

WGS-84 与北京 54 的转换问题

王解先, 王军, 陆彩萍
(同济大学测量系, 上海 200092)

The problem of the coordinate transition between WGS-84 and BeiJing 54

Wang Jie-xian, Wang Jun, Lu Cai-ping

[摘要] GPS 测量得到的是 WGS-84 中的地心空间直角坐标, 而工程施工中通常使用地方独立坐标系, 要求得到地方平面坐标。如何实现其中的转换, 一直是工程施工中关心的热点。本文介绍了从 GPS 定位结果至平面坐标的两种转换模型。平面转换模型原理简单, 数值稳定可靠, 但只能适用于小范围的 GPS 测量; 空间转换模型可用于大范围 GPS 测量, 按实际情况又分为七参数转换和三参数转换两种。鉴于 54 椭球点的大地高通常不能精确已知, 文中比较了按这两种参数转换方法得到的平面坐标的精度, 得出大地高精度主要表现为对高程的影响, 对平面坐标影响较小的结论, 论文还讨论了七参数与三参数对转换结果的影响。

[关键词] GPS, 平面转换, 空间转换

[Abstract] Results of GPS positioning are usually represented in WGS-84 frame, but in construct projects, the local grid frame are usually adopted. How to carry out the coordinate transformation is always the problem concerned by the surveyor. This paper introduces two algorithms for transferring the GPS result to local grid frame, these are plane transfer model and the space transfer model. The theory of the plane transfer model is understandability and the transfer result is reliable, but it will not be suitable for large area GPS network. The space transfer model can be used in large area GPS network. According to the project situation, the space transfer model can be divided to seven-parameter and there-parameter model. Because of the ellipsoidal height on BeiJing-54 ellipse usually can not be precisely known, this paper analyze the its inference to plane coordinate precision, and gets the conclusion that the precision of the plane coordinate influenced by the ellipsoidal height is very small. The difference between seven-parameter and there-parameter model is discussed also.

[Keyword] GPS, plane transformation, space transformation

一、前言

随着 GPS 定位精度的不断提高, GPS 技术在测量中的应用也越来越广泛。由于 GPS 卫星星历表示在 WGS-84 坐标系中, 算得的 GPS 定位结果也直接地表示在 WGS84 全球坐标系中。我国测绘成果普遍表示在北京 54 坐标系中, 它以克拉索夫斯基椭球为参考椭球, 投影方式为 Gauss 投影, 以 3 度或 6 度带划分整个中国所在区域。由于我国北京 54 坐标系是五十年代建立的, 受当时观测和计算手段的限制, 精度不是很高, 我国大部分城市为了避免

Gauss 投影变形带来的不便，而采用地方独立坐标系。地方独立坐标系的建立仍采用克拉索夫斯基椭球，中央子午线定在城市中央，投影面定为城市平均高度。这些原因使得我国的平面坐标较复杂。

本文将就这些问题，详细介绍将 GPS 定位结果转换为平面坐标的算法，并进行精度对比，得出了一些有利于工程施工应用的结论和建议。

二、平面转换模型

假设北京 54 椭球的中心和坐标轴方向与 WGS84 椭球相一致，可通过平面转换模型，将 GPS 定位得到的大地经纬度和大地高 $(B_{84} \quad L_{84} \quad h_{84})^T$ ，通过以下过程转换成平面坐标 $(x_g, y_g)^T$ ：

1)由 WGS-84 的椭球参数，即椭球长半径和扁率，由 (1) 式将 $(B_{84} \quad L_{84} \quad h_{84})^T$ 换算至空间直角坐标 $(X \quad Y \quad Z)^T$ ：

$$\begin{cases} X = (N + h) \cos B \cos L \\ Y = (N + h) \cos B \sin L \\ Z = [N(1 - e^2) + h] \sin B \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{其中：} N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$$

2)由北京 54 椭球的椭球参数，由 (2) 式将 $(X \quad Y \quad Z)^T$ 换算至大地坐标形式 $(B_{54} \quad L_{54} \quad h_{54})^T$ ：

$$\begin{cases} L = \arctan(Y / X) \\ B = \arctan[(Z + Ne^2 \sin B) / \sqrt{X^2 + Y^2}] \\ H = \sqrt{X^2 + Y^2} \sec B - N \end{cases} \quad (2)$$

3)根据工程需要，确定中央子午线、投影面高程及北向东向平移量，由 (3) 式进行高斯投影，将 $(B_{54} \quad L_{54})^T$ 投影为 Gauss 坐标 $(x_g' \quad y_g')^T$ ：

$$\begin{cases} x = X + \frac{N}{2} \sin B \cos Bl^2 + \frac{N}{24} \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9h^2 + 4hh^4)l^4 \\ \quad + \frac{N}{720} \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4 + 270h^2 - 330h^2t^2)l^6 + \dots \\ y = N \cos Bl + \frac{N}{6} \cos^3 B (1 - t^2 + h^2)l^3 + \frac{N}{120} \cos B (5 - 18t^2 + t^4 \\ \quad + 14h^2 - 58t^2h^2)l^5 + \dots \end{cases} \quad (3)$$

以上步骤是在假定 54 椭球与 WGS-84 椭球的中心与坐标轴相同的前提下进行的，但实际中

还应考虑旋转平移缩放的问题。若 GPS 测定的大量点中，已知部分点的平面坐标为 $(x_g \ y_g)^T$ ，则可写出这些点的平面坐标 $(x'_g \ y'_g)^T$ 与已知坐标 $(x_g \ y_g)^T$ 之间的关系：

$$\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (1+r)R(\mathbf{y}) \begin{pmatrix} x'_g \\ y'_g \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中：

$(x_0 \ y_0)^T$ 为坐标平移量；

r 为缩放尺度；

$R(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{y}) & \sin(\mathbf{y}) \\ -\sin(\mathbf{y}) & \cos(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$ 为旋转矩阵， \mathbf{y} 为旋转角。

为求出 (4) 式中的平移、缩放尺度和旋转参数，至少需要已知两个平面点，如多于两个点，可按最小二乘法进行拟合求解。

对所有的 GPS 测定点经过以上 3 个步骤及公式 (4) 的计算，即可求得当地平面坐标。水准高程可以由大地高 h_{54} 扣除掉大地水准面差距求得，大地水准面差距可以根据大地水准面模型（如 EGM96）或水准重合点拟合求得。

平面转换模型原理简单，数值稳定可靠，可用于 RTK 手簿软件。但由于 (4) 式是一个线性变换公式，而 Gauss 投影变形是非线性的，它的一次项与 y_g^2 成正比，因此平面转换模型只适合范围较小的工程使用，对于大范围的 GPS 测量应使用空间转换模型。

三、空间转换模型

若 GPS 测定的点中部分点的平面坐标已知，对这些已知的平面坐标 $(x_g \ y_g)^T$ 进行 Gauss 投影反算计算，可得到大地坐标 (B_{54}, L_{54}) ，再加上大地高 h_{54} ，由 54 椭球参数按 (1) 式转换成空间坐标，以 $(X_{54} \ Y_{54} \ Z_{54})^T$ 表示，GPS 直接测定点的空间坐标以 $(X_{84} \ Y_{84} \ Z_{84})^T$ 表示，则两者的转换关系为：

$$\begin{pmatrix} X_{54} \\ Y_{54} \\ Z_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dx \\ Dy \\ Dz \end{pmatrix} + (1+k)R(\mathbf{a})R(\mathbf{b})R(\mathbf{g}) \begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix} \quad (5)$$

式中：

$(Dx \ Dy \ Dz)^T$ 是空间转换坐标平移量；

k 为缩放尺度参数；

\mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{g} 为旋转参数。

当已知的平面点多于 3 个时，由 (5) 式可以反求出这七个转换参数。由 GPS 测定点的

大地坐标 $(X_{84} \ Y_{84} \ Z_{84})^T$ 可以通过以下几步转换成平面坐标 $(x_g \ y_g)^T$ ：

- 1) 将 GPS 测定的 $(B_{84} \ L_{84} \ h_{84})^T$ ，由 WGS-84 椭球参数，按 (1) 式转换成空间坐标形式 $(X_{84} \ Y_{84} \ Z_{84})^T$ ；
- 2) 按 (5) 式将 $(X_{84} \ Y_{84} \ Z_{84})^T$ 换算为 $(X_{54} \ Y_{54} \ Z_{54})^T$ ；
- 3) 根据 54 椭球的椭球参数，按 (2) 式将 $(X_{54} \ Y_{54} \ Z_{54})^T$ 换算为大地坐标 $(B_{54} \ L_{54} \ h_{54})^T$ ；
- 4) 按工程的需要，确定中央子午线、投影面高程及北向东向平移量，由 Gauss 投影正算公式 (3) 求得平面坐标 $(x_g \ y_g)^T$ 。

空间转换模型适用于大范围 GPS 测量使用，但在实际施工过程中，根据施工精度的要求，又分为 3 种情况：在空间转换模型 (5) 式中，需求解七个参数，故称为七参数转换模型；若其中的缩放比例不变，不需求尺度参数，则称为六参数转换；若尺度参数和旋转参数均不求，则称为三参数转换。

对于七参数模型的求解，至少需要 3 个公共点；六参数模型的求解也至少需要 3 个公共点，因为尽管两个公共点有 6 个坐标分量，按 (5) 式可以列出 6 个观测方程，但这 6 个坐标分量中，只有 5 个是独立的；而由于两点间的距离是固定的，所以三参数模型可在只有一个公共点的情况下求解。

对于 54 椭球，点的大地高往往不能精确求得，因此求出的转换参数在数值上变化很大，这对实际施工带来的影响就值得关心，尤其是对平面坐标的精度影响。本文通过计算，分别验证了大地高精度对七参数和三参数转换模型的影响，并给出了有利的建议。

四、大地高精度对七参数和三参数转换的影响之对比

表 1 给出了 4 个点的 WGS-84 坐标和相应的 Gauss 平面坐标，中央子午线为 123 度，北向、东向的加常数均为 0，为了验证大地高精度对转换的影响，设这 4 个点对应的大地高有两组，其差别在百米量级。

表 1 四个公共点的 WGS-84 坐标和 54 坐标及对应的两组大地高

点 位	WGS-84 坐标			54 坐标 (中央子午线 123 度)			
	纬度	经度	大地高 (m)	北向 X_g (m)	东向 Y_g (m)	大地高 No.1(m)	大地高 No.2(m)
1	31°00'00"	121°00'00"	100	3432752.901	-191030.085	50	0
2	31°00'00"	122°00'00"	100	3431464.569	-95508.161	50	100
3	32°00'00"	122°00'00"	100	3542352.347	-94496.849	50	0
4	32°00'00"	121°00'00"	100	3543663.854	-189006.414	50	100

由这两组大地高求出的转换参数对应地列在表 2 中。由表 2 的结果，可看出转换参数在数值上差异很大，且转换中误差在数值上也很大。表 3 给出了对同一点利用两组转换参数求得的 54 坐标，设 GPS 测得的 WGS-84 坐标为纬度 31°30'00"、经度 121°30'00"、大地高 50

米，表 3 的结果表明，尽管两组转换参数差异非常大，但求出的最终结果却几乎一样。表 4 给出了两组转换参数对应于公共点的转换残差，由表 4 可看出，在北向和东向坐标的转换残差量级上基本一样，而 54 椭球上大地高的百米量级差异也全部体现在高程残差上。由表 3、表 4 的结果可得出：大地高对七参数转换模型的影响，尤其是平面坐标的影响是很小的，在工程的容许范围内。

表 2 对应于两组大地高求出的转换参数

	转换参数 1	转换参数 2
Dx	$1.0927 \pm 1.3422(m)$	-29.3414 ± 2790.6728
Dy	$-1.7833 \pm 1.1558(m)$	-20.4341 ± 2403.2382
Dz	$1.7489 \pm 1.1632(m)$	$1.7485 \pm 2418.6172(m)$
k	$9.353754 \pm .147307(PPm)$	$9.353868 \pm 306.285993(PPm)$
a	$-.000113 \pm .038854(s)$	$.313561 \pm 80.786773(s)$
b	$.000196 \pm .036848(s)$	$-.511673 \pm 76.616627(s)$
g	$.000140 \pm .042866(s)$	$.987289 \pm 89.127908(s)$

表 3 两套转换参数对同一点的转换结果差异(m)

	参数 1	参数 2	差值
X_g	3487447.9896	3487447.9895	0.0001
Y_g	-142513.3245	-142513.3249	0.0004
H	50.0000	50.0000	0.0000

表 4 两组转换参数对应的转换残差(m)

	转换残差 1			转换残差 2		
	DX_g	DY_g	Dh	DX_g	DY_g	Dh
1	-.016	.018	.000	-.014	.019	-49.733
2	-.016	-.018	.000	-.017	-.017	49.733
3	.015	-.019	.000	.019	-.020	-50.265
4	.016	.018	.000	.013	.017	50.265

在实际工程应用中，点位分布相对于地球表面而言往往是很小区域，地球半径 6000 余公里，对于小于 1000 公里的测区，各点的空间坐标(X_{84} Y_{84} Z_{84})的前 1、2 位数值是相

同的，因此空间转换模型 (5) 式右端的第二项 $(1+k)R(a)R(b)R(g)\begin{pmatrix} X_{84} \\ Y_{84} \\ Z_{84} \end{pmatrix}$ 对各点而言接

近于常数，与第一项 $\begin{pmatrix} Dx \\ Dy \\ Dz \end{pmatrix}$ 具有强相关性，即 3 个旋转参数和尺度缩放参数与 3 个平移参数

相关性较强，这也说明了表 2 中转换参数差别很大的原因。

由于旋转参数和尺度缩放参数与平移参数的强相关性，可以得出以下推论，在 GPS 测区较小时，七参数转换与三参数转换的效果相近。

仍采用表 1 的公共点坐标，利用三参数转换模型求得的两套转换参数见表 5。这时可以看出这两套参数在数值上比较接近。利用这两套转换参数，对 GPS 测得的纬度为 $31^{\circ}30'00''$ 、

经度 $121^{\circ}30'00''$ 、大地高 50 米的点求出的 54 坐标见表 6。由表 6 可看出这两套转换结果相差极小，其结果与表 4 所得结果一致，这说明对小区域而言，七参数模型与三参数模型的转换效果是一致的。

表 5 对应于两组大地高求出的三参数

	转换参数 3	转换参数 4
D_x	$-25.5086 \pm .2278$	-25.5103 ± 16.6682
D_y	$41.6260 \pm .2278$	41.6250 ± 16.6682
D_z	$32.7398 \pm .2278$	32.7398 ± 16.6682
k	0.0000000	0.0000000
a	0.0000000	0.0000000
b	0.0000000	0.0000000
g	0.0000000	0.0000000

表 6 两套转换参数对同一点的转换结果差异(m)

	参数 3	参数 4	差值
Xg	3487447.9906	3487447.9906	0.0000
Yg	-142513.3245	-142513.3225	-0.0020
H	49.9961	49.9961	0.0000

五、结论及建议

通过对 WGS-84 与北京 54 坐标转换算法的介绍，以及在空间转换模型中，大地高对七参数和三参数转换的结果影响比较，我们可获得如下一些有用的结论：

1. GPS 测定点可以通过先投影，再用平面转换模型转换到当地平面坐标，高程可以用高程拟合的方法来获取，即平面与高程分别转换得到。这种转换模型数值上稳定，但含有 Gauss 投影变形的影响，只适用于测区范围较小的情况下。
2. GPS 测定点通过空间转换，可同时得到平面坐标和高程，通常在测区范围较大情况下使用。采用空间转换模型时，高程的精度对平面坐标的影响很小，且当测区范围较小时，空间转换模型的七参数中，旋转参数和尺度缩放参数与坐标平移参数具有较强的相关性，使得七参数与三参数转换模型的效果相差不大。

鉴于工程施工中需要的是水准高，而非大地高，建议使用水准高代替 54 坐标中的大地高，来求空间转换参数，从而可以使 GPS 测定的坐标直接转换为平面坐标和水准高。这在无验潮水深测量等实时 GPS 定位应用中，使用方便。但应该注意的是空间转换模型是一个几何转换，GPS 点通过平移、旋转、缩放变换到 54 坐标系，公共点内部的结构被认为是刚性的。用水准高代替大地高时，尽管转换模型对高程并不敏感，转换出来的平面坐标不会受大的影响，但大地水准面的不规则性将体现在高程转换残差中，在大地水准面复杂的地区转换出来的水准高精度较低，实际应用时可以通过拟合模型，对高程转换残差进行拟合，在转换出来的高程上加一个修正量以获得精确的水准高。

[参考文献]

1. 武汉测绘学院控制测量教研室、同济大学大地测量教研室合编 《控制测量学》(下) 测绘出版社，1992
2. 朱华统、杨元喜、吕志平 编著，《GPS 坐标系统的变换》 测绘出版社，1994