

# 由 GPS 基线向量解算地面形变

王解先<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学 测量与国土信息工程系, 上海 200092; 2. 现代工程测量国家测绘局重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 通常采用比较各期坐标变化的方法来分析全球定位系统(GPS)形变网的数据. 提出一种整体平差模型, 将各期 GPS 基线向量放在一起平差, 定义各点在任意时刻的坐标为其在参考时刻的坐标和形变速度与形变时间的乘积之和. 为了更具直观性、更容易加上先验已知信息, 将空间坐标参数转换为平面坐标和大地高参数, 将空间坐标形变速度转换为水平位移和沉降速度参数. 整体平差同时计算出参考时刻的站坐标和形变速度, 还推导了相应的协方差矩阵, 算例表明模型正确.

**关键词:** 全球定位系统; 沉降; 形变; 整体平差

**中图分类号:** P 226

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0253-374X(2005)07-0967-04

## Application of GPS Technique on Surface Deformation Monitoring

WANG Jie-xian<sup>1,2</sup>

(1. Department of Surveying and Geoinformatics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Modern Engineering Surveying, State Bureau of Surveying Mapping, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Usually the deformation velocities are determined by the comparison of coordinate changes among different epochs. In this paper, a whole adjustment model is introduced in processing GPS deformation monitoring network. Baselines of all epochs are adjusted together. The coordinates of each point are divided to coordinates at reference time and multiplication of deformation velocity and duration interval. To be more clearly the space coordinate parameters are replaced by plan coordinate and ellipsoid height, and the space deformation velocities are replaced by horizontal and vertical deformation velocities. The coordinates of each station at reference epoch are calculated simultaneously with deformation velocities. The variance and co-variance matrix is deduced also. The example shows the model works well.

**Key words:** global positioning system (GPS); subsidence; deformation; whole adjustment model

通常采用水准测量方法来精确测定地面沉降, 但水准测量工作量大, 对于大型城市,  $1 \text{ mm} \cdot \text{km}^{-1}$  的精密水准观测误差, 其累积仍然较大.

目前 GPS(global positioning system)测量精度已经达到较高的水平, 而且 GPS 观测简单, 有很多

国际 GPS 服务组织(International GPS Service, IGS)站的资料可以随时取用, 与观测数据一起解算, 并可以直接得到三维形变数据. 因此 GPS 越来越多地用于城市形变观测中. 通常做法是, 在监测区域内布设一个 GPS 网, 每隔一段时间观测一期, 每期数据独

立平差得到各点的三维坐标,比较各点各期坐标的变化,得到水平位移和沉降量.

笔者试图将各期 GPS 基线结果采用统一模型,以参考某时刻的三维坐标和形变速度为参数,整体平差直接得到各点的三维坐标和三维形变速度.

1 数据处理模型

1.1 误差方程

以  $\Delta \mathbf{R}_{ij} = (\Delta X_{ij} \ \Delta Y_{ij} \ \Delta Z_{ij})^T$  表示点  $i$  至  $j$  在  $t$  时刻测得的基线  $k$ ,  $t$  以儒略日为单位,误差方程为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k + \Delta \mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i \tag{1}$$

式中:  $\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j$  是  $t$  时刻  $i$  和  $j$  点的空间坐标;  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  是基线残差.

若以  $\mathbf{R}_{im}$  表示  $i$  点在整个网观测中间时刻  $t_m$  时的坐标,  $\mathbf{v}_{XYZi}$  表示  $i$  点的三维位移速度:

$$\mathbf{v}_{XYZi} = \begin{Bmatrix} v_{Xi} \\ v_{Yi} \\ v_{Zi} \end{Bmatrix}$$

则,

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{im} + \mathbf{v}_{XYZi} dt \\ \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_{jm} + \mathbf{v}_{XYZj} dt \end{cases} \tag{2}$$

式中:  $dt = \frac{t - t_m}{\Delta}$ ,  $t_m = \frac{t_1 + t_f}{2}$ ,  $\Delta = \frac{t_1 - t_f}{2}$ ,  $t_f, t_1$  是该网最早观测和最后观测的时间,以儒略日为单位.  $\mathbf{v}_{XYZi}$  的单位是  $\text{m} \cdot (\Delta d)^{-1}$ ,  $dt$  的取值范围为  $[-1, 1]$ , 有利于法方程的性能.

将式(2)代入式(1),误差方程变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k + \Delta \mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_{jm} + \mathbf{v}_j dt - \mathbf{R}_{im} - \mathbf{v}_i dt \tag{3}$$

对各点在  $t_m$  时刻的坐标取近似值  $\mathbf{R}_{im}^0$ , 将速度取近似值  $\mathbf{v}_i^0$ , 误差方程写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = -\mathbf{E} \begin{Bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \end{Bmatrix} + \mathbf{E} \begin{Bmatrix} \delta X_j \\ \delta Y_j \\ \delta Z_j \end{Bmatrix} - \mathbf{E} dt \begin{Bmatrix} \delta V_{Xi} \\ \delta V_{Yi} \\ \delta V_{Zi} \end{Bmatrix} + \mathbf{E} dt \begin{Bmatrix} \delta V_{Xj} \\ \delta V_{Yj} \\ \delta V_{Zj} \end{Bmatrix} - \mathbf{l}_k \tag{4}$$

式中:  $\mathbf{E}$  为三维单位阵;  $(\delta X_i \ \delta Y_i \ \delta Z_i)^T$  是参考时刻坐标的改正数;  $(\delta v_{Xi} \ \delta v_{Yi} \ \delta v_{Zi})^T$  是形变速度参数的改正数, 常数项为

$$\mathbf{l}_k = \Delta \mathbf{R}_{ij} + \mathbf{R}_{im}^0 - \mathbf{R}_{jm}^0 + \mathbf{v}_i^0 dt - \mathbf{v}_j^0 dt \tag{5}$$

式(5)的权取为 GPS 基线向量解算得到的协方差阵的逆阵  $\mathbf{p}_k$ .

形变速度通常表示为上下(沉降)、东向和北向的值  $\mathbf{v}_{UENi} = (v_{Ui} \ v_{Ei} \ v_{Ni})^T$ , 它与空间直角坐标速度  $\mathbf{v}_{XYZi}$  的关系为

$$\begin{Bmatrix} v_{Xi} \\ v_{Yi} \\ v_{Zi} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_3(-L_i) \mathbf{R}_2(B_i) \begin{Bmatrix} v_{Ui} \\ v_{Ei} \\ v_{Ni} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_i \begin{Bmatrix} v_{Ui} \\ v_{Ei} \\ v_{Ni} \end{Bmatrix}$$

式中:  $B_i, L_i$  为该点的经纬度;  $\mathbf{R}_3(-L_i)$  与  $\mathbf{R}_2(B_i)$  是旋转矩阵.

$$\mathbf{R}_3(-L) = \begin{bmatrix} \cos(-L) & \sin(-L) & 0 \\ -\sin(-L) & \cos(-L) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
  
$$\mathbf{R}_2(B) = \begin{bmatrix} \cos B & 0 & -\sin B \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin B & 0 & \cos B \end{bmatrix} \tag{6}$$

测站坐标表示为平面坐标和大地高更为直观, 更容易利用平面已知坐标等信息, 按文献[1]

$$\begin{Bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{Bmatrix} = \frac{\partial (X \ Y \ Z)}{\partial (X_g \ Y_g \ h)} \begin{Bmatrix} \delta X_g \\ \delta Y_g \\ \delta h \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \delta X_g \\ \delta Y_g \\ \delta h \end{Bmatrix} \tag{7}$$

式中:  $(X_g \ Y_g \ h)^T$  是平面坐标和大地高, 由空间坐标化为大地坐标, 再由高斯投影求得;  $\mathbf{D}$  是由数值导数方法求出的  $\frac{\partial (X \ Y \ Z)}{\partial (X_g \ Y_g \ h)}$  矩阵<sup>[1]</sup>.

误差方程(4)变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = -\mathbf{D}_i \begin{Bmatrix} \delta X_{gi} \\ \delta Y_{gi} \\ \delta h_i \end{Bmatrix} + \mathbf{D}_j \begin{Bmatrix} \delta X_{gj} \\ \delta Y_{gj} \\ \delta h_j \end{Bmatrix} - dt \mathbf{R}_i \begin{Bmatrix} \delta v_{Ui} \\ \delta v_{Ei} \\ \delta v_{Ni} \end{Bmatrix} + dt \mathbf{R}_j \begin{Bmatrix} \delta v_{Uj} \\ \delta v_{Ej} \\ \delta v_{Nj} \end{Bmatrix} - \mathbf{l}_k \tag{8}$$

基线  $k$  对法方程的贡献为

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_i^T p_k D_i & 0 & -D_i^T p_k D_j & 0 & dt D_i^T p_k R_i & 0 & -dt D_i^T p_k R_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_j^T p_k D_i & 0 & D_j^T p_k D_j & 0 & -dt D_j^T p_k R_i & 0 & dt D_j^T p_k R_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dt R_i^T p_k D_i & 0 & -dt R_i^T p_k D_j & 0 & dt^2 R_i^T p_k R_i & 0 & -dt^2 R_i^T p_k R_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dt R_j^T p_k D_i & 0 & dt R_j^T p_k D_j & 0 & -dt^2 R_j^T p_k R_i & 0 & dt^2 R_j^T p_k R_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -D_i^T p_k l_k \\ 0 \\ D_j^T p_k l_k \\ 0 \\ -dt R_i^T p_k l_k \\ 0 \\ dt R_j^T p_k l_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

总法方程写为：  
 $N_k \delta x = C_k$

1.2 起算条件

若将  $k$  点在  $t_R$  时刻(儒略日)的坐标固定为  $R_k$ , 相当于加上条件:

$$R_{km}^0 + \begin{Bmatrix} \delta X_k \\ \delta Y_k \\ \delta Z_k \end{Bmatrix} + \frac{(t_R - t_m)}{\Delta} \begin{Bmatrix} v_{X_k} \\ v_{Y_k} \\ v_{Z_k} \end{Bmatrix} = R^k$$

即

$$R_{km}^0 + D_k \begin{Bmatrix} \delta X_{gk} \\ \delta Y_{gk} \\ \delta h_k \end{Bmatrix} + \frac{(t_R - t_m)}{\Delta} R_k \begin{Bmatrix} v_{Uk}^0 \\ v_{Ek}^0 \\ v_{Nk}^0 \end{Bmatrix} + \frac{(t_R - t_m)}{\Delta} R_k \begin{Bmatrix} \delta v_{Uk} \\ \delta v_{Ek} \\ \delta v_{Nk} \end{Bmatrix} = R^k \tag{9}$$

- (1) 固定  $i$  点的沉降速度值, 相当于不解  $\delta v_{Ui}$ .
  - (2) 固定  $i$  点的水平位移速度值, 相当于不解  $\delta v_{Ei}$  和  $\delta v_{Ni}$ .
  - (3) 固定  $i$  点平面位置相当于不解  $\delta X_{gi}$  与  $\delta Y_{gi}$ .
  - (4) 固定  $i$  点的高程相当于不解  $\delta h_i$ .
- 在实际使用中, 这些基准条件往往不能准确已

知, 如已知的坐标或速度值存在误差, 处理中, 可以采用拟稳平差或对条件方程加权等方法处理<sup>[2]</sup>.

1.3 协因数阵

按式(8)组成法方程求解, 迭代至收敛, 得到各点在  $t_m$  时刻的站坐标  $(X_{gi} \ Y_{gi} \ h_i)^T$  和单位为  $\Delta d$  的站漂移速度  $v_{\Delta i} = (v_{Ui} \ v_{Ei} \ v_{Ni})^T$ , 及其协因数阵

$$Q' = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{10}$$

式中:  $Q_{11}$  与  $Q_{22}$  分别对应于求解的站坐标和速度;  $Q_{12}$  为协方差.

各站  $t_m$  时刻平面坐标与大地高  $(X_{gi} \ Y_{gi} \ h_i)^T$  很容易换算成  $t_m$  时刻的空间坐标  $R_{im} = (X_i \ Y_i \ Z_i)^T$ ,  $R_{im}$  与  $V_{\Delta i}$  的协因数为

$$\begin{bmatrix} Q_{RR} & Q_{Rv} \\ Q_{vR} & Q_{vv} \end{bmatrix} = P Q' P^T \tag{11}$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} D_1^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & D_n^{-1} & & \\ & & & E & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & E \end{bmatrix}$$

式中:  $n$  为总点数.

若站坐标参考时刻改为  $t_0$ , 速度单位改为  $m \cdot 年^{-1}$ , 分别以  $R_0$  和  $v$  表示, 则

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \frac{t_0 - t_m}{\Delta} E \\ 0 & \frac{365}{\Delta} E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_m \\ v_{\Delta} \end{bmatrix} \tag{12}$$

其协因数阵  $Q$  为

$$Q = \begin{bmatrix} E & \frac{t_0 - t_m}{\Delta} E \\ 0 & \frac{365}{\Delta} E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{RR} & Q_{Rv} \\ Q_{Rv}^T & Q_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ \frac{t_0 - t_m}{\Delta} E & \frac{365}{\Delta} E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{RR} + \frac{t_0 - t_m}{\Delta} Q_{Rv}^T + \frac{t_0 - t_m}{\Delta} Q_{Rv} + \left( \frac{t_0 - t_m}{\Delta} \right)^2 Q_{vv} & \frac{365}{\Delta} Q_{Rv} + \frac{365}{\Delta} \frac{t_0 - t_m}{\Delta} Q_{vv} \\ \frac{365}{\Delta} Q_{Rv}^T + \frac{365}{\Delta} \frac{t_0 - t_m}{\Delta} Q_{vv} & \left( \frac{365}{\Delta} \right)^2 Q_{vv} \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 1.4 基线残差与验后方差

$i$  至  $j$  在  $t$  时刻的基线向量估值  $\hat{\Delta R}_{ij}$  为

$$\hat{\Delta R}_{ij} = \hat{R}_{jm} + R_j \hat{v}_j dt - \hat{R}_{im} - R_i \hat{v}_i dt \quad (14)$$

基线残差为

$$\varepsilon_k = -\Delta R_{ij} + \hat{\Delta R}_{ij} \quad (15)$$

验后误差协因数阵为

$$Q_{ij} = AQA^T \quad (16)$$

式中:系数  $A$  的行数为 3,列数为总点数乘 6,在对应于  $i$  和  $j$  的坐标处为三维单位阵,在对应于  $i$  和  $j$  的速度处为三维单位阵乘  $dt$ .

$$A = (-E \quad E \quad -dtR_i \quad dtR_j) \quad (17)$$

基线长度的中误差为

$$\sigma_k^2 = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{X_j - X_i}{\rho_{ij}} & \frac{Y_j - Y_i}{\rho_{ij}} & \frac{Z_j - Z_i}{\rho_{ij}} \end{bmatrix} Q_{ij} \begin{bmatrix} \frac{X_j - X_i}{\rho_{ij}} & \frac{Y_j - Y_i}{\rho_{ij}} & \frac{Z_j - Z_i}{\rho_{ij}} \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

式中: $\rho_{ij}$  为用点  $i$  和  $j$  的坐标计算得到的距离.

式(17),(18)可以用于基线剔除.

## 2 算例

某大城市采用 GPS 技术监测城市形变,全网共有 50 个点,观测了 4 期,8 台双频 GPS 接收机同时观测,数据采样间隔为 30 s,观测时段长度为 8 h,每期约观测 7 d. 计算时,引入 IGS 的余山(SHAO)站数据一起处理,采用 IGS 精密星历,基线处理软件

为 GAMIT.

GAMIT 的基线结果采用以上模型处理,计算时,将其中一个 IGS 点的平面坐标固定,将其中一个基岩点的沉降速度固定为零,另外将几个有水准沉降资料的点的沉降速度固定. 平差后基线残差的均值为(0.000 1 -0.000 1 0.000 0)m,水平位移与沉降速度结果也很合理,说明模型正确.

## 3 结论

GPS 已经在城市形变方面得到较广泛的应用,笔者提出的整体平差模型,将各期 GPS 基线放在一起平差,平差参数为平面坐标、大地高和沉降速度,使得已知条件很容易加,先将坐标参考时刻定在观测中间时刻,将形变速度的单位定为  $m \cdot (\Delta d)^{-1}$ ,使得法方程性能良好,然后将坐标参考时刻从中间时刻改化为任意时刻,并将速度单位改化为惯用的  $m \cdot \text{年}^{-1}$ ,并推导了方差协方差阵,实际数据计算结果表明,模型正确.

## 参考文献:

- [1] Wang J, Iz H B. A practical GPS network adjustment method[J]. Survey Review, 1999, 35(272): 127-133.
- [2] 樊功瑜. 误差理论与测量平差[M]. 上海, 同济大学出版社, 1998.

FAN Gong-yu. Error theory and surveying adjustment[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1998.

(编辑:张 弘)