第五篇

高程测量新技术及其在实际操作中的应用

第一章　水准测量及其在实际操作中的应用

第一节　水准测量的基本原理

水准测量的基本原理是根据几何关系，利用水准仪提供的水平视线观测竖立在两点上的水准标尺以测定两点间的高差。

如图 5－1 所示，若要测定 A、B 两点间的高差，则须在 A、B 两点上分别竖立水准标尺，在 A、B 两点中间安置水准仪，用仪器的水平视线分别在 A、B 两点的标尺上读得标尺分划数 a 和 b，则 A、B 两点间的高差为

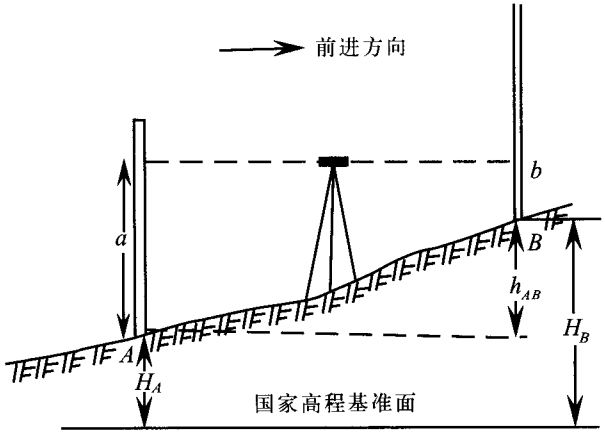


图 5－1

$$h_{AB} = a - b \tag{5-1}$$

若水准测量是沿 AB 方向前进，则 A 点称为后视点，其竖立的标尺称为后视标尺，读数值 a 称为后视读数；B 点称为前视点，其竖立的标尺称为前视标尺，读数值 b 称为前视读数。因此，公式(5－1)若用文字表达，即为：两点间的高差等于后视读数减去前视读数。高差有正(＋)、有负(－)，当 B 点比 A 点高时，前视读数 b 比后视读数 a 要小，高差为正；当 B 点比 A 点低时，前视读数 b 比后视读数 a 要大，高差为负。因此，水准测量的高差 h 必须冠以“＋”或“－”号。

显然，如果 A 点的高程 H_A 为已知，则 B 点的高程为

$$H_B = H_A + h_{AB} \tag{5-2}$$

水准测量也可以将仪器安置于 A 点，如图 5－2 所示。当视线水平时，读取 B 点的标尺读数 b，再量出仪器高 i，则 A、B 两点间的高差为

$$h_{AB} = i - b \tag{5-3}$$

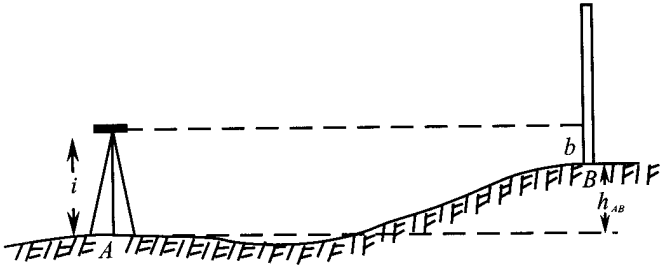


图 5－2

这种方法安置一次仪器，可测得周围一系列立尺点的高程。常用于面水平工程测量中。

在实际工作中，当 A、B 两点相距较远，或者高差较大，安置一次仪器不可能测得其间的高差时，必须在两点间分段连续安置仪器和竖立标尺，连续测定两标尺点间的高差，最后取其代数和，求得 A、B 两点间的高差。这种测量方法称为连续水准测量(亦称复合水准测量)。

如图 5－3 所示，应用(5－1)式可写出

$$\begin{cases} h_1 = a_1 - b_1 \\ h_2 = a_2 - b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_n = a_n - b_n \end{cases}$$

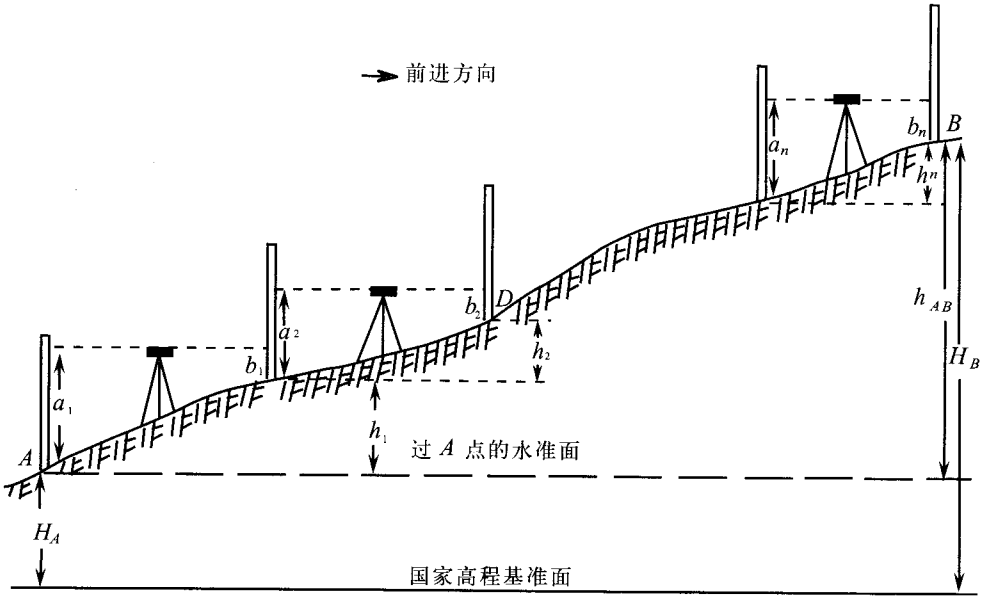


图 5－3

将以上各段高差相加，则得 A、B 两点间的高差 h_{AB} 为

$$h_{AB} = h_1 + h_2 + \cdots + h_n = \sum_1^n h_i \tag{5-4}$$

或

$$\begin{aligned} h_{AB} &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_1^n a_i - \sum_1^n b_i \end{aligned} \tag{5-5}$$

由此可知，水准测量的结果有以下规律：起点至终点的高差等于各段高差之总和，也等于所有后视读数之总和减去前视读数之总和。实际作业中，常用(5－4)式计算 A、B 两点间的高差 h_{AB}，而用(5－5)式检核有无计算错误。

若已知 A 点的高程 H_A，则 B 点的高程 H_B 为

$$H_B = H_A + h_{AB} = H_A + \sum_1^n h_i \tag{5-6}$$

在图 5－3 中，A、B 两点称为已知高程点或待定点。C，D，…，M 等为立尺点，其高程不需要测定，它们是用来传递高程的，这些立尺点叫转点。安置仪器的地方称为测站。这里着重指出：当下站的后视读数 a_i 还没读完时，转点千万不能动，否则高程就传递不过去。

第二节　水准测量的仪器和工具

水准测量所用的仪器和工具有水准仪、水准标尺和尺垫 3 种。

一、水准仪

(一)基本结构和性能

水准仪是水准测量的主要仪器。由水准测量的原理可知,水准仪是提供一条水平视线来测定地面两点之间高差的仪器。图 5 – 4 所示是 S_3 型水准仪的外形及其各部件的名称。

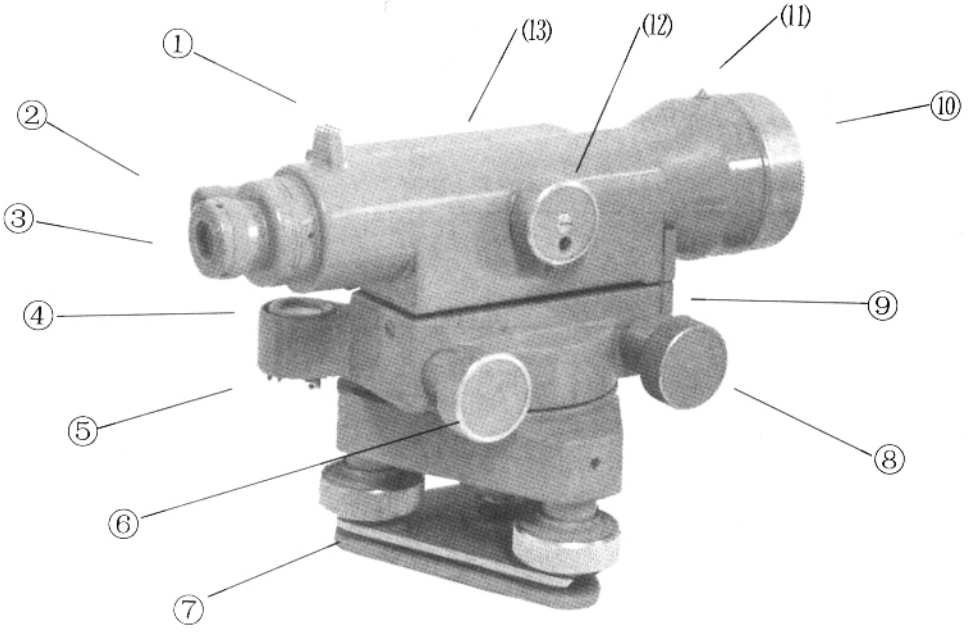


图 5 – 4

1—照准器;2—符合水准气泡观察窗;3—目镜;4—圆水准器;5—圆水准器校正螺丝;6—微倾螺旋;7—脚螺旋;8—水平微动螺旋;9—水平制动螺旋;10—物镜;11—准星;12—调焦螺旋;13—管水准盒

水准仪由照准部、基座和三脚架三部分组成。照准部的主要构件为望远镜和管水准器,二者固连为一体,在微倾螺旋作用下,二者可同时作微小倾斜,使管水准器气泡居中

时，标志望远镜视线水平。照准部可绕垂直轴在水平方向旋转，水平制动和微动螺旋可控制其左右转动，以精确瞄准目标。使用仪器时，用中心螺旋将仪器与三脚架头连接紧，旋转基座上的脚螺旋，使圆水准器气泡居中，置视准轴于大致水平位置。三脚架可以伸缩和收张。为架设仪器提供方便。

（二）望远镜

望远镜主要由物镜、目镜、十字丝板、调焦（对光）装置及固定和连接这些光学零件的望远镜筒所组成。

1. 望远镜成像原理

望远镜的物镜和目镜均为凸透镜，如图 5－5 所示，长焦距的透镜作为物镜，使远处物体 AB 发来的光线形成倒立而缩小了的实像 $A'B'$；再用一短焦距的透镜作为目镜，将物像 $A'B'$ 放大成为虚像，当人的眼睛处于某一恰当的位置时，便能看到这个虚像。如图 5－6 所示的十字丝板安置在物镜和目镜之间，观测目标时，要求物体在望远镜中的成像恰好与十字丝平面共面。

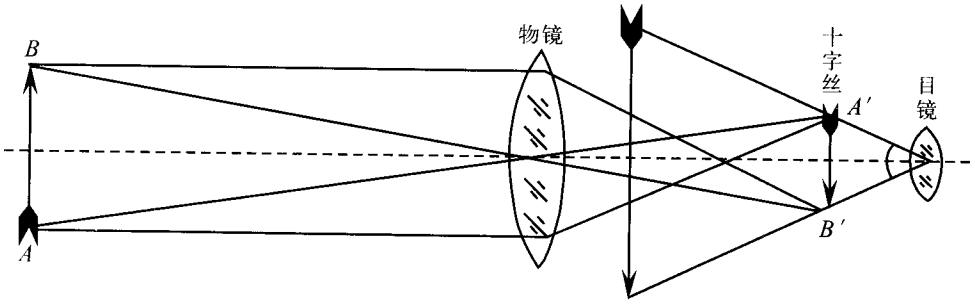


图 5－5

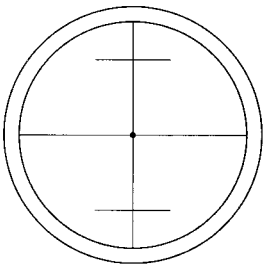


图 5－6

十字丝是刻在玻璃薄片上相互垂直的细线。竖直的一根称为纵丝（又称竖丝）。中间横的一根称为横丝（又称中丝、水平丝）。横丝上、下两根对称的用来测定距离的短线，

称为视距丝。十字丝网中心与物镜光心的连线就是望远镜的照准轴，又称视准轴，它可用于照准目标。望远镜的作用是将观察物体的视角放大了，故用望远镜能看清远处目标。

2. 望远镜的调焦(或对光)

望远镜调焦就是调节望远镜使十字丝和物像清晰的动作或过程。包括目镜调焦和物镜调焦。

目镜调焦的方法是：将望远镜对向白色墙壁或背景明亮处，旋转目镜对光螺旋，使十字丝看得最清晰，即成像在观测者眼睛的明视距离处。由于各人眼睛的明视距离不完全相同，因此在观测之前要进行适应观测者本人的目镜调焦。

物镜调焦的方法是：照准目标，旋转物镜对光螺旋，使成像落在十字丝平面上。从而可同时看清物像和十字丝。要使物像与十字丝平面重合，就应使物镜到十字丝面的距离等于像距。测量时因要观测远近不同的目标，像距将随之不同，为使物像与十字丝平面重合，物镜到十字丝面的距离应及时调节。图 5－7 为内对光望远镜的剖面图。其物镜调焦是十字丝平面不动，利用对光螺旋带动一凹透镜前后移动来改变像距，使像平面和十字丝平面重合。其物镜调焦原理如图 5－8 所示，通过移动凹透镜构成可变的较长的等效透镜，相当于调节了物镜到十字丝的距离。

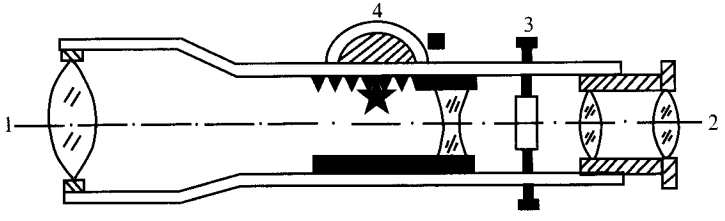


图 5－7

1—物镜；2—目镜；3—十字丝环；4—对光螺旋

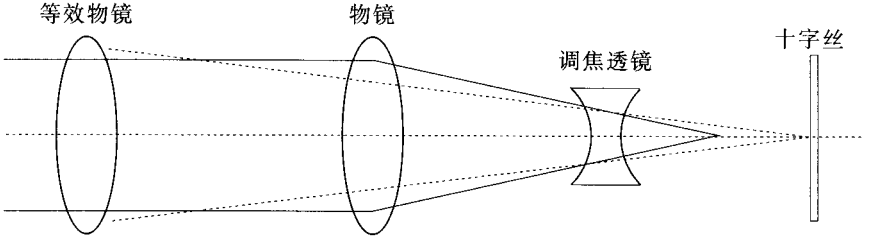


图 5－8

3. 视差

由于人的眼睛辨别微小差距的能力不够强，往往像平面与十字丝面还没有严密重合就误认为调节好了，当观测者眼睛在目镜后左右晃动时，则目标像与十字丝发生相对变化，由此给观测照准带来的误差称为视差。为了检查是否存在视差，可使眼睛在目镜后上下或左右稍微晃动，如十字丝的交点始终对着目标的同一位置，则表示没有视差 如果发现十字丝与目标有相对移动，则说明有视差存在。如图 5－9(a)及(b)所示，为像平面与十字丝面不重合，当人眼位于目镜中间 2 处时，十字丝的交点 O 与物体的像点 a 重合；当眼睛略向上于 1 处时，O 点又与 b 点重合；而眼睛向下于 3 处时，O 点便与 c 点重合了。如果连续使眼睛的位置上下移动，好像看到物体的像在十字丝附近上下移动一样。图 5－9(c)就不存在上述现象，说明没有视差。

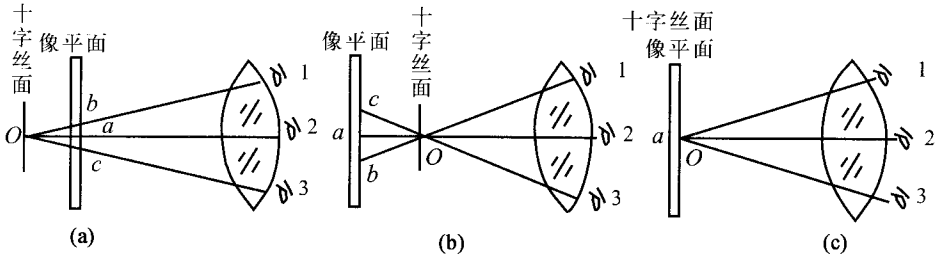


图 5－9

消除视差的方法是：首先按操作程序依次调焦，即将望远镜对方向明亮处，进行目镜调焦，使十字丝的分划线看得最清楚。然后再瞄准目标，用物镜对光螺旋使目标像也看得最清楚。其次要注意观测者的眼睛不要紧张，要始终处于松驰状态，防止眼球焦距变化。这样反复调 1～2 次，直到上下晃动眼睛时，十字丝与目标像不作相对移动为止。观测时仪器高度要安置适当，观测姿态端正，尽量使眼睛与望远镜视准轴一致，可以削弱视差的影响。

4. 望远镜的性能

望远镜的性能可以分为以下几项：

(1)放大率 V：望远镜的放大率就是通过望远镜观看物体的视角 β 和不用望远镜直接观看物体的视角 α 之比，如图 5－10。由于望远镜的长度相对物体的距离来说是很小的，可以认为在目镜后直接观看物体和在物镜处观看同一物体的视角 α 是相等的，因此 V 可以写为

$$V = \frac{\beta}{\alpha} \tag{5-7}$$

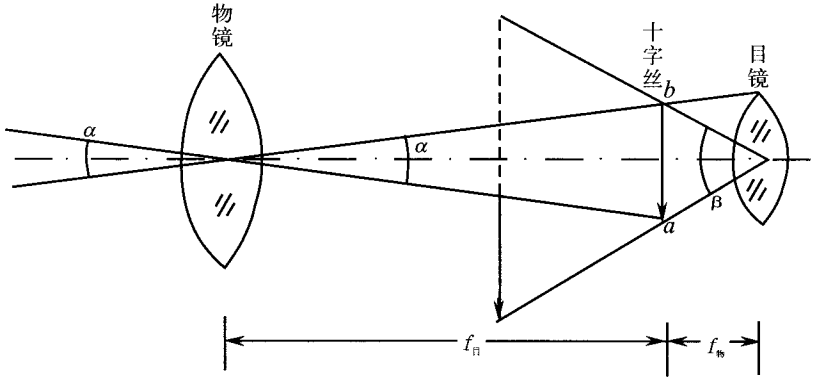


图 5－10

对正常人眼来说，当望远镜照准无限远的物体时，将成像在物镜的后方焦面上而得实像 ab，而 ab 距目镜的距离又近似地等于目镜的焦距 $f_{目}$。由图可知，因 α、β 较小，故可近似地认为

$$\beta = \frac{ab}{f_{目}} \qquad \alpha = \frac{ab}{f_{物}}$$

所以

$$V = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_{物}}{f_{目}} \tag{5-8}$$

即望远镜的放大率为物镜焦距和目镜焦距之比，只要 $f_{物} > f_{目}$，就能起到放大作用。

当观测近距离物体时，像距不等于焦距，因此放大率将稍有不同，通常用无穷远时的放大率作为望远镜的标准放大率。内对光望远镜按无穷远时等效物镜的焦距作为物镜焦距计算。

(2)视场：当望远镜不动时通过望远镜所能看到的空间范围对物镜光心的夹角 ε 称为“望远镜视场角”，通称视场。如图 5－11 所示，视场的大小是被十字丝光栏所限制的，因此根据光栏直径 a 和物镜焦距 $f_{物}$ 可以算出 ε 角，因 ε 甚小，故有

$$\varepsilon' = \frac{a}{f_{物}} \cdot \rho' \tag{5-9}$$

由此可知，视场角为光栏直径与物镜焦距之比。在实际中，仪器设计时通常使 a 约等于 $\frac{2}{3} f_{目}$，故有

$$\varepsilon' = \frac{2 f_{目}}{3 f_{物}} \cdot \rho' = \frac{2\rho'}{3V} \tag{5-10}$$

若改为以度为单位，则

$$\varepsilon^{\circ}=\frac{2}{3V}\cdot\rho^{\circ}\approx\frac{38^{\circ}}{V} \tag{5-11}$$

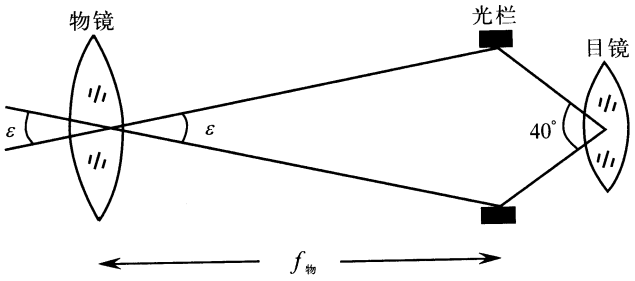


图 5-11

由此可得出如下结论：视场角与光栏直径成正比，与物镜焦距或望远镜放大率成反比，与物镜孔径无关。

(3)亮度：从理论上可以证明，通过望远镜看物体不可能比直接看更亮。当物镜孔径一定时，亮度与放大率成反比。光线通过透镜时，由于玻璃的吸收和反射也会使亮度降低。现代制造的透镜多在其表面镀增透膜，可以减少光量的损失。经过镀膜处理的透镜呈蓝紫色，擦拭透镜要特别注意，防止损伤镀膜。

(4)分辨力：望远镜的分辨力是指望远镜对最小物体的分辨能力。通常以最小物体对望远镜所张的夹角表示，称为最小分辨角。它关系物像的清晰程度。望远镜分辨物体的最小分辨角愈小，其分辨力愈高。一般认为人眼分辨物体的最小视角约为 $60''$，人眼通过望远镜观察时能将视角放大 V 倍，因此望远镜能分辨物体的最小视角为$\frac{60''}{V}$，从而提高了分辨力。

使用望远镜的目的就是提高人眼的分辨能力，从而提高照准精度。放大率愈大分辨力愈高，但放大率愈大则视场愈小，这对寻找目标造成了困难。同时，放大率增大则亮度将减小，亮度小也会降低照准精度。因此一定精度的仪器只能选用适当的放大率，普通测量仪器上望远镜的放大率约为 20～30 倍。

(三)水准器

水准器是一种能标出水平线和铅垂线(或水平面和铅垂面)的设备。在测量仪器上装设水准器是利用液体受重力作用后气泡居于最高位置的特性，来指示仪器的轴线(或平面)是否在水平(或竖直)位置。

水准器按它的形式分为圆水准器、管水准器和符合水准器 3 种。

1. 圆水准器

圆水准器是金属的圆柱形盒子与玻璃圆盖构成的。玻璃圆盖的内表面是圆球面，其半径为 0.5～2m，盒内装酒精或乙醚，玻璃盖的中央有一小圆圈，其圆心即为圆水准器的零点，连接零点与球面球心的直线 OC 称为圆水准轴。当圆水准器气泡的中心与水准器的零点重合时，则圆水准轴即成竖直状态。圆水准器在构造上，使其轴线与外壳下表面正交，所以当圆水准轴竖直时，外壳下表面 MN 处于水平位置，如图 5－12 所示。

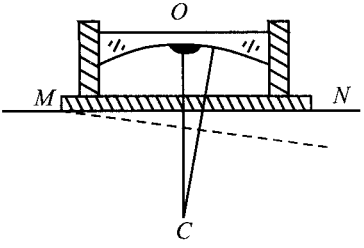


图 5－12

由于圆水准器内表面的半径较短，所以用圆水准器来确定水平（或垂直）位置的精度较差。在实际工作中，常将圆水准器作为概略整平之用。精度要求较高的整平，则用管水准器或符合水准器来进行。

2. 管水准器

管水准器是由玻璃管构成，其纵剖面的内表面为一定半径的圆弧，如图 5－13（a），其半径为 8～100m，最精确的可达 200m，在管内注入轻而易流的液体，如酒精或乙醚，注满后再加热，使液体膨胀而排出一部分，然后将玻璃管开口的一端封闭，待液体冷却后，管内即形成一个水准气泡。

水准管圆弧的中心点 S 称为水准器的零点，过零点与圆弧相切的切线 HH，称为管水准轴，简称水准轴。根据气泡在管内占有最高位置的特性，过气泡中心所作的切线必为水平线。

为了保护水准器，使它不易破碎，常将它安装在长圆形开口的金属套内，并用石膏固定，如图 5－13（b）所示。

当气泡中心位于水准器的零点时（简称为气泡居中），则水准轴成水平位置。气泡中点的精确位置可由水准管上所刻的分划线来确定，一般水准管上每隔 2mm 刻一分划线。有的水准管在零点处有特殊标记，如图 5－14（a）；多数水准管上没有零点标记，需取气泡两端相对称的分划来确定气泡中点的位置，如图 5－14（b）所示。

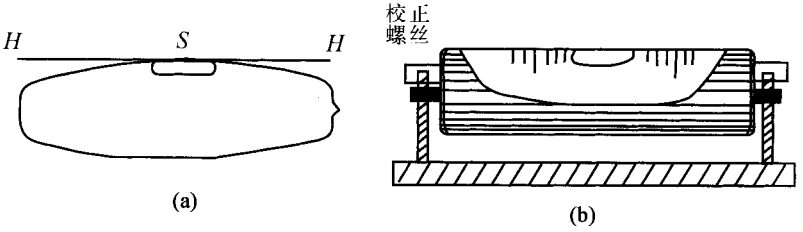


图 5－13

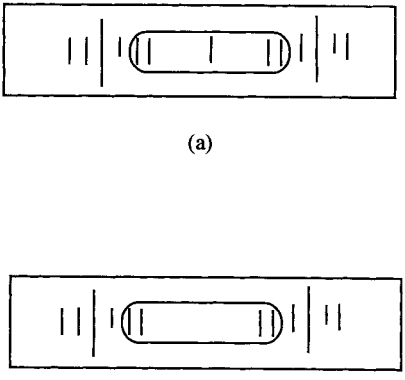


图 5－14

水准管上每一格(2mm 的圆弧)所对的中心角 τ 称为水准器的分划值,如图 5－15 所示。分划值与水准管的圆弧半径 R 有下列关系

$$\tau'' = \frac{2\text{mm}}{R\,\text{mm}} \cdot \rho'' \tag{5-12}$$

由上式可知:R 与 τ 成反比,当 R 自 8m 至 100m 时,其 τ 值约自 1′至 4″;当 R 为 200m 时,τ 值约为 2″。

在图 5－15(a)中,气泡中心 O 与零点 S 重合,水准轴 HH 居于水平位置。而在图 5－15(b)中,气泡中心偏离一个分划,此时水准轴 HH 与水平线 $H'H'$ 之交角为 τ 值。所以,分划值也可理解为气泡移动一格时,水准轴所变动的角值。因此,管水准器还可用来测量水准轴与水平线间的夹角,如气泡中心偏离零点 n 格,则此时水准轴与水平线的交角为 $n \cdot \tau$。

用水准管调整仪器某部分成水平(或竖直)位置的程度以及测定倾斜角的精度,称为水准器的灵敏度。它取决于分划值的大小。分划值大,灵敏度低,精度差;分划值小,灵敏度高,精度高。但水准器的灵敏度愈高,气泡愈不易稳定,使气泡居中所费的时间愈

多。所以水准器的灵敏度要与仪器的其它部分及工作要求相适应。

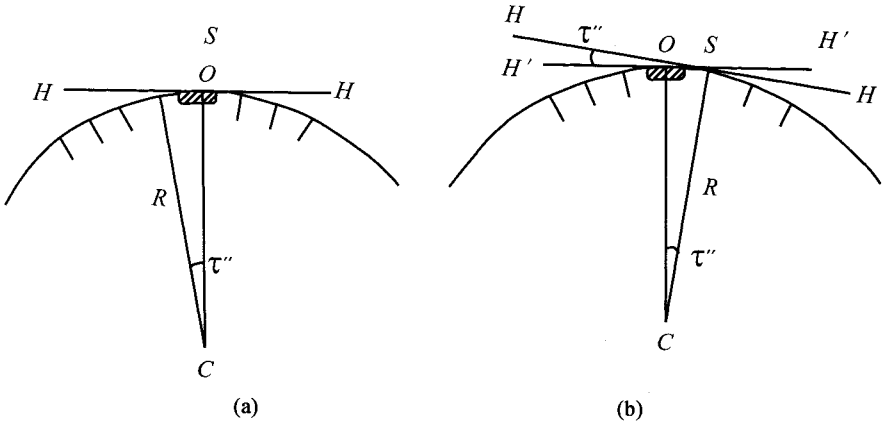


图 5－15

3．符合水准器

符合水准器是在管水准器上方装一组棱镜 1、2、3，借棱镜组的折光作用，把水准气泡两端的影像传递到望远镜旁的小窗内，使观测者不必移动位置，就能在望远镜目镜旁的小窗内，看到水准管的气泡两端的半影，如图 5－16。如两半影成图中 4 的形象称为气泡符合，表示气泡已居中 如呈图中 5 的形象，说明气泡不居中，可旋转微倾螺旋，使呈现 4 的形象。符合水准器可以提高观察气泡居中的精度。

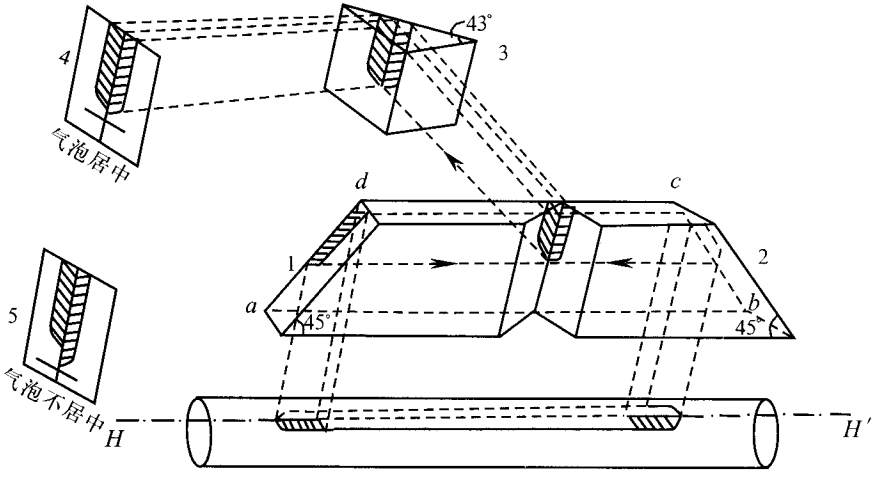


图 5－16

二、水准标尺

水准标尺是水准测量的重要工具，水准测量作业时与水准仪配合使用，缺一不可。水准标尺是选用伸缩性小、不易弯曲、质轻而坚硬的木料制成，也有用其它材料如玻璃钢制作的，精密水准标尺采用膨胀系数极小的合金材料制成。水准标尺的构造式样有直尺、折尺和塔尺。直尺长为 3m、折尺长 4m、塔尺长为 5m，折尺、塔尺可以折叠和缩短，便于使用和运输，但接头处易发生损坏，影响尺子的精度，所以较高精度的水准测量规定只能用直尺。为防止磨损，尺子上、下两端均钉有铁片。

用于普通水准测量的标尺一般为区格式双面直尺，称为双面水准标尺，如图 5－17 所示，它有两个显著的特点：

(1)尺面基本分划为 1cm。黑白相间的一面为黑面尺，红白相间的一面为红面尺；每分米处注以倒写的数字，以便观测时呈现正像数字。

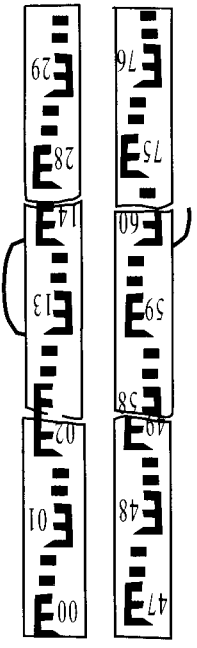


图 5－17

(2)必须成对使用。为了避免观测时产生印象错误和每站的计算检核，每对双面标尺的黑面底部起点均为 0，而红面底部起点分别为 4687 和 4787(mm)。切不可将两根 4687 或两根 4787 的标尺当一对标尺使用。

当没有双面标尺时，也可以使用长 3m 的具有 cm 分划的单面水准标尺。为了使水准标尺能竖立直，有些水准标尺上装有圆水准器，当圆水准器的气泡居中时，表示水准标尺立于铅垂位置。

三、尺垫、尺桩

在进行水准测量时，为了减小水准标尺下沉，保证测量精度，每根水准标尺附有一个尺垫（或尺桩），使用时先将尺垫（或尺桩）牢固地踏入地下，再将标尺直立在尺垫（或尺桩）的半球形的顶部上，其形状如图 5－18 所示。尺垫用一般地区的水准测量，尺桩用于土质松软地区的水准测量。

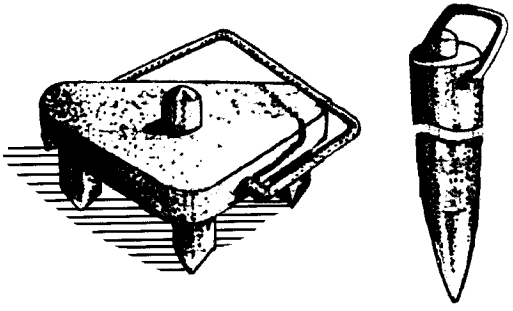


图 5－18

第三节　水准仪的使用

在测站上整置水准仪的基本操作步骤包括粗平、照准、精平和读数。

一、粗平

在测站上架设三脚架，使脚架头大致与观测者身高相适应，架头大致水平。把水准仪取出，用中心螺旋将仪器固定在三脚架上。然后将三脚架的两脚踩入土中，用手摆动第三条腿，使圆水准器的气泡靠近圆圈时，将该脚踩实。若气泡还不居中，再旋转脚螺旋使气泡移至圆圈中央。使圆水准器气泡居中的操作称为粗平（即概略整平）。粗平的操作步骤如图 5－19 所示：

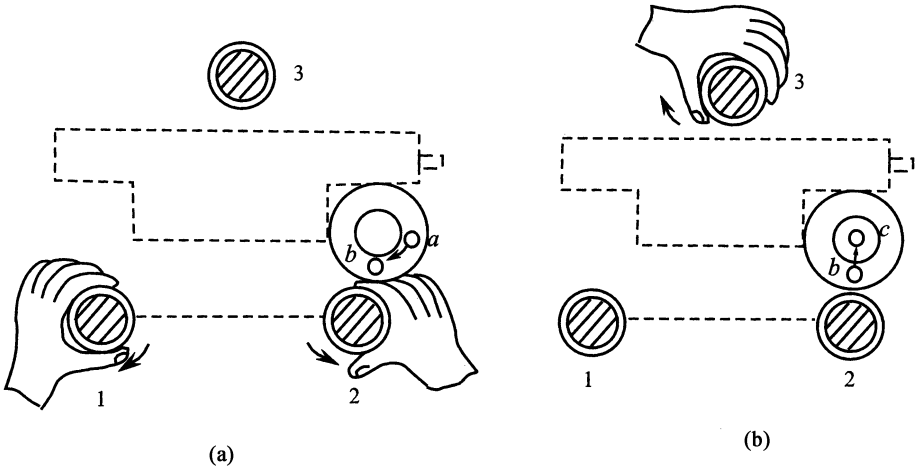


图 5－19

(1)用两手以相反或相对方向等速旋转两脚螺旋 1 和 2,使气泡移至圆水准器零点垂直于脚螺旋 1、2 连线的方向上,即使气泡从 a 移至 b,如图 5－19(a)所示。气泡移动的方向与左手大拇指的旋转方向一致。

(2)旋转第三个脚螺旋,使气泡从 b 移到圆水器上圆圈的中心 c,如图 5－19(b)所示,即使气泡居中。

二、照准

用望远镜十字丝中心对准目标称为照准。照准有如下操作步骤:

(1)松开望远镜水平制动螺旋,把望远镜对向明亮背景处,调节目镜使十字丝最清晰。

(2)转动望远镜,利用镜筒上方的缺口和准星照准水准标尺,固定水平制动螺旋。

(3)旋转水平微动螺旋,使十字丝纵丝精确照准水准标尺一边。

(4)旋转物镜对光螺旋使成像清晰且无视差现象存在。

三、精平

在进行中丝读数之前,必须使符合水准器气泡严格居中才能读数,这一工作称为精平。这是水准测量的关键,观测时千万不能忽略。具体操作方法是:旋转微倾螺旋使符合水准器气泡两半影严密吻合,则表示气泡严格居中。由于气泡移动有惯性,所以在旋转微倾螺旋时速度不宜太快,而且要等气泡影像严密吻合稳定后,才能进行中丝读数。

四、读数

水准测量的读数包括视距读数和中丝读数。利用上、下两条视距丝直接读取仪器至

标尺的距离，这就叫直接视距读数。直接视距的方法是：照准标尺，旋转微倾螺旋，使上丝切准某一整分划，数出上丝到下丝间的厘米数 L，将 L 乘以 100 即为所读距离。就是说标尺上 1cm 间隔对应实地 1m。

中丝读数是水准测量的基本功之一，必须熟练掌握。中丝读数是在精平后即刻进行，直接读出米、分米、厘米、毫米该数。为了防止不必要的误会，习惯上只报读四位数字，不读小数点，如 1.204m 和 0.607m 读为 1204 和 0607。视距读数时，符合水准器气泡不需符合；而中丝读数是用来测定高差的，因此，进行中丝读数时，必须先使符合水准器气泡符合。

读数时，要弄清标尺上的数字注记形式。大部分水准标尺的注记形式如图 5－17 所示，即分米数字，注记在整分划线数值增加的一边，这样的注记读数较方便，如图 5－20，中丝读数为 1823。

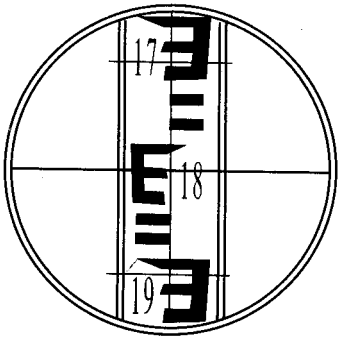


图 5－20

第四节　水准仪的检验和校正

水准仪是水准测量的主要仪器，仪器是否合乎要求，直接关系到水准测量成果的好坏。因此，在使用前必须对仪器进行细致的检查，必要时进行校正，以保证测量工作的顺利进行。

一、水准仪应满足的几何条件

如图 5－21 所示，水准仪的主要轴线有望远镜的视准轴（即照准轴）、管水准轴、圆水

准轴和竖轴。由水准测量原理可知,准确测定两点间高差是以水准仪的视线(即视准轴)水平为基础的,视线水平又是以管水准器气泡居中(即管水准轴水平)来判断的。因此,水准仪应满足的主要条件是管水准轴平行于照准轴。

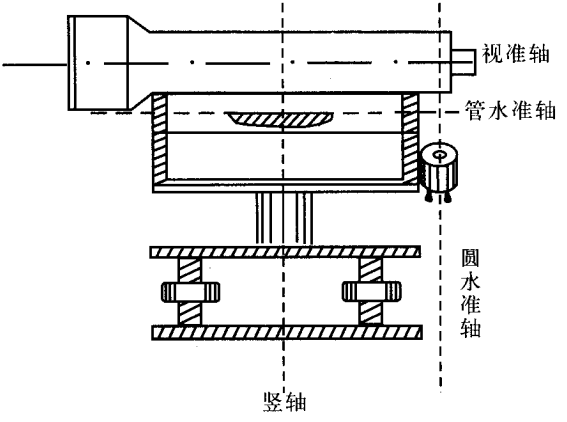


图 5－21

除此之外,水准仪还应满足两个次要条件:

(1)圆水准轴应平行于仪器的竖轴。这是因为水准仪的粗平是借助于圆水准器进行的。当圆水准气泡居中时,仪器的竖轴应处于铅垂位置。

(2)十字丝横丝应垂直于竖轴。这样,当仪器粗平后,竖轴处于铅垂位置时,横丝则处于水平状态,以保证用横丝的任意部位在标尺上读数都是准确的。

以上条件得到满足,就可保证水准测量的精度。

二、水准仪的检验与校正

水准仪的检验校正是分项目进行的。其检校原则为,后面的检验校正不能破坏前面的检校结果。

(一)一般检视

检视水准仪时,主要应注意光学零(部)件的表面有无油迹、擦痕、霉点和灰尘;胶合面有无脱胶,镀膜面有无脱膜现象;仪器的外表面是否光洁;望远镜视场是否明亮、均匀;符合水准器呈像是否良好;各部件有无松动现象;仪器转动部分是否灵活、稳当,制动是否可靠;调焦时呈像有无晃动现象。此外,还应检查仪器箱内配备的附件及备用零件是否齐全;三脚架是否稳固。

(二)圆水准轴应平行于仪器的竖轴

1. 检验原理和方法

如图 5－22 所示，OV 为仪器的竖轴，OL 为圆水准轴，设它们互不平行。当转动脚螺旋使圆水准器的气泡居中时，圆水准轴垂直了，而仪器竖轴与铅垂线方向偏斜了一个 α 角。如将圆水准轴绕仪器竖轴旋转 180°，则圆水准轴转到竖轴的另一侧，又偏斜了一个 α 角，共偏斜 2α 角。从现象上看，气泡已偏到一边。但从实质上看，圆水准器绕仪器竖轴旋转时，OV 的空间位置没有动，由于水准器中的液体受重力的作用气泡总居于最高处，所以气泡偏离了，气泡偏移的弧长所对的中心角就等于 2α。

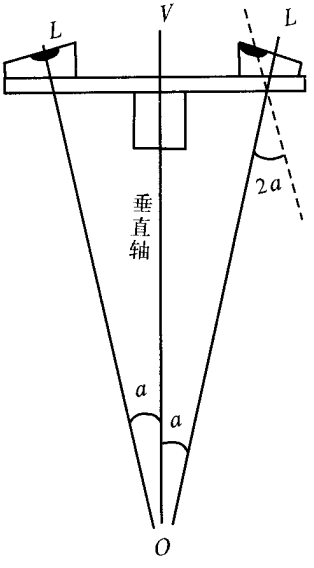


图 5－22

检验方法：先用脚螺旋使圆水准器气泡居中，然后将仪器旋转 180°，若气泡仍居中，表明此项条件已满足；若气泡偏离圆心，必须加以校正。

2. 校正

旋转脚螺旋，使气泡向居中位置移动偏离长度的一半，此时竖轴处于铅垂位置；再用改针拨动圆水准器的校正螺丝，使气泡居中，这样圆水准轴就平行于仪器的竖轴了。

此项校正一般需反复进行 1～2 次，才能达到要求。

(三)十字丝横丝应垂直于仪器竖轴

1. 检验

整平仪器后，将横丝一端照准远处一明显目标点，然后旋转水平微动螺旋，使目标点移到横丝的另一端，若目标点始终不离开横丝，则表示横丝水平，否则应进行校正。

2. 校正

拧开十字丝护盖，松开十字丝环的四个固定螺丝中的相邻两个，旋转十字丝环，使横丝的一端移至其偏离位置的一半处，最后旋紧十字丝环的固定螺丝，旋上护盖。

(四)管水准轴应平行于照准轴

管水准器的水准轴与望远镜的照准轴是两条想象中的空间直线，两空间直线保持平行的条件是：它们在水平面上和铅垂面上的投影均应保持平行。若不平行，两轴在水平面上投影的夹角称为“交叉误差”；两轴在铅垂面上投影的夹角称为“i角误差”。二者比较起来，交叉误差对高差的影响很小，i角误差对高差有显著的影响。所以在普通水准测量中，一般只对i角误差进行检查与校正。这项检校又称i角的检查与校正。i角的检校方法有数种，常用的一种检校方法如下。

1. 检验

如图5－23所示，在较平坦的场地上选择$D=61.8\text{m}$的一段距离CE，将其分为长$S=20.6\text{m}$的三等分(距离用钢卷尺量取)，在两分点A、B上安置尺台。先在C点整置仪器，使符合水准器气泡精密符合后，分别对A、B点上竖立的标尺读数四次，并取平均值令其为a_1和b_1；由于i角的影响，每段距离S将使读数产生误差Δ，设正确的读数为a'_1和b'_1，则A、B两点间的正确高差应为

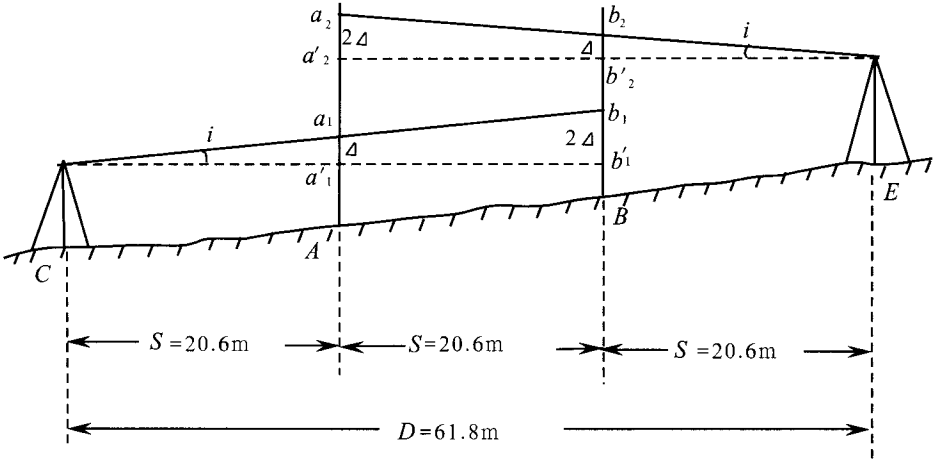


图5－23

$$h=a'_1-b'_1=(a_1-\Delta)-(b_1-2\Delta)=a_2-b_2-\Delta$$

同理，将仪器置于E点重复上述操作亦可得

$$h=a'_2-b'_2=(a_2-2\Delta)-(b_2-\Delta)=a_2-b_2-\Delta$$

上列两式相减得

$$2\Delta=(a_2-b_2)-(a_1-b_1)$$

所以

$$\Delta = \frac{1}{2}[(a_2 - b_2) - (a_1 - b_1)] \tag{5-13}$$

由于 $S = 20.6\text{m}$，而 i 角甚小，故

$$i'' = \frac{\Delta}{S} \cdot \rho'' \approx \Delta \cdot \frac{206000''}{20600} \approx 10''\Delta \tag{5-14}$$

式中 Δ、S 以 mm 计。由于取 $D = 61.8\text{m}$，故简化了计算公式。

一般要使 i 角为零是困难的，只能将 i 角限制在一定的范围内。规范规定 i 角超过 $\pm 20''$ 则需校正（指 S_3 仪器）。

还应指出，从 i 角检验中可知，i 角的影响是不可避免的，且随距离的增长而增大。但在水准测量中，若能使前、后视距大致相等，其影响的绝大部分被抵消。

2. 校正

校正在 E 点进行。检验计算结束后，用微倾螺旋使水平中丝照准 A 点标尺上的正确读数 a'_2

$$a_2' = a_2 - 2\Delta = b_2 + a_1 - b_1 \tag{5-15}$$

此时气泡必不居中，用改针校正水准器校正螺旋使气泡影像符合。校正后，将仪器照准 B 点上的标尺，其读数应为 $b_2' = b_2 - \Delta$，以此作为检核。

校正需反复进行，使 i 角满足要求为止。

检验记录计算示例见表 5-1。

表 5-1　水准仪 i 角检验校正

日期：1998 年 9 月 10 日　　仪器：S_3 670607　　观测者 李红

时间：11 点 40 分　　标尺：区格式木质标尺 025，026　　记簿者 张强

测站	观测次序	标尺读数		高差 $a-b$ /mm	i 角的计算
		A 尺读数 a	B 尺读数 b		
C	1	1352	1207		$S = 20.6\text{m}$ $\Delta = \frac{(a_2-b_2)-(a_1-b_1)}{2}$ $= +1\text{mm}$ $i'' = 10''\Delta = +10''$ 校正时： $a'_2 = a_2 - 2\Delta$ $= 1465\text{mm}$ $b'_2 = b_2 - \Delta$ $= 1319\text{mm}$
	2	1353	1206		
	3	1351	1207		
	4	1352	1208		
	中数	$a_1 = 1352$	$b_1 = 1207$	+145	
E	1	1468	1321		
	2	1467	1320		
	3	1467	1319		
	4	1466	1320		
	中数	$a_2 = 1\ 467$	$b_2 = 1320$	+147	

第五节　等外水准测量

等外水准测量又称普通水准测量或图根水准测量。它是地形测图和航测外业获得图根点高程的重要方法。其精度低于四等水准,而高于其它高程测量方法。它具有操作简便,工作进展快速等优点。本节详细介绍等外水准测量。

等外水准测量的实施,包括准备、计划、选点、埋石、观测、计算等工作。

一、水准路线的布设

等外水准测量的目的主要是为了满足地形测图和航测外业基础控制测量的需要,也可以作为小面积测区的高程基本控制。所以等外水准路线主要是沿着三角点和图根点布设。根据测区的自然地理状况,水准路线有下列几种布设形式:

(1)附合水准路线:从一个高级水准点出发沿各个待定高程的点进行水准测量,最后附合到另一高级水准点所构成的一条路线,如图 5-24(a)所示。此布设形式可以进行观测成果的检核。

(2)闭合水准路线:从一高级水准点出发,沿各待定高程的点进行水准测量,最后仍闭合到原水准点所组成的环形路线,如图 5-24(b)所示。闭合水准路线也可进行观测成果的内部检核,但是,如果起点高程有错误,将不能发现。

(3)支水准路线:从一已知水准点出发沿各个待定高程的点进行水准测量,其路线既不附合又不闭合,如图 5-24(c)所示。为了能进行观测成果的检核和提高精度,支水准路线必须进行往返观测,并检查已知水准点高程。

等外水准测量常采用以上 3 种简单布设形式。已知点一般为等级水准点,在等级水准测量中,还采用结点水准路线如图 5-24(d)和水准网如图 5-24(e)。

二、水准路线的设计、勘选和埋石

在拟订水准路线以前,应收集已有的水准点和三角点的成果资料、原有旧图、测区自然地理状况,结合作业目的和任务,进行综合分析研究,以此做好技术设计。首先选择水准路线,即在旧图上从已知高程点出发,尽可能沿图根点的选点位置布设等外水准路线,标明从哪点开始,到哪点结束,中间经过哪些待定点。其路线长度附合、闭合路线不得超过8km,结点问路线长度不得超过6km,支线长度不得超过4km(GB航外规范之规定与

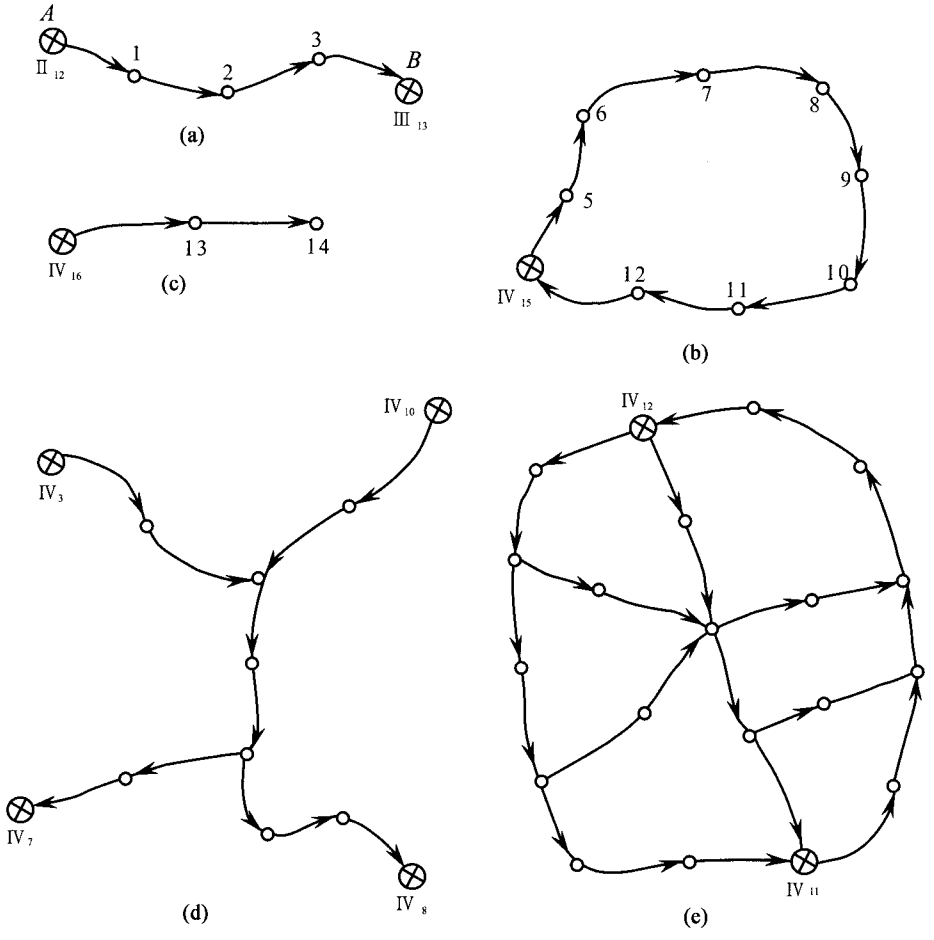


图 5－24

此不同)。同时要注意选择坡度较小、设站较少、土质较硬、易于通过的施测路线,尽量避免通过森林、河流、山谷及其它障碍物。

水准路线设计后,根据设计图到实地踏勘,看是否与实际相符,已知点是否还在。依据实地情况修改原计划,以选择出最佳的观测路线。需要埋石的点位,与图根点一并考虑,一般和图根点标石共用,必要时也可单独埋石。埋石点应绘制‘点之记”,如图 5－25 所示。以便今后使用时寻找方便。对于临时性的点位,可打木桩或选定坚固的地物,如水泥墩、大岩石等,用红油漆画一圆圈即可。

三、等外水准测量的一般规定

(1)使用仪器一般为 S_3 或 S_{10} 型水准仪,水准标尺为具有厘米区格式分划的双面或单面标尺。

(2)开始观测之前应按规范要求对仪器进行全面的检验校正。等外水准 i 角应小于 30″。

(3)按中丝读数法,附合、闭合水准路线单程观测,支线水准应往返测(或单程双测),估读至 mm。

(4)观测结果都要符合表 5－2 限差要求(列出四等水准测量限差,以便比较)。

(5)水准测量最好在成像清晰及大气稳定的时间内进行,并用伞遮住阳光,不使仪器受曝晒。

水准点之记

点　　名	Ⅳ 25
标石类型	普通水准点标石
所在地点	古城县金店中学

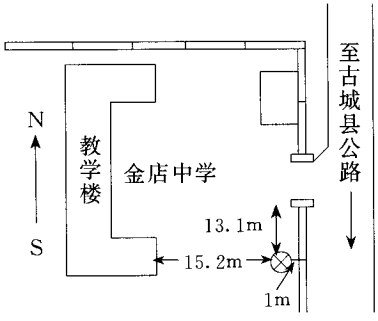


图 5－25

(6)为消除标尺零点不等差,每一测段的测站数尽量为偶数。

(7)工作间歇时,一般应间歇在固定点上。如不可能时,应间歇在打入地下的三个木桩上。两间歇点间歇前后的高差之差不大于 6mm 时,可以继续往前观测。

表 5－2

等　级	视　线 长　度 /m	后前视 距　差 /m	视距累 积　差 /m	黑红面 读数差 /mm	黑红面所测 高差之差 /mm	路线往返 测闭合差 /mm	附合或闭合 路线闭合差 /mm
四　等	100	3	10	3	5	$+20\sqrt{S}$	$\pm 20\sqrt{L}$
等　外	100	20	100	4	6	$\pm 40\sqrt{S}$	$\pm 40\sqrt{L}$

注:①S 为相邻两水准点的距离,以千米为单位;L 为附合路线闭合路线的长度,以千米为单位。

②在山地每千米超过 16 站时,路线闭合差不应超过 $\pm 12\sqrt{n}$mm(n 为测站数)。

四、等外水准测量的观测和记簿

等外水准测量一般沿线路分站进行连续观测。在选择测站点时，要考虑前、后视线长度和前后视距差是否合乎限差要求；还要顾及照准前、后标尺时视线应离开障碍物0.2m及前后视距累积差是否超限。当标尺立在水准点上时，不能放尺垫；标尺在转点时应立在踏实的尺垫上。进行等外水准测量，若使用单面标尺观测，通常用表5－3记录；若使用双面标尺观测，通常用表5－4记录。由于三、四等水准测量通常用表5－3记录，故下面着重介绍使用表5－3的观测记录方法。

表5－3　水准测量手簿

观测：

测自Ⅳ3005至Ⅳ3018　　年　月　日　　记录：

测站	点号	视距/m	后视	前视	高差		高程/m	备注
					+	－		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Ⅳ3005	56	0347			－1284	46.215	
	转点	54		1631				
2	转点	72	0306			－2318		
	101	74		2624			42.613	
3	101	98	0833			－0683		
	转点	96		1516				
4	转点	41	1528		＋1027			
	转点	43		0501				
5	转点	79	2388		＋1674			
	102	77		0694			44.631	

1. 在合适的地方安置水准仪，转动脚螺旋，使圆水准器气泡居中。此时符合水准器大致水平。与此同时，记簿者应把测站编号、后视或前视水准点名称依次填入手簿，见表5－4的(1)、(2)、(3)处，如果后视点或前视点为转点，则其相应处不予填写。(4)、(5)栏为后、前尺号。

2. 望远镜照准后视标尺黑面，用微倾螺旋使视距丝上丝对准尺上的某一整分划，直接读取后视距离，记在手簿中(6)处。然后再转动微倾螺旋，使符合水准器气泡严格符合，再用水平中丝在标尺黑面上读数，记入手簿(7)处(为简便起见，视距读数和记录以m为单位，中丝读数与记录以mm为单位)。

表 5－4　三(四)等水准测量观测手簿

测自 Ⅲ002 至Ⅳ002　　1997 年 7 月 20 日

时刻始　9 时 15 分　　天气　晴　观测者 李　珍

末　10 时 40 分　　呈像　清晰　记录者 王　泽

测站编号	后尺 上丝 / 后视距 / 视距差 d	前尺 下丝 / 前视距 / $\sum d$	方向及尺号	标尺读数 黑面	标尺读数 红面	K+黑减红	高差中数	备考
(1)	(2)	(3)	后(4)	(7)	(8)	(9)		
			前(5)	(13)	(14)	(15)		
	(6)	(10)	后－前	(16)	(17)	(18)	(19)	
	(11)	(12)						
1	Ⅲ002		后 46	1345	6032	0		
			前 47	1390	6179	－2		
	76	71	后－前	－45	－147	＋2	－46	
	＋5	＋5						
2			后 47	1438	6223	＋2		
			前 46	1444	6130	＋1		
	69	72	后－前	－6	＋93	＋1	－6	
	－3	＋2						
3			后 46	1390	6078	－1		
			前 47	1378	6163	＋2		
	49	43	后－前	＋12	－85	－3	＋14	
	＋6	＋8						
4		N^{0}01	后 47	1682	6468	＋1		
			前 46	1160	5848	－1		
	69	72	后－前	＋522	＋620	＋2	＋521	
	－3	＋5						
5			后					
			前					
			后－前					
$\sum$			后					(最后一行用于累加检核)
			前					
			后－前					

3. 后视标尺转为红面，用微倾螺旋使符合水准器气泡符合，读取后视标尺红面水平中丝读数，记录入手簿(8)处。

4. 望远镜照准前视标尺黑面，用以上方法读取前视距和前尺的黑面中丝读数，分别记在手簿中(10)、(13)处。

5. 前视标尺转为红面，同第 3 条的方法读取前尺红面读数，记在手簿中(14)处。

上述程序可简述为“后－后－前－前”，或“黑－红－黑－红”。

在观测过程中，需要特别注意的是在每次用中丝读数以前，必须使符合水准器的气泡符合，转动照准部要轻、稳，读数要仔细。记录者应该把观测者所报的读数复诵一遍以免差错。由后视转到前视观测时，不能动脚螺旋调圆水准气泡，以免视线高变动。每测站的各项限差都不超限，才算合格可以迁站，否则该站重测。在一测站还没观测完时，后尺垫严禁碰动。否则，可能会导致前功尽弃。观测中，水准标尺要立直、立稳，观测、记录、立尺三者要互相配合好。

五、手簿的计算与检核

为了保证每一测站的结果正确而又合乎精度要求，在每站观测过程中及结束后，应立即进行下列计算和检核：

1. 计算前、后视距差 d 及视距累积差 $\sum d$

前、后视距差 d：(11) = (6) － (10)

视距累积差 $\sum d$：(12) = 前站的(12) + 本站的(11)

此项计算应在前视距离(10)读出后立即进行，如 d 或 $\sum d$ 超过规定限差，只能移动前视标尺位置(前标尺不能动时移动仪器位置)，后视标尺决不能动，否则，要从固定点起重测。另外，记簿者应经常将累积差告诉观测者和前标尺员，以便随时调整前距，使视距累积差保持在零附近。

2. 同一标尺黑、红面读数差之检核

同一标尺黑、红面的读数之差，应等于该尺黑、红面的常数差 4687 或 4787，限差为 4mm。黑、红面读数差记在手簿的(9)、(15)处，其算式为“K + 黑 － 红”。即

$$(9) = K + (7) - (8)$$

$$(15) = K + (13) - (14)$$

K 为标尺黑、红面的常数差。在实际工作中，若(9)或(15)的绝对值大于 4mm，应及时重新观测本测站，超限的记录应废去。

3. 高差的计算与检核

标尺黑面读数算得的高差记于(16)处：

$$(16) = (7) - (13)$$

标尺红面读数算得的高差记于(17)处：

$$(17) = (8) - (14)$$

因为两根标尺红面的起始分划不同，两尺零点恰好相差 100mm，因此计算黑、红面高差之差的算式为

$$(18) = (16) - (17) \pm 100$$

检核计算　　$(18) = (9) - (15)$

按横向和纵向算出的(18)应完全一致，否则，说明计算有误，应查出原因改正之。当(18)项的绝对值大于规定的 6mm 时，应重测本站。

若黑、红面读数差和黑红面高差之差均未超过限差，即可计算高差中数，记于(19)处：

$$(19) = \frac{1}{2}[(16) - (17) \pm 100]$$

(19)是以黑面高差为准，将红面高差 ± 100 后，取中数求得(取至毫米，毫米以下，按‘四舍六入，五看奇偶，奇进偶舍’原则处理)。

在测站上只有当每一项检核计算都合格，即表(5 - 4)中的(11)、(12)、(9)、(15)、(18)都符合限差要求时，才能迁站。

4. 累加检核

当一天外业观测结束或一测段观测结束后，应全面检核各项计算是否正确和合乎规范要求。对每页手簿和测段应做如下检核计算。

取和的站数若为偶数站时：

$$\sum \text{高差中数} = \sum \text{后黑} - \sum \text{前黑} = \sum \text{后红} - \sum \text{前红}$$

即　$\sum(19) = \sum(7) - \sum(13) - \sum(8) - \sum(14)$

若为奇数站时：

$$\sum(19) - \sum(8) - \sum(14) \pm 100$$

此外还应检核：

$$\sum(11) = \sum(6) - \sum(10) = \text{末站}(12)$$

以上检核计算，因取平均值可能使个位有差异。

每条水准路线观测结束后，在野外要计算该路线的闭合差，并与允许闭合差比较，如果超过限差，经检核无误，则应找出原因返工重测。

六、外业手簿记载及资料整理的要求

1. 外业观测记录必须在编号、装订成册的手簿上进行。已编号的各页不得任意撕去，记录中间不得留下空页或空格（总和格除外）。

2. 一切外业原始观测值和记事项目，必须在现场用铅笔直接记录在手簿中，记录的文字和数字应端正、整洁、清晰，杜绝潦草模糊。

3. 外业手簿中的记录和计算的修改以及观测结果的淘汰，禁止擦拭、涂抹与刮补，而应以横线或斜线正规划去，并在本格内的上方写出正确数字和文字。除计算数据外，所有观测数据的修改和淘汰，必须在备注栏内注明原因及重测结果记于何处。重测记录前需加“重测”二字。

在同一测站内不得有两个相关数字“连环更改”。例如：更改了标尺的黑面前两位读数后，就不能再改同一标尺的红面前两位读数。否则就叫连环更改。有连环更改记录应立即废去重测。

对于尾数读数有错误（厘米和毫米读数）的记录，不论什么原因都不允许更改，而应将该测站观测结果废去重测。

4. 有正、负意义的量，在记录计算时，都应带上“+”、“-”号，正号不能省略。对于中丝读数，要求读记四位数，前后的。都要读记。

5. 作业人员应在手簿的相应栏内签名，并填注作业日期、开始及结束时刻、天气及观测情况和使用仪器型号等。

6. 作业手簿必须经过小组认真地200%地检查（即记录员和观测员各检查一遍），确认合格后，方可提交上一级检查验收。

第六节　水准路线的高程计算

水准测量外业工作结束后，除对外业手簿的计算检核外，尚须根据已知水准点的高程和观测高差计算沿线各待定点的高程。其计算步骤如下。

一、检查和整理外业观测手簿

1. 检查注记是否齐全，记录有无违犯规范的现象。高差计算是否有错误。

2. 计算各测段之观测高差和各测段之观测距离。

3. 将水准路线起点、各待定点和终点之点号依次填入表 5－5 的 1 栏内，并将各测段之距离和观测高差填入 2、3 栏内相应处。

二、绘出观测路线略图

如图 5－26 所示。略图的水准点要与实地的方位一致，路线用曲线连接，并要在图上注明各点间的观测高差、距离等，还要标出水准测量进行的方向。

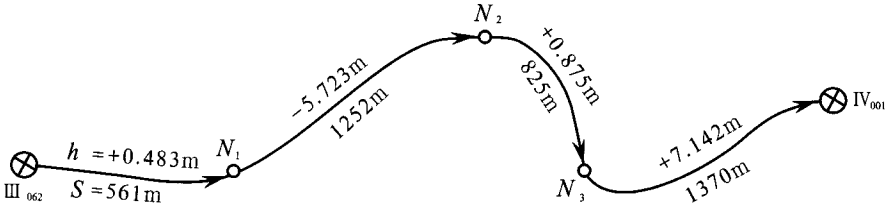


图 5－26

三、等外水准概略平差计算

1. 计算全线总长和高差总数。如表 5－5 中为 4008m 和 +2.777m。

2. 计算水准路线闭合差和闭合差允许值。

不管是附合水准或是闭合水准路线，因为测量误差的影响，必然产生闭合差。测量上对其下的定义为

闭合差 = 观测值(或计算值) − 理论值(或已知值)

闭合水准路线因起闭于同一点，其高差理论值等于零，所以其闭合差 f_h 为

$$f_h = \sum (h) \tag{5-16}$$

附合水准路线因起、闭点间高差理论值 $h = H_{终} - H_{始}$，所以其闭合差 f_h 为

$$f_h = \sum (h) - (H_{终} - H_{始}) \tag{5-17}$$

如表 5－5 中 7 栏内，$f_h = \sum h - (H_{终} - H_{始}) = +9\text{mm}$，即为 $f_h = +2.777\text{m} - (76.470\text{m} - 73.702\text{m}) = +9\text{mm}$。

该栏内附合水准路线闭合差允许值

$$f_{h允} = \pm 40\text{mm}\sqrt{L}$$

即为

$$f_{h允} = \pm 40\text{mm} \times \sqrt{4.008} = \pm 80\text{mm}$$

当计算的闭合差 f_h 小于 $f_{h允}$ 时，可以配赋。否则应重测某测段或全线路。

表 5－5　水准测量高程计算表

计算者：王　洁　　检查者 李　泽

点　号	距　离 /m	平均高差 /m	改正数 /mm	改正后高差 /m	高　程 /m	备　考
1	2	3	4	5	6	7
Ⅲ 062					73.702	附合水准路线 $f_{h允}=\pm 40\text{mm}\sqrt{L}$ $=\pm 80\text{mm}$ $f_h=\sum h-(H_{终}-H_{始})$ $=+9\text{mm}$ $f_h<f_{允}$ 可以分配
N_1	561	+0.483	−1	+0.482	74.184	
N_2	1 252	−5.723	−3	−5.726	68.458	
N_3	825	+0.875	−2	+0.873	69.331	
Ⅳ 001	1 370	+7.142	−3	+7.139	76.470	
$\sum$	4 008	+2.777	−9	+2.768		

3. 计算高差改正数和改正后高差。

如果闭合差在允许值范围内，可将闭合差按与各测段的距离（D_i）成正比反号分配于各测段高差中，则测段的高差改正数 V_i 为

$$V_i=\frac{-f_h}{\sum D}\cdot D_i \tag{5-18}$$

改正数凑整至毫米，余数强制分配于长测段中。

在山区，也可按测段的测站数 n 分配闭合差

$$V_i=\frac{-f_h}{\sum n}\cdot n_i \tag{5-19}$$

式中，i 为测段编号。

各测段高差改正数之和应等于闭合差反号，即 $\sum V=-f_h$，作为检核。如表 5－5 第 4 栏中为各测段相应改正数，改正数总和为 −9，与其闭合差 +9mm 绝对值相等，符号相反。

各测段高差观测值加上相应改正数即得改正后高差

$$h_i=(h_i)+V_i \tag{5-20}$$

如表 5－5 第 5 栏中为各测段相应改正后高差。改正后高差之和与（$H_{终}-H_{始}$）相

等，即 $+2.768$m。

4. 计算待定点高程。

由起始点的已知高程 H_0 开始，逐个加上与相邻点间的改正后高差 h_i，即得下一点的高程 H_i

$$H_i = H_{i-1} + h_i \tag{5-21}$$

最后推求的终点高程应与其已知值一致。如表 5－5 第 6 栏中，$H_{N_1} = 73.702 + 0.482 = 74.184$m，依此类推。

表 5－5 即为附合水准路线高程计算的完整算例。

已知 $H_{Ⅲ_{062}} = 73.702$m，$H_{Ⅳ_{001}} = 76.470$m。观测略图与观测成果如下，计算 N_1、N_2、N_3 点的高程。

以上所述，称为单一水准路线的高程计算方法。现将单结点水准网的高程计算步骤简介如下：

如图 5－27 所示，为一单结点水准网略图，从已知水准点 A、B、C、D 经四条水准路线测至 E 点，E 称为结点。其计算步骤如下：

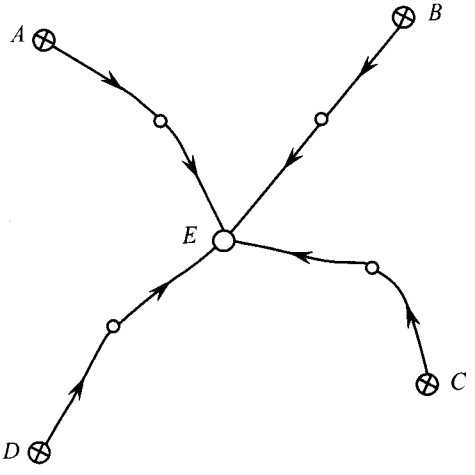


图 5－27

1. 根据所测高差，由 $A \rightarrow E$、$B \rightarrow E$、$C \rightarrow E$、$D \rightarrow E$ 四条水准路线分别求出正点的观测高程 H_i；

2. 分别求出四条水准路线的长度 S_i（或测站数 n_i）；

3. 按下式求出各水准路线的权

$$p_i = \frac{C}{S_i}$$

或

$$p_i = \frac{C}{n_i}$$

4. 求出 E 点的最或是高程 H_E；

5. 以 E 点为已知高程点(其高程为 H_E)，分别计算 $A \rightarrow E$、$B \rightarrow E$、$C \rightarrow E$、$D \rightarrow E$ 四条附合水准路线，计算方法同前。

第七节　水准测量的主要误差来源

进行水准测量不可避免地会产生误差，误差的主要来源为仪器误差、观测误差及外界因素引起的误差。为了提高水准测量的精度，应从现行水准测量的仪器和方法的实际情况出发，分析其误差来源及其影响的规律，从中找出消除或减弱这些误差影响的方法。应再次指出误差与粗差是不相同的，粗差是由于操作不当和粗枝大叶的工作态度而造成的错误。如读错整米、整分米，数读颠倒，读错横丝，碰动仪器或尺垫等。测量误差是不包含粗差的。

一、仪器误差

(一)照准轴与管水准轴不平行的误差

水准仪经过检查校正后，照准轴应与管水准轴平行。但实际上不可能校正的十分准确，加上其它原因的影响，总会剩下一个微小的 i 角。由于 i 角的存在，当水准气泡居中时，照准轴并不水平，这样在标尺上的读数就产生了误差。如图 5－28 所示，后视和前视的 i 角分别为 i_1、i_2，视线长分别为 D_1 和 D_2，受 i 角影响的读数误差为 δ_1 和 δ_2，则

$$h = a_0 - b_0 = (a - \delta_1) - (b - \delta_2)$$

因 i 角很小，所以

$$\delta_1 = \frac{i_1}{\rho} \cdot D_1, \delta_2 = \frac{i_2}{\rho} \cdot D_2$$

故

$$h = (a - b) + \left(\frac{i_2}{\rho} \cdot D_2 - \frac{i_1}{\rho} \cdot D_1\right) \qquad (5-22)$$

由(5－22)式看出，若要消除 i 角的误差影响，必须满足 $i_1 = i_2$、$D_1 = D_2$。仪器的 i

角不是定值，是随温度的变化而变化的，并与调焦有关。欲使 $i_1 = i_2$，仪器的温度应保持稳定，这就要求观测过程中要打好伞，并要避免望远镜在前后尺读数期间调焦。当 $i_1 = i_2 = i$ 的情况下则

$$h = (a - b) + \frac{i}{\rho}(D_2 - D_1)$$

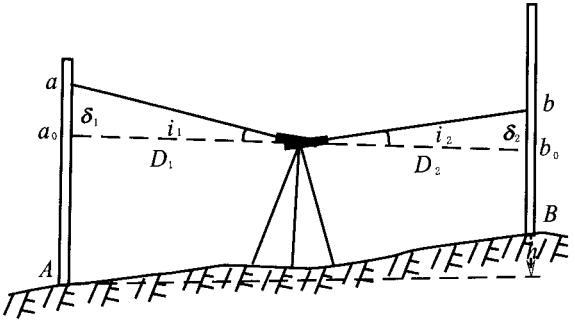


图 5 - 28

而每一测段的高差为

$$\sum h = \sum (a - b) + \frac{i}{\rho}\sum (D_2 - D_1) \qquad (5 - 23)$$

由此可知，若使 $D_1 = D_2$，则在每站的高差中，可以消除 i 角误差的影响。在实际作业中，做到前后视距完全相等比较困难，但只要使 D_1 与 D_2 接近，i 角影响就可忽略不计。对每一个测段来说，若使其前后视距累积差 $\sum (D_2 - D_1)$ 很小，就可以使 $\sum h$ 的误差 $\frac{i}{\rho}\sum (D_2 - D_1)$ 接近于零，从而减弱了前后视距不等差对测段高差的影响。故水准测量对前后视距差及视距累积差作出限制。例如，对于等外水准测量规定 $d < 20\text{m}$、$\sum d < 100\text{m}$。取 $i \leqslant 30''$，则对于每站高差和测段高差的最大影响分别为 3mm 和 14mm，而允许值是 6mm 和 $\pm 40\sqrt{L}\,\text{mm}$。

(二)水准标尺零点差

标尺底面与其分划零点的差值称为水准标尺的零点差。如图 5 - 29，设Ⅱ号标尺因磨损使得读数增大，其磨损量为 δ，则每一测站的高差应为

$$h_1 = a_1 - (b_1 - \delta) = a_1 - b_1 + \delta$$

$$h_2 = (a_2 - \delta) - b_2 = a_2 - b_2 - \delta$$

$$h_3 = a_3 - (b_3 - \delta) = a_3 - b_3 + \delta$$

$$h_4 = (a_4 - \delta) - b_4 = a_4 - b_4 - \delta$$

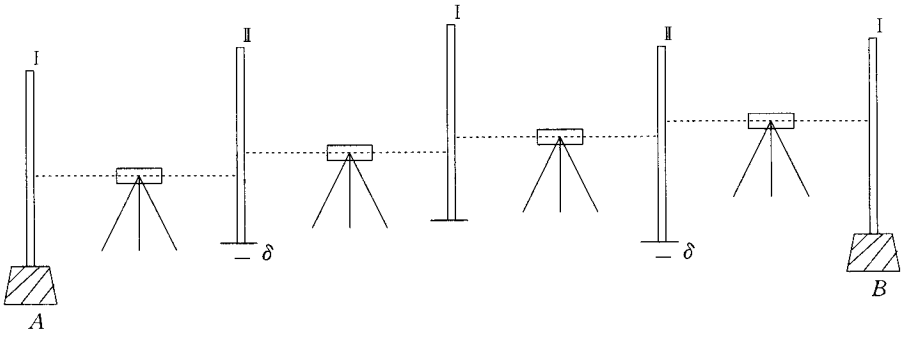


图 5－29

可见各站测得的高差中，δ 的符号“＋”“－”交替出现。因此，每测段只要是偶数站，就能消除标尺零点差的影响。所以在水准测量中规定每测段的测站数必须是偶数。等外水准测量无此规定。

二、观测误差

(一)管水准器气泡居中的误差

水准测量的主要条件是视线必须水平。假设当水准仪不存在 i 角误差的情况下，我们用微倾螺旋使管水准器气泡居中，此时一般认为管水准轴就水平了，因而望远镜照准轴也就水平了。其实不然，在观察到气泡居中的一瞬间，还不能认为水准轴是水平的。因为我们在衡量气泡是否居中时，是用眼睛观察的，由于生理条件的限制，一般不可能准确辨别气泡居中位置；其次，在停止转动微倾螺旋后仍然运动着的气泡在居中的一瞬间它还受到惯性力的推动及管内液体与管内壁摩擦阻力的作用，这样就会产生管水准器气泡居中的误差。因此，我们在中丝读数前要经常注意气泡的居中情况，随时给以调整，以减小这种误差的影响。通常认为管水准器气泡居中的误差为其分划值的$\frac{1}{10}$。采用符合水准器时，其误差可减小一半，即

$$m_{居中} = \frac{0.1\tau''}{2\times\rho''} \times D \tag{5-24}$$

对于 S_3 水准仪，其水准管的分划值 $\tau = 30''$，令视距 $D = 100\text{m}$，则 $m_{居中} = 0.73\text{mm}$。

(二)在水准尺上的估读误差

观测读数时是用十字丝横丝在 cm 间隔内估读 mm 数，而 cm 分划又是经过望远镜将视角放大后的像，所以 mm 读数的准确程度与 cm 间隔的像的宽度及十字丝的粗细有关。

目前十字丝的宽度经目镜放大后在人眼明视距离上约为 0.1mm。只要 cm 间隔的像大于 1mm，则估读其间隔的十分之一，即估读的数值可以得到保证，否则估读精度将受到影响。如用放大率为 20 倍的望远镜在距离 50m 以内时，cm 间隔的像可≥1mm。

由此可见，此项误差与望远镜的放大率和距离有关，所以对各级水准测量规定仪器望远镜的放大率和限制视线的最大长度是必要的。

(三)标尺倾斜的误差

由图 5－30 可以看出，水准尺竖立不直，将使尺上的读数增大，从而影响水准测量的读数精度。设后视标尺的倾斜角为 ε，倾斜标尺上的读数为 a，正确读数为 a'，该数误差为 Δa，则

$$\Delta a = a - a' = a - a\cos\varepsilon = a(1 - \cos\varepsilon) \tag{5-25}$$

可见 Δa 的大小与倾斜角 ε 和在尺上的读数 a 的大小有关。设 a 为 2m，ε 约为 2° 时，就会造成约 1mm 的读数误差。因此作业时使水准标尺保持竖直是重要的。由于前后尺的读数高度一般不等，两标尺的倾斜程度也不相同，所以此误差不易在观测程序中消除。但是它的影响是系统性的(无论前视或是后视都使读数增大)，所以此误差在高差中会抵消一部分。只要扶尺认真，这项影响在最后成果中将不占主要地位。

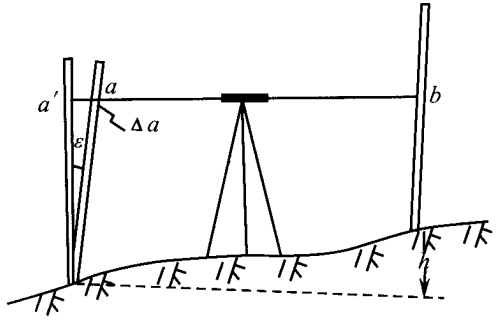


图 5－30

三、外界因素的影响

水准测量一般要求在大气比较稳定的情况下进行，尽量避免在大风天(可使标尺和仪器抖动)和中午(温度变化大、呈像抖动)观测。即使如此，还会受下面几种误差的影响。

(一)仪器和标尺升沉的误差

对一条水准路线来说，在观测过程中由于仪器、标尺的自身重量会出现下沉，而由于

土壤的弹性又会使仪器、标尺上升。二者的影响是综合性的。

假设仪器下沉(或上升)的变动量是和时间成比例的。如图 5－31 所示,若第一次后视黑面读数为 a_1,当仪器转向前视时仪器下沉了一个 Δ,其前视里面读数为 b_1,则高差 $h = a_1 - b_1$ 中必然包含误差 Δ。为了减少这种影响,读取红面时光读前视红面为 b_2,当仪器转向后视读数时,仪器又下沉了一个 Δ,其后红读数为 a_2。由此可知,黑面读数的高差为

$$h_{黑} = a_1 - (b_1 + \Delta) = a_1 - b_1 - \Delta$$

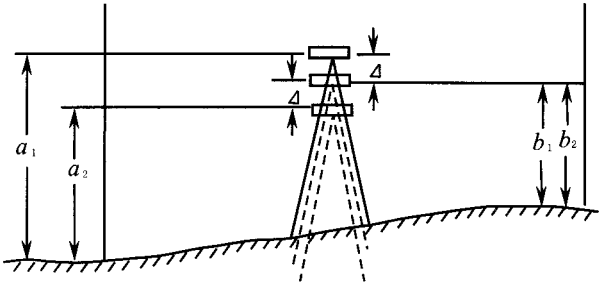


图 5－31

红面读数的高差为

$$h_{红} = (a_2 + \Delta) - b_2 = a_2 + \Delta - b_2$$

取黑红面高差的平均值得

$$h = \frac{(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)}{2}$$

这样看来,正好将 Δ 消除。由于实际上仪器的变动量和时间并不完全成比例,因此这种措施只能减弱影响而不能完全消除。同时熟练操作以减少观测时间也可使此误差影响减小。由此可知,等级水准测量中,规定采用'后－前－前－后'的观测程序是有道理的。等外水准测量中采用的'后－后－前－前'的观测程序,虽然观测方便,但不能减弱此项误差的影响,只有缩短前后视之间的观测时间,才能削弱此误差的影响。

关于标尺下沉(或上升)的影响,在一个测站的观测中,由前、后视中丝读数差可基本抵消。但当仪器迁至下一站时,原来的前视标尺变为后视标尺的时间里,标尺下沉了 Δ,于是本站的后视读数和前一站的前视读数的标尺的零点不在同一个位置。对于同类土壤的水准路线,它们造成的影响是系统性的,如果属于标尺下沉,则使高差增大,反之则使高差减小。由此可以知道,如果作业时对同一条水准路线采用往、返测,那么在往返测的平均值中这种误差的影响会大大减弱。

(二)地球弯曲误差

在本章第二节叙述水准测量基本原理时,我们是把过各点的水准面当作水平面,由于地球曲率的影响,实际上水准面并不是平面,于是就产生了地球弯曲误差。

从第一章地球曲率对高程的影响($\Delta h = \frac{D^2}{2R}$)中知道,在 100m 以内用水平面代替水准面引起高程最大误差为 1mm,在 500m 以内引起高程的最大误差竟达 20mm,可见水准测量必须采取一定的措施和限制,来消除地球曲率的影响。如图 5 – 32,因地球曲率的影响,在 A、B 两水准标尺的读数误差分别为 Δa、Δb,则

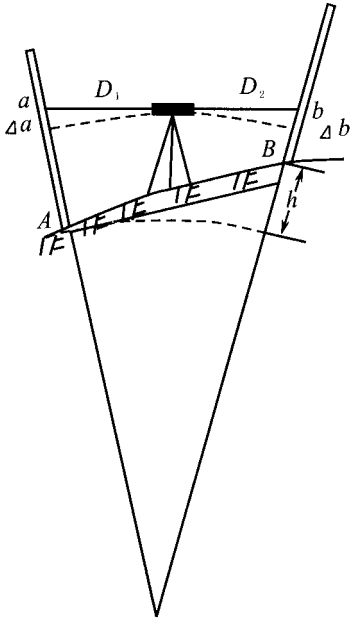


图 5 – 32

$$h_{AB} = (a - \Delta a) - (b - \Delta b)$$
$$= (a - b) + (\Delta b - \Delta a) \qquad (5 - 26)$$

如果水准仪安置在 A、B 两点中间,则

故有
$$\Delta a = \Delta b$$
$$h = a - b$$

由此可见,只要在水准测量作业中使前后视距相等,就可消除地球曲率的影响。

(三)大气折光误差

大气折光误差是因大气密度不均匀,使视线发生折射成为曲线而产生的读数误差。

近地面的空气，由于地面吸热能力强，使空气受热膨胀，密度变小，视线会产生如图 5－33 所示的向上弯曲。若视线离地面比较高，在水平面的空气密度变化不大，折光影响很小。故等级水准测量中，规定中丝读数应大于 0.3m，以此来消除或削弱大气折光的影响。

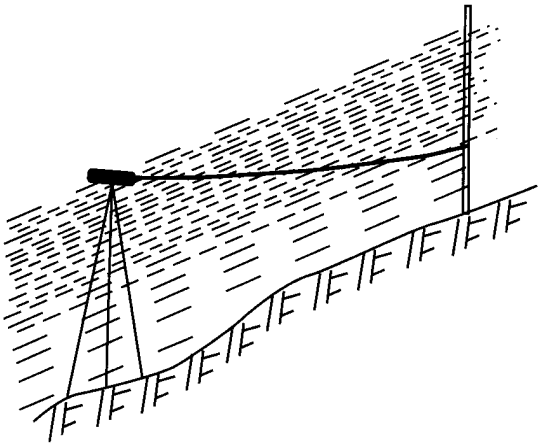


图 5－33

以上所述各项误差来源，都是采用单独影响来进行分析的，而实际情况则是综合性的影响。从误差的综合影响来说，这些误差将会互相抵消一部分。所以，作业中只要注意按规定施测，特别是操作熟练、观测速度提高的情况下，各项外界影响的误差都将大为减小，完全能够达到施测精度要求。

第八节　自动安平水准仪

普通水准仪是根据管水准器的气泡居中而获得水平视线来进行水准测量的。因此，照准水准标尺的每次读数都要用水准仪的微倾螺旋使气泡居中，这对于提高水准测量的速度是很大的障碍。于是在 20 世纪 40 年代研制出了一种自动安平水准仪，这种水准仪只要圆水准器的气泡居中，便可自动获得水平视线，从而得到正确读数。由于自动安平水准仪安置快速，同时也提高了水准测量的精度，很受测量者的欢迎。80 年代以后我国已批量生产自动安平水准仪。

自动安平水准仪是在照准光路上装置一个“补偿器”，来达到自动安平的目的。补偿器的具体结构形式较多，下面以 DZS3 自动安平水准仪（如图 5－34）为例介绍自动安平

的原理。

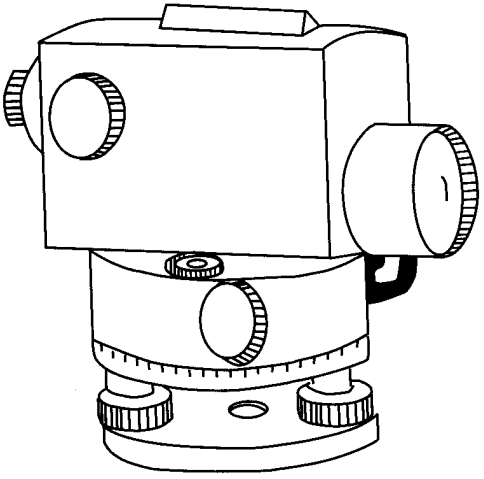


图 5－34

DZS3 自动安平水准仪的光学系统如图 5－35 所示。图中补偿棱镜通过摆臂与微型轴承和外壳相连，故能在空间自由摆动。补偿棱镜是个正三棱镜，靠物镜一侧的外表面相当于一平面反射镜，只是为了装调的方便和稳定，才设计成三棱形。为使补偿棱镜能迅速静止，装有“阻尼器”。目前多采用空气阻尼器。

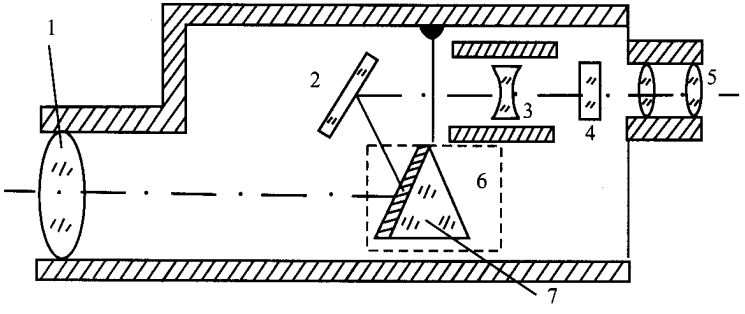


图 5－35

1—物镜；2—固定反光镜；3—调焦镜；4—分划板；5—目镜；6—空气阻尼器；7—补偿棱镜

补偿器装置是怎样实现自动安平的呢？如图 5－36 所示，AB 为补偿棱镜的外反射镜，CD 为固定反射镜，Z_0 为十字丝位置。当望远镜水平时，水平视线为 obc_0z_0，当望远镜顺时针方向倾斜 α 角时，十字丝 Z_0 移至 Z，相当于视线倾斜 α，如图中虚线所示，则 $ob'c'z$ 在标尺上截取的读数为非水平时的读数。由于补偿棱镜 AB 是用单摆悬吊的，它

将逆时针方向摆动 α 角(不考虑悬吊系统的摩擦阻尼矩),而位于图上所示的 $A'B'$ 位置。此时水平视线在标尺上截取的读数经由 $obcz$,成像于位移后的十字丝中心 Z,实现了自动安平要求。由于反射面摆动了 α 角,则通过它的反射光线改变了 2α 角。从图上不难看出,只要补偿反射镜位于物镜焦距的二分之一处即可达到补偿目的。

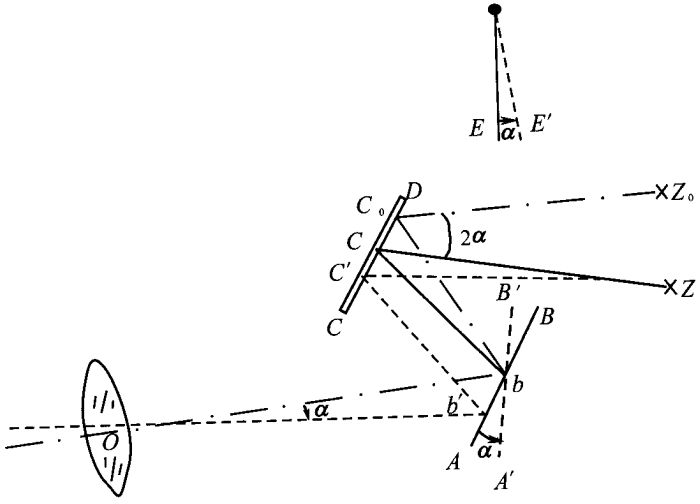


图 5－36

DZS3 自动安平水准仪设置有水平度盘,其最小分划为 1°。用指标线读数,可估读到 0.1°。在工程测量中,可方便地确定粗略方位。

第九节　测量仪器的使用和保养

测量成果的精度在很大程度上决定于仪器的性能是否良好,所以正确地使用和妥善地保管仪器,是每一个测量人员必须十分重视的问题。如果仪器保养和使用得当,就能够延长仪器的使用年限,保证作业的顺利进行和获得合格成果。爱护公物是共产主义道德品质之一。因此爱护测量仪器,不仅是测量人员的工作职责,也是培养共产主义道德品质的一个过程。为了保护好测量仪器,不仅要在思想上重视,而且还应该了解正确使用和保管仪器的方法。所以在使用和保养时,应注意下列几点:

1. 接收仪器后,应及时检查仪器箱锁扣、背带、提手是否结实牢靠,脚架、器材、附件是否完好。若有毛病,及时修理。

2. 使用仪器时，应先将三脚架安放好，使脚尖牢固插入土中。伸缩式脚架应注意脚腿抽出后及时拧紧固定螺丝。若在光滑地面架设仪器，要采用安全措施。

3. 打开仪器箱取出仪器之前，必须记住仪器在箱内的安放位置，以便工作结束时按原来位置放入箱内。仪器从箱内取出时，应用双手抱住基座和照准部，不准手提望远镜。仪器取出后，应及时用中心连接螺旋将仪器固定在三脚架上，以防仪器摔下。随即盖好仪器箱。

4. 使用时，要手握支架，平稳地转动仪器，不能急剧转动仪器。旋转有制动螺旋（按钮）的部件时，要先松制动后转动，无论何时都不能强行转动仪器的任何部件。当转动遇到障碍时，应先找出原因，并消除之。各种制动螺旋不可拧的太紧，只要制动后，能微动即可。微动螺旋以使用中段为佳。如某部失灵，应查明原因，进行修理。

5. 物镜和目镜表面禁止用手摸，若有灰尘，可用软毛刷或擦镜纸轻轻拂去，不可用粗布或手帕去擦，以免磨坏镜面。

6. 仪器的各种零件和附件用毕后，应及时放入仪器箱内的固定位置，不得随意放入衣袋或其它地方，以免丢失。

7. 仪器在野外使用时，要避免烈日曝晒，防止各轴系关系改变和气泡位移。因此，作业时要用伞遮住阳光。遇到阴雨天气，谨防仪器被雨淋。

8. 仪器不能受撞击或过度震动。当仪器在三脚架上时，作业员不得离开仪器。若仪器安置在道路、工地处作业时，应有安全措施，防止意外事故的发生。

9. 迁站时，若距离较近（100～200m），对于普通水准仪，可用一只手托住仪器放置胸前，另一只手抱收拢后的脚架放在肋下，稳步行走。对于普通经纬仪，可将脚架张开扛在肩头，使仪器保持竖直状态稳步带走。不准把仪器斜扛在肩上，以免损伤仪器各轴系关系。若距离较远或道路行走不便时，必须装箱迁站。迁站时，都要清点所有仪器、器材、附件及应用之物，防止丢失。

10. 仪器使用完毕，应用软毛刷拂去灰尘，松开制动螺旋或按钮。然后用左手抓住仪器，用右手松开中连接螺旋后，双手抱住仪器按原来位置放入箱内。再稍微固紧制动螺旋或按钮，以免搬运时晃动磨损。关前应清点零件及附件是否齐全。装箱和关箱时，如发现放不下或关不上的情况，切勿硬挤硬压，应查明原重新装箱。关箱后若发现仪器或附件在箱内未固定时，应重新加以固定。盖上箱盖后，应及时扣好并加当确信无误后，才能提起仪器箱。

11. 仪器箱上不准坐人，不准随意拆卸仪器上的部件和螺旋。

12. 仪器不使用时，应放在清洁、干燥、通风、温度变化不大的地方。

第二章　三角高程测量及其在实际操作中的应用

第一节　三角高程测量原理

在第二章中我们介绍了水准测量，它是一种直接测高法，测定高差的精度是较高的。因此，它是建立高程控制网的主要方法。但其外业工作量大，施测速度较慢，仅限于平坦或地面起伏不大的地区。三角高程测量是一种间接测高法，它不受地形起伏的限制，且施测速度较快，虽然测定高差的精度略低于水准测量，但尚能满足各种实际工作的需要。所以，在地形、航测外业和大地测量中，除平坦或地面起伏不大地区的部分或全部控制点的高程用水准测量的方法测定外，常采用三角高程测量的方法传递高程。

一、三角高程测量原理

如图 5－37 所示，设 A、B 为两个高度不同的地面点，已知 A 点的高程为 H_A。如欲确定 B 点的高程 H_B，显然，只要知道 A 点对 B 点的高差 h_{AB} 即可，因

$$H_B = H_A + h_{AB}$$

为了确定高差 h_{AB}，可在 A 点架设经纬仪，在 B 点竖立觇标，观测竖角 α，并直接量取仪器高 i 和觇标高 t，若已知 A、B 两点间的水平距离为 D（D 由三角测量计算或其它方法求得），则

$$h_{AB} = D \cdot \tan\alpha + i - t$$

故

$$H_B = H_A + D \cdot \tan\alpha + i - t \tag{5-27}$$

这就是三角高程测量原理的基本公式，但它是以水平面为基准面和照准光线沿直线传播为前提的。因此，只有当 A、B 两点间的距离很短时，才可作为近似公式来用。而当 A、B 两点相距较远时，就必须考虑地球弯曲和大气折光的影响了。

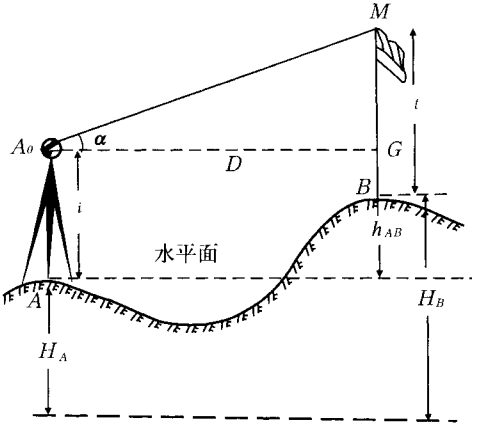


图 5－37

二、两差改正

通常把地球弯曲和大气折光对高差的影响分别叫做“球差”和“气差”，简称两差。两差的综合改正叫“两差改正”。现分别讨论其性质和大小及其对高差的综合影响。

(一)球差

如图 5－38 所示，假设过 A 点的水准面为$\overset{\frown}{AF}$，A、B 两点间的水平距离为 D，过 A 点的水平面为 AE。由于过 A 点的水平面和水准面在过 B 点的铅垂方向上是不密合的，则其差距 EF 即为球差。显然 AB 间的高差 h 中含有球差 EF。

为便于公式的推导而又不影响推导结果的实际应用，现假定地球为一半径为 R 的圆球，A、B 所对的圆心角为 θ，则球差 EF 所对的弦切角为 $\frac{\theta}{2}$。由于 θ 较小，故

$$\frac{\theta}{2} = \frac{EF}{D} \cdot \rho$$

即

$$EF = \frac{\theta}{2} \cdot \frac{D}{\rho}$$

而

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AF}}{OA} \cdot \rho = \frac{\overset{\frown}{AF}}{R + H_A} \cdot \rho$$

由于 $R \gg H_A$，故以 R 代($R + H_A$)，并以 D 代替$\overset{\frown}{AF}$，则

$$\theta = \frac{D}{R} \cdot \rho$$

所以

$$\text{球差} = EF = \frac{D^2}{2R} \tag{5-28}$$

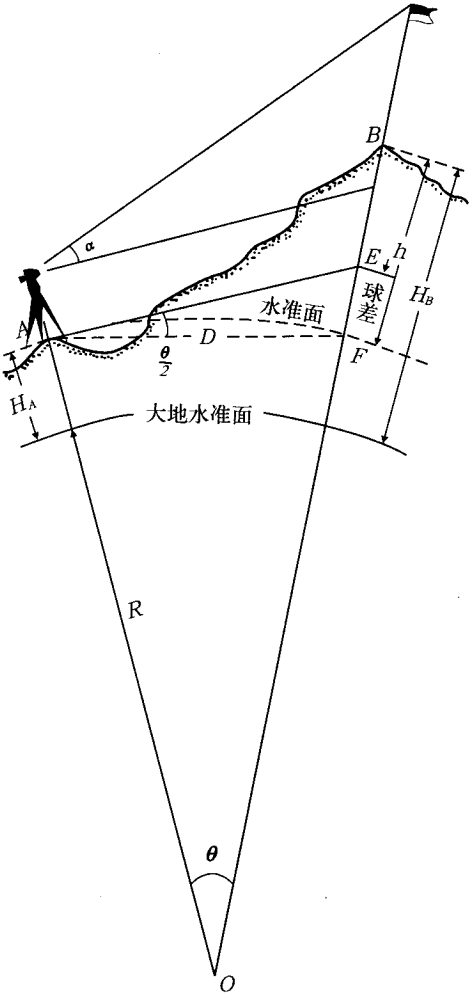


图 5-38

由上式可知，球差的大小仅与两点间距离的平方成正比，而与地面起伏无关，其影响总是使所测高差减小。因此，应在所测高差中加入球差改正。若取地球的平均半径 $R = 6\,371\text{km}$，当 $D = 300\text{m}$ 时，球差改正数为 0.01m。如果高程计算要求 0.01m 的精度，则相距 300m 以上的两点间的观测高差中，就应当加入球差改正数。

(二)气差

我们知道,地球被大气所包围,大气密度又因距地面的高度不同而不同,距地面愈近密度愈大,距地面愈远密度愈小。因此,我们设想:地球表面是一个无起伏的球面,包围地球表面的是稳定而密度又连续变化的大气层,并把这密度连续变化的大气层划分为若干不同密度的介质层,如图 5-39 中的 ad,bc,cd,…为不同密度的介质层,而 a,b,c,…分别为两介质层的临界面。由几何光学原理可知,光线通过两个不同介质的临界面时要产生折射现象,从光疏进入光密时,出射角总是小于入射角;反之,出射角总是大于入射角。现在,将从仪器中心 A_0 照准旗顶 M 的视线看成从 A_0 发出的一条照准 M 的光线,因 ab 层的大气密度大于 bc 层,bc 层的大气密度又大于 cd 层,依次类推,故照准光线 A_0M 为一系列折线所组成。然而,大气密度又是逐渐均匀变化的,所以,光线 A_0M 实际为一凹向地面的圆弧$\overset{\frown}{A_0M}$,设其圆心角为 ε,半径为 R'。这就是说,当我们在望远镜中看到照准了目标 M 时,而实际上是照准了 M',即仪器所指示的照准方向是过 A_0 点的圆弧 A_0M 的切线方向 A_0M'。这样一来就使所测垂直角的读数增加了$\frac{1}{2}\varepsilon$,即使所测高差增加了 MM'一段高度,这就是气差。

因 ε 很小,若近似地取 $A_0M=D$,则由图可得

$$\frac{\varepsilon}{2}=\frac{MM'}{D}\cdot\rho$$

即

$$MM'=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{D}{\rho}$$

因

$$\varepsilon=\frac{\overset{\frown}{A_0M}}{R'}\cdot\rho=\frac{D}{R'}\cdot\rho$$

所以

$$MM'=\frac{D^2}{2R'}$$

若令$\frac{R}{R'}=K$,K 称为大气折光系数则 $R'=\frac{R}{K}$,代入上式得

$$MM'=\frac{D^2}{2R}\cdot K \tag{5-29}$$

式(5-29)式即为大气折光对观测高差影响的计算公式。实践证明,R'总是大于 R 的,所以,K 总是小于 1 的。比较球差和气差的计算公式,可以看出,气差比球差小 K 倍(K 值通常在 0.08~0.15 之间),但气差却使所测高差偏大,应当减去气差 MM',方可得到正确高差。

(三)两差改正

综上所述,球差使所测高差减小,气差使所测高差增大。因此,在所测高差中应进行

“加入球差减去气差”的改正,即两差改正。设其为 r,则

$$r = EF - MM' = \frac{D^2}{2R} - \frac{D^2}{2R} \cdot K$$

$$= \frac{D^2}{2R}(1 - K) \tag{5-30}$$

上式中,地球半径 R 为已知,两点间的水平距离 D 亦为已知,如果知道 K 值,则两差改正数 r 便可求得。r、D、R 均以米为单位。

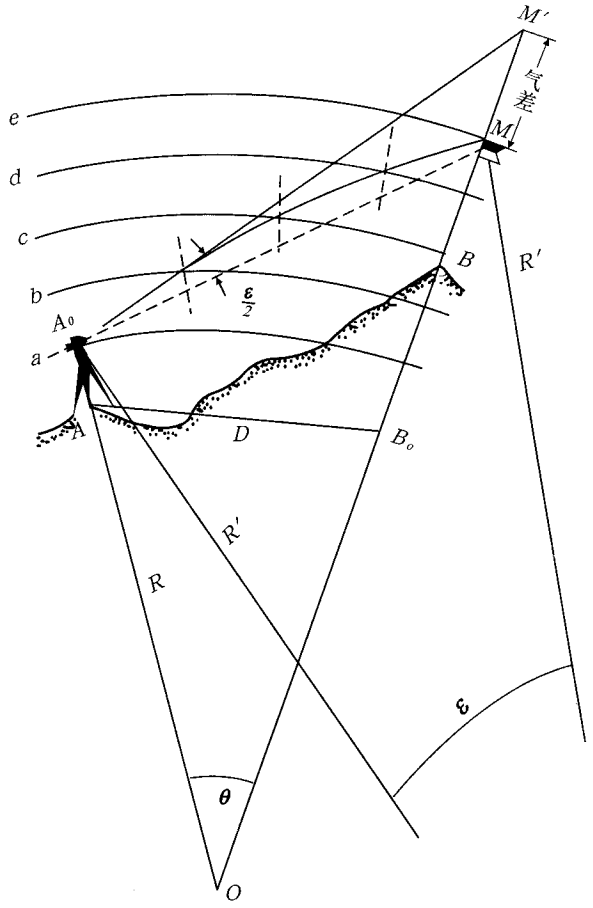


图 5-39

从理论和实践得知:K 值的变化是异常复杂的,它不仅随气温、气压、湿度和空气密度等的不同而变化,而且还随地区、季节、气候、地形条件、地面植被和地面高度等的不同而变化。要想逐项确定 K 值显然是十分困难的,而且是不现实的。因此,在实际工作中,通常是选定全国性或地区性的 K 的平均值来代替,即把 K 当常数来对待。目前,我

国一般采用 $K=0.11$，此值对大多数地区是适用的；少数地区若相差较大，亦可选用适合本地区具体情况的 K 值。

另外，K 值还随每日不同时刻而变化，据研究，K 值日变化量约为 ± 0.04。日出、日落时数值最大，且变化快；中午前后数值最小，且较稳定。因此，观测竖角的时间最好选在 9～15 时之间，尽量避免在日出后和日落前 2 小时内观测竖角。

K 值确定后，根据(5－30)式，以不同的距离 D 为引数，可编制成“两差改正数表”，如表 5－5 所示。计算高差时，则按距离从表中直接查取两差改正数。

表 5－5　两差改正数表

$K=0.11$　　单位：m

距　离	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	0.000	0.001	0.003	0.006	0.011	0.017	0.025	0.034	0.045	0.057
1000	0.070	0.085	0.101	0.118	0.137	0.157	0.179	0.202	0.226	0.252
2000	0.275	0.308	0.338	0.369	0.402	0.437	0.472	0.509	0.548	0.587
3000	0.629	0.671	0.715	0.761	0.807	0.856	0.905	0.956	1.009	1.062

三、直反觇实用公式

从上面分析可知，当距离超过 300m、高程精度要求 0.01m 时，球差和气差对所测高差的影响不可忽视，必须在计算出的高差中，加入两差改正数。由图 5－40 可得

$$h = EF + EG + GM' - MM' - BM$$

式中，$GM' = D\cdot\tan\alpha$，$EG = i$(仪器高)，$BM = t$(觇标高)，$EF - M'M$ = 球差 － 气差 = r。故，三角高程测量中计算高差的实用公式为

$$h = D\cdot\tan\alpha + i - t + r \qquad (5-31)$$

上式是按 α 为仰角推导的，当 α 为俯角时，(5－31)式仍然成立，即 α 可为正值或负值，故 $D\cdot\tan\alpha$ 亦即高差 h 是带有正、负号的。计算中，i、r 前的符号永为正，t 前的符号永为负。

在作业中，为了提高精度，通常要分别在 A、B 两点设站，相互观测竖角，并量取仪器高和觇标高，这样的观测称为对向观测。同时认定，已知其高程的点称为高程已知点，待定高程的点称为高程未知点；由高程已知点设站观测高程未知点的垂直角叫直觇，由高程未知点设站观测高程已知点的垂直角叫反觇。在图 5－4 中，若已知 A 点高程为 H_A，则 B 点高程为

$$H_B = H_A + h = H_A + D \cdot \tan\alpha + i - t + r \tag{5-32}$$

这就是三角高程的直觇计算公式。若已知 B 点高程为 H_B，则 A 点高程为

$$H_A = H_B - h = H_B - (D \cdot \tan\alpha + i - t + r) \tag{5-33}$$

这是三角高程的反觇计算公式。

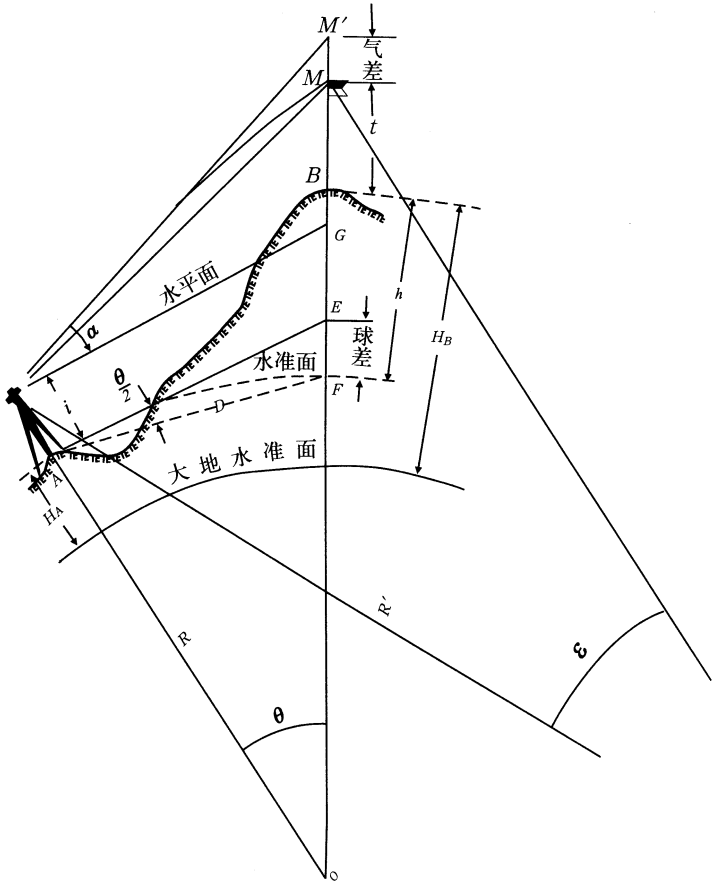


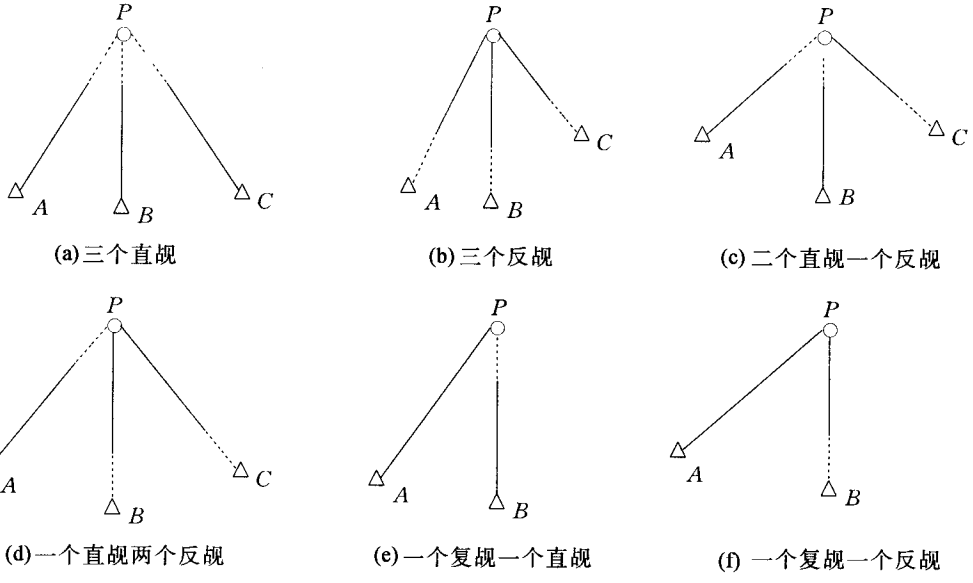
图 5-40

计算时应注意 α 是仰角还是俯角，谨防符号搞错；测站点的仪器高和照准点的觇标高不可取错。

在实际作业中，依据三角高程测量基本原理测定地面点高程的方法很多，如独立交会高程、三角高程导线、视距高程导线和经纬仪水准测高等。

第二节　独立交会高程

独立交会高程又叫独立点高程。它是根据高程已知点用三角高程测量的方法测定独立点的高程。一个独立点的高程，一般应由三个高程已知点单向测定，这些单向观测既可以是直觇，也可以是反觇 若由两个高程已知点测定时，则必定有一个高程已知点与待定点对向观测（复觇），另一高程已知点单觇（直觇或反觇）。这样便有多种独立交会高程的图形，如图 5－41 所示。



(a)三个直觇　(b)三个反觇　(c)二个直觇一个反觇

(d)一个直觇两个反觇　(e)一个复觇一个直觇　(f) 一个复觇一个反觇

图 5－41

无论采用何种组合图形，每一单向观测均可按（5－41）式计算其高差，然后根据直、反觇分别按（5－32）式或（5－33）式求得一组（三个）P 点高程。当三个高程的较差不超过 0.3m 时，则取其平均值作为 P 点的最后高程。计算实例见表 5－6。

独立交会高程通常用于测定图根点的高程，但所求点不能作为起算点再发展。独立交会高程多在交会法测定图根点平面位置的同时，测定所需方向的竖角，然后经过计算即可确定未知点的高程。在已知点分布较均匀的情况下，这种测定高程的方法是比较方便的。

表 5－6　独立点高程之计算

所求点 B	P_6		
起算点 A	N_6	W_2	W_2
觇　法	反	直	反
α	－2°23′15″	＋3°04′23″	－3°00′46″
D/m	624.42	748.35	748.35
$D\cdot\tan\alpha$	－26.03	＋40.18	－39.39
i/m	＋1.51	＋1.60	＋1.48
t/m	－2.26	－2.20	－1.73
r/m	＋0.03	＋0.04	＋0.04
h/m	－26.75	＋39.62	－39.60
起算点高　程 H_A/m	258.26	245.42	245.42
所求点高　程 H_B/m	285.01	285.04	285.02
H_B 中数/m	285.02		

第三节　三角高程导线

以导线的形式布设于两个或一个高程已知点之间，用三角高程测量的方法，联测导线上若干未知点的高程，称为三角高程导线。它不受导线尽量直伸的限制，可以按观测方向任意转折连接成导线，所以又称“多角高程导线”。通常三角高程导线要对向观测每边的竖角（可以与水平角观测同步进行），边长由两点的平面坐标算出或由平面控制计算表中抄取，直接量取所需仪器高和觇标高，因此，每边有直、反觇高差可供检核，最后取用高差平均值参加高程导线的计算，其导线高程闭合差可用来衡量并保证高程测量的精度。三角高程导线因其可将许多点串联于一条导线中，并有足够的检核条件以保证所求点之高程精度，所以，它特别适用于已知点较少的丘陵或山区，在三角点和图根点的高程测量中得到广泛应用。

一、布设形式和要求

三角高程导线的布设形式与经纬仪导线类似。一般有起闭于两个高程已知点的附

合导线，如图 5－42(a)所示；有起闭于同一高程已知点的闭合导线，又称“回归导线”，如图 5－42(b)所示；特殊情况下，还可采用支导线的形式，如图 5－42(c)所示。

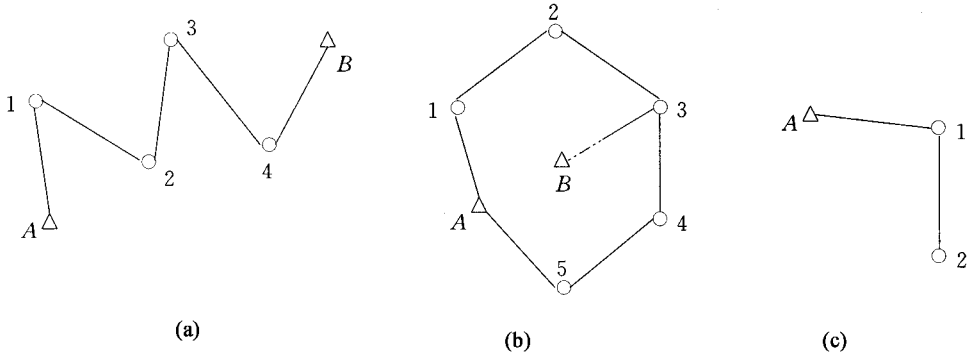


图 5－42

实际作业中，布设三角高程导线时，均有其相应的具体要求。现根据《城市测量规范》说明如下：

1. 三角高程导线的起闭点应是具有相应高程精度的三角点、水准点或经过闭合差配赋的三角高程导线点。

2. 由三角高程导线点再发展三角高程导线点时，一般不应超过 2 次。

3. 闭合三角高程导线由于检核条件不够严密，一般应在导线中间单向联测一个高程已知点作为检查点。

4. 支导线一般只用于施测引点的高程。

5. 小三角及一、二、三级导线点的三角高程导线，各边均应对向观测垂直角；仪器高和觇标高均应量取 2 次，读至 5mm，较差不得大于 1cm；其精度及规格应符合表 5－7 的要求。

表 5－7

项目 / 平均边长 / km	边数		路线全长高程闭合差 /m	往返测高差较差 /m	竖直角测回数(中丝法)				各测回竖角互差及同一测站指标差互差	
	等高距 /m 1.0	等高距 /m 2.0			小三角		一、二、三级导线			
					DJ_2	DJ_6	DJ_2	DJ_6	DJ_2	DJ_6
1.0	10									
2.0	4	10	$\pm 0.05\sqrt{[S^2]}$	$0.1S$	2	4	1	2	15″	25″
3.0		7								

注：S 为边长，小于 1km 按 1km 计。

6. 图根三角高程导线，各边竖角均应对向观测，仪器高和觇标高量记至厘米。其精

度及规格应符合表 5－8 的要求。

表 5－8

边数	路线全长高程闭合差 /m	往返测高差较差 /m	竖角测回数(中丝法) DJ_6	同一测站指标差互差 DJ_6
12	$\pm 0.1H\sqrt{n}$	$0.04S$	1	25″

注：H 为基本等高距；n 为边数；S 为边长，以百米为单位。

二、三角高程导线的计算

(一)外业成果的检查和整理

1. 检查观测成果：计算前应先检查外业观测手簿是否符合有关规定及各项限差要求，确认无误后方可计算。

2. 确定三角高程导线的推进方向：从起始点开始抄录导线上各点的竖角及对应的仪器高和觇标高，填入“高差计算表”的相应栏内。

3. 从平面控制计算表中抄录导线中的各边边长，并从“两差改正数表”中查取各边的两差改正数，一并填入“高差计算表”的相应栏内。

(二)高差计算

根据抄录的数据，按(5－31)式计算两相邻点间的单向高差。注意：顺导线推进方向的观测叫直觇，其高差叫“往测高差 $h_{往}$”；逆导线推进方向的观测叫反觇，其高差叫“返测高差 $h_{返}$”。因往、返测高差的符号相反，故它们的较差为

$$d = h_{往} + h_{返} \tag{5－34}$$

当 d 不超过限差规定时，则按下式计算高差中数

$$h_{中} = \frac{1}{2}(h_{往} - h_{返}) \tag{5－35}$$

高差计算示例如表 5－9 所示。

表 5－9　高差计算表

所求点 B	N_1		N_2		T_6	
起算点 A	T_4		N_1		N_2	
觇　法	直	反	直	反	直	反
α	+2°13′25″	−2°01′42″	−4°36′28″	+45°01′05″	+3°25′02″	−3°11′31″
D/m	421.35	421.35	500.16	500.16	406.76	406.76
$D\tan\alpha$	+16.36	−14.92	−40.31	+42.45	+24.29	−22.68
i	+1.60	+1.61	+1.58	+1.62	+1.61	+1.59
r	+0.01	+0.01	+0.02	+0.02	+0.01	+0.01
t	−2.62	−2.02	−2.30	−3.10	−3.40	−1.46
h/m	+15.35	−15.32	−41.01	+40.99	+22.51	−22.54
h 中数	+15.34m		−41.00m		+22.52m	

(三)计算导线的高程闭合差

若三角高程导线的起闭点为 A 和 B,其中有 n 个未知点,则必有($n+1$)个高差 h_i($i=1,2,3,\cdots,n+1$)。如果观测没有误差,则所有高差之和应等于起、闭点的高差,即

$$\sum h_i = H_B - H_A \tag{5-36}$$

式中,H_A 和 H_B 分别为 A、B 两点的已知高程。

但实际上观测不可能没有误差,因此,上式两端不可能相等,必定产生高程闭合差 W_h。若用观测的高差 h'_i 代入(5-36)式,则有

$$W_h = \sum h'_i - (H_B - H_A) \tag{5-37}$$

如果 W_h 不超过规定的限差,就可进行高程闭合差的分配。否则,应检查计算,或另选线路,或返工重测某些边的竖角、仪器高和觇标高,直至符合要求为止。

(四)导线高程闭合差的配赋

导线的高程闭合差主要是竖角观测误差和边长误差所引起,其大小与边长成比例。因此,要消除导线的高程闭合差,可以按边长成比例地将高程闭合差分配到各观测高差中去,就可得到正确高差。

设导线全长为 $\sum S$(S 以百米为单位),则每百米边长的高差改正数为

$$V_{百} = -\frac{W_h}{\sum S} \tag{5-38}$$

若各边的高差改正数为 V_i,相应的边长为 S_i(S_i 以百米为单位),则有

$$V_i = V_{百} \cdot S_i \tag{5-39}$$

凑整的余数,可强制分配到长边对应的高差中去,即

$$\sum V = -W_h \tag{5-40}$$

将 V_i 加入到相应的观测高差 h'_i 中,就可得到改正后的正确高差为

$$h_i = h'_i + V_i \tag{5-41}$$

改正后的高差总和 $\sum h_i$ 应等于两已知点间的高差。可以作为计算正确性的检核。

(五)各点高程之计算

根据改正后的高差,按下式即可计算各所求点之高程,即

$$\begin{cases} H_1 = H_A + h_1 \\ H_2 = H_1 + h_2 \\ H_3 = H_2 + h_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_B = H_n + h_{n+1} \end{cases} \tag{5-42}$$

最后求出的 H_B 应与 B 点的已知高程完全相等，以检核高程计算的正确性。具体计算实例见表 5－10。

表 5－10　三角高程导线之计算

点　号	距　离 S /百米	高差中数 h'/m	改　正　数 V_i/m	改正后高差 h/m	点的高程 H/m
T_4					270.64
	4.214.21	+15.34	−0.05	+15.29	
N_1					311.71
	5.00	−41.00	−0.07	−41.07	
N_2					296.42
	4.07	+22.52	−0.05	+22.47	
T_6					293.11
$\sum$	13.28	−3.14	−0.17	−3.31	

$H_{T_6} - H_{T_4} = -3.31\text{m}$

$W_h = \sum h' - (H_{T_6} - H_{T_4}) = -3.14 - (-3.31) = +0.17\text{m}$

$V_{百} = -0.17/13.28 = -0.013\text{m}$

我们讲的三角高程导线中的边长是由平面控制计算表中抄来或由两点坐标反算其两点间之边长。如果用电磁波测距仪直接测出导线边的水平距离，其余观测竖角、量取仪器高和觇标高、查取两差改正数及其计算方法均与三角高程导线相同，这样来确定所求点高程的方法，称为电磁波测距高程导线。由于直接测量距离，具有较高的边长精度，所以，用此距离计算出的高差也有较高的精度。据研究，用两秒级经纬仪对向观测竖角各两测回，用精度为 $5\text{mm} + 5 \times 10^{-6} D$ 的测距仪测量距离，起、闭于国家三等以上水准点的高程导线，其最后高程精度与四等水准的精度相当。因此，电磁波测距高程导线今后将广泛地用于山区及丘陵地区的高程控制测量中。

第四节　视距高程导线

视距高程导线简称“高程导线”，它是根据三角高程测量的原理，以水准测量的形式，用经纬仪进行视距和观测竖角，通过计算求得导线点高程的一种方法。它与三角高程导线相似，是根据高程已知点和待定点的分布情况及地形条件布设的，其布设形式有附合导线、闭合导线和支导线三种，如图 5－43 所示。它的起闭点可为三角点、水准点或经过平差配赋的三角高程导线点。

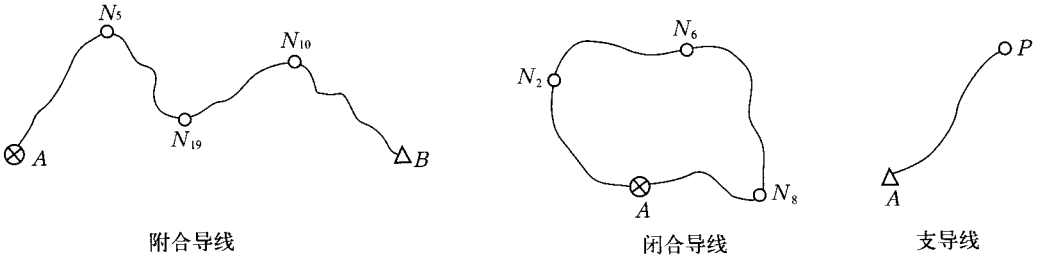


图 5 – 43

施测时，像水准测量一样，在选定的路线上逐个设站，进行视距和观测竖角，以测得仪器至标尺的高差。因此，视距高程导线既有水准测量的灵活性，又有三角高程测量的适应性，很少受地形起伏的限制，又不受控制点平面位置的制约，所以，它是森林隐蔽地区和其它困难地区测定图根点高程的一种较好方法，在航测外业中曾得到较为广泛的应用。

视距高程导线的具体测量方法如图 5 – 44 所示。在起闭点 A、B 之间有若干个待定高程的点如 N_3 等，测量时按导线前进方向依次安置标尺，在标尺中间架设经纬仪。在每个测站上均用下丝切准标尺顶(倒像)，测出前、后两个视距 $kl_{前}$ 和 $kl_{后}$；用中丝切准标尺顶，测出前、后两个竖角 $\alpha_{前}$ 和 $\alpha_{后}$，则按下式计算前、后两个平距 $D_{前}$、$D_{后}$ 和前、后两个高差 $h_{前}$、$h_{后}$

$$\begin{cases} D = kl\cos^2(\alpha - 17') \\ h = D \cdot \tan\alpha \end{cases} \tag{5-43}$$

计算 $h_{前}$、$h_{后}$ 时，有时也可采用近似公式

$$h = \frac{1}{2}kl\sin 2\alpha \tag{5-44}$$

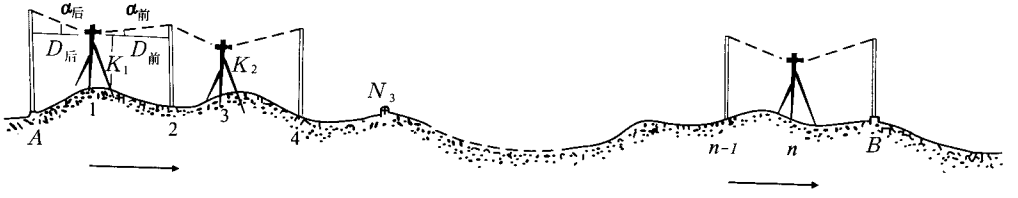


图 5 – 44

欲求 A、N_3 两点间的高差 h_{AN_3}，则将每站所测 $h_{后}$ 反号与 $h_{前}$ 相加取代数和，即

$$h_{AN_3} = \sum h_{前} - \sum h_{后} \tag{5-45}$$

当欲求测站高程时，应量取仪器高，否则无需量取 觇标高即为标尺长。

视距高程导线的竖角观测，一般用 DJ_6 经纬仪中丝法一测回即可。记簿格式见表 5－11 所示。计算通常使用计算器，应先编好程序，以便使用。

表 5－11　视距高程导线记簿格式

测站	觇点	觇法	视距 kl/m	平距 D/m	竖盘读数	i α	k	L	r	h /m
1	A	反	192.7	192.5	92°07′06″	+ 00 18				+7.10
					267°53′30′	−2 06 48				
	2	直	127.7	126.6	84 32 18	+ 00 24				+12.12
					275 28 30	+5 28 06				
3	2	反								
	4	直								

视距高程导线的技术要求应符合表 5－12 的规定，其计算方法与三角高程导线相同，高程闭合差的分配，亦可按测站数成比例进行配赋。

表 5－12　视距高程导线技术要求

地形类别	视距长 /m	倾斜角	线路全长 /km	高程路线闭合差 /m
平　地	<250	<2°	6	0.4
丘　陵	<250	<5°	12	0.7
山　地	<250	<7°	15	1.0
高山地	<250	<10°	20	2.0

注 作业中应按相应规范执行。

视距高程导线测量注意事项：

(1)野外观测计算，应有另一人检查复核，以保证原始成果的可靠性。

(2)每站测完，前视标尺转为后视标尺，点位不能动，否则须从固定点开始重测。

(3)观测时标尺一定要竖直，最好在标尺上装水准器，以保证视距精度。

(4)视距尽量采用全丝读数，读至 0.1m，视线应距地面 0.5m 以上，防止地面附近大气折光的影响。

第五节　经纬仪水准测高

用经纬仪代替水准仪进行高程测量的方法，称为经纬仪水准测高，其实际上是竖角为零的视距高程导线。它简化了视距高程导线中计算高差的过程，使之完全具备水准测量的特点，但适应性较差，仅能在较平坦地区应用。由于望远镜安置水平的精度低于水准仪望远镜水平的精度，所以，它仍属于三角高程测量的精度范围，故不能代替水准测量。

经纬仪水准测高常用于图根点的高程测量中，其具体操作步骤如图 5－45 所示。

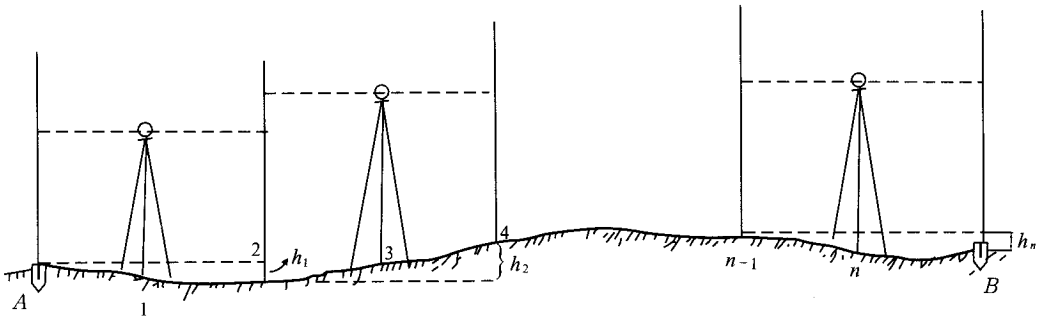


图 5－45

(1)在起始点 A 上立后视标尺，在 2 点上立前视标尺，经纬仪大致架设于中间点 1 处。

(2)盘左照准后视标尺，读视距(至整米)。然后使垂直度盘气泡居中，并使其竖盘读数为 90°00′00″，此时按中丝在标尺上读数(至厘米)。照准前视标尺，重复上述操作。

(3)纵转望远镜照准前视标尺，使竖盘气泡居中，并使其读数为 270°00′00″，读取中丝的标尺读数。再照准后视标尺，重复上述操作。此时，一个测站的观测即告完成。

(4)迁站至点 3 处，变前视标尺为后视标尺，原后视标尺迁至点 4 处变为前视标尺，重复前站操作，直至终点为止。

标尺均用黑面，记录可用水准测量手簿。计算高差时，可先将盘左、盘右中丝读数取中数，作为最后读数，设后视读数为 a，前视读数为 b，则两标尺点间高差为

$$h = a - b \tag{5-46}$$

其余计算过程与水准测量或三角高程导线完全相同,不再赘述。

当地面略有起伏,中丝切不到标尺,而上丝或下丝可切到标尺时,则按上丝或下丝的标尺读数,仍可进行经纬仪水准测高。为区别于中线读数的经纬仪水准测高,将上丝(或下丝)读数的测高方法称之为‘上丝水准’(或‘下丝水准’)。前面的中丝读数测高亦可称为‘中丝水准’。如图 5 – 46 为上丝水准,图 5 – 47 为下丝水准。

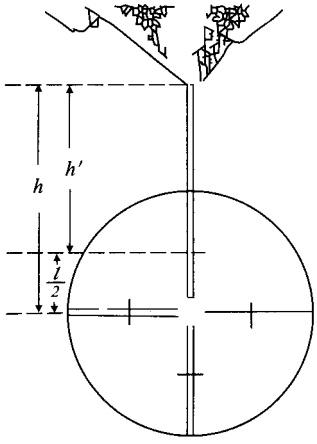


图 5 – 46　上丝水准

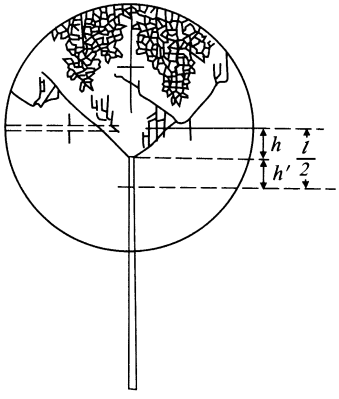


图 5 – 47　下丝水准

从图中不难看出,若上丝(或下丝)的标尺读数为 h',而所需的中丝读数为 h,两者的差值为 $\frac{l}{2}$。因 $\frac{l}{2}$ 为全丝视距间隔的一半,故中丝的标尺读数 h 可按下式求出,即

$$h = h' \pm \frac{l}{2} \tag{5-47}$$

式中，上丝水准取“ + ”号，下丝水准取“ – ”号。

经纬仪水准测高的记簿格式见表 5 – 13 所示。

表 5 – 13　经纬仪水准测高记录表

测　站	觇　点	觇　法	照准丝	视　距 kl /m	标尺读数			$\frac{l}{2}$	h /m
					左	右	中		
1	A	反	中	202	2.40	2.44	2.42	0	+ 2.42
	2	直	中	221	1.23	1.27	1.25	0	– 1.25
3	2	反	上	164.0	2.52	2.51	2.52	0.82	+ 3.34
	4	直	下	160.0	0.54	0.55	0.54	0.80	+ 0.26

当采用上、下丝水准测高时，标尺一定要竖直，视距读数读至 0.01m，因 $\frac{l}{2}$ 要直接加入高差中，所以，读数的精度也直接影响高差精度。

第三章　高程传递法与高程测量误差分析及其在实际操作中的应用

第一节　高程传递方法

一、普通水准测量及其成果整理

(一)水准测量外业

1. 水准点

为了统一全国的高程系统和满足各种测量的需要,测绘部门采用水准网的形式在全国各地埋设并测定了很多高程点,这些点称为水准点,简记为 BM。水准点是高程测量的重要依据,有永久性和临时性两种。国家等级水准点如图 5 – 48 所示,一般用石料或钢筋混凝土制成,深埋到地面冻结线以下。在标石的顶面设有用不锈钢或其他不易锈蚀的材料制成的半球状标志。有些水准点也可设置在稳定的墙脚上,称为墙上水准点,如图 5 – 49 所示。

建筑工地上的永久性水准点一般用混凝土或钢筋混凝土制成,其式样如图 5 – 50a 所示。临时性的水准点可用地面上突出的坚硬岩石或用大木桩打入地下,桩顶钉以半球形铁钉,如图 5 – 50b 所示。

埋设水准点后,为便于日后寻找水准点位置,水准点应进行编号。水准点编号前通常加 BM 字样,作为水准点的代号。此外,还应绘出水准点与附近固定建筑物或其他地

物的关系图，在图上写明水准点的编号和高程，称为点之记，作为水准测量的成果一并保存。

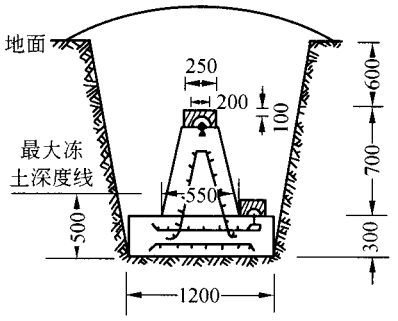


图 5－48　国家等级水准点

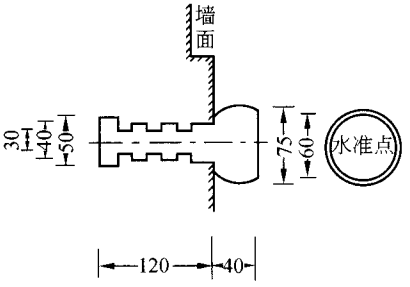


图 5－49　墙上水准点

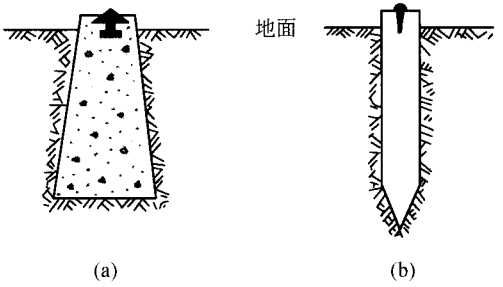


图 5－50　建筑工程水准点

2．水准测量的实施

当欲测的高程点距水准点较远或高差很大时，就需要连续多次安置仪器以测出两点的高差。如图 5－51，水准点 A 的高程为 19.153m，现拟测量 B 点的高程，其观测步骤如下：

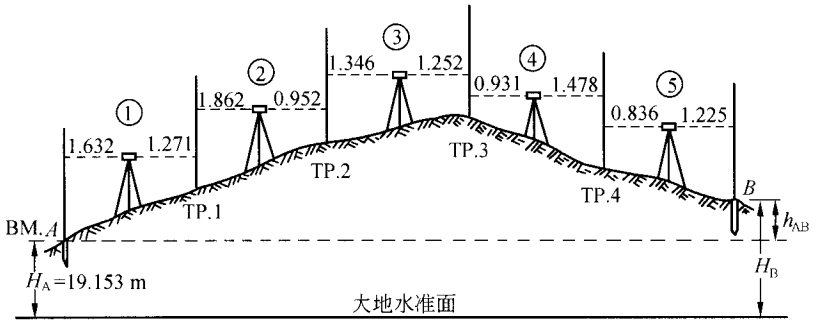


图 5－51　普通水准观测

在 A 点前适当位置选定转点 1，在 A、1 两点上分别立水准尺。在点 A 和点 1 之间等距离处设测站①，安置水准仪。用圆水准器将仪器粗略整平后，后视 A 点上的水准尺，精平后读数得 1632，记入表 5－14 观测点 A 的后视读数栏内。旋转望远镜，前视点 1 上的水准尺，同法读取读数为 1271，记入点 1 的前视读数栏内。此为一个测站上的工作。

用同样方法在转点 1 前选择下一转点 2，点 1 上的水准尺不动，把 A 点上的水准尺移到点 2，仪器安置在点 1 和点 2 之间，同法进行观测和计算，依次测到 B 点。

显然，每安置一次仪器，便可测得一个高差，即

$$h_1 = a_1 - b_1$$

$$h_2 = a_2 - b_2$$

$$\cdots$$

$$h_5 = a_5 - b_5$$

将各式相加，得

$$\sum h = \sum a - \sum b$$

则 B 点的高程为

$$H_B = H_A + \sum h \tag{5-48}$$

由上述可知，在观测过程中，点 1，2，…，4 仅起传递高程的作用，这些点称为转点，简写为 TP。转点无固定标志，仅以尺垫支托标尺，无需算出高程。

3. 水准测量的检核

①计算检核

由式(5－48)看出，B 点对 A 点的高差等于各转点之间高差的代数和，也等于后视数之和减去前视读数之和，因此，此式可用来作为计算的检核。如表 5－14 中。

$$\sum h = +0.429, \sum a - \sum b = 6.607 - 6.178 = +0.429\text{m}$$

这说明高差计算是正确的。

表 5－14　普通水准测量记录手簿

测　区：燕　　山　　仪器型号：DS3　　观测者：李　东

观测时间：2000 年 3 月 6 日　　天　　气：晴　　记录者：周　芳

测站	点号	水准尺读数/m		高差/m	平均高差/m	高程/m	备注
		后视	前视				
1	BM. A	1.632 1.511		+0.361 +0.362	+0.362	19.153	已知点
	TP. 1		1.271 1.149				
2	TP. 1	1.862 1.973		+0.910 +0.907	+0.908		
	TP. 2		0.952 1.066				
3	TP. 2	1.346 1.433		+0.094 +0.093	+0.094		
	TP. 3		1.252 1.340				
4	TP. 3	0.931 1.020		−0.547 −0.549	−0.548		
	TP. 4		1.478 1.569				
5	TP. 4	0.836 0.951		−0.389 −0.390	−0.390		
	B		1.225 1.341			19.579	
计算检核		6.607 6.888	6.178 6.465	+0.429 +0.423	+0.426		
	$\sum a - \sum b = +0.429$ $\sum a - \sum b = +0.423$			$\sum h = +0.429$ $\sum h = +0.423$		$H_B - H_A = +0.426$	

终点 B 的高程 H_B 减去 A 点的高程 H_A，就应等于 $\sum h$，即

$$H_B - H_A = \sum h$$

在表 5－14 中为 19.579 − 19.153 = +0.426m，这说明高差计算是正确的。

计算检核只能检查计算是否正确，并不能检核观测和记录时是否产生错误。

②测站检核

如上所述，B 点的高程是根据 A 点的已知高程和转点之间的高差计算出来的。若其

中测错任何一个高差，B 点高程就不会正确。因此，对每一站的高差，都必须采取措施进行检核测量。这种检核称为测站检核。测站检核通常采用变动仪器高法或双面尺法。

变动仪器高法：是在同一个测站上测得第一次高差后，改变仪器高度（应大于 10cm）重新安置，再测一次高差。两次所测高差之差若不超过容许值（例如等外水准容许值为 5mm），则认为符合要求，取其平均值作为最后结果（记录、计算列于表 5－14 中），否则必须重测。

双面尺法：是仪器的高度不变，而立在前视点和后视点上的水准尺分别用黑面和红面各进行一次读数，在四等水准测量时若同一水准尺黑面读数（加常数后）与红面读数之差不超过 3mm，且黑面高差与红面高差（加或减 0.1m 后）之差又未超过 5mm，则取其平均值作为该测站观测高差。否则，必须重测。

③路线检核

测站检核只能检核一个测站上是否存在错误或误差超限。对于一条水准路线来说，还不足以说明所求水准点的高程精度符合要求。由于温度、风力、大气折光、尺垫下沉和仪器下沉等外界条件引起的误差，尺子倾斜和估读的误差，以及水准仪本身的误差等，虽然在一个测站上反映不很明显，但随着测站数的增多，误差不断地积累，有时也会超过规定的限差。因此，水准路线必须采取一定的布设形式，并进行整个水准路线的成果检核，以保证测量资料满足使用要求。其布设形式及其检核方法有如下几种：

a. 附合水准路线

如图 5－52c，从一已知高程水准点 BM.A 出发，沿各个待定高程的点 1、2、3 进行水准测量，最后附合到另一个水准点 BM.B 上，这种水准路线称为附合水准路线。

路线中各待定高程点间高差的代数和，应等于两个水准点间已知高差。如果不相等，两者之差称为高差闭合差，以符号 f_h 表示。其值不应超过容许范围，否则，就不符合要求，须进行重测。其高差闭合差的计算公式为：

$$f_h = \sum h - (H_B - H_A) \tag{5-49}$$

b. 闭合水准路线

如图 5－52b，由一已知高程的水准点 BM.A 出发，沿环线待定高程点 1、2、3 进行水准测量，最后回到原水准点 BM.A 上，称为闭合水准路线。显然，路线上各点之间高差的代数和应等于零。如果不等于零，便产生高差闭合差，其大小不应超过容许值。其高差闭合差的计算公式为：

$$f_h = \sum h \tag{5-50}$$

c. 支水准路线

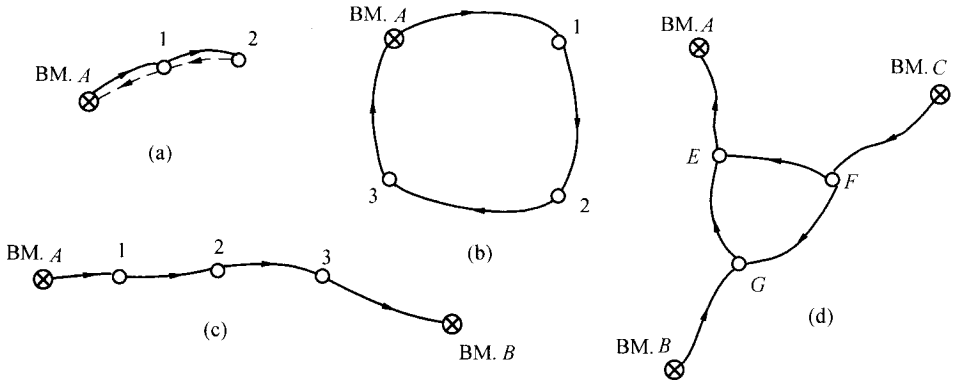


图 5 – 52　水准测量路线略图

如图 5 – 52a，由一个已知高程的水准点 BM. A 出发，沿待定点 1 和 2 进行水准测量，既不附合到另外已知高程的水准点上，也不回到原来的水准点上，称为支水准路线。支水准点不应超过 3 个。支水准路线应进行往、返观测，往测高差与返测高差应绝对值相等、符号相反，其代数和应等于零。如不等于零，则产生不符值，其计算公式为：

$$f_h = \sum h_{往} + \sum h_{返} \tag{5-51}$$

d. 水准网

如图 5 – 52d，若干条单一水准路线相互连接构成网形，称为水准网。水准网的检核及计算较为复杂，在此不作介绍，详细可参阅有关测量专业文献。

高差闭合差（或往返不符值）可用于衡量测量成果的精度，等外水准测量的高差闭合差或往返不符值的容许值规定为：

$$\left.\begin{aligned} &\text{平地} && f_{h容} = \pm 40\sqrt{L}\,\text{mm} \\ &\text{山地} && f_{h容} = \pm 12\sqrt{n}\,\text{mm} \end{aligned}\right\} \tag{5-52}$$

式中　L ——水准路线长度，km；

n ——测站数。

若 $f_h \leqslant f_{h容}$，说明观测精度符合要求，观测成果可以采用。

（二）水准测量内业

水准测量外业工作结束后，要检查手簿，再计算各点的高差。经检核无误后，才能进行高差闭合差的计算和调整，最后计算各点的高程。以上工作，称为水准测量的内业。

1. 附合水准路线内业计算

如图 5－53，A、B 为两个水准点。A 点高程为 6.543m，B 点高程为 9.578m。各测段的高差分别为 h_1、h_2、h_3 和 h_4。将已知数据及观测数据列入表 5－15 中，并进行计算。

①高差闭合差的计算 按式(5－49)，

$$f_h = \sum h - (H_B - H_A)$$
$$= 3.060 - (9.578 - 6.543)$$
$$= +0.025\text{m}$$

设为平地，故

$$f_{h容} = \pm 40\sqrt{L} = \pm 40\sqrt{6.25} = \pm 100\text{mm}$$

$|f_h| < |f_{h容}|$，其精度符合要求。

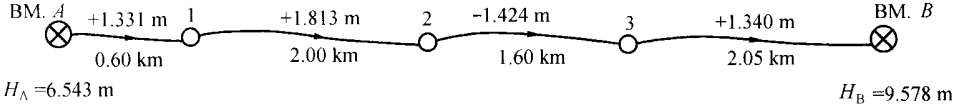


图 5－53　附合水准路线略图

②闭合差的调整

在同一条水准路线上，假设观测条件是相同的，可认为每公里(或各站)产生的误差机会是相同的，故闭合差的调整按路线长度 L(或路线总测站数 n)成正比例反符号分配的原则进行。本例中，$L = 6.25\text{km}$，故每公里的高差改正数为

$$V_i = -\frac{f_h}{L} = -(+25/6.25) = -4\text{mm/km}$$

各测段的改正数，按测段线路长度计算，分别列入表 5－15 中。改正数总和的绝对值应与闭合差的绝对值相等。各实测高差分别加改正数后，便得到改正后的高差。最后求改正后的高差代数和，其值应与 A、B 两点的高差($H_B - H_A$)相等，否则，说明计算有误。

(2)闭合水准路线内业计算

①高差闭合差依式(5－50)计算。

②闭合水准路线高差闭合差的调整方法，容许值的计算，均与附合水准路线相同。

(3)支水准路线内业计算

①往返高差不符值按式(5－51)计算。

②各水准点高程计算 支水准路线计算不必进行闭合差的调整，而是取各测段往返测高差绝对值的平均值作为该测段的高差(高差的正负号以往测为准)，来计算各点的高程。

表 5－15　闭合水准路线测量成果计算表

点号	路线长度 L/km	观测高差 h_i/m	高差改正数 v_{hi}/m	改正后高差 h_i/m	高程 H/m	备　注
BM. A	0.60	+1.331	−0.002	+1.329	6.543	已知
1					7.872	
	2.00	+1.813	−0.008	+1.805		
2					9.677	
	1.60	−1.424	−0.007	−1.431		
3					8.246	
	2.05	+1.340	−0.008	+1.332		
BM. A					9.578	已知
$\sum$	6.25	+3.060	−0.025	+3.035		

$f_h = \sum h_{测} - (H_B - H_A) = +25\text{mm}$　　$f_{h容} = \pm 40\sqrt{L} = \pm 100\text{mm}$

$v_{1km} = -\dfrac{f_h}{L} = -\dfrac{+25}{6.25} = -4\text{mm/km}$　　$\sum v_{hi} = -25\text{mm} = -f_h$

二、三角高程测量及其成果整理

在山地测定控制点的高程，若采用水准测量，则速度慢，困难大，故可采用三角高程测量的方法。但必须用水准测量的方法在测区内引测一定数量的水准点，作为高程起算的依据。三角高程测量中，应将已知高程点和待测高程点按照附合路线、闭合路线、支路线等形式进行观测、计算，以确保成果的精度。

(一)三角高程测量的观测

在测站上安置经纬仪(或全站仪)，量取仪器高 i，在目标点上安置棱镜，量取棱镜高 v，i 和 v 用小钢卷尺量两次平均，读数至 1mm。

按经纬仪三角高程测量的方法或电子测距 EDM 测高的方法测定两点间的高差。经纬仪竖直角观测的测回数及其限差规定见表 5－16。

表 5－16　竖直角观测测回数及其限差

项　目	一、二、三级导线		图根导线
	DJ2	DJ6	DJ6
测回数	1	2	1
各测回竖直角互差	15″	25″	25″
各测回指标差互差	15″	25″	25″

(二)三角高程测量的计算

三角高程测量的往返测高差按式(5－51)或式(5－52)计算。由对向观测求得往、返

测高差(经球气差改正)之差 $f_{\Delta h}$ 的容许值为：

$$f_{\Delta h容} = \pm 0.1D \quad \text{m} \tag{5-53}$$

式中 D 为两点间水平距离，以 km 为单位。

图 5-54 为在 A、B、C 三点间进行三角高程测量并构成闭合线路的实测数据略图，已知 A 点的高程为 56.432m，已知数据及观测数据注明于图上，在表 5-17 中进行高差计算。

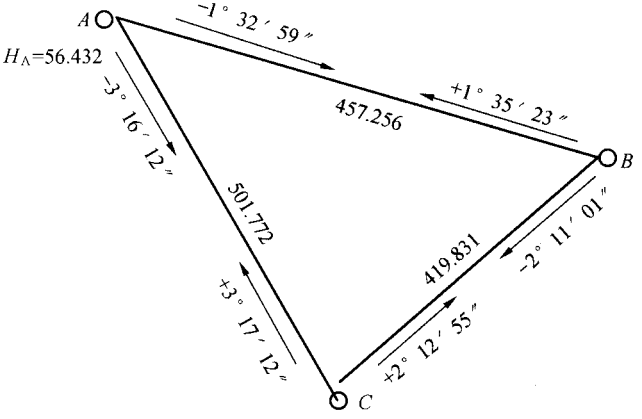


图 5-54　三角高程测量实测数据略图

由对向观测所求得高差平均值，计算闭合环线或附合线路的高差闭合差的容许值为

$$f_{h容} = \pm 0.05\sqrt{[D^2]} \quad \text{m} \tag{5-54}$$

式中 D 以 km 为单位，$[D^2] = \sum D^2$。

表 5-17　三角高程测量高差计算　　m

测站点	A	B	B	C	C	A
目标点	B	A	C	B	A	C
水平距离 D	457.256	457.256	419.831	419.831	501.772	501.772
竖直角	-1°32′59″	+1°35′23″	-2°11′01″	+2°12′55″	+3°17′12″	-3°16′16″
测站仪器高 I	1.465	1.512	1.512	1.562	1.563	1.465
目标棱镜高 v	1.762	1.568	1.623	1.704	1.618	1.595
球气差改正 f	0.014	0.014	0.012	0.012	0.017	0.017
单向高差 h	-12.654	+12.648	-16.107	+16.111	+28.777	-28.791
$f_{\Delta h容}$	0.046		0.042		0.050	
平均高差 $\overline{h}$	-12.651		-16.109		+28.784	

本例的三角高程测量闭合线路的高差闭合差计算、高差调整及高程计算在表 5－17 及表 5－18 中进行。高差闭合差按两点间的距离成正比反号分配。

表 5－18　三角高程测量成果整理

点号	水平距离/m	观测高差/m	改正值/m	改正后高差/m	高程/m
A					56.432
	457.265	－12.651	－0.008	－12.659	
B					43.773
	419.831	－16.109	－0.007	－16.116	
C					27.657
	501.772	＋28.784	－0.009	＋28.775	
A					56.432
$\sum$	1378.868	＋0.024	－0.024	0.000	
备注	$f_h = +0.024\text{m}$，$[D^2] = 0.6371$ $f_{h容} = \pm 0.05\sqrt{[D^2]} = \pm 0.040\text{m}$，　$f_h \leqslant f_{h容}$（合格）				

第二节　高程测量误差分析

一、水准测量的误差分析

水准测量误差包括仪器误差、观测误差和外界条件的影响三个方面。

（一）仪器误差

主要是因制造误差和仪器检验不完善而引起的残余误差。

1. 仪器校正后的残余误差　例如水准管轴与视准轴不平行，虽经校正仍然残存少量误差等。这种误差的影响与距离成正比，只要观测时注意使前、后视距离相等，便可消除或减弱此项误差的影响。

2. 水准尺误差　如水准尺刻画不正确，尺长变化、弯曲等影响，会影响水准测量的精度，因此，水准尺须经过检验才能使用。至于尺的零点差，可在一水准测段中使测站为偶数的方法予以消除。

（二）观测误差

1. 水准管气泡居中误差　设水准管分画道为 τ''，居中误差一般为 $\pm 0.15\tau''$，采用符

合式水准器时，气泡居中精度可提高一倍。

2. 读数误差　在水准尺上估读毫米数的误差，与人眼的分辨力、望远镜的放大倍率以及视线长度有关。观测时限制视线长度，可以减小读数误差。

3. 视差影响　当存在视差时，十字丝平面与水准尺影像不重合，若眼睛观察的位置不同，便读出不同的读数，因而也会产生读数误差。观测时应严格消除视差。

4. 水准尺倾斜影响　水准尺倾斜将尺上读数增大，如水准尺倾斜 3°30′，在水准尺上 1m 处读数时，将会产生 2mm 的误差 若读数大于 1m，误差将超过 2mm。采用带有圆水准器的水准尺，可提高立尺的竖直度。

(三)外界条件的影响

1. 仪器下沉　由于仪器下沉，使视线降低，从而引起高差误差。若采用‘后、前、前、后’观测程序，可减弱其影响。

2. 尺垫下沉　如果在转点发生尺垫下沉，使下一站后视读数增大，这将引起高差误差。采用往返观测的方法，取成果的中数，可以减弱其影响。

3. 地球曲率及大气折光影响　如式(3－27)所示，地球曲率及大气折光影响之和为

$$f = 0.43\frac{D^2}{R}$$

如果使前后视距离 D 相等，由上式计算的 f 值则相等，地球曲率和大气折光的影响将得到消除或大大减弱。

4. 温度影响　温度的变化不仅引起大气折光的变化，而且当烈日照射水准管时，由于水准管本身和管内液体温度的升高，气泡向着温度高的方向移动，从而影响仪器水平，产生气泡居中误差，观测时应注意撑伞遮阳。

二、视距测量与三角测量误差分析

三角高程测量的误差受视距测量和光电测距(EDM)的影响。本节主要讲述视距测量误差。

①视距测量的误差

视距测量的精度较低，在较好的条件下，测距精度为$\frac{1}{200}\sim\frac{1}{300}$。

1. 读数误差　用视距丝在视距尺上读数的误差，与尺子最小分画的宽度、水平距离的远近和望远镜放大倍率等因素有关，因此观测时应限制视线长度。

2. 垂直折光影响　视距尺不同部分的光线是通过不同密度的空气层到达望远镜的，越接近地面的光线受折光影响越显著。经验证明，当视线接近地面读数时，垂直折光引

起的误差较大，并且这种误差与距离的平方成比例地增加。观测时尽可能使视线离地面1m以上，并限制视线长度。

3. 视距尺倾斜所引起的误差　视距尺倾斜误差的影响与竖直角有关，如表5－19所示。表中δ为视距尺倾斜角，α为竖直角，m_D'为视距尺倾斜时所引起的距离误差。由表5－19看出，尺身倾斜对视距精度的影响很大。采用带圆水准器的水准尺，可提高立尺的竖直度。

表5－19　视距尺倾斜时所引起的距离误差

$\frac{m'_D}{D}$ / α	δ			
	30′	1°	2°	3°
5°	$\frac{1}{1310}$	$\frac{1}{655}$	$\frac{1}{327}$	$\frac{1}{218}$
10°	$\frac{1}{650}$	$\frac{1}{325}$	$\frac{1}{162}$	$\frac{1}{108}$
20°	$\frac{1}{315}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{50}$
30°	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{30}$

4. 视距乘常数K的误差　由视距测量公式(5－49)可知，视距乘常数K的误差将直接影响距离计算的精度。因此仪器使用前应严格测定视距乘常数，K值应在100 ± 0.1以内，否则应加以改正。

此外，视距尺分划的误差，竖直角观测的误差以及风力使尺抖动引起的误差等，都将影响视距测量的精度。

第四章　测量误差及测量数据初步处理

在测量过程中，往往会这样，对某量进行重复观测，观测量之间存在着差异，或由几个观测量构成的某一函数本应等于某一理论值，而实际与理论值不符。这些差异现象的产生，是因为观测结果中含有误差的缘故。

第一节　测量误差及测量精度

一、误差概念及误差来源

任何一个观测量，客观上是存在一个能真正代表其大小的数值，这一数值称为该观测量的真值，用 $\widetilde{L}$ 表示。每次观测获得的结果，称为观测值，用 L_i（$i=1,2,\cdots,n$）表示，则两者差数为 Δ_i 称为真误差：

$$\Delta_i = \widetilde{L} - L_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5-55}$$

测量工作中，产生误差的原因很多，主要有三方面：

1. 人的误差，人的感觉器官的限制，在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差；

2. 各种仪器具有一定限度的精密度，校正不尽正确，产生仪器误差；

3. 在观测过程中外界条件（如大气温度、湿度、风力、透明度、大气折光等）不断变化，对观测结果产生误差。

人、仪器和外界条件这三方面因素是引起误差的主要来源，合称为观测条件。任何

观测都是在一定观测条件下进行的,所以测量误差的产生是不可避免的。若观测条件较好,产生的误差就可能相对小些,观测成果的质量就会高一些;相反,观测成果质量就会低一些。在相同的观测条件下所进行的一组观测,得到成果质量相同,称为等精度观测;在不同的观测条件下进行的一组观测,称为不等精度观测。

二、误差分类及特性

(一)误差分类

根据观测误差性质,可将其分为系统误差和偶然误差两类。

1. 系统误差

在相同的观测条件下,对某量作一系列观测,如果出现的误差其符号和大小相同或按一定规律变化,这种误差称为系统误差。

系统误差对成果的影响具有规律性,可采取一定措施或采用改正公式消除或削弱其对观测成果的影响。主要方法有:

①在观测方法和程序上采取必要措施削弱其影响,如角度测量中,经纬仪盘左盘右观测,消除视准差、横轴误差和竖盘指标差等系统误差影响;水准测量中的前后视距相等,消除视准轴和水准管轴不平行引起的 i 角误差、地球曲率和大气折光对观测高差影响;

②找出产生系统误差的原因,利用公式对观测值进行改正,如用钢尺丈量距离时,应加尺长改正、温度改正、地球曲率改正,以消除该三项系统误差影响等。

2. 偶然误差

在相同的观测条件下,对某量作一系列观测,如果出现的误差其符号和大小均不一致,即从表面上看,没有什么规律性,这种误差称为偶然误差,偶然误差又称为随机误差。

偶然误差是由于人的感觉器官和仪器的性能受到一定的限制,以及观测时受到外界条件中气温、湿度、风力、明亮度、大气等的影响产生的。例如用刻至 1mm 的钢尺,只能估读到十分之一毫米,读数时可能偏大,也可能偏小,从而产生读数误差,其对成果的影响符号和大小不具有可预见性,对观测结果影响呈现出偶然性。

测量工作过程中,除了上述两种误差外,还可能发生错误,即粗差,粗差不是观测误差。粗差大多是由于作业员疏忽大意造成的,如大数被读错、记错等。为有效地发现粗差,必须采取必要的重复观测、多余观测、严格的检验、验算等措施,一经发现存在粗差,必须舍弃或进行重测,及时更正。

(二)偶然误差特性

偶然误差,从单个误差看,其大小和符号没有规律性,即呈现出一种偶然性(随机

性),但随着观测个数的增多,则呈现出一定的明显的统计规律性。下面通过事例来说明。

在某测区,在相同的条件下,独立地观测 358 个三角形的全部内角,由于观测值含有误差,各三角形 3 个内角观测值之和不等于其真值 180°。由式(5 – 55)知三角形内角和的真误差可由下式算出:

$$\Delta_i = 180° - (L_1 + L_2 + L_3) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{5-56}$$

式中,$(L_1 + L_2 + L_3)$表示各三角形内角观测值之和。

现取误差区间 $d\Delta = 2''$的间隔,将 Δi 按绝对值的大小排列。统计出在各区间内的正负误差个数,列成误差频率分布表,出现在某区间的误差的个数称为频数,用 k 表示,频数除以误差的总个数 n 得 k/n,称为误差在该区间的频率。为更直观,根据表的数据画出直方图。横坐标表示正负误差的大小,纵坐标表示各区间内误差出现的频率 $y = k/n$ 除以区间的间隔 $d\Delta$,统计结果如表 5 – 20,由该表看出,该组误差具有如下规律:小误差比大误差出现的机会多,绝对值相等的正、负误差出现的个数相近;最大的误差不超过一定的限值。通过大量的实践,可以总结出偶然误差具有如下四个统计特性:

表 5 – 20　误差频率分布表

误差区间 dΔ	−Δ			+Δ			备注
	k	k/n	$k/(n\cdot d\Delta)$	k	k/n	$k/(n\cdot d\Delta)$	
0″ ~ 2″	45	0.126	0.0630	46	0.128	0.0640	
2″ ~ 4″	40	0.112	0.0560	41	0.115	0.0575	
4″ ~ 6″	33	0.092	0.0460	33	0.092	0.0460	
6″ ~ 8″	23	0.064	0.0320	21	0.059	0.0295	
8″ ~ 10″	17	0.047	0.0280	16	0.045	0.0225	
10″ ~ 12″	13	0.036	0.0180	13	0.036	0.0180	$d\Delta = 2''$
12″ ~ 14″	6	0.017	0.0085	5	0.014	0.0070	
14″ ~ 16″	4	0.011	0.0055	2	0.006	0.0030	
16″以上	0	0	0	0	0	0	
∑	181	0.505		177	0.495		

1. 在一定的观测条件下,偶然误差的绝对值不超过一定的限值。

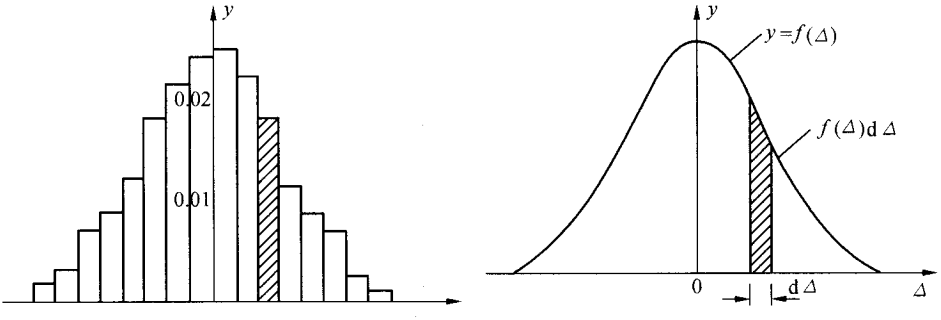
2. 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。

3. 绝对值相等的正、负误差出现的机会相等。

4. 随着观测次数无限地增加,偶然误差的算术平均值趋近于零。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0 \tag{5-57}$$

式中　n——观测次数，[　]表示求和。



(a) 直方图　　(b) 分布曲线

图 5－55　频率直方图

由偶然误差统计特性可知，当对某量有足够多的观测次数时，其正负误差可以相互抵消。因此，可采用多次观测，并取其算术平均值的方法，来减小偶然误差对观测结果的影响。

观测值偏离真值的程度，称为观测值的准确度。系统误差对观测值的准确度有较大的影响。故必需按照系统误差的性质和特点对观测成果进行处理。在一定观测条件下对应的一组误差分布，如果该组误差总的来说偏小些，如图 5－55 中 $f(x)$ 曲线峰值较高，误差分布就较集中，反之绝对值大的误差个数比例增多时，$f(x)$ 分布就较分散，所以误差分布的离散程度，反映了观测结果精度高低，其分布越集中，则观测结果的精度越高，反之越低。所以通常由偶然误差大小和分布状态，评定成果的精度。

(三)测量精度指标

精度是指对某个量进行的多次同精度观测中，其偶然误差分布的离散程度。为了衡量观测结果精度的高低，必须定义衡量精度的指标，常用的有中误差、平均误差、相对中误差和容许误差。

1．中误差

假设在相同的观测条件下，对某量进行多次等精度的独立观测，得到一组观测值 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，每个观测值的真误差为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta n$，方差 σ^2 的定义为：

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{5-58}$$

式中　n——观测次数，方差的平方根 σ 称为标准差。

$[\Delta\Delta]$——一组等精度观测误差 Δ_i 的平方和。

在实际工作中，观测次数 n 有限，取观测值真误差平方和的平均值，再开方定义为中误差，作为衡量该组观测值精度指标，即：

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{5-59}$$

式中　m——中误差，m 恒取正值；

n——观测值个数。

标准差 σ 要求 $n \to \infty$，中误差 m 是 n 有限时求得的标准差估值，当 $n \to \infty$，中误差 m 接近标准差 σ。中误差 m 值小，表明误差的分布较为密集，各观测值之间的差异也较小，这组观测的精度就高；反之，中误差 m 值较大，表明误差的分布较为离散，观测值之间的差异也大，这组观测的精度就低。

当观测量的真值未知时，计算多次等精度独立观测值 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的算术平均值 $\overline{L}$：

$$\overline{L} = \frac{L_1 + L_2 + \cdots + L_n}{n} = \frac{[L]}{n} \tag{5-60}$$

利用偶然误差 $n \to \infty$ 算术平均值趋近于零的特性，算术平均值 $\overline{L}$ 比任一观测值史接近于真值，该结论将在第三节中详细证明。我们把最接近于真值的近似值称为最或然值或称为最可靠值。令

$$v_i = \overline{L} - L_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5-61}$$

v_i 称观测值改正数，在第三节将证明其总和等于零。

此时，用观测值改正数计算中误差公式为：

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{5-62}$$

式中　n——观测次数；

v——改正数，即算术平均值 $\overline{L}$ 与各观测值 L_i 之差。

式(5-62)是用观测值的改正数即最或然误差计算观测值中误差最常用的实用公式，又称白塞尔公式。

2. 平均误差

在相同的观测条件下，得到一组独立的真误差 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 的绝对值的算术平均值的极限定义为平均误差：

$$\hat{\theta} = \lim_{n\to\infty} \frac{[|\Delta|]}{n} \tag{5-63}$$

式中　$|\Delta|$——真误差的绝对值；

n——观测数。

当观测数 n 有限时，计算 θ 的估值 $\hat{\theta}$，即

$$\hat{\theta} = \frac{[|\Delta|]}{n} \tag{5-64}$$

称为平均误差。平均误差的可靠性不如中误差，我国统一采用中误差作为衡量精度的指标。

3. 相对中误差

在衡量观测精度时，有时依据中误差并不能反映测量精度的优劣。例如，分别丈量了长度为 100m 和 50m 的两段距离，其中误差均为 ±0.02m，是否说明两段距离丈量的精度相同呢？显然不能，此时，必须引入相对中误差衡量精度。

相对中误差是中误差的绝对值与观测值的比值，为无量纲数。通常分子为 1，分母为整数的分数形式表示，即

$$K = \frac{|m|}{L} = \frac{1}{\frac{L}{|m|}} \tag{5-65}$$

式中　K——相对中误差或简称相对误差；

m——距离 L 的观测中误差。

上例中：

$$K_1 = \frac{|m_1|}{L_1} = \frac{1}{5000}；\qquad K_2 = \frac{|m_2|}{L_2} = \frac{1}{2500}$$

故第一段距离的相对误差较小，该距离精度较高。

4. 容许误差

偶然误差特性表明，在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值。根据误差理论和大量的实践证明：在等精度观测某量的一组误差中，大于两倍中误差的偶然误差出现的概率为 4.6%，大于三倍中误差的偶然误差出现的概率仅为 0.3%。因此，在实际工作中，为确保观测成果的质量，通常规定以观测值中误差的三倍为偶然误差的极限值，称为极限误差；若精度要求较高，也用两倍中误差作为极限误差，即：

$$|\Delta_{限}| = |2m| \sim |3m| \tag{5-66}$$

极限误差又被称为容许误差，若发现某观测值误差超过极限误差，则视为错误观测值，应舍去。

第二节　误差传播定律

一、倍函数、和(差)函数及一般函数

(一)倍函数

设函数

$$y = k \cdot x \tag{5-67}$$

其中 k 为常数，x 为观测值，Δ_x 为 x 的真误差，Δ_y 为 y 真误差，则

$$\Delta_y = k \cdot \Delta_x \tag{5-68}$$

由式(5-59)中误差定义得

$$m_y^2 = \frac{[\Delta_y^2]}{n} = \frac{[k^2 \cdot \Delta_x^2]}{n} = k^2 \cdot m_x^2 \tag{5-69}$$

$$m_y = k \cdot m_x$$

即观测值与常数乘积的中误差，等于观测值中误差乘以常数。

(二)和(或差)函数

设函数

$$y = x_1 \pm x_2 \tag{5-70}$$

$x_i(i = 1,2)$ 为观测值，且相互独立，Δ_{xi} 为 x_i 的真误差，Δ_y 为 y 的真误差，则

$$\Delta y = \Delta_{x_1} \pm \Delta_{x_2}$$

$$m_y^2 = \frac{[\Delta_y^2]}{n} = \frac{[\Delta_{x_1}^2]}{n} + \frac{[\Delta_{x_2}^2]}{n} \pm 2\frac{[\Delta_{x_1} \cdot \Delta_{x_2}]}{n} = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 \pm 2\frac{[\Delta_{x_1} \cdot \Delta_{x_2}]}{n}$$

由于 Δ_{x_1} 和 Δ_{x_2} 均为偶然误差，所以其乘积 $\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}$ 仍然是偶然误差，当 n 相当大时，由偶然误差特性有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta_{x_1} \cdot \Delta_{x_2}]}{n} = 0$$

所以

$$m_y^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 \tag{5-71}$$

推广至一般形式，当

$$y = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n \tag{5-72}$$

则
$$m_y^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \cdots + m_{x_n}^2 \tag{5-73}$$

(三)线性函数

先讨论如下线性函数：

$$y = k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \tag{5-74}$$

其中 $k_i(i=1,2)$为常数，x_i 为观测值，Δ_{x_i} 为 x_i 的真误差，Δ_y 为 y 的真误差，则

$$\Delta_y = k_1 \Delta_{x_1} \pm k_2 \Delta_{x_2}$$

$$m_y^2 = \frac{[\Delta_y^2]}{n} = k_1^2 \cdot \frac{[\Delta_{x_1}^2]}{n} + k_2^2 \cdot \frac{[\Delta_{x_2}^2]}{n} \pm 2k_1 \cdot k_2 \cdot \frac{[\Delta_{x_1} \cdot \Delta_{x_2}]}{n}$$

由以上讨论知，因 Δ_{x_1} Δ_{x_2} 误差独立，当 n 趋于无穷大时上式最后一项为零，所以

$$m_y^2 = k_1^2 \cdot m_{x_1}^2 + k_2^2 \cdot m_{x_2}^2 \tag{5-75}$$

推广至一般形式，当

$$y = k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \cdots \pm k_n x_n \tag{5-76}$$

时，
$$m_y^2 = k_1^2 m_{x_1}^2 + k_2^2 m_{x_2}^2 + \cdots + k_n^2 m_{x_n}^2 \tag{5-77}$$

(四)一般函数

设一般函数

$$y = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{5-78}$$

式中，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为直接观测值，观测值之间相互独立，而它们相应的中误差为 m_1，$m_2, \cdots, m_n$，欲求观测值函数 y 的中误差 m_y。

求式(5-78)的全微分，得：

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\mathrm{d}x_n \tag{5-79a}$$

式中，$\frac{\partial F}{\partial x_i}$为函数 y 对各自变量的偏导数。令 $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$，则上式表示为：

$$\mathrm{d}y = f_1 \cdot \mathrm{d}x_1 + f_2 \cdot \mathrm{d}x_2 + \cdots + f_n \cdot \mathrm{d}x_n \tag{5-79b}$$

令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的真误差分别为 $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \cdots, \Delta_{x_n}$，则这些真误差所引起的函数 y 的真误差为 Δ_y，因为误差值均为微小量，可用 Δ_{x_i} 和 Δ_y 来代替 $\mathrm{d}x_i$ 和 $\mathrm{d}y$ 即得到：

$$\Delta_y = f_1 \cdot \Delta_{x_1} + f_2 \cdot \Delta_{x_2} + \cdots + f_n \cdot \Delta_{x_n} \tag{5-80}$$

当式(5-78)的函数关系确定时，则各偏导数 $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$均为常数。若对各观测值 x_i 分别观测 k 次，则由式(5-80)可算得 K 个 Δ_y，依中误差定义公式，可推得函数 y 的中误

差为：

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2 \qquad (5-81a)$$

或

$$m_y^2 = f_1^2 \cdot m_1^2 + f_2^2 \cdot m_2^2 + \cdots + f_n^2 \cdot m_n^2 \qquad (5-81b)$$

上式即为误差传播定律的一般公式。前面讨论的倍数函数、和差函数及线性函数是该函数的一种特例。

二、应用举例

例 5-1　在 1∶500 地形图上，量得 A、B 两点的图上距离为 $s = 64.6\text{mm} \pm 0.2\text{mm}$，求 A、B 网点实地距离及中误差。

解：设 M 为地形图比例尺分母，A、B 两点实地距离及中误差为：

$$S = M \times s = 500 \times 64.6\text{mm} = 32.3\text{m}$$

$$m_S = M \cdot m_s = 500 \times 0.2\text{mm} = 0.10\text{m}$$

例 5-2　设在 A、B 两点间进行水准测量，共测设了 n 个站，则 A、B 间高差为：

$$h_{AB} = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$$

设每一测站的高差中误差为 $m_{站}$，各测站的观测条件基本相同，即

$$m_{h_1} = m_{h_2} = \cdots = m_{h_n} = m_{站}$$

设 $m_{站} = 3.0\text{mm}$，求水准路线的高差中误差及容许误差。

解：由线性函数公式，得水准路线总高差的中误差为：

$$m_h = m_{站}\sqrt{n}$$

将 $m_{站} = 3.0\text{mm}$ 代入，得

$$m_h = \pm 3.0\sqrt{n}\,\text{mm}$$

取容许误差为中误差的两倍，则有

$$f_{h容} = 2m_h = \pm 6.0\sqrt{n}\,\text{mm}$$

例 5-3　设在△ABC 中，直接观测了内角 A 和 B，中误差分别为 $m_A = 5''$，$m_B = 10''$，求角度 C 计算值的中误差 m_C。

解：函数关系式为 $C = 180° - A - B$，则

$$m_C = \sqrt{m_A^2 + m_B^2} = \pm\sqrt{(5'')^2 + (10'')^2} = 11.2''$$

例 5-4　如图 5-56，已知测量 AB 间的倾斜距离为 $L = 200 \pm 0.05\text{m}$，倾角为 $\alpha = 15° \pm 20''$，A 点高程为 $H_A = 150\text{m}$，求 B 点高程 H_B 及其中误差 m_{H_B}。

解 函数关系式为：

$$H_B = H_A + h_{AB} = H_A + L.\sin\alpha$$

$$= 150 + 200 \times \sin 15° = 201.764\text{m}$$

斜距 L 和倾角 α 包含有误差，而已知点 A 的高程可认为不含有误差，故对函数式取微分得：

$$\mathrm{d}H_B = \sin\alpha \mathrm{d}L + L\cos\alpha \frac{\mathrm{d}\alpha}{\rho}$$

则中误差为：

$$m_{H_B}^2 = \sin^2\alpha m_L^2 + (L\cos\alpha)^2 \cdot \left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2$$

$$= (\sin 15°)^2 \times (0.05)^2 + (200 \times \cos 15°)^2 \times \left(\frac{20''}{206265''}\right)^2 = 5.1835 \times 10^{-4}$$

则　　$m_{H_B} = 0.023\text{m}$

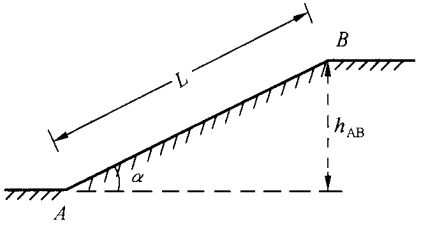


图 5－56

例 5－5　如图 5－57，A 点坐标已知，x_A，y_A 为无误差，测量直线 AB 长度及精度为 $D = 166.025 \pm 0.003\text{m}$，方位角及精度 $\alpha = 121°35'00'' \pm 5''$，求直线端点 B 的点位误差。

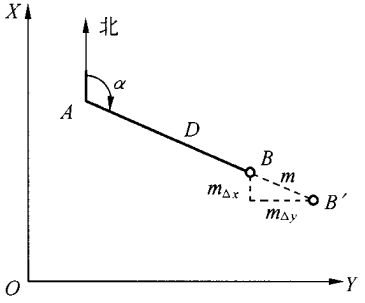


图 5－57

解：B 点坐标函数式为：

$$\begin{cases} x_B = x_A + \Delta x_{AB} = x_A + D\cos\alpha \\ y_B = y_A + \Delta y_{AB} = y_A + D\sin\alpha \end{cases}$$

已知 x_A，y_A 无误差，设 m_{xB}，m_{yB}，m_D，m_α 分别为 x_B，y_B，D，α 的中误差。将上式求偏导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(x_B)}{\partial D} = \cos\alpha; & \dfrac{\partial(x_B)}{\partial \alpha} = -D\sin\alpha \\ \dfrac{\partial(y_B)}{\partial D} = \sin\alpha; & \dfrac{\partial(y_B)}{\partial \alpha} = D\cos\alpha \end{cases}$$

则纵横坐标中误差为：

$$\begin{cases} m_{x_B}^2 = \cos^2\alpha m_D^2 + (-D\sin\alpha)^2\left(\dfrac{m_\alpha}{\rho''}\right)^2 \\ m_{y_B}^2 = \sin^2\alpha m_D^2 + (D\cos\alpha)^2\left(\dfrac{m_\alpha}{\rho''}\right)^2 \end{cases}$$

B 点点位中误差 m 可由下式计算：

$$m^2 = m_{x_B}^2 + m_{y_B}^2 = m_D^2 + \left(D\frac{m_\alpha}{\rho''}\right)^2$$

故

$$m = \pm\sqrt{m_D^2 + \left(D\frac{m_\alpha}{\rho''}\right)^2}$$

将 $m_D = 3\text{mm}$，$m_\alpha = 5''$，$\rho'' = 206265''$，$D = 166.025\,m$，代入上式得

$$m = \sqrt{3^2 + \left(166.025 \times 1000 \times \frac{5''}{206265''}\right)^2}$$

$$\approx 5\text{mm}$$

第三节　算术平均值与加权平均值

一、算术平均值及中误差

(一)算术平均值

当观测值的真值未知时，通常取多次观测值的算术平均值作为最后结果，并认为它是最可靠的，用来代替真值。算术平均值比组内任一观测值更为接近于真值，证明如下：

设对某量进行一组等精度观测，观测值分别为 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，未知量的真值为 $\widetilde{L}$，观测值的真误差分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，则

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \widetilde{L} - L_1 \\ \Delta_2 &= \widetilde{L} - L_2 \\ &\cdots \\ \Delta_n &= \widetilde{L} - L_n \end{aligned}\right\} \tag{5-82}$$

将上式取和再除以 n，得

$$\frac{[\Delta]}{n} = \widetilde{L} - \frac{[L]}{n} = \widetilde{L} - \overline{L} \tag{5-83}$$

式中　$\overline{L}$——观测值的算术平均值，显然

$$\overline{L} = \frac{[L]}{n} = \widetilde{L} - \frac{[\Delta]}{n} \tag{5-84}$$

根据偶然误差的第四个特性，有

$$\lim_{n\to\infty} \overline{L} = \widetilde{L} - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{[\Delta]}{n}\right) = \widetilde{L} \tag{5-85}$$

观测次数 n 无限增大时，算术平均值 $\overline{L}$ 趋近于未知数的真值 $\widetilde{L}$；当 n 为有限时，算术平均值最接近于真值，称其为最或然值，或称最可靠值。

(二)算术平均值中误差

观测值的最或然值与观测值之差，称为观测值改正数。当等精度观测时，算术平均值 $\overline{L}$ 与观测值 L 之差，即为改正数 V。即

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \overline{L} - L_1 \\ V_2 &= \overline{L} - L_2 \\ &\cdots \\ V_n &= \overline{L} - L_n \end{aligned}\right\} \tag{5-86}$$

求和则有

$$[V] = n\overline{L} - [L]$$

由式 $\overline{L} = \frac{[L]}{n}$ 代入可知：

$$[V] = 0 \tag{5-87}$$

式(5-87)说明观测值改正数的一个重要特征：在等精度观测条件下，观测值改正数的总和为零。

在实际测量工作中，观测值的真值 $\widetilde{L}$ 是未知的，在等精度观测中，往往只知道算术平

均值 $\overline{L}$ 和观测值改正数 V，这就不能用式(5－59)来计算观测值的中误差。而用观测值的改正数 V 代替真误差，推导出计算观测值的中误差公式

$$m = \sqrt{\frac{[VV]}{n-1}} \tag{5-88}$$

上式称白塞尔公式。现根据观测值的中误差，计算算术平均值中误差 M。

由算术平均值计算公式 $\overline{L} = \frac{L_1 + L_2 + \cdots + L_n}{n}$，利用误差传播定律得

$$M^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + \cdots + \frac{1}{n^2} m_n^2 \tag{5-89}$$

由于是等精度观测，则有

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m \tag{5-90}$$

可得

$$M^2 = \frac{m^2}{n} \quad \text{即} \quad M = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{5-91}$$

将式(6－62)代入得：

$$M = \sqrt{\frac{[VV]}{n(n-1)}} \tag{5-92}$$

式(5－91)表明，算术平均值的中误差为观测值中误差的$\frac{1}{\sqrt{n}}$，M 恒小于 m，所以在实际工作中，可以用算术平均值作为观测结果，增加观测次数，可提高观测精度。

例 5－6　设用经纬仪测量某角度 6 个测回，观测值见表 5－21，求观测值的中误差 m、算术平均值 $\overline{L}$ 及其中误差 M。

表 5－21

观测次序	观测值 L_i ° ′ ″	改正数 V_i ″	VV	计　　算
1	55　42　49	－4	16	$\overline{L} = \frac{[L]}{n} = \frac{334°16'30''}{6} = 55°42'45''$ $m = \sqrt{\frac{[VV]}{n-1}} = \sqrt{\frac{60}{6-1}} = 3.5''$
2	55　42　40	5	25	
3	55　42　42	＋3	9	
4	55　42　46	－1	1	
5	55　42　48	－3	9	
6	55　42　45	0	0	
∑		[V] = 0	$[VV] = 60$	

利用白塞尔公式计算观测值的中误差 m，利用式(5－92)计算算术平均值的中误差

M，即

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{[VV]}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{60}{6\times(6-1)}}=1.4''$$

最后结果及其精度为：

$$L=55°42'45''\pm1.4''$$

二、加权平均值及其中误差

在测量实践中，除了同精度观测外，还有不等精度观测。不等精度观测是在不同的观测条件下进行的，在这种情况下，由于观测条件不同，求观测值的最或然值就不能简单地用算术平均值来求解，而是采用加权平均值方法求解。

（一）权和单位权

所谓“权”，就是不同精度观测值在计算未知量的最或然值时所占的“比重”。一般观测值误差愈小，精度愈高，说明其值愈可靠，权就愈大，因此，可定义观测值或观测值函数的权（通常以 P 表示）与中误差 m 的平方成反比。设不等精度观测值 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 的中误差分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，则 L_i 权的可定义为：

$$P_i=\frac{C}{m_i^2}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5-93}$$

式中　C——任意正实数。

若令第一次观测值的权作为标准，并令其为 1，即取 $C=m_1^2$，则

$$P_1=\frac{m_1^2}{m_1^2}=1,\quad P_2=\frac{m_1^2}{m_2^2},\quad\cdots,\quad P_n=\frac{m_1^2}{m_{2n}}\tag{5-94}$$

等于 1 的权称为单位权，权等于 1 的观测值中误差称为单位权中误差。一般用 μ 表示，习惯上取一次观测、一个测回、一公里线路等的测量误差为单位权中误差。这样式（5-94）的另一表示方式为：

$$P_i=\frac{\mu^2}{m_i^2}\tag{5-95}$$

由上式得到观测值或观测值函数的中误差的另一种表示方式为

$$m_i=\mu\sqrt{\frac{1}{P_i}}\tag{5-96}$$

由式（5-93）和式（5-94）可知，权具有如下性质：

1. 权与中误差同为衡量观测精度的指标，中误差表示观测值的绝对精度；权是一个相对性数值，表示观测值之间的相对精度关系，对单一观测值而言，权无意义；

2. 权与中误差平方成反比，中误差越小，权越大，表示观测值精度越高；

3. 仅始终取正号；

4. 权的大小随常数 C 选值的不同而不同，但观测值间权的比例关系不变，同一个研究问题只能选取一个 C。

（二）测量中常用的定权方法

1. 算术平均值的权

由式（5－91）和式（5－95）知，n 个等精度观测值算术平均值的中误差 $M = m/\sqrt{n}$，当 $\mu = m$ 时有：

$$P_{\bar{L}} = \frac{\mu^2}{M^2} = \frac{m^2}{m^2/n} = n \tag{5-97}$$

即当取一次观测值权为 1 时，n 个观测值算术平均值的权为 n。

2. 水准测量定权

设一站观测高差精度相同，其中误差为 $m_{站}$，则站数为 N_i 的某条水准路线的观测高差中误差为

$$m_i = m\sqrt{N_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

若取 C 站的高差中误差为单位权中误差，即 $\mu = m\sqrt{C}$，依式（5－95），某水准路线的权为

$$P_i = \frac{C}{N_i} \tag{5-98}$$

同理，若取 Ckm 路线高差中误差为单位权中误差，则长度为 L_i 的某水准路线的权为

$$P_i = \frac{C}{L_i} \tag{5-99}$$

因此，在水准测量中，若每一站高差观测精度相同，则各水准路线观测高差的权与路线测站数或路线长度成反比。

3. 距离测量定权

设 1km 距离的测量中误差为 m，则 S km 距离的测量中误差为 $m_s = m\sqrt{S}$，若取 C km 的中误差为单位权中误差，则测量 S km 的权为

$$P_s = \frac{(m\sqrt{C})^2}{(m\sqrt{S})^2} = \frac{C}{S} \tag{5-100}$$

因此，在距离测量中距离观测值的权与距离长度成反比。

4. 角度观测定权

与算术平均值的权同理，当令一测回观测的角度中误差为单位权中误差时，观测 n 个测回的角度观测值的权为 n。同理，不同测回数的角度观测值，其权之比为测回数之比。

（三）加权平均值及其中误差

若对某一量进行 n 次不等精度观测，现采用加权平均的方法，求解观测值的最或然值。设观测值为 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，中误差为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，权为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$。

设 $P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$，其加权平均值为

$$x = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 + \cdots + P_n L_n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n} = \frac{[PL]}{[P]} \tag{5-101}$$

由误差传播定律有

$$m_x^2 = \left(\frac{P_1}{[P]}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{P_2}{[P]}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{P_n}{[P]}\right)^2 m_n^2$$

$$= \frac{1}{[P]^2}(P_1^2 m_1^2 + P_2^2 m_2^2 + \cdots + P_n^2 m_n^2) \tag{5-102}$$

又因 $m_i^2 = \frac{\mu^2}{P_i}$，代入上式，化简得

$$m_x^2 = \frac{\mu^2}{[P]}$$

又因 $m_x^2 = \frac{\mu^2}{P_x}$，则

$$P_x = [P]$$

所以加权平均值的权等于各观测值的权之和。

加权平均值中误差为：

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} \tag{5-103}$$

同样，由式（5－101）知，不等精度观测值的改正值还满足下列条件：

$$[Pv] = [P(x - L)] = [P]x - [PL] = 0 \tag{5-104}$$

当观测值真值未知，按不等精度观测值改正数计算单位权中误差 μ，可类似地用观测值改正数求观测值中误差公式求取：

$$\mu = \sqrt{\frac{[PVV]}{n-1}} \tag{5-105}$$

式中　V——观测值改正数。

计算出单位权中误差 μ 后，如果某一观测值的权已知，可由式（5－96）计算该观测值

或观测值函数中误差。

例 5－7　对某一角度，用同样仪器，分别进行了三组观测：第一组 2 个测回，第二组 4 个测回，第三组 6 个测回，得到各组角度观测值平均值分别为：60°12′13″，60°12′15″和 60°12′17″。设以 2 测回观测值平均值的中误差为单位权中误差，求第三组观测 6 个测回中误差、由 3 组观测值求该角最或然值及其中误差。

解：设观测一测回中误差为 m，由式(5－91)，则以上第一、二、三组观测值平均值中误差分别为 $m_1=\frac{m}{\sqrt{2}}$，$m_2=\frac{m}{\sqrt{4}}$，$m_3=\frac{m}{\sqrt{6}}$，设以第一组 2 测回平均值观测值中误差为单位权中误差，则以上三组观测值平均值权分别为：

$$P_1=1,\quad P_2=\frac{m_1^2}{m_2^2}=2,\quad P_3=\frac{m_1^2}{m_3^2}=3$$

由式(5－101)，利用 3 组观测值平均值及权得到某角加权平均值(最或然值)为

$$x=\frac{[PL]}{[P]}=60°12'15.7''$$

第一组 2 测回平均值观测值中误差，即单位权中误差为：

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[PVV]}{n-1}}=\sqrt{\frac{1\times2.7''\times2.7''+2\times0.7''\times0.7''+3\times1.3''\times1.3''}{3-1}}$$

$$=2.6''$$

由式(5－96)，第三组观测 6 个测回平均值中误差为：

$$m_2=\mu\sqrt{\frac{1}{P_2}}=2.6''\sqrt{\frac{1}{3}}=1.5''$$

加权平均值即最或然值中误差为：

$$m_x=\frac{\mu}{\sqrt{[P]}}=\frac{2.6''}{\sqrt{6}}=1.1''$$

最或然值结果为

$$x=60°12'15.7''\pm1.1''$$