

拟合推估在 GPS 高程解算中的应用

刘 念¹, 胡荣明²

(1. 陕西省第二测绘工程院, 陕西 西安 710054; 2. 西安科技学院, 陕西 西安 710054)

Application of Collocation to Adjustment of GPS Heights

LIU Nian, HU Rong-ming

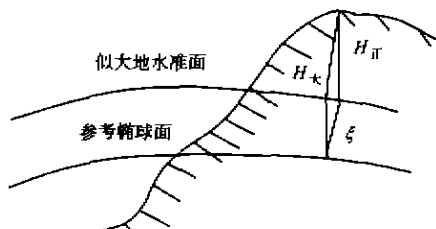
摘要:函数模型逼近和统计模型逼近是大地测量平差中两种重要的方法,前者对趋势性和规律性变化参数的求解较为理想,而后者对随机变化参数的逼近比较合适,首先叙述和分析了目前在GPS高程异常解算中的几种方法的原理及优缺点,然后对最小二乘拟合推估在逼近未知点高程异常方面的应用进行了讨论,并介绍了拟合推估的一种新解法。

关键词:GPS;拟合推估;高程异常

一、引言

GPS 定位技术自问世以来,就以其精度高、速度快、操作简单等优点引起了测绘界的普遍关注。特别是在平面控制测量方面,利用 GPS 可以很灵活地布网,几乎不受通视条件的限制。发展至今,GPS 载波相位测量相对定位精度已达厘米级甚至毫米级。但是,由于区域性大地水准面(或似大地水准面)的精度及电离层延迟误差等因素的影响,转换后的 GPS 测量的高程精度还不够高。目前,国内外应用 GPS 定位技术,大都局限于解决平面坐标问题,高程测量仍旧沿用常规的几何水准测量方法来测定。这从某种角度上讲,未能充分发挥 GPS 测量能够提供 3 维坐标的优势。因此,我们讨论了在 GPS 高程转换中的关键技术——高程异常的确定方法。

GPS 测量能够精确地给出地面点在 WGS-84 坐标系中的 3 维坐标 X, Y, Z 或 B, L, H , 经系统变换可以得到地面点在局部坐标系中的大地高。我国采用的是正常高系统。正常高 H_N 是地面点到水准面的距离,而大地高 H_K 是地面点沿参考椭球的法线方向到参考椭球面的距离,二者之差就是高程异常 ξ (如图 1)。但是,由于各 GPS 点上的高程异常值无法直接获得,目前还无法直接将大地高精确地转换为正常高,所以,高程异常的确定就成为 GPS 高程转换的关键问题。

图 1 H_N, H_K 和 ξ 的关系

一般用下式来表示大地高、正常高和高程异常三者的关系:

$$\xi = H_K - H_N \quad (1)$$

严格地讲,这个表达式是一个近似式。它还应顾及参考椭球面法线与铅垂线方向的差异(即垂线偏差)的影响,但该差异

一般不大于 $1''$, 由它引起的高程误差不超过 $\pm 0.1 \text{ mm}$, 完全可以忽略不计。

二、几种常用的高程异常的内插方法

1. 加权平均法

假设在测区内有若干个既进行了 GPS 测量又联测了几何水准高程的 GPS 点(这样的点一般称之为水准重合点),那么可以利用式(1)来推算出各水准重合点上的高程异常。利用这些离散点上的高程异常值拟合出测区所在局部区域的似大地水准面,然后利用水准重合点到未知点(如本文所讲的未知点,指的是已测 GPS 高程,但未测几何水准高程)的水平距离或水平距离的平方倒数为权。利用下列公式计算出未知点的高程异常:

$$\xi_p = \frac{\xi_i p_i}{[p_i]} \quad (2)$$

但是,此类方法,只顾及了已知点到未知点的平面距离,不能反映出水准重合点的分布及周围地形的起伏。

2. 曲面拟合法

采用二次多项式函数作为曲面拟合法的函数模型^[1]:

$$\xi_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i y_i + a_4 x_i^2 + a_5 y_i^2 + \Delta_i \quad (3)$$

式中 ξ_i 表示高程异常; x_i, y_i 为平面坐标; Δ_i 为残差。采用削高补低的原则平滑出一个曲面来代表拟合区域的似大地水准面,供内插和外推使用。式(3)用矩阵表示为

$$\xi = AX + \Delta \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} \xi &= [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n]^T \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & y_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & x_n^2 & y_n^2 \end{bmatrix} \\ \Delta &= [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \cdots \quad \Delta_n]^T \\ X &= [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5]^T \end{aligned}$$

式(4)的误差方程为

$$V = AX - \xi \quad (5)$$

收稿日期: 2000-10-30; 修回日期: 2001-01-20

作者简介: 刘 念(1968-), 男, 陕西咸阳人, 陕西省第二测绘工程院助理工程师, 硕士生。

通过 $n(n \geq 6)$ 个已知高程异常的水准重合点, 用最小二乘法求得拟合系数 a , 然后利用式(3)或式(4)在不考虑残差的情况下求得未知点的高程异常。

但是正如文献[2]中所提到那样, 式(3)表示的是一个“抛物单曲面”, 它仅有一个凹面或凸面, 如果高程异常逼近场存在鞍部、水波浪形等多个凹凸面时, 用一个二阶多项式函数的计算结果会出现较大误差。为了克服这一缺点, 有的学者又提出了移动曲面法(分区拟合), 但是移动曲面法只能对二次多项式的计算结果有所改善, 当水准重合点选取在两个或两个以上的凹凸面时, 它的内插结果也不令人满意。这也就是说在地形变化复杂的地区, 移动二次曲面有时也不能解决高精度的内插问题。

3. Hardy 多面函数法

Hardy 多面函数法是一种纯数学的曲面逼近方法^[1]。它的出发点是在每个数据点上同各个已知点分别建立函数关系。这种函数称为核函数, 它的图形是一个规则数学曲面, 将这些规则数学曲面按一定比例叠加起来, 就可拟合出任意的不规则的曲面, 且能达到较好的拟合效果。其函数形式如下:

$$\xi_i(x, y) = \sum_{j=1}^m \beta_j F(x, y, x_j, y_j) \quad (6)$$

则这类逼近称之为 Hardy 多面函数法, 式中 $F(x, y, x_j, y_j)$ 是正双曲面函数或反双曲面函数, 即:

$$F(x, y, x_j, y_j) = \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2 + \delta} \quad (7)$$

或

$$F(x, y, x_j, y_j) = \frac{1}{\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2 + \delta}} \quad (8)$$

式中, $\Delta x_j = x_j - x$, $\Delta y_j = y_j - y$; x_j, y_j 为水准重合点的平面坐标; x, y 为拟合点或内插点的平面坐标; δ 为平滑因子, 一般用多次试算的方法确定, 任意地我们令 $\delta = 0$ 。

设有 m 个结点(均为水准重合点), n 个水准重合点: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其中 $n \geq m$, 先利用 n 个水准重合点拟合出待定系数 β , 然后再把 β 作为已知值去内插未知点的高程异常。

但是, Hardy 多面函数法虽然表面上计算简单、灵活, 但是要求节点应是逼近场的特征点, 若节点选得不好, 则易导致整个计算失败。

除了以上介绍的方法之外, 还有非参数回归法和高程异常变化梯度法等, 这里就不再一一论述。有兴趣的读者, 请参考文献[3]。

三、拟合推估法的原理

前面介绍的几种方法中, 曲面拟合法、多面函数法等可以归于函数模型法, 而加权平均法是属于随机模型法。它们要么只考虑到高程异常的趋势性(与坐标的函数关系), 要么只考虑到高程异常的随机性。我们知道, 在同一区域内的高程异常既表现有趋势性又表现有随机性, 所以无论只考虑其趋势性或只考虑其随机性, 在理论上都是不全面的, 实践中的应用也有局限。只有既考虑趋势性又考虑随机性的方法在理论上才是全面的, 实践中才是可靠的。

最小二乘拟合推估可以理解为函数模型逼近于随机模

型逼近的综合, 其一般表达式为

$$L = F\beta - BS + \Delta \quad (9)$$

式中, F 为函数模型的系数行向量; β 为倾向性参数向量(有时也称系统性参数向量); B 为随机模型系数行向量; S 为随机信息向量。

式(9)右端的第一项为函数逼近模型, 第二项为随机逼近模型。 \hat{S} 的先验信息(期望和方差)已知。

式(9)对应的误差方程为

$$V = F\beta + BS - L \quad (10)$$

它是基于如下原则来求解:

$$V^T P V + \delta_S P_S \delta_S = \min \quad (11)$$

其正常解式为

$$\left. \begin{aligned} \beta &= (F^T \Sigma_L^{-1} F)^{-1} F^T \Sigma_L^{-1} L \\ \delta_S &= \Sigma_S B^T \Sigma_L^{-1} (L - F\beta) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中, $\Sigma_L = \Sigma_\Delta + \Sigma_\epsilon$; Σ_Δ 为观测误差的方差-协方差阵; B 一般为单位阵; Σ_S 为信号向量 S 的先验方差-协方差阵。

实践证明, 正常解式(12)往往使推估值偏小, 而且拟合推估法还需要大量的已知点来进行协方差函数拟合, 这就是最小二乘拟合推估法在高程异常的内插与外推中不能得到广泛应用的主要原因。

四、拟合推估的两步极小解法

假设先用函数模型法作一次拟合, 然后求出各参加拟合的水准重合点的曲面函数拟合值, 这组拟合值与已知值就有一个误差, 我们称之为“拟合残差”; 然后用拟合残差去求解随机信号的协方差函数的待定系数, 进而求出 $\Sigma_{\epsilon_S \epsilon_S}$ 和 $\Sigma_{\epsilon_S \epsilon_L}$; 最后再应用拟合推估法求解各推估点的高程异常。具体解法如下:

1. 先进行函数模型的拟合。误差方程为

$$V = F\beta - \xi \quad (13)$$

式中 $F\beta$ 为移动曲面模型。求解得

$$\beta = (F^T P F)^{-1} F^T P \xi \quad (14)$$

然后求解拟合残差

$$\delta_\epsilon = F\beta - \xi \quad (15)$$

2. 协方差函数拟合, 并最终求解。利用残差计算协方差函数的待定参数, 并组成方差-协方差阵 $\Sigma_{\epsilon_S \epsilon_S}$ 和 $\Sigma_{\epsilon_S \epsilon_L}$, 然后重新求解 β 和 δ_S :

$$\left. \begin{aligned} \beta &= (F^T \Sigma_L^{-1} F)^{-1} F^T \Sigma_L^{-1} \xi \\ \delta_S &= \Sigma_{\epsilon_S \epsilon_S} \Sigma_L^{-1} (\xi - F\beta) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中,

$$\Sigma_L = \Sigma_\Delta + \Sigma_{\epsilon_S \epsilon_S}$$

最后求得未知点的高程异常:

$$\left. \begin{aligned} \delta_S' &= \Sigma_{\epsilon_S \epsilon_S} \Sigma_S^{-1} \delta_S \\ S' &= F_S' \beta + \delta_S' \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

五、计算与分析

为了验证以上理论分析, 我们选择了我国西部某省区的一个 GPS 控制网的高程异常值进行试算, 选择了其中部分高程异常已知的数据点作为内插点, 其余点作为已知点, 并用拟合协方差函数。

通过比较,我们取函数

$$C_{i,j}=C_0e^{-kd} \tag{18}$$

作为协方差函数。式中

$$C_0=\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{n} \tag{19}$$

$d=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$, i,j 为水准重合点点号;先验协方差采用下式计算:

$$C_{i,j}=\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\xi_i-\bar{\xi})(\xi_j-\bar{\xi})}{m} \tag{20}$$

式中, $\bar{\xi}=\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}$; i,j 为某一固定距离的两端点点号; m 为这一固定距离的对点数。在选区不同的固定距离之后,我们就可以得到在不同的距离下的先验协方差。这样,我们就可以把式(18)线性化后得到一个包含待定参数 k 的一元方程组,采用最小二乘法解得 k 后,代入式(18),进而利用协方差函数重新求解 $C_{i,j}$,并组成协方差矩阵。

另外需要注意的是,式(19)和式(20)中的 ξ 表示的是高程异常值,可是当采用拟合推估的两步极小解法时,它就表

示的是拟合残差值。计算方案设计如下:

方案一,加权平均法;方案二,二次曲面法;方案三,移动二次曲面法;方案四,Hardy 多面函数法;方案五,拟合推估正常解法;方案六,拟合推估两步极小解法,函数模型采用 Hardy 多面函数式(7),其中平滑因子 $\delta=0$ 。计算结果见表 1。

表 1 各种计算方案精度比较 m

方案	一	二	三	四	五	六
外部符合精度	±0.747	±0.472	±0.042	±0.083	±0.058	±0.011

由计算结果可以看出,拟合推估的两步极小解法由于同时考虑到了高程异常的趋势性和随机性,所以在理论上更为合理,实践计算中也确实能提高计算精度。

参考文献:

[1] 杨元喜,刘长建.似大地水准面的确定 [A].大地测量学的发展 [C].北京:测绘出版社,1996.
[2] 吉渊明,赵水泉.曲面拟合法 GPS 网正常高的几点认识 [J].测绘通报,1998,(7).
[3] 乔仰文,辛久志,王晓辉,等.GPS 高程转换的若干问题的研究 [J].测绘通报,1999,(11).

(上接第 28 页)

环境选择水面平静且检验水域无跃层(盐、温、密度跃层)的地方,当安装多波束的测量船从目标一侧通过时,利用测得的测量船位置 (X_1,Y_1) 、多波束测得的海底目标位置 (X',Y') 和海底目标的已知位置 (X,Y) ,同样方法可以利用公式(3),求得艏线偏移角 γ 。当然,为了精确求得艏线偏移角 γ ,可以通过对海底目标进行多次测量,利用平差原理求得艏线偏移角 γ 的最优估计值。由于第二种方法借助于已知点进行检测且容易获取多余观测数据进行平差,因而它比第一种方法精度要高,便于实施,只不过对校准目标的位置、形状和大小有较严格的要求。

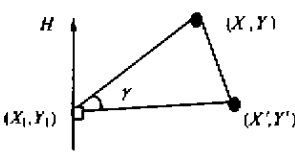


图 5 海底目标实测位置与准确位置关系图

2. 改正方法

当多波束艏线偏移角 γ 检测出以后,第一种方法是对多波束换能器进行重新安装和校准。由于重新安装对测量船只而言是一项非常复杂的工程,例如涉及到船体的开洞、焊接等,使得此种方法实施比较困难,因此只有当多波束艏线偏移角 γ 特别大时,才用此法。第二种方法是将多波束艏线偏

移角作为一个常数改正项加入数据实时或后处理过程的程序中(附加测量航向一偏移量或将计算的坐标偏差加入相应的坐标),达到减弱或消除艏线偏移角的影响,而且此法易于实施。

五、结束语

多波束艏线偏移角是仪器在安装后产生的多波束系统误差之一。我们还对测量船横向水平距离 100 m~500 m(相对更大水深)范围测深点的 dx,dy,dz 进行了计算,计算结果(略)与上述图表类似,只不过偏差更大,影响更为明显。因此,随着多波束探测宽度和深度的增大,特别对外侧波束而言,为了达到《规范》和 S-44 的精度要求,又要提高作业效率,必须提高多波束艏线偏移角的确定精度,减小此类误差的影响。通过上述数值计算和现有仪器的测角精度,本文认为要满足多波束高精度高效率的探测要求,建议最好将多波束艏线偏移角减小到 0.1°或更小。

参考文献:

[1] 黄谋涛,等.多波束和机载激光测深位置及姿态影响研究[J].测绘学报,2000,(1).
[2] 李家彪,等.多波束勘测原理技术与方法[M].北京:海洋出版社,1999.
[3] JEROEN D. Dynamic Calibration of Multibeam Systems[M]. Netherlands, Delft University Press,1998.