第23卷 第9期 岩石力学与工程学报 23(9): 1424~1427
2004年5月 *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering* *May*, 2004

中厚软岩板静载弯曲时中面特性的时间相关分析

张晓春
(东南大学交通学院 南京 210096)

摘要 上覆岩层对采动岩体活动全部或局部起决定性作用，上覆岩层运动是一个复杂的时空过程，具有时效性。采用中厚软岩板，基于岩体流变的Burger模型，对中厚软岩板静载弯曲时中面特性进行了时间相关分析。结果表明，中厚软岩板中面位置在相当长的时间段内是随时间变化的，它受岩体的刚度、粘滞特性等因素的影响。对于采动岩体而言，初始阶段的支护是保持中厚软岩板稳定的关键。

关键词 岩石力学，中厚软岩板，中面特性，时间相关性，采动岩体
分类号 TD 322^{+}.1 **文献标识码** A **文章编号** 1000-6915(2004)09-1424-04

TIME-DEPENDENCY OF NEUTRAL SURFACE FEATURE OF MID-THICK SOFT ROCK PLATE UNDER STATIC LOAD BENDING

Zhang Xiaochun
(*Transportation College, Southeast University, Nanjing* 210096 *China*)

Abstract In the local or global movement of rock mass under mining, overlying strata play a key role. The overlying strata movement is a complicated space-time process and has time-dependent feature. Based on Burger model, the time-dependent feature of neutral surface of mid-thick soft rock plate under static load bending is studied by mid-thick plate model. The results show that the location of neutral surface of mid-thick soft rock plate will change with time in a long period and is affected by the stiffness and viscometric parameter of rock mass. For rock mass under mining, the support of surrounding rock mass in initial stage is critical to the stability of surrounding rock mass.

Key words rock mechanics, mid-thick soft rock plate, neutral surface feature, time-dependency, rock mass under mining

1 引 言

在层状岩体中进行矿体开采或地下结构的开拓，覆岩关键层对采动岩体全部或局部活动起决定性作用[1, 2]。如采矿工程中，一些较为坚硬的中厚度岩层在采掘活动中不仅对采场上覆岩体变形和破坏起重要作用，而且对下部采掘井巷围岩的稳定性有着至关重要的影响，现代岩层控制理论对这些岩层的力学机制进行了许多研究，先后提出了板(梁)、砌体梁和关键层诸多力学分析的结构模型和理论[3, 4]。事实上，岩层结构在岩体受采动过程中还具有时效性，其一，采动过程具有时间和空间上的持续性，其二，岩层固有的物理力学性能具有随时间变化的特性。因此，岩层变形和破坏的时间-空间统一性研究是必不可少的，该方面的研究已有初步成果[5, 6]，但中厚软岩板的时间相关性研究还很少[7]。

由于岩石材料具有不同的抗拉、抗压力学性能，因此，在中厚软岩板(以下简称中厚板)受力分析时，中面位置分析将是关键。本文针对层状岩体

2003年3月3日收到初稿，2003年5月15日收到修改稿。
作者 张晓春 简介：男，1965年生，1986年毕业于天津大学应用力学系，现任副教授，主要从事岩石力学和道桥力学方面的研究与教学工作。E-mail: zxc01@263.net。

万方数据

的结构特征，采用中厚板，基于岩体流变的 Burger 模型，对地下结构上层中厚板中面位置与岩体流变各种因素的关系进行较深入的研究，试图得到一些对工程实际有益的结论。

2　中厚板弯曲的控制方程

中厚板几何形状和坐标轴如图 1 所示。由于岩石材料抗拉、抗压的力学性能不同，因此，中厚板弯曲中面不在其几何中面。弹性挠度表示的板内应力分量分别为

$$\sigma_x=\begin{cases}-\dfrac{E_y z}{1-\nu_y^2}(w_{,xx}+\nu_y w_{,yy}) & (z\leqslant 0)\\ -\dfrac{E_l z}{1-\nu_l^2}(w_{,xx}+\nu_l w_{,yy}) & (z\geqslant 0)\end{cases}$$

$$\sigma_y=\begin{cases}-\dfrac{E_y z}{1-\nu_y^2}(w_{,yy}+\nu_y w_{,xx}) & (z\leqslant 0)\\ -\dfrac{E_l z}{1-\nu_l^2}(w_{,yy}+\nu_l w_{,xx}) & (z\geqslant 0)\end{cases} \tag{1}$$

$$\tau_{xy}=\begin{cases}-\dfrac{E_y z(1-\nu_l)}{1-\nu_y^2}w_{,xy} & (z\leqslant 0)\\ -\dfrac{E_l z(1-\nu_y)}{1-\nu_l^2}w_{,xy} & (z\geqslant 0)\end{cases}$$

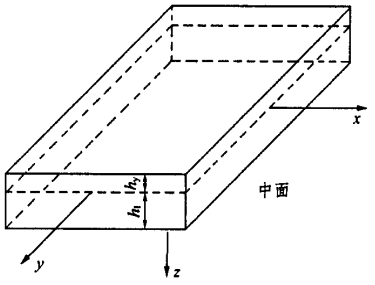


图 1　中厚板几何形状和坐标轴图

Fig.1　Geometry of mid-thick soft rock plate

设抗拉、抗压厚度分别为 h_l 和 h_y，相应的弹性挠度表示的板内应力分量通过对板厚度积分，并取 $\nu_y=\nu_l=\nu=0.5$，有

$$\left.\begin{aligned}M_x&=-D(w_{,xx}+\nu w_{,yy})\\ M_y&=-D(w_{,yy}+\nu w_{,xx})\\ M_{xy}&=-(1-\nu)Dw_{,xy}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中：D 为中厚板蠕变条件下的松弛函数，且 $D=\dfrac{4}{9}(E_y h_y^3+E_l h_l^3)$。板的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}N_{x,x}+N_{xy,y}&=0\\ N_{xy,x}+N_{y,y}&=0\\ Q_{x,x}+Q_{y,y}+q&=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}M_{x,x}+M_{xy,y}-Q_x&=0\\ M_{xy,x}+M_{y,y}-Q_y&=0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由(3)，(4)可得中厚板弯曲的控制微分方程为

$$D\nabla^4 w=q \tag{5}$$

3　粘弹性中厚板中面位置确定

3.1　弹性状态下拉、压模量不同时中面位置

由于中面位置决定了中厚板的应力分布和弯曲形状，因此，确定中面位置是中厚板分析的关键。由式(2)和(4)，可得

$$\left.\begin{aligned}Q_x&=-D(\nabla^2 w)_{,x}\\ Q_y&=-D(\nabla^2 w)_{,y}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}N_{x,x}&=\frac{1}{2}\frac{E_y h_y^2-E_l h_l^2}{1-\nu^2}(w_{,xx}+\nu w_{,yy})\\ N_{xy,y}&=\frac{1}{2}\frac{E_y h_y^2-E_l h_l^2}{1+\nu}w_{,xy}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

将式(7)代入式(3)的第 1 个方程，可得

$$\frac{1}{2(1-\nu^2)}(E_y h_y^2-E_l h_l^2)[w_{,xx}+(1-\nu)w_{,xy}+\nu w_{,yy}]=0 \tag{8}$$

对于受载荷作用并有小挠度弯曲的中厚板，上式中挠度对坐标的微分不能处处为零，因此，有

$$E_y h_y^2-E_l h_l^2=0 \tag{9}$$

又 $h_y+h_l=h$，联立式(9)，可得

$$h_l=k^{0.5}h_y,\quad h_y=\frac{h}{1+k^{0.5}},\quad k=\frac{E_y}{E_l} \tag{10}$$

$$\bar{h}=\frac{h_l}{h}=\frac{k^{0.5}}{1+k^{0.5}} \tag{11}$$

至此，中厚板弹性状态下的中面位置即被确定。

3.2　Burger 模型下拉、压模量

当材料力学性质随时间发生变化时，式(10)中 E_l，E_y 必将是随时间变化的函数。设中厚板材料的流变特性可由 Burger 模型描述，考虑拉、压载荷下模型单元的弹性和粘性特性不同，因此，E_l，E_y 可分别表示为[9]

万方数据

$$\left.\begin{aligned} E_y &= \frac{E_{my}E_{ky}t_{my}}{E_{ky}(t_{my}+t)+E_{my}t_{my}(1-e^{-t/t_{ky}})} \\ E_l &= \frac{E_{my}E_{ky}t_{my}}{E_{ky}(\phi t_{my}+t)+E_{my}t_{my}(1-e^{-\phi t/\beta t_{ky}})\beta} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

其中，

$$\beta=\frac{E_{my}}{E_{ml}}=\frac{E_{ky}}{E_{kl}} \quad (13)$$

$$\phi=\frac{\mu_{my}}{\mu_{ml}}=\frac{\mu_{ky}}{\mu_{kl}} \quad (14)$$

式中：E 为弹性模量；μ 为粘性常数；带下标的 t 为松弛时间；下标 m 和 k 分别对应 Maxwell 和 Kelvin 单元；β 和 ϕ 分别为 Burger 模型的 Maxweell 和 Klevin 单元的刚度比和粘性比，反映了中厚板材料在不同拉、压条件下的抗变形能力和流变性能。

3.3 蠕变条件下中厚板中面位置

将式(13)代入式(12)，并考虑无量纲化参数，有

$$\bar{h}=\frac{h_l}{h},\ \xi=\frac{t_{my}}{t_{ky}},\ T=\frac{t}{t_{my}},\ \alpha=\frac{E_{my}}{E_{ky}},\ \delta=\frac{\phi}{\beta} \quad (15)$$

可得流变条件下中厚板无量纲抗拉厚度的表达式为

$$\left.\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h_l}{h}=\frac{k^{0.5}}{1+k^{0.5}} \\ k &= \frac{(\phi+T)+\alpha(1-e^{-\delta\xi T})\beta}{(1+T)+\alpha(1-e^{-\xi T})} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

4 应用分析与讨论

式(16)表明，中厚板中面位置是 k 的函数，而 k 又是参量 β，δ，ϕ，α，T 和 ξ 的函数，这些参量是岩体材料所固有的，它们反映了岩体材料的抗变形能力和流变特性。因此，中厚板中面位置是随时间变化的。同时式(16)还表明，中厚板中面初始位置取决于 β(弹性状态)，最终位置取决于 ϕ(粘性状态)，在这一时间区段，尤其是在前期，β，α，δ 和 ϕ 对中面位置具有较大影响，而 ξ 在整个时间区段对中面位置的影响较小。为作进一步说明，根据式(16)，作图 2～6。考察 δ 分别取 1.2，1.5 和 2，其他参量保持不变(ϕ，α，T，ξ 都取 1)时，β 变化对中面位置的影响。在 $\beta\geqslant 1$ 时，对于 $\delta(\delta=\phi/\beta)$ 的不同取值，初始阶段的中面位置抗拉厚度从 0.5 快速增加，在接近 0.5 倍 Maxwell 松弛时间时达到最大，δ 越大漂移量越大，随后抗拉厚度又逐渐回复到 0.5，且 β 越大回复时间越长。在 $\beta<1$ 时，情况相反，对于不同的 δ，抗拉厚度快速减小的峰值时间增加了 1 倍以上，且随 δ 的增大而增加，最终仍回复到 0.5。图形还表明，在回复时间达到一定长度后，δ 对回复的影响可忽略，而且只要有足够长的时间，粘弹性中厚板中面位置仍将在中心处。

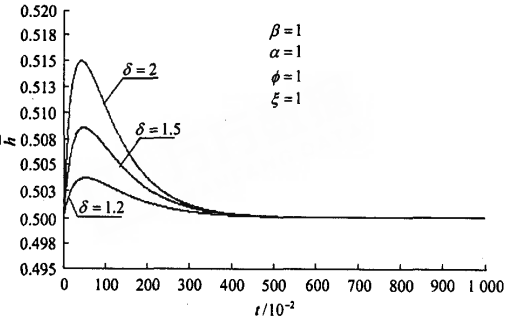


图 2　中面位置随时间变化曲线($\beta=1$)

Fig.2　Position of neutral surface on time history($\beta=1$)

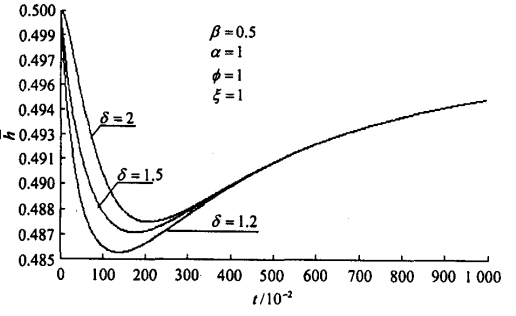


图 3　中面位置随时间变化曲线($\beta=0.5$)

Fig.3　Position of neutral surface on time history($\beta=0.5$)

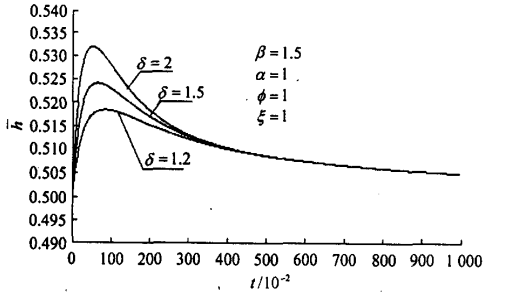


图 4　中面位置随时间变化曲线($\beta=1.5$)

Fig.5　Position of neutral surface on time history($\beta=1.5$)

对于参量 α，设参量 β，ϕ 和 ξ 不变，改变 δ 的大小，发现在参量 β，ϕ 和 ξ 取 1 时，α 对 $\delta=1$ 不敏感，中面位置保持不变，如图 5 中部的横线。而当 $\delta\neq 1$ 时，α 对中面位置的影响，在时间段的初始时段发生与 β 相似的变化，即当 $\delta>1$ 时，初始阶段的中面位置抗拉厚度从 0.5 快速增加，增加程

万方数据

度随α增大而增加，随后经历相当长的时间回复到板的几何中心；当$\delta<1$时，情况正好相反(图 5，6)。

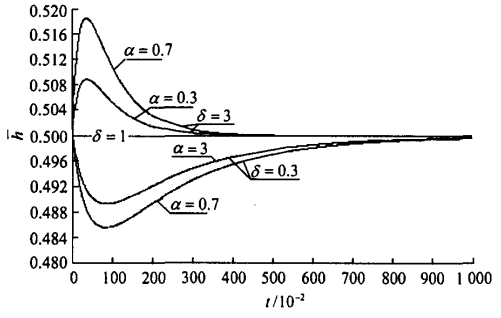


图 5　不同$\alpha(\alpha>1)$，δ下中面位置随时间变化曲线

Fig.5　Position of neutral surface on time history with different $\alpha(\alpha>1)$ and δ

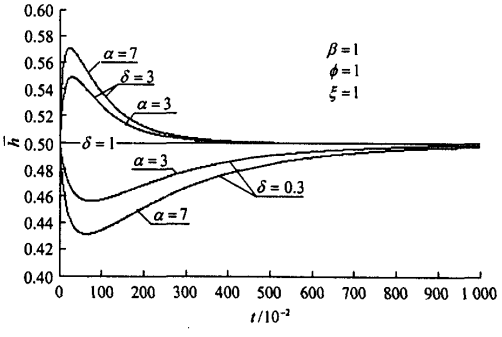


图 6　不同$\alpha(\alpha<1)$，δ下中面位置随时间变化曲线

Fig.6　Position of neutral surface on time history with different $\alpha(\alpha<1)$ and δ

在上一节中，详细讨论了材料参量β，α，δ对中厚板中面位置的影响，由式(15)可知：β($\beta=E_{my}/E_{ml}=E_{ky}/E_{kl}$)是材料抗压与抗拉的刚度比，$\beta>1$时，表明材料抗压性能超过抗拉性能，$\beta<1$时，表明材料抗拉性能超过抗压性能；$\beta=1$时，表明材料抗拉性能与抗压性能相当；$\alpha$($\alpha=E_{my}/E_{ky}$)为 Burger 模型的 Maxwell 和 Klevin 单元的刚度比，反映变形过程中 Maxwell 和 Klevin 单元承担变形的程度，$\alpha>1$时，表示 Maxwell 单元的刚度大于 Klevin 单元的刚度，$\alpha<1$时，表示 Maxwell 单元的刚度小于 Klevin 单元的刚度；δ($\delta=\phi/\beta$)是材料粘性比与刚度比的比，反映材料流变的强弱。由前面的分析可知，材料流变特性对中厚板中面位置的影响主要集中在整个过程的初始阶段，材料的刚度比只是影响中面在初始阶段的漂移量。这里采用的 Burger 模型具有流动特性，因此，中厚板在承载时由于流变作用重新分配应力，因流变在时间上的滞后，承载后的中面位置发生较大漂移，以响应材料拉、压性能不同造成的应力差。但在经过相当长时间后，因松弛效应中厚板的中面仍能回复到初始位置。值得注意的是，承载后初始阶段出现的中面漂移峰值，在图 2 中，中厚板抗拉厚度降低到最小，这对于岩石这种抗拉性能远弱于抗压性能的材料将是十分不利的。因此，从理论上来讲，地下空间上覆中厚板的稳定性取决于空间形成后的一段时间，其长短相当于该岩体压载荷下 Maxwell 单元松弛时间。由图 5 和 6 可知：如果中厚板$\delta<1$，中面将向受拉面漂移，抗拉厚度减小；如果$\delta>1$，中面将向受压面漂移，抗拉厚度增大；改变α值仅对漂移量有影响，而对中面的拉、压漂移方向没有影响。

5　结　语

由于岩体材料具有不同的抗拉、抗压力学性能，因此，中厚板分析的关键之一是中面位置的确定。在弹性条件下，中面在一确定位置；但在考虑岩体流变特性后，中厚板中面位置在相当长的时间段内是随时间变化的，它受岩体流变的刚度、粘滞特性等因素的影响。在蠕变作用下，中厚板中面位置经历初始阶段的较大漂移，再通过蠕变变形，进行应力的重新分配，然后回复到中心位置。而初始阶段的中面位置漂移，则是中厚板保持稳定的关键。

需要指出的是，Burger 模型具有流动特性，对中厚板具有一定的指导价值。因此，本文的研究还存在局限性，进一步的研究是必要的。

参 考 文 献

1　钱鸣高，缪协兴. 采动岩体力学——一门新的应用力学研究分支学科[J]. 科技导报，1997，(3)：29～31

2　缪协兴，钱鸣高. 采动岩体的关键层理论研究新进展[J]. 中国矿业大学学报，2000，29(1)：25～29

3　钱鸣高，缪协兴. 采场上覆岩层结构的形态与受力分析[J]. 岩石力学与工程学报，1995，14(2)：97～106

4　钱鸣高，刘听成. 矿山压力及其控制(修订本)[M]. 北京：煤炭工业出版社，1992

5　金丰年. 考虑时间效应的围岩特征曲线[J]. 岩石力学与工程学报，1997，16(4)：344～353

6　张晓春，张东升，缪协兴. 井巷围岩的延迟失稳机理分析[J]. 岩石力学与工程学报，2001，20(6)：830～833

7　Singh J G，Upadhyay P C. Creep bending of rock plates[J]. Mining Science and Technology，1988，6(1)：163～169

万方数据