定理4.2,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{A^m e}{e^T A^m e}=cw \tag{5.49}$$

式中c为常数，故

$$w_i=\sum_{h=1}^{n}\frac{a_{ih}^{(m)}}{e^T A^m e}=\sum_{h=1}^{n}\lim_{m\to\infty}\frac{a_{ih}^{(m)}}{e^T A^m e}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}$$

$$=\sum_{h=1}^{n}\left[\lim_{m\to\infty}\frac{a_{ih}^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}\right]\left[\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}{e^T A^m e}\right] \tag{5.50}$$

由(5.48)，上式中的第一个极限与h无关，从而有

$$w_i=\lim_{m\to\infty}\frac{a_{ih}^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}\sum_{h=1}^{n}\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}{e^T A^m e} \tag{5.51}$$

考虑到

$$\sum_{h=1}^{n}\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}{e^{T}A^{m}e}=\lim_{m\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}{e^{T}A^{m}e}=1 \tag{5.52}$$

因此

$$w_i=\lim_{m\to\infty}\frac{a_{ih}^{(m)}}{\sum_{i=1}^{n}a_{ih}^{(m)}}\quad(i,h=1,2,\cdots,n) \tag{5.53}$$

这就证明了定理5.15。

从定理5.15可以得到下面的系。

系：令$A\in R_{n(n\geq 2)}$，A的右主特征根除差一个常数倍数外是唯一的。

第六章　AHP中的一般排序原理

第一节　引言

两两比较判断的比例标度推导被比较元素的导出标度实质上是寻找满足$\Psi: R_{M(n)} \to (0,1)^n$的映射，因此，单一准则下的排序不需要而且不应该只有特征根方法这一种方法。事实上，在本书第一章*AHP*基本步骤的介绍中，已经提出不同于特征根方法的几种简单计算方法，如和法、根法等。在讨论判断矩阵左右主特征向量的关系时，也提到可以用左主特征向量分量的倒数归一化作为单一准则判断矩阵的排序向量。如果从比例标度映射的条件出发，最简单的而又有用的方法莫过于矩阵行和归一化的方法了。这些方法在判断矩阵为一致性矩阵时，均得到同样的结果，这一结果与特征根法得到的右主特征向量是一致的。可以证明，在判断矩阵相应于由右主特征向量构成的一致性矩阵表现出的扰动不大时，上述方法的结果可以视为对特征根方法所得结果的一种近似。有兴趣的读者不妨给出这一结论的证明。上面的讨论是把特征根法视为精确的排序方法，而上述各种方法（和法，根法，左主特征向量法，行和法等）则被认为是对特征根方法的近似方法。接受AHP公理体系之后，自然有理由提出这样的问题，为什么导出的标度用特征根方法确定是精确的，而其它方法却视为近似的。问题在于公理体系并没有明确"精确"的定义和标准，在于当判断矩阵不一致时，怎样理解精确反映两两比较判断导出标度这一概念。或许人们可以想出一些标准，在此标准之下，某种方法的导出标度的估计是好的，而另一些则不是。本章的目的是讨论与各种排序的标准相关的排序方法，它对于AHP的理论研究与应用来说都是十分重要的。

根法是对数最小二乘准则下最好的排序方法。第二节讨论这种方法，并从一般观点出发指出排序问题数学上的提法。第三节，讨论最小二乘准则下的排序方法，这一方法是近年来学术界争论最多的。它的计算比较复杂，因此一般通过用低秩矩阵近似一个矩阵的方法对最小二乘排序进行估计，使运算大大简化。对数最小二乘法和最小二乘法分别用LLSM和LSM表示。

在进行元素之间某一准则下两两比较判断时，人们发现元素的排列顺序对比较判断并非没有影响。而且由于判断矩阵的互反性质，比较判断的信息由判断矩阵上三角元素传递过来。这些观察使得有人提出广义特征向量法（GEM）。GEM只使用判断矩阵的上三角元素推导排序权向量，方案的排序权值不仅受判断矩阵影响，也受方案在比较中的排列次序的影响。本章第四节将讨论GEM及其改进形式。

尽管从元素排序权值构成的比较矩阵，即一致性矩阵$W=(w_i/w_j)$逼近判断矩阵的角度看，LSM和LLSM能够得到最小二乘与对数最小二乘准则下的最优结果，然而人们的比较判断只不过是对定性因素的一种近似的定量表示，并不要求这种“逼近”意义下的最优结果。如果关心的是方案的排序或者排序的近似数值，那么这种排序应该正确反映判断矩阵所提供的排序信息。导出标度保持比例标度所反映的序称为保序性。特别地，我们尤其重视判断相互影响的累积作用。从这一观点出发，特征根方法(EM)有着LSM，LLSM不具备的优点。本章第五节讨论保序性原理并证明EM在反映判断的累积支配作用上是唯一最好的方法。

人们使用AHP时，构造判断矩阵是关键一步。当被比较元素数目较多时，需要反复回答方方案孰优孰劣并给出比例标度。对于9阶判断矩阵，要给出36个判断值。如果层次多，这一过程将花费很多时间和精力。同时，在涉及一些敏感的比较判断时，人们往往不愿意明确表示自己的观点。自然，由于对问题缺乏了解也会有无法做出明确判断的时候。如果判断矩阵中某些元素的值空缺，称这类

判断矩阵为残缺矩阵。由残缺判断矩阵导出排序向量称为信息不全的排序问题。第六节介绍为解决这类问题特别设计的排序方法。

最后，讨论非线性排序问题。由于某些属性的判断服从心理学上的幂律，排序问题通过对$Aw=\lambda w$求解往往得不到真正反映人们判断的排序权向量。这类排序需要考虑形式如$Aw=\lambda w^{\alpha}$（α为正常数）的广义特征根问题。本书将从广义特征根问题更一般的形式

$$Ag(w)=\lambda g(w)$$

来讨论非线性排序问题。

第三节　对数最小二乘排序方法

当判断矩阵$A=(a_{ij})$是不一致性矩阵时，排序问题的一般提法是确定排序权向量$w=(w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n)^T$，使得

$$a_{ij}=f_{ij}(w_i, w_j; \alpha_i, \alpha_j; \cdots; u_i, u_j)=\frac{w_i}{w_j}g_{ij}(\cdot) \tag{6.1}$$

式中$g_{ij}(\cdot)$称为扰动参数，g_{ij}的变量与f_{ij}的变量相同。当扰动趋于零时，

$$\lim g_{ij}(\cdot)=1 \tag{6.2}$$

对于以乘积形式作用于$\frac{w_i}{w_j}$上的扰动，当这种扰动趋于1时，判断矩阵趋于一致性矩阵。而对于相加形式的扰动，则一致性存在于扰动等于0时。如果$\frac{w_i}{w_j}$是a_{ij}的理想估计，我们有理由要求g_{ij}接近于1，即扰动很小。（6.1）的表示形式是第四章e_{ij}形式的推广。例如，当

$$a_{ij}=\frac{\alpha_i w_i+u_i}{\alpha_j w_j+u_j} \tag{6.3}$$

时，

$$g_{ij}(\cdot)=\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\ \frac{1+u_i\alpha_i^{-1}w_i^{-1}}{1+u_j\alpha_i^{-1}w_i^{-1}} \tag{6.4}$$

从而

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}g_{ij}(\cdot) \tag{6.5}$$

考虑到互反性,(6.1)可视为$\frac{n^2+n}{2}$个未知数w_i, g_{ij}, $\frac{1}{2}n(n-1)$个方程的不定方程组。一般情况下，总是要求

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}=\lambda_{\max} \tag{6.6}$$

从而问题可化为在

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j=\lambda_{\max}w_i \tag{6.7}$$

下对w_i求解。这就是特征根排序方法。

如果对(6.5)做适当的数学变换，则有

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\log a_{ij}-\log\frac{w_i}{w_j}\right)^2=\sum_{i,j=1}^{n}\log^2 g_{ij} \tag{6.8}$$

这样对问题(6.1)的求解可化为求w_i，使得

$$\min\sum_{i,j=1}^{n}\log^2 g_{ij} \tag{6.9}$$

求解(6.9)即排序的对数最小二乘法。为解(6.9)，由

$$\frac{\partial\sum_{i,j=1}^{n}\log^2 g_{ij}}{\partial w_k}=0 \tag{6.10}$$

得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\log a_{kj}-\log w_k+\log w_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\log a_{ik}-\log w_i+\log w_k\right) \tag{6.11}$$

或

$$2n\log w_i=\sum_{j=1}^{n}(\log a_{ij}-\log(1/a_{ij})+2\log w_j) \quad (6.12)$$

考虑到$a_{ij}=1/a_{ji}$，从而

$$n\log w_i=\sum_{j=1}^{n}(\log a_{ij}+\log w_j) \quad (6.13)$$

或

$$w_i=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{1/n}\left(\prod_{j=1}^{n}w_j\right)^{1/n} \quad (6.14)$$

由于 $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=1$，故

$$w_i=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{1/n} \quad (6.15)$$

是(6.10)的解。(6.15)归一化可得

$$w_i=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{1/n}\Big/\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{1/n} \quad (6.16)$$

即对数最小二乘法的排序权向量，它与根法得到的排序权向量相同。

在判断矩阵A为一致性的情况下，特征根法的排序结果与对数最小二乘法的排序结果相同。事实上，若$w=(w_1,\cdots,w_n)^T$，$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$，为EM的排序结果，则$A=\left(\frac{w_i}{w_j}\right)$。由$\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}=w_i\left(\prod_{j=1}^{n}w_j\right)^{-\frac{1}{n}}$及$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}=\sum_{i=1}^{n}w_i\left(\prod_{j=1}^{n}w_j\right)^{-\frac{1}{n}}=\left(\prod_{j=1}^{n}w_j\right)^{-\frac{1}{n}}$ $LLSM$的结果恰为$w=(w_1,\cdots,w_n)^T$。在A为不一

致性矩阵的情况下，令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a^{-1} & 1 & c \\ b^{-1} & c^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

易知*EM*与*LLSM*的排序结果均为$w=\Delta^{-1}(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}},\ a^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}},\ b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{3}})^T$，$\Delta=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{3}}$，从而对于三阶判断矩阵*EM*与*LLSM*的结果相同。在判断矩阵的阶数$n\geqslant 4$时，一般地*EM*与*LLSM*的结果不同，本章第五节的例6.2将说明这一事实。

第三节　最小二乘排序方法

若单一准则下由比较标度通过

$$\min \sum_{i,j}^{n}(a_{ij}-w_i/w_j)^2 \tag{6.17}$$

得到导出标度$w=(w_1,\cdots,w_n)^T$，称此方法为最小二乘排序方法（LSM）。

由于对（6.17）求解涉及非线性最小二乘法，通常计算量很大，因此，一般总是先构造一个比A秩小的矩阵，利用这个秩较小的矩阵导出W。下面说明这种矩阵的构造方法以及如何通过它导出W。

由

$$\mathrm{trace}(AA^T)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2 \tag{6.18}$$

有

$$\mathrm{trace}\ (A-W)(A-W)^T=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-w_i/w_j)^2 \tag{6.19}$$

这里$W=(\frac{w_i}{w_j})$，从而（6.17）化为

$$\min \operatorname{trace}(A-W)(A-W)^T \tag{6.20}$$

令a_i（$i=1, 2, \cdots, n$）为（A－W）（A－W）^{T}的特征根，则

$$\operatorname{trace}(A-W)(A-W)^T=\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{6.21}$$

这样（6.20）归结为（6.21）的极小化。

由于A是正矩阵，故AA^T是正的对称矩阵，其所有特征根皆为实数，且存在唯一最大特征根。Johnson*证明了存在对角阵Λ，和矩阵P，Q，其中Λ的对角线上的元素是按大小顺序排列的AA^T的特征根，矩阵P为以AA^T相应的特征向量作为矩阵列，Q为以A^TA相应的特征向量作为矩阵列而构成的两个矩阵，Λ，P，Q，满足

$$AA^T=P\Lambda P^T \tag{6.22}$$

及

$$A^TA=Q\Lambda Q^T \tag{6.23}$$

由此可得，秩为r的矩阵

$$P_r\Lambda_r^{1/2}Q_r^T \tag{6.24}$$

是所有秩为r矩阵中对A的最好最小二乘逼近，这里Λ_r为Λ中前r_1行，r_1列组成矩阵，P_r，Q_r分别为P、Q的前r_1列组成的$n\times r_1$阶矩阵。

令$r=1$，则P、Q分别为AA^T和A^TA的主特征向量，$\Lambda_1^{1/2}=\lambda_1^{1/2}$，$\lambda_1$为$AA^T$的主特征根。在A为一致性情况下，$P_1=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$，$Q_1=(1/w_1, 1/w_2, \cdots, 1/w_n)^T$，$\Lambda_1^{1/2}=\lambda_{max}(A)$。由此即得最好的最小二乘解与$A$的右主特征向量相同。不一致的情况要复杂得多，因为在这种情况下，秩为r_1的矩阵$P_r\Lambda_r^{1/2}Q_r^T$尽管是在相同秩矩阵中对A的最好的最小二乘逼近，但它不具有互反性质，从而并不满足（6.17）条件。下面用第二章提到过的光学试验为例说明。那里判断矩阵A取

---

* R.W.Johnson, "On a theorem by Eckart and Yong", Psychometrica, V. 32, pp259-263, 1963

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6 & 7\\ 1/4 & 1 & 3 & 4\\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2\\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$$

由此得到其它矩阵的结果：

$$\Lambda=\begin{pmatrix}132.9 & & & \\ & 1.4710 & & \\ & & 0.1283 & \\ & & & 0.0007\end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}11.528 & & & \\ & 1.213 & & \\ & & 0.358 & \\ & & & 0.027\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}0.875 & 0.457 & -0.087 & -0.041\\ 0.436 & -0.690 & 0.568 & 0.109\\ 0.188 & -0.512 & -0.669 & -0.505\\ 0.097 & -0.192 & -0.471 & 0.855\end{pmatrix}$$

$$Q^T=\begin{pmatrix}0.089 & 0.849 & 0.589 & 0.723\\ 0.158 & 0.819 & 0.146 & -0.573\\ -0.347 & -0.341 & 0.767 & -0.418\\ 0.920 & -0.303 & 0.207 & -0.136\end{pmatrix}$$

用秩等于 1 的矩阵近似，其最小二乘解为

$$P_1\Lambda_1^{\frac{1}{2}}Q_1^T=\begin{pmatrix}0.875\\ 0.433\\ 0.188\\ 0.097\end{pmatrix}\{11.528\{0.089\ \ 0.349\ \ 0.589\ \ 0.723\}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.898 & 3.520 & 5.941 & 7.293 \\ 0.447 & 1.754 & 2.960 & 3.647 \\ 0.193 & 0.756 & 1.277 & 1.567 \\ 0.100 & 0.390 & 0.659 & 0.808 \end{pmatrix}$$

用秩为4的矩阵近似而得到的最好的最小二乘解

$$PAQ^T=\begin{pmatrix} 0.99 & 3.98 & 6.00 & 6.99 \\ 0.25 & 1.00 & 2.99 & 4.03 \\ 0.17 & 0.33 & 1.00 & 2.02 \\ 0.14 & 0.25 & 0.50 & 1.01 \end{pmatrix}$$

对于给定的矩阵A，上述方法给出秩等于r的矩阵中最好的最小二乘拟合矩阵$P_rA_rQ_r^T$比用最小二乘问题（6.17）的解组成的矩阵$W=(w_i/w_j)$拟合程度还要好。令$F=A-P_rA_r^{1/2}Q_r^T$，可以证明

$$trace(FF^T)=trace(A_s)$$

这里A_s为A中用零代替A_r中出现的特征值所得到的矩阵。还可以证明

$$trace(A-W)(A-W)^T\geqslant trace(FF^T)$$

如果假定$P_rA_r^{1/2}Q_r^T$偏离一致性的程度不大，则可以用$P_rA^{1/2}Q_r^T$的任意一列归一化后作为最小二乘解w_1，如果偏离一致性的程度过大，则其对A的拟合效果比特征根法（在最小二乘意义下）还差。

例如，在本节例中，取$P_1A_1Q_1^T$的第一列归一化得$s=(0.548, 0.274, 0.118, 0.061)$。特征根法给出的结果为$\lambda_{max}=4.1$，$w=(0.62, 0.22, 0.10, 0.06)$。由光学反平方律给出的实际结果为(0.61, 0.22, 0.11、0.06)。最小二乘估计与实际结果的均方差误差为0.00155，特征根法为0.00005。如果从最小二乘角度考虑$W=(w_i/w_j)$与$S=(s_i/s_j)$偏离A的程度，则trace$(A-S)\times(A-S)^T=11.45$，trace$(A-W)(A-W)^T=13.42$。最

小二乘估计 S 对 A 的拟合要比特征根方法得到的 W 要好。

第四节　梯度特征向量排序法（GEM）

本节讨论由美籍著名运筹学家游伯龙（P.L.Yu）1984年提出的梯度特征向量排序方法及扩展形式。这种方法计算上较之特征根法要简单，便于根据人们合理的经验对判断进行修订，在一致性情况下，这种方法与特征根法的结果是相同的。对GEM中目前尚未解决的某些问题也将做简略介绍。

提出GEM的基本考虑是人们对两个元素相对重要性的比较判断并不一定具有互反性，而且决策者在面临 i 方案比 j 方案重要性的选择上，有时比 j 方案相对 i 方案重要性的选择容易做出。因此，由判断矩阵 A 提供的排序信息基本上反映在 A 的上三角元素中。利用 A 的上三角元素排序在一定条件下比用 A 排序更可靠。此外，决策者在进行比较判断时，往往对其中某些判断更有把握，希望突出这些有把握的判断在决定方案排序时的作用。下面看一看GEM是如何体现上述两点的，

令 $T=(t_{ij})$，其定义为

$$t_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i \leqslant j \\ 0, & j<i \end{cases} \tag{6.26}$$

令 $D=(d_{ij})$ 为对角阵。

$$d_{ij}=\begin{cases} n-i+1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \tag{6.27}$$

不难证明：$D^{-1}T$ 有最大特征根 1，其余特征根为 $\lambda_i=\frac{1}{i}$，（$i=2,\cdots,n$），特征根问题 $D^{-1}Tw=w$ 的解由（6.28）给出：

$$\begin{aligned} w_{n-1}&=a_{n-1,n}w_n \\ w_{n-2}&=(a_{n-2,n-1}w_{n-1}+a_{n-2,n}w_n)/2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$w_1=(a_{12}w_2+a_{13}w_3+\cdots+a_{1n}w_n)/(n-1)$$

定理6.1证明了在一致性情况下，对同一个判断矩阵的GEM和EM给出相同排序结果。

定理6.1 若A为一致性矩阵，GEM和EM求得的导出标度是相同的。

证明：在(6.28)中令$w_n=1$，则$w_{n-1}=a_{n-1,n}$。由归纳法，假定对于$i\leqslant k$，$w_{n-i}=a_{n-i,n}$，则由(6.28)并注意到$a_{nn}=1$

$$\begin{aligned}w_{n-k-1}&=\frac{1}{k+1}(a_{n-k-1,n-k}w_{n-k}+\cdots+a_{n-k-1,n}w_n)\\&=\frac{1}{k+1}(a_{n-k-1,n-k}a_{n-k,n}+\cdots+a_{n-k-1,n}a_{nn})\end{aligned}\tag{6.29}$$

由于A为一致性矩阵，$a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$，$\forall i,j$，从而

$$w_{n-k-1}=\frac{1}{k+1}(a_{n-k-1,n}+\cdots+a_{n-k-1,n})=a_{n-k-1,n}\tag{6.30}$$

上式表明，在A为一致性矩阵情况下，由GEM得到的导出标度可以为A的第n列，这与EM的结果是相同的。证毕。

一旦w_n确定后，由(6.28)可以递归计算$w_{n-1},\cdots,w_1$。在计算中，实际上赋于$a_{ij}(i<j)$以不同的重要性权值，如$a_{n-1,n}$的权值是1。因此在估计w中$a_{n-1,n}$是最重要的，$a_{n-2,n-1}$和$a_{n-2,n}$次重要，权值是$\frac{1}{2}$，以此类推。这表明，当方案的顺序不同时，得到不同排序权值。例如，当

$$A=\begin{pmatrix}1&1&5\\1&1&1/8\\1/5&8&1\end{pmatrix}$$

时，由特征根法得到的排序权值用w表示，w_1，w_2，w_3分别表

示方案在两两比较判断中的顺序，即判断矩阵中对应的方案位置的顺序为（1，2，3）或（1，3，2），（2，1，3）或（2，3，3，1），（3，1，2）或（3，2，1）时方案1，2，3的排序权值，结果如下：

$$w = (0.5060,\ 0.1479,\ 0.3461)^T$$
$$w_1 = (0.6949,\ 0.0339,\ 0.2712)^T$$
$$w_2 = (0.5839,\ 0.2993,\ 0.1168)^T$$
$$w_3 = (0.1639,\ 0.1639,\ 0.6722)^T$$

用$\overline{w}$表示$(w_1+w_2+w_3)/3$，得

$$\overline{w} = (0.4809,\ 0.1657,\ 0.3539)$$

通常用在方案所有不同排序下求得的GEM权值的算术平均值w作为方案的排序权值。在A为一致性矩阵的情况下，由定理6.1，GME得到的方案排序与方案在两两比较中排列次序无关。游伯龙指出在三个方案（$n=3$）次序变动的情况下，GEM的解提供了一个包含权重真值的凸包，这个凸包在决策中是有用和重要的。但这个结论未能在$n\geqslant 4$时得到严格的证明，只是模拟计算提示这一结论是正确的。

在不一致性判断矩阵的情况下，GEM的排序结果对元素在被比较过程中所处位置的次序极为敏感。上面三阶判断矩阵的例子表明，当三个方案在比较过程中的顺序不同时，所得到的排序权值相差甚远。表面上看，这种灵敏性是GEM的一大缺陷，仔细分析，并不尽然。在进行两两比较中，总是对某些方案之间的比较判断比另一些比较判断要有把握，或者确信某些比较判断反映了客观实际，而另一些则不完全或不真实反映实际。自然希望找到一种方法，使能够客观反映实际情况的比较判断在用来导出排序权值时起重要作用，同时尽可能地降低那些没有把握的判断对排序权值计算的影响。GEM正是提供体现这些想法的一种方法。决策者在构造判断矩阵之后，可以用GEM根据判断矩阵中元素的确信度对其加权，由此导出的排序一般较好地反映了实际状态。注意到在判断矩

阵是一致性矩阵的情况下，GEM与EM得出同样结果。但当判断矩阵为不一致时，特别是不一致程度高时，GEM与EM的结果不同。由于GEM受元素在比较过程中的次序影响极大，在判断矩阵的不一致性程度很高时，GEM显得特别有用。因为，当判断矩阵表明人的比较判断偏离一致性很大时，很有必要进一步分析哪些比较判断清楚地反映出决策者的偏好，哪些并非如此。可以据此将元素在比较中的次序加以调整，以便用GEM突出具有明显意义的判断对排序的影响。例如，在本节例子中，A 的一致性指标 $C.I.=0.57$。这对于三阶矩阵来说，偏离一致性指标相当高，使得用GEM排序其结果强烈依赖元素在比较中的顺序，从而为判断的可信程度加权提供了有利条件。这一观察促使人们将GEM加以改进，以便更合理地反映人们的那些程度高的判断对排序所起的作用。下面介绍这种改进的GEM。

今 B 为 A 的梯度加权矩阵，其任意元素定义如下

$$b_{ij}=\begin{cases}(n-i)\lambda_{ij}, & i<j, \quad \sum_{i=i+1}^{n}\lambda_{ij}=1\\ 1 & i=j\\ 0 & i>j\end{cases} \tag{6.31}$$

改进的GEM归结为解 $D^{-1}(T\cdot B)$ 的特征根问题，$T\cdot B$ 表示 T 与 B 的Hadamard乘积。容易证明，$D^{-1}(T\cdot B)$ 有唯一最大特征根1，其余特征根 $\lambda_i=\frac{1}{i}$，主特征向量可以全部由正分量组成，从而特征根问题

$$D^{-1}(T\cdot B)w=w \tag{6.32}$$

的一般形式为

$$\sum_{j=i+1}^{n}\lambda_{ij}a_{ij}w_j=w_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6.33}$$

自然，可以对(6.33)的解增加归一化的限制条件，即 $\sum w_i=1$。例如，对于 $n=4$，改进的GEM通过解下述矩阵方程求元素的导出

标度w

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda_{12}a_{12} & \lambda_{13}a_{13} & \lambda_{14}a_{14} \\ 0 & -1 & \lambda_{23}a_{23} & \lambda_{24}a_{24} \\ 0 & 0 & -1 & a_{34} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

定理6.2给出在A为一致性矩阵的条件下，改进的GEM与EM 的结果相同。

定理6.2 在A为一致性矩阵的条件下，改进的GEM与EM 给出相同的导出标度w。

证明：显然，$w_{n-1}=a_{n-1,n}$假定对于$i \leqslant k$，$w_{n-i}=a_{n-i,n}$。对于w_{n-k-1}，有

$$\begin{aligned} w_{n-k-1} &= \lambda_{n-k-1,n-k}a_{n-k-1,n-k}w_{n-k} + \cdots + \lambda_{n-k-1,n}a_{n-k-1,n}w_n \\ &= \lambda_{n-k-1,n-k}a_{n-k-1,n}w_{n-k} + \cdots + \lambda_{n-k-1,n}a_{n-k-1,n} \\ &= a_{n-k-1,n}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{n-k-1,n-i+1}\right) \\ &= a_{n-k-1,n} \end{aligned} \tag{6.35}$$

在A为一致性情况下，改进的GEM的解为A的第n列，因此与EM的结果完全相同。证毕。

改进的GEM除了保留GEM根据方案在比较判断的次序赋予梯度权重外，对同一标度的判断进行两次加权，可使不同确信度的判断在排序中起不同作用。通常，可以采用对每一个两两比较判断给出其不确定区间，当不确定区间较大时，赋以其较小的梯度。

令a_{ij}的不确定区间为$D(i,\ j)$则

$$\lambda_{ij}=\frac{(1/D(i,j)}{\sum_{j=i+1}^{n}(1/D(i,j))} \qquad 1\leqslant i\leqslant n-2,\ j>i \tag{6.36}$$

(6.36)提供了一个合理地确定梯度权重的方法。

通过模拟试验分析，在判断不一致情况下，对于不同的a_{ij}当

$D(i, j)$的差别较大时，改进的GEM给出更合理的元素排序权重的估计值，在$D(i, j)$差别不明显时，EM给出更合理的排序权重估计值。但对这一现象目前尚缺乏严格的理论分析。

由于GEM及其改进形式提出时间不长，许多问题需要进行研究。例如，有人提出，对于不一致的判断矩阵，当元素在比较判断中所处的顺序取所有可能的组合时，由GEM得到的排序权向量组成一个凸包，EM解在这个凸包之内。或许GEM及其改进形式具有的灵活性，将使以AHP为主要方法的专家决策支持系统具有更强的功能。

第五节　保序性问题与特征根法、对数最小二乘法、最小二乘法的比较研究

已经较为详细地讨论了由比较标度确定导出标度的单一准则排序方法，它们是特征根方法(EM)，对数最小二乘法(LLSM)，最小二乘法(LSM)和梯度特征根方法(GEM)，其中GEM可以视为EM的扩展。连同导出标度的简易近似算法：和法，行和归一化法，以及左主特征向量法，和后面要讨论的广义特征根法、非线性特征根法就有九种单一准则排序法。这表明，在社会经济系统的测度这种定性因素定量化的问题上，人们很难接受统一的测度方式。我们注意到，在判断是一致性的条件下，各种方法给出的导出标度是相同的。关键在于对不一致的判断矩阵各种方法的结果不同。判断矩阵偏离一致性越远，各种方法的结果差别越大。每一种排序方法都对应一个准则，在这个准则之下，该方法能够给出其它方法无法给出的最好的排序权向量的估计值。例如，LSM是在欧几里得空间距离测度准则下，由(6.17)确定的方法。尽管欧几里得测度是人们日常生活中容易接受的一个测度，以这种测度作为准则的LSM，的确从距离角度反映了人们希望找到拟合判断的最好导出测度的心

理，然而，评价社会经济系统的测度方法的优劣，评价由两两比较判断的比例标度导出测度方法的优劣，远比这种以拟合好坏为标准的方式要深刻得多。当判断矩阵是不一致性矩阵时，评价方法优劣的标准首先要考虑这种不一致性，否则这种方法优劣的评价标准就不能算是完整的。把拟合好坏作为评价方法优劣的标准并没有考虑判断矩阵不一致性对排序的影响，从决策角度来看，它并不是一个好的评价标准。为了找到一个适当的评价各种排序方法的标准，有必要对不一致性影响排序问题做进一步的分析。

正象反复指出过的，当判断矩阵是一致性矩阵时，所有方法得到的是相同的排序权向量，这个向量反映了方案的真正排序。因此，可以说，从一致性判断矩阵的数据很容易得到关于方案排序的真实信息。只要判断矩阵是一致性的或几乎是一致性的，那么得到的方案排序与采用什么方法关系不大。当判断矩阵受到扰动而偏离一致性时，排序的各种方法可能给出方案不同的排序权值，即可能由于采用方法的不同出现两个方案的排序权值x_a，x_b的三种可能关系：（1），$x_a>x_b$ （2），$x_a<x_b$ （3），$x_a=x_b$，这对于决策来说是影响极大的，因为它会使决策者做出不同甚至相反的选择。判断矩阵不一致性会掩盖方案真实的序。对于不一致性的判断矩阵，方案真实的序是否存在，如果存在，怎样才能揭示这种真实的方案排序？

应该承认，方案真实排序本质上存在于判断数据结构之中，它并不因选择的排序计算方法不同而改变。为了从理论上说明了这一观点，下面进行一些必要的数学分析。

在本节中假定对于判断矩阵A，EM，LLSM，LSM得到的排序权向量分别用w，u，v表示，方案的排序是指排序权向量分量的顺序关系。

定义6.1 排序方法(EM、LLSM、LSM)称为弱保序的，如果$a_{ij}\geqslant 1$，得出$x_i\geqslant x_j$，这里$x=w$，u或v。

对于一致性判断矩阵，显然，EM，LLSM和LSM均为弱保序

的。

定义6.2 排序方法称为强保序的，如果 $a_{ik}\geqslant a_{jk}$，$\forall k$，得出 $x_i\geqslant x_j$。

定理6.3 EM，LLSM，LSM是强保序的。

证明：①对于*EM*，有

$$\lambda_{\max}w_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}w_k\geqslant\sum_{k=1}^{n}a_{jk}w_k=\lambda_{\max}w_j, \tag{6.37}$$

从而$w_i\geqslant w_j$，故*EM*是强保序的。

②对于LLSM，有

$$u_i=\left(\prod_{k=1}^{n}a_{ik}\right)^{1/n}\geqslant\left(\prod_{k=1}^{n}a_{jk}\right)^{1/n}=u_j \tag{6.38}$$

从而 $u_i\geqslant u_j$，故LLSM是强保序的。

③对于*LSM*，为了证明强保序性，先证明一个事实。若$0<b<a$，$0<s<t$则，

$$(a-s)^2+(b-t)^2>(a-t)^2+(b-s)^2 \tag{6.39}$$

事实上，由$(a-b)>0$，$(t-s)>0$，可得$at+bs-bt-as>0$或$2at+2bs>2bt+2as$。从而

$$a^2-2as+s^2+b^2-2bt+t^2>a^2-2at+t^2+b^2-2bs+s^2 \tag{6.40}$$

故得(6.39)。考虑LSM的计算公式，有

$$\begin{aligned}J&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ki}-\frac{v_k}{v_i}\right)^2\\&=\left(a_{ij}-\frac{v_i}{v_j}\right)^2+\left(a_{ji}-\frac{v_j}{v_i}\right)^2\\&\quad+\sum_{k\neq i,j}^{n}\left[\left(a_{ik}-\frac{v_i}{v_k}\right)^2+\left(a_{ki}-\frac{v_k}{v_i}\right)^2\right]\\&\quad+\sum_{k\neq i,j}^{n}\left[\left(a_{jk}-\frac{v_j}{v_k}\right)^2+\left(a_{kj}-\frac{v_k}{v_j}\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$+(\text{与}v_i,\ v_j\text{无关的项}) \tag{6.41}$$

由已知，对于所有k，若$a_{ik}=a_{jk}$，则不难证明$v_i=v_j$。若对于某个k，$a_{ik}>a_{jk}$，现假定$v_i<v_j$，在(6.40)中令

$$a=a_{ik},\quad b=a_{jk},\quad s=v_i/v_k,\quad t=v_j/v_k.$$

则有

$$\left(a_{ik}-\frac{v_i}{v_k}\right)^2+\left(a_{jk}-\frac{v_j}{v_k}\right)^2>\left(a_{ik}-\frac{v_j}{v_k}\right)^2+\left(a_{jk}-\frac{v_i}{v_k}\right)^2 \tag{6.42}$$

及

$$\left(a_{ki}-\frac{v_k}{v_i}\right)^2+\left(a_{kj}-\frac{v_k}{v_j}\right)^2>\left(a_{ki}-\frac{v_k}{v_j}\right)^2+\left(a_{kj}-\frac{v_k}{v_i}\right)^2 \tag{6.43}$$

因此，在$v_i<v_j$情况下，用v_j代替(6.42)和(6.43)中的v_j，用v_i代替v_j，则J减少。这样，在$v_i<v_j$情况下，J不可能在v处取极小值。这与v是LSM的解矛盾。从而$v_i\geqslant v_j$。证毕。

由定理6.3可得下面的系。

系：若$a_{ij}>1$且对所有的$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ a_{ik}/a_{ij}\geqslant a_{jk}$

则

$$x_i\geqslant x_j$$

若$a_{ij}<1$，且对所有的$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ a_{ik}/a_{ij}\leqslant a_{jk}$

则

$$x_i\leqslant x_j$$

对于LLSM，定理6.4是定理6.3的推广，定理6.5是在$n=3$时定理6.3对EM的推广。

定理6.4 $u_i\geqslant u_j$，当且仅当$\prod_{i=1}^{n}a_{ik}\geqslant\prod_{i=1}^{n}a_{jk}$。

证明：由u_i的定义，定理6.4的证明是显然的。

定理6.5 对于任意3×3正互反矩阵，

$w_i \geqslant w_j$，　当且仅当　$\prod_{k=1}^{s} a_{ik} \geqslant \prod_{k=1}^{s} a_{jk}$。

证明：事实上，由第四章定理4.19的系，解3×3正互反矩阵的特征根问题，得

$$\lambda_{\max} = 1 + a_{12}^{1/3} a_{13}^{-1/3} a_{23}^{1/3} + a_{12}^{-1/3} a_{13}^{1/3} a_{23}^{-1/3}$$

及

$$w = (a_{12}^{1/3} a_{13}^{1/3},\ a_{12}^{-1/3} a_{23}^{1/3},\ a_{13}^{-1/3} a_{23}^{-1/3})^T \qquad (6.14)$$

由矩阵的互反性知$w=u$，由定理6.4即得定理6.5，证毕。

下面给出判断矩阵序传递的概念。

定义6.3　正的互反矩阵是序传递矩阵，如果$a_{ij}>1$，则对所有的k，$a_{ik} \geqslant a_{jk}$，如果$a_{ij}=1$，则对所有k或者$a_{ik} \geqslant a_{jk}$，或者$a_{ik} \leqslant a_{jk}$。

矩阵的序转递概念把判断一个矩阵元素所提供关于两个方案重要性排序的信息与这两个方案在判断矩阵对应的行所提供的信息联系起来。具有序传递的互反矩阵，这两类信息所提供的方案排序信息是一致的。特别地，对于具有序传递的判断矩阵，EM、LLSM和LSM是强保序的。定理6.6可用来说明这一事实。

定理6.6　对于具有序传递性的正互反矩阵A，任意给定i，j，则对于所有k，或者$a_{ik} \geqslant a_{jk}$，或者$a_{ik} \leqslant a_{jk}$。

证明：对于任意给定的i，j，考虑a_{ij}，由定义且对所有k，若$a_{ij}>1$，则$a_{ik} \geqslant a_{jk}$，若$a_{ij}=1$，则或者$a_{ik} \geqslant a_{jk}$，或者$a_{ik} \leqslant a_{jk}$，若$a_{ij}<1$，则$a_{ji}>1$，从而$a_{jk} \geqslant a_{ik}$，这就证明了定理6.6。

系：对于序传递的互反矩阵，EM，LLSM，LSM给出相同的方案排序。

证明：由定理6.3和定理6.6即可得到证明。

判断矩阵的一致性通常指基本一致性，即对所有i，j，k，$a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$。另一类一致性是次序一致性，即$a_{ij}>1$，$a_{jk}>1$，则$a_{ik}>1$。次序一致性反映判断中的一个基本事实：如果方案A比方案B重要，方案B比方案C重要，则方案A比方案C重要。在判断矩阵满足次序一致性的情况下，EM、LLSM和LSM并不能得到相同的方案排

序。

例6.1

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

	EM=LLSM	LSM
	0.46	0.41
	0.38	0.51
	0.08	0.08

这里A为次序一致性的判断矩阵，EM与LSM得到不同的方案排序。事实上，判断矩阵保序性是比次序一致性要强的条件。

为了揭示判断矩阵数据所决定的方案重要性排序的本质，引进累积优势度的概念。

定义6.4 令$A^{(m)}=(a_{ij}^{(m)})$，则$a_{ij}^{(m)}$称为方案i对于方案j累积m步长的优势度。

累积优势度是与图论联系在一起的。$a_{ij}^{(m)}$实际上是结点i经m步到结点j所有可能路径的累积强度之和。这里，$a_{ij}^{(m)}$类似于投入产出分析的产品i的$m-1$次性间接消耗系数。熟悉投入产出分析的读者，通常会对各次间接消耗的推导过程留下深刻影响。事实上，从决策角度分析人的比较判断的累积影响也是存在的。例如，在涉及到n个方案的两两比较判断中，方案i对方案j的两步累积优势度$a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}(i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$，不仅包括了方案$i$与$j$重要性的直接比较（它通过$a_{ij}a_{jj}$给出），也包括了方案$i$通过方案$k$与方案$j$的相对重要性的间接比较。在判断符合一致性的情况下，这种每一个间接比较与直接比较是相同的。在不一致情况下，它考虑了所有与方案i与j比较有关的两步影响。因此两步累积优势度不仅包括了直接优势度，也包括了有关的不一致判断的两步相互影响，从而两步累积优势度比直接判断所给出的一步优势度更能真实地反映人对方案的偏好。类似地，三步累积优势度包括了有关两步优势度（从而也包括了直接比较判断所给出的一步优势度）。以此类推，m步累积优势度包括了有关的$m-1$步优势度。可见，方案的重要性的排序

随着步数增多而愈明显地在累积优势度上反映出来。下面从数学推理角度进一步说明上述观点。

定义6.5 矩阵A称m-优势的，如果存在m_0，使得$m \geqslant m_0$时，$a_{ik}^{(m)} \geqslant a_{jk}^{(m)}$或$a_{ik}^{(m)} \leqslant a_{jk}^{(m)}$对 i，j 和所有k成立。

定理6.7 正的互反矩阵是m-优势的。

证明：由定理5.15证明的过程中的(5.48)知，正互反矩阵A的m步累积优势度矩阵A^m，在对列归一化后同一行的元素有相同的极限，因此正的互反矩阵是m-优势的。

定理6.7表明，当m逐渐增大时，方案A_i对所有其它方案的m步累积优势度趋于同一个数值，即A^m的第 i 行。这一行实质上给出了方案 i 的排序的信息，我们有理由把 n 个方案的相对平均优势度向量

$$w_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{A^k e}{e^T A^k e} \tag{6.45}$$

的极限值作为方案相对重要性的排序权值。定理6.8表明，w_m的极限值等于特征根问题$Aw = \lambda_{max} w$的解w。

定理6.8 方案的相对平均优势度向量(6.45)的极限等于特征根问题

$$Aw = \lambda_{max} w$$

的解w。证明：由定理4.2，特征根问题的解

$$w = \lim_{m \to \infty} \frac{A^m e}{e^T A^m e} \tag{6.46}$$

由级数理论知，若$\lim a_k = a$，则$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a$，

从而

$$w = \lim_{m \to \infty} w_m \tag{6.47}$$

证毕。

从上面的分析可以看出，尽管不一致性判断矩阵表面上掩盖了

方案重要性的排序，但方案真实的序仍然存在于判断矩阵的数据所提供的信息之中。通过方案平均累积优势度极限值可以揭示方案相对重要性的排序。判断矩阵特征根问题的解给出了方案相对重要性的真实排序权值。由此可见，排序的特征根法在揭示方案相对重要性排序这个决策的最重要问题上是最好的方法。数值例子可说明在EM，LLSM，LSM中，EM是唯一最好的方法。例6.1说明LSM与EM得出方案的不同排序。

例6.2

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/2 & 1/8 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 1/3 & 1 & 1/4 & 5 \\ 8 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1/2 & 1/8 & 1/5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

	EM	LLSM
A_1	0.0612	0.0616
A_2	0.3743	0.3839
A_3	0.1342	0.1328
A_4	0.3869	0.3801
A_5	0.0434	0.0416

在这个例子中，EM的结果给出$A_2<A_4$，LLSM的结果给出$A_2>A_4$，LLSM的结果使A_2与A_4的真实排序倒置。

第六节　不完全判断信息下的排序问题

当使用*AHP*决策时，人们需要在递阶层次结构内给出很多判断矩阵。一个$n\times n$的判断矩阵要进行$\frac{n(n-1)}{2}$次两两比较判断，这些判断构成判断矩阵的上三角元素。当两两比较判断少于$\frac{n(n-1)}{2}$时判断矩阵的上三角部分不能填满。这种判断矩阵称为残缺判断矩阵。由残缺判断矩阵导出方案相对重要性的排序问题称为不完全判断信息下的排序问题。

不完全判断信息下的排序问题在决策中是经常出现的。这首先是因为由递阶层次结构包含的层次数及每一个层次包含的准则或方案数较大时，需要进行大量的两两比较判断，决策者有时未必有足够的时间做出这些判断。其次，对于一些比较敏感的判断问题，特

别是涉及到决策者本身利益或机密的问题，他们不愿意对这些问题明确地表示自己的偏好观点。第三，由于决策者对某些比较判断的背景缺乏足够的了解而无法表明偏好见解。这些原因使得排序中不得不处理由残缺判断矩阵导出排序标度问题。

解决不完全判断信息下的排序问题的基本思想是，如果先于判断对方案的排序权值有一个正确的估计，比较判断a_{ij}实质上是方案i与方案j排序权值之比（$\frac{w_i}{w_j}$）的近似。因此，对于那些判断矩阵中没有给出的元素a_{ij}即残缺判断，简单地视其为$\frac{w_i}{w_j}$。当然，在进行比较判断时事先并不知道方案之间相对重要性的排序权值，此时，假定这些残缺判断取$\frac{w_i}{w_j}$的形式而不指定具体值。为处理不完全信息下的排序问题，需要用到第四章不可约阵的概念。不可约阵是指无法由置换化为$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$形式的方阵。在本质上这个定义与定义4.2是一致的。定理4.3指出非负不可约阵存在正实数的最大特征根，其余特征根的模小于或等于它，最大特征根所对应的特征向量可以由正分量组成。从图论角度可以证明，一个矩阵是不可约的，当且仅当它的有向图$D(A)$是强连通的。因此，矩阵A是不可约阵当且仅当在$D(A)$中任意两个结点存在一条通路。对于残缺判断矩阵来说，任意两个方案必须存在直接或间接的比较判断，才能保证残缺判断矩阵是不可约阵。事实上，只要填满判断矩阵的第一行，这样的判断矩阵总是不可约的。

定义6.8 $n \times n$矩阵A称非负伪互反矩阵，如果A满足：

①$a_{ij} \geqslant 0$，$\forall i$，j；

②若$a_{ij} > 0$，则$a_{ji} = 1/a_{ij}$。

显然，所有正互反矩阵都是非负伪互反矩阵，反之则不然。

假定决策者已经给出了一组判断，其数目小于$\frac{n(n-1)}{2}$，并构成了残缺判断矩阵A。假定这个残缺判断矩阵是不可约阵。构造一个A的辅助矩阵C，它的定义如下：

$$c_{ij}=\begin{cases}a_{ij} & a_{ij}\neq 0\\ w_i/w_j & a_{ij}=0\end{cases} \tag{6.48}$$

例如，若

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1/2 & 1 & 2\\ 0 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

有

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & w_1/w_3\\ 1/2 & 1 & 2\\ w_3/w_1 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

对于特征根问题 $cw=\lambda_{\max}w$，其形式为

$$\left(2w_1+2w_2,\ \frac{1}{2}w_1+w_2+2w_3,\ \frac{1}{2}w_2+2w_3\right)$$

$$=\lambda_{\max}(w_1,\ w_2,\ w_3)$$

它与矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 1/2 & 1 & 2\\ 0 & 1/2 & 2\end{bmatrix}$$

的特征根问题$\overline{A}w=\lambda_{\max}w$是等价的。事实上，如果定义矩阵 $B=(b_{ij})$.

$$b_{ij}=\begin{cases}a_{ij} & i\neq j\\ m_i & i=j\end{cases}\quad m_i\text{为}A\text{中第}i\text{行零元素个数。}$$

则特征根问题 $Cw=\lambda_{\max}w$ 与 $(B+I)w=\lambda_{\max}w$等价。在上面的例子中

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1/2 & 0 & 2\\ 0 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

且$B+I=\overline{A}$。由假定，B总是非负不可约阵，$\overline{A}=B+I$是非负

伪互反矩阵，也是不可约阵，这就保证了$\overline{A}$的最大正特征根的存在唯一性，从而可以把最大特征根对应的特征向量作为残缺判断矩阵的排序权值。然而，由于非负不可约阵可能存在复根，其模等于最大特征根，因此幂法一般将不能用于主特征向量的迭代计算。为解决A的特征根问题算法，需要引用第四章关于素阵的定义4.3。事实上，本节例中A是素阵。

定理6.9 若A为$n\times n$非负不可约阵，则$(I+B)^{n-1}>0$，从而$I+B$为素阵。

利用$D(A)$得容易得到定理6.9。

定理6.10 若A为素阵

$$\lim_{m\to\infty}\frac{A^m e}{e^T A^m e}=cw \tag{6.50}$$

定理6.10的证明与定理4.2的证明类似，因为由定理4.4，素阵存在最大正特征根，其余特征根的模均小于这个最大特征根。

因此，可以利用(6.50)计算残缺判断矩阵的排序权值。对于本节的例子，

$$w=(4/7,\ 2/7,\ 1/7)^T$$

为讨论残缺判断矩阵的一致性检验问题，需要有关最大特征根取值的下述定理6.11。

定理6.11 令$\overline{A}=B+I$是$n\times n$非负不可约伪互反矩阵，则

①$\lambda_{\max}\geqslant n$

②$\lambda_{\max}=n$，当且仅当A为伪一致性矩阵时，即对A中所有正元素

$$a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$$

证明，由

$$\mathrm{trace}(\overline{A})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}m_i \tag{6.52}$$

及 $\overline{A}w=\lambda_{\max}w$

有

$$\lambda_{\max}=\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}\frac{w_j}{w_i}=(1+m_i)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{w_j}{w_i} \tag{6.53}$$

从而

$$n\lambda_{\max}+n+\sum_{i=1}^{n}m_i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{a_{ij}\neq 0}\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}+a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right) \tag{6.54}$$

令 $\mu=\dfrac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$，(6.54)化为

$$\mu=-1+\frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}m_i+\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ a_{ij}\neq 0}}\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}+a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right)\right] \tag{6.55}$$

现令

$$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{w_i}{w_j}(1+\delta_{ij}) & a_{ij}>0\\ 0 & a_{ij}=0\end{cases} \tag{6.56}$$

这里$\delta_{ij}>-1$，考虑到m_i为A中第i行零元素个数，从而

$$\mu=-1+(n(n-1))^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}m_i+\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ a_{ij}\neq 0}}\left(2+\frac{\delta_{ij}}{1+\delta_{ij}}\right)\right]$$

$$=-1+(n(n-1))^{-1}\left[n(n-1)+\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ a_{ij}\neq 0}}\left(\frac{\delta_{ij}}{1+\delta_{ij}}\right)\right]$$

$$=(n(n-1))^{-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\delta_{ij}^2}{1+\delta_{ij}} \tag{6.57}$$

由于$\delta_{ij}\geqslant -1$，从而$\mu\geqslant 0$，即$\lambda_{\max}\geqslant n$，定理6.11中的①得证。由(6.57)，当且仅当$\delta_{ij}=0(\forall i,\ j,\ a_{ij}\neq 0)$时$\lambda_{\max}=n$。由$\delta_{ij}$的定义

可知，对于所有$a_{ij}\neq 0$，当且仅当$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$时，$\lambda_{max}=n$，这就证明了定理6.11中的②。证毕。

下面给出不完全信息下的排序问题的一个实例。作为对比，一个完整的判断矩阵也在例中给出，这个例子涉及到对美国费城到世界六个城市距离的估计问题。Saaty在〔127，P42〕中给出了这一问题的完全判断矩阵（表6.1），构造性的残缺判断矩阵见表6.2，这两张表分别给出了排序结果。

表 6.1　六座城市与费城的距离估计（完全判断矩阵）

城　市	开　罗	东　京	芝加哥	洛杉矶	伦　敦	蒙特利尔
开　罗	1	1/3	8	8	8	7
东　京	8	1	9	8	8	8
芝加哥	1/8	1/9	1	1/6	1/5	2
洛杉矶	1/3	1/3	6	1	1/3	6
伦　敦	1/3	1/3	5	3	1	6
蒙特利尔	1/7	1/9	1/2	1/6	1/6	1
实际距离（英里）	5,729	7,449	660	2,782	3,658	400
归一化实际距离	0.278	0.361	0.032	0.132	0.177	0.019
距离排序权值	0.263	0.397	0.033	0.116	0.164	0.027

表 6.2　六座城市与费城距离的估计（不完全判断矩阵）

城　市	开　罗	东　京	芝加哥	洛杉矶	伦　敦	蒙特利尔
开　罗	1	1/3	8	8	8	7
东　京	8	5	0	0	0	0
芝加哥	1/8	0	5	0	0	0
洛杉矶	1/3	0	0	5	0	0
伦　敦	1/3	0	0	0	5	0
蒙特利尔	1/7	0	0	0	0	5
距离排序权值	0.20265	0.60796	0.02533	0.06755	0.06755	0.02895

不完全信息下的排序问题除了可以采用上面的特征根方法外，还可以采用LLSM和LSM。由第五节讨论的结果，EM是唯一能够真正反映方案排序的方法，因此，只要判断矩阵是不可约阵，总是采用EM求方案的排序权值。如果残缺判断矩阵是可约的，则只能采用LLSM和LSM。不完全信息下的排序问题对以AHP为主的专家系统有重要意义。这一问题仍有不少内容需要进行研究，例如，如何有效地给出残缺判断矩阵，残缺判断矩阵的一致性检验问题等等。

第七节　非线性特征根排序方法

大量的心理学实验证实，人在生理上对外界刺激的响应，并非按照与所受的刺激的强度成线性比例形式表达，而是按强度的幂形式表达。例如人对于声音刺激的响应，如果第一个声音是第二个声音音响三倍，则人通过感官对两个声音音响作出的判断大约是1.4倍。即如果两个刺激的强度之比为$\frac{w_i}{w_j}$，则人对这两个刺激的响应大约是$(\frac{w_i}{w_j})^a$。表6.3给出了不同刺激下的a值。由于这种客观存在的现象，单一准则的排序不能简单地通过求解$Aw=\lambda_{max}w$得到方案的排序权值，而是应该通过解广义的特征根问题，例如，$Aw^a=\lambda_{max}w^a$来确定方案的排序权值。这就涉及到所谓非线性特征根排序方法。下面从一般观点给出非线性特征根排序问题的数学上的提法。

表 6.3　　人对不同类型刺激响应的幂值 a

刺激类型	声音	亮度	长度	持续时间	大小	重量	速度	电击
a值	0.3	0.033—0.5	1.1	1.15	1.34	1.45	1.77	4.0

假定人们的两两比较判断给出的不是方案相对重要性的比例标度，即a_{ij}不是对i方案与j方案相对重要性权值比例$\frac{w_i}{w_j}$的估计，而是$\frac{w_i}{w_j}$的函数$a_{ij}(\frac{w_i}{w_j})$的估计，此时需要研究由这类判断矩阵如

何导出反映方案 i 相对重要性的一般形式的解$g_i(w)$。

定义6.9 判断矩阵 A 称广义一致性的，如果存在函数 f 使得对于所有 i，j，$k=1$，…，n

$$f(a_{ij})=f(a_{ik})f(a_{kj}) \tag{6.58}$$

定理6.12 若 $n\times n$ 判断矩阵 $A=(a_{ij}(\frac{w_i}{w_j}))$ 满足广义一致性条件(6.58)，则特征根问题

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{w_i}{w_j}\right)g_j(w_j)=ng_i(w_i),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{6.59}$$

有特征向量解

$$g(w)=(w_1^*,\ w_2^*,\ \cdots,\ w_n^*)^T \tag{6.60}$$

式中

$$g(w)=[g_1(w_1),\ \cdots,\ g_n(w_n)]^T \tag{6.61}$$

证明：事实上，广义特征根问题(6.59)的解满足

$$a_{ij}\left(\frac{w_i}{w_j}\right)=\frac{g_i(w_i)}{g_j(w_j)} \tag{6.61}$$

将(6.61)代入广义一致性条件(6.58)，得

$$f[g_i(w_i)/g_j(w_j)]=f[g_i(w_i)/g_k(w_k)]\cdot f[g_k(w_k)/g_j(w_j)] \tag{6.62}$$

即满足函数方程

$$f(x)f(y)=f(xy) \tag{6.63}$$

式中

$$x=g_i(w_i)/g_k(w_k),\quad y=g_k(w_k)/g_j(w_j)$$

函数方程(6.63)有一般形式的解

$$f(x)=x^\alpha \tag{6.64}$$

这表明，如果在广义一致性条件(6.58)及广义特征根问题(6.59)中用 w_i/w_j 代替 $a_{ij}(\frac{w_i}{w_j})$，则(6.59)是可解的，由

$$a_{ij}=\left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{\alpha} \tag{6.65}$$

及(6.61)，有

$$g_i(w_i)/g_j(w_j)=(w_i/w_j)^{\alpha} \tag{6.66}$$

从而

$$g_i(w_i)=(w_i)^{\alpha} \tag{6.67}$$

这就证明了定理6.12。

定理6.12表明，广义判断矩阵在满足(6.62)的一致性条件下，其广义特征根问题的解有(6.67)的权重形式。但对一般判断矩阵总可以通过解特征根问题$Aw=\lambda_{max}w$，得到w后求各分量的$\frac{1}{\alpha}$幂作为对应方案的排序权值。例如，在第二章光学例子中，如果在0.1到2内取十一个值，由判断矩阵A：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

计算的w^{α}见表6.4。

由表6.4可以看出，α值越小，分配给各方案的权重越集中在那些最重要的方案上，α值越大，权重分配越分散。由于各种α的取值并不改变方案重要性的排序，因此决策者可以根据自己的意愿通过选择适当的α以使方案的权重得以满意地进行分配。事实上，要使AHP在各类实际问题上发挥作用，有必要对各种不同类型的决策或系统分析问题进行深入研究，确定合理的α取值。对于风险评价，成本效益分析问题，一般总是尽可能取较小的α值，以便使方案的排序权值不因判断失误而造成很大影响。从更高的观点看待α的取值问题，涉及到人们对形形色色的社会经济现象刺激的响应问题，这个问题比研究人对物理现象刺激的响应要复杂困难得多。但是，那怕就某些现象，在某些条件下，通过某类特定的决策者，找出刺激响应的幂值α，也是对AHP应用上的突破性成果。

广义一致性条件(6.62)下将特征根问题的解取(6.67)幂权重的

表 6.4　　a 取不同值下的权重

a	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
w_1	0.9999	0.9920	0.9079	0.7930	0.6943	0.6187
w_2	0.0001	0.0079	0.0810	0.1583	0.2074	0.2363
w_3	0.0000	0.0001	0.0077	0.0386	0.0720	0.1009
w_4	0.0000	0.0000	0.0013	0.0101	0.0263	0.0451

a	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
w_1	0.5617	0.5183	0.4847	0.4581	0.4367
w_2	0.2510	0.2599	0.2646	0.2677	0.2692
w_3	0.1240	0.1420	0.1561	0.1673	0.1763
w_4	0.0633	0.0798	0.0943	0.1069	0.1178

形式使得在刺激响应的幂值已知时方案排序问题变得比较容易。但人们往往不满意(6.67)形式的解，希望寻找广义特征根问题(6.61)的一般函数形式$f(w_i/w_j)$的解，例如$e^{b\frac{w_i}{w_j}-b}$形式的解，此时我们仍然面临非线性特征根排序问题。这就需要讨论在广义一致性条件(6.62)不成立情况下，一般函数形式的广义特征根问题的解存在性与唯一性问题。非线性Perron-Frobineus定理较好地解决了这一问题。

为了将(6.59)的特征根问题推广到不一致判断矩阵和一般形式的函数特征向量，需要Perron-Frobineus定理的非线性推广形式。令$F: R_+^n \to R_+^n$是满足下列条件的连续映射：

①一阶齐次性　　$F(ax)=aF(x)$；

②素性　　存在正整数m，当$x>y$时，$F^m(x)>F^m(y)$，式中$F^m(x)=F(F^{m-1}(x))$。

E.Kohlberg[*]在1982年证明了下述关于非线性形式的Perron-Frobineus定理。

定理6.13 令$F:R_+^n\to R_+^n$是满足一阶齐次性和素性的连续映射，则

①存在向量$x^0>0$使得$F(x^0)=\lambda_0 x^0$，这里$\lambda_0>0$，x^0除差一个常数外是唯一的，

②对于所有$x\geqslant 0$

$$\lim_{k\to\infty}(F^k(x)/\|F^k(x)\|)=cx^0 \tag{6.68}$$

即无论对任意初始点x，F是收敛的，这里$\|\cdot\|$表示R^n中的范数。

利用定理6.13考虑w_i/w_j的一般形式的函数$f(w_i/w_j)$（它视为对a_{ij}的近似），在这种情况下向量函数$F(w)$的第i的分量由下式给出

$$F_i(w)=w_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(f(w_i/w_j))^{-1} \tag{6.69}$$

事实上，非线性特征根问题

$$F(w)=\lambda_0 w \tag{6.70}$$

解的第i个分量满足

$$\frac{F_i(w)}{w_i}=\lambda_0 \tag{6.71}$$

当a_{ij}恰恰等于$f(w_i/w_j)$时，由(6.69)$\lambda_0=n$。若$f(\cdot)$是连续的零阶齐次的正值函数，则由(6.69)定义的函数是连续的和一阶齐次的。由于$F(W)$是或不是素的取决于所涉及的函数$f(\frac{w_i}{w_j})$的类型和有关的a_{ij}的值，因此一般通过迭代程序验证是否(6.68)成立，即$F^k(w)/\|F^k(w)\|$的收敛性。如果收敛，则得到非线性特征根问题(6.70)的主特征根与对应的特征根向量。

下面用实例说明定理6.13的应用。令$f(w_i/w_j)=e^{b\frac{w_i}{w_j}-b}$，两个方案的判断矩阵为$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0.41 & \end{bmatrix}$，注意到由于$f(w_i/w_j)$具有一般

*参见，E. Kohlberg, "The Perron--Frobineus Theorem Without Additivity", Journal of Mathematical Economics, V.10, pp.299-303

函数形式，因此判断矩阵一般不具有互反性质。利用(6.69)进行迭代计算，在b取不同数值时得方案排序权值w_1，w_2的下述结果：

b	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
w_1	0.876	0.789	0.729	0.686	0.656	0.634	0.617	0.604	0.593	0.584	—
w_2	0.124	0.211	0.271	0.314	0.344	0.366	0.383	0.396	0.407	0.416	—

尽管由于定理6.13使得可以用迭代算法求解一般形式的非线性特征根问题，但这一课题的研究尚存在很多未解决的问题。例如，何以保证存在不同于$(w_i/w_j)^a$形式的函数f，使得$F(w)$是素的而且有实际意义，对于形如(6.69)的非线性映射如何进行类似前面做过的一致性讨论，以及如何将非线性排序问题由单一准则推广到整个层次结构中去。这些问题的解决无疑将使AHP在解决更为广泛一类决策问题上显示其功效。

第七章　Fuzzy层次分析法

第一节　引言

对于AHP的许多批评之一是AHP在构造判断矩阵时指派1-9间整数及其倒数的标度时没有考虑人的判断的Fuzzy性。有人指出*，AHP在方案两两比较重要性的赋值时只考虑了人的判断的两种可能的极端情况：以隶属度1选择某个标度值，同时又以隶属度1否定（或以隶属度0选择）其它标度值。这一批评是不无道理的。固然，AHP的基本方法是在决策分析愈复杂、抽象、深奥的时候提出的，而提出AHP的本意是尽量使决策过程简化，尽可能接近人的思维过程，同时减少实际决策中可能出现的深奥的数学色彩，但人在日常生活的大量选择和判断中，常常自觉或不自觉地使用Fuzzy集合概念。诸如两个方案相比，认为甲方案比乙方案明显重要，这本身就属于Fuzzy判断。AHP用标度值5来表示这一判断不能不认为是过于肯定。基于这种认识，AHP在Fuzzy环境下的扩展是有必要的。这一扩展称为Fuzzy AHP。

从原则上讲，AHP的Fuzzy扩展很有必要。但无论在理论上和应用上这一扩展都会遇到许多困难。在理论上，首先碰到的问题是如何表示Fuzzy判断，如果这些Fuzzy判断构成Fuzzy判断矩阵之后，这类Fuzzy判断矩阵具有什么性质。其次是Fuzzy排序理论，如何从Fuzzy判断矩阵导出方案的Fuzzy排序，原有的一些排序方法如EM、LLSM、LSM等如何在排序中使用，导出的Fuzzy

*参见 Sinon French, "Fuzzy decision analysis: some criticisms," Fuzzy Sets and Decision Analysis, Edited by H, J, Himnermann, etc, pp29-44, Elsevier Science publishers, 1984。

排序具有什么性质。第三，在递阶层次结构下如何将单一准则的Fuzzy导出标度进行合成，合成排序有怎样的实际意义，等等。尽管有一些论文涉及到了AHP的Fuzzy扩展理论问题，但上面提到问题的大多数远没有得到满意的答案。

在实际应用上，引进Fuzzy概念对缺少Fuzzy集与系统理论的实际决策者来说显然会使他们束手无策，或者使本来可以简化的问题重新复杂化。同时在排序计算中，无论用什么排序方法计算单一准则的Fuzzy排序权值，都会产生非Fuzzy的排序计算所没有遇到的困难。恐怕这也是自Saaty本人在1977年提出了AHP有可能引进Fuzzy判断的概念之后，有关Fuzzy AHP的论文所见不多的一个原因。从另一方面看，由于以AHP为基础的专家决策支持系统"Expert Choice"（专家选择）已在国外商业化，有必要在专家系统中体现Fuzzy环境下AHP，使用人们习惯的方式采集决策者的Fuzzy判断信息，以便使AHP的决策的过程更接近人们的实际决策思维过程。因此从应用角度看Fuzzy AHP的研究是有其实用价值和现实意义的。

本章对Fuzzy AHP的原理及应用做概括介绍。在简单复习Fuzzy集与系统理论中与AHP有关的概念并介绍Fuzzy AHP的基本概念之后，着重讨论AHP中Fuzzy判断的表示问题。第三节推荐一种Fuzzy判断的三角Fuzzy数的表示方法。由于三角Fuzzy数的有关运算法则所具有的性质，由这种表示方式比较容易导出方案的Fuzzy排序权值。第四节讨论单一准则下的排序理论。第五节介绍群组决策使用的Fuzzy AHP，并以一个构造性实例说明合成Fuzzy排序的计算方法。

第二节　Fuzzy AHP的基本概念

首先回顾Fuzzy集与系统理论中某些最基本的概念：Fuzzy集，Fuzzy向量与Fuzzy矩阵。

定义7.1 （Fuzzy集）令R表示实数集，A称R中的Fuzzy集，如果A结合一个映射，$\mu_A(x):R\to[0,1]$，$\mu_A(x)$表示$x\in A$的隶属度，从而一般称$\mu_A(x)$为A的隶属度函数。

R上的所有Fuzzy集合用$F(R)$表示。

定义7.2 （Fuzzy矩阵与向量）矩阵A称Fuzzy矩阵，如果它的每一个元素$a_{ij}\in F(R)$类似地，向量w称为Fuzzy向量，如果它的每一个分量$w_i\in F(R)$。

定义7.3 （Fuzzy数）$M\in F(R)$称为Fuzzy数，如果

（1）存在$x_0\in R$使得$\mu_M(x_0)=1$；

（2）$\forall a\in(0,1]$，$A_a=\{x;\ \mu_{Aa}(x)\geqslant a\}$是闭区间。

定义7.4 （Fuzzy数的基准函数）若函数L满足：

（1）$L(x)=L(-x)$；（2）$L(0)=1$；（3）L在$[0,+\infty)$上是非增的，则称L为Fuzzy数的基准函数。

定义7.5（L-R型Fuzzy数）若Fuzzy数M结合每对基准函数L，R满足

$$\mu_M(x)=\begin{cases} L[(m-x)/a] & x\leqslant m,\ a<0 \\ R[(x-m)/b] & x\geqslant m,\ b>0 \end{cases} \tag{7.1}$$

称M为L-R型Fuzzy数，式中L，R分别称m的左、右基准函数，m是M的均值，a，b分别称为M的左、右扩展。

在左、右扩展等于零时，m化为非Fuzzy数。用

$$M=(m,\ a,\ b)_{LR}\qquad N=(n,\ c,\ d)_{LR} \tag{7.2}$$

表示两个的（L-R）型Fuzzy数。M与N的加法、乘法及求逆的运算法则如下：

加法：$M+N=(m,\ a,\ b)_{LR}+(n,\ c,\ d)_{LR}$

$$=(m+n,\ a+c,\ b+d)_{LR} \tag{7.3}$$

这表明，两个L-R型Fuzzy数的和仍是L-R型Fuzzy数。与M相反的数－M表示为

$$-M=-(m,\ a,\ b)_{LR}=(-m,\ a,\ b)_{RL} \tag{7.4}$$

从而M与N相减的运算法则为

$$M-N=(m,\ a,\ b)_{LR}-(n,\ c,\ d)_{LR}$$
$$=(m-n,\ a+d,\ b+c)_{LR} \tag{7.5}$$

乘法：对于两个正Fuzzy数M、N，其乘积的近似公式为

$$(m,\ a,\ b)_{LR}\odot(n,\ c,\ d)_{LR}\cong(mn,\ mc+na,\ md+nd)_{LR} \tag{7.6}$$

一般地，$M\odot N$不再是L-R型Fuzzy数。

Fuzzy数的逆：对于正Fuzzy数M，M求逆的结果由下面近似公式给出

$$M^{-1}=(m,\ a,\ b)_{LR}^{-1}\cong(m^{-1},\ bm^{-2},\ am^{-2})_{LR} \tag{7.7}$$

使用L-R型Fuzzy数，可以对方案间两两比较判断用Fuzzy方式定量表示。例如，在给定准则下，方案i比方案j明显重要，可以用L-R型Fuzzy数$a_{ij}=(5,\ a,\ b)_{LR}$表示，其中左、右扩展a，b，表示判断的Fuzzy程度，当$a-b$愈大则比较判断Fuzzy程度高，当$a=b=0$，则判断是非Fuzzy的，与前面一般意义的判断标度5相同。方案j与方案i的重要性比较用Fuzzy数a_{ij}^{-1}表示。当给出$\frac{n(n-1)}{2}$个Fuzzy判断之后，我们有由L-R型Fuzzy数组成的Fuzzy判断矩阵A

$$A=(a_{ij})_{n\times n} \tag{7.8}$$

从理论上讲方案Fuzzy排序w通过下式

$$w=\lim_{k\to\infty}\frac{A^ke}{e^TA^ke} \tag{7.9}$$

得到，w可以近似地表示为L-R型Fuzzy数组成的Fuzzy向量。

为了将L-R型的Fuzzy数表示为便于进行排序计算的形式，第三节介绍三角Fuzzy数。

第三节　比较判断标度的Fuzzy数表示问题

用Fuzzy集表示AHP中方案间的比较判断，在理论上不存在困难，问题在于怎样赋与这种表示以明确的实际意义，在于如何使方案相对重要性的排序权值的计算比较容易。荷兰学者F.J.M.Van

Laarhover和W.Pedrycz[191]提出了用三角Fuzzy数表示Fuzzy比较判断的方法，本节介绍他们提出的这一方法。

定义7.5 R上的Fuzzy数M称三角Fuzzy数，如果M的隶属度函数$\mu_M: R\to[0,1]$表示为

$$\mu_M(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m-l}x-\dfrac{l}{m-l} & x\in[l,m]\\ \dfrac{1}{m-u}x-\dfrac{u}{m-u} & x\in[m,u]\\ 0 & x\in(-\infty,\ l)\cup(u,+\infty)\end{cases}\qquad(7.10)$$

式中$l\leqslant m\leqslant u$，l和u表示M台的下界，上界值。m为M的隶属度为1的中值。一般地，三角Fuzzy数M表示为$(l,\ m,\ u)$。

三角Fuzzy数$M=(l,m,u)$用来表示方案间两两比较的Fuzzy判断有明确的实际意义。如果用(4,6)表示i方案比j方案明显重要这一Fuzzy判断，则以隶属度1赋与这一判断标度5，以隶属度x 4赋与区间[4，5)内的标度x，以隶属度6-x赋与区间[5，6)内的标度x。三角Fuzzy数的几何解释见图7.1。

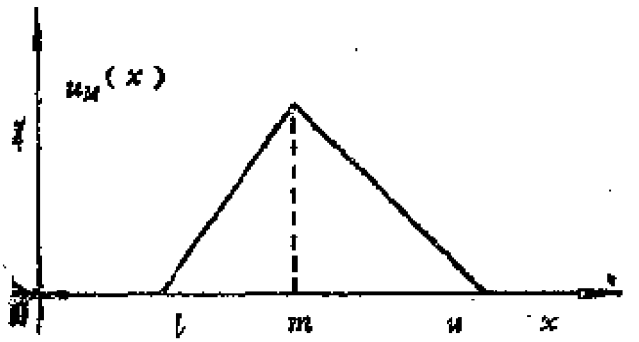


图 7.1 三角Fuzzy数(l,m,u)的几何解释

若μ_M，μ_N表示两个Fuzzy数的隶属度函数，则Fuzzy数

$$T=f(M,\ N)\qquad(7.11)$$

的隶属度函数由下式给出

$$\mu_T(z)=\sup_{\substack{(x,y)\\ z=f(x,y)}}\ (\min(\mu_M(x),\ \mu_N(x)))\qquad(x,y)\in R^2\qquad(7.12)$$

基于(7.12)，给出三角Fuzzy数的有关运算法则。

加法：　令$M_1=(l_1, m_1, u_1)$，$M_2=(l_2, m_2, u_2)$为两个三角Fuzzy数，$T=M_1+M_2$的隶属度函数由(7.12)有

$$\mu_{M_1\oplus M_2}(z)=\sup_{(x,y)\in R^2,\ x+y=z}(\min(\mu_{M_1}(x),\ \mu_{M_2}(y)))$$

$$=\sup_{x\in R}(\min(\mu_{M_1}(x),\ \mu_{M_2}(x))) \tag{7.13}$$

由于M_1+M_2是连续的Fuzzy数，其隶属度函数是R到[0, 1]上的映射，可以按其增加与减少两部分构造隶属度函数。

对于$\mu_{M_1\oplus M_2}$的增加部分，固定$w\in[0, 1)$，存在x，$y\in R$，使得

$$w=\mu_{M_1}(x)=\mu_{M_2}(y) \tag{7.14}$$

从而

$$z=x+y=w(m_1-l_1)+l_1+w(m_2-l_2)+l_2$$

$$=w(m_1+m_2-l_1-l_2)+l_1+l_2 \tag{7.15}$$

对于$\mu_{M_1\oplus M_2}$的减少部分

$$z=x+y=w(m_1+m_2-u_1-u_2)+u_1+u_2 \tag{7.16}$$

由$w=\mu_{M_1\oplus M_2}(z)$及(7.15)、(7.16)，对于$\mu_{M_1\oplus M_2}$的增加部分和减少部分分别得到：

当　$m_1-l_1+m_2-l_2\leqslant z\leqslant m_1+m_2$时，

$$\mu_{M_1\oplus M_2}(z)=\frac{1}{m_1-l_1+m_2-l_2}z-\frac{l_1+l_2}{m_1-l_1+m_2-l_2} \tag{7.17}$$

当　$m_1+m_2\leqslant z\leqslant m_1+m_2+u_1+u_2$，

$$\mu_{M_1\oplus M_2}(z)=\frac{1}{m_1-u_1+m_2-u_2}-\frac{u_1+u_2}{m_1-u_1+m_2-u_2} \tag{7.18}$$

由三角Fuzzy数的定义

$$M_1\oplus M_2=(l_1, m_1, u_1)\oplus(l_2, m_2, u_2)$$

$$=(l_1+l_2,\ m_1+m_2,\ u_1+u_2) \tag{7.19}$$

乘法

$$\mu_{M_1\odot M_2}=\sup_{(x,y)\in R^2,\ z=xy}(\min(\mu_{M_1}(x),\ \mu_{M_2}(y)))$$

$$=\sup_{x\in R}(\min(\mu_{M_1}(x),\ \mu_{M_2}(\frac{z}{x}))) \tag{7.20}$$

从而两个三角Fuzzy数乘积的隶属度函数，对于其增加部分

$$z=xy=F_1(w)=(l_1+w(m_1-l_1))(l_2+w(m_2-l_2))=$$
$$=l_1l_2+wl_2(m_1-l_1)+wl_1(m_2-l_2)+w^2(m_1-l_1)(m_2-l_2) \tag{7.21}$$

对于减少部分 $z=xy=F_2(w)=(u_1+w(m_1-u_1))\cdot(u_2+w(m_2-u_2))=u_1u_2+wu_2(m_1-u_1)+wu_1(m_2-u_2)+w^2(m_1-u_1)\cdot(m_2-u_2)$ (7.22)

从而，当$l_1l_2\leqslant z\leqslant m_1m_2$时，

$$\mu_{M_1\odot M_2}(z)=F_1^{-1}(z) \tag{7.23}$$

当$m_1m_2\leqslant z\leqslant u_1u_2$时，

$$\mu_{M_1\odot M_2}(z)=F_2^{-1}(z) \tag{7.24}$$

由(7.23)，(7.24)，$M_1\odot M_2$不再是三角Fuzzy数，但可以得到近似公式

$$(l_1,\ m_1,\ u_1)\odot(l_2,\ m_2,\ u_2)\cong(l_1l_2, m_1m_2, u_1u_2) \tag{7.25}$$

在区间$(-\infty,\ l_1l_2)$，$\{m_1m_2\}$，$(u_1u_2,+\infty)$上，(7.25)的右边与$M_1\odot M_2$相等。

M^{-1}的近似公式为

$$(l,\ m,\ u)^{-1}\cong\left(\frac{1}{u},\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{l}\right) \tag{7.26}$$

对数运算：

$$\mu_{1*M}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m-l}e^{x}-\dfrac{l}{m-l} & x\in(\ln l,\ \ln m)\\ \dfrac{1}{m-u}e^{x}-\dfrac{u}{m-u} & x\in(\ln m,\ \ln u)\\ 0\end{cases}\tag{7.27}$$

从而近似公式为

$$\ln(l,m,u)\cong(\ln l,\ \ln m,\ \ln u)\tag{7.28}$$

指数运算：

$$\mu_{e^{M}}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m-l}\ln x-\dfrac{l}{m-l} & x\in(e^{l},\ e^{m})\\ \dfrac{1}{m-u}\ln x-\dfrac{1}{m-u} & x\in(e^{m},\ e^{u})\\ 0\end{cases}\tag{7.29}$$

从而近似公式为

$$e^{(l,m,u)}\cong(e^{l},\ e^{m},\ e^{u})\tag{7.30}$$

三角Fuuzzy数的加、减、乘、除、指数、对数运算对于由三角Fuzzy数构成的Fuzzy判断矩阵推导Fuzzy排序向量是必须的。

第四节　Fuzzy AHP的单一准则排序计算

利用三角Fuzzy数可以得到表示决策者对被比较元素相对重要性的模糊判断矩阵。

令

$$A=(a_{ij})_{n\times n}\tag{7.31}$$

表示由三角Fuzzy数组成的Fuzzy判断矩阵。式中$a_{ij}=(l_{ij},\ m_{ij},\ u_{ij})$且满足

$$m_{ij}=1/m_{ji},\ \ l_{ij}=1/u_{ji},\ \ u_{ij}=1/l_{ji}\tag{7.32}$$

关于单一准则下方案重要性的Fuzzy排序权值计算，一般不宜使用公式(7.9)，这是由于在迭代计算过程中，需要反复利用公式

(7.25)，从(7.25)的推导过程中知，(7.9)是一个近似公式，因此，迭代过程由于误差累积而造成排序权值产生较大误差。对数最小二乘排序方法在一定程度上减少了排序权值计算误差，这里采用对数最小二乘法计算Fuzzy排序权值。

在非Fuzzy情况下，由判断矩阵通过LLSM计算排序权值，可以简单地利用根法，即判断矩阵的行乘积的n次方归一化的方法。但对于Fuzzy判断矩阵，根法不再适用于LLSM中排序权值的计算。事实上，令Fuzzy排序权值$w=(l,\ m,\ u)$，

由

$$\min\left[\sum_{i\neq j}^{n}\left(\log a_{ij}-\log\frac{w_i}{w_j}\right)^2\right] \tag{7.33}$$

注意到

$$\min\left[\sum_{i\neq j}^{n}(\log l_{ij}-\log l_i+\log u_j)^2\right] \tag{7.34}$$

$$\min\left[\sum_{i\neq j}^{n}(\log m_{ij}-\log m_i+\log m_j)^2\right] \tag{7.35}$$

$$\min\left[\sum_{i\neq j}^{n}(\log u_{ij}-\log u_i+\log l_j)^2\right] \tag{7.36}$$

由(7.34)、(7.35)、(7.36)可得LLSM的正规方程组：

$$n\log l_i-\sum_{j\neq i}^{n}\log u_j=\sum_{j\neq i}^{n}\log l_{ij},\quad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{7.37}$$

$$n\log m_i-\sum_{j\neq i}^{n}\log m_j=\sum_{j\neq i}^{n}\log m_{ij},\quad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{7.38}$$

$$n\log u_i-\sum_{j\neq i}^{n}\log l_j=\sum_{j\neq i}^{n}\log u_{ij},\quad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{7.39}$$

由于$\log l_{ij}+\log l_{ji}=\log u_{ij}+\log u_{ji}=\log m_{ij}+\log m_{ji}=0$，方程组(7.37)、(7.39)、(7.38)是线性相关的，因此，有

$$w_i=(al_i,\ bm_i,\ au_i) \tag{7.40}$$

其中a，b是可以任意选择的正实数，一般要求

$$al_i\leqslant bm_i\leqslant au_i \tag{7.41}$$

特别地，可以对(7.40)进行归一化处理。令

$$\overline{w}_i=w_i/\sum_{i=1}^{n}w_i \tag{7.42}$$

则归一化的Fuzzy排序向量为

$$\overline{w}_i=(c_1l_i,\ c_2m_i,\ c_3u_i) \tag{7.43}$$

式中

$$c_1=\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i\Big)^{-1}\quad c_2=\Big(\sum_{i=1}^{n}m_i\Big)^{-1}\quad c_3=\Big(\sum_{i=1}^{n}l_i\Big)^{-1} \tag{7.44}$$

注意到，在归一化过程中a，b实际上已被确定。一般地，经归一化后，(7.43)满足三角Fuzzy数的条件$c_1l_i\leqslant c_2m_i\leqslant c_3u_i$。

第五节　群组决策中使用的Fuzzy AHP

本节将单一准则的Fuzzy排序原理扩展为群组给出Fuzzy判断矩阵，并进而讨论群组决策的Fuzzy AHP。

假定在同一个准则下方案重要性的两两比较判断是由k个决策者给出的（$k\geqslant 1$），因此有k个Fuzzy判断矩阵。令A_s表示第s个决策者给出的判断矩阵

$$A_s=\begin{pmatrix} a_{11s} & a_{12s} & \cdots & a_{1ns}\\ a_{21s} & a_{22s} & \cdots & a_{2ns}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1s} & a_{n2s} & \cdots & a_{nns}\end{pmatrix}\quad s=1,2,\cdots,k \tag{7.45}$$

这里允许A_s为残缺判断矩阵，即允许决策者对某些方案间的两两比较判断不表态。残缺元素用0表示。令δ_{ij}表示k个判断矩阵中处于第i行、第j列的不等于零的元素个数，显然$0 \leqslant \delta_{ij} \leqslant k$。令$w$为综合考虑$k$个Fuzzy判断矩阵所得到的方案重要性的排序权值。为使w充分反映k个决策者的偏好，采用LLSM方法求w。因此，群组排序问题归结为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{\delta_{ij}}\left[\log a_{ijs}-\log\left(\frac{w_i}{w_j}\right)\right]^2\to\min \tag{7.46}$$

注意在(7.46)中，自动地把a_{ijs}中的非零元素排在1，…，δ_{ij}位置上，对于$s>\delta_{ij}$，令$a_{ijs}=0$。自然这样会打乱原来不同决策者所给出的判断矩阵。由于我们关心的是如何使方案的排序很好地反映所有决策者的综合偏好，并假定每个决策者在决策中所处的地位是平等的，因此(7.46)的表示方法是合理的。

对(7.46)求解，得正规方程组

$$\log w_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}\log w_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s=1}^{\delta_{ij}}\log a_{ijs} \tag{7.47}$$

令$a_{ijs}=(l_{ijs}、m_{ijs}、u_{ijs})$、$w_i=(l_i、m_i、u_i)$均为三角Fuzzy数，则(7.47)化为以下三组方程：

$$\log l_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}\log u_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s=1}^{\delta_{ij}}\log l_{ijs} \tag{7.48}$$

和

$$\log m_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}m_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s=1}^{\delta_{ij}}\log m_{ijs} \tag{7.49}$$

$$\log u_i \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} l_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{\delta_{ij}} \log u_{ijs} \tag{7.50}$$

(7.48)-(7.50)的解与(7.37)-(7.39)类似，但在群组决策下可能产生另一类问题。如果对于所有判断矩阵，有n或$n-1$行除了主对角线上的元素外，只出现一个决策者给出的唯一判断，即在这些行中，δ_{ij}除δ_{ii}和某个$\delta_{ij}=1$外，其余全部为零。此时，(7.48)-(7.50)的解取如下形式

$$w_i=(l_ip_1,\ m_ip_2,\ u_ip_3) \qquad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{7.51}$$

即出现三个独立参数，为使w得到唯一解，一般令$p_1=p_3$。也可以采用正规方程组的最小范数解。(7.48)-(7.50)的解的归一化与第三节的作法类似。在得到单一准则下的Fuzzy排序之后，由三角Fuzzy数的运算法则不难得到Fuzzy合成排序。

在实际使用群组决策的Fuzzy AHP时，总是把每个决策者在同一准则下所给出的判断矩阵组合成一个矩阵，这样的矩阵在a_{ij}的位置有k个元素（包括残缺判断的零元）。下面用实例说明群组决策中Fuzzy AHP的用法。

问题是从三个候选人A、B、C中选拔最合适的办公室主任。假定选拔所依据的评价准则是：C_1工作能力，C_2学识水平，C_3人际关系，C_4身体状况。假定有三个决策者参与选择过程。他们的比较判断用三角Fuzzy数表示。得到的Fuzzy判断矩阵和相应结果如下：

1. 相对于目标，四个准则的判断矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4	Fuzzy 排序数值
C_1	(1, 1, 1)	$(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2})$ $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ $(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})$	$(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2})$	$(\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ $(\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$	(0.149, 0.194, 0.256)
C_2	$(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2})$ $(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})$ $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$	(1, 1, 1)	$(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2})$ $(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2})$	$(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2})$ $(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2})$ $(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2})$	(0.235, 0.319, 0.431)
C_3	$(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2})$	$(\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ $(\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5})$	(1, 1, 1)	$(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$	(0.112, 0.140, 0.180)
C_4	$(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2})$ $(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2})$ $(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})$	$(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2})$ $(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2})$ $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$	$(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})$	(1, 1, 1)	(0.263, 0.347, 0.451)

2. 候选人相对于准则 C_1 的Fuzzy比较判断矩阵及Fuzzy排序结果

	A	B	C	在C_1下候选人的Fuzzy排序
A	$(1, 1, 1)$	$\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$ $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$ $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$	$(0.196, 0.289, 0.431)$
B	$\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$ $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$	$(1, 1, 1)$	$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$	$(0.195, 0.265, 0.368)$
C	$\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$	$(1, 1, 1)$	$(0.344, 0.449, 0.561)$

3. 候选人相对于准则 C_2 的Fuzzy比较判断矩阵及Fuzzy排序结果

	A	B	C	在C_2下候选人的Fuzzy排序
A	$(1, 1, 1)$	$\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$	$(0.405, 0.546, 0.714)$
B	$\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$	$(1, 1, 1)$	—	$(0.152, 0.182, 0.204)$
C	$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$	—	$(1, 1, 1)$	$(0.277, 0.273, 0.340)$

4. 候选人相对于准则C_3的Fuzzy比较判断矩阵及Fuzzy排序结果

	A	B	C	在C_3下候选人的Fuzzy排序
A	$(1, 1, 1)$	$\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right)$ $\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right)$	$(0.540, 0.579, 0.603)$
B	$\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$ $\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$ $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$	$(1, 1, 1)$	$\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$	$(0.163, 0.217, 0.292)$
C	$\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$	$(1, 1, 1)$	$(0.158, 0.205, 0.267)$

5. 候选人相对于准则C_4的Fuzzy比较判断矩阵及Fuzzy排序结果

	A	B	C	在C_4下候选人的Fuzzy排序
A	$(1, 1, 1)$	—	$\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$ $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$	$(0.162, 0.250, 0.394)$
B	—	$(1, 1, 1)$	$\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$	$(0.313, 0.500, 0.763)$
C	$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$	$(1, 1, 1)$	$(0.209, 0.250, 0.395)$

6. 候选人的组合排序为：

候选人A （0.227，0.398，0.705）

候选人B （0.168，0.313，0.579）

候选人C （0.188，0.289，0.504）

据此可以做出候选人A为办公室主任的选择。

第八章　不确定型AHP

第一节　引　言

决策，依其所处的环境可分为三种类型。第一种是确定型决策，它所涉及的因素是确定的，人们的判断、选择或分析结论以确定的形式表达。前面介绍的AHP属于这种确定型决策。第二种是风险型决策，它涉及的决策因素带有随机性，人们的判断、选择或分析结论表示为具有一定概率分布的随机变量。显然，这类决策更接近于人的决策思维过程，风险型决策方法更复杂一些，使用的数学工具也多。第三种是不确定型决策，在决策因素的概率分布未知情况下所进行的这种决策，一般需要先对所涉及的随机因素的概率分布加以估计，并根据估计的期望效用极大来选择最优方案。本章讨论不确定条件下的AHP。

与AHP有关的不确定条件有两类，一类是层次中的元素或方案不确定，例如，由于信息不足，决策方案有待补充，现有的方案不足以全面反映决策环境，在这种情况下，决策者可就已有方案使用AHP进行决策，当新方案出现时，依照保序理论进行决策分析。另一类涉及判断的不确定性，即在进行两两比较时，人们的判断有多种可能，从而无法指出一个确定的数值来表达两两比较中重要程度的判断，不确定型*AHP*是指这类不确定性。

在实际问题中，判断的不确定性是经常出现的。在同一准则之下方案的两两比较往往由于信息不足使我们没有把握对偏好程度做出明确的判断。在不确定判断的条件下如何运用AHP进行决策是不确定型AHP研究的目标。在确定型AHP中，判断矩阵的构造是通过不断地回答这样一类问题完成的，即：给定某个准则和从属于

这个准则的若干方案，在这个准则之下，两个方案那个更重要，重要多少。答案用1—9的整数及其倒数表示。通过解特征根问题得到主特征向量，这个向量是单一准则下方案的排序权值。然后按固定公式逐层对单排序权值进行合成，最后得到相对于决策目标的各方案排序权值。不确定型AHP显然不能简单采用这种方法，它有不同于确定型AHP的很多特殊问题。

首先是不确定型AHP的两两比较判断及判断矩阵如何表示。由于判断的不确定性，两两比较的判断一般采用区间标度，相应的判断矩阵以区间判断矩阵的形式给出。因此需要研究区间标度和区间判断矩阵的性质。其次是由判断矩阵如何导出被比较元素的排序权值，判断的不确定性必然导致排序的不确定性，如果把判断理解为在判断区间标度内的随机变量，在假定服从某种概率分布之后，如何由此导出排序权值向量的概率分布，特别要研究被比较的两个元素排列顺序发生变化以致全部被比较元素的排列顺序发生变化（即序反转）的概率。第三，在解决了单一准则排序问题之后，合成排序如何进行，总排序的序反转概率有多大。

使用不确定型AHP可以使人们在信息不全对比较判断没有把握的情况下了解这种不确定性对最终排序结果有些什么影响，是否有可能选择最好的决策方案。

不确定型AHP提出的时间不长，对它的研究还很不深入，有许多问题尚有待于解决。

本章第二节叙述区间标度、区间判断矩阵及其主特征向量的计算，第三节研究单一准则下的排序问题，第四节对合成排序问题做简略介绍。

第二节　区间标度、区间判断矩阵及区间特征向量的计算

当两两比较判断为不确定型时，我们用随机变量对判断定量

化，这种用随机变量表示的标度，称为区间标度，即标度在固定的区间内随机变化，它的概率分布无法确知。为了与确定型 AHP 的标度一致，总是假定区间标度的上下限分别为$\frac{1}{9}$和 9 。

定义8.1（区间标度）称随机变量 x 为区间标度，如果它满足 $p(L \leqslant x \leqslant U)=1$，这里$\frac{1}{9} \leqslant L \leqslant U \leqslant 9$

区间标度用于判断的定量化，为方便计，通常用它的上下限表示组成的区间。

定义8.2（区间判断矩阵）称 $A=(a_{ij})$ 为区间判断矩阵，如果它满足：

$$(1)\ a_{ii}=1, \qquad \forall i;$$

$$(2)\ a_{ij}\text{为区间标度}, \qquad \forall i,j;$$

$$(3)\ a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}} \qquad \forall i,j。$$

一般用a_{ij}的上下限区间形式表示区间判断矩阵即

$$A=([a_{ij}^L,\ a_{ij}^U]) \tag{8.1}$$

显然，若$a_{ij}^L=a_{ij}^U \in \left[1,\ \cdots,\ 9,\ \frac{1}{2},\ \cdots\frac{1}{9}\right]$，$\forall i,j$，$A$化为确定型判断矩阵。

与区间判断矩阵相联系的是区间特征向量，它也是一个随机变量。

定义8.3（区间特征向量）令 A为区间判断矩阵，称满足

$$Aw=\lambda_{max}w \tag{8.2}$$

的随机变量w为区间特征向量。

不确定型 AHP 的单一准则下排序主要研究两个问题。其一，如何由区间判断矩阵求解区间特征向量，以此作为单一准则下被比较元素的排序权向量。其二，排序向量序反转的概率估计问题。这两个问题从理论上和计算上都是相当困难的。

若区间判断为离散型随机变量，它从集合$([a_{ij}^L,\ a_{ij}^U] \in I=[1,\ \cdots,\ 9,\ \frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{9}]$上取值，区间特征向量的计算涉及到$([a_{ij}^L,\ a_{ij}^U]$ $(\forall i,j)$可能取值各种组合而构成的判断矩阵，例如，5 阶区间判断

矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & [2,\ 5] & [1,\ 4] & [2,\ 6] & [3,\ 6] \\ \left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{2}\right] & 1 & [2,\ 6] & \left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{3}\right] & [3,\ 7] \\ \left[\frac{1}{4},\ 1\right] & \left[\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}\right] & 1 & [5,\ 7] & [4,\ 4] \\ \left[\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}\right] & [3,\ 6] & \left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{5}\right] & 1 & \left[\frac{1}{3},\ 5\right] \\ \left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{7},\ \frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right] & \left[\frac{1}{5},\ 3\right] & 1 \end{bmatrix}$$

共有378000不同形式的判断矩阵，解378000次特征根问题的计算量相当困难。同时，两两比较判断一般在$[a_{ij}^L,\ a_{ij}^U]$中并不服从均匀分布，这对区间特征向量概率分布的估计带来很大困难。

当区间判断为连续型随机变量时，w在R上是有界和闭的。对于连续型随机变量，用w^L，w^U，$\overline{w}$分别表示w的上限、下限及均值，区间特征向量可以表示为$I(w)=(I(w_1),\cdots,I(w_n))^T$，其中$I(w_i)=[w_i^L,\ w_i^U]$。为估计上述量，需要对区间判断矩阵元素的概率分布作出假定。由a_{ij}表示随机变量的均值且随机变量服从正态分布时，Vargas〔1982,a〕证明了特征向量的每一个分量服从Beta分布，当矩阵的阶数增大时，则近似地服从截尾正态分布。

用来估计w^L，w^U，$\overline{w}$，供选择的方法有两种。第一种方法可分为两步，首先按照对区间判断矩阵每一个元素的分布所作的假设，设计在判断区间的随机抽样方案，计算样本矩阵的特征向量，以此模拟每一个分量的概率分布，然后在$[a_{ij}^L,\ a_{ij}^U](\forall i,j)$中选择有限个$a_{ij}^{(1)},\cdots,a_{ij}^{(m)}$，使得

$$[a_{ij}^L,\ a_{ij}^U]=\bigcup_{k=1}^{m-1}[a_{ij}^{(k)},\ a_{ij}^{(k+1)}] \tag{8.3}$$

计算对应于$A_k=(a^{(k)})$的特征向量，以此决定w^L，w^U，$\overline{w}$的估计值。第二种方法需要先假定w_i的概率分布，一般总是假定它服从

正态分布，然后从(a_{ij}^L, a_{ij}^U)中随机地做m次抽样，计算对应的特征向量和每一个分量的样本均值$\overline{w}_i$与方差s_i，最后通过在一定显著水平下对w_i是否服从正态分布进行统计检验。若检验通过，则 w_i的变化区间为

$$\hat{I}(w_i)=(\overline{w}_i-t_{1/2\alpha,n-1}s_i,\ \overline{w}_i+t_{1/2\alpha,n-1}s_i) \tag{8.4}$$

检验w_i的概率分布归结为检验假设

$$H_0: w\sim N(\overline{w}_i,\ s_i) \tag{8.5}$$

这里推荐两种检验，Kolmogorov-Smirnov检验和χ^2检验。

a，Kolmogorov-Smirnov检验

假定对(a_{ij}^L, a_{ij}^U)进行n次抽样后得到的特征向量的样本值为$w^{(i)}$（$i=1, \cdots, n$）

令
$$F_i(w_i^{(k)})=\frac{k}{n} \qquad (k=1, \cdots n) \tag{8.6}$$

$$F_i^*(w_i^{(k)})=\phi\left(\frac{w_i^{(k)}-\overline{w}_i}{s_i}\right) \tag{8.7}$$

式中ϕ为标准正态分布函数。令

$$D_i=\underset{K}{Sup}\,|F_i(w_i^{(k)})-F_i^*(w_i^{(k)})| \tag{8.8}$$

在给定显著水平α下，当$D_i<D_n$时，则在$1-\alpha$显著水平上接受H_0，$\alpha=0.05$时D_n的临界值如下：

n	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	$n>50$
D_n	0.56	0.41	0.34	0.29	0.27	0.24	0.23	0.1	0.20	0.19	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$

b，χ^2检验

将$(-\infty, +\infty)$分为m个区间，其中一个区间包含0，其余区间对称，计算$\frac{w_i^{(k)}-\overline{w}_i}{s_i}$落在第$k$个区间的频数$y_{ik}$，统计量$\mu_i$由下式得出

$$\mu_i=\sum_{k=1}^{m}\frac{(y_{ik}-np_k)^2}{np_k} \tag{8.9}$$

其中P_k为在第k个区间的标准正态分布概率，在给定的显著水平α下，若$\mu_i<\chi^2_{k-1,\alpha}$，则在$1-\alpha$水平下接受$H_0$，即$w_i$服均值为$\overline{w}_i$，方差为$s_i$的正态分布。

下面给出一个数值例子。

$$\begin{pmatrix} 1 & [2,\ 4] & [3,\ 5] & [3,\ 5] \\ \left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right] & 1 & \left[\frac{1}{2}\ 1\right] & [2,\ 5] \\ \left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{3}\right] & [1,\ 2] & 1 & \left[\frac{1}{3},\ 1\right] \\ \left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{2}\right] & [1,\ 3] & 1 \end{pmatrix}$$

随机地从上述区间判断中取100个样本，组成100个判断矩阵，计算对应的特征向量和分量的上、下界，样本均值与样本方差，结果如下表：

w_i^L	$\overline{w}_i$	w_i^U	S_i
0.4374	0.5093	0.5696	0.0233
0.1654	0.2131	0.2708	0.0219
0.1111	0.1496	0.1971	0.0175
0.1011	0.1280	0.1633	0.0151

按公式(8.6)、(8.7)、(8.8)分别计算$F_i(w_i^{(k)})$，$F_i^*(w_i^{(k)})$及D_i，$F_i^*(w_i^{(k)})$的结果见表8.1，D_i的计算结果如下：

分量 i	1	2	3	4
D_i	0.0519	0.735	0.0517	0.1267

由D_n的临界值表得在$\alpha=0.05$显著水平下

$$D_{100,0.05}=\frac{1.36}{\sqrt{100}}=0.136$$

由于$D_i > D_{100,0.05}$（$i=1,2,3,4$,）故在95%水平下W_i服从正态分布，从而各分量95%的置信区间分别为

	下界 $a_i=\bar{w}_i-2.58s_i$	上界 $b_i=\bar{w}_i+2.58s_i$
第一个分量	0.4388	0.5798
第二个分量	0.1567	0.2695
第三个分量	0.1043	0.1949
第四个分量	0.0890	0.1669

第三节　不确定AHP在单一准则下的排序

在不确定 AHP 中，我们关心的不仅仅是区间特征向量的置信区间，更主要的是在单一准则下方案重要性的排序是否由于区间特征向量的随机性而发生反转。单一准则下的方案排序，要结合区间特征向量和分量序反转的状况来确定。本节先讨论特征向量分量的序反转问题，然后得出不确定AHP单一准则排序法则。

定义8.4（序反转）令$I(w)=[I(w_1), I(w_2),\cdots,I(w_i)]^T$为区间特征向量，令$x_i$表示主特征向量第$i$个分量，它是随机变量。若

$$0<P(x_i>x_j)<1 \tag{8.10}$$

称区间特征向量的第i个分量与第j个分量出现序反转，序反转概率用P_{ij}表示。若对给定的i，存在k使得

$$0<P(x_i>x_k)<1 \tag{8.11}$$

称区间特征向量第i个分量出现序反转。若存在i，k（$i\neq k$）使得(8.11)成立称区间特征向量出现序反转。

序反转是方案排序不确定性的一种度量，若$I(w_i)\cap I(w_j)=0$，则或者$P(x_i>x_j)=0$，或者$P(x_i>x_j)=0$，此时方案i和j不可能出现序反转。当$I(w_i)$和$I(w_j)$的区间长度等于零时，两个分量序反转的讨论化为确定型排序问题。由于确定型单一准则下排序不会出现序反转，所以i方案与j方案不会出现序反转。出现序反转的

附表 8.1

k	w_1	F_1^*	w_2	F_2^*	w_3	F_3^*	w_4	F_4^*
1	0.43744	0.00442	0.16538	0.01441	0.11109	0.01401	0.10112	0.03739
2	0.44084	0.00619	0.16833	0.02007	0.12071	0.04962	0.10153	0.03966
3	0.44618	0.01637	0.17473	0.03931	0.12080	0.05013	0.10310	0.04952
4	0.46001	0.03519	0.17575	0.04348	0.12199	0.05762	0.10453	0.06009
5	0.46123	0.03883	0.17734	0.05068	0.12231	0.05977	0.10468	0.06126
6	0.46863	0.06796	0.17812	0.05455	0.12307	0.06519	0.10639	0.07641
7	0.46925	0.07103	0.18016	0.06577	0.12334	0.06717	0.10786	0.09153
8	0.46973	0.07343	0.18065	0.06869	0.12480	0.07878	0.10878	0.10198
9	0.46973	0.07343	0.18065	0.06869	0.12480	0.07878	0.10878	0.10198
10	0.47300	0.09173	0.18142	0.07351	0.12526	0.08267	0.10880	0.10216
11	0.47404	0.09820	0.18151	0.07412	0.12586	0.08809	0.10942	0.10974
12	0.47569	0.10916	0.18286	0.08319	0.12598	0.08914	0.11002	0.11743
13	0.47842	0.12905	0.18557	0.10399	0.12733	0.10223	0.11123	0.13596
14	0.47872	0.13131	0.18565	0.10465	0.12747	0.10367	0.11167	0.14041
15	0.47980	0.13993	0.18733	0.11944	0.12869	0.11689	0.11268	0.15578
16	0.47987	0.14051	0.18817	0.12716	0.12902	0.12058	0.11330	0.16583
17	0.48107	0.15060	0.18878	0.13306	0.12967	0.12817	0.11332	0.16613
18	0.48201	0.15871	0.18963	0.14160	0.12967	0.12821	0.11385	0.17507
19	0.48266	0.16459	0.18974	0.14276	0.13241	0.16373	0.11441	0.18481
20	0.48318	0.16932	0.19055	0.15120	0.13280	0.16936	0.11468	0.18963
21	0.48542	0.19071	0.19064	0.15214	0.13303	0.17261	0.11514	0.19791
22	0.48684	0.20512	0.19146	0.16120	0.13490	0.20100	0.11514	0.19795
23	0.48715	0.20839	0.19181	0.16507	0.13535	0.20837	0.11535	0.20181
24	0.48951	0.23391	0.19202	1.16151	0.13555	0.21184	0.11550	0.20451
25	0.49071	0.24754	0.19560	0.21152	0.13625	0.22331	0.11558	0.20614
26	0.49135	0.25499	0.19616	0.21901	0.13828	0.22383	0.11585	0.21084
27	0.49212	0.26412	0.19655	0.22432	0.13765	0.24778	0.11680	0.23100
28	0.49242	0.26768	0.19821	0.24765	0.13765	0.24781	0.11717	0.23725
29	0.49286	0.27298	0.19876	0.25537	0.13837	0.26078	0.11724	0.23860
30	0.49307	0.27556	0.20093	0.28838	0.13848	0.26078	0.11724	0.23860
31	0.49307	0.27556	0.20093	0.28838	0.13848	0.26292	0.11738	0.24159
32	0.49412	0.28861	0.20207	0.30642	0.13849	0.26312	0.11894	0.27496
33	0.49594	0.31171	0.20209	0.30687	0.13855	0.26410	0.11901	0.27634
34	0.49599	0.31235	0.20260	0.31504	0.13915	0.27550	0.11911	0.27858
35	0.49805	0.33964	0.20326	0.32587	0.13961	0.28422	0.11932	0.28329
36	0.49825	0.34231	0.20328	0.32622	0.14102	0.31207	0.12032	0.30618
37	0.49926	0.35598	0.20331	0.32662	0.14149	0.32153	0.12065	0.31395
38	0.49995	0.36546	0.20437	0.34434	0.14208	0.33380	0.12072	0.31555
39	0.50052	0.37335	0.20439	0.34470	0.14226	0.33758	0.12126	0.32842
40	0.50052	0.37344	0.20450	0.34660	0.14274	0.34751	0.12144	0.33256

续表

k	w_1	F_1^*	w_2	F_2^*	w_3	F_3^*	w_4	F_4^*
41	0.50056	0.37394	0.20534	0.36098	0.14296	0.35222	0.12159	0.33629
42	0.50122	0.38318	0.20594	0.37128	0.14334	0.36039	0.12169	0.33629
43	0.50166	0.38941	0.20806	0.40864	0.14338	0.36114	0.12183	0.34213
44	0.50196	0.39367	0.20822	0.41163	0.14371	0.36832	0.12185	0.34262
45	0.50234	0.39900	0.20848	0.41622	0.14469	0.38964	0.12201	0.34653
46	0.50271	0.40424	0.21009	0.44519	0.14527	0.40244	0.12224	0.35211
47	0.50346	0.41497	0.21091	0.46017	0.14547	0.40688	0.12243	0.35693
48	0.50372	0.41875	0.21166	0.47368	0.14594	0.41726	0.12311	0.37402
49	0.50397	0.42230	0.21279	0.49420	0.14611	0.42103	0.12314	0.37471
50	0.50437	0.42807	0.21528	0.53920	0.14647	0.42912	0.12358	0.38587
51	0.50894	0.49445	0.21562	0.54550	0.14850	0.47515	0.12364	0.38728
52	0.51010	0.51120	0.21608	0.55381	0.14855	0.47614	0.12399	0.39639
53	0.51239	0.54447	0.21709	0.57202	0.14892	0.48447	0.12433	0.40518
54	0.51318	0.55590	0.21828	0.59347	0.14955	0.49875	0.12471	0.41491
55	0.51325	0.55695	0.21839	0.59536	0.14999	0.50853	0.12500	0.42295
56	0.51438	0.57329	0.21888	0.60400	0.15021	0.51346	0.12508	0.42465
57	0.51499	0.58213	0.21917	0.60919	0.15089	0.52888	0.12523	0.42850
58	0.51562	0.59108	0.21921	0.60993	0.15135	0.53923	0.12542	0.43332
59	0.51600	0.59649	0.21954	0.61563	0.15252	0.56569	0.12677	0.46903
60	0.51703	0.61107	0.21974	0.61919	0.15263	0.56825	0.12891	0.52509
61	0.51724	0.61415	0.21980	0.62019	0.15265	0.56869	0.12930	0.53526
62	0.51797	0.62436	0.22068	0.63551	0.15331	0.58340	0.12939	0.53767
63	0.51853	0.63213	0.22070	0.63590	0.15550	0.63160	0.12995	0.55234
64	0.51946	0.64490	0.22084	0.63836	0.15601	0.64243	0.13003	0.55451
65	0.52049	0.65892	0.22121	0.64473	0.15634	0.64952	0.13114	0.58342
66	0.52053	0.65939	0.22229	0.66290	0.15660	0.65507	0.13140	0.59015
67	0.52157	0.67336	0.22282	0.67185	0.15690	0.66138	0.13249	0.61827
68	0.52225	0.68231	0.22307	0.67597	0.15711	0.66581	0.13303	0.63178
69	0.52226	0.68244	0.22323	0.67859	0.15802	0.68438	0.13319	0.63587
70	0.52246	0.68501	0.22380	0.68782	0.15817	0.68749	0.13403	0.65572
71	0.52246	0.68501	0.22380	0.68782	0.15817	0.68749	0.13403	0.65572
72	0.52283	0.68977	0.22395	0.69027	0.15819	0.68774	0.13474	0.67381
73	0.52307	0.69289	0.22399	0.69089	0.15853	0.69471	0.13571	0.69659
74	0.52369	0.70080	0.22414	0.69336	0.16085	0.73930	0.13664	0.71782
75	0.52424	0.70776	0.22537	0.71282	0.16147	0.75065	0.13717	0.72953
76	0.52537	0.72181	0.22603	0.72295	0.16195	0.75918	0.13765	0.74060
77	0.52593	0.72862	0.22685	0.73527	0.16298	0.77691	0.13838	0.75540
78	0.52654	0.73597	0.22722	0.74079	0.16321	0.78085	0.13965	0.78085
79	0.52949	0.76997	0.22725	0.74134	0.16336	0.78337	0.13981	0.78402
80	0.53057	0.78176	0.22735	0.74280	0.16366	0.78839	0.14023	0.79199

续表

k	w_1	F_1^*	w_2	F_2^*	w_3	F_3^*	w_4	F_4^*
81	0.53186	0.79535	0.22736	0.74296	0.16505	0.81036	0.14133	0.81223
82	0.53373	0.81416	0.22737	0.74311	0.16527	0.81381	0.14245	0.83152
83	0.53475	0.82393	0.22831	0.75666	0.16570	0.82022	0.14419	0.85890
84	0.53550	0.83099	0.22842	0.75818	0.16609	0.82602	0.14493	0.86959
85	0.53574	0.83318	0.22959	0.77449	0.16688	0.83726	0.14505	0.87123
86	0.53668	0.84157	0.23045	0.78617	0.16784	0.85037	0.14508	0.87167
87	0.53678	0.84246	0.23278	0.81570	0.16788	0.85086	0.14509	0.87181
88	0.53713	0.84552	0.23630	0.85541	0.16805	0.85317	0.14527	0.87427
89	0.50819	0.85455	0.23662	0.85871	0.16824	0.85553	0.14655	0.89100
90	0.53840	0.85631	0.23744	0.86689	0.16936	0.86954	0.14691	0.89543
91	0.53860	0.85800	0.23770	0.86944	0.16938	0.86979	0.14739	0.90105
92	0.54184	0.88295	0.24013	0.89162	0.17001	0.87732	0.14784	0.90615
93	0.54221	0.88559	0.24103	0.89910	0.17195	0.89837	0.14874	0.91580
94	0.54278	0.88960	0.24256	0.91097	0.17200	0.89890	0.14981	0.92449
95	0.54397	0.89763	0.24336	0.91678	0.17217	0.90063	0.15133	0.93952
96	0.54505	0.90453	0.24453	0.92472	0.17222	0.90108	0.15284	0.95070
97	0.54971	0.93052	0.24519	0.92893	0.17279	0.90665	0.15338	0.95424
98	0.55381	0.94858	0.24627	0.93547	0.17381	0.91604	0.15379	0.95683
99	0.55820	0.96351	0.24793	0.94482	0.17615	0.93496	0.15512	0.96437
100	0.55957	0.96739	0.25435	0.97061	0.18400	0.97518	0.15554	0.97116
101	0.56142	0.97204	0.25624	0.97596	0.19024	0.98968	0.16241	0.98883
102	0.56493	0.97934	0.26331	0.98917	0.19215	0.99224	0.16253	0.98905
103	0.56964	0.98648	0.27082	0.99567	0.19709	0.99638	0.16332	0.99043

情况只发生在$I(w_i)\cap I(w_j)\neq 0$的情况下，此时，p_{ij}不仅与$(I(w_i)\cap I(w_j))$有关，也与w_i和w_j的分布有关。

令$F_i(x_i)=P(X_i\leqslant x_i)$，即$F_i(x_i)$为特征向量第$i$个分量的累积概率分布。不难得到定理8.1。

定理8.1

$$p_{ij}=\begin{cases}[F_i(w_i^U)-F_i(w_i^L)]F_j(w_i^U) & w_i^L\leqslant w_i^L \qquad (8.12)\\ [F_j(w_i^U)-F_j(w_i^L)]F_i(w_i^U) & w_i^L\leqslant w^L \qquad (8.13)\end{cases}$$

证明：由于$w_i^L\leqslant w_i^L$的情况与$w_i^L\leqslant w_i^L$的情况证明相似，仅就(8.12)给出证明。$w_i^L\leqslant w_i^L$时，$I(w_i)\cap I(w_j)$有三种情况。

(1) $I(w_i)\cap I(w_j)=0$

此时$p_{ij}=0$，事实上由(8.12)

$$p_{ij}=[F_i(w_i^U)-F_i(w_i^U)]F_j(w_i^U)$$

把$F_i(w_i^U)=F_i(w_i^L)=1$及$F_j(w_i^U)=0$代入上式，可得$p_{ij}=0$。

(2) $I(w_j)\subseteq I(w_i)$，此时

$$p_{ij}=F_i(w_i^U)-F_i(w_i^L) \qquad (8.14)$$

在(8.12)公式中，由于$F_j(w_i^U)=1$，故

$$P_{ij}=[F_i(w_i^U)-F_i(w_i^L)]F_j(w_i^U)=F_i(w_i^U)-F_i(w_i^U)$$

(3) $I(w_j)$不包含于$I(w_i)$，$I(w_i)\cap I(w_j)\neq 0$

此时仅当 $w_i^L\leqslant w_i\leqslant w_i^U$ 及 $w_i^L\leqslant w_j\leqslant w_i^U$ 时

$0<P(w_i>w_j)<1$，w_i落在$I(w_j)$的概率为$F_i(w_i^U)-F_i(w_i^L)$，w_j落在$I(w_i)$的概率为$F_j(w_i^U)-F_j(w_i^L)=F_j(w_i^U)$，故$w_i$及$w_j$同时落在$(w_i^L,\ w_i^U)$的概率$p_{ij}$满足

$$P_{ij}=[F_i(w_i^U)-F_i(w_i^L)]\ F_j(w_i^U)$$

证毕。

系：

$$P_{ij}=[F_i(w_i^U)-F_i(w_i^L)][F_j(w_i^U)-F_j(w_i^L)] \qquad (8.15)$$

证明：当$w_i^L<w_i^L$时 $F_i(w_i)=0$，当$w_i^L<w_i^L$时 $F_i(w_i^L)=0$，由此及(8.12)、(8.13)，即得(8.15)。

对于第 i 个方案出现不确定排序的概率 P_i 和所有方案出现不确定排序的概率 P 有下述公式：

$$P_i = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - p_{ij}) \quad \forall i \tag{8.16}$$

$$P = 1 - \prod_{(i<j)<n} (1 - p_{ij}) \tag{8.17}$$

下面在 $W_i \sim N(w_i, s_i)$ 的情下讨论 p_{ij} 的估计。由定理 8.1 有下述公式：

(1) $\hat{I}(w_i) \cap \hat{I}(w_j) = 0$

由于 α 充分小，$p_{ij} \approx 0$

(2) $\hat{I}(w_i) \subseteq \hat{I}(w_j)$ 或 $\hat{I}(w_j) \subseteq \hat{I}(w_i)$

令 $a_k = w_k - t_{1/2\alpha, n-1} s_k$，$b_k = w_k + t_{1/2\alpha, n-1} s_k$。

假定 $\hat{I}(w_i) \subseteq \hat{I}(w_j)$，即 $a_j \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant b_j$，则

$$p_{ij} \cong \frac{1}{s_j \sqrt{2\pi}} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left[-\frac{(x - \overline{w}_j)^2}{2s_j^2} \right] dx \tag{8.18}$$

在 $\hat{I}(w_j) \subseteq \hat{I}(w_i)$ 的情况下

$$P_{ij} \cong \frac{1}{s_i \sqrt{2\pi}} \int_{a_j}^{b_j} \exp\left[-\frac{(x - \overline{w}_i)^2}{2s^2} \right] dx \tag{8.19}$$

(3) $\hat{I}(w_i) \cap \hat{I}(w_j) \neq 0$ 但非(2)

此时由(8.15)有

$$P_{ij} = p(a_j \leqslant w_i \leqslant b_j)\ P(a_i \leqslant w_j \leqslant b_i), \tag{8.20}$$

从而

$$p_{ij} \cong \left[\frac{1}{s_i \sqrt{2\pi}} \int_{a_j}^{b_j} \exp\left\{ -\frac{(x - \overline{w}_i)^2}{2s_i^2} \right\} dx \right] \times$$

$$\times\left[\frac{1}{s_i\sqrt{2\pi}}\int_{a_i}^{b_i}\exp\left\{-\frac{(x-\overline{w}_j)^2}{2s_j^2}\right\}dx\right] \tag{8.21}$$

利用第二节数值例子，我们计算不确定排序的概率 p_{ij}，P_i 和 P。先确定特征向量每一个分量的置信区间 $\hat{I}(w_i)$，在99%的置信水平下 $\hat{I}(w_i)$ 的上下界为：

下界	上界
$a_i=\overline{w}_i-2.58s_i$	$b_i=\overline{w}_i+2.58s_i$
0.4388	0.5798
0.1567	0.2695
0.1043	0.1949
0.0890	0.1969

由此可得 $p_{12}=p_{13}=p_{14}=0$，$p_{23}=0.006509$，$p_{24}=0.000274$，$p_{34}=0.779106$。各方案序反转的概率为

$$P_1=0$$

$$P_2=1-(1-p_{12})(1-p_{23})(1-p_{24})=1-(0.993491)(0.999726)=0.006781$$

$$P_3=1-(1-p_{13})(1-p_{23})(1-p_{34})=1-(0.993491)(0.220894)=0.780544$$

$$P_4=1-(1-p_{14})(1-p_{24})(1-p_{34})=1-(0.999726)(0.220894)=0.779167$$

全部方案序不确定概率为

$$P=1-(1-0)(1-0.006509)(1-0.000274)=0.781145$$

如何在不确定条件下用AHP选择最好方案？下面将讨论这一问题。

给定排序 w_i 和序反转概率 p_{ij}，P_i，P，令 S_1，S_2 分别表示高排序及低排序方案的指标集，考虑两种情况：a)所有 p_{ij} 均小，b)某些 p_{ij} 较大。如果所有 p_{ij} 均小，则 P 也小，从而此时最好的方案为使下式成立的第 k 个方案。

$$w_k(1-p_k)=\max\{w_i(1-p_i)\} \tag{8.22}$$

令S_3为有较大p_{ij}的方案指标集，考虑三种情况：

（1）$S_3 \supseteq S_1$

选择第k个方案使得

$$w_k = \max_{i \in S_1 - S_3 \neq 0} \{w_i(1-p_i)\} \tag{8.23}$$

（2）$S_1 \supseteq S_2$

选择第k个方案使得

$$w_k = \max_{i \in S_1} \{w_i(1-p_i)\} \tag{8.24}$$

（3）$S_3 \subset S_1 \cup S_2$，$S_1 \cap S_2 \neq 0$

选择第k个方案使得

$$w_k = \max_{i \in S_1 (S_1 \cap S_3) \neq 0} \{w_i(1-p_i)\} \tag{8.25}$$

显然，从上述分析可知，最终结果很大程度上取决于决策者对排序重要程度（即如何确定“高”、“低”的范围）以及对于风险偏好程度的认识。

第四节　不确定AHP的层次组合排序

假定在递阶层次中，区间标度不仅用于方案相对于准则重要性的两两比较判断（即最低层次的两两比较判断），也用于子准则相对于准则重要性的两两比较判断（各中间层次的两两比较判断）。此时判断的不确定在整个递阶层次中表现出来。由于各层次中由区间判断矩阵得到的元素排序权值是以上下界及概率分布形式给出的，层次组合排序的权重虽然也具有这种形式，我们关心的是对于决策方案的排序结果出现序反转的概率及如何选择最好方案两个问题。本节从上面讨论的结果研究这两个问题。

令$y_j(j=1,\cdots,m)$表示上一层次第j个准则的权重，它是随机变量，$x_{ij}(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m)$表示相对于第$j$个准则而言方案（或被比较的元素）$i$的排序权重。考虑下面两种情况：

a)准则的排序不涉及不确定性；b)准则的排序涉及不确定性。

a)由层次权重合成原理得

$$z_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}y_j \qquad (i=1,\cdots,m) \tag{8.26}$$

假定x_{ij}服从于均值$\overline{w_{ij}}$，方差s_{ij}的正态分布，得

$$z_i\sim N\left(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}y_j,\ \left[\sum_{j=1}^{n}s_{ij}^2y_j\right]^{1/2}\right) \tag{8.27}$$

b)计算准则的不确定条件下排序合成公式与(8.26)相同，x_{ij}，y_i均为随机变量，z_i亦然，在实际计算中，当x_{ij}，y_i服从非标准正态分布的情况下，z_i的分布很难得到，因此，序反转问题的讨论可以采用上一节的方法。

令q_{kh}表示准则k与h序反转的概率，这两个准则的相对重要性顺序是针对最高层而言。令q为所有准则至少出现一次序反转的概率，则

$$q=1-\prod_{1\leqslant k<h\leqslant m}(1-q_{kh}) \tag{8.28}$$

令q_k为第k个准则至少出现一次序反转的概率

$$q_k=1-\prod_{i\neq j\neq i}(1-q_{kij}) \tag{8.29}$$

令$p^{(k)}$表示在第k个准则下所有有关方案至少出现一次序反转的概率，p_{ij}为在第k个准则下方案i与方案j序反转的概率，则

$$p^{(k)}=1-\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}(1-p_{ij}^{(k)}) \tag{8.30}$$

令p_H表示整个递阶层次中至少出现一次序反转的概率，则

$$p_H=\begin{cases}1-(1-q)\prod_{k=1}^{m}(1-p^{(k)}) & p^{(k)}\neq 0\text{，如果存在某个}k\\ 0 & p^{(k)}=0,\forall k\end{cases} \tag{8.31}$$

第二个式子表明，当所有方案在各准则下无序反转时，准则的权重并不影响方案的优先顺序。令$p_i^{(k)}$为在第k个准则下第i个方案至少出现一次序反转的概率，则

$$p_i^{(k)}=1-\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}(1-p_{ij}^{(k)}) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{8.32}$$

对于给定的方案$(1-p_{ij}^{(k)})$表示对于所有准则方案i与其它任一方案不发生序反转的概率，则

$$1-p_{ij}^{(k)}=(1-q)\Big[\prod_{k=1}^{m}1-p^{(k)}\Big],\ \forall i \tag{8.33}$$

这里$1-q$必须考虑所有准则序反转的概率。

令$\overline{w}^{(k)}=(\overline{w}_1^{(k)},\cdots,\overline{w}_n^{(k)})^T$为对于第$k$个准则方案的排序权值的均值向量，$\overline{v}=(\overline{v}_1,\cdots,\overline{v}_m)^T$为准则的总排序权值的均值向量，方案的平均合成权重向量

$$\overline{w}_i=\sum_{k=1}^{n}\overline{w}_i^{(k)}\overline{v}_k \tag{8.34}$$

或

$$(\overline{w}_1,\cdots,\overline{w}_n)^T=\overline{w}=\overline{w}^{(k)}\overline{v} \tag{8.35}$$

由上节知，在单一准则下，具有较大排序权值的方案，发生序反转的概率可能大，而具有小排序权值的方案发生序反转的概率可能小，对于多个准则也存在类似现象。需要用上一节的准则来推导层次组合权重的序反转概率。

当所有方案同时考虑时，必须对不确定性及方案的排序权值进行折衷。如果不确定性大，必须补充更多的信息以便缩小区间判断的区间长度，步骤如下：

（1）考察$\{q_k\}$，$\{p_{ij}^{(k)}\}$，选择序反转概率大的准则和方案；

（2）分别计算在总目标下准则的平均排序权值和相对于各准则方案的平均排序权值，并求出准则平均排序权值对于方案平均排序

权值的比例；

（3）检验上述比例是否落在区间判断之中；

（4）修改判断区间以便平均排序比例落在判断区间之中。

如果经检验，准则的不确定性程度高，而排序权值也很大，则不增加信息很难做出最好的选择。

令c_1，c_2分别表示具有高低排序的准则集，c_3表示序反转概率q_{kk}较大的准则集，则需要考虑三种情况：$a)c_3\subseteq c_1$；$b)c_3\subseteq c_2$；$c)$ $c_3\subseteq c_1\cup c_2$，且$c_1\cap c_2=0$。

在第二种情况下，需考虑方案的不确定性。而在第一、第三种情况，则需附加更多的信息以减少准则的不确定性。因此仅需研究$c_3\subseteq c_2$条件下最好方案的选择问题。

令$s_1^{(k)}$和$s_2^{(k)}$，（$s_1^{(k)}\cap s_2^{(k)}=0$）分别为在第$k$个准则下方案的高低排序权重集，$s_3^{(k)}$表示高序反转的方案集，则存在三种情况：$s_3^{(k)}\subseteq s_1^{(k)}$；$s_3^{(k)}\subseteq s_2^{(k)}$；$s_3^{(k)}\subseteq s_1^{(k)}\cup s_2^{(k)}$，$\forall k$。对于所有准则，存在$3^m$个上述情况的组合，显然，无法提供一种选择方案的准则。对于（a），（c）则存在3^{3^m}种组合，一个一般选择方案更无法提出。这里仅提出在某些重要的特例下选择方案的一般法则：

I. $p_{ij}^{(k)}$，$\forall i,j,k$ 较小

在这种情况下选择方案的法则为

$$\max\{\overline{w}_i(1-p_{ij}^{(k)})\} \tag{8.36}$$

这里

$$\overline{w}_i=\sum_{k\in c_1\cup(c_2-c_3)}\overline{w}_i^{(k)}\,\overline{v}_k \tag{8.37}$$

II. $p_{ij}^{(k)}$，$(\forall i;j,\exists k)$ 较小

如果对应于p_{ij}较大的准则属于$c_3\subseteq c_2$则(8.36)可应用，否则在这些准则下关于方案的信息应增加。

III. $p_{ij}^{(k)}$较大（若存在某对$i,j,\forall k$）

若$s_g^{(k)}=s_g^{(h)}$，$(\forall k,h,h\neq k)$，$s_g^{(k)}\subseteq s_g^{(i)}$，$(\forall k)$ (8.36)可以用于选择最好的方案。

第九章　反馈系统排序

本章讨论一般系统的排序问题。当系统不能简化为递阶层次结构形式，需要考虑每一个层次内部元素的依存关系或者层次之间的反馈关系时，可以表示为反馈系统。本章第一节研究反馈系统的结构。第二节介绍超矩阵概念并给出反馈系统排序的基本数学理论。第三节讨论单纯循环系统的排序问题。第四节在给出反馈系统的极限相对排序和极限绝对排序的计算步骤同时，用实例说明如何运用反馈系统排序理论解决复杂系统的决策问题。

第一节　系统中的依存关系和反馈层次结构

层次分析法是在递阶层次结构下解决系统中决策问题的一种方法。递阶层次结构是对系统的一种简化表示方法。一个系统能够表示为这种递阶层次结构至少应具备以下三个条件：

（1）系统中的元素能够聚合为属性基本相同的层次或元素组，层次内部元素之间不存在相互影响或支配作用，或者这种作用可以忽略不计；

（2）层次之间存在着自上而下的支配关系，因此，存在最高层次，它对整个系统起支配作用，这种作用是通过第二层次向下传递的，同时也存在一个方案层次，它不对任何层次有支配作用；

（3）不存在层次间的反馈支配作用。

一个系统具备上述三个条件，可以考虑利用 AHP 解决系统中的决策问题。相当多的系统可以简化表示为递阶层次结构形式，或

者说把一个系统表示为递阶层次结构形式对于解决大多数决策问题是足够的，因此AHP在决策上有普遍适用性。此外，递阶层次结构表示方法的优点使我们容易抓住决策问题的关键，从而*AHP*在实际运用上有较强的功能。

然而，毕竟存在某些复杂的决策问题，对这类问题递阶层次结构的表示形式过于简单，甚至不合理。这种情况下AHP不适用，需要代之以反馈系统的决策方法。现在从系统中的依存性入手分析复杂系统结构。

第三章曾简略讨论过系统的依存性。一般系统中存在两种依存性：功能依存性和结构依存性。前者是指系统中层次和元素之间定量支配关系，后者是指系统中层次和元素之间的结构关系。结构信息依存性可视为人从系统外部输入并对系统功能依存性起作用的依存性。结构支配关系的定性表示是系统的另一种结构依存性。这种依存性对系统的分析与设计起决定作用。它进一步可分为外部依存性（指层次间的支配关系）和内部依存性（指同一层次元素之间的支配或影响关系）。外部的即层次间的依存性有两类，一类是递阶依存关系，另一类是反馈支配关系。下面从系统结构的外部和内部依存性入手分析系统结构的表示问题。

为了讨论的方便，对系统的结构表示形式和某种结构形式的系统这两个不同的概念不加区别。事实上，后者是系统的本质属性，而前者则是基于对系统的认识和分析的需要做出的系统表示方式。

如果系统的结构依存性仅仅表现为外部的递阶层次支配关系形式，而且不存在层次的内部依存性，则系统为递阶层次结构系统。这是从结构依存性出发表示系统结构的最简单的一种形式。递阶层次结构可以表示为图9.1。

在递阶层次结构内系统的功能依存性可以表示为单一准则下的排序和递阶层次中的合成排序，排序权值可以从相对重要性的定量表示扩展为功能依存性的定量表示。例如，单一准则排序结果可以理解为方案对准则的影响程度。单一准则排序是由判断矩阵通过解

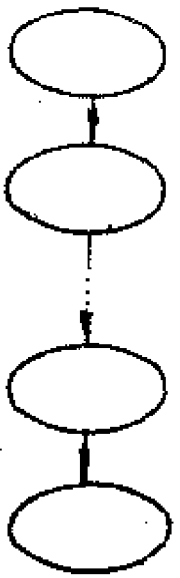


图 9.1 递阶层次结构

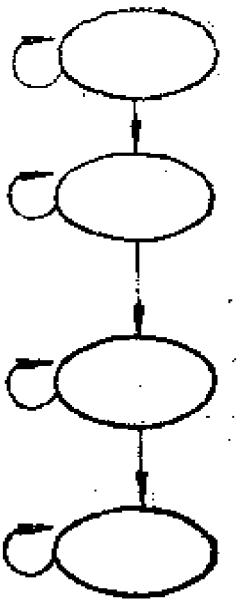


图 9.2 具有内部依存性的递阶层次结构

特征根问题求出的。它在考虑累积影响作用之下反映了方案的真实排序。注意到递阶层次结构内部独立性的假定在单一准则排序起十分重要的作用。正是由于这一假定，单一准则排序仅仅考虑有关的方案并计算极限累积优势度才是合理的。否则单一准则的特征根排序方法或其它方法无法给出合理的方案排序。

如果在递阶层次结构内考虑内部依存性，这样的系统结构形式为具有内部依存性的递阶层次结构（见图9.2）。此时每一层次内的准则或方案的相互制约、相互影响的关系使得单一准则下排序不能仅仅考虑被其支配的方案，也应考虑与这些方案有关的其它方案。这使得原有的单一准则的排序必须加以修正，同时，合成排序方法也应做必要的改变。

考虑内部依存性的递阶层次系统在决策中时常出现。例如，当评价不同型号汽车行驶性能时，可以把汽车行驶性能评价系统表示为具有内部依存性的递阶层次结构。最高层是汽车行驶性能；准则层包括四个汽车行驶性能的评价准则：刹车、转向、运行、加速性能；第三层次为汽车部件层，包括六个主要部件：制动、方向盘、底盘、发动机、车轮、减震装置等；各种型号的汽车构成被评价的

方案层。显然，第二，三层次中的元素是相互依存的，例如，在考虑汽车整体性能时，相对于刹车性能，刹车、转向、行驶、加速性能是相关的。

在实际的决策问题中，有时会遇到方案层不仅受准则层支配，反过来准则层也受方案层支配的情况，或者，更一般地，当最高层存在多个元素，通过递阶支配关系达到最底层方案层，反过来方案层存在对最高层的支配作用，此时层次之间的支配关系形成循环回路，这种结构称为循环层次结构（见图 9.3）。最简单的循环层次结构可以只有两个层次，例如，一个单位在评定职称时，需要对三个被评审者根据教学、科研、一般表现三个标准进行评审。如果对三个被评审者在每一准则下相互对比的优劣状态不十分清楚，可以转而考虑对于每一个被评审者来说，三项评价中那一个显得更突出。这就形成了循环层次系统。这种相邻层次循环支配的结构关系称为单纯循环层次结构。在单纯循环层次结构中仍然存在类似于AHP中的单一准则排序问题，方法也大体相近。然而AHP中的合成排序不再适用于单纯循环层次结构，因为对于这种结构找不到一个可以支配整个系统的最高层次，或者说每一个层次对其余所有层次都有支配关系和被支配关系，代之我们考虑影响排序（相对排

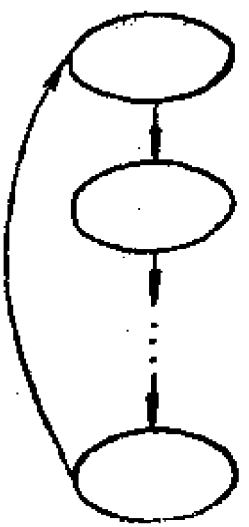


图 9.3 循环层次结构

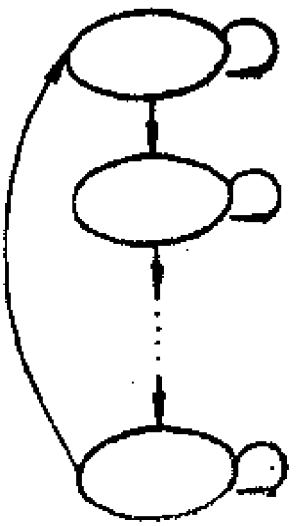


图 9.4 具有内部依存性的循环层次结构

序）与绝对排序。在更复杂一些的循环层次结构中，层次中允许存在内部依存性。这种具有内部依存性环循层次（见图9.4）的排序问题与不带内部依存性的排序问题本质上是相同的。

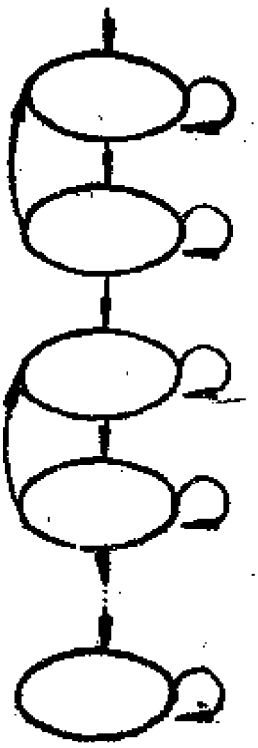


图 9.5 反馈层次结构

如果一个复杂系统分解为若干层次或子系统，某些层次之间既可能存在递阶支配关系，又可能存在循环支配关系，同时也允许存在层次内部的依存性，这类系统称为反馈系统（见图9.5），显然，递阶层次结构与循环层次结构都可视为反馈层次结构的特殊情况。一个复杂的系统总可以表示为反馈层次结构形式，因此，反馈系统的排序问题对于系统决策具有十分重要的普遍意义。

进一步分析反馈系统的结构，可以分为两种类型。一种是带有反馈关系的递阶层次结构。例如在图9.5中，如果把系统中的层次分为三组，前两组存在局部循环层次关系，第一组对第二组起支配作用，第二组对最低层次起支配作用。这样，在更高的聚合水平上可视这类反馈系统为递阶层次系统。另一种是可以归结为单纯循环层次结构的反馈系统。前者允许在相对排序的基础上讨论合成排序问题，后者只能讨论相对排序和绝对排序。

从以上分析可以看出，由系统中的结构依存性出发，可以将一个复杂系统的结构用图9.6加以分类。图9.6中，最左侧的内部独立的单纯递阶层次结构即前面几章所说的递阶层次结构。

为了研究反馈层次结构中的排序问题需要引进超矩阵这一数学工具。超矩阵在描述和深入研究系统功能依存性上起着中心作用。

0325777

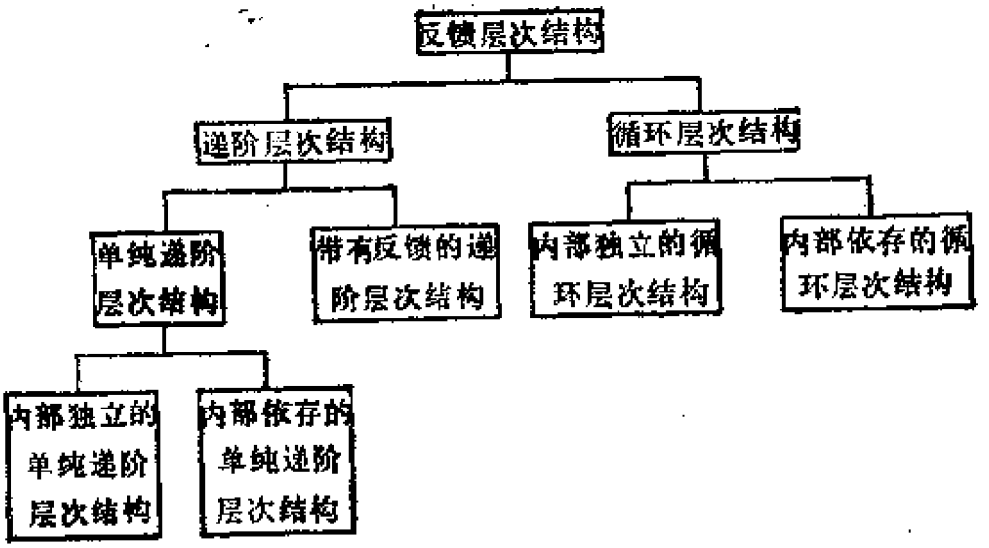


图 9.6 系统结构的分解示意图

第二节 超矩阵与反馈系统排序理论

考虑一个由N个层次（或元素组，或子系统）组成的系统，N个层次分别用C_1，C_2，$\cdots C_N$表示，第k层次中的元素用e_{k1}，e_{k2}，$\cdots e_{kn}$表示。假定各层次之间存在相互影响的作用，这种影响作用通过两两比较方式进行排序。例如第i个层次中各个元素对第j个层次第一个元素的影响作用排序可构成下述矩阵

$$W_{ij}=\begin{matrix}\\ j1\\ j2\\ \\ jn_j\end{matrix}\overset{\begin{matrix}i1 & i2 & \cdots & in_i\end{matrix}}{\begin{bmatrix} w_{j1}^{(i1)} & w_{j1}^{(i2)} & \cdots & w_{j1}^{(in_i)} \\ w_{j2}^{(i1)} & w_{j2}^{(i2)} & \cdots & w_{j2}^{(in_i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{jn_j}^{(i1)} & w_{jn_j}^{(i2)} & \cdots & w_{jn_j}^{(in_i)} \end{bmatrix}} \tag{9.1}$$

矩阵中的每一列为第i个层次各元素影响作用的排序向量。如果第i个层次的影响作用为零（即没有影响），则$W_{ij}=0$。N个层次相互影响作用可以用超矩阵W表示。

$$
W=\begin{array}{c|cccc}
 & C_1 & C_2 & \cdots & C_N \\
 & e_{11}e_{12}\cdots e_{1n_1} & e_{21}e_{22}\cdots e_{2n_2} & & e_{N1}e_{N2}\cdots e_{Nn_N} \\
\hline
C_1\ \begin{matrix}e_{11}\\ e_{12}\\ \vdots \\ e_{1n_1}\end{matrix} & W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\
C_2\ \begin{matrix}e_{21}\\ e_{22}\\ \vdots \\ e_{2n_2}\end{matrix} & W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C_N\ \begin{matrix}e_{N1}\\ e_{N2}\\ \vdots \\ e_{Nn_N}\end{matrix} & W_{N1} & W_{N2} & \cdots & W_{NN}
\end{array}
\tag{9.2}
$$

（1）超矩阵W可以无需分为层次或元素组而直接通过元素之间两两比较的方式导出矩阵中作为影响排序权值的每一列。但分组方式一般优点更多，有效性、稳定性和系统性等。事实上将属性或功能相同的元素编为一组或形成一个层次更符合人们分析问题的习惯。

（2）超矩阵中每一个子块均由归一化的列向量组成，但超矩阵的任意一列其和未必归一化(除非该列中仅有一个子块中的列非零)。为了利用超矩阵对复杂系统进行排序，需要对超矩阵的每一列归一化。具体作法是，先从需要归一化的列中找出非零排序向量的层次或元素组。构造对于系统功能来说每个层次影响作用的两两比较矩阵并计算相应的排序权值，利用层次的排序权值对该层次对应的元素影响排序加权。为了以后讨论的方便，假定超矩阵的每一列已经

按上述方法归一化。

（3）与层次中两两比较判断矩阵有所不同的是，相对于第 j 个层次中某个元素第 i 个层次中所有元素的两两比较有更广泛的含义，例如可以在给出比较判断时不断回答对于被比较的两个元素，哪个对给定的 j 层次元素的影响更大，贡献更大等等。根据分析问题不同，比较判断的含义将有所区别。

（4）超矩阵中主对角线上的子块涉及内部依存性的排序，相应的判断矩阵中的比较判断需要结合该层次的功能来确定。例如，在经济系统中产业关联的投入产出依存性分析中，为了给出投入产出系数矩阵，需要回答对于 j 部门生产，任给两个部门，哪个部门的贡献更大这样一类问题。

利用超矩阵，我们可以把（内部独立的）递阶层次结构的排序问题表示如下。

经过单一准则排序后超矩阵为

$$W=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ W_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & W_{32} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & W_{n-1,n-2} & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & W_{n,n-1} & I \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

合成排序结果为

$$W^{k}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ W_{n,n-1}W_{n-1,n-2}\cdots W_{32}W_{21} & & W_{n,n-1}W_{n-1,n-2}\cdots W_{32}\cdots & \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ W_{n,n-1}W_{n-1,n-2} & W_{n,n-1} & I \end{matrix} \qquad (9.4)$$

容易证明，对于 $k \geqslant n-1$，$W^k = W^{k+1}$。式(9.4)中第 n 行 j 列的子块每一列表示最低层(方案层)对于第 j 层中元素的排序向量，特别地，当最高层只有一个元素时，这个子块为列向量，它表示方案对于总目标的排序权向量，这个结果与根据合成排序原理得到的结果一致。由于递阶层次的内部独立性以及上一层次对系统功能的作用完全体现在下一层次中，因此超矩阵中主对角线上的子块除第 n 行第 n 列的子块为单位阵外，其余子块皆为零。

对于内部独立的循环层次系统，其超矩阵(在 $n=3$ 时)可以表示为

$$W = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & 0 \\ 0 & 0 & W_{23} \\ W_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9.5)$$

注意到

$$W^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_{12}W_{23} \\ W_{23}W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & W_{31}W_{12} & 0 \end{bmatrix} \qquad (8.6)$$

及

$$W^3 = \begin{bmatrix} W_{12}W_{23}W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & W_{23}W_{31}W_{12} & 0 \\ 0 & 0 & W_{31}W_{12}W_{23} \end{bmatrix} \qquad (9.7)$$

一般地有

$$W^{3k} = \begin{bmatrix} (W_{12}W_{23}W_{31})^k & 0 & 0 \\ 0 & (W_{23}W_{31}W_{12})^k & 0 \\ 0 & 0 & (W_{31}W_{12}W_{23})^k \end{bmatrix} \qquad (9.8)$$

$$W^{3k+1}=\begin{bmatrix} 0 & (W_{12}W_{23}W_{31})^kW_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (W_{31}W_{12}W_{23})^kW_{31} & 0 & 0 \\ 0 & (W_{23}W_{31}W_{12})^kW_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{9.9}$$

$$W^{3k+2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & (W_{12}W_{23}W_{31})^kW_{12}W_{23} \\ (W_{23}W_{31}W_{12})^kW_{23}W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & (W_{31}W_{12}W_{23})^kW_{31}W_{12} & 0 \end{bmatrix} \tag{9.10}$$

上述结果第三节再详细讨论。

对于反馈系统的排序问题，由于系统中不存在起整体支配作用的最高层次，因此方案的总排序失去意义。在这种情况下关心两类排序：相对排序或影响排序LIP和绝对排序LAP。LIP是指元素 i 对于元素 j 影响作用的排序，即 w_{ij}。LAP是指在给定所有元素在系统中重要性的初始排序 $w^{(0)}$（$j=1,\cdots,N^*$）之后，元素 i 通过对所有元素的相对影响作用与这些元素的初始排序结合而表现出来的在系统中作用的排序，用 w_i 表示元素 i 的一步绝对排序，则

$$w_i=\sum_{j=1}^{N^*}w_{ij}w^{(0)} \tag{9.11}$$

特别地，需要找出上述两类排序的极限值，即极限影响排序（LIP）和极限绝对排序（LAP）。

令元素 i 经过 k 步对元素 j 的IP为 $W_{ij}^{(k)}$，则

$$w_{ij}^{(1)}=w_{ij}$$

$$w_{ij}^{(2)}=\sum_{m=1}^{N^*} w_{im}w_{mj} \tag{9.12}$$

$$\vdots$$

$$w_{ij}^{(k)}=\sum_{m=1}^{N^*} w_{im}w_{mj}^{(k-1)}$$

一般地有

$$w_{ij}^{(k+h)}=\sum_{m=1}^{N^*} w_{im}^{(k)}w_{mj}^{(h)} \tag{9.13}$$

表示成超矩阵式

$$W^{k+h}=W^kW^h \tag{9.14}$$

相应地，对于AP有

$$w_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{N^*} w_{ij}^{(k)}w^{(0)} \tag{9.15}$$

为计算LIP及LAP，需要研究W^∞和$w^\infty=W^\infty w^{(0)}$的存在性问题。这里$w^\infty=(w^\infty_1,\cdots w^\infty_{N^*})$，$w^{(0)}=(w^{(0)}_1,\cdots,w^{(0)}_{N^*})$分别表示元素的LAP和初始排序向量。当LAP与初始排序向量$w^{(0)}$无关时，称系统是遍历的。

如果存在整数$k\geqslant 1$，使得$w_{ij}^k\geqslant 0$，称j由i经k步可达的。系统中的子系统C中的任意元素i和不在C中的任意元素j，使得$W_{ij}^{(k)}=0$，则称C是封闭的。对应于不可约矩阵的元素形成最小封闭子集，此时称这样的子集为不可约子集。在系统中存在两个或两个以上的封闭子集时，系统可进行分解。

由线性代数理论知，非负不可约矩阵存在最大特征根，如果最大特征根（主特征根）是唯一的，且重数等于1，则这个矩阵是素的。如果存在其它的特征根其模等于最大特征根，或者最大特征根的重数不等于1，则矩阵称为非素的。如果主特征根的重数大于1，但不存在其它特征根其模等于最大特征根，则矩阵称为常态的。如果主特征根的重数等于1且不存在其它特征根其模等于主特

征根，则矩阵称为正则的。素阵总是正则的从而也是常态的，但常态矩阵未必是素的，例如单位矩阵是常态矩阵但非素阵。如果一个矩阵被表示为其标准型，则当且仅当标准型中孤立子阵是素的时，该矩阵是常态的。

根据上述理论，对LIP和LAP的讨论可归结为以下四种情况。

Ⅰ． W是正矩阵或素阵。

由超矩阵的列和等于1知，其最大特征根等于1，由此可知LIP（用W^∞表示）的任意一列由特征根问题$Ww=w$解的w给出，LAP为w，此时，LAP与初始排序$w^{(0)}$无关，从而系统为遍历的。

Ⅱ． W是非素的非负不可约阵

令C为其模等于1的W的特征根的数目（包括重数），称c为非素指数，则系统以周期C循环，即

$$W^1,\ W^2,\ \cdots W^{c-1} \tag{9.16}$$

趋于周期性地重视，此时分别以$k+1$，$k+2$，…，$k+c-1$的矩阵乘积形式计算LIP和LAP。

Ⅲ． W是非负可约阵且其标准形中孤子块是素的。

LIP的解由下式给出

$$W^\infty=\lim_{k\to\infty}W^k=\frac{(I-W)^{-1}\psi(1)}{\psi'(1)} \tag{9.17}$$

式中$\chi(\lambda)$为W的最小多项式，$\psi'(\lambda)$为对于λ的一阶导数。

如果W是常态的，则LAP由

$$w^\infty=W^\infty w^{(0)} \tag{9.18}$$

给出。如果W是正则的，则

$$w^\infty=W\ \ w^\infty \tag{9.19}$$

Ⅳ． 孤立子块中存在非素阵。

令C为所有非素子块的非素指标的最小公倍数，则C为系统循环的周期，平均LIP $\widetilde{W}$和平均LAP w分别由下式给出：

$$\widetilde{W}=\frac{1}{c}(I+W+W^2+\cdots+W^{c-1})(W^c)^\infty$$

$$=\frac{1}{c}(I-W^c)(I-W)^{-1}(W^c)^* \tag{9.20}$$

$$w=\widetilde{W}w^{(0)} \tag{9.21}$$

如果只存在一个孤立子块，则平均LAP与初始排序无关，其解由$Ww=w$唯一确定。

由上述反馈系统的排序理论，可以解决存在内部依存性的递阶层结构、循环层次结构和一般系统的排序问题。

第三节　循环层次结构中的排序问题

循环层次结构排序问题可以归结为通过超矩阵

$$W=\begin{pmatrix} W_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & W_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & W_{NN-1} & W_{NN} \end{pmatrix} \tag{9.22}$$

计算LIP和LAP。当层次内部独立时，(9.22)化为

$$W=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & W_{1N} \\ W_{21} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & W_{NN-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{9.23}$$

此时LIP和LAP的解由(9.16)给出。特别地$\lim\limits_{k\to\infty} W^{Nk}$给出同一层次内部元素之间的LIP。

下面通过一个简单的例子说明内部独立的循环层次系统的排序问题。

假定某单位有三人需要评定职称，被评审人用A_1，A_2，A_3表示。评定职称的标准为教学能力、科研能力和一般表现，分别用

C_1，C_2，C_3表示。针对准则C_1，C_2，C_3构造两两比较判断矩阵并计算A_1，A_2，A_3相应的排序权值得

（0.25，0.25，0.50），（0.10，0.50，0.40），（0.40，0.30，0.30）。

针对准则，三个被评审人横向两两比较缺乏足够的信息，辅之以对于每一个被评审人准则C_1，C_2，C_3的两两比较，相应的排序权值为（0.30，0.40，0.30），（0.50，0.10，0.40），（0.40，0.20，0.40），构造超矩阵得

$$W=\begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & A_1 & A_2 & A_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.50 & 0.40 \\ 0 & 0 & 0 & 0.40 & 0.10 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0.40 & 0.40 \\ 0.25 & 0.10 & 0.40 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.50 & 0.30 & 0 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0.40 & 0.30 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix}$$

W取极限得

$$W^{\infty}=\begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & A_1 & A_2 & A_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.405 & 0.405 & 0.405 \\ 0 & 0 & 0 & 0.222 & 0.222 & 0.222 \\ 0 & 0 & 0 & 0.373 & 0.373 & 0.373 \\ 0.273 & 0.273 & 0.273 & 0 & 0 & 0 \\ 0.324 & 0.324 & 0.324 & 0 & 0 & 0 \\ 0.403 & 0.403 & 0.403 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

由此可以得到相对于准则三个被评审人的极限排序为（0.273，0.324，0.403）据此可以对被评审者的综合表现排序。

当循环层次系统涉及内部依存性时，同一层次内部元素相互影响的排序一般通过以下三步进行：

第一步　计算该层次各元素相对于上一层次（如果该层次为最高层则上一层次为最低层次）各元素的排序权值；

第二步　分别在上一层次各元素之下，相对于本层次固定元素，计算本层次元素重要性或影响依存关系的排序权值；

第三步　利用第一步求得的相对本层固定元素上一层次各元素的排序权值对第二步的排序进行加权，由此得本层次该元素所属列的内部依存性的排序权值。

假定第N层为方案层，利用（9.22）可计算W中的子块W_{N1}，W_{N2}，…，W_{NN}，以此作为方案相对于各准则的排序权值。

第四节　反馈系统的排序步骤与应用实例

本节研究一般反馈系统的排序步骤，并以分析我国产业结构的依存与制约关系为例说明这一步骤如何使用。

假定系统已经被分解为N（$\geqslant 2$）个子系统，第i个子系统包含n_i个元素，系统中全部元素的个数N^*为

$$N^* = \sum_{i=1}^{N} n_i \tag{9.24}$$

进一步假定N个子系统的结构依存性已经很好地加以确定，每一个子系统内部可以是独立的或是依存的。我们的目的是计算系统中诸元素之间相互影响作用的排序（直接影响排序）、极限影响排序（LIP）和极限绝对排序（LAP）这一过程可划分为以下六个步骤：

第一步：计算由于子系统外部依存性而导致的元素间相互影响作用的排序。假定第i个子系统中的诸元素对第j个子系统中的元素e_{jl_j}（$i \neq j$）起影响作用，根据这种影响作用的大小通过两两比较可以构造相对于e_{jl_j}的判断矩阵，并由特征根法导出第i个子系统诸元素相对于元素e_{jl_j}直接影响排序权向量$(w_{i_1}^{(il_j)}, w_{i_2}^{(il_j)}, \cdots, w_{i_{n_i}}^{(il_j)})^T$其分量满足下述关系式：

$$\sum_{i_k=1}^{n_i} w_{i_k}^{(il_j)} = 1 \qquad (l_j = 1, 2, \cdots, n_j) \tag{9.25}$$

由上述直接影响排序权向量可构造形如（9.1）的子矩阵 W_{ij}（$i \neq j$），它是列随机的。

第二步：计算由于子系统中内部依存性而导致的该子系统内部元素间相互影响作用的排序。此时需要对于子系统 i 内每一个固定元素 e_{il_i} 不断回答如下问题：就第 i 个子系统在整个系统的功能而言，该子系统任意两个元素哪一个对 e_{il_i} 的影响作用大，大多少？由此得到两两比较判断矩阵。相应地可以导出子系统 i 的诸元素对于 e_{il_i} 影响作用的排序权向量 $(w_{i1}^{(il_i)}, w_{i2}^{(il_i)}, \cdots, w_{in_i}^{(il_i)})^T$，（$l_i = 1, 2, \cdots, n_i$）。同样地，这一排序权向量满足类似（6.19）的规一化条件。

第三步：由前面两步构造未加权的超矩阵（9.2'）

第四步：计算权矩阵

$$A = (a_{ij})_{N \times N} \tag{9.26}$$

它用来对（9.2）加权。上式中，若 $a_{ij} = 0$，则表示第 i 个子系统对第 j 个子系统不存在直接影响作用。A 中第 j 列

$$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{Nj})^T \tag{9.27}$$

也是通过构造判断矩阵并解特征根问题得到的。在构造判断矩阵时需要不断地回答下述问题：就系统的总体功能而言，对子系统 j 有影响作用的任意两个子系统哪个对子系统的影响作用大，大多少？显然我们要求 A 是列随机的。

第五步：利用 A 对 W 加权以形成列随机的超矩阵 $\widetilde{W}$，即

$$\widetilde{W} = (a_{ij}W_{ij})_{N^* \times N} \tag{9.28}$$

$\widetilde{W}$ 所满足的列随机条件可以表示为：

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_i} a_{ij} w_{ik}^{(ij)} = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, N, l_j = 1, \cdots, n_j) \tag{9.29}$$

第六步：计算LIP和LAP，其方法已在本章第二节做了介绍。

下面我们通过引进Kronecker-Hadamard 乘积的概念来证明对反馈系统极限绝对排序有用的一个定理。

定义9.1 (Kroneckar-Hadamand乘积) 令$W=(Wij)_{N\cdot N^*}$ ($i, j=1, \cdots, N$) 为$N^*\times N^*$分块矩阵，$A=(a_{ij})_{N\cdot N}$，称

$$W\otimes A=(a_{ij}W_{ij})_{N^*\cdot N^*} \tag{9.30}$$

为W与A的Kronecker-Hadamard乘积。

定理9.1 令W为形如(9.1)的未加权超矩阵，A为形如(9.26)的权矩阵。若W与A皆为素性，则任意子系统j中诸元素极限绝对排序之和由A唯一确定。

证明：由W和A的素性，容易证明加权超矩阵$\widetilde{W}=W\otimes A$也是素阵，从而$W\otimes A$与A皆存在唯一的规一化的主特征向量，它们分别用$\widetilde{W}=(\widetilde{w}_1, \cdots, \widetilde{w}_{N^*})^T$和$W=(w_1, \cdots, w_N)$表示，且我们有：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{n_j} w_{(i_1)}^{(i_1)}a_{ij}\widetilde{w}_{i_j}=\widetilde{w}_{k_i} \tag{9.31}$$

对$k_i=1, 2, \cdots, n_i$求和，得：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_i=1}^{n_i}\sum_{i=1}^{N}\sum_{i_j=1}^{n_j} w_{(k_i)}^{(i_j)}a_{ij}\widetilde{w}_{i_j}\\
&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{i_j=1}^{n_j}\sum_{k_i=1}^{n_i} w_{(k_i)}^{(i_j)}a_{ij}\widetilde{w}_{i_j}\\
&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{i_j=1}^{n_j} a_{ij}\widetilde{w}_{i_j}=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{i_j=1}^{n_j}\widetilde{w}_{i_j}\right)a_{ij}=\sum_{k_i=1}^{n_i}\widetilde{w}_{k_i}
\end{aligned} \tag{9.32}$$

上式推导过程中的第二个等号利用了(9.29)。令

$$\overline{\overline{w}}_j=\sum_{i=1}^{n_j}\widetilde{w}_{i_j} \tag{9.33}$$

得：

$$\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\,\overline{\overline{w}}_j=\overline{\overline{w}}_i \quad (i=1, \cdots, N) \tag{9.34}$$

这表明$\overline{w}=(\overline{w}_1, \overline{w}_2\cdots, \overline{w}_N)^T$为$A$的对应于最大特征根1的主特征向量，易知，$\overline{w}$满足规一化条件，从而$\overline{w}=w$，即

$$w_j=\sum_{i=1}^{N}\tilde{w}_{ij} \tag{9.35}$$

由于w_j由A唯一确定，这就证明了，对应于子系统j的诸元素极限绝对排序之和由A唯一确定。证毕。

定理9.1可以考虑推广到W与A皆为正则矩阵的情况。

下面我们研究社会经济系统中产业结构内部和影响产业结构诸因素之间相互影响关系的排序问题。

从系统观点出发，产业结构内部存在着互相依存与互相制约的复杂关系，这种关系对社会各个领域（社会最终需求，对外经济联系、社会经济政策、资源、科学技术）起着影响作用。另一方面，社会各个领域同样对产业结构起着影响作用。社会、经济、科技的协同发展，推动着人类的进步。从反馈系统排序角度研究产业结构内部和影响产业结构诸因素之间相互依存与相互制约的关系，有助于我们从量的方面揭示这种关系，把握社会诸因素与产业结构变化的规律。

下面我们把社会经济系统划分为六个子系统：产业结构子系统(S)，社会最终需求子系统(D)，对外贸易子系统(X)，科学技术子系统(T)，社会经济政策子系统(P)，资源与环境子系统(R)。

产业结构反映了整个国家在各经济部门中分配活劳动与物化劳动的基本状况。为研究方便起见，按照国际惯例我们把经济部门划分为三个产业，并根据我国的统计体制进一步将三个产业按行业划分为：

第一产业：农业S_1

第二产业：轻工业S_2

重工业S_3

能源工业S_4

建筑业S_5

第三产业：交通运输业S_6

商业S_7

服务业S_8

其它行业S_9

产业部门之间存在的相互依存与制约的复杂关系可以近似地用扩大的投入产出表中直接消耗系数表示。这里所说的扩大的投入产出表不仅包括物质生产部门之间投入产出关系，也包括了非物质生产部门的类似关系。

为研究产业结构子系统与其它子系统之间相互影响关系，我们一方面从各产业部门附加价值形成角度入手，另一方面从各产业部门最终产品的分配与使用角度入手。为此，我们把社会最终需求子系统划分为：

个人生存资料需求：D_1

个人享受资料需求：D_2

个人发展资料需求：D_3

社会福利需求：D_4

国家安全需求：D_5

对外贸易子系统划分为出口(X_1)和进口(X_2)两部分。科学技术子系统划分为基础研究(T_1)，应用科学研究(T_2)，技术开发(T_3)。社会经济政策子系统划分为，基本建设投资分配政策(P_1)，利税政策(P_2)，价格政策(P_3)。资源与环境子系统划分为：自然资源(R_1)，非农业人口与劳力(R_2)，农业人口与劳力(R_3)，包括固定资产和流动资金在内的生产能力资源(R_4)，环境与生态状况(R_5)。假定上述各子系统内部是依存的，各子系统之间影响关系如图9.1。

除产业结构子系统内部影响关系的排序用扩大的投入产出表中技术系统矩阵（按列规一化）表示外，其余子系统内部影响排序和子系统之间元素的影响排序用*AHP*单排序方法求出。所得结果见表9.1。为对表9.1所示的未加权超矩阵进行加权，需要构造权矩阵

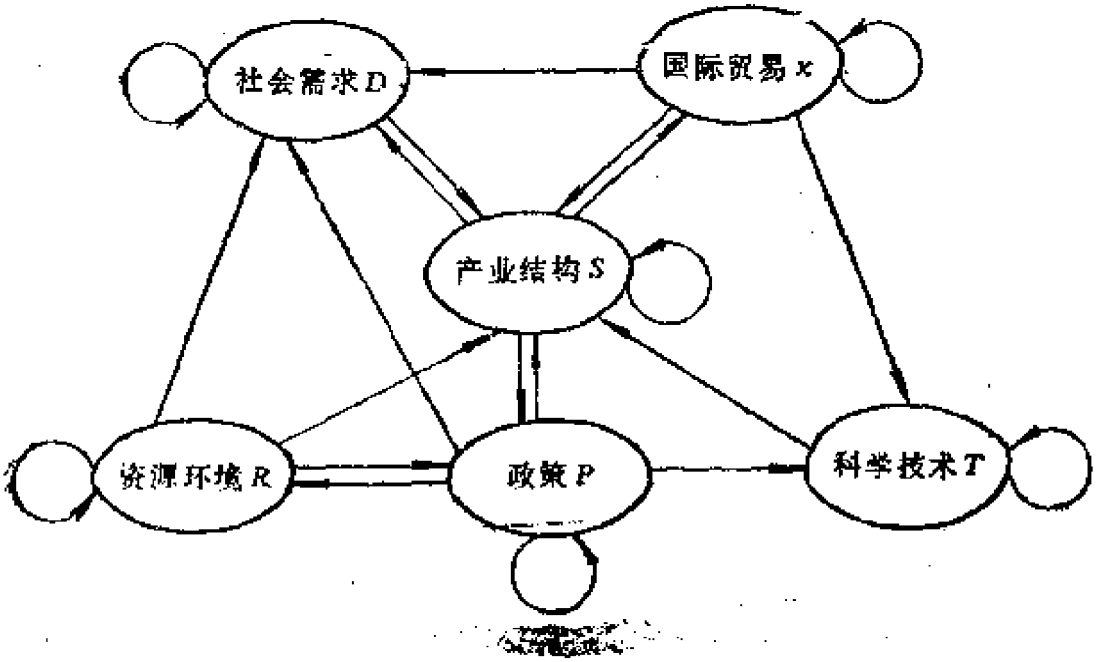


图 9.1 产业结构与影响产业结构诸因素之间关系图。
图中箭尾子系统对箭头子系统有影响作用。

A。根据图9.1所示的关系，这个6×6的权矩阵各列依次为 6×6，5×5，2×2，4×4，3×3，2×2判断矩阵所对应的主特征向量。权矩阵 A 的结果为：

$$A=\begin{pmatrix} 0.34 & 0.26 & 0.2 & 0.19 & 0.14 & 0 \\ 0.16 & 0.46 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.08 & 0.06 & 0.8 & 0.07 & 0 & 0 \\ 0.14 & 0 & 0 & 0.57 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0.16 & 0 & 0.17 & 0.72 & 0.2 \\ 0.21 & 0.06 & 0 & 0 & 0.14 & 0.8 \end{pmatrix}$$

加权超矩阵 $\widetilde{W}$ 见表9.2。由于 $\widetilde{W}$ 为素阵，LIP和LAP均存在，且LIP恰为LAP作为列组成的矩阵，即 $\widetilde{W}^{\infty}$ 的每一列相同。经 127 次迭代计算给出的结果（即 $\widetilde{W}^{127}$）见表9.3。由定理9.1可知，在子系统之间影响关系（包括结构依存关系和功能依存关系）保持不变的情况下（此时 A 不变），尽管 W_{ij} 可能变化，每一个子系统内诸元素的极限绝对排序之和不变。由计算结果可引出下述结论：

（1）未经加权的超矩阵反映了在各个子系统中部门之间相互影响关系。其中左上角部分实质上是扩大的投入产出技术系数矩阵，它描述了一、二、三产业各部门的依存关系。从中我们可以看出，为发展第三产业，特别是第三产业中的第二、三两个层次，能源、交通运输及包括金融、教科文卫、政府、企业管理部门的第三层次本身起着十分重要的作用。这个扩大的投入产出技术系数矩阵还告诉我们，在促进与扩大出口上，产业部门中轻工、重工、能源、农业是最重要的部门。资源对产业结构的影响作用在超矩阵左下方的5×9子块中得到反映，从中可以看出自然资源对于发展农业和能源工业作用十分突出，而由固定资产等反映出的生产能力对于除农业以外的部门都起着占支配地位的作用。

（2）对超矩阵进行加权的矩阵A反映了六个系统之间相互影响关系。其中影响产业结构的因素，除产业结构本身之外，按作用大小排列各因素依次为：资源、需求、技术、进出口和政策。尽管我们十分强调投资对产业结构的影响作用，但事实上，资源和社会需求对产业结构的影响更为重要。矩阵A提供了影响社会需求的因素排序，其中政策对需求的影响很大。对于科技发展来说，产业结构和政策的影响作用表现突出。

（3）利用A对超矩阵加权，得到的加权超矩阵，它向我们提供了更多的信息。特别地，这个超矩阵把限于系统内部因素之间的影响作用置于社会经济科技关联系统中统一进行考虑。加权超矩阵反映了各部门之间的直接影响作用的排序。例如，对于能源工业发展来说，起重要作用的前五个部门依次是：能源工业本身、资源、生产能力、出口和第三产业的第三层次。对于农业来说，则前五个部门分别为：重工业、资源、农业、生存资料需求和应用开发技术。如果给定所有27个部门的初始排序，我们可以利用加权超矩阵计算绝对影响排序。

（4）由于超矩阵满足素性，表9.3给出的极限影响排序（相对排序）具有各列相同的性质，且极限绝对排序恰为矩阵的任意一

表 9.1　　未　加　权　超　矩　阵

	S									n				
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	D1	D2	D3	D4	D5
S_1	.310	.220	.010	.030	.000	.000	.070	.030	.040	.260	.030	.030	.040	.030
S_2	.000	.350	.030	.000	.030	.010	.330	.170	.120	.130	.110	.100	.110	.030
S_3	.330	.160	.570	.070	.720	.130	.030	.020	.010	.030	.000	.000	.010	.230
S_4	.120	.030	.140	.630	.030	.340	.050	.170	.200	.130	.070	.130	.170	.170
S_5	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.130	.190	.160	.170	.100
S_6	.020	.010	.030	.030	.010	.210	.010	.170	.160	.090	.150	.100	.140	.170
S_7	.040	.060	.050	.050	.050	.030	.050	.090	.120	.030	.070	.060	.110	.030
S_8	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.250	.090	.090	.190	.130	.070	.030
S_9	.090	.170	.170	.170	.130	.230	.230	.030	.270	.050	.190	.290	.180	.210
D_1	.600	.180	.070	.100	.140	.080	.280	.080	.090	.350	.080	.050	.060	.070
D_2	.120	.540	.070	.180	.270	.150	.280	.380	.180	.120	.380	.250	.050	.050
D_3	.030	.180	.070	.270	.410	.230	.280	.230	.410	.080	.230	.330	.050	.030
D_4	.090	.060	.190	.180	.140	.150	.140	.230	.290	.120	.230	.260	.550	.100
D_5	.120	.040	.600	.270	.040	.390	.020	.030	.060	.350	.080	.050	.300	.750
X_1	.700	.600	.200	.800	.800	.500	.500	.300	.200	.200	.500	.800	.500	.200
X_2	.300	.500	.800	.200	.100	.500	.500	.700	.800	.800	.500	.200	.500	.800
T_1	.100	.200	.200	.300	.300	.400	.200	.200	.500	.000	.000	.000	.000	.000
T_2	.300	.400	.400	.300	.200	.200	.200	.200	.300	.000	.000	.000	.000	.000
T_3	.600	.400	.400	.400	.500	.400	.600	.600	.200	.000	.000	.000	.000	.000
P_1	.100	.400	.800	.600	.500	.700	.500	.500	.800	.100	.100	.100	.600	.800
P_2	.400	.300	.100	.200	.300	.100	.300	.200	.100	.100	.100	.100	.100	.100
P_3	.500	.300	.100	.200	.200	.200	.200	.300	.100	.800	.800	.800	.400	.100
R_1	.510	.050	.060	.380	.030	.060	.060	.060	.050	.080	.030	.030	.160	.030
R_2	.060	.280	.180	.120	.260	.290	.290	.290	.260	.530	.620	.800	.160	.030
R_3	.260	.050	.020	.040	.160	.060	.180	.030	.050	.290	.290	.110	.050	.800
R_4	.070	.500	.560	.380	.480	.530	.410	.330	.480	.060	.030	.030	.160	.110
R_5	.100	.110	.130	.080	.050	.060	.060	.060	.160	.060	.030	.030	.470	.030

续表

	X		T			P			R				
	X1	X2	T1	T2	T3	P1	P2	P3	R1	R2	R3	R4	R5
S_1	.140	.180	.000	.000	.030	.050	.080	.230	.000	.000	.000	.000	.000
S_2	.270	.200	.000	.050	.050	.200	.200	.070	.000	.000	.000	.000	.000
S_3	.410	.540	.050	.100	.150	.200	.200	.040	.000	.000	.000	.000	.000
S_4	.140	.080	.100	.150	.150	.190	.190	.230	.000	.000	.000	.000	.000
S_5	.000	.000	.100	.100	.150	.050	.080	.070	.000	.000	.000	.000	.000
S_6	.000	.020	.050	.050	.100	.160	.070	.070	.000	.000	.000	.000	.000
S_7	.000	.000	.000	.000	.000	.080	.100	.040	.000	.000	.000	.000	.000
S_8	.040	.000	.000	.000	.000	.020	.030	.220	.000	.000	.000	.000	.000
S_9	.000	.000	.700	.550	.370	.070	.070	.030	.000	.000	.000	.000	.000
D_1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
D_2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
D_3	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
D_4	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
D_5	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
X_1	.600	.600	.600	.400	.200	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
X_2	.400	.400	.400	.600	.800	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
T_1	.000	.000	.800	.200	.100	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
T_2	.000	.000	.100	.600	.300	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
T_3	.000	.000	.100	.200	.600	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
P_1	.000	.000	.900	.800	.700	.900	.100	.200	.800	.600	.200	.900	.900
P_2	.000	.000	.050	.100	.200	.050	.800	.200	.100	.100	.100	.050	.050
P_3	.000	.000	.050	.100	.100	.050	.100	.600	.100	.300	.700	.050	.050
R_1	.000	.000	.000	.000	.000	.180	.050	.360	.530	.080	.150	.070	.060
R_2	.000	.000	.000	.000	.000	.180	.260	.120	.070	.420	.030	.070	.060
R_3	.000	.000	.000	.000	.000	.060	.160	.120	.070	.250	.740	.070	.960
R_4	.000	.000	.000	.000	.000	.540	.480	.360	.260	.170	.030	.720	.180
R_5	.000	.900	.000	.000	.000	.040	.050	.040	.070	.080	.050	.070	.840

表 9.2　　加　权　超　矩　阵

	S									D				
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	D1	D2	D3	D4	D5
S_1	.105	.075	.003	.000	.000	.000	.024	.031	.014	.068	.003	.008	.010	.008
S_2	.031	.119	.010	.000	.010	.003	.180	.058	.041	.034	.029	.026	.029	.038
S_3	.112	.054	.194	.024	.245	.061	.020	.007	.003	.008	.000	.000	.003	.060
S_4	.041	.010	.048	.231	.010	.116	.017	.058	.068	.034	.018	.034	.044	.044
S_6	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.034	.049	.042	.044	.026
S_8	.007	.003	.010	.010	.003	.071	.003	.058	.054	.023	.039	.026	.036	.044
S_7	.014	.020	.017	.017	.017	.010	.017	.031	.041	.033	.018	.016	.029	.008
S_8	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.088	.027	.023	.049	.034	.018	.008
S_9	.031	.058	.058	.058	.054	.078	.078	.010	.092	.013	.049	.075	.047	.055
D_1	.096	.029	.011	.016	.022	.013	.045	.013	.010	.161	.037	.023	.023	.032
D_2	.019	.086	.011	.029	.043	.024	.045	.061	.029	.055	.175	.120	.023	.023
D_3	.013	.029	.011	.043	068	.037	.045	.037	.068	.028	.106	.175	.023	.014
D_4	.013	.010	.030	.029	.022	.024	.022	.037	.046	.055	.106	.120	.253	.046
D_5	.019	.006	.096	.043	.008	.062	.003	.013	.010	.161	.037	.023	.138	.345
X_1	.056	.040	.016	.064	.072	.040	.040	.024	.016	.012	.030	.048	.030	.012
X_2	.024	.040	.064	.016	.008	.040	.040	.056	.064	.048	.030	.012	.030	.048
T_1	.014	.028	.028	.042	.042	.056	.028	.028	.070	.000	.000	.000	.000	.000
T_2	.042	.056	.056	.042	.028	.028	.028	.028	.042	.000	.000	.000	.000	.000
T_3	.084	.056	.056	.056	.070	.056	.084	.084	.028	.000	.000	.000	.000	.000
P_1	.007	.028	.056	.042	.035	.049	.035	.035	.056	.016	.016	.016	.080	.128
P_2	.028	.021	.007	.014	.021	.007	.021	.014	.007	.016	.016	.016	.016	.016
P_3	.035	.021	.007	.014	.014	.014	.014	.021	.007	.128	.128	.128	.064	.016
R_1	.107	.010	.013	.080	.010	.013	.013	.013	.010	.004	.002	.002	.010	.002
R_2	.013	.061	.038	.025	.055	.061	.061	.061	.055	.032	.037	.048	.010	.002
R_3	.055	.010	.004	.008	.034	.013	.038	.013	.010	.017	.017	.007	.003	.048
R_4	.015	.105	.118	.080	.101	.111	.086	.111	.101	.004	.002	.002	.010	.007
R_5	.021	.023	.038	.017	.010	.013	.013	.013	.034	.004	.002	.002	.028	.002

续表

	X		T			P			R				
	X1	X2	T1	T2	T3	P1	P2	P3	R1	R2	R3	R4	R5
S_1	.028	.038	.000	.003	.008	.007	.011	.032	.000	.000	.000	.000	.000
S_2	.054	.040	.000	.010	.010	.028	.028	.010	.000	.000	.000	.000	.000
S_3	.082	.108	.010	.019	.028	.028	.028	.006	.000	.000	.000	.000	.000
S_4	.028	.012	.019	.028	.028	.027	.027	.032	.000	.000	.000	.000	.000
S_5	.000	.000	.019	.019	.028	.007	.008	.010	.000	.000	.000	.000	.000
S_6	.000	.004	.010	.010	.019	.022	.010	.010	.000	.000	.000	.000	.000
S_7	.000	.000	.000	.000	.000	.008	.014	.006	.000	.000	.000	.000	.000
S_8	.000	.000	.000	.000	.000	.003	.004	.031	.000	.000	.000	.000	.000
S_9	.000	.000	.133	.105	.070	.010	.010	.004	.000	.000	.000	.000	.000
D_1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
D_2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
D_3	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
D_4	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
D_5	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
X_1	.480	.320	.042	.028	.014	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
X_2	.320	.480	.028	.042	.056	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
T_1	.000	.000	.456	.114	.057	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
T_2	.000	.000	.057	.342	.171	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
T_3	.000	.000	.057	.114	.342	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
P_1	.000	.000	.153	.136	.119	.648	.072	.144	.180	.120	.040	.180	.180
P_2	.000	.000	.009	.017	.034	.036	.576	.144	.020	.200	.020	.010	.010
P_3	.000	.000	.009	.017	.017	.036	.072	.432	.020	.060	.140	.010	.010
R_1	.000	.000	.000	.000	.000	.025	.007	.050	.424	.064	.120	.056	.048
R_2	.000	.000	.000	.000	.000	.025	.036	.017	.056	.336	.024	.056	.048
R_3	.000	.000	.000	.000	.000	.008	.022	.017	.056	.200	.592	.056	.048
R_4	.000	.000	.000	.000	.000	.076	.067	.050	.202	.136	.024	.576	.144
R_5	.000	.000	.000	.000	.000	.006	.007	.006	.056	.064	.040	.056	.512

表 9.3　　极 限 影 响 排 序 矩 阵

	S									D				
	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	$S5$	$S6$	$S7$	$S8$	$S9$	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$
S_1	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.001	.010	.010
S_2	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018
S_3	.027	.027	.027	.027	.027	.027	.027	.027	.027	.027	.027	.027	.027	.027
S_4	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023
S_5	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005
S_6	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011
S_7	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006
S_8	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005
S_9	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016
D_1	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005
D_2	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007
D_3	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007
D_4	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007
D_5	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011
X_1	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036
X_2	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037
T_1	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
T_2	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
T_3	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014
P_1	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227
P_2	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060
P_3	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060
R_1	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062
R_2	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047
R_3	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075
R_4	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151
R_5	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047

续表

	X		T			P			R				
	X1	X2	T1	T2	T3	P1	P2	P3	R1	R2	R3	R4	R5
S_1	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.010
S_2	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018	.018
S_3	.027	.027	.027	.027	.027	027	.027	.027	.027	.027	.027	.027	.027
S_4	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023	.023
S_5	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005
S_6	.011	.011	.011	.011	.011	.011	011	.011	.011	.011	.011	.011	.011
S_7	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006
S_8	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005
S_9	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016	.016
D_1	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005
D_2	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007
D_3	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007
D_4	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.007
D_5	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011	.011
X_1	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036	.036
X_2	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037	.037
T_1	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
T_2	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
T_3	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014	.014
P_1	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227	.227
P_2	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060
P_3	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060	.060
R_1	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062	.062
R_2	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047
R_3	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075	.075
R_4	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151	.151
R_5	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047	.047

列。这对于分析问题来说是十分方便的。由表6.3可以看出，对社会经济系统的发展起重要影响作用的前五个部门（或因素）依次为投资、生产能力、农业人口和劳力、自然资源和价格（或利税）政策。科学技术部门的综合影响作用的绝对排序列第九位次，而基础科学、应用科学和开发技术的排序分别为第十七、十六、十五位。由于极限影响排序矩阵各列相同的性质，上述分析对每一个部门来说也是适用的。注意到由于极限影响排序是考虑了所有间接影响和直接影响，因此它从本质上反映了部门之间的影响作用。尤其由于极限绝对排序与系统的初始排序无关，这就使我们有理由相信，不管我们目前经济系统的状态如何，如果希望达到一个理想的状态，极限绝对排序是这个理想状态的基准结果。

第十章　层次分析法中的动态排序

动态排序方法是指在AHP模型中考虑时间因素，它的判断矩阵及相应的排序权值是时间的函数。本章第一节介绍Saaty在〔127〕中给出的动态排序及动态判断矩阵的基本形式，讨论当阶数不超过4时判断矩阵特征根问题的解。

第二节提出一种新的动态排序模型，它建立在判断矩阵整体一致性基础上，具有理论完整，建模简单，计算容易，应用广泛等特点，讨论这种模型的特征根计算及一致性问题，并对Saaty在〔217〕中结合介绍动态排序引用的例子重新用新的动态排序模型做了计算。

第一节　层次分析法中的动态排序问题

*AHP*的关键步骤是构造判断矩阵。判断矩阵A一旦确定，通过求解特征根问题

$$Aw=\lambda_{\max}w \tag{10.1}$$

（式中$\lambda_{\max}$表示A的最大特征根，即主特征根），即可将归一化的w（称主特征向量）作为相应因素针对上一层次某因素相对重要性的排序权值。判断矩阵表示人们对相互比较的因素相互之间关系重要性的认识和判断，当人们这种认识和判断随时间变化而改变时，判断矩阵应考虑为时间的函数，即判断矩阵A为

$$A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n} \tag{10.2}$$

称A(t)为动态判断矩阵。当层次结构模型考虑时间因素，从而包含动态判断矩阵时，称此问题为动态排序问题。动态判断矩阵仍然应满足判断矩阵的基本性质，即

（1）正值性　$a_{ij}(t)>0$　　$(i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$

（2）互反性　$a_{ij}(t)=\dfrac{1}{a_{ji}(t)}$

即动态判断矩阵仍为正互反矩阵。尽管一般无法把动态判断矩阵元素的取值（即$a_{ij}(t)$的值）限制在1—9之间的整数及其倒数内，但为使特征根问题有可比性，仍应限制标度范围为$\frac{1}{9}$—9，即

$$\frac{1}{9}\leqslant a_{ij}(t)\leqslant 9 \qquad (i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$$

相应的特征根问题（10.1）化为

$$A(t)w(t)=\lambda_{max}(t)w(t) \tag{10.3}$$

经归一化的$W(t)$为判断矩阵中诸比较因素的排序权值。

*Saaty*在〔127〕中给出了动态判断矩阵元素的9种函数形式，它们是：

（1）常数形式　$a_{ij}(t)=a$，表示判断不随时间变化。

（2）线性形式　$a_{ij}(t)=at+b$，表示判断随时间均匀地变化，此时互反元素$a_{ij}(t)$为双曲函数。

（3）对数形式　$a_{ij}=a\ln(t+1)+b$，表示先快速后慢速地变化。

（4）指数形式　$a_{ij}(t)=a^{bt}+c$，表示先慢速后快速地变化。$b<0$时，互反元素$a_{ji}(t)$为S形对数曲线。

（5）二次曲线形式　$a_{ij}(t)=at^2+bt+c$，表示增加（减少）到极值后再减少（增加）。

（6）振荡形式　$a_{ij}(t)=at^n\sin(t+b)+c$，$n>0$时振幅增加。

（7）突变形式　$a_{ij}(t)$为阶递函数，随时间间断地变化。

对于动态排序问题，当阶数等于3时，（10.3）的解为（略去了$a_{ij}(t)$中的时间变量）

$$\lambda_{max}(t)=\left(\frac{a_{13}}{a_{12}a_{23}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right)^{\frac{1}{3}}+1$$

排序权值$w^T(t)=(w_1(t),\ w_2(t),\ w_3(t))$为

$$w_1(t)=\frac{a_{12}a_{23}+a_{13}(\lambda_{max}-1)}{D}$$

$$w_2(t)=\frac{(\lambda_{max}-1)a_{23}+a_{13}/a_{12}}{D}$$

$$w_3(t)=\frac{-1+(1-\lambda_{max})^2}{D}$$

$$D=a_{12}a_{23}+a_{13}(\lambda-1)+(\lambda-1)a_{23}+a_{13}/a_{12}-1+(1-\lambda)^2$$

当阶数等于4时，特征根问题(10.3)的解$\lambda=\lambda_{max}(t)$满足方程

$$\lambda^4-4\lambda^3+(B-8)\lambda+(B+C-5)=0$$

$$B=\left(\frac{a_{23}a_{34}}{a_{24}}+\frac{a_{24}}{a_{23}a_{34}}\right)+\left(\frac{a_{12}a_{24}}{a_{14}}+\frac{a_{14}}{a_{12}a_{24}}\right)$$

$$+\left(\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}+\frac{a_{13}}{a_{12}a_{23}}\right)+\left(\frac{a_{13}a_{34}}{a_{14}}+\frac{a_{14}}{a_{13}a_{34}}\right)$$

$$C=3-\left(\frac{a_{12}a_{23}a_{34}}{a_{14}}+\frac{a_{14}}{a_{12}a_{23}a_{34}}\right)-\left(\frac{a_{12}a_{24}}{a_{13}a_{34}}\right.$$

$$\left.+\frac{a_{13}a_{34}}{a_{12}a_{24}}\right)-\left(\frac{a_{14}a_{23}}{a_{13}a_{24}}+\frac{a_{13}a_{24}}{a_{14}a_{23}}\right)$$

对应的特征向量为

$$w_1(t)=a_{14}(\lambda-1)^2+(a_{12}a_{24}+a_{13}a_{34})(\lambda-1)$$

$$+\left(a_{12}a_{23}a_{34}+\frac{a_{13}a_{24}}{a_{23}}-a_{14}\right)$$

$$w_2(t)=a_{24}(\lambda-1)^2+\left(a_{23}a_{34}+\frac{a_{14}}{a_{12}}\right)(\lambda-1)$$

$$+\left(\frac{a_{13}a_{34}}{a_{12}}+\frac{a_{14}a_{23}}{a_{13}}-a_{24}\right)$$

$$w_3(t)=a_{34}(\lambda-1)^2+\left(\frac{a_{24}}{a_{23}}+\frac{a_{14}}{a_{13}}\right)(\lambda-1)$$

$$+\left(\frac{a_{14}}{a_{12}a_{23}}+\frac{a_{12}a_{24}}{a_{13}}-a_{24}\right)$$

$$w_4(t)=(\lambda-1)^3-3(\lambda-1)-\left(\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}+\frac{a_{13}}{a_{12}a_{23}}\right)$$

显然，$n=4$时特征根问题的计算十分复杂。可以取若干 t 值，计算在这些时刻的特征根问题，但这种计算结果不便进行特征根与特征向量以及一致性变化趋势的解析分析。$n>4$ 时一般无法给出特征根问题的解析解。

作为动态排序问题的例子，Saaty研究了在一个由父亲（F）、母亲（M）和孩子（C）三人组成的家庭中，家庭成员在家停留时间相对比例随孩子年龄的变化状况，所构造的动态判断矩阵为

$$A(t)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3-\ln\frac{t}{2}} \\ 2 & 1 & 0.4+\ln\frac{t}{2} \\ 3-\ln\frac{t}{2} & \frac{1}{0.4+\ln\frac{t}{2}} & 1 \end{pmatrix} \quad (4\leqslant t\leqslant 16) \tag{10.4}$$

相互比较的元素顺序为父亲、母亲、孩子，在 $t<4$ 时，判断矩阵为

$$A(t<4)=A_1=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2.5} & \frac{1}{2.5} \\ 2.5 & 1 & 1 \\ 2.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

此时

$$\lambda_{\max}^{(1)}=3$$

$$w_1=\begin{pmatrix} w_F \\ w_M \\ w_O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.167 \\ 0.417 \\ 0.417 \end{pmatrix}$$

$$A(t>16)=A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.26 \\ 2 & 1 & 2.5 \\ 0.8 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\max}^{(t)}=3$$

$$w_2=\begin{pmatrix} w_F \\ w_M \\ w_O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.263 \\ 0.526 \\ 0.211 \end{pmatrix}$$

当 $4 \leqslant t \leqslant 16$ 的

$$M=\left[\frac{2}{\left(3-\ln\frac{t}{2}\right)\left(0.4+\ln\frac{t}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\lambda(t)=1+M^{1.3}+M^{-1.3}$$

$$w(t)=\begin{bmatrix} w_F(t) \\ w_M(t) \\ w_O(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A/D \\ \dfrac{(-1)(0.4+\ln\frac{t}{2})+2(3-\ln\frac{t}{2})^{-1}}{D} \\ (-1+(1-\lambda))^2/D \end{bmatrix}$$

$$A=0.5\left(0.4+\ln\frac{t}{2}\right)+(\lambda-1)/\left(3-\ln\frac{t}{2}\right)$$

$$D=(\lambda-0.5)\left(0.4+\ln\frac{t}{2}\right)+(\lambda+1)/\left(3-\ln\frac{t}{2}\right)-1$$

$$+(1-\lambda)^2$$

计算结果可用图（10.1）表示。

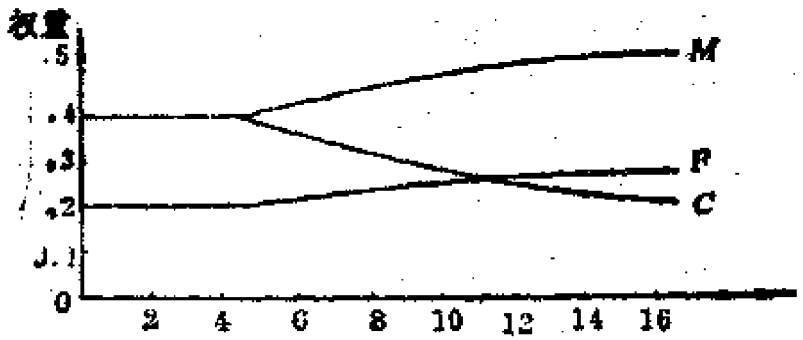


图 10.1

第二节　一种新的动态排序模型

从上面介绍的Saaty的动态排序模型中不难发现它存在的缺陷。首先，对于阶数大于4的动态判断矩阵，无法给出特征根问题的解析解，而阶数等于三或四时，计算量亦大。第二，判断矩阵的变化从整体上看缺乏明确的实际意义。第三，需要对$\frac{n(n-1)}{2}$个动态判断矩阵元素确定其函数表达式，当阶数较大时显然比确定静态判断矩阵要复杂得多，这在实际上往往难于被使用者接受。第四，关于动态判断矩阵一致性的讨论极为困难。针对上述缺陷，我们提出一种新的动态排序模型，它与Saaty模型的区别主要在判断矩阵的构造上。

定理10.1（动态判断矩阵的整体一致性）

对于判断矩阵（10.2），若

$$a_{ij}=\frac{a_{ik}(t)}{a_{jk}(t)},\quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{10.5}$$

在$t_0\leqslant t\leqslant t_1$上成立，称$A(t)$在$[t_0,\ t_1]$上是整体一致性的。

如果把$A=(a_{ij})$视为动态判断矩阵的特例，则A的一致性与整体一致性的概念是相同的。非整体一致性的判断矩阵并不排斥在某些时点上具有一致性。例如，（10.4）式的判断矩阵在$[4,16]$上是非整体一致性及非一致性的，若将（10.4）的时间区间扩大为$[0,20]$，则在$t_1=2.86$，$t_2=18.85$处（10.4）是一致性的。

对于动态判断矩阵的整体一致性问题，有如下定理。

定理10.1 动态判断矩阵（10.2）在$[t_0, t_1]$上是整体一致性的，当且仅当

$$A(t)=M(t)A_0M^{-1}(t), \quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1) \qquad (10.6)$$

式中A_0为一致性正互反矩阵，$M(t)=\mathrm{diag}(m_i(t))$。

证明：

必要性 由A_0为一致性矩阵

$$A_0=\left[\frac{a_i}{a_j}\right]_{n\times n} \qquad (10.7)$$

从而

$$A(t)=M(t)A_0M^{-1}(t)=\left(\frac{a_im_i(t)}{a_jm_j(t)}\right)_{n\times n} \qquad (10.8)$$

其通项

$$a_{ij}(t)=\frac{a_im_i(t)}{a_jm_j(t)}=\frac{a_im_i(t)}{a_km_k(t)}\ \frac{a_km_k(t)}{a_jm_j(t)} \qquad (10.9)$$

即

$$a_{ij}(t)=\frac{a_{ik}(t)}{a_{jk}(t)} \qquad (10.9)$$

故$A(t)$在$[t_0, t_1]$上是整体一致性的。

充分性 若$A(t)$在$[t_0, t_1]$上是整体一致性的，对任意$\overline{t}\in[t_0, t_1]$，$A(\overline{t})$是一致性的，故

$$a_{ij}(\overline{t})=\frac{a_i(\overline{t})}{a_j(\overline{t})} \quad (i, j=1, 2, \cdots, n) \qquad (10.10)$$

令 $m_i=a_i(t)$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$A(t)=M(t)EM^{-1}(t) \quad (t_0\leqslant t\leqslant t_0) \qquad (10.11)$$

上式中$M(t)=\mathrm{diag}(m_i(t))$，$E=ee^T$，$e=(1, 1, \cdots, 1)^T$。证毕。

由定理10.1有如下重要的系。

系：对于整体一致性判断矩阵$A(t)$（$t_0\leqslant t\leqslant t_1$）有

$$A(t)=M(t)A_0M^{-1}(t) \tag{10.12}$$

式中

$$A_0=A(t_0)$$

且 $M(t_0)=I$

定理10.2给出动态判断矩阵的整体一致性与其主特征根之间的关系。

定理10.2 n阶动态判断矩阵$A(t)$在$[t_0, t_1]$上是整体一致性的，当且仅当

$$\lambda_{\max}(t)=n \tag{10.13}$$

在$[t_0, t_1]$上成立。

证明：

必要性 若$A(t)$在$[t_0, t_1]$上是整体一致性的，对任意的$t\in[t_0, t_1]$，$A(t)$是一致性的，故

$$\mathrm{rank}[A(t)]=1 \tag{10.14}$$

这表明$A(t)$的最大特征根等于n，它为单根，其余特征根皆为零，从而（10.13）成立。

充分性 若（10.13）成立，取$w(t)$为$A(t)$的主特征向量，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)w_j(t)w_i^{-1}(t)=n \tag{10.15}$$

考虑到

$$a_{ii}(t)=1,\quad a_{ij}(t)=\frac{1}{a_{ji}(t)} \tag{10.16}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(t)w_jw_i^{-1}(t)=n^2-n \tag{10.17}$$

但

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(t)w_j(t)w_i^{-1}(t)=$$

$$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} [a_{ij}(t)w_j(t)w_i^{-1}(t)+w_i(t)w_j^{-1}(t)a_{ij}^{-1}(t)] \tag{10.18}$$

由于（10.18）中右边求和号内每一项有

$$[a_{ij}(t)w_j(t)w_i^{-1}(t)+w_i(t)w_j^{-1}(t)a_{ij}^{-1}(t)]\geqslant 2 \tag{10.19}$$

当且仅当

$$a_{ij}(t)w_j(t)w_i^{-1}(t)=w_i(t)w_j^{-1}(t)a_{ij}^{-1}(t)$$

时，(10.19)取等号，故(10.17)式成立的充分必要条件为

$$a_{ij}^2(t)=\frac{w_i^2(t)}{w_j^2(t)} \tag{10.20}$$

由于$a_{ij}(t)$，$w_i(t)$，$w_j(t)$的正值性，

$$a_{ij}(t)=\frac{w_i(t)}{w_j(t)} \tag{10.21}$$

从而

$$A(t)=M(t)EM^{-1}(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

这里$M(t)=\mathrm{diag}(m_i(t))$，（10.21）表示$A(t)$在$[t_0, t_1]$上是整体一致性的。

证毕。

基于定理10.1及其系我们提出形如

$$A(t)=M(t)A_0M^{-1}(t) \tag{10.22}$$

的动态判断矩阵，其中A_0一般可以是$A(t_0)$，从而$M(t_0)=I$，也可以是所考虑时间区间上的某一点 t 的值$A(t)$。这种形式的判断矩阵有如下优点：

（1）动态判断矩阵$A(t)$具有明确的实际意义。当A_0为问题中诸因素在时间t_0时相互之间比较的初始判断，则$m_i(t)$表示第 i 个因素对其它因素影响的变化趋势。显然，例如当第 i 个因素从初始状态t_0到终止状态t_1为止影响有增加的趋势，那么它在与其它因素

比较时，这种趋势对所有因素应当是一致的。这就表明了形如（10.22）式的动态判断矩阵，包括它的每一个元素都有明确的实际意义，便于从初始判断矩阵A_0出发，选择$M(t)$元素的函数形式。

（2）$A(t)$容易构造。由于$M(t)=\mathrm{diag}(m_i(t))$，仅需要确定初始判断矩阵$A_0$及$n$个函数组成的$M(t)$。*Saaty*在[1.27]中推荐的7种函数形式仍可用于$M(t)$的确定。

（3）$A(t)$的特征根问题有简单的解析解，计算的复杂性并不因$A(t)$的阶数增加而增加。

（4）便于对$A(t)$讨论一致性问题。不难看出，当A_0为一致性矩阵时，$A(t)=M(t)A_0M^{-1}(t)$为整体一致性矩阵，反之，$A(t_0)$为非整体一致性矩阵，对于任意$t\in[t_0,\ t_1]$，$A(t)$也非一致性矩阵。

关于动态判断矩阵（10.22）的特征根问题有定理10.3。

定理10.3 令w_0为A_0对应于主特征根$\lambda_{\max}$的主特征向量，则$\lambda_{\max}$亦为$A(t)=M(t)A_0M^{-1}(t)$的主特征根，$A(t)$对应于$\lambda_{\max}$的主特征向量为

$$w(t)=M(t)w_0 \tag{10.23}$$

证明：由$\lambda_{\max}$为A_0的主特征根，有

$$|A_0-\lambda_{\max}I|=0 \tag{10.24}$$

故

$$|M(t)A_0M^{-1}(t)-\lambda_{\max}I|=|M(t)||A_0-\lambda_{\max}I||M^{-1}(t)| \tag{10.25}$$

从而$\lambda_{\max}$为$A(t)$的特征根。下面证明$\lambda_{\max}$为$A(t)$的主特征根，若存在$A(t)$异于$\lambda_{\max}$的特征根λ_1，使得$\lambda_1>\lambda_{\max}$，由

$$|M(t)A_0M^{-1}(t)-\lambda_1I|=|A_0-\lambda_1I|=0 \tag{10.26}$$

知，λ_1为A_0的特征根，但$\lambda_1>\lambda_{\max}$与$\lambda_{\max}$是A_0的主特征根这一事实矛盾，从而$\lambda_{\max}$是$A(t)$的主特征根。

令$w(t)=M(t)w_0$，有$w_0=M^{-1}(t)w(t)$故

$$A_0M^{-1}(t)w(t)=\lambda_{\max}M^{-1}(t)w(t) \tag{10.27}$$

或

$$M(t)A_0M^{-1}(t)w(t)=\lambda_{\max}w(t) \tag{10.28}$$

即 $$A(t)w(t)=\lambda_{\max}w(t) \qquad (10.29)$$

从而$w(t)=M(t)w_0$是$A(t)$对应于$\lambda_{\max}$的特征向量。证毕。

定理10.3使得$A(t)$的特征根问题的解具有极为简单的解析形式，显然对问题的分析与讨论模型的灵敏度带来很大方便。

$M(t)$可以称为初始判断矩阵A_0的行影响乘数矩阵，相应地$M^{-1}(t)$为列影响乘数矩阵。$M(t)$的构造应考虑下面两条原则：

（1）$m_i(t)>0$ （$i=1, 2, \cdots, n, t_0\leqslant t\leqslant t_1$），这保证了$A(t)$的正值性。

（2）一般应使

$$\frac{1}{9}\leqslant a_{ij}m_i(t)m_j^{-1}(t)\leqslant 9 \quad (i=1,2,\cdots,n,t_0\leqslant t\leqslant t_1) \qquad (10.30)$$

此时，动态判断矩阵的标度可与静态判断矩阵的标度保持一致性，使主特征向量有可比性。这对AHP的应用显然是重要的。

有关$A(t)$的一致性检验以及AHP的其它基本步骤对动态排序模型仍是适用的。

下面对Saaty动态排序例子应用我们的模型。

令初始判断矩阵$A(4)$和终端判断矩阵$A(16)$分别为：

$$A(4)=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A(16)=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 5/4\\ 2 & 1 & 5/2\\ 5/4 & 2/5 & 1\end{bmatrix}$$

其相应的主特征根与主特征向量为：

$$\lambda_{\max}(4)=\lambda_{\max}(16)=3,\ w(4)=\begin{bmatrix}0.20\\ 0.40\\ 0.40\end{bmatrix},\ w(16)=\begin{bmatrix}0.26\\ 0.53\\ 0.21\end{bmatrix}$$

取$M(t)=\mathrm{diag}(1,1,1.6-0.3\log_2 t)$，则动态判断矩阵$A(t)$（$4\leqslant t\leqslant 16$）为

$$A(t)=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/(2(1.6-0.3\log_2 t)) \\ 2 & 1 & 1/(1.6-0.3\log_2 t) \\ 2(1.6-0.3\log_2 t) & 1.6-0.3\log_2 t & 1 \end{bmatrix}$$

易知 $\lambda(t)=3$

$$w(t)=\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4(1.6-0.3\log_2 t) \end{bmatrix}$$

正规化的排序权值为

$$\overline{w}(t)=\begin{bmatrix} 0.2/(0.6+0.4(1.6-0.3\log_2 t)) \\ 0.4/(0.6+0.4(1.6-0.3\log_2 t)) \\ \dfrac{0.4(1.6-0.3\log_2 t)}{0.6+0.4(1.6-0.3\log_2 t)} \end{bmatrix}$$

相应的家庭成员在家时间比例变化图如图10.2示。

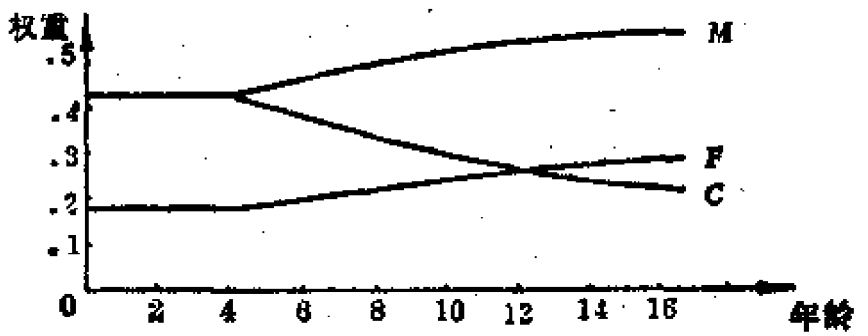


图 10.2

参 考 文 献

1. *Aczel, J. and T.L.Saaty*, 1983, *"Procedures for synthesizing ratio judgments"*, Journal of Mathematical Psychology, *Vol.27, No.1, March*, 1983, *pp.*93－102.
2. *Alexander, J. and T.L.Saaty*, 1977*a*, *"The forward and backward processes of conflict analysis"*, Behavioral Science, *Vol.22, No.2*, 1977, *pp.*87－98.
3. ——*and*——, 1977*b*, *"Stability analysis of the forward-backward process"*, Behavioral Science, *Vol.22, No. 6, pp.* 375－382.
4. *Amin, H.A.*, 1984, Evaluating the Appropriateness of Microcomputers for Litigation Document Management Using the Analytic Hierarchy Process, *D.B.A., The George Washington University*, 229 *pages*
5. *Anderson, D.R., D.J.Sweeney and T.A.Williams*, *"Decision analysis with multiple criteria"*, *chapter* 5, *in* Quantitative Methods for Business, *pp.* 145－165, *West Publishing Company*.
6. *Arbel, A*, 1983, *"A university budget problem:a priority-based approach"*, Socio－Econ. Plan Sci., *Vol.* 17, *No.* 4, *pp.*181－189.
7. *Arbel, A., J.R.Payne and R. M. Tong*, 1981, Decision Aids Derived from HARPOON/TOMAHAWK Targeting Considerations, *Technical report, AD－A108 082/7, Advanced Informating and Decision Systems, Mountain View, CA*
8. *Arbel, A. and A. Seidmann*, 1984*a*, *"Selecting a microcomputer for process control and data acquisition"*, IIE Transactions, *Vol.*16, *No.*1, *pp.*73－80.

9. —— *and* ——, 1984*b*, *"Performance evaluation of flexible manufacturing systems"* , IEEE Transaction on Systems , Man and Cybernetics, *Vol.* SMC－14, *No.* 4 , *pp.*606－617.

10. —— *and* ——, 1985, *" Designing a multimicro distributed accounting information system"* , Humans Systems Management, *Vol.* 5 , *No.*4, *pp.*283－291.

11. *Arbel, A. and Y. Shypira,* 1986, *"A decision framework for evaluating vacuum pumping technology"* , J. Vac. Sci. Technol. A 4(2), *pp.*230－236.

12. *Arrington, C.E., W. Hillison and R. Jensen* , 1984 , *" A application of analytical hierarchy process to model expert judgments on analytical review procedures"* , Journal of Accounting Research, *Vol.*22, *No.*1, *pp.*298－312.

13. *Arrington, C.E. , R. E. Jensen and M. Tokutani* , 1982 , *"Scaling of corporate multivariate performance criteria subjective composition versus the Analytic Hierarchy Process"* , Journal of Accounting and Public Policy, *Vol.* 1, *No.*2 , *pp.* 95-123.

14. *Austing, J.S., R.N.Braswell, J.W.Ostrominski and R. Charles,* 1983, Productivity Measurement: An Analytic Approach, *Final technical report, AD－A*134 292/2, 33*p.*

15. *Barbean, E.* , 1986 , *" Perron's result and a decision on admissions tests"* ,Mathematics Magazine, *Vol.*59, *No.* 1, *Feb.* 1986, *pp.*12－22.

16. *Barnthouse, L.W., D.L.DeAngelis, R.H.Gardner, R.V.O' Neill and C.D.Powers,* 1982 , Methodology for Environmental *Risk Analysis, ESD Publication No.* 2023, *DE*83000419,*Oak Ridge National Lab, TN,* 69*p.*

17. *Bartoszynski, R.and M.L.Puri,* 1981, *"A note on predicting the results of chess championship matches"* , Behavioral Science, *Vol.*26, *No.*1, *pp.*85－87.

18. *Batty, S.E.*, 1982, *"Book Review, The Analytic Hierarchy Process"*, Environment and Planning A, *Vol.14, No.7, pp.* 986－987.

19. *Belton, V. and T. Gear*, 1983, *"On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies"*, Omega, *Vol.* 11, *No.3, pp.*228－230.

20. —— *and* ——, 1985, *"A series of experiments into the use of pairwise comparison techniques to evaluate criteria weights"*, *in* Decision Making with Multiple Objective, *pp.* 375－387, *Edited by Y.Y.Haimes and V. Chankong, Springer-Verlag.*

21. *Belton, V, and A.E.Gear*, 1986, *Assessing weights by means of pairwise, VII-th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, August* 18－23, 1986, *Kyoto, Japan.*

22. *Bennett, J.P. and T.L.Saaty*, 1977, *"Terrorism: patterns of negotiations, three case studies through hierarchies and holarchies"*, *unpublished manuscript prepared for the Arms Control and Disarmament Agency.*

23. *Borthick, A.F.*, 1982, Selection of Computers for Small Accounting Systems: An Interactive Multi-Criteria Approach", *D.B., A.*, The University of Tennessee, 166p.

24. *Buckley, J.J.*, 1984a, *"The multiple judge, multiple criteria ranking problem: a fuzzy set approach I"*, Fuzzy Sets and Systems, *Vol.* 13, *No.1, pp.*25－37.

25. ——, 1984b, *"The multiple judge, multiple criteria ranking problem: a fuzzy set approach II"*, Fuzzy Sets and Systems, *Vol,* 13, *No.2, pp.*107－124.

26. *Canada, J.R., E.H.Frazelle, R.K.Koser and E.MacCormac*, 1985, *"How to make a career choice: The use of the Analytic Hierarchy Process"*, Industrial Management, *Vol.* 27, *No.* 5, *pp.*16－22.

27. *Castellano-Bohorwuez, A.A.*, 1984, Application of Analytical Process to Institutional Research Findings (Prioritization/Faculty Workloads), *Ph. D. Dissertation, The Florida State University*, 291p.

28. *Chu, A.T.W., R.E.Kalaba and K. Spingarn*, 1979, *"A comparison of two methods for determining the weights belonging to fuzzy sets,"* Journal of Optimization Theory and Applications, *Vol.27, No.4, pp.531-538.*

29. *Cogger, K.O. and P.L.Yu*, 1983, *"Eigen weight vectors and least distance approximation for revealed 'preference in pairwise weight rations" School of Business, University of Kansas, Lawrence, Kansas.*

30. *Cook, T., P. Falchi and R.Mariano*, 1984, *"An urban allocation model combining time series and analytic hierarchy methods"*, Management Science, *Vol.30, pp.198-208.*

31. *Crawfors, D.*, 1984, *"Software support for the intuitive thinker"*, Wall Street Computer Review, *Vol.2, No.1, pp.* 53-58.

32. *Crawforp, G. and C. Williams*, 1985, *"Analysis of subjective judgment matrices"*, Journal of Mathematical Psychology, forthcoming.

33. *De Graan, J.G.*, 1930, *"Extensions of the multiple criteria analysis method of T.L.Saaty"*, *Technical report m. f.a., 80-3, National Institute for Water Supply, Leidschendam, the Netherlands, Presented at EURO IV, Cambridge, July 22-25*

34. *De Jong, P.*, 1984, *"A statistical approach to Saaty's scaling method for priorities"*, Journal of Mathematical Psychology, *Vol.28, No.4, pp.467-478.*

35. *Deland, D., M.R.Holliway and M.Ohlrich*, 1982, *"Evaluation plant locations by Analytic Hierarchy Process"*, Proceedings of 14th Annual Meeting of the American Institute for

Decision Scientes, *Vol.2, pp.* 372－374.

36. *Dennis, S.Y.*, 1984, A Probabilistic Approach to Priority Assignment in Hierarchically Structured Decision Problems, *Ph.D Dissertation, The University of Florid*, 123p.

37. ——, 1985, *"A probabilistic model for analyzing hierarchically structured multi－criterion decision problems"*, *paper presented in the Joint National Meeting ORST/TIMS, Boston, April 29－May 1*

38. *Decision Support Software Inc.*, 1983, Expert Choice, User Manual, *McLean, Virginia.*

39. *Dougherty, J.J. and T.L.Saaty*, 1977, *"Optimum determination of hospital requirements"*, *Chapter 9 in* The Logic of Priorities, *Saaty and Vargas, Kluwer－Nijhoff, Boston*, *pp.*165－181.

40. *Driscoll, D.A., W.T.Lin and P.R.Watkins*, 1984, *"Cost-volume-Profit analysis under uncertainty: a synthesis and framework for evaluation"*, Journal of Accounting Literature, *Vol.* 3, *pp.*85-115.

41. *Dyer, J.S. and H.V.Ravinder*, 1986, *"A rationable for the decomposition of a hierarchy of objectives"*, *VII th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, August* 18－22, 1986, *Kyoto, Japan.*

42. *Dyer, J.S. and R.E.Wendell*, 1985, *"A critique of the analytic hierarchy process"*, *Working paper* 84/85－4－24, *Department of Management, University of Taxas at Austin.*

43. *Elsayed, E.A. and T.C.Hsiang*, 1985, *"The analytic hierarchy process in the supplier and product quality rating programs"*, *paper presented at the Joint National Meeting of ORSA/TIMS in Boston, April 30－May 1.*

44. *Emshoff, J.R. and T.L. Saaty*, 1982, *"Applications of the analytic hierarchy process to long range planning processes"*, European Journal of Operational Research, *Vol.* 10, *No.2 pp.*

131－143.

45. *Epstein, B.J. and W.R. King*, 1982, *"An experimental study of the value of information"*, Omega, *Vol.* 10, *No.*3, *pp.*249－258.

46. *Fichtner, J.*, 1983, *"Some thoughts about the mathematics of the analytic hierarchy process"*, *Hochschule der Bundeswehr Munchen, September.*

47. *Forman, E.H.*, 1985, *"Decision support for executive decision makers"*, The Executive's Journal, *Vol.*1, *No.*4, *pp* 414.

48. *Fraxelle, E*, 1985, *"Suggested techniques enable multi-criteria evaluation of material handling alternatives"*, Industrial Engineering, *Vol.* 17, *No.* 2, *pp.*42－48.

49. *Genick, D.H., and J.A. Svestka* 1979, *"An exact hierarchical algorithm for determining aggregate statistics from individual choice data"*, Management Science, *Vol.*25, *No.* 10, *pp.* 939－952.

50. *Gass, S.I.*, 1986, *"The Analytic Hiurarchy Process"*, *Chap.* 24 *in* Decision Making, Models and Algorithms, *John Wiley & Sons.*

51. *Gerrish, W.*, 1982, *"Pain in creative writing: quick relief using the analytic hierarchy process*, 10 *th IMACS World Congress on System Simulation and Scientific Computation, Volume 3: Modeling and Simulation in Engineering: Modeling and Simulation General, publishing by International Association for Mathematics and Computers in Simulation, Brussels, Belgium, pp.*311－313.

52. *Gholamnezhad, A.H.*, 1981, *"Critical choices for OPEC members and the United States"*, Journal of Conflict Resolution, *Vol.*25, *No.*1, *pp.*115－143.

53. ——, 1982, *"Energy policy formulation: an anlaytic hierarchy approach"*, 10 *th IMACS World Congress on System*

Simulation and Scientific Computatiou , Vol. 3 , pp. 317－319.

54. ——, 1983, *"A new model in the energy polica planning"* , Mathematics and Computers in Simulation, *Vol. 25, pp.* 125－134.

55. ——, 1985, *"The analytic hierarchy process as a tool for modeling and simulation"* ,Modeling and Simulation on Microcomputers, 1985, *pp.* 19－21, 24－25 *Jan.*, 1985, *San Diego, CA, USA.*

56. —— *and T.L.Saaty*, 1982, *"Desired energy mix for the United States in the year* 2000: *an analytic hierarchy approach"* , International Journal of policy Analysis and Information Systems, Vol.6, No.1, pp.47－64.

57. —— *and S.R.Xia*, 1984 , *"Formulating energy strategies and policies for China, a systematic approach"* , Environment and Planning B: Planning and Design, *Vol.* 11, *pp.* 213－228.

58. *Gray, P.*, 1984, *Book review:* The Analytic Hierarchy Process, *and* Decision Making for Leaders, Interfaces, *Vol.* 14, *No.3 , pp.*87－99.

59. *Growney, JoAnne S., Personal Decision/Medical Decision, Consider the Analytic Hierarchy Process, Department of Mathematics and Computer Science, Bloomsburg University.*

60. *Hack, L.M.*, 1982, Health Care Practitioners' Perceptions of Credentialing: the Purposes of Accreditation , and Licensure , 282*p.*, *Ph.D. Dissertation, University of Pennsylvania.*

61. *Harker, P.T.*, 1984, *"Analytic hierarchy approach for the determination of human migration"* , *Association of American Geographers Annual Meeting "Geography and Public Policy"* 8420080 *Washington, DC, USA,* 22-25 *Apr.*, 1984.

62. ——, 1985, *"Incomplete pairwise comparisons in the Analytic Hierarchy Process"* , *Report* 85－03－01 , *Department of Decision Sciences, The Wharton School , University of*

Pennsylvania.

63. ——, 1986, *"The use of expert judgments in predicting interregional migration patterns, an analytic hierarchy approach"*, Geographical Analysis, *Vol.* 18, *No.* 1, *pp.* 62－80.

64. ——*and L.G.Vargas*, 1985, *"Theory of ratio scale estimation Saaty's analytic hierarchy process"*, *Working paper* 84－12－01, *Department of Decision Science, The Wharton School, University of pennsylvania, philadelphia*.

65. *Harper, R.M. JR.*, 1984, Internal Control in Local Area Networks: Consensus of Auditors' Judgment, 228p.*D.B.A. Dissertation, The Florida State University*.

66. *Hihn, J.M.*, 1980, A Hierarchical Approach to Decision Making: Economic Theory and Methodology, *unpublished dissertation, University of Maryland, College park*.

67. *Hoffman, D.B.*, 1984, *"Using an electronic spreadsheet to support the analytic hierarchy process"*, Proceedings of the 16th Annual Meeting of the American Institute for Decision Sciences, *pp.* 653－655, 5－7 *Nov.*, 1984, *Toronto, Canada*.

68. *Hong, S. and R.Nigam*, 1981 *"Analytic hierarchy Process applied to evaluation of financial modeling software"*, *DSS－81 Transactions, 1－st International Conference on Decision Support Systems, June* 8－10, *Publishing by Execucom Syst. Corp. Austin, Tex. USA, pp.* 96－101.

69. *Hwang, C.L., and K.Yoon*, 1981, Multiple Attribute Decision Making Methods and Applications, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer－Verlag, New York*.

70. *Inoue, K., T.Moriyasu and U.Masase*, 1986, *"Evaluation of cardinal utility based on weighted pair comparisons"*, *VII the International Conference on Multiple Criteria Decision Making, August* 18－22, 1986, *Kyoto, Japan*.

71. *Jensen, R.E.*, 1981, *"Scenario probability Scaling, an eigenvector analysis of elicited scenario odd ratios"*, Futures,

V.13, pp.489－498.

72. ——, 1982, *"Reporting management forecasts: an eigenvector model for elicitation and review of forecasts"*, Decision Sciences, *Vol*. 13, *No*.1, *pp*.15－37.

73. *Jensen, R.E.*, 1983, *"Aggregation (composition) schema for eigenvector scaling of priorities in hierarchical structures"*, Multivariate Behavioral Research, *Vol*. 18, *No*. 1, *pp*. 63－84.

74. ——, 1984, *"An alternative scaling method for priorities in hierarchical structures"*, Journal of Mathematical Psychology, *Vol*.28, *No*.3, *pp*. 317－332.

75. Johnson, C.R., 1980, *"Constructive critique of a hierarchical prioritization scheme employing paired comparisons"*, Proceedings of the International Conference of Cybernetics and Society of the IEEE, *Institute of Electrical Engineers*, Cambridge, Mass., pp. 373－378.

76. *Johnson, C.R., W.B.Beine and T.J.Wang*, 1979, *"A note on right－left asymmetry in an eigenvector ranking procedure"*, Journal of Mathematical Psychology, *Vol*.19, *No*.1, *pp*. 61－64.

77. ——*and J.M.Hihn*, 1980, *"Prioritization of research projects"*, *in* Energy Storage: The Transactions of the First International Assembly on Energy Storage, *J.Silverman(Ed.)*, *Pergamon Press*, *New York*, *pp*. 562－566.

78. *Kamenetzky, R.D.*, 1982, *"The relationship between the analytic hierarchy process and the additive value function"*, Decision Sciences, *Vol*. 13, *No*.4, *pp*. 702－713.

79. *Karayalcin, I.I.*, 1982, *"The analytic hierarchy process—planning, priority setting, resource allocation"*, European Journal of Operational Research, *Vol*.9, *No*. 1, pp.97－98.

80. *Koger, R.K.*, 1984, Decision Analysis Applied to Electric Utility Rate Design, *Ph. D. Dissertation*, *North Carolina State*

University, 217p.

81. *Lewis, M.T.*, 1985, Ex Ante Evaluation of Audit Evidence, *Ph.D. Dissertation, University of Maryland.*

82. *Lin, W.T., T.J.Mock and A. Wright*, 1984*a*, *"The use of the analytic hierarchy process as an aid in planning the nature and extent of audit procedures"*, Auditing--A Journal of Practice and Theory, *Vol.4, No.1, pp.89-99.*

83. ——, —— *and* ——, 1984*b*, *"Evaluation of audit evidence, a multiple criteria decision approach"*, Proceeding and Abstracts - American Institute for Decision Sciences, Thirteenth Annual Meeting, *pp.315-317.*

84. *Liu Bao and Xu Shubo*, 1986, *"The applications of AHP in China and its development"*, *(to appear), Tianjin University, Tianjin, China.*

85. *Liu Bao, Han W. and Lu M.*, 1986, *"Investesation on the optimization problem for the Chinese higher education planning"*, *presented at 4th IFAC/IFORS Symposuim on Large Scale Systems, Theory and Application, Zurich, Switzerland.*

86. *Lockett, A.G. and G.Islei*, 1986, *"An approach to preference vector derivation using least squares distance"*, *VII th International Confence on Multiple Criteria Decision Making, August 1822, Kyoto, Japan.*

87. *Lootsma, F.A.*, 1980, *"Saaty's priority theory and the nomination of a senior professor in operations research"*, European Journal of Operational Research, *Vol.4, No.6, pp.380-388.*

88. ——, 1981, *"Performance evaluation of non-linear optimization methods via multi-criteria decision analysis and via linear model analysis"*, *M.J.D.Powell, Ed.*, Nonlinear Optimization, *Academic Press, London, 1981, pp.419-453.*

89. *Lusk, E.J.*, 1979, *"Analysis of hospital capital decision*

alternatives a priority assignment model" , Journal of the Operational Research Society, *Vol.30, No.5, pp.439-448.*

90. *Lutz, B., 1982, "Game-theoretical approach to solving problems encountered in energy policy" , Stuttgart Univ. Germany, F.R., Inst. fuer Kernenergetik und Energiesysteme, Jan., 82, 61p.*

91. *McMeekin, G.C., 1979, "The pairwise comparison approach to the estimation of a ratio scale, a stochastic interpretation on the best priority weights ratio scale estimator" , presented at the Atlantic Economic Society Meeting in Washington, D. C., Oct.11, 1979.*

92. *Merrill, D.R.*, 1983, Naval Aviation IMA Repair Capability: A Readiness to Resources Approach , *Master's thesis , Naval Postgraduste School, Monterey, DA, Dec.*, 1983, 103p.

93. *Miller, F.L.Jr.*, 1983, *"Analytic Hierarchy Processes in a legal setting,"* 1983 Proceedings of the International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Vol.1: Bombay, 1983 *Dec.* 29-1984 *Jan.7.*

94. *Mitchell, K.H. and M.P.Soye, 1983, "Measuring the intangibles in social decisions, assessing benefits and costs of energy policy options"* , Mathematics and Computer Simulation, *Vol.25, No.2, pp.135-145.*

95. *Mitroff, L.I., J.E.Emshoff and R.H.Kilman, 1979, "Assumptional [analysis: a methodology for strategic problem solving"* , Management Science, *Vol.25, No.6, pp.583-593.*

96. *Myers, K.C.*, 1983 , Vulnerability of the U. S. to Non-fuel Mineral Supply Problems (United States), *Ph.D. Dissertation, University of Pennsylvania, 279p.*

97. *Neves, J.M.D.S.*, 1984, Monitoring Consistency in Group Decision Making: An Empirical [Study of the Analyti: Hierarchy Process(Eigenvector, Prioritization, Model), *Ph.D, Dissertation, University of Pennsylvania, 233p.*

98. *Nishikawa, Y., J. Nomura, K. Sawada and R. Nakajima,* 1986, *"Development of a decision support system for hierarchical multiobjective inventory/production planning and management"*, *VII th International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, *August* 18 – 22, 1986, *Kyoto, Japan.*

99. *Odynocki, B.*, 1979, Planning The National Health Insurance Policy, An Application of the Analytic Hierarchy Process in Health Policy Evaluation and Planning, *Ph.D. Dissertation, University of Pennsylvania,* 198p.

100. ——, 1982, *"Planning national health policy: the analytic hierarchy process in public policy design"*, *19th IMACS World Congress on System Simulation and Scientific Computation, Vol. 8, pp.* 320 – 322, *publ. by Int. Assoc. for Mathematics and Computers in Simulation, Brussels, Belg.* 1982.

101. *Patton, J.M. J.H.Evans III and B.L.Lewis*, *"Evaluating risk"*, *Chap.* 3, *in A Framework for Evaluating Internal Audit Risk, The Institute of Internal Auditors, Inc.*

102. *Rabinowitz, G.*, 1976, *"Some aspects on measuring world influence"*, Journal of Peace Science, *Vol.* 2, *No.* 1, *pp.*49 – 55.

103. *Rahman, S.*, 1983, *"Market Penetration of renewable energy technologies, planning and policy issues"*, *International Symposium —— Workshop on Renewable Energy Sources, pp.* 31 – 45.

104. ——*and L.C.Frair*, 1984, *"A hierarchical approach to electric utility planning"*, International Journal of Energy Resource, *Vol.* 8, *No.*2, *pp.*185 – 196.

105. *Ramanujam, V., and T.L.Saaty*, 1981, *"Technological choice in the less developed countries, an analytic hierarchy approach"*, Technological Forecasting and Social Change, Vol.

19, No.1, pp.81-97.

106. *Rappaport, J. and J. Neves, "Decision Making with feedback, an interactive approach", LaSalle College.*

107. *Reed, S.E.*, 1985, Aggregating Individual Preferences in the Analytic Hierarchy Process Applied to the 1983 Battelle TAV Study, *Master's thesis, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson AFB, OH, School of Engineering*, 293p, *AD-A156 858/4/XAB*.

108. *Rensema, P.H. and R.W. Chapman*, 1984, Decision Support Methodology for Space Technology Advocacy, *Master's thesis, Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson AFB, OH School of Engineering*, 393p, *AD-A151 895/0/XAB*.

109. *Rosas, A.C.*, 1984, Some Applications of Fuzzy Sets and the Analytical Hierarchy Process to Decision Making, *Master's thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, CA*, 74p., *AD-A150/1/XAB*.

110. *Saaty, T.L.*, 1972, *"An eigenvalue allocation model for prioritization and planning"*, *Energy Management and policy Center, University Pennsylvania*.

111. *Saaty, T.L.*, 1974, *"Measuring the fuzziness of set"*, Journal of Cybernetics, *Vol.4, No.4, pp.53-61*.

112. ——, 1975, *"Hierarchies and priorities —— eigenvalue analysis", University of pennsylvania*.

113. ——, 1976*a*, *"Hierarchies, reciprocal matrices, and ratio scales"*, Modules in Applied Mathematics, *Cornell University, The Mathematical Association of America*.

114. ——, 1976*b*, *"Interaction and impacts in hierarchical systems"*, Proceedings of the Workshop on Decision Information for Tactical Command and Control, *published by Robert M.T. and Associates, Rice University, Houston, pp.54-102*.

115. ——, 1977*a*, *"Modeling unstructured decision problems: a theory of analytical hierarchies"*, Proceedings of the First

International Conference on Mathematical Modeling, *University of Missoure Rolla*, Vol. 1, pp.59－77.

116. ——, 1977*b*, *"Terrorism, patterns for negotiations, three case studies through hierarchies and holarchies" Study for the Arms Control and Disarmanment Agency*, See also Facing Tomorrow's Terroirist Incident Today, *U.S. Department of Justice, LEAA, Washington, D.C.* 20513, pp.28－31.

117. ——, 1977*c*, *"The Sudan transport study"*, Interfaces, Vol. 8, No.1.

118. ——, 1977*d*, *"Theory of measurement of impacts and interactions in systems"*, Proceeding of the International Conference on Applied General Systems Research: Recent Developments and Trends, *Binghamton, New York*, 1977.

119. ——, 1977*e*, *"Notes on a Scaling method for priorities in hierarchical structures"*, Journal of Mathematical Psychology, *Vol.*15, *No.*3, *pp.*234－281.

120. ——, 1977*f*, *"Scenarios and priorities in transport planning, application to the Sudan"*, Transportation Research, *Vol.* 11, *No.*5.

121. ——, 1978*a*, *"Exploring the interface between hierarchies, multiple objectives and fuzzy sets"*, Fuzzy Sets and Systems, *Vol.*1, *pp.*57－68.

122. ——, 1978*b*, *"Modeling unstructured decision problems, theory of analytical hierarchies"*, Mathematics and Computers in Simulation, *Vol.*20, *No.*3, *pp.*147－157.

123. ——, 1979*a*, *"Erratum, 'A scaling method for priorities in hierarchical structures' J. Math. Psych.*15(1977), *No.* 3, 234－281", Journal of Mathematical Psychology, *Vol.* 19, *No.* 1, *pp.*72.

124. ——, 1979*b*, *"Applications of analytical hierarchies"*, Mathematics and Computers in Simulation, *Vol.* 21, *pp.* 1－20.

125. Saaty, T.L., 1979c, "*Mathematical modeling of dynamic decisions, priorities and hierarchies with time dependence*", Mathematics and Computers in Simulation, *Vol.* 21, *pp.* 352-358.

126. ——, 1979d, "*The U.S. —— OPEC energy conflict, the payoff matrix by the analytic hierarchy process*", International Journal of Game Theory, 1979.

127. ——, 1980, The Analytic Hierarchy Process, *McGraw-Hill Company*, 287p.

128. ——, 1981a, "*Priorities in systems with feedback*", International Journal of Systems, Measurement and Decisions, *Vol.* 1, *No.*1.

129. ——, 1981b, "*The analytic hierarchy process, scenarios, priorities and cost/benefits for the Sudan transport plan*", Operational Research'81, *J.P.Brans* (editor), *North-Holland Publishing Company pp.* 161-175.

130. ——, 1981c, "*The analytic hierarchy process and health care problem*", Proceedings of the International Conferece on Systems Science in Health Care, *Montreal* 1981.

131. ——, 1982a, "*Theory of Measurement of Impacts and Interactions in Systems*", *in* Systems Methodology in Social Science Research, *Kluwer-Nijhoff Publishing*.

132. ——, 1982b, Decision Making for Leaders, *Wadsworth, Inc., Belmont, California*, 291p.

133. ——, 1982c, "*Theory of measurement of impacts and interactions in systems*", *in* Systems Methodology in Social Science Research, *Kluwer-Nijhoff Publishing*.

134. ——, 1982d, "*Proposal for a center to resolve international conflicts*", Managing, *No.*3, *pp.*33-34.

135. ——, 1982e, "*Modeling of decision processes*", Proceedings of the 10th IMACS World Congress on System Simulation and Scientific Computation, *University of Montreal*, *Vol.* 8, *pp.*

306 - 307.

136. ——, 1982f, *"The analytic hierarchy process, a new approach to deal with fuzziness in architecture"* Architectural Science Review, *Vol.25, No. 8, pp.64 - 69.*

137. ——, 1982g, *"How to structure and make choices in complex problems"*, Human Systems Management, *Vol. 3, No. 4, pp. 255 - 260.*

138. ——, 1983a, *"Knowledge utilization, estimating gaps by the analytic hierarchy process"*, *in* Producing Useful Knowledge for Organizations, *edited by R.Kilmann, K.Thomas, D.Slevin, R.Nath and S.L.Jerrell, Praeger.*

139. ——, 1983b, *"Multicriterion decisions in systems with feedback"*, Mathematical Modelling in Science and Technology Proceedings of the Fourth ICMM, *August 15 - 17, Zurich, Switzerland.*

140. ——, 1983c, *"Priority setting in complex"*, IEEE Trans. on Eng. Management, *Vol. EM - 30, No 3, pp.140 - 155.*

141. ——, 1983d, *"International center for conflict resolution, a proposal"*, Man, Environment, Space and Time, *Vol.3, No. 2.*

142. ——, 1983e, *"Conflict resolution and the Falkland Islands Invasions"* Interfaces, *Vol.13, No.6, pp.68 - 83.*

143. ——, 1984a, *"Center for conflict resolution"*, Bulleten of the Atomic Scientists, *Vol.40, No.3.*

144. ——, 1984b, *"The legitimacy of rank reversal"*, OMEGA *International Journal of Management Science, Vol. 12, No. 5, pp. 513 - 516,*

145. ——, 1984c, *"The Analytic Hierarchy Process, decision making in complex environments"*, *in* Quantitative Assessments in Arms Control, *ed, R.Avenhaus, Plenum press.*

146. ——, 1984d, *"Impacts of disarmament nuclear package reduction"*, *in* Quantitative Assessments in Arms Control.

147. ——, 1985a, *"Fuzzy sets, analytic hierarchies and decisions"*, in Encyclopedia of Building Technology, ed. by H.Cowen, Sydney, Prentice Hall.

148. ——, 1985b, *"What do rank preservation and reversal mean in the analytic hierarchy process?"* working paper, University of Pittsburgh

149. ——, 1985c, *"Structural dependence and rank preservation in the analytic hierarchy process"*, working paper, University of Pittsburgh.

150. ——, 1985a, *"Axiomatic Foundation of the analytic hierarchy process"*, forthcoming in Management Science.

151. ——, 1986b, *"Decision making, New information, ranking and structure"*, (to appear).

152. ——, 1986c, *"The role of microcomputers in analysis and creativity"*, Impacts of Microcomputers on Operations Research, Gass, Greenberg, Hoffman, and Langley, editors, pp. 1－25, Elsevier Science Publishing Co., Inc.

153. ——, 1986d, *"Absolute and relative measurement with the AHP the most livable cities in the United States"*, Working Paper, University of Pittdurgh.

154. ——, 1986, *"The general case of dependence in hierarchic decision theory"*, VII th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, August 18－22, 1986, Kyoto, Japan.

155. —— and J.Alexander, 1981, *"Hierarchies and Priorities"*, in Thinking with Model, Pergamon, 1981.

156. —— and M.Beltran, 1980, *"Architectural Design by the analytic hierarchy process"*, Design Methods and Theories Journal of DMG, Vol.14, Nos.3/4, pp.124－134.

157. —— and J.P.Bennett, 1977, *"A theory of analytical hierarchies applied to political candidacy"*, Behavioral Science, Vol. 22, pp. 237－245.

158. —— *and Anand Desai*, 1979, *"Decision making in fleet management"*, MAFA Bulletin, *April*, 1979.

159. *Saaty, T.L. and E.Erdener*, 1979, *"A new approach to preformance measurement, the analytic hierarchy process"*, Design Methods and Theories, *Vol.13, No.2, pp.64-72.*

160. —— *and A.H.Gholamnezhad*, 1981, *"Oil prices, 1985 and 1990"*, Energy Systems and Policy, *Vol. 5, NO. 4, pp.303-318.*

161. —— *and* —— 1982, *"High-level nuclear waste management, analysis of options"*, Environment and Planning B, *Vol. 9, pp. 181-196.*

162. —— *and M.W.Khuoja*, 1976, *"A measure of world influence"*, Journal of Peace Science, *Spring*, 1976.

163. ——, *F. Ma and P.Blair*, 1977, *"Operational gaming for energy analysis"*, Energy Policy, *March*, 1977, pp. 63-75.

164. —— *and R.S.Mariano*, 1979, *"Rationing energy to industries; priorities and input-output dependence"*, Energy Systems and Policy, *Vol.8, pp.85-111.*

165. —— *and V.Ramanujam*, 1983, *"An objective approach to faculty promotion and tenure by the analytic hierarchy process"*, Research in Higher Education, *Vol. 18, No. 8, pp. 311-331.*

166. —— *and P.C.Rogers*, 1976, *"Higher education in the United States (1985-2000), Scenario construction using a hierarchical framework with eigenvector weighting"*, Socio-Econ. Planning Sciences, *Vol.10, pp.251-264.*

167. ——, *P.Rogers and R.Pell*, 1980, *"Portfolio selection through hierarchies"*, The Journal of Portfolio Management, *No.3*, 1980.

168. —— *and M.Takizawa*, 1986, *"Dependence / independence, the analytic hierarchy process"*, The European Journal of O-

perations Research, (to appear).

169. —— *and L.G.Vargas*, 1979, "*Estimating technological coefficients by the analytic hierarchy process*", Socio-Econ. Planning Sciences, *Vol.*13, *pp.*333-336.

170. —— *and*——, 180, "*Hierarchical analysis of behavior in competition: prediction in chess*", Behavioral Science, May, 1980.

171. —— *and* ——, 1981, The Logic of Priorities, Applications in Business, Energy, Health, Transportation, *Kluwer Nijhoff Publishing*, 1981, 299p.

172. —— *and* —— 1984*a*, "*Inconsistency and rank preservation*", Journal of Mathematical Psychology, *Vol.*28, *No.* 2, *pp.*205-214.

173. ——*and*——, 1984*b*, "*Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios*", Mathematical Modelling, *Vol.*5, *pp.*309-324.

174. *Saaty, T.L. and L.G. Vargas*, 1985, "*Modeling behavior in competition, the analytic hierarchy process*", Applied Mathematics and Computation, *Vol.*16, *pp.*49-92.

175. —— *and* ——, 1986, "*Uncertainty and rank order in the Analytic Hierarchy Process*" *Working paper, University of Pittsburgh.*

176. ——, —— *and A. Barzilay*, 1982, "*High-level decisions, a lesson from the Iran hostage rescue operation*", Decision Sciences, *Vol.*13, *pp.*185-206.

177. ——, —— *and R.Wendell*, 1983, "*Assessing attribute weights by ratios*" OMEGA: The International Journal of Management Science, *Vol.*11, *No.*1, *pp.*9-13.

178. —— *and M.Wong*, 1983, "*Projecting average family-size in rural India by the analytic hierarchy process*", Journal of Mathematical Sociology, *Vol.*9, *No.*3, *pp.*181-209.

179. *Schoemaker, P.J.H. and C.C.Wald*, 1982, "*An experimen-*

tal comparison of different approaches to determining weights in additive utility models" Management Science, *Vol.28, No.2, pp.182-196.*

180. *Seidmann, A. and A.Arbel*, 1983, *"An analytic approach for planning computerized office systems"*, Omega, *Vol. 11, No.6, pp.607-617.*

181. —— *and* ——, 1984, *"Microcomputer selection process for organizational information management"*, Inf. and Manage., *Vol.7, No.6, pp.317-329.*

182. *Sinuany-Stern, Z.*, 1984, *"A network optimization model for budget allocation in a multi-campus university"*, Journal of Operational Research Society, *Vol. 35, No. 8, pp. 749-757.*

183. *Spinelli, P. and N.L' abbe Wu*, 1984, *"Identifying and analyzing components of multi-dimensional attributes for measuring consumer preferences"*, Proceedings of the 16th Annual Meeting of the American Institute for Decision Scientes, *pp. 210-214.*

184. *Sullivan, W.G.*, 1986, *"Models IEs use to include strategic non-monetary factors in automation decisions"*, Industrial Engineering, *Vol. 18, No.3, pp.42-50.*

185. *Takeda, E., P.L.Yu and K.O.Cogger*, 1984, *"Estimating criterion weights using eigenvectors, a comparative study"*, working paper, *University of Kansas, School of Business.*

186. ——, —— *and* ——, 1985, *"A comparative study on eeigen weight vectors" in* Decision Making with Multiple Objective, *pp. 388-399, Edted by Yacov Y. Haimes and V. Chankong, Springer-Velag.*

187. *Tarbell, D. and T.L.Saaty*, 1980, *"The conflict in South Africa"*, Conflict management and Peace Science, *Vol.4, No.2, pp.151-168.*

188. *Tummala, V.M. and R.P.Sanchez*, 1982, *"Evaluating fa-*

culty merit awards by analytic hierarchy process" , Proceeding - Annual Meeting of the American Institute for Decision Sciences 14*th Vol*.2,

188. ——, *J.R.Smith and V.R. Uppuluri* , 1983 , "*Evaluating commercial credit decisions by analytic hierarchy process*" , ASCT Journal of Management , *Vol*. 12, *No*. 1/2 , *pp*. 43 - 56.

189. *Usabiaga Campos, Oscar*, 1983, A Planning Process for Regional Urban Development in Queretaro, Mexico: An Application of the Analytic Hierarchy Process, *Master's thesis*, 79p. *University of Louisvill*.

191. *Van Larrhoven*, 1983, "*A fuzzy extension of Saaty's priority theory*" , Fuzzy Sets and Systems , Vol.11, *No*. 3 , *pp*. 229 - 241.

192. *Vargas, L.G.*, 1979, Measurement and Optimal Resource Allocation in Social Systems, *Ph. D. dissertation, Department of Social System Sciences, University of Pennsylvania , Philadelphia, USA*.

193. ——, 1982*a*, "*Reciprocal matrices with random coefficients*" , Mathematical Modelling , *Vol*. 8 , *No*. 1 , *pp*. 69 - 81.

194. ——, 1982*b*, "*Prediction and the analytic hierarchy process*" , 10*th IMACS World Congress on System Simulation and Scientific Computation, Vol*. 3, *Modeling and Simulation in Engineering, Modeling and Simulation——General*, *pp*. 323 - 325.

195. ——, 1983*a*, "*Analysis of sensitivity of reciprocal matrices*" , Applied Mathematics and Computation, *V*.12, *No*. 4 , *pp*.201 - 320.

196. ——, 1983*b*, "*Prospects for the Middle East, is a peaceful settlement attainable?* " European Journal of Operational Research, *Vol*.14, *No*.2, *pp*.169 - 192.

197. —— *and T.L.Saaty*, 1981, *"Financial and intansibl factors in fleet lease or buy decision"*, Industrial Marketing Management, *Vol.*10, *pp.*1－10.

198. *Vesely, W.E., A.Shafaghi, I.Gary, Jr. and D.M.Rasmuson*, 1983, Research Prioritization Using the Analytic Hierarchy Process, Volume 1, Basic Methods, *Technical report, Battelle Columbus Labs., OH.Aug.*83, *NUREG/CR－3447－V1.*

199. *Waller, R.J.* 1985, *Book review*, *"Decision Making for Leaders"*, *IEEE* Transactions on Systems, Man and Cybernetics, *Vol.*15, *No.*3, *pp.*450－452.

200. *Watil, E.A., Jr.*, 1984, Evaluating the Performance of Alternative Solution Methods for Combinatorial Optimization and Other Decision Problems, *Ph.D. Dissertation*, 279p., *University of Maryland.*

201. *Watson, S.R. and A.N. Freeling*, 1982, *"A comment, Assessing attribute weights"*, Omega, *Vol.*10, *No.* 6, *pp.* 582－583.

202. —— *and* ——, 1983, *"A rejoinder, comment on assessing attribute weights by ratios"*, Omega, *Vol.* 11, *No.* 1, *pp.* 13.

203. *Weber, M. and F. Eisenfuhr*, 1986, *"Bias in assessment of attribute Weights" VII－th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, August* 18－22, 1986, *Kyoto, Japan.*

204. *Williams, C. and G. Crawford*, 1980, Analysis of Subjective Judgment Matrices, *Rand Corporation, R－2572－AF.*

205. *Wind, Y. and S.Douglas*, 1981, *"International portfolio analysis and strategy, the challenge of the 80's"*, Journal of International Business Studies, *Vol.* 12, *No.* 2, *pp.* 69－82.

206. —— *and V.Mahajan*, 1981, *"Designing product and business portfolios"* Harvard Business Review, *Vol.*59, *No.*1, *pp.*

155－165.

207. —— and T.L.Saaty, 1980, "Marketing applications of the analytic hierarchy process", Management Science, Vol. 26, No. 7, pp.641－658.

208. Woods Gordon, "The AHP decision process, setting rational priorities", undated promotional handbook, Woods Gordon, Management Consultant, a member of Arthur Young International, Toronto, Canada.

209. Wu, J.A. and N.L'abbe Wu, 1984, "Analysing multi－dimensional attributes for the single plant location problem via an adaptation of the analytical hierarchy process", International Journal of Operations and Production Management, Vol4, No. 3, pp.13-21.

210. Xu Shubo and Liu Bao, 1986, "New dynamic priorities model and an analysis of China'a energy strategy for the future", VII－th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, August 18－22, Kyoto, Japan.

211. —— and Gong Mushen, 1986, "A note on the average consistency random index (R.I.)", (to appear).

212. Yager, R.R., 1979, "An eigenvalue method for obtaining subjective probabilities", Behavioral Science, Vol. 24, No. 6, pp.382－387.

213. Zahedi, F., 1985a, "Database management system evaluation and selection decision", Decision Sciences, Vol. 16, No. 1, pp.91－116.

214. ——, 1985b, "Estimation techniques and their statistical properties the analytic hierarchy process", unpublished manuscript.

215. ——, 1986, "The Analytic Hierarchy Process——a survey of the method and its applications", Intfriaces, forthcoming.

216. Zhong Ping, 1986, "Analysis of Chinese rural development

and its impact on groundwater resource", 19*th* Congress *of the International Association of Hydrogeologists, Karlovy Vary, Sept.* 8－15, 1986, *Czechoslocakia*。

〔217〕 和金生、赵焕臣、杜秀珍，1985，“用层次分析法探讨科研成果的综合评价”，《系统工程理论与实践》，第五卷，第1期，33—38页。

〔218〕 乐伟梁，汪应洛，1983，“山西煤炭基地统配矿、地方矿、社队矿合理发展比例探讨”，《系统工程理论与实践》，第3卷第4期，73—82页。

〔219〕 刘豹、许树柏、赵焕臣、和金生，1984，“层次分析法—规划决策的工具”，《系统工程》，第二卷第二期，31—38页。

〔220〕 宋远方，1986，《层次分析法及特尔斐法在矿区中长远规划决策分析中的应用》，《煤矿设计》，1986年第9期。

〔221〕 汤兵勇、韩志刚、王勇、张玲、肖尔滨，1986，“科研机构合理调整的决策分析方法”，《系统工程学报》，1986年第一期，95—102页。

〔222〕 汪应洛、乐伟梁，1984a，“应用多层次权重分析决策方法对山西煤炭基地2000年发展规划的决策分析”，《能源模型与系统分析》，能源出版社，1984年10月，117—124页。

〔223〕 汪应洛、乐伟梁，1984b，“山西煤炭基地规划中战略方针决策初探”，《系统工程》，第二卷第二期，31—38页。

〔224〕 吴云从，1986，“层次分析法——一种决策分析新方法”，《现代管理科学》，总第18期，1986年第3期。

〔225〕 许树柏、和金生，1984，“层次分析法在天津能源供应政策分析中的应用”，《能源模型与系统分析》，能源出版社，1984年10月，117—124页。

〔226〕 许树柏、李左凤、张世英、刘豹，1982，“层次分析法—决策的一种实用方法”，《中国未来研究会第一届学术年会论文选编》。

〔227〕 曾鸣，1986，“用系统工程的方法编制江西水利科技发展规划的尝试”，《江西水利科技》，1986年第二期

〔228〕 张彤，1985，“技术进步因素的分离与定量描述”，《数量经

技术经济参考资料》，1985年第5期，18—28页。

〔229〕 赵焕臣、和金生、许树柏，1985，“层次分析法在科技管理中的应用，《科学与科学技术管理》，1985年第6期，23—25页。

〔230〕 赵焕臣、许树柏、和金生，1986，《层次分析法——一种简易的新决策方法》，科学出版社。

C93
70
0325777