地球化学图纹理的多重分形模拟

Frederik P. Agterberg

(加拿大地质调查所,渥太华 K1A 0E8,加拿大)

摘要: 利用一个简单的基于 De Wijs 模型的多重分形模型,可以模拟元素富集值的各种地球化学纹理. 每种纹理在平均值上是自相似的,因为将乘积阶次模型(multiplicative cascade model)应用到任何子区均能得出类似的纹理样式. 在其他的试验中,通过叠加一个二维趋势纹理(2-dimensional trend pattern)以及把它与一个常值富集模型混合,原始的自相似纹理就产生畸变. 本文将要研究这些畸变是如何改变用三步矩(3-step method of moments)所估测的多重分形谱(multifractal spectrum). 推导出了满足 De Wijs 模型纹理的离散和连续频率分布模型. 这些模拟纹理满足离散频率分布模型,当乘积阶次模型(multipicative cascade model)无限细分时,假设离散频率分布模型的上界是一连续频率分布,这个离散分布就在形式上逼近该连续频率分布的上边界. 这一极限分布在中心是对数正态的,但有两个巴利多(Pareto)分布的尾. 这种方法在矿产和油气评价中有重要的潜在意义.

关键词: 分形;多重分形;De Wijs 模型;地球化学;图形纹理;计算机模拟.
中图分类号: P628^{+}.1　　**文献标识码**: A
文章编号: 1000 - 2383(2001)02 - 0142 - 10
作者简介: Frederik P. Agterberg,男,64 岁,博士,加拿大国家地调所高级研究员,渥太华大学兼职教授,博士生导师,国际数学地质学会副主席,国际定量地层学会主席,荷兰皇家科学院外籍院士,主要从事数学地质、矿产资源评价和定量地层学研究.

0 引言

地球化学数据的数学模型仍然是地球科学家的重要挑战,从根本上来说,我们可得的资料数据是三维纹理的二维实现,它是一个或多个我们理解和认识很有限的成因过程的结果. 从观察数据到岩体的映射可能是困难的. 在本文中,多重分形是抽取地球化学纹理特征的重要方法. 假如一个地化纹理是多重分形的,它的参数,包括多重分形谱系,就能够从 2 维地图纹理上估计出来,并且从表面投影上得到它的映射,这种外推法类似于从 1 维观察值得到它的 2 维或 3 维空间值.

多重分形在物理、化学中的产生是单重分形的推广[1,2]. 多重分形可以看作是单重分形的空间缠结[3]. 我们应当牢记(这是有好处的):多重分形,和单重分形一样,是自相似的,与比例无关,并且,前者用于连续的空间变化纹理,而后者则用于二值纹理.

Herzfeld[4]考虑了多重分形与单重分形之间的联系. Herzfeld 等[5]指出洋底不能用单重分形模拟,通过引入一个稳定组分[6],用多重分形可以得到更好的模拟结果.

在地球化学数据的应用中,多重分形与单重分形的关系可以描述如下:假设一块岩体是分成等形状等大小的小块,每小块中某元素的平均富集品位值是可知的. 进一步假设我们已经得到富集品位的分布直方图. 假如化学元素有多重分形分布特征,那么与直方图的每个品位级相对应的这些小块就构成了单个的分形,它有可变的分形维数[7]. 这些小块的分形维数和对应元素品位值就形成了多重分形维数谱. 假如直方图的分级趋于 0 的话,这个多重分形谱系就构成了一连续曲线,代表了它的极限形式.

这些概念可表达为如下的数学形式,为方便起见,我们考虑一维空间,但其结果可以很容易推广到二维和三维空间. 假设 $\mu = x\varepsilon$ 代表长度为 ε 的线段上的金属总量; x 是金属的富集品位值. 在多重分形模型中假设有公式:(1) $\mu \propto \varepsilon^{\alpha}$,在这儿 $\propto$ 表示一种比例关系,α 是所谓的奇异幂,它与品位值 x 相关;

收稿日期: 2001 - 02 - 18
基金项目: 加拿大自然科学基金(NSERC Project).

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(2) $N_a(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-f(\alpha)}$,式中 $N_a(\varepsilon)$ 代表在长度为 ε 的线段上元素富集值 x 的总量,$f(\alpha)$ 是这些线段的分形维数. 多重分形维数谱是 $f(\alpha)$ 对 α 的映射.

在计算机对离散线段和单元的模拟试验中,前面的方法可以不作修改而应用. 但在实际应用中,x 和 α 可以是连续变化的. 那么研究空间就可以划分成小的等尺度单元,它们的 x 和 α 值接近常数,在后面要讨论的直方图方法中,具有同样 α 值的各单元的频率 $N_a(\varepsilon)$ 用来绘制特定 ε 的多重分形谱(multifractal spectrum).

Agterberg[8]利用多重分形来比较地质统计学和分形几何两个领域的概念和方法. De Wijs[9]和 Matheron[10]早期的地质统计学工作是否包含多重分形建模的基本元素仍有争议. 所谓的 De Wijs 模型是基于这种假设的:如果研究块段的富集值是 x,那么等分该块段,这两块的富集值就分别为 $(1+d)x$ 和 $(1-d)x$,它们是一个不依赖块段大小的独立常量. Matheron 证明该模型将产生 De Wijs 对数半变差函数:$\gamma(h) = \ln \beta$. 在式中 β 是一个与 d 相关的常量,h 表示研究线段上富集品位的采样距离. 后来,Cheng 等[11]证明了对数半变差函数是对相邻区一系列元素富集值多重分形方差的良好逼近(见本文后). Krige[12]也阐明了地球化学图纹理的自相似性概念:从 Witwatersrand 金矿矿脉图的一个小区域减去一个金含量平均品位图,其作用和从更大区域减去该图是相似的.

在 Agterberg[8]的文献中,显示了 De Wijs 模型的计算机一维模拟结果,本文则是为了解决多重分形纹理的二维模拟问题. 准均质性在本文中得到应用,因为临接区块的系列元素富集品位在任何方向上的多重分形半变差是相等的. 与一维空间相比,在二维空间工作有更好的优点,因为更多区块的结果可以同时考虑和显示. 本文模拟实验的目的有三:(1)收敛测试;(2)基本多重分形模型的人工畸变效应;(3)正态分布和 Pareto 分布尾.

(1)收敛测试. De Wijs 模型的特征是众所周知的. 在随机数字的计算机模拟实现中,它们很容易得到证实. 多重分形维数谱系的计算可采用以下两种方法:①直方图法;②Legendre 变换的矩量法. 矩量法公认能够得到比直方图法更好的结果. 这种假说同样可以用计算机模拟实验得到检验.

(2)基本多重分形模型的人工畸变作用效应. 计算机模拟的其他优点还包括多重分形下的基本假设可以改变. 多重分形是稳定的,因为它们的特性独立于观察点的位置. 在时间序列(time-series)分析和地质统计学应用中,这种稳定性假设是禁止的. 在地球化学应用中,可能存在某种趋势(或偏差),就像非连续块段(不同类型岩石间的接触带)之间的突然变化一样. 也有不止一种多重分形模型重叠的可能. 本文还将用计算机模拟的方法来研究基本模型的一些偏差,是为了找出多重分形维数多形谱系如何受到这些畸变的影响.

(3)正态分布和 Pareto 分布尾. Cheng 等[13]指出:在非常广的多重分形条件下,在元素富集频率分布曲线尾部,累积频率和品位值之间存在幂律关系. 在地球化学等值线图上,一条等值线封闭的区域面积的对数,与富集品位值的对数是对应的,因为这条等值线总体上是标绘了品位的最高值和最低值的分界线. 在一些类型的矿产资源评价中,Agterberg[14]把这一效应作为一种原则以便协调正态分布和 Pareto 分布尾的差距. 例如,虽然在矿体元素品位富集和矿产沉积粒度分布研究中,正态模型是十分有用的(参见 Harris[15]),但一些作者包括 Cargill 等[16]利用幂律(power-law model)模型也获得了极好的结果. 相类似的是,油藏大小频率极其接近正态分布[17]. 但 Drew 等[18]却趋向于使用 Pareto 分布. 计算机模拟有助于揭示正态分布曲线如何出现一个高值的 Pareto 分布尾.

1　多重分形纹理样式的构建

本文中描述的方法是有关乘积阶次模型的,它由 Meneveau 等[19]和 Schertzer 等[20]发展并使用. 然而,我们把 De Wijs 模型作为我们应用的开始.

我们假设把一方块区按下列方法分成 4 小块,并设这个区块的平均品位是 x:从中心沿相互垂直的方向把该区块分成 4 块,那么这些块的品位分别是 $(1+d)x$ 和 $(1-d)x$,式中 d 是 De Wijs 模型的基本常数,与分块的大小无关. 在每次切割中,两块被切矩形区中的任何一块的品位为 $(1+d)x$ 的几率都是 50 %. 其余两块自然就是 $(1-d)x$. 如果沿着相互垂直的线随机连续切分的结果是任何小的块获得最大品位值 $(1+d)^2 x$ 的几率是 25 %. 不管哪块子区获得最大值,沿着顺时针方向(或逆时针),四块子区各自的品位值分别是 $(1+d)^2 x$, $(1+d)(1-d)x$, $(1-d)^2 x$ 和 $(1+d)(1-d)x$. 这个过程可以这样通

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

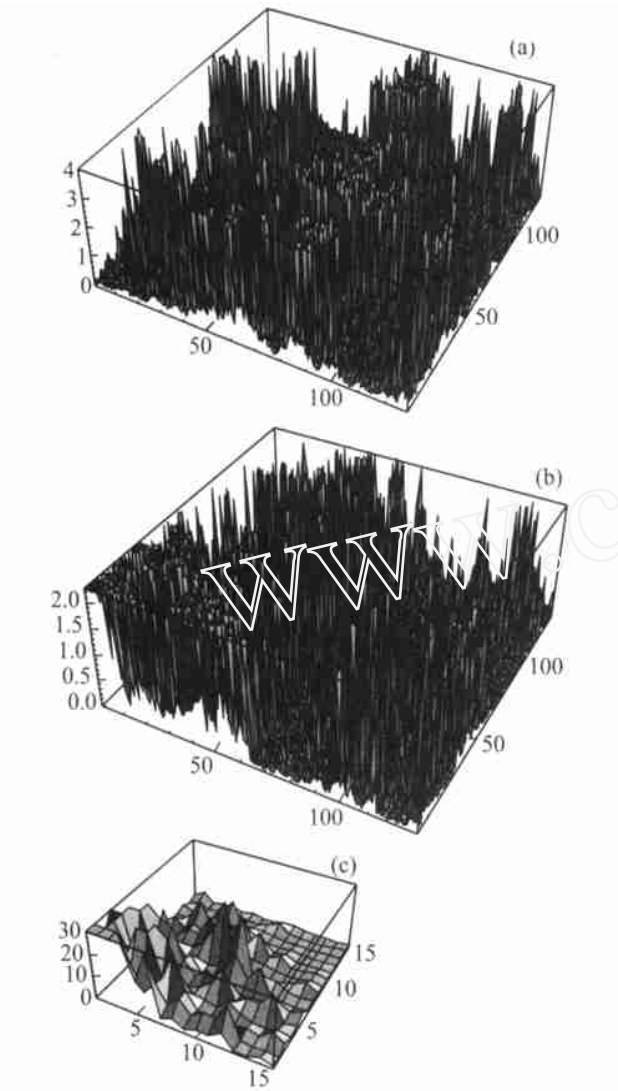

图 1 元素富集品位(整体平均值等于 1)两种模拟图纹的三维图

Fig. 1 Three-dimensional plots of two simulated map patterns for element concentration values (overall mean value is equal to 1) obtained by means of a stochastic version of the model of De Wijs ; largest values truncated at upper end

a. 原始模型的 128 ×128 个数据矩阵; b. 根据幂次律函数向原始模型数据矩阵叠加了趋势的矩阵,幂次律函数是通过一因子 10 使得矩阵最大值出现在原始数据最小值的相反方向处; c. b 中矩阵的一部分. (这些是用 Mathematica 4 软件获得的彩色图的黑白版本)

过把区块分成四份无穷地进行. 在每一步中,自相似性和准同向性仍然存在. 当这种元素是一种金属时,整体金属也一样.

不失一般性地, x 就可以赋值为 1. 图 1a 显示了经过 $2^7 = 128$ 对切分或者说是 $n = 14$ 次迭代后 $d = 0.4$ 的结果. 结果存在 $2^{14} = 16\ 384$ 个单元,它们富集品位值从 $0.6^{14} = 0.000\ 78$ 到 $1.4^{14} = 111.120\ 07$. 有 4 096 个值满足所谓的二项对数频率分布(logbinomial frequency distribution). 这些经过求对数得到的数值呈现二值化,在中心则显示接近正常. 图 1a 展示了地球化学数据的两个典型特征: (1) 突然的、非连续的变化; (2) 空间自相关性相对接近,因为邻接区域都有取值. 图纹都有自相关性的特性,因为把任何单元的品位值赋予了相等的单位,并且把研究区块划分为 128 ×128 块就可以产生一个相似图纹样式. 与计算机模拟实验所得到的图样花纹间的唯一差别,是由于改变实验的原始数据产生的,这些数据在实验的一开始是随机选择的,以便用它们得到新的假随机数字,样本的容量 4 096 是足够大的,它可以让多重分形的参数估计值相对准确. 这些参数是与 d 的数值相关的.

图 1b 展示的是 $d = 0.4$ 和 $n = 14$ 的实例. 它涉及通常称之为趋势或漂移的稳定背景上的区域偏差. 可以用以下方法向图 1a 的稳定变差图上增加一个二维幂次律趋势: (1) 把原始数据乘以一个因子,使其结果在坐标原点(0,0)处为 10,在图相反的角落即坐标(128,128)处为 1. (2) 通过一个因子调整所有的值,以便使得平均品位仍然等于 1. 因为在图 1b 中大于 2 的数值都被修正减小了(大于 4 的修正值仍在图 1a 中),单个值修正后仍大于 30 的原始数据的图纹样式显示在图 1c 中. 在本文的最后,将阐述图 1a 中的多重分形纹理谱与 1b 中只是稍有差异. 图 1a 与图 1b 存在差异的原因是稳定性的条件明显不同. 事实表明,在模拟中用到的这 4 096 个随机假数据集没有影响图纹的特性.

常数 d 取值 0.4 是为了更好地把该结果和以前 Agterberg[8] 得到的结果相比较. 而且,(这些结果)与极大影响多形的物理常数密切相关[19]. 在本文的后面,将会给出 British Columbia 西北 Mitchell-Sulphurets 地区金品位的近似多重分形分布结果[21],其参数 $d = 0.6$, $n = 20$.

构建图 1a 的过程并不是说和 Agterberg[8] 提出的一维实验完全不同. 还有另外一种方法,在既能保证区块的品位值为 x,又能保证它的准同向性的条件下,来分配 4 个值 $(1+d)^2 x$, $(1+d)(1-d) x$, $(1-d)^2 x$, $(1+d)(1-d) x$:在最开始,获得最大值的可能性为 25 %,其余 3 个区块可以随机获得剩下的 3 个值. 用这种方法做的一些实验产生的结果极

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其相似,图 1 中用到的简单方法更受欢迎.

1.1　多重分形维数谱的构建

构建方法[7]包括 3 步:第一,在双对数坐标纸上绘出序号 q 的集群分割函数 $\chi_q(\varepsilon)$ 和区块尺寸 ε 的映射图. 从下式得:

$$\chi_q(\varepsilon) = \sum_{n(\varepsilon)} \mu_i^q .$$

其中:$\mu_i = x_i\varepsilon^2$ 代表序号为 i,长度为 ε 的单元的金属总量;x_i 是第 i 个单元的品位值. 在图 1 所示的计算机模拟实验中,整个品位的富集值累加为 1. 总体上有 $n(\varepsilon)$ 个单元. 为了方便,对数的底取 2. 把最小块的边长度设置为 2(块的总数为 214),最大块的边等于 25(块总数 $n = 26$),使得 q 值从 - 10 以 0.5 的步长增加到 10,这样就有 41 个系列,在图 2 上由直线连起. 连接每个系列的 5 个点呈直线.

$$\chi_q(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\tau(q)} .$$

其中:$\tau(q)$ 是序号 q 的主体指数,∝表示成比例. 图 2 中直线的斜率可以用来估计 $\tau(q)$. $\tau(q)$ 和 q 之间的关系在图 3a 中表示出来了.

奇异指数 α_i 可以和 $\mu_i = x_i\varepsilon^2$ 的任何值产生联系. 在多重分形模型中,用 α 比用 x 更方便. 下节中将要讨论的直方图法是基于具有不同 ε 和 q 值的 α 直方图的构建上的. 力矩法的第二步是建立 $\tau(q)$ 和奇异指数 α 之间的关系. 他们之间的关系可以用下面公式写出

$$\partial\tau(q)/\partial q = \alpha(q) .$$

因此奇异指数可以用微分法从主体指数得出. 对于图 3b 的结果,一阶导数由在空间毗邻数据对 q ±0.001 的估计 $\tau(q)$ 决定. 把这些数据中任意两个的差异值除以 0.002 便可估计出 $\tau'(q)$. 最后,对图 3a 的 $\tau(q)$ 进行 Legendre 变换,得到图 3c 的分形维数谱 $f(\alpha)$,如下:

$$f(\alpha) = q\alpha(q) - \tau(q) .$$

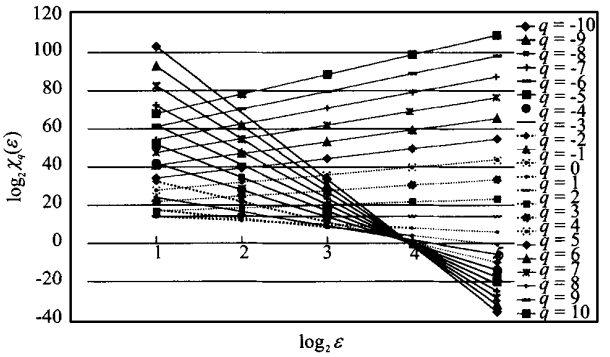

图 2　图 1a 中 128 ×128 个品位值的图样作的集群分割函数与分割单元边长度的双对数(底为 2)映射图

Fig. 2　Log-log plot (base 2) of mass-partition function versus length of cell side for pattern of 128 ×128 concentration values of Fig. 1a

最小单元的边 $\log_2\varepsilon = 1$. 仅仅当 q 为整数时,计算结果显示出来了. 直线的斜率在图 3a 中给出

图 3c 中标绘的点与一条理论极限曲线($f(\alpha)$, n 趋于∞)相吻合,表明力矩法在此类应用中能够很快得到合适的多重分形谱,这条极限曲线是下节(图 4)中将要构建的 De Wijs 模型的曲线.

1.2　直方图法

这里所描述的方法是基于 Evertsz 等[7]总结的一维系列的结果上的. 我们首先绘制一个奇异值 α_i 的直方图,这个奇异值与 $\mu_i = x_i\varepsilon^2$ 相关. 在 De Wijs 模型的二维型式中,品位值 x_i 的二值频率依赖于迭代数 n 和 d 的值. 给图 1 中 n 赋值 14, d 赋值 0.4,就能得到图 4a 所绘制的结果. 对于无穷大的 n,一个有限的多重分形谱($f(\alpha)$, $n \to\infty$)就能通过解析的形式推导出来. 图 4a 给出了由上述理论曲线得到的 $f(\alpha)$ 值,目的是为了和 $n = 14$ 时的 $f(\alpha)$ 相对比. 图 4 中的两个频谱存在系统偏差. 然而,在极端情况下,即 $\alpha_{\min} = \log_2[2/(1+d)]^2 = 1.03$ 和 $\alpha_{\max} = \log_2[2/(1-d)]^2 = 3.47$ 时,$f(\alpha) = 0$,这时两个频谱

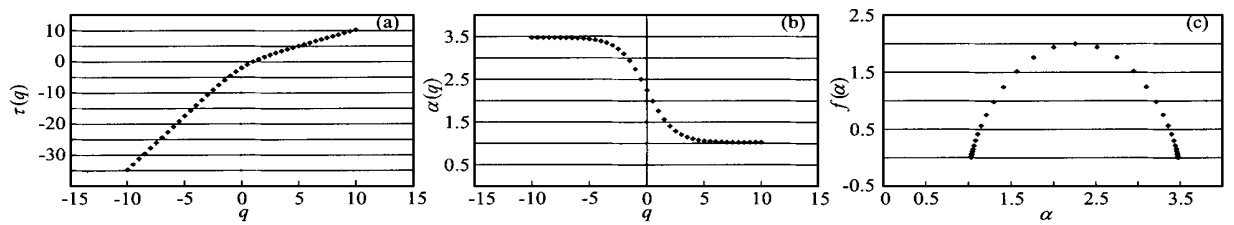

图 3　对图 2 继续运用计算矩的方法

Fig. 3　Method of moments continued from Fig. 2

a. 主体指数 $\tau(q)$ 和 q 之间的关系;b. 奇异指数 $\alpha(q)$ 和 q 之间的关系;c. 多重分形谱值 $f(\alpha)$ 与奇异指数 α 之间的关系

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

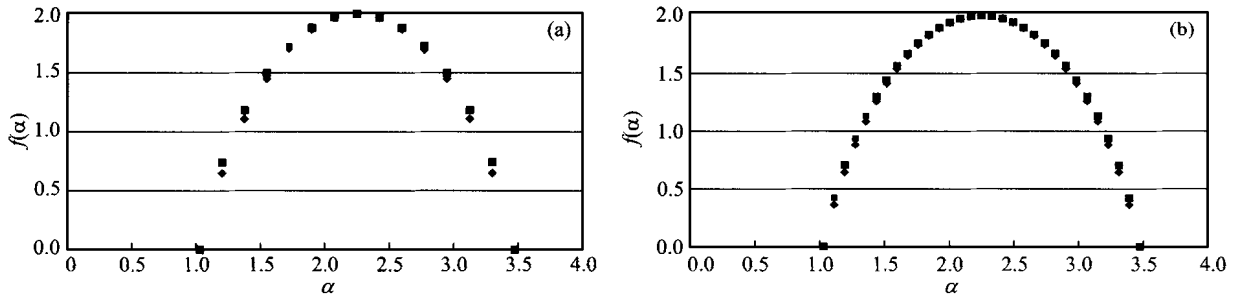

图 4 d 取不同值时直方图法在图 1 *a* 纹理中的应用

Fig. 4 *Histogram method applied to pattern of Fig.* 1 *a with different values* d, n

a. d = 0.4, n = 14; *b*. d = 0.4, n = 30

相吻合. 频谱相等的另外一个点出现在中心, 此 $f(\alpha) = 2$.

图 4b 给出了 $n = 30$ 时的类似结果. 直方图的值接近图 4b 的理论极限值, 但很明显它收敛得极慢. 另外, 前面描述的 3 步矩法可以很快得到 $f(\alpha)$ 的值(图 3c), 这些值和图 4(a 和 b)中的极限值极其吻合, 说明在多重分形谱($f(\alpha)$, $n \to \infty$)的极限形式时, 矩法是更好的选择.

因为对于特定值 n, 其 De Wijs 模型的实现是离散的, 它的多重分形谱很容易解释. 每个 $f(\alpha)$ 的值代表具有相同品位值的单元子集的分形维数(引言中已叙述). 只要用于计算的单元数足够大, 用格子记数的方法就可以给出极度接近图 4a 中 $f(\alpha)$ 值的分形维数, 这种方法对于 x 为任意值的单形双态纹理样式的实现都有效, 图 1a 给出了一个实例.

理论多元频谱($f(\alpha)$, $n \to \infty$)可用于 n 和 d 一定、品位值为 x_i 的理论频谱的计算中. 这些频率并不是与 n 无关, 当 n 增大时, 频率分布曲线就会连续改变, 这在本文最后将要讨论. 本文也将应用不同的比例尺度以及改变比例尺度的过程来推导图 4 所示的结果, 因此频率也可以从 $f(\alpha)$ 的极限形式得到. 所需的计算用 FORTRAN 程序详细给出了, 但附录 1 中的解释很简洁.

1.3 多重分形半变差图

理论上多重分形的半方差图符合下式[11,21]:

$$\gamma_k(\varepsilon) = \xi_2(\varepsilon) \cdot \left\{1 - \frac{1}{2}\left[(k+1)^{\tau(2)+1} - 2k^{\tau(2)+1} + (k-1)^{\tau(2)+1}\right]\right\}$$

式中: $k = 1, 2, \cdots$, 表示在多条线段 ε 中实测的系列单元距离, $\xi_2(\varepsilon)$ 是非中心化二阶矩, 它通过把 $q = 2$ 的集群分割函数除以分割单元的数目得到, $\tau(2)$ 是二阶质量指数(the second-order mass exponent).

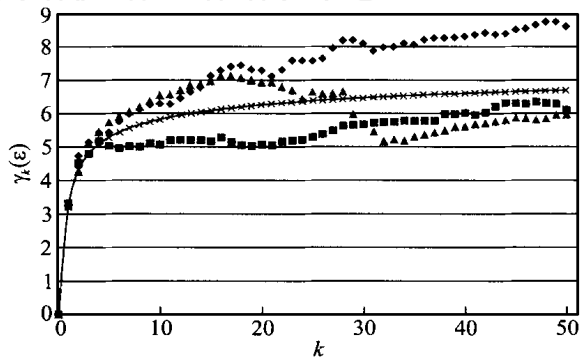

图 5 与 3 个实验半方差图相对比的理论多重分形半方差图

Fig. 5 Theoretical form of multifractal semivariogram in comparison with three experimental semivariograms

它来自纹理的 128 行数据, 这些纹理与图 1a 相似. 实验半方差图与连续曲线之间的偏差相对较大, 但可能没有很大的差别

$\xi_2(\varepsilon)$ 和 $\tau(2)$ 的估计值可从线段集群划分函数得到, 而集群分割函数又可通过累加图 1a 所示样式行、列中列举的系列单元的 μ_i 值的得到. 要说明的是 $\xi_2(\varepsilon)$ 代表了这一理论半方差的先验方差. 实验半方差的值也可以从图 1a 的行和列中估计出来.

图 5 所示的是与 3 个实验半方差图相对比的理论半方差图. (它们) 相关度是相符合的, 但要记住, 对于这种类型的应用, 如果样本太小了, 在长距离采样数据的半方差应用中就得不到相对准确的值.

1.4 基本模型假设的人工畸变

下面将要讨论图 1a 所示纹理畸变的两个实例. 第一, 把所有的品位值加上一个常量 0.01. 很明显, 这种变化太小, 并不能改变 De Wijs 模型的外形($d = 0.4$, $n = 14$). 在保持数据集群总数的条件下, 可以从 $\mu = x\varepsilon^2$ 的值中得到一个新的集群分割函数. 在集群分割函数的双对数坐标图显示了一些非线性

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

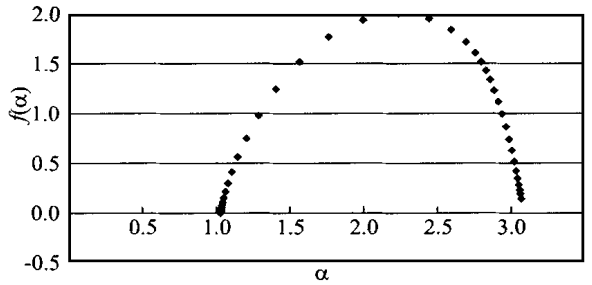

图 6　把所有的品位加上(图 1a)一个很小的值(0.01)得到的结果

Fig. 6　A small value (0.01) was added to all concentration values (cf. Fig. 1a)

与图 3c 相比,仅在图右区有差异

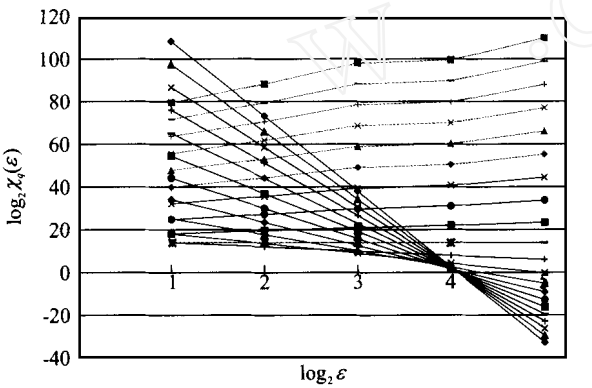

图 7　根据图 1b 中纹理的 128 ×128 个品位,得到的集群分割函数与分割单元边长度在双对数坐标图(底为 2)的映射关系

Fig. 7　Log-log plot (base 2) of mass-partition function versus length of cell side for pattern of 128 ×128 concentration values of Fig. 1b

前 3 个点的连线线段仅仅用于矩法. 符号的说明在图 2 中

的离散点(本文未给出). 然而,通过使用连续线段上采集点的数据集,用三步矩的方法完全可以产生图 6 所示的多重分形谱.

图 6 和图 3c 的左部分是极为相似的. 这是多重分形谱与最大品位值相关的一部分. 所有的值加上 0.01 只是对谱系右边代表的最小品位值产生较大影响,这样便产生了一些不对称性,$f(\alpha)$ 的最小值也大于 0. 事实上,这种类型的情况是会产生的,例如,假如岩体中的金属量以下两种方式出现:(1)高品位富集于硫化物晶体中的金属,拟合了 De Wijs 模型;(2)微量且接近常量地富集于硅酸盐晶体中的金属分布,构成了岩石数据集的整体.

第一个实例说明,要区别多重分形谱右边的微小畸变和模型对所有数据产生的微小系统偏差,是很难的. 第二个实例使用的模型如图 1b(c)所示. 它处理的是叠加一趋势后的非稳定性问题. 具有稳定性的基本模型的这种畸变影响了代表最大富集值的多形谱的左边部分.

第二个实例(图 7)的集群分割函数显示了非线性的离散点. 向右边倾斜的线段(右边是 q 的负值区)受到的畸变最小. 前面的 3 个数值,也就是 ε 的取较小的 3 个值时,即使当 q 接近 10 时也落在直线段上. 计算直线线段的斜率,利用三步矩的方法完成剩下的几步,就可以得到图 8 的多重分形谱. 虽然这种趋势(元素品位值的系统改变)十分强大,但在拥有最大值的左边,多重分形改变是较小的. 与图 3c 相比,可以发现左边的极限值变小了,$f(\alpha)$ 出现了负值. 在前面图 6 的实例中,图 8 与图 3c 之间的差别相对较小.

第二个实例的真正情况是什么呢,它的数据是某一元素相对较大的品位值,这些数据相对某一物源随机波动,距离物源越远,波动的幅度就变小. 这个实例由 Sim 等[22]对土壤中微量元素品位的多重分形模拟得到证实,这些数据采自 Manitoba 附近的废矿堆积,因为该废矿堆积产生的物质被周围的土壤吸收了. 在更大的距离上,这些微量元素的品位就变得很微弱,仅仅反映了一个背景值. 本实例应用的第二种情况是在一房间里采集的微量气体(CO)的波动数据,在房间里放置一放射源,并在不同的距离上安放监视器,这样就可以采集房间里微量气体(CO)含量的波动数据. Switzer 等[23]对探测到的富集值进行了时间序列分析,提出了一个统计模型. 离物源越近,平均富集值仍然较大,但它的波动幅度也

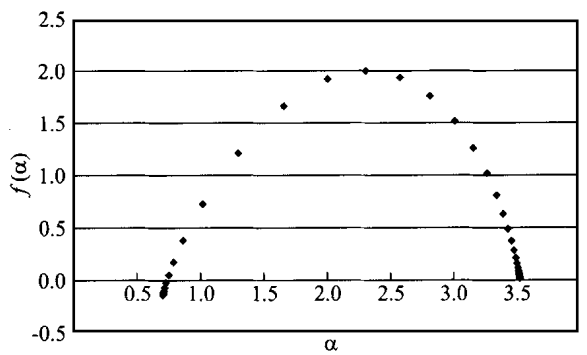

图 8　从图 1b 纹理开始用矩法计算得到的多元谱系

Fig. 8　Multivariate spectrum obtained by means of the method of moments starting from pattern shown in Fig. 1b

与图 3c 相比,在左区上有所区别

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

较大. 在一篇讨论稿中,Agterberg[24]建议对这种情况进行多重分形模拟.

虽然本节中描述的计算机模拟实验的应用范围是很小和很有限的,但笔者极力建议,在多重分形基本假设明显还是混乱情况下,这种多重分形模拟仍然可以提供有用的结果.

1.5 频率分布模型的建立

附录 1 的 FORTRAN 程序,不仅为我们提供了多重分形谱(multifractal spectra),也给出了在二维空间拟合 De Wijs 模型的品位频率分布. 正如前文所述,这一模型有一个极限形式的多重分形谱($f(\alpha)$, $n \to \infty$),它能用一连续的曲线来代替. 另一方面,De Wijs 模型的任何应用(见图 1a 等)将产生拟合对数二次模型的离散值. 直方图方法是建立在这些离散值基础上的,这些离散值可以转换为多重分形谱(图 4). 每一离散谱系又可以反向变换为原始频率分布. 通过反向变换的方法,频谱的连续极限形式($f(\alpha)$, $n \to \infty$)就可以表示为一连续频率分布. 因为变换依赖于 n 值,所以每一个 n 值就有一个单独的频率曲线. 当 n 增大时,这些连续曲线就更接近于离散频率分布.

品位值的对数方差拟合[8]如下:

$$\sigma^2(\ln x_n) = \frac{n}{4}\left\{\ln\frac{1+d}{1-d}\right\}^2.$$

对于更大的 n 值,其方差也增大. 同样,当最大品位值达到 ∞ 时,其结果是:对应 n 为 ∞(类似于多重形谱的极限形式)的品位值数据的频率分布的单一极限形式就不存在了.

说明品位值多重分形频率分布的实例的数据基础是1030个金元素的品位值,它们采自British Columbia 西北 Mitchell-Sulphurets 地区主体是侏罗纪火山屑碎岩的一 4 km ×6 km 范围内的岩块露头样品中. Cheng[21]建立了这些数据的正态 Q - Q 图,以及不同金品位边界值的多重分形谱[14]. 所有的谱有非常相近的 $\alpha_{\min} = \log_2\{2/(1+d)\}^2 = 0.65$,和相关的 $d = 0.579$. 为此,本例中将取 $d = 0.6$, $n = 20$. 除了一条水平线代表金最小的探测品位值 2×10^{-9} 外,Q - Q 图主要服从直线模式,代表 $\sigma^2 \ln x = 8.96$ 的正态分布. 这一估计(总的 $d = 0.6$)若用前面的对数方差等式替代,则 n 取值 18.94. 对于 Mitchell-Sulphurets 地区岩石中的金而言,这一估计可能太小,因为假如用 1 030 个金品位的数据来近似代替真实的频率分布,那么最小的一部分品位就没能被代替.

图 9a 展示的是 $d = 0.6$ 和 $n = 20$ 的 De Wijs 模型的离散和连续多重分形谱系. 这些结果和图 4 中 $d = 0.4$ 和 $n = 14$,30 时的结果相接近. 前面已解释过,这些新参数的挑选是在 Mitchell-Sulphurets 地区金的分布统计基础上的. 图 9b 中的两个频率分布,它们与图 9a 的两个谱相等价,在外形上是相似的. $f(\alpha)$ ($n \to \infty$)的频率在两翼上有较高值,但在中心和尾部两条曲线相协调. 二者的频率分布曲线在中心接近正态分布,在尾部是 Pareto 分布.

$f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0$ 的多重分形有 $\alpha \to \alpha_{\min}$ 和 $\alpha \to \alpha_{\max}$ 的 Pareto 尾,这一特性在 Cheng 等[13]的文章证明了. 要说明的是,Agterberg 等[25]通过把金品位的最大、最小值频率绘制在双对数坐标上,得到拟合的直线,他从最拟合的直线斜率上估计出 $\alpha_{\min} = 0.68$ 和 $\alpha_{\max} = 3.90$. 这些估计与图 9a 的端点具有较好的可比性. 在正态对数曲线的尾部出现 Pareto 类

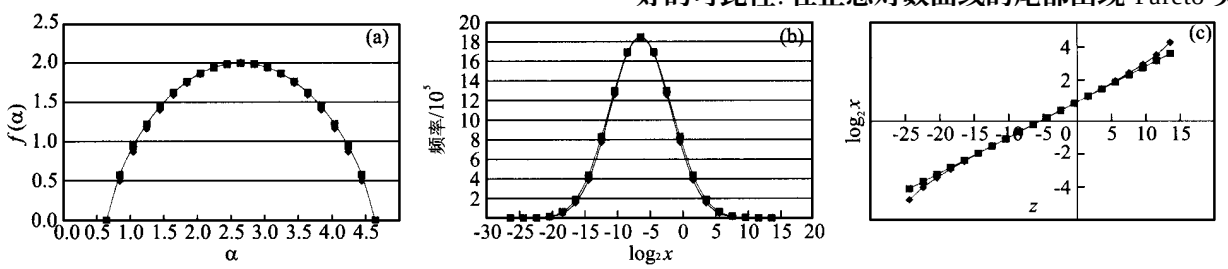

图 9 a. 直方图法在 d 取 0.6、n 取 20 时在品位数据中的应用;b. 与 a 中两个多元谱相关的频率分布曲线;极限形式的频率差不多接近对数二项频率,但不同的是 0 在中心和端点处;c. 在 Q - Q 坐标图上,上界频率分布的对数正态分布

Fig. 9 a: Histogram method illustrated in Fig. 4 applied to concentration values with $d = 0.6$ and $n = 20$; b: Frequency distribution curves corresponding to the two multivariate spectra shown in Fig. 9a; frequences of limiting form slightly exceed logbinomial frequencies but difference is zero in the center and at the endpoints; c: Lognormal Q - Q plot of upper bound frequency distribution shown in Fig. 9b

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

型离散这一特性,在图 9c 中的 Q - Q 正态图上清楚地展现出来了.图 9c 中的直线代表了中心的正态分布.它和图 9b 中心的接近正态分布相对应.对数正态曲线到尾部便向外发散说明多重分形频率分布的 Pareto 尾比对数正态分布的尾更微弱(更快地接近 0).

正如引言中指出的一样,中心是对数正态分布,尾部是 Pareto 分布的多重分形频率分布模型确实在矿产定量评价中成功地得到应用,虽然这两种分布是截然不同的[14].这一特征潜在的含义是十分重要的:虽然多重分形频率的尾部比对数正态的要微弱,但 Pareto 分布模型在应用中的频率从高值的尾部向中心的增幅相对较大.这可能会导致对低含量物质的过高估计,以及对小油藏的过大估计,这点 Mandelbrot 在最开始就指出了.

2　结论

假如说本文主张的多重分形方法能够精确描述自然界地球化学纹理,是很天真的.当然这(指模拟)也不是应用统计工具的目的.例如,通常的频率分布分析经常要处理含有不止一个峰值的混合观察数据.相类似的是,建立在区域化随机变量上的地质统计方法,经常得处理趋势或偏差.事实上,所有的方法都必须处理非连续性的存在,例如岩石不同组之间具有不同岩性的接触带.

本文所采用的模拟地球化学图纹理的 De Wijs 多重分形模型虽简单,但对于实际应用来说却是十分重要的工具.它的基本模型有自相似性(或尺度无关)和稳定性(即平均品位与位置无关)特点.多元半变异图通常存在一个先验方差,在地质统计的实际应用中,常与半方差相似.它存在一有极限的对称多形谱,这个谱系可以通过 3 步矩的方法,从 1,2,3 维数据集中很容易得到.它有一个在中心是对数正态分布在尾部是 Pareto 分布的频率分布.本文所描述的计算机模拟实验表明:基本模型(非稳定趋势或混合模型)的畸变对于多重分形谱的外形影响相对较小.与通常的地质统计方法相比多重分形方法的优点是它允许简单的频率分布分析.与通常的频率分布分析相比,它的优点是它的空间性,以及允许对它建立空间自相关模型.

本文基础来源于由 D. F. Merrim 和 J. C Davis 主编的 *Geologic Modeling and Simulation* 中一篇文章的手稿(计算机在地质中的应用,Plenum 出版社,纽约).感谢多伦多约克大学的 Qiuming Cheng 和 McGill 大学的 Shaun Lovejoy,他们提了有帮助的建议.感谢中国地质大学刘星为本文进行了中文翻译.同时笔者欢迎对文中缺点提出批评指正!

参考文献:

[1] Feder J. Fractals [M]. New York: Plenum, 1988. 283.

[2] Lovejoy S, Schertzer D. Multifractals, universality classes, and satellite and radar measurements of cloud and rain fields [J]. Jour Geophys Res, 1990, 95(D3): 20212034.

[3] Stanley H E, Meakin P. Multifractal phenomena in physics and chemistry [J]. Nature, 1998, 335(6189): 405409.

[4] Herzfeld U C. Fractals in geosciences-challenges and concerns [A]. In: Davis J C, Herzfeld U C, eds. International Assoc Math Geol Studies in Mathematical Geology [C]. New York: Oxford Univ Press, 1993. 176230.

[5] Herzfeld U C, Kim I I, Orcutt J A. Is the ocean floor a fractal ? [J]. Mathematical Geology, 1995, 27(3): 421-442.

[6] Herzfeld U C, Overbeck C. Analysis and simulation of scale-dependent fractal surfaces with application to seafloor morphology [J]. Computers & Geosciences, 1999, 25(9): 9791007.

[7] Evertsz C J G, Mandelbrot B B. Multifractal measures (Appendix B) [A]. In: Peitgen H - O, Jurgens H, Saupe D, eds. Chaos and fractals [C]. New York: Springer Verlag, 1992. 922953.

[8] Agterberg F P. Fractals, multifractals, and change of support [A]. In: Dimitrakopoulos R, ed. Geostatistics for the next century [C]. Dordrecht: Kluwer, 1994. 223234.

[9] De Wijs H J. Statistics of ore distribution [J]. Geologie en Mijnbouw, 1951, 13: 365375.

[10] Matheron G. Traité de Géostatistique Appliqué. Mémoires Bur Rech [J]. Géol Minières, 1962, 14: 33.

[11] Cheng Q, Agterberg F P. Multifractal modeling and spatial statistics [J]. Mathematical Geol, 1996, 28(1):116.

[12] Krige D G. Lognormal - De wijsian geostatistics for ore evaluation [M]. Johannesburg: South African Inst Mining Metall, 1978. 50.

[13] Cheng Q, Agterberg F P, Balantyne S B. The separation of geochemical anomalies from background by fractal methods [J]. Jour Geochem Exploration, 1994, 51:109-130.

[14] Agterberg F P. Multifractal modeling of the sizes and

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

grades of giant and supergiant deposits [J]. International Geology Review, 1995, 37(1): 18.

[15] Harris D P. Mineral resources appraisal [M]. Oxford: Clarendon Press, 1984. 445.

[16] Cargill S M, Root D H, Bailey E H. Estimating usable resources from historical industry data [J]. Economic Geol, 1981, 84: 10811095.

[17] Lee P J. Statistical methods for estimating petroleum resources [M]. Taiwan: Department of Earth Sciences, National Cheng Kung University, 1999. 270.

[18] Drew L J, Schuenemeyer J H, Bawiec W J. Estimation of the future rates of oil and gas discoveries in the western gulf of Mexico [J]. US Geol Survey Profess Paper, 1982, 1252: 26.

[19] Meneveau C, Sreenivasan K R. Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence [J]. Phys Review Letters, 1987, 59: 4241427.

[20] Schertzer D, Lovejoy S, Schmitt F, et al. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency [J]. Fractals, 1997, 5(3): 427471.

[21] Cheng Q. Multifractal modelling and spatial analysis with GIS: gold potential estimation in the Mitchell-Sulphurets area, nortwestern British Columbia [D]. Canada: University of Ottawa, 1994. 268.

[22] Sim B B L, Agterberg F P, Beaudry Ch. Determining the cutoff between background and relative base metal smelter contamination levels using multifractals methods [J]. Computers & Geosciences, 1999, 25(7): 1023-1041.

[23] Switzer P, McBride S. Modeling indoor air pollution using superposition [J]. Bulletin International Statistical Institute, Tome LVIII, 1999, Book2: 501504.

[24] Agterberg F P. Discussion of "Statistical aspects of physical and environmental science" [J]. Bulletin International Statistical Institute, Tome 58, 1999, Book3: 213214.

[25] Agterberg F P, Cheng Q, Wright D F. Fractal modeling of mineral deposits [A]. In: Elbrond J, Tang X, eds. Proceedings, APCOM XXIV, international symposium on the application of computers and operations research in the mineral industries [C]. Montréal, Canada: Canad Inst Mining Metall, 1993. 4353.

附录 1 De Wijs 模型中直方图法的 FORTRAN 程序

这个程序生成图 9 中的多重分形谱和频率分布,常数 $d = 0.6$ 和 $n = 20$ 在开始部分进行了定义,输出值写在文件 factoria.out 中.下列统计值利用计算机输出并打印在 Excel 表中.

1. xi:行数从 0 n.
2. value(i):品位值.
3. value2(i):品位值的对数(底为 2).
4. alpha(i):奇异性指数 α 从 $\alpha_{\min}$ $\alpha_{\max}$.
5. freq(i):品位的频率.
6. cumfreq(i):品位的累积频率.
7. cumfreql(i):累积频率的对数值(底为 2).
8. falpha(i):离散的多重分形谱 $f(\alpha)$.
9. falphe(i):多重分形谱的极限值 $(f(\alpha), (n \to \infty))$.
10. fre(i):falphe(i)导出的品位的频率.

```
      program factoria
      real fac(50), value(50), value2(50), alpha(50), freq(50),
     1     cumfreq(50)
      real cumfreql(50), falpha(50), falphe(50), fre(50)
      open(6, file = 'factoria.out', status = 'unknown')
      n = 20
      xd = .6
      eta = (1. + xd)/(1. - xd)
      amin = alog10(((eta + 1.)/eta) * *2)/alog10(2.)
      amax = alog10((eta + 1.) * *2)/alog10(2.)
      fac(1) = 1
      do 1 i = 2, n
      fac(i) = i *fac(i - 1)
1 continue
      freq(1) = n
      cumfreq(1) = freq(1) + 1.
      do 2 i = 2, n/2
      freq(i) = fac(n)/(fac(i) *fac(n - i))
      cumfreq(i) = cumfreq(i - 1) + freq(i)
2 continue
      do 3 i = 1, n/2 - 1
      freq(n/2 + i) = freq(n/2 - i)
      cumfreq(n/2 + i) = cumfreq(n/2 + i - 1) + freq(n/2 + i)
3 continue
      freq0 = 1.
      xi = 0.
      xn = n
      value1 = (1. + xd) * *n
      value21 = alog10(value1)/alog10(2.)
      alpha1 = - value21 *2./xn + 2.
      write(6, 1000) xi, value1, value21, alpha1, freq0, freq0, xi, xi, xi,
     1     freq0
      do 4 i = 1, n - 1
      xi = i
      value(i) = (1. + xd) * *(n - i) *(1. - xd) * *i
      value2(i) = alog10(value(i))/alog10(2.)
      alpha(i) = - value2(i) *2./xn + 2.
      constant = alog10(4.)/alog10(freq(n/2))
      falpha(i) = constant *alog10(freq(i))/alog10(2.)
```

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

```
      cumfreql(i) = alog10(cumfreq(i)) / alog10(2.)
      a1 = (alpha(i) - amax) / (amax - amin)
      a2 = (amin - alpha(i)) / (amax - amin)
      falphe(i) = a1 *alog10(a1 * *2) / alog10(2.) + a2 *alog10(a2 *
           *2) / alog10(2.)
      fre(i) = alog10(freq(n/2)) *alphe(i) / alog10(4.)
      fre(i) = 2. * *fre(i)
      write(6,1000) xi, value(i), value2(i), alpha(i), freq(i), cumfreq
          (i), cumfreql(i), falpha(i), falphe(i), fre(i)
4 continue
      valuen = (1. - xd) * *n
      value2n = alog10(valuen) / alog10(2.)
      alphan = - value2n *2. / xn + 2.
      cumfreqn = cumfreq(n - 1) + 1.
      cumfreqln = alog10(cumfreqn) / alog10(2.)
      zero = 0.
      write(6,1000) xn, valuen, value2n, alphan, freq0, cumfreqn, cum-
          freqln, zer + o, zero, freq0
1000 format (f3.0, f12.5, f10.5, f9.5, f8.0, f9.0, f10.5, 2f9.5, f10.2)
      stop
      end
```

MULTIFRACTAL SIMULATION OF GEOCHEMICAL MAP PATTERNS

Frederik P. Agterberg

(Geological Survey of Canada, 601 Booth Street, Ottawa, K1A 0E8, Canada)

Abstract: Using a simple multifractal model based on the model De Wijs, various geochemical map patterns for element concentration values are being simulated. Each pattern is self-similar on the average in that a similar pattern can be derived by application of the multiplicative cascade model used to any small subarea on the pattern. In other experiments, the original, self-similar pattern is distorted by superimposing a 2-dimensional trend pattern and by mixing it with a constant concentration value model. It is investigated how such distortions change the multifractal spectrum estimated by means of the 3-step method of moments. Discrete and continuous frequency distribution models are derived for patterns that satisfy the model of De Wijs. These simulated patterns satisfy a discrete frequency distribution model that as upper bound has a continuous frequency distribution to which it approaches in form when the subdivisions of the multiplicative cascade model are repeated indefinitely. This limiting distribution is lognormal in the center and has Pareto tails. Potentially, this approach has important implications in mineral and oil resource evaluation.

Key words: Fractal; multifractal; model of De Wijs; geochemistry; map pattern; computer simulation.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net