

控制点误差对测定摄影测量

坐标精度的影响

省地质局测绘大队 邵子法译 唐炳燮 蔡刚民校

(苏)E. A. 列舍托夫, Б. N. 萨维利耶夫

根据小比例尺象片建立平面—高程网时,常常利用大地控制点坐标。而这些大地控制点的测定是带有误差的。其误差值可与摄影测量构网时的误差相比拟,甚至超过它们。

通常,有可能利用这些在航带内任意分布的、数量较多的控制点。其中,在难于通行地区布设控制点时,控制点经常选择在交通条件较好地区的首尾象对(具有足够的控制点密度)。而在终年积雪和活动冰川地区,则利用那些任意分布的且位于基岩露头上的目标作为控制点。

用小比例尺象片进行空中三角摄影测量时遇到的许多棘手问题是:如合理地利用为数众多,且具有一定坐标误差的控制点;评价控制网的质量;剔除废点;以及它们的误差对测定摄影测量坐标的影响。

必须指出,解算解析空中三角网的任何一种方法(以明的或隐的形式)都要完成由控制点测定其外方位元素的过程。为了分析控制点坐标误差对摄影测量构网精度的影响,我们利用简单的关系式(3),通常这些式子被用在摄影测量网的严密平差方法中。

$$\left. \begin{aligned} dX_i &= dX_0 - H_i d\xi - Y_i d\theta + X_i dt \\ dY_i &= dY_0 - H_i d\eta + X_i d\theta + Y_i dt \\ dH_i &= dZ_0 + X_i d\xi + Y_i d\eta + H_i dt \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

按照公式(1),摄影测量坐标的误差是由控制点的坐标计算得出的外方位元素的线性函数。让我们评定一下由公式(1)所确定的随机过程的统计特性。将摄测网坐标系的原点和这些控制点坐标重心相重合,那么,得到:

$$\sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N Y_i = \sum_{i=1}^N H_i = 0$$

法方程组的矩阵可表示如下:

$$M = \begin{vmatrix} N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N}{1} \sum (X_i^2 + H_i^2) & \frac{N}{1} \sum X_i Y_i & \frac{N}{1} \sum Y_i H_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N}{1} \sum X_i Y_i & \frac{N}{1} \sum (Y_i^2 + H_i^2) & -\frac{N}{1} \sum X_i H_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N}{1} \sum Y_i H_i & -\frac{N}{1} \sum X_i H_i & \frac{N}{1} \sum (X_i^2 + Y_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{N}{1} \sum (X_i^2 + Y_i^2 + H_i^2) \end{vmatrix}$$

式中: N 是控制点数目;

x_i, y_i, H_i 是在选定的坐标系中, 测定的摄测坐标。

测网的外方位元素误差的协方差矩阵由下式确定:

$$K = D M^{-1}$$

式中: D 是控制点误差的离差。

M^{-1} 是 M 的逆矩阵。

知道了外方位元素误差的协方差矩阵, 可以求出测点的摄影测量坐标误差的协方差矩阵。

$$K \phi = D C M^{-1} C^T$$

式中: C 是方程式 (1) 的系数矩阵; C^T 是转置矩阵。

在矩阵互乘和作某些简化后, 我们得到摄影测量坐标误差的离差公式:

式中 X_{i0}, Y_{i0}, H_{i0} 是摄测坐标系中控制点的坐标。该坐标系的原点与这些控制点坐标的重心重合。

公式 (2) 可用来评价待定点的摄影测量坐标的平差精度。

用小比例尺象片构网时, 由于 H_i 值比 X_i, Y_i 值小几个数量级, 所以公式 (2) 可以简化以误差离差的平均值 (中值) 来表示 (根据大量的点)

$$\begin{aligned}
D_{Xi} = D & \left(\frac{1}{N} + \frac{H_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} + \frac{Y_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + Y_{i,0}^2)} \right. \\
& + \frac{X_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} - \frac{X_i H_i \sum_1^N Y_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2) \sum_1^N (X_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} \Bigg) \\
D_{Yi} = D & \left(\frac{1}{N} + \frac{H_i^2}{\sum_1^N (Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} + \frac{X_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + Y_{i,0}^2)} \right. \\
& + \frac{Y_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} - \frac{Y \cdot H_i \sum_1^N X_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2) \sum_1^N (Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} \Bigg) \quad (2) \\
D_{H_i} = D & \left(\frac{1}{N} + \frac{X_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} + \frac{Y_i^2}{\sum_1^N (Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} \right. \\
& + \frac{H_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} - \frac{H_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} \\
& \times \left(\frac{Y_i \sum_1^N X_i^2}{\sum_1^N (Y_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} - \frac{X \cdot \sum_1^N Y_i^2}{\sum_1^N (X_{i,0}^2 + H_{i,0}^2)} \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_{x_i}^2 &= \frac{m_x^2}{N} \left(1 + \frac{\frac{1}{n} \sum_1^n (X_i^2 + Y_i^2)}{\frac{1}{N} \sum_1^N (X_{i,o}^2 + Y_{i,o}^2)} \right) \\
 M_{Y_i}^2 &= \frac{m_Y^2}{N} \left(1 + \frac{\frac{1}{n} \sum_1^n (X_i^2 + Y_i^2)}{\frac{1}{N} \sum_1^N (X_{i,o}^2 + Y_{i,o}^2)} \right) \\
 M_{H_i}^2 &= \frac{m_H^2}{N} \left(1 + \frac{\frac{1}{n} \sum_1^n X_i^2}{\frac{1}{N} \sum_1^N X_{i,o}^2} + \frac{\frac{1}{n} \sum_1^n Y_i^2}{\frac{1}{N} \sum_1^N Y_{i,o}^2} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

式中 n 为待定点数目。

公式 (3) 用来计算待定点和控制点残差的离差。

若采用

$$n = N; \quad \sum_1^N X_{i,o}^2 = \sum_1^n X_i^2 \quad \sum_1^N Y_{i,o}^2 = \sum_1^n Y_i^2$$

则可求得控制点摄影测量平差后坐标误差的残差。

那么, 我们得到

$$M_{X,o}^2 = \frac{2 m_x^2}{N}; \quad M_{Y,o}^2 = \frac{2 m_Y^2}{N}; \quad M_{H_o}^2 = \frac{3 m_H^2}{N} \quad (4)$$

式中 m_x , m_Y , m_H 是控制点坐标的均方误差。

为了确定各种控制点的分布对测定点的摄影测量坐标平差精度的影响, 已分析研究了 20 种方案。可以阐明, 所有这些方案可以归结为三大类。

第一类方案, 控制点大多数分布在航带的首末。这时, 公式 (3) 采用下面形式:

$$M_X^2 = \frac{4 m_x^2}{3 N}; \quad M_Y^2 = \frac{4 m_Y^2}{3 N}; \quad M_H^2 = \frac{5 m_H^2}{3 N}; \quad (5)$$

第二类方案, 控制点均匀地分布在航向重叠地段。

第三类方案, 控制点均匀地分布在整個航带网区域内。后两种方案, 误差的平均值其具有足够精度的表达式为:

$$M_x^2 = \frac{(3N+20)m_x^2}{N(N+20)}; \quad M_y^2 = \frac{(3N+20)m_y^2}{N(N+20)}; \quad (6)$$

$$M_H^2 = \frac{(7N+24)m_H^2}{3N(N+6)}$$

图上的曲线表示了测点的摄影测量坐标误差和控制点数目的关系。分析这些曲线可得出下面的结论：当控制点数目很多时，控制点坐标误差对待定点位置的影响可降低 n 倍。

缺少可靠资料时，可分析控制点的摄影测量坐标改正值以取得大地测量网质量的某些信息。我们用七个摄影基线之长的航带模型进行了试验研究。其中平差采用了严密的方法。

设定的控制点坐标的均方误差是按下式计算：

$$(m_\Delta)_{y,x} = m_v \sqrt{\frac{N}{N-2}}; \quad (m_\Delta)_H = m_v \sqrt{\frac{N}{N-3}} \quad (7)$$

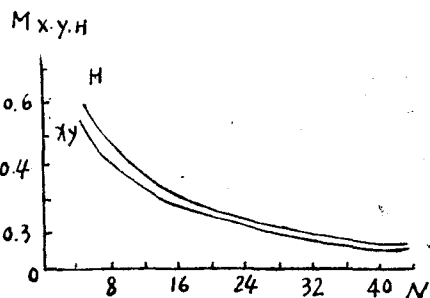
这些式子是根据真误差的均值 m_Δ ，概率误差 m_v 和平差坐标误差的残差 m_g 之间的已知关系得来的。

$$m_\Delta^2 = m_v^2 + m_g^2 \quad (\text{注})$$

式中 m_g 按照公式(4)测定。

表 1

N	$m_{x,y}, M$				m_H, M			
	1	2	3	4	1	2	3	4
4	40	40	56	1.40	23	20	40	1.74
5	46	48	62	1.35	26	23	36	1.56
6	43	43	53	1.23	51	51	72	1.41
8	42	40	46	1.10	48	49	62	1.29
10	39	38	42	1.08	27	28	33	1.22
14	41	42	45	1.10	28	26	29	1.04
16	40	39	42	1.06	28	26	29	1.04
18	40	40	42	1.06	28	27	30	1.05
24	41	39	41	1.00	30	29	31	1.03



测点的摄影坐标误差与控制点数目之间的关系曲线

表 1 给出控制点坐标的均方误差：

- 1 栏是已知数值；
- 2 栏是按平差改正数求得的数值；
- 3 栏是按公式(7)计算的数值；
- 4 栏是 3 栏与 1 栏的比值。

从表 1 数据可得出这样的结论：根据平差后的控制点坐标改正数，可判断原始资料的精度。

当 $N \geq 10$ 时，公式(7)足以可信。

平差后的改正值与均方误差之间互为相关，其表达式(2)是：

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{P_i}{P}}$$

式中 P 和 P_i 分别为平差前后测量成果的权。在这里我们：

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{m_{x,y,H}^2} ; & P_{x,y} &= \frac{N}{2 m_{x,y}^2} ; & P_H &= \frac{N}{3 m_H^2} ; \\ \rho_{x,y} &= \sqrt{\frac{N-2}{N}} ; & \rho_H &= \sqrt{\frac{N-3}{N}} \end{aligned} \right\} (8)$$

得到的方程等价于方程(7)

从模拟区域网平差结果的分析中(控制点数目从4点到24, 总共14个方案)可以确立: 控制点的坐标误差(1—1.2) m_v 范围内按照平差改正数确定的可信度为0.76, 测定控制点误差大于1.5 m_v 的可信度是0.90。根据平差后改正数而剔除控制点废点的可靠性取决于控制点数。

众所周知, 评价精度的经验公式的可靠性与量测次数有关。

在模拟试验研究过程中, M_x , M_y , M_H 值的置信区间是根据信度概率 $\beta=0.90$ 时的 X N 平方律确定的。

表2: 1栏是控制点坐标的已知误差; 2栏是平差后坐标的误差; 3栏是按公式(4), (5), (6)求得的误差; (4)栏是置信区间

表2

N	控 度 点								待 定 点					
	$m_{x,y}$, M				m_H , M				$m_{x,y}$, M			m_H , M		
	1	2	3	4	1	2	3	4	2	3	4	2	3	4
4	40	20	28	18—78	23	15	20	13—56	13	23	14—65	10	15	9—42
5	46	16	29	19—70	26	17	21	14—50	11	24	16—58	12	16	10—38
6	43	18	25	17—53	51	19	36	27—76	13	21	14—44	14	28	19—60
8	42	14	21	15—38	48	16	30	21—54	12	18	13—82	12	24	17—43
10	39	12	17	12—29	27	10	15	11—26	10	16	12—27	7	12	9—20
16	40	14	14	11—21	28	16	12	10—18	10	12	10—18	11	10	8—15
24	41	15	12	10—16	30	12	11	9—14	14	12	10—16	11	9	7—12

正似(1)的预测, 在 N 大于10时, 按公式计算的结果和试验所得结果将十分一致。在试验过程中还设定控制点坐标的系统误差全部转移到待定点的平差坐标中去。

对所有模拟构网方案来说, 平差后测点摄测坐标的误差分布呈线性关系式:

$$\delta_i = a_0 + b x_i + c y_i ; \quad (9)$$

它符合于初始方程式(1)。

分析关系式(q)可看出:分布在控制点附近测点平差后的坐标值具有极限误差(最大误差);而位于测网中心位置的测点则具有最小误差。同时,误差分布表现出有规律的趋向。尤其可以观察到,当误差绝对值从两端向中心方向减小时,航带左右两边呈现相同符号的误差组合。在分析控制网质量时,建议采用绍维奈(wobeHə)准则,改正值大于 $m_v t$ 值的控制点可以剔除。

在误差不大于5%情况下,t值可用下面的近似关系式确定:

$$t = \frac{3N}{5+N} = \frac{5N-8}{N^2+100} \quad (10)$$

最后结论:

在摄影测量网平差时,即使控制点坐标测定时带有误差,其值大于摄影测量测定误差的1—2倍,也要尽可能地利用最大数目的控制点。

采用大量的控制点后,可以正确地评定原始数据质量和合理地剔除废点,并从根本上减弱大地控制点的坐标误差对摄影测量构网精度的影响。

在确定剔除废点限差时,应该顾及到它们和控制点数目的关系。在控制点少的情况下,分析(4)和(10)得出的限差就比较严格。

在选择控制点时,特别要注意排除原始坐标的系统误差,因为这些系统误差会全部转入待定点的平差坐标中。

[注] 原文为 $m_{\Delta}^2 m_v^2 + m_g^2$

参考文献(略)